

Лабораторная работа № 3

Описание модели.

Двухсервисная модель с эластичным трафиком

Проанализируем соту сети емкостью C . Пусть пользователи генерируют запросы на передачу данных двух типов. Запросы на передачу данных представляют собой ПП с интенсивностью λ_i , $i=1,2$. Средняя длина передаваемого файла θ_i , $i=1,2$. Минимальная емкость, необходимая для передачи данных равна b_i , $i=1,2$.

Таблица 11.1. Основные обозначения.

C	– пиковая пропускная способность соты;
λ_i , $i=1,2$	– интенсивность поступления запросов на передачу данных первого/второго типа [запросов/ед.вр];
θ_i , $i=1,2$	– длина передаваемого файла первого/второго типа [бит];
ρ_i^1 , $i=1,2$	– интенсивность предложенной нагрузки, создаваемой запросами на передачу данных первого/второго типа;
a_i , $i=1,2$	– доля нагрузки, создаваемой запросами на передачу данных первого/второго типа, которая приходится на единицу пропускной способности (безразмерная величина);
b_i , $i=1,2$	– минимальное требование к ресурсам сети, необходимое для передачи данных первого/второго типа;
$X_i(t)$, $i=1,2$	– число обслуживаемых в системе запросов на передачу данных первого/второго типа в момент времени t , $t \geq 0$;
$X(t) = (X_1(t), X_2(t))$	– СП, описывающий функционирование системы в момент времени t , $t \geq 0$;
X	– пространство состояний системы;
n_i , $i=1,2$	– число передаваемых в системе блоков данных первого/второго типа;
B_i , $i=1,2$	– множество блокировок запросов на передачу данных первого/второго типа;
S_i , $i=1,2$	– множество приема запросов на передачу данных первого/второго типа.

Схема модели (рис. 11.1):

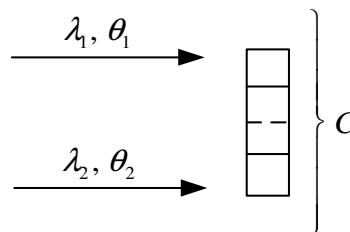


Рис. 11.1. Схема двухсервисной модели с эластичным трафиком

Пространство состояний системы (рис. 11.2):

$$\mathbf{X} = \{(n_1, n_2) : n_1 \geq 0, n_2 \geq 0\}. \quad (11.1)$$

Рассмотрим некоторое центральное состояние (n_1, n_2) , $(n_1, n_2) \in X$. Построим диаграмму интенсивностей переходов для центрального состояния (рис. 11.3):

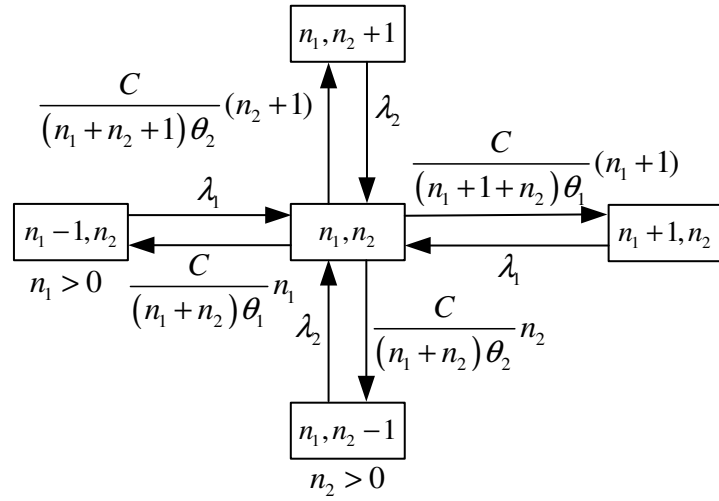


Рис. 11.3. Диаграмма интенсивностей переходов для центрального состояния двухсервисной модели с эластичным трафиком

Пояснения:

- | | |
|--|---|
| $\frac{C}{n_1 + n_2}$ | – скорость передачи данных первого/второго типа в состоянии (n_1, n_2) ; |
| $\frac{\theta_1}{C} = \frac{\theta_1}{C}(n_1 + n_2)$ | – среднее время обслуживания запроса на передачу данных первого типа в состоянии (n_1, n_2) ; |
| $\frac{\theta_2}{C} = \frac{\theta_2}{C}(n_1 + n_2)$ | – среднее время обслуживания запроса на передачу данных второго типа в состоянии (n_1, n_2) ; |
| $\frac{C}{\theta_1(n_1 + n_2)}$ | – интенсивность обслуживания запроса на передачу данных первого типа в состоянии (n_1, n_2) ; |
| $\frac{C}{\theta_2(n_1 + n_2)}$ | – интенсивность обслуживания запроса на передачу данных второго типа в состоянии (n_1, n_2) . |

Множество блокировок запросов на передачу данных:

$$B_i = \{\emptyset\}, \quad i = 1, 2. \quad (11.2)$$

Множество приема запросов на передачу данных:

$$S_i = \overline{B_i} = X \setminus B_i = \{0, 1, 2, \dots\}, \quad i = 1, 2. \quad (11.3)$$

Система уравнений глобального баланса (СУГБ):

$$\begin{aligned}
& \left(\lambda_1 + \lambda_2 + \frac{C}{(n_1 + n_2)\theta_1} n_1 + \frac{C}{(n_1 + n_2)\theta_2} n_2 \right) \cdot p(n_1, n_2) = \\
& = \lambda_1 p(n_1 - 1, n_2) \cdot U(n_1) + \lambda_2 p(n_1, n_2 - 1) \cdot U(n_2) + \\
& + \frac{C}{(n_1 + 1 + n_2)\theta_1} (n_1 + 1) p(n_1 + 1, n_2) + \\
& + \frac{C}{(n_1 + n_2 + 1)\theta_2} (n_2 + 1) p(n_1, n_2 + 1), (n_1, n_2) \in X.
\end{aligned} \tag{11.4}$$

Чтобы выписать систему уравнений частичного баланса (СУЧБ), проверим критерий Колмогорова. Рассмотрим произвольный замкнутый контур (рис. 11.4):

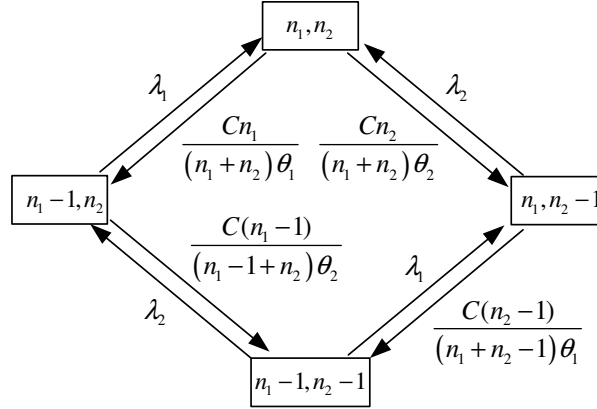


Рис. 11.4. Произвольный замкнутый контур для двухсервисной модели с эластичным трафиком

Рассмотрим произведение интенсивностей переходов

- по часовой стрелке: $\frac{n_2}{n_1 + n_2} \frac{C}{\theta_2} \frac{n_1}{n_1 + n_2 - 1} \frac{C}{\theta_1} \lambda_1 \lambda_2$;
- против часовой стрелки: $\frac{n_1}{n_1 + n_2} \frac{C}{\theta_1} \frac{n_2}{n_1 + n_2 - 1} \frac{C}{\theta_2} \lambda_1 \lambda_2$.

Произведения равны. Критерий выполнен, следовательно, СП $(X_1(t), X_2(t))$, описывающий поведение системы является обратимым марковским процессом, СУЧБ существует.

СУЧБ:

$$\begin{cases} p(n_1, n_2) \frac{C}{(n_1 + n_2)\theta_1} n_1 = \lambda_1 p(n_1 - 1, n_2), n_1 > 0, \\ p(n_1, n_2) \frac{C}{(n_1 + n_2)\theta_2} n_2 = \lambda_2 p(n_1, n_2 - 1), n_2 > 0, \end{cases} \quad (n_1, n_2) \in X. \tag{11.5}$$

Обозначим $\rho_i = \lambda_i \theta_i$, $a_i = \frac{\rho_i}{C}$, $\rho_i < C$, $i=1,2$.

Стационарное распределение вероятностей состояний системы:

$$p(n_1, n_2) = \frac{a_1^{n_1} a_2^{n_2}}{n_1! n_2!} (n_1 + n_2)! p(0, 0), \tag{11.6}$$

$$\text{где } p(0,0) = \left(\sum_{(n_1, n_2) \in X} (n_1 + n_2)! \frac{a_1^{n_1} a_2^{n_2}}{n_1! n_2!} \right)^{-1}. \quad (11.7)$$

Основные вероятностные характеристики модели:

- Вероятность блокировки по времени E_i , $i=1,2$ запроса на передачу данных первого/второго типа

$$E_1 = E_2 = 0; \quad (11.8)$$

- Среднее число \bar{N}_i , $i=1,2$ обслуживаемых в системе запросов на передачу данных первого/второго типа:

$$\bar{N}_i = \lambda_i \frac{\theta_i}{(\theta_1 \lambda_1 + \theta_2 \lambda_2)}, \quad i=1,2. \quad (11.9)$$

- Среднее время T_i , $i=1,2$ обслуживания запроса на передачу данных первого/второго типа:

$$T_i = \frac{\bar{N}_i}{\lambda_i}. \quad (11.10)$$

Задание.

1. Описать пошагово алгоритм расчета распределения вероятностей состояний модели (вероятности блокировки запроса каждого типа, среднего числа запросов в системе).
2. Составить программу, реализующую расчет распределения вероятностей, среднего числа обслуживаемых запросов для любых значений исходных данных, среднего времени обслуживания запроса. Программа должна выводить на экран:
 - значение распределения вероятностей,
 - значение среднего числа запросов,
 - значение среднего времени обслуживания запроса.
3. Построить график зависимости среднего времени обслуживания запроса от интенсивности поступления запросов на обслуживание.
4. Построить график зависимости среднего числа обслуживаемых запросов от интенсивности поступления запросов на предоставление услуги.