第四次作业 报告

1400012141
邵智轩
2017年12月

1 利用标准的4 阶Runge-Kutta 来求解简单的常微分方程的初值问题

这一部分代码提交在文件“Lotka_Volterra.py”中。

1.1 说明只有参数γ/α是唯一的剩余的参数

重定义x, y, t，令$\left\{\begin{array}{c} x' = \frac{\delta}{\gamma}x \\ y' = \frac{\beta}{\alpha}y \\ t' = \alpha t \end{array}\right.$，则原方程变为$\left\{\begin{array}{c} \frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'} = x'(1-y') \\ \frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t'} = \frac{\gamma}{\alpha}y'(x'-1) \end{array}\right.$

1.2 方程的不动点及其稳定性分析

为求不动点，令方程左边的微分为零，即$\left\{\begin{array}{c} x(\alpha-\beta y)=0 \\ y(\delta x-\gamma)=0 \end{array}\right.$，容易直接看出两个不动点：$\{x=0, y=0\}$和$\{x=\frac{\gamma}{\delta}, y=\frac{\alpha}{\beta}\}$。下面用小量展开的方法来分析其稳定性。

对固定点$\{x=0, y=0\}$，设某一时刻，$\left\{\begin{array}{c} x=\Delta x \\ y=\Delta y \end{array}\right.$，则该时刻的瞬时演化方程（舍去高阶小量）：

$$\left\{\begin{array}{c} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \alpha\Delta x \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -\gamma\Delta y \end{array}\right.$$

或者

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\begin{array}{c} x \\ y \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc} \alpha & 0 \\ 0 & -\gamma \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} \Delta x \\ \Delta y \end{array}\right)$$

等式右边即为稳定点附近的Jacobian矩阵。如果它的本征值实部都小于0，则该点是稳定的；若有实部大于0的本征值，则该点是不稳定的（沿该方向的扰动会被持续放大）；若本征值都为虚数，则在固定点附近做周期性振动。

现在本征向量$(1,0)^T$对应本征值$\alpha > 0$，即$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$与$\Delta x$是同号的，也就是说$(1,0)^T$方向上一个微小的扰动会被无限放大（指数增长）；而$y$方向是稳定的。故$\{x=0, y=0\}$是一个鞍点（不稳定）。

对固定点$\{x=\frac{\gamma}{\delta}, y=\frac{\alpha}{\beta}\}$，设某一时刻，$\left\{\begin{array}{c} x=\frac{\gamma}{\delta}+\Delta x \\ y=\frac{\alpha}{\beta}+\Delta y \end{array}\right.$，则该时刻的瞬时演化方程（舍去高阶小量）：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\begin{array}{c} x \\ y \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc} 0 & -\frac{\beta\gamma}{\delta} \\ \frac{\alpha\delta}{\beta} & 0 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} \Delta x \\ \Delta y \end{array}\right)$$

这时Jacobian矩阵对应一对虚的（共轭）本征值$-i\sqrt{\alpha\gamma}$和$i\sqrt{\alpha\gamma}$。非常类似于经典力学中的谐振子问题，可以给出x和y的解：

$$\begin{cases} x(t)-\frac{\gamma}{\delta}=\Delta x(t)=\Delta x(0)\cos(\omega t)-\frac{\beta\sqrt{\gamma}}{\delta\sqrt{\alpha}}\Delta y(0)\sin(\omega t) \\ y(t)-\frac{\alpha}{\beta}=\Delta y(t)=\Delta y(0)\cos(\omega t)+\frac{\delta\sqrt{\alpha}}{\beta\sqrt{\gamma}}\Delta x(0)\sin(\omega t) \end{cases},\omega=\sqrt{\alpha\gamma}$$

这说明若在固定点$\{x=\frac{\gamma}{\delta},y=\frac{\alpha}{\beta}\}$给一个微小的扰动，系统将绕着固定点在一闭合轨道上做（近似于椭圆的）周期运动，角频率为$\sqrt{\alpha\gamma}$。

1.3 x和y的微分方程及系统守恒量

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{y}{x}\frac{\delta x-y}{\beta y-\alpha}$$

$$\mathrm{d}(\ln y)(\alpha-\beta y)+\mathrm{d}(\ln x)(\gamma-\delta x)=0$$

注意到$x\mathrm{d}(\ln x)=\mathrm{d}x$，上式可化为一个全微分，对应一个由初始条件决定的守恒量V：

$$V=-\delta x+\gamma\ln x-\beta y+\alpha\ln y$$

1.4 用RK4数值计算演化图

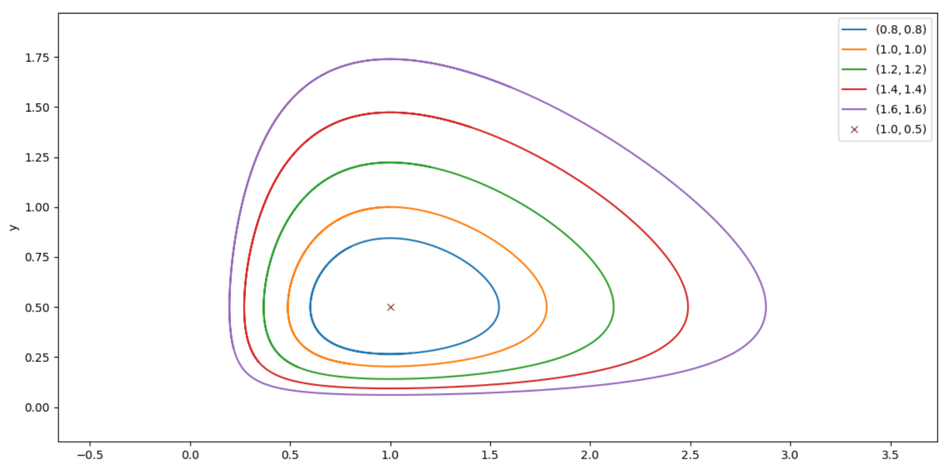

Figure 1: Predator-Prey Evolution

2 迭代法求解偏微分方程的边值问题

这一部分代码提交在文件“PDE_by_Iterating.py”中。

Over relaxation迭代法需要先求出谱半径（J的最大本征值），我使用第3次作业中第二题中的幂次法近似求之，ω_b与精确的最优值可能略有偏差，不过这不影响我们研究Overrelaxation方法的迭代次数。(注：在幂次法中，初始的q同第二题一样选为随机矢量，故每次求出的本征值在一定误差范围内略有不同，故SOR方法的迭代次数每次会略有不同)

Table 1: 迭代次数对比

N	Jacobi	Gauss-Seidel	Overrelaxation
10	295	149	33
20	1086	544	61
50	6423	3213	158

Table 2: 剩余误差对比

	$r^{(i)} \times 10^{-4}$		
N	Jacobi	Gauss-Seidel	Overrelaxation
10	0.97448	0.94134	0.58103
20	0.98943	0.99123	0.66454
50	0.99811	0.99653	0.92013

可以看到，Gauss-Seidel迭代比Jacobi迭代节约了一半左右的迭代次数，而over relaxation 的迭代次数又比它们少得多。从剩余误差的对比能够看出，overrelaxation方法的剩余$r^{(i)}$总是最小的，这从侧面反映了它的收敛速度确实比前两种方法快。