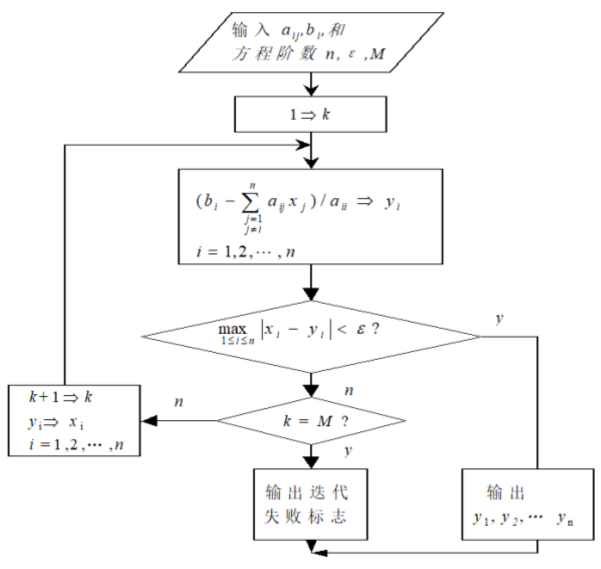
数值分析

第六章 解线性方程组的迭代法

- 迭代法在线性方程组中的应用，是求解具有大型稀疏矩阵的线性方程组的重要方法之一
- 基本思想: 将线性方程组转化为便于迭代的等价方程组，对任意初始值不断按照某种计算的值进行修正，最终获得接近精确值的方程近似解。
- $x^{k+1}=Gx^k+d(k=0,1,\dots)$，选定初始向量 $x^0=\{x_1^0,x_2^0,\dots,x_n^0\}^T$，反复迭代逼近方程组的精确解。
  迭代法：由Ax=b有唯一解x = A^{-1}b,经过变换构造出等价同解方程组x = Gx + d.将上式改写为迭代式
- 如果每一次迭代后的x都存在极限，则迭代法是收敛的。否则就是发散的。

雅可比迭代法

- 推导过程
  - 设方程组Ax=b的系数矩阵A非奇异，且主对角线元素aii≠0(i=1,2,⋯,n),则可将A分成A = D - L - U.（D是主对角元素矩阵，L是下三角矩阵，U是上三角矩阵）。
  - $D_x=(L+U)x+b$
    即
  - $\because a_{ii}\neq 0(i=1,2,\dots,n)$，则 $x=D^{-1}(L+U)x+D^{-1}b$
  - $x^{k+1}=D^{-1}(L+U)x^k+D^{-1}b$ 令 $B=D^{-1}(L+U),f=D^{-1}b$
    B为雅可比矩阵,下式为雅可比迭代式
- $$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\\cdots\\a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n\end{cases}$$
  将n元线性方程组
- $$x_i^{(k+1)}=\frac{1}{a_{ii}}\left(b_i-\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}a_{ij}x_j^{(k)}\right)\quad i=1,2,\cdots n$$
  建立迭代公式
- $$x^0=\{x_1^0,x_2^0,\dots,x_n^0\}^T=(0,0,0)^T$$
  选定初始向量x^0进行迭代
- 算法迭代过程
  - 

    注意对方框内数的范围。
  - ```
    void jacobi(){
        double maxnum = -99999999;
        for(int i = 1;i <= n;i ++) x[i] = 0;
        for(int k = 1;;k ++){
            for(int i = 1;i <= n;i ++){
                double sum = 0;
                for(int j = 1;j <= n;j ++){
                    if(j != i) sum += a[i][j] * x[j];
                }
                y[i] = (b[i] - sum) / a[i][i];
            }
            for(int i = 1;i <= n;i ++){
                maxnum = max(fabs(y[i] - x[i]),maxnum);
            }
            if(maxnum < 1e-8) break;
            if(k == M) {cout << "error : This matrix is divergent!! " << endl;return ;}
            for(int i = 1;i <= n;i ++) x[i] = y[i];
        }
        for(int i = 1;i <= n;i ++) cout << y[i] << " ";
        cout << endl;
    }
    ```

高斯-塞德尔（Gauss-Seidel）迭代法

- $$x_i^{(k+1)}=\frac{1}{a_{ii}}\left(b_i-\sum_{j=1}^{i-1}a_{ij}x_j^{(k+1)}-\sum_{j=i+1}^{n}a_{ij}x_j^{(k)}\right)$$
  $$(\mathbf{i=1,2,\dots,n\quad k=0,1,2,\dots})$$
  在Jacobi迭代法中，每次迭代只用到前一次的迭代值，若每次迭代充分利用当前最新的迭代值，即所有新的x代替就的x值。就得到高斯-赛德尔迭代法。其迭代法格式为:
- 推导过程
  - $$Dx^{(k+1)}=Lx^{(k+1)}+Ux^{(k)}+b$$
    A = D - L - U,则Ax = b等价于(D - L - U)x = b,则
  - $$(D-L)x^{(k+1)}=Ux^{(k)}+b$$
    |D|≠0，所以|D-L|=|D|≠0
  - $$x^{(k+1)}=(D-L)^{-1}Lk^{(k)}+(D-L)^{-1}b$$
  - 令 $G_1=(D-L)^{-1}U,\quad d_1=(D-L)^{-1}b$ 则高斯－塞德尔迭代形式为: $x^{(k+1)}=G_1x^{(k)}+d_1$

超松弛迭代法(SOR方法)

- 为了加速迭代
- 可以看成是带参数的高斯-赛德尔迭代法
- 具体计算公式
  - $$x_i^{(k+1)}=(1-\omega)x_i^{(k)}+\frac{\omega}{a_{ii}}\left(b_i-\sum_{j=1}^{i-1}a_{ij}x_j^{(k+1)}-\sum_{j=i+1}^{n}a_{ij}x_j^{(k)}\right)$$
    系数ω称为松弛因子
- 关于ω
  - 为了保证迭代过程收敛，要求0<ω< 2。
  - 当ω=1时，就是高斯-塞德尔迭代法。
  - 当0<ω< 1时，为低松弛法。
  - 当1<ω< 2时称为超松弛法。
- 推导
  - $x^{(k+1)}=(1-\omega)x^{(k)}+\omega D^{-1}\left(b+Lx^{(k+1)}+Ux^{(k)}\right)$ 或 $Dx^{(k+1)}=(1-\omega)Dx^{(k)}+\omega\left(b+Lx^{(k+1)}+Ux^{(k)}\right)$
    设线性方程组 Ax=b 的系数矩阵A非奇异,且主对角元素aii ≠ 0(i = 1,2,⋯,n),则将A分裂成A=d-L-U, 则超松弛迭代公式用矩阵表示为
  - $$(D-\omega L)x^{(k+1)}=[(1-\omega)D+\omega U]x^{(k)}+\omega b$$
    故
  - $$x^{(k+1)}=(D-\omega L)^{-1}[(1-\omega)D+\omega U]x^{(k)}+\omega(D-\omega L)^{-1}b$$
    超松弛公式为
  - $$L_\omega=(D-\omega L)^{-1}[(1-\omega)D+\omega U]$$
    $$f_\omega=\omega(D-\omega L)^{-1}b$$
    令
  - $$x^{k+1}=L_\omega x^{(k)}+f_\omega$$
    则

迭代法的收敛性

- $$||(I\pm G)^{-1}||<\frac{1}{1-||G||}$$
  对给定方阵G, 若||G|| < 1,则 I - G 为非奇异矩阵，且
- $\lim\limits_{k\to\infty}A_k=A\Leftrightarrow\lim\limits_{k\to\infty}\|A_k-A\|=0$，其中 $\|.\|$ 为矩阵的任一算子范数。
- $\lim\limits_{k\to\infty}A_k=\boldsymbol{A}\Leftrightarrow\forall\boldsymbol{x}\in R^n,\ \lim\limits_{k\to\infty}A_k\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Ax}.$
- 设矩阵 $\boldsymbol{B}=\left(b_{ij}^{(k)}\right)\in R^{n\times n}$, 则下列三个条件等价:
  $(1)\forall\boldsymbol{x}\in R^n,\ \lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{B}^k\boldsymbol{x}=0;$
  $(2)\ \lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{B}^k=0;$
  $(3)B$ 的谱半径 $\rho(B)<1$
- 迭代公式x^{k+1} = Gx^{k} + d（k = 0,1,⋯）收敛的充分必要条件是迭代矩阵G的谱半径ρ(G) < 1
  - 由此定理可知，不论是雅可比迭代法、高斯—塞德尔迭代法还是超松弛迭代法，它们收敛的充要条件是其迭代矩阵的谱半径ρ(G) < 1
- $$\left\|x^\bullet-x^{(k)}\right\|\le\frac{\|G\|}{1-\|G\|}\left\|x^{(k)}-x^{(k-1)}\right\|\ \text{及}\ \left\|x^\bullet-x^{(k)}\right\|\le\frac{\|G\|^k}{1-\|G\|}\left\|x^{(1)}-x^{(0)}\right\|$$
  若迭代矩阵G的一种范数||G|| < 1,则迭代公式x^{k+1} = Gx^{k} + d（k = 0,1,⋯）收敛，且有误差估计式
  - $$||x^k-x^{k-1}||<\varepsilon$$
    由定理知，当||G|| < 1时，其值越小，迭代收敛越快，在程序设计中通常用相邻两次迭代作为控制迭代结束的条件
- 设n阶方阵A=(a_{ij})_{n×n}为严格对角占优阵，则非奇异.
- 系数矩阵为严格对角占优阵的线性方程组称作对角占优方程组。
- 严格对角占优线性方程组Ax = b的雅可比迭代公式和高斯-赛德尔迭代公式均收敛
- 若存在精确解
  - 若矩阵A按行(或列)严格对角占优,或按行(或列)弱对角占优不可约；则Jacobi迭代、Gauss-Seidel迭代都收敛。
- 若SOR迭代收敛，则松弛因子0<w<2
- 对于线性方程组Ax=b，若A为对称正定矩阵，则当0<ω<2时，SOR迭代收敛
- 对于线性代数方程组Ax=b， 若A按行(或列)严格对角占优，或按行(或列)弱对角占优不可约；则当0<w≤1时，SOR迭代收敛
- $$R=-ln\,\rho(B)$$
  迭代收敛速度:
- $\min\limits_{0<\omega<2}\rho(\boldsymbol{L}_\omega)=\rho\left(\boldsymbol{L}_{\omega_{\text{opt}}}\right)$. 在性质 A 下，$\omega_{\text{opt}}=\dfrac{2}{1+\sqrt{1-(\rho(J))^2}}$, 其中 $\boldsymbol{J}$ 为解 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的 $Jacobi$ 迭代法的迭代矩阵.
  ε 对于 SOR迭代法，要确定w_{opt}，使得
    ```