数值分析

第五章：方程组的数值解法

- 在工程技术、自然科学和社会科学中，经常遇到的许多问题都可以归咎为解线性方程组
  - 最下二乘法求实验数据的曲线拟合问题
  - 工程中的三次样条函数的插值问题
  - 经济运行中的投入产出问题
  - 大地测量、机械与建筑的设计计算问题
- 解线性方程组的两类方法
  - 直接法：经过有限的算术运算求出方程组的精确解。可转化为矩阵计算。
  - 迭代法：通过某种方式逐步逼近线性方程组的精确解的方法。
- 高斯消元法
  - 适用条件：
    - 方程组系数矩阵的顺序主子式全不为0。
    - 方程组为严格对角占优阵：每一行对角元素的绝对值都大于其他同行元素的绝对值之和。保证了akk全不为0
  - 分为消元和回代两个过程，通过消元求出方程组其中的一个接解，然后逐步回代求出所有解。
  - 消元后的结果为将原方程组化为上三角形方程组。
  - 解线性方程组的高斯消去法就是对增广矩阵进行行初等变换。
  - 消元过程：
    - 第i行第i个元素不变，将第i列元素消为0，令mi为其他行第i个元素的值/第k行第k个元素的值的结果。再由-mi乘第i行的元素后加到第k个方程上。消去除了第一行外所有行的未知数x1，得到了A^(2)x=b^(2).(i为[1,n]，k为[i+1,n])
    - 重复以上过程，直至得到A^(n) = b^(n).
    - k = 1，2，⋯，n-1 作为分母akk不为0
  - 回代过程：
    - 就是对上三角方程组自下而上的逐步回代解方程组计算。
  - 高斯消元计算量约等于 1/3 n^3数量级其中需要进行(n-1)^2次乘法运算和(n-1)^2次加法运算
  - 乘除法的运算工作量
    - 第k次消元：mik: n - k 次除法, aij^(k+1)：(n-k)^2次乘法，bi^(k+1)次乘法：n-k次乘法,(imj=k+1,⋯n).
    - 消元过程中乘除法次数:
    - 回代过程中乘除法次数:
    - 总的乘除法运算次数:
    - 非零判断次数的最多为、行交换的元素个数为:
  - 高斯主元素消去法
    - 为了防止akk绝对值很小时做除数引发的误差增大，需要用到主元素校区法。
    - 本质上还是高斯消去法，只是进行了一系列初等变换。
    - 实质上时是通过行列交换，使得对角线上的元素绝对值尽可能大。一次只选一个在当前行对角线上。
    - 分为列主元消去、行主元消去、全主元消去法。
      - 全主元消去：在全体系数中选出主元。通过行、列交换使得对角线上的元素绝对值尽可能大。由于计算量较大。一般不采用这种方式。
      - 列主元消去：在待消元的所在列中选出主元，经过方程的行交换，将主元素置于对角线位置。
      - 行主元消去：在待消元的所在行中选出主元，经过方程的列交换，将主元素置于对角线位置。
- 三角分解法
  - 本质上是高斯消元法的一种。
  - Ax=b中，将非奇异矩阵A分解成一个下三角阵L和一个上三角阵U的乘积。A=LU
  - 对L矩阵的构造：
    - 方程组Ax=b的系数矩阵A经过消元得到上三角矩阵，相当于用一系列初等行变换左乘A的结果。
    - L1A^(1)=A^(2)
    - L2A^(2)=A^(3)
    - 以此类推：
    - 由于都是单位下三角阵，其逆矩阵也是单位下三角阵。只需将-mik改为mik就能得到Lk^-1。
  - Ax=b时，对A分解为A=LU，方程组为LUx=b，则Ly=b,Ux=y.分别可以求出y和x。
  - 又分为杜利特尔分解和克洛特分解
    - 杜利特尔
      - 单位上三角和下三角矩阵
      - $a_{1i}=u_{1i}, i=1,2,\dots,n$
$a_{i1}=l_{i1}u_{11}, i=2,3,\dots,n$
由矩阵乘法得：
      - $u_{1i}=a_{1i}, i=1,2,\dots,n$
$u_{i1}=\frac{a_{i1}}{u_{11}}, i=2,3,\dots,n$
接着第1行元素和L的第1列元素
      - 再确定U的第k行元素和L的第K列元素，对于k=2,3,⋯,n计算
        - $u_{kj}=a_{kj}-\sum_{r=1}^{k-1}l_{kr}u_{rj}, j=k,k+1,\dots n$
（1）计算U的第K行元素
        - $l_{ik}=\frac{a_{ik}-\sum_{r=1}^{k-1}l_{kr}u_{rj}}{ukk} i=k,k=1,\dots,n$
（2）计算L的第k列元素
      - 求出L和U的各元素之后
        - $y_1=b_1$
$y_i=b_i-\sum_{k=1}^{i-1}l_{ik}y_k, (i=2,3,\dots,n)$
（1）求解Ly=b
        - $x_n=\frac{y_n}{u_{nn}}$
$x_i=\frac{y_i-\sum_{k=i+1}^{n}u_{ik}x_k}{u_{ii}}, (i=n-1,\dots,2,1)$
（2）求解Ux=y
      - 同样的也需要n^3/3次乘除法
    - 克洛特分解
      - 下三角和单位上三角
- 向量和矩阵范数
  - 研究线性方程组近似解的误差估计和迭代法的收敛性，对向量和矩阵的"大小"进行度量。就是范数.
  - 对任一向量X属于R^n,(n是向量维度)，按照规则确定一个实数与他对应。记为||X||。满足以下三个性质
    - ||X||　0；||X||=0当且仅当X=0；
    - 对任意实数λ，||λX||=|λ| ||X||；
    - 对任意向量Y∈R^n，||X+Y|| ⩽ ||X||+||Y||，则称该实数||X||为向量X的范数
  - 在R^n中，常用的几种范数有：
    - $\|X\|_1=|x_1|+|x_2|+\dots+|x_n|=\sum_{i=1}^{n}|x_i|$
一范数
    - $\|X\|_2=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2}=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$
二范数
    - $\|X\|_\infty=\max\{|x_1|,|x_2|,\dots,|x_n|\}=\max_{1\le i\le n}\{|x_i|\}$
无穷范数
  - 注意：
    - 当不需要指明使用哪一种向量范数时，就用记号||.||泛指任何一种向量范数。
    - 有了向量的范数就可以用它来衡量向量的大小和表示向量的误差。
    - $\frac{||x-x^*||}{||x^*||}$ 或 $\frac{||x-x^*||}{||x||}$
设x*为Ax=b的精确解，x为其近似解，则其绝对误差可表示成||x- x* ||，其相对误差可表示成
  - 向量范数还具有以下性质
    - $||\frac{x}{||x||}||=1$
当||x|| ≠ 0时，
    - ||x|| = ||-x||
    - ||x|| - ||y|| ⩽ ||x - y|
  - 向量序列的极限
    - **定义5.4（向量序列的极限）设 $\{x^{(k)}\}$ 为 R^n 中的一向量序列，$x^*\in R^n$，记 $x^{(k)}=(x_1^{(k)},x_2^{(k)},\cdots,x_n^{(k)})^T$，$x^*=(x_1^*,x_2^*,\cdots,x_n^*)^T$。如果 $\lim_{k\to\infty}x_i^{(k)}=x_i^*$ (i =1,2,…, n)，则称 $x^{(k)}$ 收敛于向量 x^*，记为**
$\lim_{k\to\infty}x^{(k)}=x^*$
  - 向量范数的等价性
    - 设||x||_p,||x||_q为R^n上任意两种向量范数，则存在常数C_1,C_2>0，使得对任意的x∈R^n，都有
  - 矩阵的范数，若矩阵A∈R^{n×n}的，某个非负的实值函数N(A)=||A||。
    - 正定性：||A||⩾0，当且仅当A=0,时,||A|| = 0。
    - 齐次性：对任意实数λ　||λA|| = |λ|||A||.
    - 三角不等式||A+B|| ⩽ ||A|| + ||B||,对任意矩阵A，B∈R^{n×n}
    - ||AB|| ⩽ ||A||||B||
    - 则称N（A）是R^{n×n}上的一个矩阵范数。
  - $\|A\|_p=\max_{\|x\|_p=1}\|Ax\|_p(\text{如 } p=1,2,\infty)$
矩阵范数的另一种定义方法(矩阵范数和向量范数密切相关，向量范数有相应的矩阵范数，即)
  - 矩阵范数计算公式
    - $\|A\|_\infty=\max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|$
A 的行范数
    - $\|A\|_1=\max_{1\le j\le n}\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|$
A的列范数
    - $\|A\|_2=\sqrt{\lambda_{\max}(A^TA)}$
A的2-范数
  - 矩阵的谱半径
    - 设A∈R^{n×n}的特征值为λ_i(i=1,2,⋯,n)则称ρ(A)=max_{1⩽i⩽n}|λ为A的谱半径
    - 设A为n阶方阵, 则对任意矩阵范数||.||都有ρ(A)⩽||A||.
    - 特征值上界：设A∈R^{n×n},则ρ(A)⩽||A||_2.
    - 若A∈R^{n×n}为对称矩阵，则ρ(A)=||A||_2.
    - $||(I\pm B)^{-1}||\le\frac{1}{1-||B||}$
若方程B满足||B||<1，则I±B为非奇异阵，且
- 误差分析
  - 两个方程组尽管只是右端项有微小扰动, 但解大不相同,这类方程组称为病态的。
  - A或b的微小变化(又称扰动或摄动)引起方程组Ax=b解的巨大变化，则称方程组为病态方程组，矩阵A称为病态矩阵。否则方程组是良态方程组，矩阵A也是良态矩阵
  - 为了定量地刻画方程组“病态”的程度，要对方程组Ax=b进行讨论，考察A（或b）微小误差对解的影响。为此先引入矩阵条件数的概念
  - $cond(A)=||A||||A^{-1}||$
矩阵条件数：设A为非奇异矩阵,矩阵A条件数。
  - 常用的条件数
    - $\mathrm{cond}(A)_2=\frac{|\lambda_1|}{|\lambda_n|}$，其中 λ_1,λ_n 为 A 的绝对值最大和最小的特征值.
当A为对称阵时，
  - 条件数的性质
    - 对任何非奇异矩阵A，都与cod(A)_v ⩾1
    - 设矩阵A非奇异且常数c≠0，则cond(cA)_v = cond(A)_v
    - 如果A为正交阵，则cond(A)_2 = 1,如果A为非奇异阵，R为正交阵则cond(RA)_2 = cond(AR)_2 = cond(A)_2
  - $\frac{||\delta x||}{||x||}\le||A||||A^{-1}||\frac{||\delta b||}{||b||}$
b扰动对解的影响：设A非奇异，Ax=b≠0，且A(x+δx) = b + δb,则有
  - $\frac{||\delta x||}{||x||}\le\frac{||A||||A^{-1}||\frac{||\delta A||}{||A||}}{1-||A||||A^{-1}||\frac{||\delta A||}{||A||}}$
A的扰动对解的影响：设A非奇异，Ax=b≠0，且(A+δA)(x+δx)=b，若||A^{-1}|| ||δA||⩽ 1，则
  - $\frac{||\delta x||}{||x||}\le\frac{||A||||A^{-1}||\frac{||\delta A||}{||A||}}{1-||A||||A^{-1}||\frac{||\delta A||}{||A||}}(\frac{||\delta A||}{||A||}+\frac{||\delta b||}{||b||})$
当方程组的系数矩阵A非奇异和常数项b为非零向量时，且同时有扰动δA，δb，满足||A^{-1}||δA|| ⩽ 1，若x和x+δx分别是方程组Ax = b及(A+δA)(x+δx)=b + δb的解，则
  - 精度分析
    - $r=b-A\tilde{x}$
求得方程组Ax=b的一个近似解以后,希望判断其精度，检验精度的一个简单办法是将近似解再回代到原方程组去求出余量r. 如果r很小，就认为解是相当精确的
    - 设A为正交矩阵，证明：cond2(A)=1
    - 设A，B为n阶矩阵，cond(AB)⩽cond(A) * cond(B)
    - 设A，B为n阶非奇异矩阵，||•||表示矩阵的任一种范数,|| A^-1-B^-1 || ⩽|| A^-1 || || B^-1 || || A-B ||　cond(AB)⩽ cond(A) · cond(B)
    - 事后误差估计
      - $r=b-A\tilde{x}$, 则, $\frac{||x-\bar{x}||}{||x||}\le cond(A)\times\frac{||r||}{||b||}$
设A为非奇异矩阵，x是Ax = b≠0的准确解，再设x^-是此方程组的近似解,