Lista wzorów z RPiSu

Marcin Grzywaczewski

16 kwietnia 2014

1 Podstawy

1.1 Zmienna losowa

Zmienną losową X nazywamy wynik pewnego losowania. Niemniej jednak na kursie zmienną losową utożsamiamy z jej *gęstością*.

1.2 Gęstość zmiennej losowej dyskretnej

Gęstością zmiennej losowej dyskretnej nazywamy zbiór par $\{(x_i, p_i) \mid i \in \{1, 2, \ldots n\}\}$ taki, że $\left(\sum_{i \in \{1,2,\ldots n\}} p_i\right) = 1$. Co więcej, dla dowolnego i mamy $p_i \geqslant 0$.

Liczby x_i nazywamy *wartościami* zdarzeń, zaś p_i — *prawdopodobieństwem (gęstością)* tych zdarzeń.

1.3 Gęstość zmiennej losowej ciągłej

Gęstością zmiennej losowej ciągłej nazywamy funkcję $\mathrm{f} : W \to (0, 1)$, gdzie W — zbiór wartości (zazwyczaj podzbiór R). Dla dowolnej gęstości zachodzi $\int_W \mathrm{f}(x)\mathrm{d}x$. Co więcej, dla każdego x zachodzi $\mathrm{f}(x) \geqslant 0$.

1.4 Operacje arytmetyczne na gęstościach zmiennych losowych dyskretnych

Operacje typu X^2, $\sqrt(X)$ i tak dalej dotyczą wartości zdarzeń, nie prawdopodobieństw. Operacje te nie zostały zdefiniowane na wykładzie, stąd też zamieszanie.

1.5 Wartość oczekiwana

Wartością oczekiwaną $\mathrm{E}\left(X\right)$ zmiennej losowej X nazywamy funkcję zdefiniowaną następująco:

Dla zmiennej losowej dyskretnej:

$$\sum_{i=0}^{n} x_i p_i \tag{1}$$

Dla zmiennej losowej ciągłej:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x\mathrm{f}(x)\mathrm{d}x \tag{2}$$

Nazywana jest też wartością średnią, lub też nadzieją matematyczną. Czasami zapisujemy tą funkcję bez nawiasów — np. $\mathrm{E}X$.

1.6 Wariancja

Wariancją $\mathrm{V}\left(X\right)$ zmiennej losowej X nazywamy funkcję zdefiniowaną następująco:

$$\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}\left(\left(X - \mathrm{E}X\right)^2\right) \tag{3}$$

Zazwyczaj korzystamy z innego wzoru do obliczenia tej wartości. Wartość $\sqrt{\mathrm{V}(X)}$ nazywamy odchyleniem standardowym zmiennej losowej X.

1.7 Dystrybuanta

Dystrybuanta $\mathrm{F}\left(t\right)$ zmiennej losowej X to funkcja określająca dla danego prawdopodobieństwo wylosowania wartości mniejszej od t. Zapisujemy ją często jako $P\left(X \leqslant t\right)$.

Definicja dla zmiennej losowej ciągłej:

$$\mathrm{F}\left(t\right) = \int_{-\infty}^{t} \mathrm{f}\left(x\right)\mathrm{d}x \tag{4}$$

Definicja dla zmiennej losowej dyskretnej:

$$\mathrm{F}\left(t\right) = \sum_{(x_i, p_i) \in L} p_i \tag{5}$$

Gdzie L — zbiór takich (x_i, p_i), że $x_i \leqslant t$.

1.8 Niezależność zmiennych losowych

Dwie zmienne losowe X, Y są niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi:

$$(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i) \cdot P(Y = y_j) \tag{6}$$

1.9 Intuicja stojąca za dystrybuantą

Zauważmy, że dowolna zmienna losowa X jest definiowana przez jej gęstość. Aby wyznaczyć gęstość, należy znać wartości i prawdopodobieństwa tej zmiennej losowej. Jeżeli jednak znamy wartość dystrybuanty w każdym punkcie t, jesteśmy w stanie odtworzyć z tej informacji gęstość, licząc F', czyli pochodną dystrybuanty.

1.10 Moment zwykły

Momentem zwykłym k-tego rzędu nazywamy taką wartość m_k, że:

$$m_k = \mathrm{E}\left(X^k\right) \tag{7}$$

W szczególności $\mathrm{E}(X) = m_1$.

1.11 Moment centralny

Momentem centralnym k-tego rzędu nazywamy taką wartość μ_k, że:

$$\mu_k = \mathrm{E}\left((X - \mathrm{E}(X))^k\right) \tag{8}$$

W szczególności $\mu_2 = \mathrm{V}(X)$.

1.12 Alternatywny sposób (lepszy) na obliczanie wariancji:

Zazwyczaj wariancję oblicza się z innego niż ten podany na wykładzie. Można go było udowodnić na jednej z list. Niemniej jednak, warto pamiętać:

$$\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}X^2 - (\mathrm{E}X)^2 \tag{9}$$

1.13 Wzór z Jakobianem

Słynny wzór z Jakobianem rzeczywiście pomaga trzaskać zadanka. Definiujemy go następująco:

Niech X to dana zmienna losowa powiązana z gęstością f_X i niech Y — zmienna losowa powstała poprzez przekształcenie X powiązana z gęstością f_Y. Niech $P_Y(x)$ to dane przekształcenie x takie, że $P_Y(x) = y$. Jeżeli P_Y jest odwracalne, tj. istnieje takie P_X, że $P_X(P_Y(x)) = x$, to możemy wyrazić gęstość f_Y następująco:

$$\mathrm{f}_Y(Y) = \mathrm{f}_X(P_X(y))\,|J| \tag{10}$$

Gdzie $|J|$ — wyznacznik macierzy pochodnych częściowych, czyli Jakobian. Przy czym w tak prostym przypadku (jednowymiarowym) po prostu bierzemy wartość pochodnej P_X. *PS. Nie jestem tego pewien i proszę o weryfikację!*

2 Zmienne losowe dwuwymiarowe

Poniższe definicje zakładają istnienie dwóch zmiennych losowych (X, Y), które wykorzystujemy. Istnieje także funkcja f będąca gęstością tych dwóch zmiennych losowych. Pomijam definicje dla zmiennych losowych dyskretnych, gdyż wystarczy zamienić całki na sumę i wszystko dalej działa.

2.1 Rozkłady brzegowe

Dla każdego (X, Y) istnieją dwie funkcje $\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2$ które są *rozkładami brzegowymi* tych zmiennych i są zdefiniowane następująco:

$$\mathrm{f}_1(x) = \int_R \mathrm{f}(x, y)\,\mathrm{d}y \tag{11}$$

$$\mathrm{f}_2(y) = \int_R \mathrm{f}(x, y)\,\mathrm{d}x \tag{12}$$

Intuicja jest taka, że jest to zsumowanie rzędów lub kolumn w naszej tabelce gęstości zmiennych losowych.

2.2 Niezależność zmiennych losowych w kontekście rozkładów brzegowych

Za pomocą pojęcia rozkładów brzegowych możemy wyrazić niezależność zmiennych losowych. Wystarczy, że pomiędzy naszą funkcją gęstości f, a rozkładami brzegowymi $\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2$ zachodzi następująca równość:

$$\mathrm{f}(x, y) = \mathrm{f}_1(y)\,\mathrm{f}_2(x) \tag{13}$$

2.3 Rozkłady warunkowe

Oprócz rozkładów brzegowych dla pary zmiennych losowych zdefiniowane są także rozkłady warunkowe, zdefiniowane następująco:

$$\mathrm{f}(x \mid y) = \frac{\mathrm{f}(x, y)}{\mathrm{f}_2(y)} \tag{14}$$

$$\mathrm{f}(y \mid x) = \frac{\mathrm{f}(x, y)}{\mathrm{f}_1(x)} \tag{15}$$

Warto zauważyć, że są to pełnoprawne jednowymiarowe gęstości.

2.4 Dystrybuanta dwuwymiarowej zmiennej losowej

Dla par zmiennych losowych można następująco zdefiniować ich dystrybuantę:

$$\mathrm{F}(s, t) = \int_{-\infty}^{s} \int_{-\infty}^{t} \mathrm{f}(x, y)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x \tag{16}$$

2.5 Właściwości dwuwymiarowej zmiennej losowej

Funkcje charakteryzujące dwuwymiarowe zmienne losowe mają kilka ciekawych z punktu widzenia zadań własności:

$$\mathrm{E}(X + Y) = \mathrm{E}X + \mathrm{E}Y \tag{17}$$

Jeżeli zmienne losowe są niezależne, to:

$$\mathrm{E}(XY) = \mathrm{E}X\mathrm{E}Y \tag{18}$$

Mamy także:

$$\mathrm{V}(X + Y) = \mathrm{V}(X) + \mathrm{V}(Y) + 2\mathrm{Cov}(X, Y) \tag{19}$$

Gdzie $\mathrm{Cov}(X, Y)$ to *kowariancja* zmiennych losowych. Definiujemy ją jako:

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathrm{E}((X - \mathrm{E}X)(Y - \mathrm{E}Y)) \tag{20}$$

Jeżeli zmienne są niezależne, to $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$.

2.6 Momenty mieszane

Moment mieszany $k+l$-tego rzędu zdefiniowany jest następująco:

$$\mu_{k,l} = \mathrm{E}\left((X-\mathrm{E}X)^k (Y-\mathrm{E}Y)^l\right) \tag{21}$$

W szczególności $\mu_{1,1} = \mathrm{Cov}\,(X,Y)$.

3 Rozkład normalny

3.1 Standardowy rozkład normalny

Oznaczamy $X \sim \mathrm{N}\,(0,1)$:

$$\mathrm{f}\,(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, x \in R \tag{22}$$

3.2 Rozkład normalny

Oznaczamy $X \sim \mathrm{N}\,(\mu,\sigma^2)$ (μ — wartość oczekiwana, σ^2 — wariancja):

$$\mathrm{f}\,(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2}}, x \in R \tag{23}$$

Często e^X zapisujemy jako $\exp\,(X)$. Stąd też rozkład normalny czasem zapisuje się jako:

$$\mathrm{f}\,(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2}\right), x \in R \tag{24}$$

3.3 Całka Poissona

Nie będę przytaczał wyprowadzenia (trik z zamienieniem układu współrzędnych na biegunowe), niemniej jednak warto wiedzieć, że:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \mathrm{d}x = \sqrt{2\pi} \tag{25}$$

4 Rozkład jednostajny

4.1 Definicja

Oznaczamy $X \sim \mathrm{U}\,(a,b)$:

$$\mathrm{f}\,(x) = \frac{x}{b-a}, a \leqslant x \leqslant b \tag{26}$$

Lub, jeżeli x leży w innym przedziale:

$$\mathrm{f}(x) = 0 \tag{27}$$

5 Rozkład wykładniczy

5.1 Definicja

Oznaczamy $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$, przy czym $\lambda \geqslant 0$:

$$\mathrm{f}(x) = \lambda e^{-\lambda x} \tag{28}$$

6 Rozkład Gamma

6.1 Funkcja Gamma Eulera

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p-1} e^{-x} \mathrm{d}x \tag{29}$$

$$p \in N \implies \Gamma(p) = (p-1)! \tag{30}$$

Funkcja ta jest uogólnieniem silni na liczby rzeczywiste.
Tak przy okazji:

$$2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n) = (2n)!! \tag{31}$$

$$1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n+1) = (2n+1)!! \tag{32}$$

6.2 Definicja rozkładu

Oznaczamy $X \sim \mathrm{Gamma}(b, p)$:

$$\mathrm{f}(x) = \frac{b^p}{\Gamma(p)} x^{p-1} e^{-bx}, x \in (0, \infty) \tag{33}$$