

Lab 6 -- Đồ thị: Đường đi và chu trình

I. Bài tập

1. Hỏi có tồn tại hay không graph đơn vô hướng có 6 đỉnh, 10 cạnh và bậc của 5 đỉnh trong số đó là 1, 3, 3, 3, 5?
2. Hãy xây dựng một graph đồng bậc, còn gọi là graph đều (regular graph) có 2025 đỉnh mà bậc của tất cả các đỉnh là 10? Câu hỏi tương tự graph có 2026 và đồng bậc 11.
3. Cho bảng ô vuông 4×4 được chia thành 16 ô vuông con. Hai ô vuông được gọi là "liên kết" nếu có thể đặt quân mã vào đó mà chúng tấn công được nhau (nhắc lại về cách đi của quân mã: nhảy giữa hai ô nằm ở hai góc của hình chữ nhật 3×2 hoặc 2×3).
 - a) Xây dựng graph G_4 trong đó tập đỉnh ứng với các ô vuông của bảng, tập cạnh ứng với các cặp ô được liên kết nhau. Đánh số các đỉnh của graph G_4 và cho biết bậc của mỗi đỉnh.
 - b) Dựa vào đặc điểm của graph G_4 , tính tổng số cách đặt 2 quân mã giống nhau lên bàn cờ 4×4 sao cho chúng tấn công được nhau.
 - c) Tính tổng số cách đặt 3 quân mã giống nhau lên bàn cờ 4×4 sao cho có một quân tấn công được hai quân kia. Gợi ý: không thể có 3 quân mã đôi một tấn công được nhau.

Bài tập về nhà:

4. Giả sử trong một giải đấu vòng tròn có n đội tham dự ($n \geq 4$) theo thể thức đấu vòng tròn một lượt, đã có $(n + 1)$ trận đấu đã được tiến hành. Mô hình hoá bài toán bằng lý thuyết đồ thị và áp dụng Định lý Bắt tay (Handshaking Lemma), chứng minh rằng có ít nhất một đội trong giải đấu đó đã thi đấu được ít nhất 3 trận.
5. Cho đồ thị vô hướng $G = (X, E)$ và $A \subseteq X$. Đặt k là số đỉnh bậc lẻ trong A . Đặt m là số cạnh của G thỏa mãn điều kiện "cạnh có một đỉnh thuộc A và một đỉnh không thuộc A ". Chứng minh $(k - m)$ là một số nguyên dương chẵn.
6. Tính số đỉnh của một đồ thị có:
 - a) 12 cạnh và tất cả các đỉnh có bậc bằng 3,
 - b) 10 cạnh và tất cả các đỉnh có bậc bằng 4,

c) 21 cạnh và 3 đỉnh bậc 4, các đỉnh còn lại đều có bậc bằng 3,

d) 24 cạnh và tất cả các đỉnh có bậc bằng nhau.

7. Đồ thị G có tối đa bao nhiêu đỉnh nếu G có 19 cạnh và một đỉnh có bậc ≥ 3 ?

8. a) Có bao nhiêu đồ thị vô hướng không đẳng cấu với 8 đỉnh và bậc lần lượt là 2, 3 và 4?

b) Có bao nhiêu đồ thị vô hướng không đẳng cấu với 8 đỉnh và bậc lần lượt là 2, 3 và 4?

c) Có bao nhiêu đồ thị vô hướng không đẳng cấu có 5 đỉnh và 4 hoặc 5 cạnh?

d) Có bao nhiêu đồ thị đơn vô hướng không đẳng cấu có 5 đỉnh và 3 cạnh?

e) d) Có bao nhiêu đồ thị đơn vô hướng không đẳng cấu có 6 đỉnh và 4 cạnh?

9. Cho G là đồ thị đơn gồm n đỉnh, m cạnh và p thành phần liên thông. Chứng minh rằng: $n - p \leq m \leq \frac{1}{2}(n - p)(n - p + 1)$

Suy ra rằng, nếu $2m > (n - 1)(n - 2)$ thì G liên thông.

10. Có hay không đồ thị đơn vô hướng có 6 đỉnh với bậc lần lượt như dưới đây? Nếu có thì vẽ minh họa mỗi trường hợp. Nếu không thì giải thích tại sao?

a) 5, 3, 3, 2, 1, 0

b) 6, 5, 3, 3, 2, 1

c) 3, 3, 2, 2, 2, 2

g) 5, 3, 3, 3, 3, 3

h) 5, 4, 4, 3, 2, 1

i) 1, 1, 1, 1, 1, 1

j) 5, 2, 2, 2, 2, 1

11. Cho đồ thị đơn vô hướng $G = (V, E)$ gồm 10 đỉnh được biểu diễn dưới dạng danh sách kề như sau:

1 4, 10

2 4, 5, 6

3 8

4 2, 10

5 7, 8

6 1, 4, 7

7 3, 9

8 7, 9

9 8

10 1, 2

a) Hãy tìm bậc của đỉnh u với $u \in V$?

b) Hãy tìm ma trận kề của G?

b) Hãy tìm các thành phần liên thông của đồ thị (nếu có)

II. Lập trình

II.1. Cho tập các đỉnh của đồ thị được biểu diễn dưới dạng danh sách kề như sau:

```
1 4, 10
2 4, 5, 6
3 8
4 2, 10
5 7, 8
6 1, 4, 7
7 3, 9
8 7, 9
9 8
10 1, 2
```

1. Đọc file và xây dựng class biểu diễn đồ thị (bằng danh sách kề, ma trận kề và danh sách cạnh).
2. Viết hàm cung cấp các thuộc tính cho đồ thị, gồm:
 - a) có hướng hay vô hướng
 - b) tính số cạnh và số đỉnh
 - c) bậc của đỉnh
 - d) danh sách đỉnh cô lập / đỉnh lá
 - e) Base undirected graph
 - f) Complement graph / Converse graph
 - g) duyệt đồ thị (bfs / dfs)
 - h) là dạng đồ thị đặc biệt: Complete graph, Circular graph, Bipartite, Complete bipartite
 - i) số thành phần liên thông
 - k) số đỉnh cắt, số cạnh cầu
3. Tìm chu trình / đường đi Euler bằng thuật toán Hiehozer / Fleury.

II.2. (Mê cung hoàn hảo)

1. Viết một chương trình nhận tham số dòng lệnh n và tạo ngẫu nhiên một mê cung hoàn hảo n x n. Một mê cung hoàn hảo nếu nó chỉ có đúng một đường đi giữa mọi cặp điểm trong mê cung, tức là không có vị trí nào không thể tiếp cận, không có chu trình và không có khống gian mở.
2. Cho một mê cung n x n, hãy viết một chương trình để tìm đường đi từ ô xuất phát (1, 1) đến ô đích (n, n), nếu có.

Gợi ý:

- Hãy xem xét một lưới ô n x n, mỗi ô ban đầu có một bức tường ngăn cách với bốn ô lân cận. Với mỗi ô (x, y), hãy duy trì một biến `north[x][y]` có giá trị true nếu có bức tường ngăn cách (x, y) và (x, y + 1).

- Chúng ta có các biến tương tự `(east[x][y])`, `(south[x][y])` và `(west[x][y])` cho các bức tường tương ứng. Lưu ý rằng nếu có một bức tường ở phía bắc (x, y) thì `(north[x][y] = south[x][y+1] = true)`.
- Xây dựng mê cung bằng cách phá bỏ một số bức tường như sau:
 - Bắt đầu từ ô thấp hơn (1, 1).
 - Tìm ngẫu nhiên một ô lân cận mà bạn chưa từng đến.
 - Nếu tìm thấy, hãy di chuyển đến đó, phá đổ bức tường. Nếu không tìm thấy, hãy quay lại ô trước đó.
 - Lặp lại bước 2 và 3 cho đến khi bạn đã đến hết mọi ô trong lưới.

--- THE END ---