

Lab 5 - Phương pháp hàm sinh

I. Bài tập

1. Từ các ký tự của từ "MATH", có bao nhiêu chuỗi độ dài 4 (được phép lặp ký tự) sao cho không có hai ký tự giống nhau đứng cạnh nhau?
2. Một cửa hàng có 5 loại trái cây khác nhau. Một khách muốn mua 3 quả (có thể trùng loại). Có bao nhiêu cách chọn?
3. Phân bổ 6 viên bi giống nhau vào 4 hộp khác nhau, sao cho mỗi hộp có ít nhất 1 viên. Có bao nhiêu cách?

Bài tập về nhà:

4. Chứng minh quy tắc cộng: Cho $A(x)$ là hàm sinh của dãy (a_n) và $B(x)$ là hàm sinh của dãy (b_n) . Chứng minh rằng hàm sinh của dãy tổng $(a_n + b_n)$ là $A(x) + B(x)$.
5. Cho $A(x)$ là hàm sinh của dãy a_n . Chứng minh rằng hàm sinh của dãy $(n \cdot a_n)$ là $x \frac{d[A(x)]}{dx}$.
6. Sử dụng định nghĩa của hàm sinh thường
$$g(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots \equiv \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$
, chứng minh hàm sinh cho dãy hằng số a_n là $\frac{c}{1-x}$.
7. Sử dụng định nghĩa của hàm sinh thường
$$g(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots \equiv \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$
, chứng minh hàm sinh cho dãy cấp số nhân $a_n = c \cdot b^n$ là $\frac{c}{1-bx}$.
8. Cho $A(x)$ là hàm sinh của dãy (a_n) . Hãy tìm hàm sinh cho dãy $(0, 0, \dots, a_0, a_1, \dots)$ (k số 0 ở vị trí đầu).
9. Từ tập $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, chọn 4 số (có lặp) để tạo dãy số. Có bao nhiêu dãy nếu tổng các số bằng đúng 10 và phải có ít nhất một số chẵn?
10. Một lớp học có 10 học sinh nhận được 4 phần thưởng giống nhau. Hỏi có bao nhiêu cách phân thưởng sao cho mỗi học sinh có thể nhận nhiều hoặc không nhận?
11. Sắp xếp 7 ký tự từ từ "COMBO" (có lặp ký tự O), sao cho các ký tự giống nhau không đứng cạnh nhau. Có bao nhiêu cách?

12. Một nông trại có 8 con gà giống nhau cần phân vào 3 chuồng khác nhau, sao cho không chuồng nào rỗng. Có bao nhiêu cách?
13. Chọn 4 cuốn sách từ 6 loại sách khác nhau ở thư viện (có thể chọn nhiều cuốn cùng loại). Có bao nhiêu cách nếu phải chọn ít nhất một cuốn từ mỗi loại?
14. Phân bổ 5 thư mời giống nhau cho 7 phòng ban khác nhau, sao cho có đúng 2 phòng ban không nhận thư. Có bao nhiêu cách?
15. Một cửa hàng bán 3 loại kẹo: 10 viên loại A (giống nhau), 8 viên loại B (giống nhau), 6 viên loại C (giống nhau). Một khách mua 5 viên. Có bao nhiêu cách chọn nếu phải lấy đủ 3 loại?

II. Lập trình

Tất cả các bài toán yêu cầu tìm hệ số của x^k trong một hàm sinh, ưu tiên sử dụng Quy hoạch động (Dynamic Programming) để mô phỏng quá trình nhân các đa thức của hàm sinh.

1. Một cửa hàng bán 3 loại bánh: bánh A (tối đa 3 cái), bánh B (tối đa 4 cái), và bánh C (tối đa 5 cái). Viết hàm nhập vào số lượng k ($k \leq 12$) và tính xem có bao nhiêu cách chọn tổng cộng k cái bánh.

Gợi ý: Tìm hệ số của x^k trong hàm sinh

$$G(x) = (1 + x + x^2 + x^3)(1 + x + x^2 + x^3 + x^4)(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5)$$

2. Viết chương trình nhập vào k ($k \leq 100$) và tính số nghiệm nguyên không âm của phương trình:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = k$$

với ràng buộc $x_1 \geq 3$ và x_2 là số chẵn.

Gợi ý: Tìm hệ số của x^k trong hàm sinh

$$G(x) = (x^3 + x^4 + \dots)(1 + x^2 + x^4 + \dots)(1 + x + x^2 + \dots)^2$$

3. Viết chương trình nhập vào số nguyên n ($n \leq 50$). Tính và in ra số cách phân hoạch số n thành tổng của các số nguyên dương 1, 2, 3 mà mỗi số được sử dụng tối đa 3 lần (ví dụ: $n = 4$ có phân hoạch $1 + 1 + 1 + 1$ nhưng bị loại).

Gợi ý: Tìm hệ số của x^n trong

$$G(x) = (1 + x + x^2 + x^3)(1 + x^2 + x^4 + x^6)(1 + x^3 + x^6 + x^9)$$

4. Viết chương trình nhập vào số nguyên k ($k \leq 200$). Tính và in ra hệ số của x^k trong khai triển:

$$G(x) = \frac{1}{(1 - x)(1 - x^2)}$$

Gợi ý: $G(x) = (1 + x + x^2 + \dots)(1 + x^2 + x^4 + \dots)$. Áp dụng Quy hoạch động hoặc công thức phân tích hàm sinh.

5. Giả sử bạn có tiền xu mệnh giá 1, 5, và 10. Viết chương trình nhập vào số tiền N ($N \leq 100$). Tính và in ra số cách khác nhau để có tổng số tiền là N bằng cách sử dụng các đồng xu này.

Gợi ý: Tìm hệ số của x^N trong hàm sinh

$$G(x) = (1 + x + x^2 + \dots)(1 + x^5 + x^{10} + \dots)(1 + x^{10} + x^{20} + \dots).$$

--- THE END ---

▶ ↳ 5 cells hidden