高等数学 by 小天

July 22, 2023

1 函数与极限 Part1

1.1 初等函数——反三角函数

初等函数一共有五种：反、对、幂、指、三。它们分别是“反”——反三角函数，“对”——对数函数，“幂”——幂函数，“指”——指数函数，“三”——三角函数。

其中你没有接触过的只有反三角函数。写法为 $arcf(x)$，其中 f 为对应的三角函数。

那么什么是反三角函数呢？让我们思考一个问题，已知 $\sin\theta=\dfrac{1}{2}$，请问 θ 是多少？很明显，$\theta=\dfrac{\pi}{6}+2k\pi$ 或者 $\dfrac{5\pi}{6}+2k\pi$。那么这是怎么来的呢？在以往的三角函数中，我们是已知 α，利用 $\sin\alpha=\beta$，求出对应的 β。但是现在反过来，我们已知 β，想求出来 α 。就要利用反三角函数，可以视作一种逆变换。

按照上述规定，我们将 $\sin x$ 的逆变换记做 $\arcsin x$。回到最初的问题，已知 $\sin\theta=\dfrac{1}{2}$，请问 θ 是多少？显然，$\theta=\arcsin\dfrac{1}{2}$。它等于几呢？按照朴实的想法，$\theta=\dfrac{\pi}{6}+2k\pi$ 或者 $\dfrac{5\pi}{6}+2k\pi$。但是这出现了一个问题，这个函数一个自变量有多个值。我们不希望这样，因此，数学家们人为地为反正弦函数划定了定义域 $[-1,1]$。为何这么处理？因为 $\sin x$ 的值域就是 $[-1,1]$。反三角函数的定义域与三角函数的值域相对应。那么 $\arcsin x$ 的值域是什么？$\sin x$ 属于 $[-1,1]$ 时有无穷多个周期，我们选择最简单的那个：$[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}]$。

同理，反余弦函数 $\arccos x$ 也有相似的性质，它的定义域是 $[-1,1]$。同理，它的值域是什么呢？我们选择最简单那个，$\cos x$ 在 $[0,\pi]$ 遍历了它的值域 $[-1,1]$，因此数学家们把它的值域定为 $[0,\pi]$

那么，反正切函数 $\arctan x$ 呢？正切函数的值域是 R，因此反正切函数的定义域也是 R。考虑到正切函数是在有一些点没有定义的，且具有周期性，因此反正切函数反映的是 $[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}]$ 上

$\tan x$ 的情形。与众不同的是，$\arctan x$ 是有渐近线的。即它趋于正负无穷时它会趋于某个确定的值。为什么会这样呢？在 $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ 中，$\tan x$ 在 $x \to \frac{\pi}{2}$ 时是正无穷，在 $x \to -\frac{\pi}{2}$ 时是负无穷。按照"定义域与值域对应"，那么 $\arctan x$ 在正无穷时就会趋于 $\frac{\pi}{2}$，负无穷时就是 $-\frac{\pi}{2}$。

这三个反三角函数中，奇偶性与原函数相同的是那两个奇函数——即 $\arcsin x, \arctan x$ 都是奇函数，而 $\arccos x$ 非奇非偶。这三个三角函数都是单调函数。单调性与各自在 $[0,\frac{\pi}{2}$ 上的单调性相同。因此，$\arcsin x$ $\arctan x$ 在各自的定义域内单调递增，$\arccos x$ 单调递减。

它们各自的导数有些特别，其中 $\arcsin x, \arccos x$ 的导数只差一个正负号。$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$，$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$。而 $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$。这三个必须熟记，尤其是反正切函数的。这是后面的积分运算的基础。

1.2 初等函数——正割、余割、余切

这个就很简单了, 正割函数 $\sec x = \frac{1}{\cos x}$, 余割函数 $\csc x = \frac{1}{\sin x}$, 余切函数 $cotx = \frac{1}{\tan x}$。总之就是倒数的关系。值得注意的是，$\sin x, \cos x$ 的拼写是以 s, c 开头的，而正割、余割是反过来的。即 $secx = \frac{1}{cosx}$，$cscx = \frac{1}{sinx}$。这样就记住了。

1.3 函数的极限

1.3.1 什么是极限

极限，可以理解为自变量从某个方向趋近于某个值时，函数的取值。在此处，函数不一定要有定义。

1.3.2 邻域、去心邻域

邻域，顾名思义就是"相邻的区域"。那么，相邻是多近呢？我们要求是任意近。我们可以使用一个正数 $\delta > 0$，注意这是一个任意小的正数，我们把 $(a-\delta, a+\delta)$ 定义为 a 的邻域，也就是 a 的左右两边的很小的一段地方。而去心邻域则是把中心去掉，即 $(a-\delta, a) \cup (a, a+\delta)$。

1.3.3 左右极限

左右极限，顾名思义就是在函数的邻域内，从左侧、右侧趋近于一个函数，探测此时函数的取值。函数在 a 点的左极限记为 $\lim_{x \to a^-} f(x)$。而右极限则是 $\lim_{x \to a^+} f(x)$。

我们来考察一个分段函数 $\begin{cases} y = x (x < 0) \\ y = e^x (x \geq 0) \end{cases}$。请问它在 $x = 0$ 处的左右极限是？

$\lim_{x\to a^-} y = 0$。而右极限则是 $\lim_{x\to a^+} e^0 = 1$。

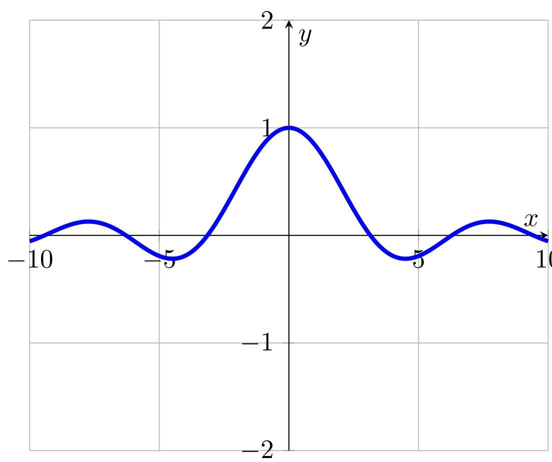
很明显，上面的例子中，左右极限并不相等。极限存在的条件是左右极限都存在且相等。

1.3.4 函数的间断点

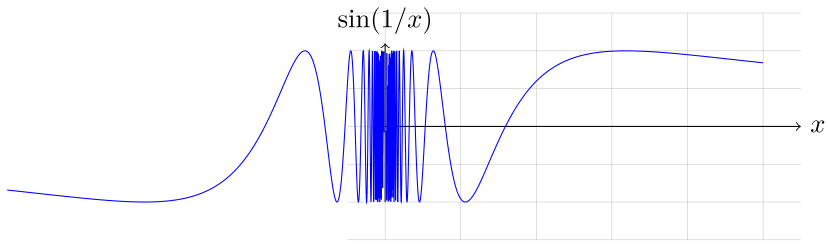
有些函数会在一些地方断开，产生间断点。比如说 $\tan x$ 在 $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$ 处。比如说 $\frac{\sin x}{x}$ 在 $x = 0$ 处。比如说符号函数 $y = sgnx$ 在 $x = 0$ 处。其中符号函数 $y = sgnx$ 满足 $x > 0$ 时 $y = 1$，$x < 0$ 时 $y = -1$，$x = 0$ 时 $y = 0$。

虽然上面提到了三个函数都有各自的间断点，但是间断点的类型并不相同。$\tan x$ 在 $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$ 处是趋于无穷的。而 $\frac{\sin x}{x}$ 在 $x = 0$ 处趋于 1，仅仅是 $x = 0$ 处被挖去了一个空点。符号函数 $y = sgnx$ 则在 $x = 0$ 的左右两侧产生了一次跳跃。

那么问题来了，我们如何对它们进行分类呢？我们可以分为三种类型：跳跃间断点，可去间断点，无穷间断点。无穷间断点和跳跃间断点都很容易看出来。为了严谨表述，说明一下。无穷间断点，只需左右极限中有任意一个是无穷就是。跳跃间断点是左右极限存在但不相等。极限“存在”的意思是可以表述为一个数，无穷并不是数。可去间断掉则是这个间断点“可以去掉”——去不去掉看不出来什么差别。对于这个函数而言，我们只需要补充定义即可使它连续。如刚刚提到的 $\frac{\sin x}{x}$，我们只需要 $\begin{cases} y = \dfrac{\sin x}{x}(x \neq 0) \\ y = 1(x = 0) \end{cases}$ 便可以使它在整个实数轴上连续



还有另一类极其特殊的间断点——震荡间断点。我们考虑以下函数 $y = \sin\frac{1}{x}$。我们知道，$\sin x$ 在 $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ 处取 1，$x = 2k\pi$ 处取 0。那么，对于 $y = \sin\frac{1}{x}$ 而言，则在 $x = \frac{1}{2k\pi + \frac{\pi}{2}}$ 取 1。随着 k 增大，$x = \frac{1}{2k\pi + \frac{\pi}{2}}$ 越来越小。意味着 $y = \sin\frac{1}{x}$ 在趋于 0 时函数值一次又一次的趋于 1。形成一个震荡的感觉。



接下来，请找出以下函数的间断点，并指出间断点类型。

1. $\cos\dfrac{1}{x}$　　　　2.$\dfrac{e^x}{x}$　　　　3.$sgn(\sin x)$

1.3.5　两个重要极限

$\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$　　　$\lim_{x\to +\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x=e$

以上两个请谨记，务必搞清楚他们是自变量趋于什么时的极限。会非常常用。基本所有极限题都基于它。

1.3.6　极限的四则运算法则

若 $\lim_{x\to t}(A+B)=C$ 当且仅当 $\lim_{x\to t}A$ 极限存在、$\lim_{x\to t}B$ 极限也存在时，才有 $\lim_{x\to t}(A+B)=\lim_{x\to t}A+\lim_{x\to t}B=C$。

若 $\lim_{x\to t}(A*B)=C$ 当且仅当 $\lim_{x\to t}A$ 极限存在、$\lim_{x\to t}B$ 极限也存在时，才有 $\lim_{x\to t}(A*B)=\lim_{x\to t}A*\lim_{x\to t}B=C$。

可以简单记为“存在才能拆。”

1.3.7　未定式

常见的未定式有 $\dfrac{0}{0}$，1^∞，$\dfrac{\infty}{\infty}$，$0*\infty$，$\infty-\infty$，∞^0，0^0 几种。注意这里的 1 和 0 都不是真正意义的 1 和 0，而是无穷趋近于 1 或 0 的数字。叫他们未定式是因为我们无法简单判断他们的值，必须具体分析。如前面提到的 $\lim_{x\to +\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x=e$ 便是。括号内的东西无限接近于 1，但是指数趋于无穷大。这二者共同作用将这个略大于 1 的数的无穷次方拉到了 e。

1.3.8　有界性

若函数在 D 内有定义，且满足 $f(x)\le K$，则称 K 是 $f(x)$ 的一个上界，$f(x)\ge L$，则称 L 是 $f(x)$ 的一个下界。显然，$-1\le\sin x\ge 1$，因此 1 是正弦函数的一个上界。显然，$\sin x<1000$，1000 也是它的一个上界。因为有界函数有无穷多个上界，所以我们一般称“一个上界”

上、下确界则是必须取得到的界。正弦函数的上确界只有一个，是 1。

函数有界的充要条件是既有上界又有下界。如 e^x 不是有界函数，虽然他有下界，但是没有上界。$\arctan x$ 是一个有界函数，它的上界是 $\frac{\pi}{2}$，下界是 $-\frac{\pi}{2}$

单调有界则必有极限。单调、有界，二者缺一不可。这是一个很直观的结论，也很常用。

任意有界函数与无穷小的积均是无穷小量，如 $x*\sin(e^{88x}-\ln|x|+998)$ 是一个无穷小量。

1.3.9 无穷大

给出无穷大的精确定义：对任意的 M，总存在一个 $\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|f(x)|>|M|$，此时我们称 $f(x)$ 是 $x\to x_0$ 的无穷大。或当 $|x|>|X|$ 时，称 $f(x)$ 是 $x\to\infty$ 的无穷大。什么意思呢？这是说函数自变量趋于某个数时（这里用 0 举例），我们给出任意一个足够大（小）的 M，比如一百亿（负一百亿），总存在一个很小的正数 δ，使得 x 与 0 的距离比 δ 小的时候，$f(x)$ 的取值比 $|M|$ 更大。

比如 $\frac{1}{x}(x>0)$ 是 $x\to 0$ 的无穷大。如我们给出 $M=10^{15}$，总存在一个 $\delta=\frac{1}{10^{16}}$，使得 $0<x<\frac{1}{10^{16}}$ 时，$\frac{1}{x}>10^{15}$。

1.3.10 等价无穷小

什么是无穷小呢？无穷小就是 x 趋于某值时，函数值无限趋于 0 的函数。也就是极限为 0 的函数。无穷小与“很小的数”没有任何关联”

常见的等价无穷小有：(均为 t 趋于 0 时的等价无穷小)

$$e^t-1 \text{ 与 } t$$

$$\sin t \text{ 与 } t$$

$$\cos t \text{ 与 } 1-\frac{1}{2}t^2$$

$$\tan t \text{ 与 } t$$

$$\arctan t \text{ 与 } t$$

$$\arcsin t \text{ 与 } t$$

$$\ln(t+1) \text{ 与 } t$$

$$\sqrt[n]{t+1}-1 \text{ 与 } \frac{t}{n}$$

$$a^t-1 \text{ 与 } t\ln a$$

在不违反极限运算法则的前提，且此时某函数确实是无穷小的情况下，无穷小可以互相替换，已实现简化运算的目的。

有没有发现，等价无穷小就是某函数在这个点的切线？$\cos t$ 与 $1-\frac{1}{2}t^2$ 这一组比较特别，但是 $\cos x$ 与 $1-\frac{1}{2}x^2$ 也在 0 处非常相似，甚至就是一模一样。

因此，我们说，当两个函数 f,g 均有 $\lim_{x\to t} f,g=0$，且 $\lim_{x\to t}\frac{f}{g}=1$，称 f,g 是一组 x 趋于 t 时的等价无穷小。

无穷小还有三种：同阶无穷小，低阶无穷小，高阶无穷小。他们很容易记忆。因为无穷小就是趋于 0，高阶说明趋于 0 的能力更强，低阶说明更弱；只需判断 $\lim_{x\to t}\frac{f}{g}$ 的值即可。若是一个不等于 0 也不等于 1 的常数则是同阶无穷小，等于 0 则说 f 是 g 的高阶无穷小，无穷则说 f 是 g 的是低阶无穷小。

显然，趋于 0 时，x^6 是 $(e^x-1)^5$ 的高阶无穷小，$(\ln(x+1))^{11}$ 是 $arcsin(x^{11})$ 的同阶无穷小。

等价无穷小如何求极限呢?举例:$\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1)\ln(x+1)\sin x(\cos x-1)}{x^5}=\frac{x*x*x*(1-\frac{1}{2}x^2-1)}{x^5}=\frac{-\frac{1}{2}x^5}{x^5}=-\frac{1}{2}$

1.3.11 习题

一、请找出以下函数的间断点，并判断类型。

$$1.\frac{1}{1-e^{\frac{x}{1-x}}}\qquad 2.\frac{x}{\tan x}\qquad 3.f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}x。$$

二、以下求极限的做法对吗？若错请给出原因。

$$1.\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^2}=\frac{x-x}{x^2}=0\qquad 2.\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\frac{x(1-\frac{\sin x}{x})}{x^3}=\frac{1-1}{x^2}=0$$

$$3.\lim x_{\to 0}(\frac{xe^x+e^x}{e^x-1}-\frac{1}{x})=(\frac{xe^x+e^x}{x}-\frac{1}{x})=(\frac{xe^x+e^x-1}{x})=e^x+\frac{e^x-1}{x}=1+1=2$$

$4.\lim x_{\to 0}(\frac{xe^x+e^x}{e^x-1}-\frac{1}{x})$，注意到原式极限存在，而 $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$ 极限也存在，故，

$$\lim x_{\to 0}(\frac{xe^x+e^x}{e^x-1}-\frac{1}{x})=\lim x_{\to 0}[(\frac{xe^x+e^x}{e^x-1}-\frac{1}{x})][\frac{e^x-1}{x}]=\frac{xe^x+e^x}{x}-\frac{e^x-1}{x^2}=\frac{xe^x+e^x}{x}-\frac{1}{x}$$

$5.\lim x_{\to 0}(\frac{xe^x+e^x}{e^x-1}-\frac{1}{x})$，注意到原式极限存在，而 $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$ 极限也存在，故，

$$\lim x_{\to 0}(\frac{xe^x+e^x}{e^x-1}-\frac{1}{x})=\frac{xe^x+e^x}{e^x-1}*\frac{e^x-1}{x}-\frac{1}{x}=\frac{xe^x+e^x-1}{x}。$$

三、已知 $x\to 0$ 时 $f(x)\to 0$，那么一定有 $\sin(f(x))$ 与 $f(x)$ 是等价无穷小吗？若不是，请举出一个反例 $f(x)$。

四、已知 $x\to 0$ 时 $f(x)$ 是一个无界函数，那么它一定是 $x\to 0$ 时的无穷大吗？若不是，请举出一个反例 $f(x)$。

五、任意两个无穷小量都可以比阶吗？若不是，请举出一个反例。

六、已知 $f(x)$ 左右极限都存在，那么 $\lim_{x\to0} f(x^3) = \lim_{x\to0^+} f(x)$ 正确吗？若错误请说明原因。

七、已知 $\lim_{x\to0} \dfrac{f(x)}{\ln(x+1)} = 9$，则 $\lim_{x\to0} f(x)$ 是否存在？若存在求其值。

八、已知 $\lim_{x\to0} \dfrac{\sin 6x + xf(x)}{x^3} = 0$，且 $\lim_{x\to0} \dfrac{6+f(x)}{x^2}$ 存在，求其值。(提示：$\lim_{t\to0}$ 时，有 $t-\sin t$ 与 $\dfrac{1}{6}t^3$ 是等价无穷小)。

1.4 极限的求法

利用等价无穷小求极限是最基本的方法。当然，不止这一种。但是我们现在学过的就这些，因此，当下我们这么做也是足够的。

回顾一下，我们前面学过的常见的等价无穷小有：(均为 t 趋于 0 时的等价无穷小)

$$e^t - 1 \text{ 与 } t$$

$$\sin t \text{ 与 } t$$

$$\cos t \text{ 与 } 1 - \frac{1}{2}t^2$$

$$\tan t \text{ 与 } t$$

$$\arctan t \text{ 与 } t$$

$$\arcsin t \text{ 与 } t$$

$$\ln(t+1) \text{ 与 } t$$

$$\sqrt[n]{t+1} - 1 \text{ 与 } \frac{t}{n}$$

$$a^t - 1 \text{ 与 } t\ln a$$

先举例方便理解：$\lim_{x\to0}(1-2x)^{\frac{1}{x}}$。如何计算呢？回想起极限 $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$。做出倒代换有 $t = \dfrac{1}{x} \to \lim_{t\to0}(1+t)^{\frac{1}{t}} = e$。自然的有令 $-2x = m$ ，有 $\lim_{x\to0}(1-2x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{m\to0}(1+m)^{-\frac{1}{2m}} \to= \lim_{m\to0}[(1+m)^{\frac{1}{m}}]^{-\frac{1}{2}} = e^{-\frac{1}{2}}$。

再举一个例子，$\lim_{x\to0} \dfrac{e - e^{\cos x}}{x^2}$。这是一个 0 比 0 的极限。也许你会想到洛必达（这将在后面提到），但是复合函数 $e^{\cos x}$ 求导有些复杂，怎么简单的做出来呢？我们不妨提出来一个 $e^{\cos x} \to \dfrac{e - e^{\cos x}}{x^2} = e^{\cos x}\dfrac{e^{1-\cos x} - 1}{x^2}$。转化为 $e^t - 1$ 的形式了。因为指数上是趋于 0 的。有 $e^{1-\cos x} - 1$ 与 $1 - \cos x$ 是等价无穷小。因此有 $\lim_{x\to0} \dfrac{e - e^{\cos x}}{x^2} = e^{\cos x}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$。由于前面的 $e^{\cos x}$ 乘积项是 1，直接代入 1 即可。(这里请注意极限的四则运算法则）原式等于 $1 * \dfrac{\frac{1}{2}x^2}{x^2} = \dfrac{1}{2}$

再来一个有些难度的。计算 $\lim_{x\to0}(\cos x + 2\sin x\ln(1+x))^{\frac{1}{\tan x}}$。仔细观察这仍然是前面提及的 1^∞ 未定式，应考虑使用 e 的重要极限来做。我们的目标是凑出 $\lim_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x = e$。

只需 $(\cos x+2\sin x\ln(1+x))^{\frac{1}{\tan x}}=(1+[\cos x+2\sin x\ln(1+x)-1])^{\frac{1}{\cos x+2\sin x\ln(1+x)-1}*\frac{\cos x+2\sin x\ln(1+x)-1}{\tan x}}$ 即可。

根据重要极限，前面那一大堆 $(1+[\cos x+2\sin x\ln(1+x)-1])^{\frac{1}{\cos x+2\sin x\ln(1+x)-1}}=e$。只需计算 $\frac{\cos x+2\sin x\ln(1+x)-1}{\tan x}$ 即可。前面多次强调极限的四则运算法则很重要，不是所有都可以拆的，但是不管能不能拆，先拆了再说，万一能算呢？如果拆了有极限不存在的项，你也算不了。在这里非常明显的，$\cos x-1$ 是一组，$2\sin x\ln(1+x)$ 是一组。$\tan x$ 是一次项，因为它的等价无穷小是 x。$\cos x-1$ 的等价无穷小是二次项，$2\sin x\ln(1+x)$ 的也是二次项（$2*x*x=2x^2$）。因此两个极限都是高阶无穷小比它的低阶无穷小，答案为 0。故结果为 $e^0=1$。

稍微改一下呢？计算 $\lim_{x\to 0}(\cos x+2\sin x\ln(1+x))^{\frac{1}{\tan x\arcsin x}}$。前面都一样。只需最后计算 $\frac{\cos x+2\sin x\ln(1+x)-1}{\tan x\arcsin x}$。分母的等价无穷小是 x^2。分子拆开后是 $-\frac{1}{2}x^2+2x^2$。故为 $\frac{2x^2-\frac{1}{2}x^2}{x^2}=\frac{3}{2}$。别忘了前面还有一个 e 呢。答案是 $e^{\frac{3}{2}}$。