

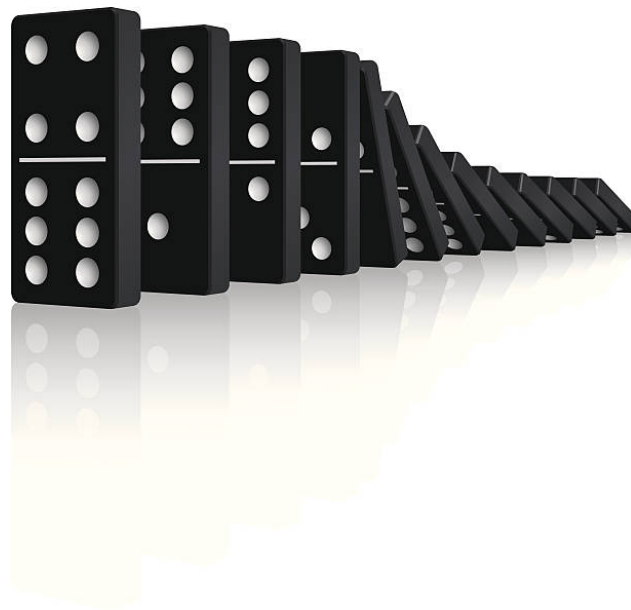


SERRE Marina

PALAY Kiliann

COMPTE RENDU PROJET C++

Étude de la propagation d'une onde de chute dans une chaîne de dominos



Lundi 27 février 2023

Sommaire

1	Équations	1
2	Détermination de α_{choc}	2
2.1	Détermination de α_{choc} par trigonométrie	2
2.2	Application numérique	4
3	Détermination des constantes	4
3.1	Viscosité γ	4
3.2	Constantes fixées	6
4	Limites quand tous les dominos sont couchés	7
4.1	Limite de la longueur des ressorts	7
4.2	Limite de la valeur de l'angle maximal du $(n + 1)^{ème}$ domino (d'indice n) (différent du dernier domino)	7
4.3	Limite de la valeur de l'angle choc du dernier domino avec le sol	8
5	Nos résultats	9
6	Conclusion	15

Introduction

On étudie la propagation d'une onde de chute dans une chaîne de dominos à l'aide d'un traitement numérique. Pour ce faire, on définit une chaîne de N dominos représentés chacun par une tige de masse m , de hauteur h et d'épaisseur négligeable. Les bases de chaque domino sont séparées d'une distance Δ selon l'axe x . Chacun pivote autour de sa base (rotation d'axe y) en faisant un angle α qui varie au cours du temps par rapport à l'axe vertical (axe z). Un ressort de masse négligeable, de constante de raideur k et de longueur à vide l_0 est placé au sommet de chaque domino ; il sert à modéliser la force de contact entre 2 dominos successifs. On tiendra compte de la viscosité γ du milieu de propagation.

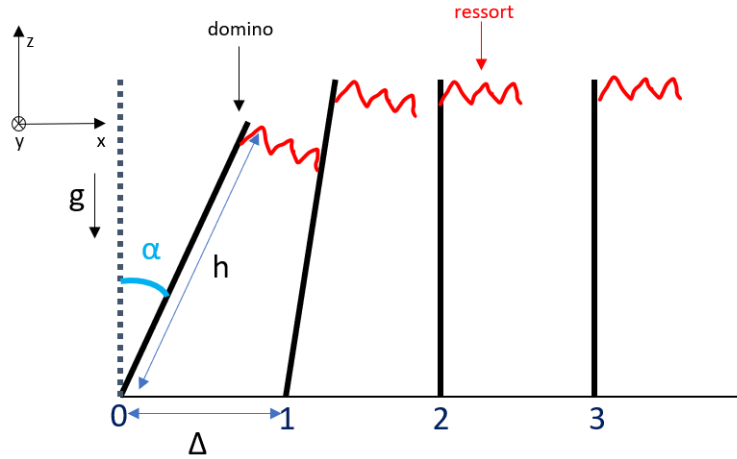


Figure 1: *Illustration des dominos*

Le schéma ci-dessus représente les conditions que nous utiliserons tout au long de notre projet. Nous considérons que la chute de domino va de la "gauche" vers la "droite" (selon l'axe des x croissants). Il est important de notifier que le ressort est toujours placé perpendiculairement au domino. Lorsqu'un ressort entre en contact avec le domino voisin, il "glisse" sur le domino successif. Nous considérons cette force de frottement négligeable.

1 Équations

Voici ci-dessous les équations qui représentent l'évolution temporelle de l'angle α ainsi que de la longueur du ressort de chaque domino :

- **Angle du 1^{er} domino d'indice 0 jusqu'à son contact avec le 2^{ème} domino d'indice 1 :**

$$\alpha_0(t + dt) = \left(1 + \frac{\gamma dt}{2J}\right)^{-1} \left[2\alpha_0(t) - \left(1 - \frac{\gamma dt}{2J}\right)\alpha_0(t - dt) + \frac{3gdt^2}{2h} \sin(\alpha_0(t)) \right] \quad (1)$$

avec $J = \frac{mh^2}{3}$. De plus, nous considérons que le domino d'indice 0 est en contact avec le domino suivant lorsque le ressort de ce premier touche le domino d'indice 1.

- **Angle du 1^{er} domino d'indice 0 après contact de son ressort avec le 2^{ème} domino d'indice 1 :**

$$\alpha_0(t+dt) = \left(1 + \frac{\gamma dt}{2J}\right)^{-1} \left[2\alpha_0(t) - \left(1 - \frac{\gamma dt}{2J}\right) \alpha_0(t-dt) + \frac{3gdt^2}{2h} \sin(\alpha_0(t)) - \frac{dt^2}{2J} kh(l_0 - l_0(t)) \right] \quad (2)$$

- **Angle du $(n+1)^{\text{ème}}$ domino d'indice n (différent du domino d'indice 0) lorsqu'il est en contact avec seulement son voisin de gauche d'indice $(n-1)$:**

$$\alpha_n(t+dt) = \left(1 + \frac{\gamma dt}{2J}\right)^{-1} \left[2\alpha_n(t) - \left(1 - \frac{\gamma dt}{2J}\right) \alpha_n(t-dt) + \frac{3gdt^2}{2h} \sin(\alpha_n(t)) + \frac{dt^2}{2J} k(l_0 - l_{n-1}(t)) \left(h - \Delta \sin(\alpha_{n-1}(t)) \right) \right] \quad (3)$$

- **Angle du $(n+1)^{\text{ème}}$ domino d'indice n (différent du domino d'indice 0) lorsqu'il est en contact avec ses 2 voisins d'indices $(n-1)$ et $(n+1)$:**

$$\alpha_n(t+dt) = \left(1 + \frac{\gamma dt}{2J}\right)^{-1} \left[2\alpha_n(t) - \left(1 - \frac{\gamma dt}{2J}\right) \alpha_n(t-dt) + \frac{3gdt^2}{2h} \sin(\alpha_n(t)) + \frac{dt^2}{2J} k(l_0 - l_{n-1}(t)) \left(h - \Delta \sin(\alpha_{n-1}(t)) \right) - \frac{dt^2}{2J} kh(l_0 - l_n(t)) \right] \quad (4)$$

- **Longueur du ressort du $(n+1)^{\text{ème}}$ domino d'indice n lorsque ce dernier est en contact avec son voisin de droite le domino d'indice $(n+1)$, avec l_0 la longueur du ressort à vide :**

$$l_n(t) = h \tan(\alpha_{n+1}(t) - \alpha_n(t)) + \frac{\Delta}{\cos(\alpha_n(t)) (1 + \tan(\alpha_n(t)) \tan(\alpha_{n+1}(t)))} \quad (5)$$

Toutes ces équations sont utilisées dans notre code C++ afin de modéliser la chute des dominos. Ces équations nous ont permis d'avoir la valeur de l'angle ainsi que la longueur du ressort de chaque domino à chaque instant t .

2 Détermination de α_{choc}

Dans un premier temps, nous devons calculer l'angle pour lequel le premier domino d'indice 0 entre en contact avec le deuxième domino d'indice 1. Nous appellerons cet angle α_{choc} . Celui-ci nous permettra de traiter la singularité qui existe lorsque le deuxième domino d'indice 1 est touché par le premier domino d'indice 0.

2.1 Détermination de α_{choc} par trigonométrie

Nous cherchons la valeur de α quand le domino d'indice 0 touche le suivant. Autrement dit, dès lors que le ressort de ce dernier entre en contact avec le domino suivant situé à une distance Δ .

Or, nous savons que la longueur d'un ressort se détermine avec sa longueur à vide et la résultante

des forces appliquées sur celui-ci (qui correspond à la force de rappel et au poids).

Cependant, dans notre cas, comme nous négligeons la masse du ressort, le poids de celui-ci est donc nul. Grâce à la référence [2], nous savons que le terme concernant la force appliquée n'est composé que de la force de rappel qui s'écrit en norme :

$$F_{Rappel} = k(l(t) - l_0)$$

avec k la constante de raideur du ressort en N m^{-1} .

Or à l'instant où le premier domino entre en contact avec son voisin de droite, la longueur du ressort vaut l_0 . La force de rappel est donc nulle également. Le ressort n'est donc soumis à aucune force. Ainsi, sa longueur au repos n'est autre que sa longueur à vide notée l_0 . La perturbation causée par la chute du domino précédent peut donc être modélisée comme une force externe appliquée au domino d'indice 1. En réponse à cette force, ce dernier commencera à tomber et à acquérir de la vitesse.

Comme mentionné précédemment, le ressort est au sommet du domino et est perpendiculaire à celui-ci à chaque instant t de l'expérience (Voir ci-après Figure 2). Nous pouvons ainsi déterminer la valeur de l'angle α au moment du choc grâce à un schéma utilisant la trigonométrie présenté ci-dessous :

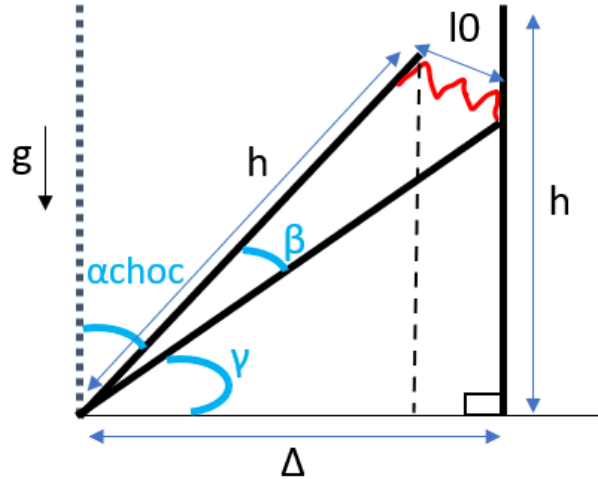


Figure 2: Schéma pour calculer l'angle α_{choc}

Nous avons donc :

$$\sin(\beta) = \frac{l_0}{hypoténuse} \text{ avec } hypoténuse = \sqrt{h^2 + (l_0)^2} \text{ d'où } \sin(\beta) = \frac{l_0}{\sqrt{h^2 + l_0^2}}$$

De plus :

$$\cos(\beta) = \frac{h}{\sqrt{h^2 + l_0^2}}$$

Nous pouvons ainsi écrire que :

$$\tan(\beta) = \frac{\sin(\beta)}{\cos(\beta)} = \frac{l_0}{h}$$

Nous pouvons aussi exprimer l'angle γ :

$$\cos(\gamma) = \frac{\Delta}{\sqrt{h^2 + l_0^2}}$$

d'où :

$$\alpha_{choc} = \frac{\pi}{2} - \gamma - \beta = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{l_0}{h}\right) - \arccos\left(\frac{\Delta}{\sqrt{h^2 + l_0^2}}\right)$$

Ainsi, grâce à cette formule, nous pouvons déterminer l'angle α_{choc} en fonction des différents paramètres du problème.

2.2 Application numérique

Nous considérons les valeurs numériques ci-dessous, que nous pouvons changer dans le code C++ comme nous le souhaitons puisqu'elles sont toutes demandées à l'utilisateur.

- La longueur des ressorts au repos de tous les dominos : $l_0 = 3 \times 10^{-3}$ m,
- La hauteur des dominos : $h = 3 \times 10^{-2}$ m,
- La distance qui sépare 2 dominos successifs : $\Delta = 1 \times 10^{-2}$ m

Avec ces valeurs, nous obtenons un angle de α_{choc} valant environ 0.238414 radian soit 13.66 degrés. Ce résultat semble donc cohérent avec les valeurs choisies. En effet, nous avons un domino de 3 cm séparé du prochain domino d'une distance de 1 cm avec une courte longueur de ressort, ainsi l'angle formé lors du choc est assez petit, c'est en accord avec ce que nous pourrions obtenir expérimentalement.

Cet angle nous permettra ainsi de pouvoir poser la condition suivante : si l'angle entre le domino d'indice 0 et le domino d'indice 1 est inférieur à ce α_{choc} alors, nous pouvons utiliser l'équation (1). À l'inverse, si l'angle formé par le premier domino avec le second est supérieur à cet angle, alors cela correspond au fait que les deux premiers dominos sont en contact (plus précisément le ressort du domino d'indice 0 est en contact avec le domino d'indice 1). Nous pouvons ainsi cesser d'utiliser l'équation (1) afin de nous servir dorénavant de l'équation (2) qui correspond à l'équation qui régit l'angle du domino d'indice 0 après-contact avec le domino d'indice 1 en fonction du temps. Nous pouvons aussi utiliser l'équation (3) qui permet de déterminer la valeur de l'angle du domino 1 lorsque celui-ci est en contact avec seulement le domino 0.

3 Détermination des constantes

3.1 Viscosité γ

La viscosité est une mesure de la résistance d'un fluide à l'écoulement. Elle est liée aux forces de frottement qui existent entre les différentes couches de fluide lorsqu'il s'écoule.

Nous avons essayé de trouver une valeur cohérente pour gamma. Dans notre cas, nous avons supposé que les dominos étaient dans l'air dans un premier temps. Nous avons ainsi cherché la viscosité de l'air. Et nous avons ensuite codé la possibilité de changer de milieu de propagation pour faire chuter la chaîne de dominos.

La difficulté à cet endroit était de savoir à quoi correspondait réellement ce terme γ . En effet, cela pouvait être la viscosité dynamique, cinématique ou moléculaire. Nous avons ainsi recherché leurs différences grâce à la référence [3].

La viscosité dynamique est définie comme la force de frottement par unité de surface entre deux couches de fluide en mouvement l'une par rapport à l'autre, divisée par la vitesse de glissement entre ces couches. Elle est exprimée en Pascal-seconde (Pas) en unités SI, mais peut parfois être exprimé en poiseuille (Pl). La viscosité dynamique est donc une mesure de la résistance du fluide à

l'écoulement en termes de forces de frottement.

La viscosité cinématique, quant à elle, est définie comme la viscosité dynamique divisée par la densité du fluide. Elle est exprimée en mètres carrés par seconde ($\text{m}^2 \text{s}^{-1}$). La viscosité cinématique est donc une mesure de la résistance du fluide à l'écoulement en termes de lenteur de l'écoulement.

La viscosité moléculaire, quant à elle, est liée aux forces de frottement internes qui existent entre les molécules du fluide. Elle est liée à la taille et à la forme des molécules, ainsi qu'à la température et à la pression du fluide. Le coefficient de frottement de Stokes, qui est couramment utilisé pour modéliser la viscosité de fluides à faibles vitesses, est exprimé en kg s^{-1} ou en N s m^{-2} .

En résumé, la viscosité dynamique est une mesure de la résistance du fluide à l'écoulement en termes de forces de frottement, la viscosité cinématique est une mesure de la lenteur de l'écoulement, tandis que la viscosité moléculaire est liée aux propriétés moléculaires du fluide et aux forces de frottement internes entre les molécules.

Lorsque nous faisons l'analyse dimensionnelle grâce aux équations données dans la partie "1 Équations", nous avons un terme en $\left(1 + \frac{\gamma dt}{2J}\right)^{-1}$ dans les expressions des angles multiplié par un autre terme qui différerait selon l'expression choisie. En observant de plus près, nous nous rendons compte que les formules des angles ne sont autres que des additions de termes (une fois les expressions développées) qui doivent rester tous sans dimension, car la somme totale doit correspondre à un angle en radian qui n'est autre qu'un rapport de longueurs. Nous pouvons donc choisir le moins compliqué d'entre eux afin d'utiliser cette caractéristique qui nous permettra ainsi de pouvoir retrouver la dimension de la viscosité.

Par conséquent : $\left(1 + \frac{\gamma dt}{2J}\right)^{-1} \times 2\alpha_n(t)$ doit être sans dimension. Ici, nous avons pris $2\alpha_n(t)$ de manière à simplifier au maximum l'analyse dimensionnelle. Par ailleurs, nous aurions pu également choisir $2\alpha_0(t)$ puisque dans tous les cas, ce terme est également sans dimension.

Ainsi, nous pouvons éliminer les termes sans dimensions qui ne nous intéressent pas du membre ci-contre, ce qui revient à travailler qu'avec $\frac{\gamma dt}{2J}$.

Effectuons une analyse dimensionnelle : $\left[\frac{\gamma \times dt}{J}\right] = 1$ d'où :

$$[\gamma] \times \frac{\text{s}}{\text{kg m}^2} = 1 \iff [\gamma] = \text{kg m}^2 \text{s}^{-1}$$

Or, on sait que la dimension d'un Newton équivaut à des kg m s^{-2} . Nous avons ainsi :

$$[\gamma] = \text{N s m}^{-1}$$

ce qui correspond à la viscosité moléculaire.

Voici ci-dessous quelques viscosités, issues de la référence [4], que nous avons utilisées dans notre code :

	Viscosité en N s m^{-1}
γ_{air}	1.75×10^{-5}
γ_{eau}	1.15×10^{-3}

Si nous souhaitions appliquer le cas d'un fluide ayant une très grande viscosité, comme le miel (6 N s m^{-1}), il faudrait augmenter la masse du domino dans notre programme ainsi que l'intervalle

de temps entre deux instants pour pouvoir mesurer une variation de l'angle α significative entre deux instants. En effet, dans notre cas, nous avons utilisé une masse de 10 g pour les dominos. Ainsi, dans le miel, ces derniers restent figés.

3.2 Constantes fixées

Nous avons fixé les constantes suivantes. Celles-ci ont des valeurs arbitraires qui peuvent bien évidemment représenter la réalité.

Masse des dominos : $m = 1 \times 10^{-3} \text{ kg}$

Vitesse de rotation (ou de chute) initiale du premier domino d'indice 0 : $\omega = \frac{\pi}{4} = 0.7854 \text{ rad s}^{-1}$

Le moment d'inertie mesure la résistance d'un objet à une modification de son mouvement de rotation et il vaut : $J = \frac{m \times h^2}{3} \text{ kg m}^2$

Dans un premier temps, nous posons comme constante de raideur des ressorts : $k = 1 \text{ N m}^{-1}$

La longueur minimale du ressort (l_{min}) est posée comme étant proche de 0 afin de ne pas avoir de problème dans la définition des calculs qui s'avèrent non définis si $l_{min} = 0 \text{ m}$ (problème dû aux nombreuses approximations faites pour l'élaboration de toutes les équations citées préalablement). Cette longueur correspond à la longueur minimale lorsque le ressort est comprimé au maximum après l'impact avec le domino voisin ou le sol dans le cas du dernier domino.

Nous avons posé T_{max} qui correspond au nombre de lignes maximales de nos tableaux (correspondant au nombre d'itérations dans le temps tout au long de l'expérience). Étant donné que le programme de base disponible sur le moodle nous faisait travailler avec des tableaux (pointeurs), nous avons alors continué avec cette méthode, bien que l'utilisation de la classe vector aurait été un choix bien plus judicieux, notamment grâce au fait que nous aurions pu agrandir nos vecteurs autant que souhaiter sans se voir être contraint par une taille fixe et immuable.

Ici, la taille des tableaux doit-être fixe lors de sa déclaration même si l'allocation de mémoire se fait dynamiquement. Cela nous oblige à faire une étude (tester toutes les combinaisons possibles avec notre code) pour prévoir la taille du tableau qu'il nous faut dans chaque cas lors du changement de valeur de chaque paramètre afin d'éviter tout problème de segmentation.

La seule chose que nous n'avons volontairement pas prise en compte pour éviter d'allonger le code est un nombre de dominos trop important. En effet, il faudrait agrandir la fenêtre où les graphiques sont tracés pour voir apparaître la chute de 100 dominos par exemple. Mais nous ne l'avons volontairement pas prévu pour éviter un code trop lourd et inutile. Sachant qu'ici, nous proposons déjà différentes combinaisons possibles et sympathiques avec 10 dominos ou plus (15 dominos par exemple).

Concernant la constante de pesanteur que nous pouvons changer dans le programme si nous souhaitons nous positionner sur une autre planète : les tests réalisés sur ces dernières ne sont bien évidemment pas à prendre au sérieux, l'atmosphère terrestre ne représentant pas l'atmosphère de toutes les planètes malheureusement. Les simulations sont donc faites avec l'hypothèse que les planètes ont une atmosphère avec la même viscosité moléculaire que celle de la Terre.

4 Limites quand tous les dominos sont couchés

4.1 Limite de la longueur des ressorts

Dans notre modélisation de la chute de domino, il ne fallait pas simplement calculer les valeurs des angles ainsi que les longueurs des ressorts grâce aux équations données (énoncées en première partie). En effet, pour tous les dominos (excepté le dernier), il fallait vérifier que le résultat du calcul de la longueur du ressort ne soit jamais supérieur à sa longueur à vide (ce qui peut arriver lorsque les angles deviennent trop petits). Par sécurité, dès que c'est le cas, alors nous avons imposé au résultat du calcul de prendre la valeur de la longueur à vide. De même, si nous avions une valeur inférieure à la valeur du ressort minimale (l_{min}) alors, nous imposons que cette valeur devienne égale à l_{min} .

4.2 Limite de la valeur de l'angle maximal du $(n + 1)^{ème}$ domino (d'indice n) (différent du dernier domino)

Prenons pour commencer le domino d'indice 0. Nous devons prendre en compte l'angle limite maximal que ce dernier peut avoir avec la verticale afin de ne pas se retrouver avec des valeurs d'angles totalement erronées. Cette condition est atteinte lorsque tous les dominos sont couchés (les uns sur les autres) avec chacun une longueur de ressort compressée au maximum, soit pour l_{min} environ (les ressorts possédant une certaine raideur, leurs longueurs varient légèrement de celle qui est minimale, mais de manière insignifiante et négligeable). Nous avons ainsi posé une condition limite que ne peut pas dépasser l'angle du premier domino lorsque tous les dominos sont couchés. Pour déterminer cet angle α nous pouvons nous aider du schéma suivant :

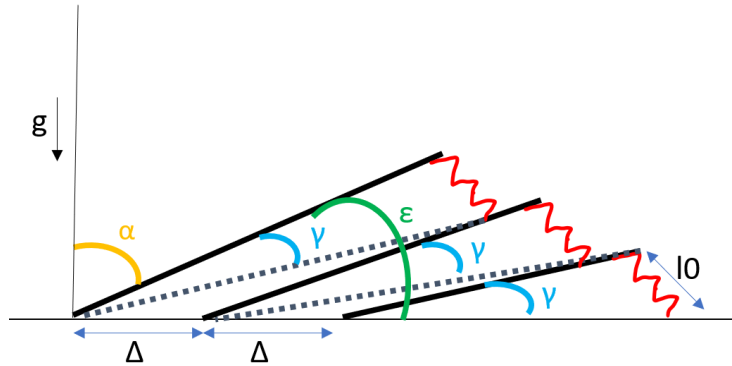


Figure 3: Schéma pour le calcul de l'angle maximal quand tous les dominos sont à terre

Grâce au schéma ci-dessus, nous avons : $\cos(\gamma) = \frac{h}{H}$ et $\sin(\gamma) = \frac{l_{min}}{H}$, d'où :

$$H = \frac{h}{\cos(\gamma)} = \frac{l_{min}}{\sin(\gamma)}$$

ainsi

$$\gamma = \arctan\left(\frac{l_{min}}{h}\right)$$

Or, nous savons que l'angle α recherché vaut $\frac{\pi}{2} - \epsilon$, sachant que nous avons tous les dominos avec la même hauteur h ainsi que la même longueur de ressort qui correspond à la longueur de ressort minimale. De plus, nous avons N_{max} dominos, nous pouvons donc en déduire que :

$$\epsilon = \gamma \times N_{max}$$

donc l'angle recherché vaut :

$$\alpha_{0,Max} = \frac{\pi}{2} - \epsilon = \frac{\pi}{2} - N_{max} \times \gamma = \frac{\pi}{2} - N_{max} \times \arctan\left(\frac{l_{min}}{h}\right)$$

Ainsi, le calcul de cet angle nous permet de créer une limite dans notre code. En effet, nous devons considérer que la valeur maximale de l'angle du premier domino avec la verticale n'est jamais supérieure à cet angle $\alpha_{0,Max}$. Si c'est le cas, alors nous ramenons l'angle à celui-ci.

Dans le même principe, nous avons rajouté une limite d'angle pour la valeur maximale de l'angle que peut avoir le domino d'indice n . En effet, si nous souhaitons l'angle formé par le $(n+1)^{ème}$ domino, alors, nous devons connaître l'angle formé par celui-ci qui est le même que celui formé par les dominos suivants. Or, l'angle maximal formé par ces derniers correspond au cas où leur longueur de ressort est au minimum, soit l_{min} . De plus, si nous nous plaçons au $(n+1)^{ème}$ domino (d'indice n), alors, il y a $N_{max} - n$ dominos couchés (lui-même plus tous les suivants). Ainsi l'angle γ correspond à l'angle d'un domino couché sur son voisin (cf Figure 3). L'angle formé par tous les dominos couchés à partir du domino d'indice n y compris est : $\epsilon = \gamma \times (N_{max} - n)$. D'où le fait que l'angle maximal formé par le $(n+1)^{ème}$ domino (d'indice n) soit de :

$$\alpha_{n,Max} = \frac{\pi}{2} - (N_{max} - n) \times \arctan\left(\frac{l_{min}}{h}\right)$$

En réfléchissant de la même manière que précédemment, nous pouvons définir une limite que peut avoir le dernier domino d'indice $N_{max} - 1$. En effet, celui-ci n'a aucun domino après lui, ainsi $\epsilon = \gamma \times (N_{max} - (N_{max} - 1)) = \gamma$, d'où :

$$\alpha_{N_{max}-1,Max} = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{l_{min}}{h}\right)$$

De la même manière que précédemment, nous avons entré dans le code la limite : si l'angle d'inclinaison du domino d'indice n est trop grand par rapport à l'angle d'inclinaison du domino à sa droite, alors la valeur de ce premier sera ajustée pour éviter que les dominos ne se transpercent les uns les autres. Cet ajustement est réalisé grâce à la formule ci-dessous :

$$\alpha_{n,Limite} = \alpha_{n+1} + \arcsin\left(\Delta \times \frac{\cos(\alpha_{n+1})}{h}\right)$$

4.3 Limite de la valeur de l'angle choc du dernier domino avec le sol

Il nous fallait trouver l'angle choc que possède le dernier domino lors du contact de son ressort avec le sol afin de poser la condition limite à partir de laquelle la longueur de son ressort doit être calculée.

Ce domino n'ayant aucun autre domino à sa droite, nous devons trouver son angle choc lorsque son ressort entre en contact avec le sol. Avant cet instant, nous savons que le ressort n'est pas encore comprimé, ainsi sa longueur ne varie pas et il vaut l_0 jusqu'au contact. Nous pouvons calculer cet angle grâce aux formules simples de trigonométrie.

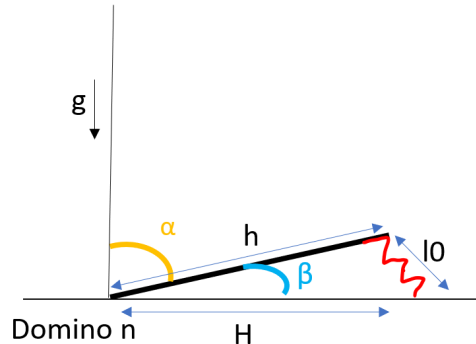


Figure 4: Schéma pour calculer l'angle du dernier domino au moment où son ressort touche le sol

Nous avons ainsi :

$$\cos(\beta) = \frac{h}{H} \text{ et } \sin(\beta) = \frac{l_0}{H}$$

d'où : $H = \frac{h}{\cos(\beta)} = \frac{l_0}{\sin(\beta)}$ donc

$$\frac{\sin(\beta)}{\cos(\beta)} = \tan(\beta) = \frac{l_0}{h}$$

On retrouve ainsi la valeur de l'angle du dernier domino avec la verticale qui est :

$$\alpha_{N_{max}-1,Choc} = \frac{\pi}{2} - \beta = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{l_0}{h}\right)$$

Ainsi, nous pouvons définir que lorsque la valeur de l'angle est inférieure ou égale à cet angle $\alpha_{N_{max}-1,Choc}$ alors le ressort du dernier domino n'a pas encore touché le sol, ainsi sa longueur vaut la longueur du ressort à vide.

Dans le cas contraire, si la valeur de l'angle est supérieure à l'angle $\alpha_{N_{max}-1,Choc}$ alors le ressort du dernier domino est entré en contact avec le sol, ainsi sa longueur est calculée grâce à la formule (5). En prenant en compte que le domino suivant représente la Terre, ainsi son angle $\alpha_{(N_{max}-1)+1} = \alpha_{N_{max}}$ vaut, dans ce cas, 90 degrés soit $\frac{\pi}{2}$ radians.

5 Nos résultats

Grâce à toutes les formules expliquées précédemment, nous avons pu modéliser la chute d'une chaîne de dominos. Pour cela, nous avons décidé de tracer 3 graphiques montrant respectivement : l'évolution des angles de chaque domino en fonction du temps, l'évolution de la longueur des ressorts en fonction du temps, et enfin l'évolution de la vitesse de propagation de l'onde (linéaire) à travers les dominos en fonction du temps.

Nous nous plaçons ci-dessous dans le cas où une chaîne de 10 dominos serait dans l'air, soumis au champ de pesanteur terrestre, et dans le cas où $k = 1 \text{ N m}^{-1}$ (tous les autres paramètres étant égaux aux valeurs qui ont pu être citées auparavant).

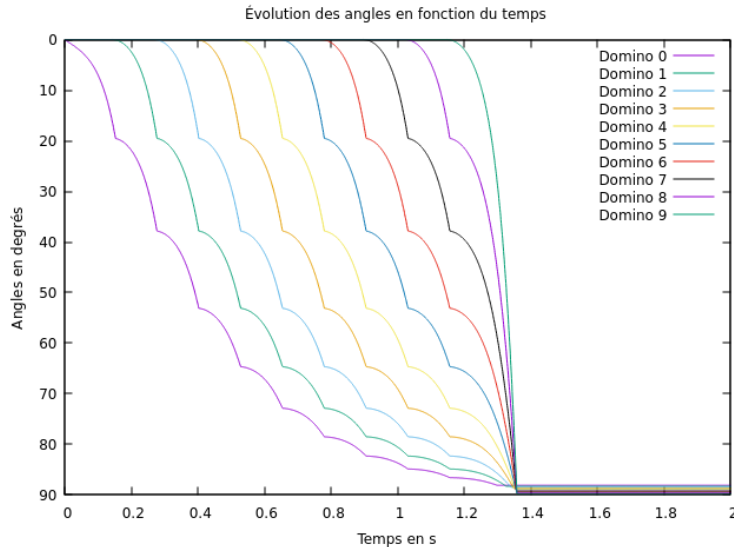


Figure 5: Évolution des angles de tous les dominos de la chaîne en fonction du temps (Cas $k = 1 \text{ N m}^{-1}$ et $\gamma = \gamma_{air}$)

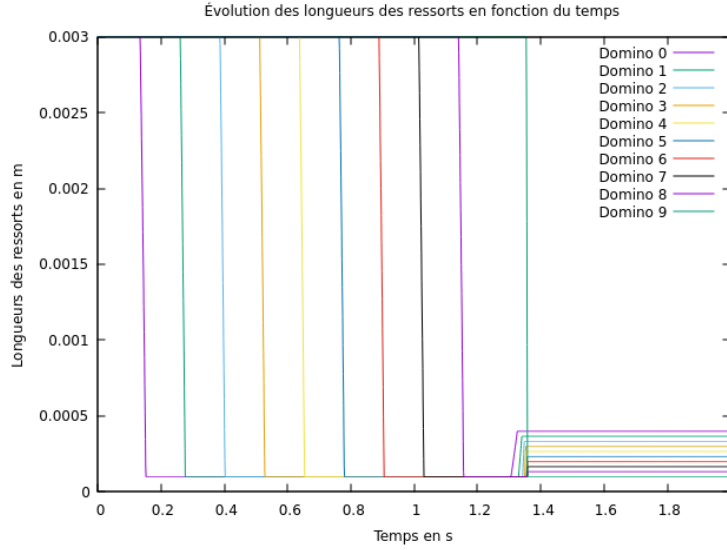


Figure 6: *Évolution des longueurs des ressorts de tous les dominos de la chaîne en fonction du temps (Cas $k = 1 \text{ N m}^{-1}$ et $\gamma = \gamma_{air}$)*

Nous remarquons que nos figures sont bien en accord avec les observations expérimentales que nous pourrions obtenir. En effet, sur la Figure (5), si nous détaillons un peu ce qui s’y passe, nous observons sur la courbe violette représentant l’évolution de l’angle alpha du 1^{er} domino en fonction du temps, que ce dernier chute librement, soumis uniquement à son propre poids jusqu’à une cassure ”brusque” de la courbe. Cette dernière correspond à la collision entre le 1er domino et son voisin de droite. Cette correspondance peut naturellement être confirmée par 2 biais : l’un en remarquant que la courbe verte, représentant l’évolution de l’angle alpha du second domino en fonction du temps, commence à croître au même instant que celui de la présumée collision. Et l’autre, grâce à la Figure d’après (6), où nous remarquons que la longueur du ressort du domino d’indice 0 varie brusquement au même instant que la présumée collision elle-même a lieu, ce qui a du sens puisque lorsque le premier domino entre en contact avec le second, le ressort se retrouve comprimé entre les deux.

Nous pouvons noter que le ressort se comprime et tend vers 0 avant de se détendre de nouveau vers la fin de l’expérience. Cela peut s’expliquer par une atteinte d’équilibre une fois tous les dominos tombés puisqu’il n’y a plus de choc ni aucune variation de longueur possible puisque plus de perturbation. Alors la force de rappel du ressort détend le ressort jusqu’à ce qu’il soit à l’équilibre.

Par ailleurs, nous remarquons qu’à la fin, le ressort le plus comprimé correspond naturellement au ressort du tout dernier domino qui supporte les masses des $N_{max} - 1$ dominos qui se trouvent avant lui (ici 9). Il est donc normal de trouver des longueurs de ressorts du moins comprimé au plus comprimé dans le sens croissant des positions des dominos. Une autre remarque que nous pouvons faire est que sur la Figure (5), nous pouvons voir que chaque changement brusque de variation d’une même courbe correspond au nombre de chocs ressentis par le domino en question. De ce fait, nous pouvons compter 9 changements de variation pour le domino d’indice 0 alors que pour l’avant-dernier domino, il n’y a qu’un seul choc ressenti (puisque’il n’y a qu’un seul changement brusque de variation). Nous pouvons également constater que ces changements sont de plus en plus prononcés au fil des dominos. En effet, cela a du sens puisque le 9^{ème} domino par exemple va subir une collision de 8 dominos qui s’effondrent sur lui tandis que le 2^{ème} domino ne va subir le choc que d’un seul domino qui s’écroule sur lui.

Sur la Figure (5), nous remarquons que l'angle du dernier domino n'a quant à lui pas de singularité visible à première vue concernant les valeurs de son angle. En effet, celui-ci n'entre en contact avec aucun domino, il effectue ainsi une chute libre. En revanche, cette dernière s'achève au moment où son ressort entre en contact avec le sol, i.e. à une hauteur du sol correspondant à la longueur du ressort au repos de l_0 valant ici 0.3 cm, soit une valeur très faible. Ainsi, ce domino a en réalité une singularité, autrement dit un changement brusque des valeurs de son angle, mais à une hauteur très faible, ce qui provoque sa non-visibilité sur le graphique. Sur cette même figure, tous les dominos ont chacun à la fin de leur chute une valeur d'angle constante valant quasiment 90 degrés puisqu'ils sont presque tous à terre (les ressorts les empêchant d'être totalement sur le sol). Cela est simplement dû au fait que les dominos sont tous "à l'équilibre", ils ont leur ressort à une longueur fixe et donc par conséquent un angle constant. Nous remarquons bien que le premier domino a un angle à l'équilibre inférieur aux dominos suivants. Cela est cohérent, car le domino d'indice 0 est au-dessus des autres dominos, son angle formé avec la verticale est donc l'angle le plus faible parmi ceux formés par tous les dominos.

De plus, nous remarquons à vue d'œil que le premier domino chute plus lentement que tous les autres puisque la pente de la courbe avant le premier changement brusque est moins raide que celles des courbes suivantes. Nous notons également que les dominos suivants tombent tous avec une vitesse similaire, car leur changement de valeur d'angle et de longueurs de ressort s'effectue pour un intervalle de temps d'environ 0.15 seconde (temps séparant la décroissance de longueurs de deux dominos successifs). En revanche, ce temps est plus élevé pour le dernier domino, car ce dernier ne touche aucun autre domino, mais le sol ainsi son temps de chute jusqu'au contact avec celui-ci est plus grand que le temps de chute des autres dominos jusqu'à leur contact avec le domino suivant.

Afin de voir l'influence de l'un des paramètres sur l'expérience, nous décidons de faire varier k qui vaut désormais 8 N m^{-1} :

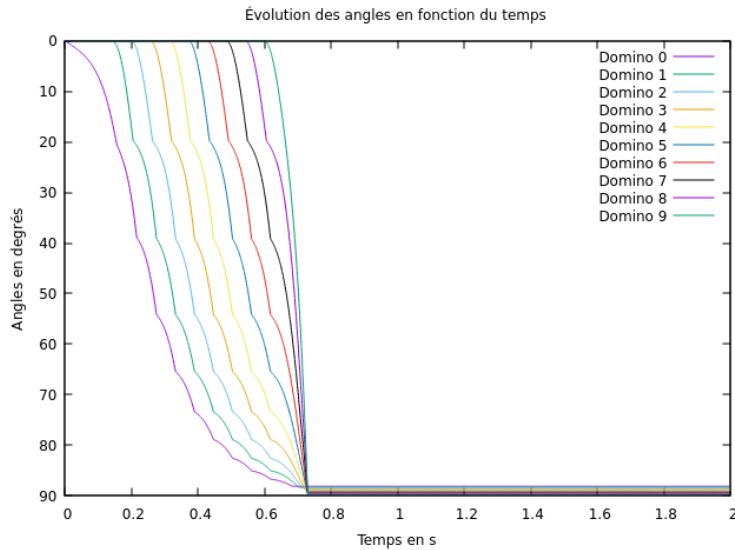


Figure 7: *Évolution des angles de tous les dominos de la chaîne en fonction du temps (Cas $k = 8 \text{ N m}^{-1}$ et $\gamma = \gamma_{air}$)*

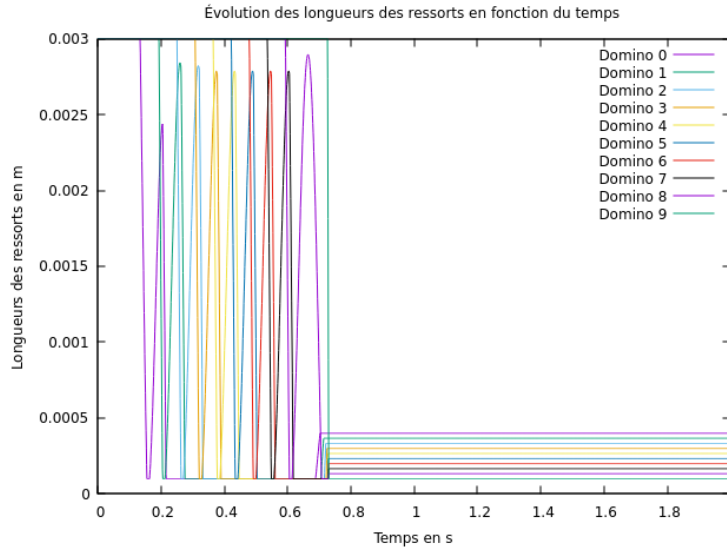


Figure 8: *Évolution des longueurs des ressorts de tous les dominos de la chaîne en fonction du temps (Cas $k = 8 \text{ N m}^{-1}$ et $\gamma = \gamma_{air}$)*

Grâce aux deux figures ci-dessus, nous avons les mêmes constatations que celles réalisées précédemment, c'est-à-dire dans le cas de $k = 1 \text{ N m}^{-1}$. Nous pouvons désormais simplement rajouter que lorsque nous augmentons la constante de raideur k du ressort, alors, nous avons l'apparition d'oscillations concernant la longueur du ressort en fonction du temps. Cela est dû au fait que le ressort va osciller (i.e. va faire varier sa longueur) jusqu'à avoir des longueurs de ressort stables.

Dans notre cas, nous remarquons que l'angle du domino ne diminue pas quand le ressort oscille, ce qui est dans un premier temps contre intuitif. En effet, nous pouvons penser que comme le ressort oscille alors le domino va osciller en phase. Mais cette constatation peut être due à la masse du ressort qui est prise comme étant négligeable devant celle du domino. Ainsi, lorsque le ressort touche le domino suivant et oscille pour se ramener à une longueur plus faible, le domino continue, lui, à tomber à cause de son poids.

De plus, nous constatons que la convergence des angles et des longueurs vers leur donnée d'équilibre se fait plus rapidement que dans le cas où k valait 1 N m^{-1} . En effet, cette dernière se fait à environ 0.75 seconde alors que pour $k = 1 \text{ N m}^{-1}$, elle se faisait vers 1.4 seconde. Ainsi, la constante de raideur du ressort joue naturellement un rôle important concernant la vitesse de chute des dominos (ce qui était plutôt prévisible). Plus la constante de raideur est élevée, plus la vitesse de chute se fera rapidement. En effet, dans le graphique (8), nous remarquons que le premier domino tombe à la même vitesse que lorsque k valait 1 N m^{-1} . En revanche, dès que son ressort touche le domino suivant, alors ce domino tombe plus rapidement. Cela est intuitif, car plus la constante de raideur est forte plus le ressort a des difficultés à se compresser, cela provoque donc une force plus grande sur le domino suivant contrairement à un ressort à faible constante de raideur.

Nous avons ensuite voulu modéliser la vitesse de l'onde de chute en fonction du temps. Pour ce faire, nous avons supposé que pour un temps dt , donc un temps très court, nous avons une trajectoire rectiligne. Ainsi, la vitesse de propagation de l'onde équivaut à la distance entre le domino au temps t et ce même domino, mais au temps $t+dt$, le tout divisé par le temps qui s'est écoulé, i.e. dt ici.

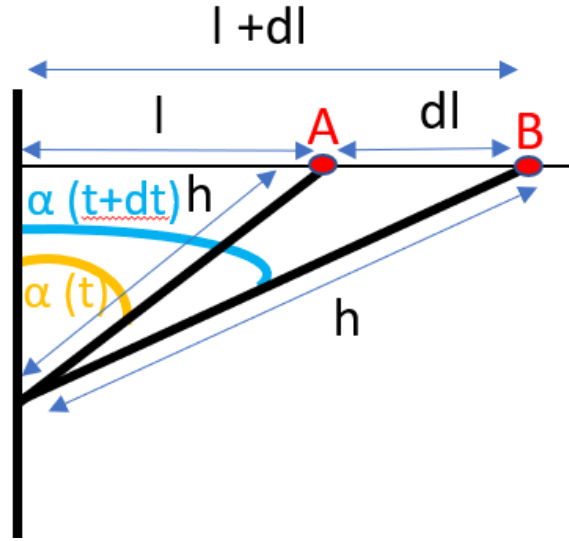


Figure 9: Schéma pour détermination de l'expression littérale de la vitesse linéaire de propagation de l'onde de chute

D'après cette figure, on a : $l = \sin(\alpha(t)) \times h$ et $l + dt = \sin(\alpha(t + dt)) \times h$ donc

$$l + dl - l = dl = h \times \sin(\alpha(t + dt)) - h \times \sin(\alpha(t))$$

donc

$$v = \frac{h \times \sin(\alpha(t + dt)) - h \times \sin(\alpha(t))}{dt}$$

Nous décidons cette fois-ci de rester à k constant en ne changeant que la valeur de la viscosité moléculaire du milieu de propagation. En effet, nous utilisons l'air dans un premier temps et l'eau dans un second temps. Voici ce que nous obtenons :

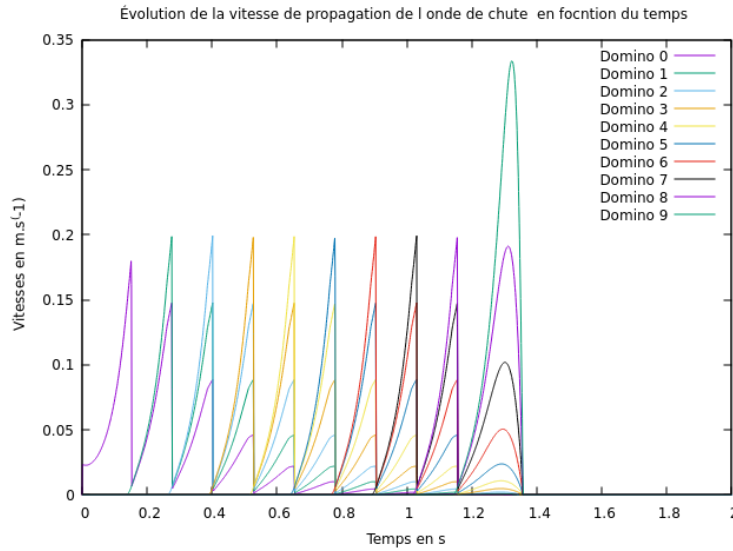


Figure 10: Évolution de la vitesse linéaire de propagation de l'onde de chute pour des dominos dans l'air avec $k = 1 \text{ N m}^{-1}$

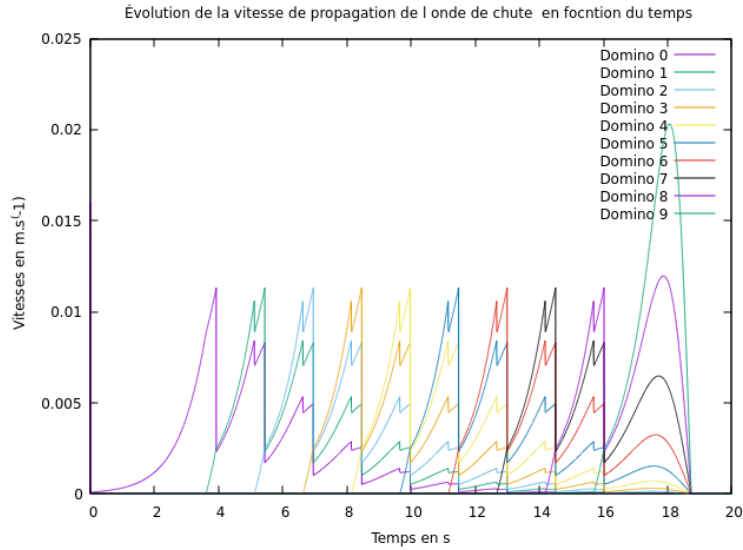


Figure 11: *Évolution de la vitesse linéaire de propagation de l'onde de chute pour les dominos dans l'eau avec $k = 1 \text{ N m}^{-1}$*

Sur la Figure (10) nous remarquons que la vitesse linéaire de chute du premier domino augmente progressivement, puis elle change brusquement de valeur pour tendre vers 0 m s^{-1} lorsque ce dernier entre en contact avec le prochain domino. Après le choc entre ces deux derniers, la vitesse linéaire de chute du domino d'indice 0 augmente, mais atteint une vitesse nettement plus faible que précédemment. La vitesse du domino d'indice 1, quant à elle, augmente et atteint une valeur plus grande que celle du domino d'indice 0 au même instant puisqu'elle ne fait que de commencer sa chute. Et après la prochaine collision, le schéma se répète et se perpétue jusqu'à ce que les angles des dominos atteignent un angle maximal dont nous avons parlé préalablement dans ce rapport pour lequel ils verront leurs vitesses devenir nulles.

Nous remarquons que les dominos allant de l'indice 0 jusqu'à l'avant-dernier domino d'indice ($N_{\text{max}} - 2$) ont tous la même valeur maximale de vitesse. Cette limite correspond à la vitesse maximale de propagation de l'onde de chute au sein des dominos et qui est en réalité une vitesse limite. Si nous souhaitions tracer le profil de la vitesse de propagation de l'onde de chute, il suffirait de commencer par suivre la courbe violette et puis de plafonner au niveau de tous les sommets pour chaque domino jusqu'à arriver au dernier où il serait nécessaire de suivre sa courbure naturellement différente des autres puisque ce dernier domino est en totale chute libre, jusqu'à atteindre une vitesse de 0 m s^{-1} , ce qui explique sa courbure en cloche.

Passons au cas où nous avons les dominos plongés dans l'eau (Voir figure (11)). Nous pouvons faire les mêmes approximations que celles faites précédemment. En revanche, nous constatons deux changements qui sont : la vitesse du domino d'indice 0 tend directement vers la vitesse limite. En effet, cela est dû au fait que la viscosité est plus grande, la vitesse de chute est donc plus faible que précédemment. Ainsi, lorsqu'un domino tombe dans l'eau, il rencontre une résistance beaucoup plus importante qu'en tombant dans l'air, car l'eau est beaucoup plus dense que l'air. Cette résistance peut causer des fluctuations dans la vitesse du domino. En effet, cela est visible, car nous observons deux pics distincts concernant la vitesse des dominos lors de la chute dans l'eau. En revanche, lorsque le domino tombe dans l'air, la résistance est relativement faible, ce qui peut donner lieu à une seule pointe de vitesse.

6 Conclusion

Pour conclure, ce projet nous a permis de développer nos bases en c++. Nous avons ainsi pu simuler la chute de dominos et comprendre les différents aspects et enjeux physiques que peut générer ce genre d'expérience plutôt simple de premier abord. Cela demandait une bonne maîtrise et compréhension de ce que l'on souhaitait modéliser afin de créer les conditions aux limites nécessaires.

De plus, nous avons pu effectuer ce programme en collaborant entre nous grâce à la plateforme Github en n'utilisant uniquement que lignes de commandes du terminal Linux, sans la moindre interface graphique. Cela nous a aidé à stocker, à structurer et à gérer notre code, à optimiser notre travail collaboratif, ainsi qu'à suivre et contrôler les modifications que nous avons pu apporter au fil du temps sans interférer dans le travail d'autrui.

Nous considérons que notre code est assez complet dans son ensemble même si nous aurions pu faire encore plus bien évidemment, avec un délai supplémentaire. Dans la partie "Résultats", nous avons fait varier seulement 2 paramètres par choix : la viscosité et la constante de raideur du ressort. En revanche, l'utilisateur peut changer tous les paramètres du système qu'il désire en fonction de ce qu'il souhaite modéliser. Par exemple, il peut changer la planète sur laquelle il réalise l'expérience, mais aussi, changer la taille des dominos et/ou la distance séparant ces derniers, où encore changer la vitesse de rotation initiale du premier domino, ou ne choisir qu'un seul domino qui composera la chaîne, ou en choisir 10 avec un espacement plus grand que la taille de ces derniers, et bien d'autres possibilités encore.

Nous avons complété notre code avec des sécurités diverses et variées, ainsi que des remarques qui s'affichent dans le terminal si l'utilisateur choisit des valeurs aberrantes. En effet, s'il rentre une valeur de distance de domino plus grande que la taille du domino, alors le code va s'exécuter normalement et entièrement, en affichant un message précisant que seul le premier domino sera tombé. Cela permet de n'avoir aucune erreur et aucune possibilité de planter le programme. De ce fait, dans le cas précédent, les 3 graphiques s'afficheront, mais avec seulement une variation de l'angle, de la longueur du ressort et de la vitesse de propagation de l'onde de chute du/à travers le domino d'indice 0.

Également, le programme ne "plante pas" si les valeurs entrées par l'utilisateur sont erronées telles qu'un nombre de dominos négatif ou une vitesse de rotation aberrante ou carrément des valeurs entrées qui ne seraient pas du type attendu comme par exemple une chaîne de caractère ou autre.

Bibliographie

- [1] **Image page de garde :** istockimage. (2003). *Chute de Dominos - Illustration libre de droits*. Disponible en ligne : <https://www.istockphoto.com/fr/vectoriel/chute-de-dominos-gm116345962-5124725>. Date d'accès : 16 mars 2023.
- [2] Collet,T. (s.d.). *Force de rappel exercée par un ressort*. Disponible en ligne : http://thierry.col2.free.fr/restreint/exovideo_lycee/index_physique/force_rappel_ressort.html. Date d'accès : 10 avril 2023.
- [3] Amiroudine,S et Battaglia,J-L. (2022). *Mécanique des fluides*. Dunod.
- [4] Beauchamps,J. (2001). *NOTIONS DE MECANIQUE DES FLUIDES*. Disponible en ligne : <https://www.u-picardie.fr/beauchamp/eadaa/mecafluib.htm>. Date d'accès : 10 mars 2023.