

## Lab 3 -- Nguyên lý bù trừ

### I. Bài tập

1.

a) Trong lớp, số sinh viên giỏi ở cả C++ lẫn Python bằng với số sinh viên không giỏi môn nào. Biết rằng có 20 sinh viên giỏi C++ và 15 sinh viên giỏi Python. Hỏi lớp này có mấy học sinh?

b) Hỏi có bao nhiêu số nguyên dương  $n$  không vượt quá 2025 mà  $\gcd(n, 35) > 1$ ?

2.

a) Trong lớp 23CTT, có hơn  $\frac{1}{3}$  là sinh viên nữ và hơn  $\frac{1}{2}$  là Đoàn viên. Ngoài ra, có hơn  $\frac{1}{6}$  sinh viên nam không phải là Đoàn viên. Chứng minh có ít nhất một sinh viên nữ là Đoàn viên.

b) Có 30 sinh viên trong ký túc xá, 15 sinh viên học hội họa, 8 sinh viên sinh viên học, 6 sinh viên học hóa học. Biết rằng có 3 sinh viên tham gia cả 3 khóa học. Chứng minh có ít nhất 7 sinh viên không tham gia khóa học nào.

3. Hỏi có bao nhiêu cách tô bảng ô vuông  $4 \times 4$  bởi một trong hai màu đỏ hoặc xanh sao cho không có hình vuông  $3 \times 3$  nào trong đó được tô cùng màu đỏ?

### Bài tập về nhà:

4. Một hoán vị của tập  $\{1, 2, \dots, n\}$  được gọi là một "mất thứ tự" nếu không có phần tử nào ở đúng vị trí ban đầu của nó (tức là  $p(i) \neq i, \forall i$ ). Gọi  $D_n$  là số hoán vị mất thứ tự của  $n$  phần tử. Sử dụng nguyên lý Bù trừ, hãy chứng minh rằng:

$$D_n = n! \left( 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{1}{n!} \right).$$

5. Chứng minh với ba tập hợp bất kỳ  $A_1, A_2, A_3$ , ta luôn có bất đẳng thức sau:

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| \geq |A_1| + |A_2| + |A_3| - (|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3|)$$

6. Một lô hàng có 800 mã sản phẩm được đánh số từ 1 đến 800. Một mã bị coi là "cần kiểm tra đặc biệt" nếu nó chia hết cho 6, 10, hoặc 15. Hỏi có bao nhiêu mã sản phẩm cần kiểm tra đặc biệt?

7. Một công ty có 300 báo cáo viên. Phòng nhân sự thống kê thấy: 150 người có kỹ năng về Excel, 140 người có kỹ năng về SQL, và 160 người có kỹ năng về Power BI. Ngoài ra, 70 người có cả Excel và SQL, 80 người có SQL và Power BI, 75 người có Power BI và Excel, và 30 người có cả ba kỹ năng. Hỏi có bao nhiêu báo cáo viên không có kỹ năng nào trong ba kỹ năng trên?

8. Có bao nhiêu cách sắp xếp các cuốn sách Toán, Lý, Hóa, Sinh, Sử, Địa lên một kệ sách dài sao cho không tạo thành các khối "Lý-Hóa" hoặc "Sử-Địa"?

9. Một nhà hảo tâm muốn tặng 18 suất quà giống hệt nhau cho 3 làng bị thiên tai. Hỏi có bao nhiêu cách phân phát nếu làng A không thể nhận quá 6 suất, làng B không quá 7 suất, và làng C không quá 8 suất?
10. Một nhân viên kho có 6 nhãn vận chuyển cho 6 thùng hàng riêng biệt. Do sơ suất, anh ta dán nhãn một cách ngẫu nhiên. Có bao nhiêu cách dán nhãn để ít nhất một thùng hàng được dán đúng nhãn của nó?
11. Một trưởng phòng có 7 dự án khác nhau và cần phân công cho 4 lập trình viên. Có bao nhiêu cách phân công sao cho mỗi lập trình viên đều được nhận ít nhất một dự án?
12. Có 5 cặp vũ công nam-nữ đến từ 5 quốc gia khác nhau. Hỏi có bao nhiêu cách xếp họ thành một hàng ngang để chụp ảnh sao cho không có cặp vũ công nào đến từ cùng một quốc gia đứng cạnh nhau?
13. Một ngân hàng yêu cầu khách hàng tạo mã PIN gồm 4 chữ số, sử dụng các số từ 0 đến 9. Để tăng cường bảo mật, mã PIN hợp lệ phải có ít nhất một chữ số lớn hơn 5 và ít nhất một chữ số nhỏ hơn hoặc bằng 5. Hỏi có bao nhiêu mã PIN hợp lệ?
14. Một tổ xây dựng có 15 công nhân, trong đó có 5 người chuyên về điện, 4 người chuyên về nước, 3 người chuyên về mộc và 3 người chuyên về sơn. Cần chọn một đội 6 người để đi công tác. Có bao nhiêu cách chọn đội sao cho không đủ đại diện của cả 4 chuyên ngành?
15. Một trưởng dự án cần phân bổ 120 giờ công cho 8 lập trình viên trong một tuần làm việc. Có bao nhiêu cách để phân bổ thời gian nếu:
  - a) Mỗi lập trình viên được giao ít nhất 10 giờ công nhưng không quá 20 giờ công?
  - b) Mỗi lập trình viên chỉ có thể nhận các gói công việc là 10 giờ, 15 giờ, hoặc 20 giờ?
16. Một đội trưởng đội an ninh cần phân công 20 vệ sĩ vào 6 cổng của một khu phức hợp. Hỏi có bao nhiêu cách phân công nếu mỗi cổng phải có ít nhất 2 vệ sĩ và không quá 5 vệ sĩ, trong trường hợp:
  - a) Các vệ sĩ được xem là giống nhau (không phân biệt danh tính)?
  - b) Mỗi vệ sĩ là một cá nhân khác nhau (có phân biệt danh tính)?

## II. Lập trình

Để đơn giản, hàm thường yêu cầu trả về số lượng tập đáp án. Tuy nhiên sinh viên có thể viết thêm phiên bản nâng cao để trả về tập đáp án đúng.

1. Viết hàm nhập vào hai số nguyên dương  $N$  ( $N \leq 10^5$ ) và  $K$  ( $K \leq 100$ ). Hãy tính số lượng các số nguyên dương  $n$  không vượt quá  $N$  sao cho  $\gcd(n, K) > 1$
2. Viết hàm nhập vào số nguyên dương  $n$  ( $n \leq 15$ ). Hãy tính số lượng các hoán vị "mất thứ tự" ( $D_n$ ) của tập  $\{1, 2, \dots, n\}$ .  
Gợi ý: Áp dụng trực tiếp công thức của  $D_n$  được chứng minh ở bài 4 hoặc sử dụng đệ quy/quy hoạch động.

3. Viết hàm nhập vào kích thước bảng  $m \times n$  (với  $m, n \leq 10$ ). Giả sử bạn tô bảng bằng  $k$  màu khác nhau. Hãy tính tổng số cách tô màu sao cho ít nhất một màu trong  $k$  màu đó không xuất hiện trên bảng.

Gợi ý: Sử dụng Nguyên lý Bù trừ để loại trừ các trường hợp mà màu  $i$  không xuất hiện.

4. Viết hàm nhập vào số suất quà  $S$  ( $S \leq 30$ ) và số làng  $L$  ( $L \leq 5$ ). Giả sử mỗi làng  $i$  có giới hạn trên là  $C_i$  suất quà ( $C_i \leq S$ ). Hãy tính số cách phân phối  $S$  suất quà giống hệt nhau cho  $L$  làng sao cho làng  $i$  nhận  $\leq C_i$  suất.

Gợi ý: Đây là bài toán tìm số nghiệm nguyên không âm của

$x_1 + x_2 + \dots + x_L = S$  với  $x_i \leq C_i$ . Sử dụng Nguyên lý Bù trừ để loại trừ các trường hợp vi phạm  $x_i \geq C_i + 1$

--- THE END ---

🔍 ↳ 4 cells hidden