

## Lab 4 - Hệ thức đệ quy

### I. Bài tập

1. Một người cần leo lên một cầu thang có  $n$  bậc. Mỗi bước, người đó có thể bước lên 1 bậc hoặc 2 bậc. Hỏi có bao nhiêu cách khác nhau để người đó leo hết cầu thang?
2. Có bao nhiêu cách để lát một sàn nhà hình chữ nhật kích thước  $2xn$  bằng các viên gạch kích thước  $1x2$  và  $2x2$ ?
3. Giải phương trình sai phân sau:
  - a)  $a_n - 2a_{n-1} = 6n$  với  $n \geq 1$  và điều kiện đầu  $a_0 = 2$
  - b)  $a_0 = 1, a_1 = 4$  và  $a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2}$  với  $n \geq 2$

### Bài tập về nhà:

4. Tìm biểu thức tổng quát cho dãy  $(a_n)_{n \geq 0}$  thỏa hệ thức đệ quy
  - a)  $2a_{n-1} - 2a_{n-2}, \forall n \geq 2$ , với  $a_0 = 1, a_1 = 2$
  - b)  $2a_{n-1} + a_{n-2} + 1, \forall n \geq 2$ , với  $a_0 = 1, a_1 = \frac{1}{2}$
5. Giải các phương trình sai phân
  - a)  $a_n - 2a_{n-1} = 6n, \forall n \geq 1$ , với điều kiện đầu  $a_0 = 2$
  - b)  $a_n - a_{n-1} - 2a_{n-2} = 1, \forall n \geq 2$ , với điều kiện đầu  $a_0 = 1, a_1 = 3$
6. Tìm công thức tính
  - a)  $s_n = \sum_{i=1}^n i(i^2 + 2)$
  - b)  $s_n = \sum_{i=1}^n (i+1)(i+2)2^i$
7. Có bao nhiêu chuỗi nhị phân (gồm các ký tự 0 và 1) có độ dài  $n$  mà không chứa hai ký tự '0' đứng liền kề nhau? (Gợi ý: gọi  $a_n$  là số chuỗi thỏa mãn. Thiết lập và giải hệ thức đệ quy cho  $a_n$ ).
8. Một người vay ngân hàng 100 triệu đồng với lãi suất 1% mỗi tháng. Bắt đầu từ tháng đầu tiên, mỗi tháng người đó trả một số tiền cố định là 3 triệu đồng (khoản trả được thực hiện vào cuối tháng, sau khi ngân hàng đã tính lãi). Gọi  $B_n$  là số nợ còn lại (tính bằng triệu đồng) sau  $n$  tháng.
  - a) Thiết lập hệ thức đệ quy cho  $B_n$
  - b) Tìm công thức tổng quát cho  $B_n$  để xác định số nợ còn lại sau  $n$  tháng
9. Một cặp thỏ (một đực, một cái) mới sinh sẽ không sinh sản trong tháng đầu tiên. Bắt đầu từ tháng thứ hai, mỗi cặp thỏ sẽ sinh ra một cặp thỏ mới mỗi tháng. Giả sử không có con thỏ nào chết. Nếu bắt đầu với một cặp thỏ mới sinh, có bao

nhiêu cặp thỏ sau n tháng? Hãy chỉ ra mối liên hệ của bài toán với dãy Fibonacci.

10. Chuỗi ký tự Ternary: Tìm số lượng chuỗi ký tự ternary (gồm các ký tự 0, 1, 2) có độ dài n mà không chứa hai ký tự '2' đứng cạnh nhau.
11. Một thuật toán xử lý một danh sách có n phần tử. Để làm điều đó, nó thực hiện một thao tác trên phần tử đầu tiên, sau đó gọi đệ quy chính nó trên danh sách n - 1 phần tử còn lại. Số thao tác cơ bản được cho bởi hệ thức

$$C_n = C_{n-1} + n$$

$$C_1 = 1$$

Hãy tìm công thức tổng quát cho  $C_n$ , là tổng số thao tác khi thực hiện trên một danh sách có n phần tử.

## II. Lập trình

1. Viết chương trình nhập vào kích thước  $n$  ( $n \leq 50$ ). Hãy tính và in ra số cách để lát sàn nhà kích thước  $2 \times n$  bằng các viên gạch  $1 \times 2$  (đứng hoặc ngang) và  $2 \times 2$ .

Gợi ý: Dựa vào hệ thức đệ quy thiết lập cho bài 2. Sử dụng mảng hoặc Quy hoạch động để tính toán các giá trị lớn. 2 Viết chương trình nhập vào độ dài  $n$  ( $n \leq 90$ ). Hãy tính và in ra số lượng chuỗi ký tự ternary (0, 1, 2) có độ dài  $n$  mà không chứa hai ký tự '2' đứng cạnh nhau.

Gợi ý: Cần thiết lập hệ thức đệ quy cho bài toán này, tương tự như bài 10.

2. Viết chương trình nhập vào số nguyên dương  $n$  ( $n \leq 10^4$ ). Hãy tính và in ra giá trị của tổng:

$$s_n = \sum_{i=1}^n (i+1)(i+2)2^i$$

Gợi ý: Không cần thiết lập hệ thức đệ quy để giải, nhưng có thể sử dụng công thức tổng quát tìm được ở bài 6b để tính nhanh hơn.

3. Viết chương trình nhập vào  $n$  ( $n \leq 100$ ). Tính và in ra giá trị của  $a_n$  cho hệ thức đệ quy:

$$a_n = 2a_{n-1} - 1 - 2a_{n-2}, \forall n \geq 2$$

với điều kiện đầu  $a_0 = 1, a_1 = 2$ .

Gợi ý: Áp dụng công thức tổng quát có dạng lượng giác hoặc sử dụng mảng/Quy hoạch động để tính.

4. Viết chương trình mô phỏng bài toán vay ngân hàng (bài 8). Nhập vào số tháng  $n$  ( $n \leq 100$ ). In ra số nợ còn lại  $B_n$  sau  $n$  tháng, với điều kiện ban đầu:

- Vay ban đầu: 100 (triệu đồng)
- Lãi suất: 1% mỗi tháng

- Trả cố định: 3 (triệu đồng) mỗi tháng
- Gợi ý: Dùng hệ thức đệ quy  $B_n = (1.01)B_{n-1} - 3.$

--- THE END ---

▶ ↳ 5 cells hidden