1.9 다음 알고리즘의 시간 복잡도를 구하라.

```
for (i ← 1; i ≤ n; i ← i + 1)
  for(j ← 1; j ≤ i; j ← j + 1)
    for(k ← 1; k ≤ j; k ← k + 1)
      x ← x + 1;
```

위의 알고리즘을 자세히 보면
i=1일 때는 j=1, k=1이므로 x는 1 증가하고
i=2일 때는 j가 1, 2가 되므로 x는 1+2 증가하고
i=3일 때는 j가 1, 2, 3이 되므로 x는 1+2+3 증가하고
i=4일 때는 j가 1, 2, 3, 4가 되므로 x는 1+2+3+4 증가하게 된다.

따라서 전체적인 수식은 다음과 같다.
(1)+(1+2)+(1+2+3)+(1+2+3+4)+⋯+(1+⋯+n)

이것은 1+3+6+10+⋯ 와 같이 증가하게 되는데 이런 것을 계차수열이라 한다.
이렇게 계차가 2, 3, 4, 5가 되는 계차수열의 합을 구하는 공식은 다음과 같다.

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1}(k+1) = 1 + \sum_{k=1}^{n-1}k + \sum_{k=1}^{n-1}1$$

이제 수열의 합을 구하는 공식을 적용하면 항은 1부터 (n-1)까지 증가하므로

$$a_n = \frac{n(n-1)}{2} + (n-1) + 1 = \frac{(n^2+n)}{2}$$

이제, 이 일반항을 수열의 합을 구하는 공식에 적용하면 다음과 같다.

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{(n^2+n)}{2} = \frac{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}}{2} = \frac{\frac{n(n+1)(2n+1+3)}{6}}{2}$$

$$= \frac{\frac{n(n+1)(n+2)}{3}}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

따라서 시간 복잡도는 $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$이 된다.

이것을 빅오 표기법으로 나타내면 $O(n^3)$이 된다.