

## Lab 1 -- Các phương pháp đếm tổng quát: Bài toán Sắp xếp và Lựa chọn

### I. Bài tập

1. Một năm không nhuận có 365 ngày. Giả sử ngày 1/1 là thứ hai.
  - a) Có bao nhiêu ngày chủ nhật trong năm này?
  - b) Có bao nhiêu ngày thứ hai trong năm này?
2. Một tàu lửa gồm 5 toa dừng ở một nhà ga để 3 hành khách lên tàu. Hỏi có bao nhiêu cách lên tàu của 3 hành khách này nếu:
  - a) Ai lên toa nào cũng được?
  - b) Mỗi người lên một toa tàu khác nhau?
3. Giả sử  $S$  là một tập hữu hạn và  $x \in S$  là một phần tử của  $S$ . Chứng minh rằng số tập con của  $S$  có chứa  $x$  bằng số tập con của  $S$  không chứa  $x$ .

#### Bài tập về nhà:

4. Cho  $U$  là một tập hữu hạn. Gọi  $\mathcal{P}(U) \equiv 2^U$  là họ tất cả các tập con của  $U$ .
  - a) Xét quan hệ "có cùng độ lớn", ký hiệu  $\sim$ , trên  $2^U$  như sau:
 
$$A \sim B \Leftrightarrow |A| = |B|, \text{ với mọi } A, B \in 2^U$$
 Chứng minh rằng  $\sim$  có tính phản xạ và bắc cầu (truyền), nghĩa là  $A \sim A$  với mọi  $A \in 2^U$ , và nếu  $A \sim B$  và  $B \sim C$  thì  $A \sim C$  với mọi  $A, B, C \in 2^U$ .
  - b) Xét quan hệ "có độ lớn nhỏ hơn hay bằng", ký hiệu  $\prec$ , trên  $2^U$  như sau:
 
$$A \prec B \Leftrightarrow \text{tồn tại } 1 \text{ đơn ánh } f : A \rightarrow B, \text{ với } A, B \in 2^U$$
 Chứng minh rằng  $\prec$  có tính phản xạ và bắc cầu (truyền), nghĩa là  $A \prec A$  với mọi  $A \in 2^U$ , và nếu  $A \prec B$  và  $B \prec C$  thì  $A \prec C$  với mọi  $A, B, C \in 2^U$ .
  - c) (Định lý Bernstein-Schroder) Chứng minh rằng nếu,  $A \prec B$  và  $B \prec$  thì  $A \sim B$ , nghĩa là nếu tồn tại các đơn ánh  $f : A \rightarrow B$  và  $g : B \rightarrow A$ , thì tồn tại song ánh  $h : A \rightarrow B$ .
5. Xét ánh xạ  $f : J_m \rightarrow J_n$ , với  $m, n \in N$ . Chứng minh rằng:
  - a) Nếu  $f$  là một đơn ánh thì  $m \leq n$ .
  - b) Nếu  $f$  là một toàn ánh thì  $m \geq n$ .
  - c) Nếu  $f$  là một song ánh thì  $m = n$ . Suy ra rằng nếu tồn tại song ánh  $f : J_n \rightarrow A$  thì số nguyên  $n \in N$  là duy nhất.
6. Có bao nhiêu bội số của 7 trong các số nguyên từ 1 đến 1001?
7. Nếu số lớn nhất trong 56 số nguyên liên tiếp là 279 thì số thứ 15 là bao nhiêu?

8. Có bao nhiêu số lẻ từ 100 đến 999 có các chữ số đôi một khác nhau?
9. Từ các ký tự a, b, c, d, e, f có bao nhiêu cách tạo ra một chuỗi gồm 3 ký tự:
- a) tùy ý?
  - b) các ký tự đôi một khác nhau?
  - c) các ký tự đôi một khác nhau và phải có mặt ký tự f?
10. Vào thời điểm nước ta có 64 tỉnh thành, chứng tỏ rằng trong một lớp gồm 70 sinh viên Việt nam có ít nhất 2 sinh viên đồng hương?
11. Một khu vườn có tất cả 10 loại hoa. Chứng minh rằng nếu hái 12 bông trong vườn thì sẽ có được ít nhất 2 bông cùng loại?
12. Chứng minh rằng nếu chọn ra 7 số khác nhau trong 12 số nguyên từ 1 đến 12 thì sẽ được 2 số có tổng bằng 13?
13. Một lớp có 40 học viên tuổi từ 17 đến 24. Bạn muốn đánh cuộc có x học viên trong lớp có cùng tuổi. Chọn x tối đa là bao nhiêu để bạn chắc chắn thắng cuộc?
14. Một lớp có 48 sinh viên trong đó có 32 nam. Có bao nhiêu cách chọn ra 3 nam và 3 nữ ghép thành 3 cặp để dự thi thời trang?
15. Một câu lạc bộ cờ vua có 12 thành viên. Có bao nhiêu cách chọn ra một đội gồm 5 người để tham gia giải đấu, biết rằng trong 5 người đó phải có 1 người được chỉ định làm đội trưởng?
16. Có bao nhiêu cách sắp xếp 6 quyển sách Toán khác nhau và 4 quyển sách Hóa học khác nhau lên một kệ sách dài nếu:
- a) Các sách được sắp xếp một cách tùy ý?
  - b) Các sách cùng một môn phải được xếp cạnh nhau?
17. Chứng minh
- a)  $C_n^0 = C_n^n = 1$ , với mọi  $n \in N$
  - b)  $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^k$ , với mọi  $n \in N$ , và  $k = 1, 2, \dots, n$
18. Chứng minh
- a)  $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$ , với mọi  $n \in N$
  - b)  $C_n^k = \frac{n-k+1}{k} C_n^{k-1}$ , với mọi  $n \in N$ , và  $k = 1, 2, \dots, n$

## II. Lập trình

[Python](#) là ngôn ngữ lập trình được dùng phổ biến cho tính toán khoa học (và nhiều mục đích khác). Tài liệu tra cứu chính thống của Python được để ở [Python documentation](#).

Với sinh viên nhập môn, có thể dùng hướng dẫn [Learn Python](#) để học nhanh Python. Có thể dùng sách [Bí kíp luyện Lập trình nhập môn với Python \(hBook\)](#) để học kỹ Python cẩn bản. Ngoài ra, có thể dùng một số nguồn tham khảo khác như [The Python Tutorial](#), [Python3 Tutorial](#), [Numerical Programming with Python](#), [GeeksforGeeks...](#)

Các thư viện Python phổ biến dùng trong tính toán khoa học là: [NumPy](#), [SciPy](#), [SymPy](#), [pandas](#), [scikit-learn](#), [Matplotlib](#)...

NumPy và SciPy là các thư viện **tính toán số** (numeric computation) giúp tính xấp xỉ nhưng hiệu quả với khối lượng tính toán lớn. Có thể học nhanh NumPy tại [NumPy - the absolute basics for beginners](#). SymPy là thư viện **tính toán ký hiệu** (symbolic computation) giúp tính chính xác và hình thức với khối lượng tính toán nhỏ. Có thể học nhanh SymPy tại [SymPy Introduction](#) và [SymPy Matrices](#).

1. Viết hàm mô phỏng đếm số số lẻ từ 100 đến 999 có các chữ số đôi một khác nhau.
2. Viết hàm mô phỏng cách tạo ngẫu nhiên 1000 chuỗi 3 ký tự từ các ký tự a, b, c, d, e, f, sao cho các ký tự đôi một khác nhau và phải có mặt ký tự f. Đếm số chuỗi 3 ký tự độc nhất (unique) trong 1000 chuỗi được tạo đó.
3. Viết hàm liệt kê tất cả các hoán vị của một chuỗi gồm n ký tự khác nhau (ví dụ: "ABC" có các hoán vị ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA)
  - a) Dùng đệ quy
  - b) Dùng thư viện
4. Viết hàm liệt kê tất cả các dãy nhị phân độ dài n (chỉ chứa 0 và 1)
  - a) Dùng đệ quy
  - b) Dùng thư viện
5. Viết hàm liệt kê (dùng thư viện) tất cả các dãy số nguyên dương độ dài k, trong đó các số nằm trong khoảng  $[1, n]$  và
  - a) Dãy tăng dần
  - b) Dãy giảm dần
6. Một bộ bài tây 52 lá gồm 4 loại Cơ, Rô, Chuồn, Bích mỗi loại 13 lá. Viết hàm tính số cách chọn ra 13 lá từ bộ bài này sao cho số lá Cơ không quá 3, có lá Rô, có lá Chuồn và số lá Bích lớn hơn 3?