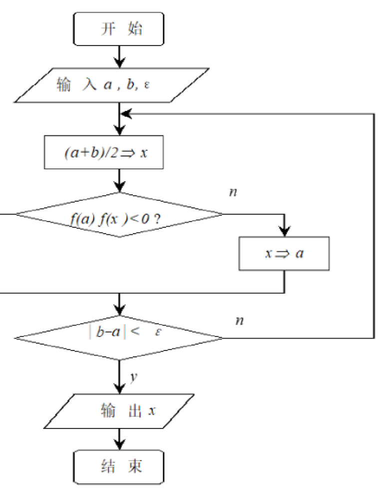
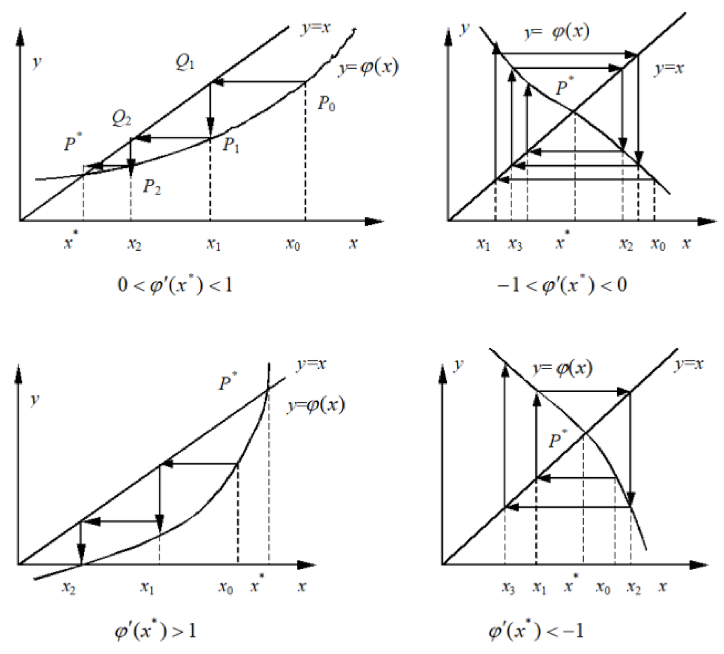
第七章：非线性方程与方程组的数值解法

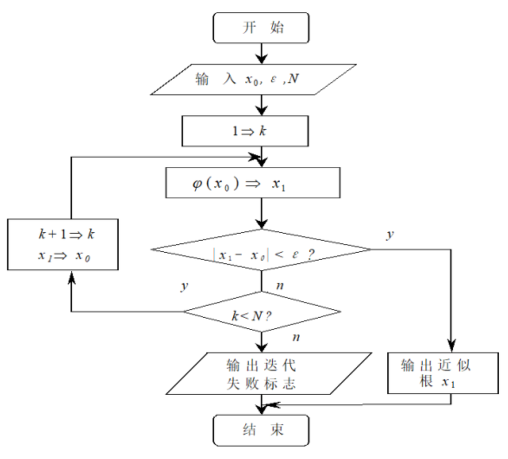
- **基本定理**
  - 零点
  - 重根
  - 代数方程：f (x) 多项式函数
  - 超越方程：含三角函数、指数、对数方程等
  - 注意：一般超过3次的代数方程或者超越方程很难求得精确解
- **一般求解法：**
  - 根是否存在/有几个根
  - 确定根的存在范围
  - 得到根的近似解
- **迭代法：只能求实根，用于确定根的初值并精确其结果**
- **二分法**
  - 通过零点存在定理判断是否存在根
  - 先确定有根区间，二分区间，通过判断f (x)的符号，将二分区间缩小，最终得到符合精度的近似根。
  - 圈定根的范围的方法
    - 画图法
      - (1) 直接画出f (x)的函数，可以直接看出曲线与 x 轴交点的大概位置
      - (2) 画出f (x)子函数的图像，交点的横坐标所在区间就是含根区间
    - 逐次搜索法
      - 假定有根区间[a,b]，从x = a，开始，通过x_i = x + ih迭代查找f(x _ i)的符号。若存在x_i与x_0的端点异号。则存在一个零点。并能确定一个零点存在区间[x_0,x_1].
  - $$|x^*-x_k|<\frac{b_k-a_k}{2}=\frac{b-a}{2^{k+1}},\because\frac{b_k-a_k}{2}=b_{k+1}-a_{k+1}=\frac{b-a}{2^{k+1}}$$
    每次二分之后，都取区间[a_k,b_k]的中点x_k = 1/2(a_k + b_k).作为近似值。若二分次数足够大，那么便有
  - $\frac{1}{2^{k+1}}(b-a)<\varepsilon$, 亦即当：$k\geq\frac{lg(b-a)-lg\,\varepsilon}{lg2}-1$ 时，到第 $k+1$ 次二分，计算得到的 x_k 就是满足精度要求的近似根。
    给定误差限:ε > 0,要想|x^* - x_k| < ε,只要取k满足
  - 二分法算法实现



- **不动点迭代法及其收敛性**
  - 任取一个初值 x_0, 带入式子 $x=\varphi(x)$ 的右边，得到新值 $x_1=\varphi(x_0)$，再将 x_k 带入 $x=\varphi(x)$，一直重复。就能得到最终解
    - 为求解非线性方程f(x)=0的根，先将其写成便于迭代的等价方程x = φ(x)，其中φ(x)为x的连续函数。
  - $x_{k+1}=\varphi(x_k)$ 产生的序列 $\{x_n\}$ 收敛，即 $\lim\limits_{x\to\infty}x^n=x^*$, 则迭代法收敛。
  - 迭代法的几何意义
    - 方程x = φ(x)的求根问题在几何上就是确定曲线y = φ(x)与y = x的交点P^x的横坐标。

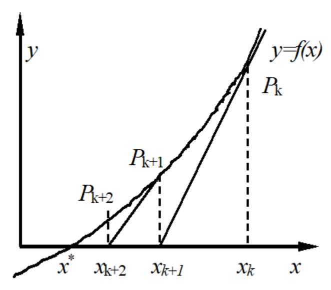


  - 迭代法收敛的条件
    - 全局收敛性:迭代序列 $\{x_i\}$ 对于任意初始值 $x_0\in[a,b]$ 都收敛
      - 全局收敛的充分条件：
        - 设迭代函数 $\varphi(x)\in[a,b]$ 满足以下两个条件：
          1. $\forall x\in[a,b]$, 有 $\varphi(x)\in[a,b]$;
          2. $\forall x,y\in[a,b]$，存在常数 $L(0\leq L\leq 1)$ 有 $|\varphi(x)-\varphi(y)|\leq L|x-y|$
        - 则 $x=\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上存在唯一是根 x^* ,对于任意初始值 $x_0\in[a,b]$, 有 $x_{n+1}=\varphi(x_n)$ 得到的迭代序列 $\{x_i\}$
          收敛到 x^*
        - $$|x^*-x_k|\leq\frac{L}{1-L}|x_k-x_{k-1}|,|x^*-x_k|\leq\frac{L^k}{1-L}|x_1-x_0|$$
    - 局部收敛性：
      - 设 $\varphi(x)$ 在 $x=\varphi(x)$ 的根 x^* 的邻域中有连续的一阶导数，且 $|\varphi'(x)|<1$ 则迭代过程 $x_{k+1}=\varphi(x_k)$ 具有局部收敛性。
    - 迭代法的收敛阶
      - 收敛阶是对迭代法的收敛速度的一种度量
      - 设迭代过程 $x_{n+1}=\varphi(x_n)$ 收敛于方程 $X=\varphi(x)$ 的根 x^*，如果当 $k->\infty$ 时，迭代误差 $e_k=x_k-x^*$ 满足：
        - $$\lim_{k\to\infty}\frac{x_{k+1}-x^*}{(x_k-x^*)^p}=C\neq 0$$
          则称该迭代过程是p阶收敛的。当p = 1，为线性收敛，1 < p < 2，为超线性收敛，当p = 2,为平方收敛。
      - 对于迭代过程 $x_{n+1}=\varphi(x_n)$ 及正整数 p，如果 $\varphi^{(p)}(x)$ 在根 x^* 邻域内连续，且满足：
        $$\varphi'(x^*)=\varphi''(x^*)=\ldots\varphi^{(p-1)}(x^*)=0$$
        $$\varphi^{(p)}(x^*)\neq 0$$
        则称该迭代过程在点 x^* 的邻域内是p阶收敛的。

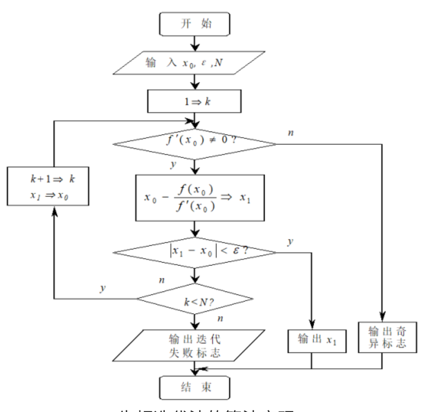


迭代法的算法流程

  - 为了使迭代过程收敛或提高收敛的速度, 可设法
    - (1) 提高初值的精度以减少迭代的次数
    - (2) 提高收敛的阶数 p
- **牛顿迭代法**
  - 牛顿迭代法结构简单，收敛速度快，又不存在发散问题。
  - 基本思想是将非线性函数f (x)逐步线性化，从而将非线性方程f (x) = 0近似转化为线性方程求解。
  - 牛顿迭代公式
    - $$x_{k+1}\approx x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)},\{k=0,1,2,\ldots\}$$
  - 牛顿迭代法的几何解释
    - 可以用切线方程来求解方程f(x) = 0的根，所以又叫牛顿切线法。



  - 牛顿迭代法的收敛性
    - $$\lim_{k\to\infty}\frac{|e_{k+1}|}{|e_k|}=\lim_{k\to\infty}\frac{|x^*-x_{k+1}|}{|x^*-x_k|^2}=\frac{|f''(x^*)|}{2|f'(x^*)|}$$
      设x*是方程f (x) = 0的单根，且f (x)在x*的某个邻域内有连续的二阶导数，则牛顿迭代法在x*附近局部收敛，且至少二阶收敛，有
    - 牛顿迭代法的局部收敛定理
      - 对于方程f (x) = 0，若存在区间(a,b)使得,
        - (1) f (x) = 0在区间(a,b)上存在单根x*;
        - (2)f''(x) 在区间(a,b)内连续。
        - 则牛顿迭代法在x*的某个领域内局部收敛
    - 牛顿迭代法的全局收敛定理
      - 对于方程 $f(x)=0$,若存在区间 (a,b) 使得
        - (1) $f''(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续；
        - (2) $f(a)f(b)<0$；
        - (3) $\forall x\in[a,b]$，有 $f'(x)\neq 0$；
        - (4) $f''(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上保号（不变号），即不存在拐点，
      - 则当初值 $x_0\in[a,b]$, 且 $f(x_0)f''(x_0)>0$ 时，牛顿迭代法产生的迭代序列 $\{x_i\}$ 收敛于方程 $f(x)=0$ 在区间 $[a,b]$ 上唯一实根 x^*



牛顿迭代法的算法实现