SRP 2015

Projektets titel:	Udviklingen af differentialregning		
Udarbejdet af:	Kim Concepcion Nielsen		
Vejleder 1:	Ole Egelund		
Vejleder 2:	Jakob Rasmussen		
Studie/Hold:	Mat/fys HTX 113		
Projektperiode:	Fredag d. 11-12-2015→tirsdag d. 22-12-2015		
Studiested:	Gymnasiet HTX Skjern		
Antal tegn: (med mellemrum)		Afleveringsdato:	Tirsdag d. 12-12-2018

Jeg bekræfter herved med min underskrift, at opgavebesvarelsen er udarbejdet af mig. Jeg har ikke anvendt tidligere bedømt arbejde uden henvisning hertil, og opgavebesvarelsen er udfærdiget uden anvendelse af uretmæssig hjælp og uden brug af hjælpemidler, der ikke har været tilladt under prøven.

Elevunderskrift:	

Titelblad

Navn	Kim Concepcion Nielsen	
Fag	Matematik A	Idéhistorie B
Vejledere	Ole Egelund	Jakob Rasmussen
Studieretning	HTX113 Mat/fys	

Udviklingen af differentialregning

1. Gør rede for henholdsvis Newtons og Leibniz' tilgang til differentialregning og forklar væsentlige forskelle og ligheder.

2. Gør rede for begreberne fluent, fluxion og fluentmoment og vis med et eksempel Newtons anvendelse af disse begreber.

3. Analysér den historiske kontekst hvori henholdsvis Newtons og Leibniz' tilgang opstår, og diskutér hvorfor Leibniz' tilgang blev den dominerende.

Abstract

This paper examines the very foundation of the differential calculus by looking at the similarities, and divergences between Newton and Leibniz regarding their way of dealing with differential calculus. Subsequently a mathematical review of Newton's method of fluxions will be made, including an example of how he used his method of fluxions to determine the slope of a tangent.

Through an analysis of the very cause in which lead Newton and Leibniz to the development of the differential calculus a discussion paragraph has been included in which aims at arguing why Leibniz' differential calculus consequently became the most dominating one compared to Newtons version. Furthermore, Leibniz' and Newton's differential calculus are described on the basis of how they could use it specifically on a scientific and a philosophical matter. Based on the historical and mathematical analysis contained in this paper, the research indicates that Leibniz was more systematic during his mathematics compared to Newton. However, it is a fact that both men were missing a very important factor regarding a proper mathematical philosophy. To conclude, it can be argued that the development of the differential calculus might be the biggest mathematical invention since the time of the Greeks.

Indhold

Indledning

Differentialregning, en af de mest væsentlige grene af matematikken. Et univers hvori de mindste dele er iøjefaldende og samtidigt byggestenene for det store og smukke. Hvordan kan den matematiske natur bag disse små dele dog fortolkes, er de overhovedet ægte og hvilken historisk kontekst foreligger ved udviklingen af denne matematiske disciplin?

I denne opgave følger en redegørelse af Newtons, såvel som Leibniz' tilgang til differentialregning. Hertil følger også en forklarende vinkel som sigter mod en tydelig fremvisning af væsentlige forskelle og ligheder. Derudover vil der blive gjort rede for Newtons fluxionsregning med et særligt henblik på begreberne fluent, fluxion og fluentmoment. Hertil vil man samtidigt inddrage et eksempel som fremviser, hvordan Newton havde disse begreber i anvendelse. Ved hjælp af et analytisk perspektiv på den historiske kontekst, hvori Newtons og Leibniz' differentialregning opstår, vil der indgå en diskussion omkring hvorfor Leibniz' differentialregning blev den mest domminerende. Slutteligt vil der indgå en vurdering af Newtons og Leibniz' differentialregning sammenlignet med den moderne differentialregning, samt beskrive hvilken konsekvens udviklingen af differentialregningen har haft for fremtiden.

Differentialregning historisk set

Differentialregning, et af de mest anvendte og vigtige discipliner i moderne matematik. Under alle de omstændigheder man kender til, tilhører æren for udviklingen differentialregningen to personer. Isaac Newton og Gottfried Wilhelm Leibniz. Man er dog overbevist om, at Newton udviklede differentialregningen først, mens Leibniz publicerede først.[1]

Omkring det 17. århundrede var man meget interesseret i at bestemme ligninger for tangenter. Den første som udviklede en metode til bestemmelse af tangentligninger var den franske matematiker René Descartes (1596-1650). René Descartes fremgangsmåde kaldes Descartes normalmetode, men metoden er kun i stand til at bestemme tangentligninger for cirkler.[2] Efterfølgende tog den franske jurist Pierre de Fermat (1601-1665) dermed også initiativ til at udvikle en metode til at bestemme tangentligninger. Hans fremgangsmåde minder utrolig meget om differentialregningens procedure i dag, men samtidigt indeholdte metoden også adskillige manglende forklaringer for de udførte trin. Et trin han bl.a. manglede at gøre rede for var størrelsen e. Han beskriver blot størrelsen som et lille tal, hvorved Newton og Leibniz senere hen betragter størrelsen som uendeligt lille. Metoden fungerer, men man er på daværende tidspunkt ikke i stand til at forklare hvorfor, indtil Newton og Leibniz endeligt kommer på banen.[3]

Isaac Newton (1642-1727) er muligvis bedst kendt som professor i matematik ved Trinity universitetet og som fysiker. Han gjorde sig mange naturvidenskabelige opdagelser deriblandt differentialregning. Samtidigt regnes han også af mange som grundlæggeren af det paradigme man kalder for den klassiske fysik.[4] I denne omgang forholder vi os dog kun til matematikken. Historien om Newton og hans udvikling af differentialregning starter I 1665, hvor han som student på Trinity universitetet i Cambridge, arbejder på et problem som omhandlede vejen frem til simplere regneregler for så at kunne bestemme præcise tangentligninger for en hvilken som helst kurve. Newtons studier var baseret på metoder udviklet af René Descartes og Pierre de Fermat. Newtons tilgangsvinkel til bestemmelse af tangentligninger var dog helt

---

[1] https://www.youtube.com/watch?v=ObPg3ki9GOI – En dokumentar om infinitesimalregningens fødsel udarbejdet af BBC.
[2] Lund, J. 2011, s. 12
[3] Lund, J. 2011, s. 26
[4] http://www.denstoredanske.dk/It,_teknik_og_naturvidenskab/Fysik/Fysikere_og_naturvidenskabsfolk/Isaac_Newton - En biografi om Newton

anderledes end Descartes, Fermats og Leibniz' tilgang. Det viser sig nemlig, at Newton var særdeles fysisk i sin tilgang fremfor matematisk. Det kommer bl.a. til udtryk på trods af Newtons interesser for mekanik.[5]

Hovedtanken i Newtons opfattelse af differentialregning omhandler beregninger på uendelige små ændringer i tiden. Baggrunden for disse ideer opstår på basis af Newtons interesse for mekaniske love. Når Newton var i færd med at studere kurver, anså han dem som baner for bevægelse med indhold af punkter der ændrer sig med tiden. Hvad angår Newtons typiske fremgangsmåde rent matematisk, benyttede han sig ofte af geometri. Han optegnede adskillige kurver i koordinatsystemer, hvor han efterfølgende indtegnede tangenter til bestemte punkter på kurvene.[6]

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) er velkendt som en rationel filosof på linje med Spinoza (1632-1677) og Descartes. Derudover har han også været indflydelsesrig på det matematiske område.[7] Historien om Leibniz og hans udvikling af differentialregning starter i London i 1673. Formålet med hans rejse var at fremvise en mekanisk regnemaskine for videnskabsakademiet The Royal Society. Den mekaniske regnemaskine var den første som var i stand til at operere efter alle fire regningsarter dvs. addition, subtraktion, multiplikation og division. Regnemaskinen er yderligere et udpræget eksempel på den eksakte indgangsvinkel som Leibniz havde i sinde, når han var beskæftiget. Meget af Leibniz' liv gik netop på at fremstille mekaniske maskiner som ville være i stand til at følge regler baseret på logik. Det er yderst væsentlig at have dette på plads, da det leverer et meget nøjagtigt billede af, hvordan Leibniz udviklede sin egen version af differentialregning.[8]

Det hovedmæssige i Leibniz' opfattelse af differentialregning består i, at enhver kurve kan inddeles i uendelige små differentialer. Disse uendelige små differentialer består af en abscisse kaldet x og en ordinat kaldet y. Den afledte dx repræsenterer hermed differensen mellem de vandrette abscisser x, og ligeledes repræsenterer den afledte dy differensen mellem de lodrette ordinater y. Leibniz definerede hertil også tangenten som gennemløber et punkt på kurven, som en forøgelse af differentialet i det tilhørende punkt.[9] Når Leibniz arbejdede rent matematisk, benyttede han sig typisk af geometri ligesom Newton. Han

[5] https://www.youtube.com/watch?v=ObPg3ki9GOI - En dokumentar om infinitesimalregningens fødsel udarbejdet af BBC.
[6] Lund, J. 2011, s. 50-51
[7] Jessen, K. B. 2013, s. 96
[8] https://www.youtube.com/watch?v=ObPg3ki9GOI - En dokumentar om infinitesimalregningens fødsel udarbejdet af BBC.
[9] Lund, J. 2011, s. 35-36

optegnede ligeledes kurver i koordinatsystemer, hvor han efterfølgende ville indtegne tangenter til bestemte punkter på kurvene.[10]

Fluxionsregning

Newtons version af differentialregning kaldte han fluxionsregning. Disciplinen bygger på kurver opfattet som en sporet bevægelse med indhold af punkter, hvoraf disse bevæger sig todimensionalt. Yderligere kan man naturligvis afbilde kurven i et koordinatsystem. Hvad der så er unikt i Newtons version af differentialregning i forhold til Leibniz' version er, at Newton opfattede kurver som en matematisk beskrivelse af en bevægelse i et tidsrum. Herefter forstillede Newton, at kurven kunne deles op i uendelige små punkter som varierer med tiden. Disse punkter valgte Newton at kalde fluenter. En Fluent er ganske enkelt repræsenteret af henholdsvis en abscisse og en ordinat. I en mere moderne matematisk forstand ville man typisk betegne en fluent som abscissen x og ordinaten y som funktioner af tiden t. Hertil kunne man eksempelvis se på en cirkel med ligningen:

$$x^2 + y^2 = 1$$

Det kan herefter omsættes til:

$$x = \cos(t)$$

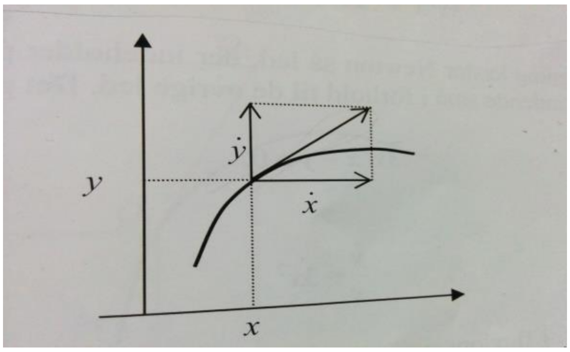
$$y = \sin(t)$$

Tiden t vil her gennemløbe intervallet $[0; 2\pi]$ da man naturligvis tager udgangspunkt i en cirkel hele vejen rundt.

Newton var også væsentligt interesseret i den hastighed en fluent måtte have i et hvilket som helst tidsrum. Hvis man eksempelvis forstillede sig en parabellignende kurve for en bevægende bold over et tidsrum. Her ville man måske være interesseret i at vide hvad boldens hastighed var ved netop fem sekunder eller syv sekunder mv. Fænomenet valgte Newton at døbe som en fluents fluxion. Notationen for en fluxion af eksempelvis fluenten x ville Newton betegne som $\dot{x}$, hvor y ville blive $\dot{y}$ osv. Det ville i en moderne differentialregning svare til $\dot{x} = x'(t)$ og y som $\dot{y} = y'(t)$. Man kan her gennemskue, at Newtons opfattelse af fluxionen minder meget om hvad man i dag ville kalde en differentialkvotient dvs. tangenthældningen i et bestemt punkt. Newton definerer dog ikke selv begrebet hastighed særlig detaljeret. Han forklarer blot *"bevægelsens hastighed foreligger, når kurven er givet."* Newton er dog på

[10] https://www.youtube.com/watch?v=ObPg3ki9GOI - En dokumentar om infinitesimalregningens fødsel udarbejdet af BBC.

trods af hans lidt kortfattede forklaring af hastighed velegnet til at fremstille en geometrisk tegning, hvori han analytisk beskriver, hvordan han bestemmer fluxionen i en bestemt fluent på en kurve. På Newtons tegning gælder, at fluxionen defineres som hældningen på tangenten og er sammensat af en vandret fluxion $\dot{x}$ og en lodret fluxion $\dot{y}$. Newtons tegning indikerede et udspændt parallelogram mellem $\dot{x}$ og $\dot{y}$ med indtegnelse af et diagonal. Diagonallet repræsenterer retningen af en fluents fluxion og hermed tangenten. Newton henvendte sig derfor til parallelogramloven, idet han ønskede at bestemme fluxionen for kurvens fluenter. Hertil indså Newton, at fluxionen for en fluent i et bestemt punkt måtte være forholdet mellem $\dot{x}$ og $\dot{y}$ dvs. $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$. Se figur 1:



Figur 1

Hvis man forstiller sig, at kurven er givet ved ligningen: $x^3 - y = 0$ så kan man bestemme hældningen af tangenten vha. forholdet $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$. Hertil indfører Newton et nyt begreb, hvori han forstiller sig et uendeligt lille tidsrum o, hvor fluxionen $\dot{x}$ og $\dot{y}$ vil være konstante. Med andre ord, Newton kiggede på fluenter(x, y) der bevægede sig over et uendeligt lille tidsrum o til en anden fluent (x, y) på kurven. Der er altså tale om en tilvækst i begge fluenters retninger. Newton kaldte denne tilvækst for et moment og noterede den som $\dot{x}o$ og ligeledes $\dot{y}o$. Newton beskrev hermed hvordan en fluent ville bevæge sig antal fluxioner til en ny fluent på kurven ved: $(x + \dot{x}o; y + \dot{y}o)$.

Erstatter man dermed x med $(x + \dot{x}o)$ og y med $(y + \dot{y}o)$ får man $(x + \dot{x}o)^3 - (y + \dot{y}o) = 0$.

Hertil kan man ophæve parenteserne vha. kubiksætningen og ved at følge parentesregnereglerne. Dermed får man at:

$$x^3 + \dot{x}^3o^3 + 3x^2\dot{x}o + 3x\dot{x}^2o^2 - y - \dot{y}o = 0$$

Yderligere kan udtrykket reduceres, da $x^3 - y = 0$. Man får dermed:

$$\dot{x}^3o^3 + 3x^2\dot{x}o + 3x\dot{x}^2o^2 - \dot{y}o = 0$$

Man får følgende ved at dividere igennem med o:

$$\dot{x}^3o^2 + 3x^2\dot{x} + 3x\dot{x}^2o - \dot{y} = 0$$

Da momentet o forsvindende lille i forhold til de andre led i udtrykket, bortkastes alle potenser af o:

$$3x^2\dot{x} - \dot{y} = 0$$

Dermed får man forholdet:

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = 3x^2$$

Således bestemmer man hældningen af en tangent til ethvert punkt på en hvilken som helst kurve vha. Newtons fluxionsregning.[11]

Anvender man Newtons fluxionsregning til fluxionsbestemmelse af udtrykket: $y = 12x^2$ i punktet $(1; 12)$.

Formålet er at bestemme forholdet $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ ligesom før for hermed findes tangenthældningen.

$$y + \dot{y}o = 12(x + \dot{x}o)^2$$

Man omskriver herefter vha. første kvadratsætning til:

$$y + \dot{y}o = 12(x^2 + \dot{x}^2o^2 + 2x\dot{x}o)$$

Man ved at $y = 12x^2$ derfor reduceres udtrykket til at være:

$$\dot{y}o = 12(x^2o^2 + 2x\dot{x}o)$$

Der divideres igennem med o:

$$\dot{y} = 12(x^2o + 2x\dot{x})$$

Alle led med potenser af o bortkastes, da er forsvindende små i forhold til de øvrige led:

$$\dot{y} = 12(2x\dot{x})$$

Dermed får man:

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = 24x$$

Hvorfor differentialregning?

Den generelle konklusion er, at Newton grundlagde sin version af differentialregning og Leibniz tilsvarende. Hvad fik dog to af Europas skarpeste hjerner til at fremstille differentialregning og hvilke konsekvenser medbragte udviklingen efterfølgende?

[11] Lund, J. 2011, s. 50-52

Det 17. århundrede. Et sekel hvor eksperimentering med naturen bliver domminerende. Hvad angår Aristoteles (384-322 f. Kr.), var det en ren fordømmelse i hans øjne, da eksperimenter blot var en kunstig iscenesat fremstilling af naturen efter hans mening.[12] Fysikeren Galileo Galilei(1564-1642) stiller dog sig selv til modstrid og gør oprør mod den katolske kirke som havde sin tro på Aristoteles geocentriske verdensbillede.[13] Det blev starten på en beslutning hvori man begyndte at stifte kendskab til sandheder baseret på empiri. Det var også under disse rammer Newton bevægede sig frem i sin karriere som fysiker. Det kommer bl.a. til udtryk hvis man kigger kort på, hvad Newton gjorde af opdagelser. Han opdagede og grundlagde love om, optik, bevægelse, gravitation mv.[14] Vejen frem til disse opdagelser var dog ikke baseret på blot fysiske problemstillinger. Indtil videre havde Newton ellers forståelsen for fysikkens virke på baggrund af forskellige teorier og eksperimenter han udførte. Newton manglede dog en måde hvorpå han kunne dokumentere hans fysiske arbejde. Hermed henvendte han sig til daværende matematik, men kunne konkludere, at ingen matematik på daværende tidspunkt var i stand til at beskrive små ændringer i tiden. Newton havde altså brug for et matematisk redskab for så at kunne takle problemstillingerne.[15]

Da Newton endeligt udvikler den nødvendige matematik for så at kunne dokumentere hans arbejde præcist, møder han nye fysiske problemstillinger. En efterhånden henvist historie er om dengang han blev spurgt af en kollega som i virkeligheden viser sig at være astronomen Edmund Halley (1656-1742). Han stiller Newton et spørgsmål omkring hvad han troede kurven for en planet ville være. Halley mente, at det ville være beskrevet af planeternes formodede tiltrækningskraft mod solen, hvor kvadratet på afstanden aftager omvendt proportionalt. Newton besvarede, at kurven måtte være en ellipse. Straks spurgte Halley nysgerrigt og forundret om hvorfra han vidste det. Det viste sig, at Newton havde anvendt et matematisk redskab som følge af udledningen. Desværre var Newton ikke i stand til at fremvise beregningerne på daværende tidspunkt, så han lovede Halley at fremstille nogle nye. Som tiden gik holdte Newton sit løfte og endeligt sendte han sit værk*" Om bevægelser af legemer i omløb")* til en senere hen bemærkelsesværdig imponeret Halley.[16] Sådan var Newtons differentialregning bl.a. grundlaget for en ud af hans mange kvalificerede argumenter. Med differentialregning på sin rygrad vandt Newton adskillige videnskabelige debatter. Til det netop nævnte spørgsmål, havde fysikeren Robert Hooke (1635-1703) allerede vidst, at

---

[12] http://www.kvant.dk/upload/kv-2007-3/kv-2007-3-CHK-aristoteles.pdf - Beskrivelse af den naturvidenskabelige tankegangs historie

[13] http://www.denstoredanske.dk/It,_teknik_og_naturvidenskab/Fysik/Fysikere_og_naturvidenskabsfolk/Galileo_Galilei - Biografi om Galileo Galilei

[14] http://www.denstoredanske.dk/It,_teknik_og_naturvidenskab/Fysik/Fysikere_og_naturvidenskabsfolk/Isaac_Newton - Biografi om Isaac Newton

[15] http://futurism.com/how-and-why-did-newton-develop-such-a-complicated-math/ - Beskrivelse af hvorfor Newton havde brug for differentialregning

[16] http://www.rostra.dk/louis/andreart/Isaac_Newton.htm - Side om historien bag studiet om bevægelse

kurven var formet som en ellipse, men han kunne ikke bevise det, på trods af sine manglende matematiske kompetencer. Samtidigt postulerede Hooke også, at han havde opdaget tyngdeloven før Newton, men manglede igen de nødvendige matematiske kompetencer for at udlevere et brugbart bevis hertil.[17][18]

Hvad angår årsagen til Leibniz' udvikling af differentialregning, kan spørgsmålet stilles: Hvorfor stiftede Leibniz overhovedet bekendtskab med matematik? Leibniz var jo netop filosof og ikke en passioneret fysiker på linje med Newton. Derudover begyndte Leibniz i forhold til mange andre matematikere på daværende tidspunkt også meget sent på sine matematiske studier.

Leibniz matematiske drivkraft var til trods for Newton baseret på matematik der i høj grad befandt sig på et systematisk og filosofisk plan. Leibniz drømte om et koordineret tegnesprog der kunne anvendes på alle videnskabens grene. For Leibniz var matematik nemlig ikke kun et værktøj til løsning af problemer. Det var samtidigt væsentligt for Leibniz, at matematikken var håndgribelig i den kontekst den måtte optræde i. Hertil er Leibniz' differentialregning et oplagt eksempel, da denne indikerer på baggrund af dets matematiske natur, hvorfor symbolikken er en så væsentlig detalje inden for det matematiske univers.[19] Selve Ideen om det koordinerende sprog menes at have sin oprindelse på baggrund af Leibniz studier omkring Thomas Hobbes værker. På daværende tidspunkt anså adskillige af datidens førende matematikere Hobbes(1588-1679) som blot en matematisk ballademager. Herfor var Leibniz' formål med at fordybe sig i Hobbes studier et mysterium i mange matematikers øjne. Efterfølgende bliver det dog tydeligt, at Leibniz' formål med Hobbes studier var at studere Hobbes begreb om conatus, og forbedre Hobbes forvirrende matematiske sprog. Man anså hermed Leibniz matematiske kompetencer som værende på linje med Hobbes. At Leibniz så en værdi i Hobbes matematiske studier, stillede ham dermed i dårligt lys som matematiker. Adskillige matematikere udfordrede derfor Leibniz til at gøre Hobbes matematiske studier nyttige og håndgribelige, dermed ville Leibniz kunne starte en karriere som en respekteret matematiker. Inden da skete det store øjeblik for Leibniz, da han studerede et af Hobbes store værker kaldet *"Opera philosophica".* Værket gjorde Leibniz i stand til at forstå conatus som en uendelig lille del et bevægende univers er opbygget af. Efterfølgende valgte Leibniz også at kalde det for en monad. Hermed blev Leibniz' interesse for matematik for alvor opvækket.[20][21] Leibniz ledte hertil efter en måde hvorpå han kunne beskrive disse uendelige små dele. Svaret fandt han bl.a. ved udviklingen af differentialregning.[22]

[17] http://www.rostra.dk/louis/andreart/Isaac_Newton.htm - Side om historien bag studiet om bevægelse
[18] http://io9.gizmodo.com/5877660/was-robert-hooke-really-sciences-greatest-asshole?trending_test_five_b&utm_expid=66866090-76.Xf7HV5ZSS3i8CtAkjmzQiA.2&utm_referrer=https%3A%2F%2Fwww.google.dk%2F – Kort beskrivelse af Robert Hooke's videnskabelige bedrifter
[19] Lund, J. 2011 s. 40
[20] Goldenbaum, U., & Jesseph, D. 2008 s. 55-64

Den domminerende differentialregning

Hidtil har Newtons og Leibniz' version af differentialregning vist sig at være på et dueligt niveau. Det er dog et interessant spørgsmål om hvorfor Leibniz' version af differentialregningen netop blev den man valgte at bevare efterfølgende.

Ser man på et af Newtons største værker fra 1687 *"Principia Mathematica."* På dansk kaldet *"matematiske principper."*[23] Værket er i høj grad præget af flere argumenter, hvori kun eksperter er i stand til at følge med. Hertil udtaler Historikeren, Alfred R. Hall, også om Newtons værk *"The principia was notoriously a book that only the expert could follow on every point of its argument."* Dette skyldes dog hverken, at Newton introducerede en ny matematik eller, at han bare havde forventet at hans læsere var ekstremt erfarne matematikere når det gjaldte geometri. I stedet mener bl.a. Tom Whiteside, en britisk historiker, at Newtons værk hovedsageligt var præget af ufærdige dele, hvori Newton efterfølgende henviste disse dele til noget der skulle bruges til et senere formål. Derudover fandt mange Newtons værk voldsomt kortfattet, og manglende når det gjaldt forklaringer af de udførte trin. Tidspunktet hvor Newton først begynder at begrebsliggøre nogle af de dele der indgår i hans fremgangsmåder sker i begyndelsen af hans andenudgave af *"matematiske principper"*. Her skriver han bl.a.*"I understand their momentaneous increments or decrements by the name of Moments."* Og*" Which may be called the motions, mutations and fluxions of quantities."* [24] Således vælger Newton at introducere begreber såsom moment, fluxion mv. for første gang. Hvorfor Newton dog først valgte at introducere begreberne i andenudgave er stadig et mysterium. Han kunne lige så vel have valgt at fremvise forklaringer, samt beregninger i sin første udgave.[25]

Leibniz var som sagt påvirket af tanken om et generelt sprog der kunne anvendes på alle videnskabelige grene. Det kom bl.a. til udtryk i hans begrundelse om dels hvorfor han var optaget Hobbes matematiske studier. Ideen blev dog aldrig en fuldent realitet, men Leibniz formede succesfuldt sin version af differentialregningen på baggrund af denne ide. Leibniz var optaget af udviklingen af dette sprog, da han ville optimere muligheden for let at kunne finde nye sammenhænge i hvilken som helst videnskabelig gren.[26] Hvordan Leibniz også succesfuldt formede en fleksibel notation til sin version af differentialregning kommer bl.a. til udtryk når man ser på baggrunden for, hvordan han betegnede forskellige dele af hans

[21] Herbert, G. B. 1989 s. 54
[22] http://www.theosophy-nw.org/theosnw/world/modeur/ph-ryan.htm - Kort beskrivelse af hvordan Leibniz ide om monaden hænger sammen med hans differentialregning
[23] http://www.denstoredanske.dk/Sprog,_religion_og_filosofi/Filosofi/Logik/Principia_Mathematica Beskrivelse af Principia Mathematica
[24] http://www.maths.tcd.ie/pub/HistMath/People/Newton/Principia/Bk2Lem2/PrBk2Lm2.pdf - Et kort uddrag af Matematiske principper (andenudgave)
[25] Hall, A. R. 1980 s. 31
[26] Lund, J. 2011 s. 40

matematik. Eksempelvis benævner han differentialkvotienten i et bestemt punkt som: $\frac{dy}{dx}$. Her forklarer Leibniz, at bogstavet d repræsenterer differensen mellem to værdier af en pågældende variable. Yderligere definerer også Leibniz en tangent i et bestemt punkt som linjen der udstrækker en uendeligt lille differens og dermed udgør en kurve i det tilhørende punkt.[27] Newton beskrev som også nævnt tidligere differentialkvotienten i et bestemt punkt som $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$. Newtons begrundelse for denne notation forklarer han dog ikke ud fra et særlig generelt omfang ligesom Leibniz gjorde for sin notation af differentialkvotienten. Newton forklarer som nævnt tidligere blot differentialkvotienten som fluxionen af en fluent i et bestemt punkt.

Selvom mange betragtede differentialregning som et fabelagtigt redskab i form af matematisk analyse, vækkede dens grundlag på længere sigt en række kritiske spørgsmål. Den Irske biskop George Berkeley anså ikke Newtons differentialregning som tåbelig i form af dens virke, da Newton havde demonstreret hvordan metoden var i stand til at opnå korrekte resultater. Berkeley anså derimod Newtons differentialregning som mangelfuld, når det gjaldte en forklaring af grundlaget for Newtons anvendelse af hans uendelige små størrelser der varierer i et tidsrum. Berkeley var netop utilfreds med Newtons tankegang når det gjaldt forskellen mellem nul og uendeligt tæt på nul.[28] Eksempelvis ville Newton finde hældningen af en tangent, hvis man betragter følgende funktion:

$$y = x^2$$

Funktionen differentieres vha. Newtons metode således erstattes y med $y + \dot{y}o$ og x med $x + \dot{x}o$:

$$y + \dot{y}o = (x + \dot{x}o)^2$$

Dette kan omskrives vha. første kvadratsætning:

$$y + \dot{y}o = x^2 + \dot{x}^2 * o^2 + 2x\dot{x}o$$

Da funktionen $y = x^2$ er givet kan udtrykket reduceres til:

$$\dot{y}o = \dot{x}^2 * o^2 + 2x\dot{x}o$$

Hertil dividerer man igennem med o:

$$\dot{y} = \dot{x}^2 o + 2x\dot{x}$$

Hermed bortkastes led der indeholder potenser af o bort:

$$\dot{y} = 2x\dot{x}$$

[27] Lund, J. 2011 s. 36
[28] Lund, J. 2011 s. 62

Til sidst har man dermed hældningen af tangenten til:

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = 2x$$

Hvor Berkeley angriber Newton er, hvor han dividerer igennem med o og hvor han bortkaster led der indeholder potenser af o. Berkeley var klar over den matematiske kendsgerning, at division med nul er meningsløst. Berkeley blev derfor usikker, når Newton fortog en division af o. Dermed ville Newton betragte o som en uendelig lille størrelse. Senere hen bortkaster Newton også momentet, idet momentet er forsvindende lille i forhold til de øvrige led. Newton betragter altså størrelsen af et moment som både nul, men også forskelligt fra nul. Berkeley argumenterede for at begge fænomener ikke kunne optræde samtidigt. [29] En anden som satte sig for at kritisere differentialregning var matematikeren Michel Rolle. Rolle beskyldte Leibniz for at være fejlagtig i sin geometriske opfattelse af differentialregning. Han sagde bl.a. *"For mig at se har det nye system ikke været produktivt for sandheden og det forekommer mig, at det ofte dækker over fejl"* Her referer Rolle til, at Leibniz' brug af uendelige små størrelser er fejlagtig i en geometrisk sammenhæng, da geometri, ifølge Rolle, alene baserer sig på perfekt videnskab. Det var altså både et problem for Newton og såvel Leibniz at forklare grundlaget for den uendelige lille størrelse. Det valgte man dog at vende ryggen til i første omgang, da differentialregningen var anset som en helt anden måde at fortolke matematik og dens virke gav samtidigt de rigtige facitter man havde brug for.[30]

Hvor Leibniz dog endelig bliver sejrsherren er igennem hans tankegang og notation. I nutiden er det nemlig kun Leibniz' version af differentialregning som er bevaret. Det skyldes bl.a. Leibniz' omfattende interesse for matematik på et systematisk og generelt plan til trods for Newton. For Leibniz var det et spørgsmål om uendelige små differenser, men ikke i forhold til noget specifikt. Leibniz ville også opskrive matematiske lovmæssigheder for sine uendelige små differenser, men herigennem var det ej heller et spørgsmål om ønsket anvendelse inden for et specifikt område. For at forstå Newtons differentialregning, var det en nødvendighed at kunne forstå, hvordan de fysiske rammer også indvirkede, da det jo som sagt er herigennem Newtons differentialregning opstår.[31]

Derudover har bl.a. A. Robinson(1918-1974) ud fra ikke standard analyse på baggrund af Leibniz' version af differentialregningen vist, hvordan det er muligt at definere Leibniz' teori omkring de uendelige små

---

[29] https://www.youtube.com/watch?v=JEr6sE1C2kc – Kort video om ikke standard infinitesimalregning og standard infinitesimalregning

[30] Lund, J. 2011 s. 62

[31] https://www.youtube.com/watch?v=ObPg3ki9GOI - En dokumentar om infinitesimalregningens fødsel udarbejdet af BBC.

størrelser præcist. På den måde blev Leibniz' differentialregning bl.a. udgangspunktet for en senere udvikling af differentialregning. [32]

Leibniz' og Newtons differentialregning i et nutidigt perspektiv

Både Leibniz og såvel Newton havde altså et problem med at forklare deres brug af uendelige små størrelser som ellers havde været det store grundlag for deres differentialregning. Det var netop et problem, at Leibniz og Newton både anvendte den uendelige lille størrelse som både nul, men også forskellig fra nul. Som løsning på det problem opfandt man begrebet grænseværdi.

Begrebet om grænseværdi mødte sin udvikling af matematikerne Augustin Cauchy (1789-1857) og Karl Weierstrass (1815-1897). Disse to matematiker kan drages til ansvar for at have omformet Leibniz' og Newtons differentialregning på et matematisk analytisk plan. Hertil er det nu muligt at beskrive en differentialkvotient som:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

Grænseværdien lim, beskriver hermed Δx som gående mod nul, men ikke lig nul dermed er det muligt at dividere med Δx. Begrebet om grænseværdi har også medført en ny gren af matematikken kaldet matematisk analyse. Her ser man groft sagt bort fra Leibniz' og Newtons differentialregning, da man ikke accepterer filosofien om det, at en uendelig lille størrelse både kan være forskellig fra nul, men også være lig med nul.[33]

Ser man dog bort fra den filosofi som, hverken Newton eller Leibniz var i stand til at forklare, har differentialregningen bidraget med adskillige nye muligheder for at opnå bedre resultater på mange forskellige områder. Det blev blandt andet muligt at beskrive Keplers love for planeters bevægelse omkring solen på baggrund af differentialregning. Samtidigt blev det også muligt at bevise Neptuns eksistens, da man var i stand til at beregne på nogle mærkelige observationer man havde gjort sig omkring Uranus' bane. Ligeledes blev det også muligt at beskrive baner for kometer vha. differentialregning.[34]

[32] http://denstoredanske.dk/It,_teknik_og_naturvidenskab/Matematik_og_statistik/Analyse,_vektor-_og_matrixregning_og_funktionsteori/differentialregning - Kort beskrivelse af differentialregning
[33] https://www.youtube.com/watch?v=JEr6sE1C2kc – Kort video om ikke standard infinitesimalregning og standard infinitesimalregning
[34] Lund, J. 2011 s. 61

Perspektivering

Man kan perspektiver differentialregning til brugen af satellitter i dag. Det eksempelvis væsentlig at kunne bestemme den rette bane som en satellit skal bevæge sig i. Man kan også perspektivere til andre som har gjort et forsøg på at skabe en bedre notation end Leibniz og Newton. Her er det bl.a. bemærkelsesværdigt at nævne Lagrange notation som ovenikøbet bliver anvendt i hyppige sammenhænge i dag. Ikke mindst gjorde den Schweiziske matematiker Euler også et forsøg på at skabe en forbedret notation af differentialregning, men bliver kun brugt i meget sjældne tilfælde.

Konklusion

For at rekapitulere så var Newton meget praktisk i sin tilgang til differentialregning. Hans opfattelse af differentialregning var udelukkende baseret på uendelige små størrelser der varierer med tiden. Leibniz kom med en helt anderledes tilgang til differentialregning end Newton. Leibniz' opfattelse af differentialregning var baseret på differentialer, hvori disse udgør den mindste del af en kurve. Både Newton og såvel Leibniz brugte dog, til trods for hver deres opfattelse, geometri som redskab til at visualisere deres differentialregning. Newtons differentialregning har også vist sig at være fungerende ud fra hans begreber fluent, fluxion og fluentmoment. Begrebet fluent definerede Newton som en uendelig lille størrelse der varierer med tiden, hvor fluxionen angiver hastigheden af en specifik fluent. Et fluentmoment forklarede Newton som et uendeligt lille tidsrum mellem to fluenter, hvori hastigheden dermed vil være konstant. Hertil er der også blevet vist et eksempel, hvori disse begreber er i anvendelse. Efterfølgende er baggrunden for hvorfor Newtons og Leibniz' differentialregning opstår også blevet analyseret. Newton havde brug for en matematik der kunne beskrive små ændringer i tiden for så at kunne takle forskellige fysiske problemstillinger han arbejdede med. Leibniz tilgang til differentialregning opstår på baggrund af hans kendskab til Hobbes begreb om conatus. Et begreb Leibniz senere definerer som den uendelige lille del der udgør verdenen. Efterfølgende er der blevet diskuteret om, hvordan Leibniz' differentialregning var mere domminerende end Newtons. Newtons svage punkter når det gjaldte hans differentialregning omhandlede hans formidling. I et af hans største værker anvender han bl.a. differentialregning, men på et så kompliceret plan, at kun eksperter er i stand til at følge med. Leibniz var derimod mere basal og generel i sin differentialregning. Leibniz var netop interesseret i at skabe et fællessprog, hvori enhver videnskabelig gren kunne beskrives. På basis af både Leibniz' og Newtons differentialregning er der forbedringer at hente. Eksempelvis var de begge ikke i stand til at forklare grundlaget for deres brug af den uendelige lille størrelse. Man udviklede derfor begrebet om grænseværdi, for så at kunne bevæge sig frem i differentialregningen på et acceptabelt filosofisk niveau. Slutteligt kan man konkludere, at Newtons og Leibniz' udvikling af differentialregningen muligvis er det største matematiske gennembrud siden Grækerne.

Bibliografi

Litteratur:

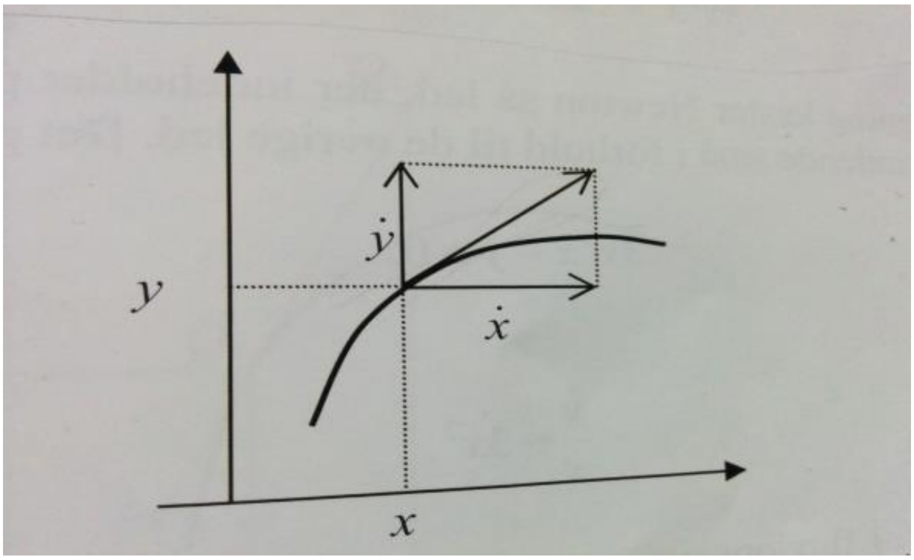
1. Goldenbaum, U., & Jesseph, D. (2008). *Infinitesimal Differences - Controversies between Leibniz and his contemporaries.* Berlin: Walter de Gruyter.
2. Hall, A. R. (1980). *Philosophers at War - The quarrel between Newton and Leibniz.* Cambridge: Cambridge University Press.
3. Herbert, G. B. (1989). *Thomas Hobbes - The Unity of Scientific and Moral Wisdom.* Vancouver: University of British Columbia.
4. Jessen, K. B. (2013). *Filosofi - Fra antikken til vor tid.* Letland: Systime.
5. Lund, J. (2011). *Tangentbestemmelse - historisk set.* Odder: Zeuner Grafisk .

Websider:

1. Futurism. (2013). *www.futurism.com*. Hentede 16. 12 2015 fra http://futurism.com/how-and-why-did-newton-develop-such-a-complicated-math/ - Side der beskriver hvilke årsager der fik Newton til at udvikle differentialregning.
2. Knudsen, O. (2. 12 2015). *www.denstoredanske.dk*. Hentede 16. 12 2015 fra http://www.denstoredanske.dk/It,_teknik_og_naturvidenskab/Fysik/Fysikere_og_naturvidenskabsfolk/Isaac_Newton - Side der indeholder en biografi om Newton.
3. Koch, C. H. (2008). *www.kvant.dk.* Hentede 16. 12 2015 fra http://www.kvant.dk/upload/kv-2007-3/kv-2007-3-CHK-aristoteles.pdf - Dokument som omhandler den naturvidenskabelige mentalitet der førte til den naturvidenskabelige revolution .
4. Koch, C. H. (01. 02 2009). *www.denstoredanske.dk*. Hentede 18. 12 2015 fra http://www.denstoredanske.dk/Sprog,_religion_og_filosofi/Filosofi/Logik/Principia_Mathematica - Side der bl.a. indeholder en oversættelse af titlen på Principia Mathematica.

5. Leibniz, G. (12. 12 2011). *www.youtube.com*. Hentede 18. 12 2015 fra https://www.youtube.com/watch?v=ObPg3ki9GOI – Video fra BBC omkirng infinitesimalregningens historie.
6. Lützen, J. (19. 07 2012). *www.denstoredanske.dk*. Hentede 19. 12 2015 fra http://denstoredanske.dk/It,_teknik_og_naturvidenskab/Matematik_og_statistik/Analyse,_vektor-_og_matrixregning_og_funktionsteori/differentialregning - Side om historien omkring differentialregning.
7. Newton, I., & Wilkins, D. R. (06 2002). *www.maths.tcd.ie.* Hentede 18. 12 2015 fra http://www.maths.tcd.ie/pub/HistMath/People/Newton/Principia/Bk2Lem2/PrBk2Lm2.pdf - Dokument som beskriver forskellige begreber indenfor fluxionsregning meget kort.
8. Nielsen, L. (5 2008). *www.rostra.dk*. Hentede 16. 12 2015 fra http://www.rostra.dk/louis/andreart/Isaac_Newton.htm - Side om historien bag dynamikkens opdagelse.
9. Owens, D. (12. 4 2011). *www.youtube.com*. Hentede 19. 12 2015 fra https://www.youtube.com/watch?v=JEr6sE1C2kc – Video som forklarer tankegangen bag grænseværdi.
10. Pedersen, O. (14. 11 2014). *www.denstoredanske.dk*. Hentede 16. 12 2015 fra http://www.denstoredanske.dk/It,_teknik_og_naturvidenskab/Fysik/Fysikere_og_naturvidenskabsfolk/Galileo_Galilei - Side der kort beskriver Galileo Galilei.
11. Ryan, C. J. (10 1963). *www.theosophy-nw.org*. Hentede 18. 12 2015 fra http://www.theosophy-nw.org/theosnw/world/modeur/ph-ryan.htm - En Side der indeholder en kort beskrivelse af Leibniz' monader.
12. Wilkins, A. (27.01 2012). *109.gizmodo.com* Hentede 16. 12 2015 fra http://io9.gizmodo.com/5877660/was-robert-hooke-really-sciences-greatest-asshole?trending_test_five_b&utm_expid=66866090-76.Xf7HV5ZSS3i8CtAkjmzQjA.2&utm_referrer=https%3A%2F%2Fwww.google.dk%2F – Side der giver et godt indblik i Robert Hooke's største videnskabelige bedrifter.

Bilag 1:



[35]

[35] Lund, J. 2011, s. 51