

Лабораторная работа № 4

Описание модели.

Неполнодоступная двухсервисная модель Эрланга с резервированием для заявок второго типа и одинаковой интенсивностью обслуживания. Первыми заполняются зарезервированные приборы.

Задание.

1. Описать модель.
2. Нарисовать схему модели.
3. Определить пространство состояний.
4. Построить диаграмму интенсивностей переходов.
5. Определить множества блокировок и приема.
6. Выписать СУГБ, СУЛБ.
7. Получить формулу для расчета распределения вероятностей.
8. Получить формулу для расчета вероятности блокировки заявки каждого типа.
9. Получить формулу для расчета среднего числа обслуживаемых в системе заявок.
10. Составить программу, реализующую расчет распределения вероятностей, вероятности блокировки, среднего числа заявок для любых значений исходных данных.
11. Построить график зависимости вероятности блокировки от интенсивности поступления заявок.
12. Построить график зависимости среднего числа обслуживаемых заявок от интенсивности поступления заявок на предоставление услуги.

Справочные материалы.

Таблица 1. Основные обозначения.

C	– общее число приборов;
g	– число полнодоступных приборов;
$C - g$	– число зарезервированных приборов;
λ_1, λ_2	– интенсивность поступления заявок 1, 2-го типа [заявок/ед.вр.];
μ^{-1}	– среднее время обслуживания заявки 1, 2-го типа [ед.вр.];
ρ_1, ρ_2	– интенсивность предложенной нагрузки, создаваемой заявками 1, 2-го типа;
$X(t)$	– число заявок, обслуживаемых в системе в момент времени t , $t \geq 0$;
X	– пространство состояний системы;
n	– число обслуживаемых в системе заявок;
B_1, B_2	– множество блокировки заявок 1, 2-го типа;
S_1, S_2	– множество приема заявок 1, 2-го типа.

ПРИМЕР

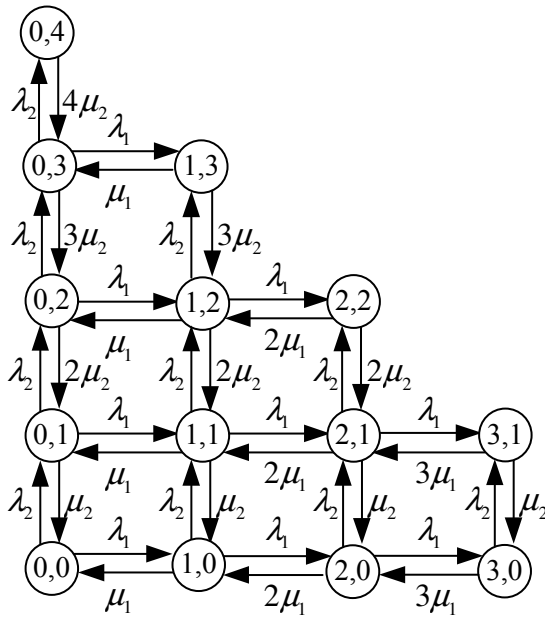
Рассматривается неполнодоступная двухсервисная модель Эрланга с разными интенсивностями обслуживания и резервированием для обслуживания запросов на предоставление услуги 2-го типа:

$C = 4, g = 3, \rho_1 = \frac{1}{2}, \rho_2 = 1$. Запросы на предоставление услуги 2-го типа сначала заполняют зарезервированную емкость.

1. Выписать пространство состояний X ;
2. Построить диаграмму интенсивностей переходов;
3. Выписать множества блокировок запросов B_1, B_2 ;
4. Выписать множества приема запросов S_1, S_2 ;
5. Найти распределение вероятностей состояний системы $p(n_1, n_2), (n_1, n_2) \in X$.
6. Найти вероятности блокировки (по времени, по вызовам, по нагрузке) запросов i -типа, $i = 1, 2$;
7. Найти среднее число \bar{N}_i обслуживаемых в системе запросов i -типа, $i = 1, 2$;
8. Найти среднее число \bar{N} обслуживаемых в системе запросов.

Решение:

1. $X = \{(n_1, n_2) : n_1 = \overline{0, 3}, n_2 = \overline{0, 4}, n_1 + n_2 \leq 4\}, |X| = 14$.



2.

3. $B_1 = \{(n_1, n_2) \in X : n_1 = 3 \vee n_1 + n_2 = 4\} = \{(3,0), (3,1), (2,2), (1,3), (0,4)\},$

$$B_2 = \{(n_1, n_2) \in X : n_1 + n_2 = 4\} = \{(0,4), (1,3), (2,2), (3,1)\}.$$

4. $S_1 = \{(n_1, n_2) \in X : n_1 < 2 \vee n_1 + n_2 < 5\} = \{(0,0), (1,0), (2,0), (0,1), (1,1), (2,1), (0,2), (1,2), (0,3)\},$

$$S_2 = \{(n_1, n_2) \in X : n_1 + n_2 < 5\} = \{(0,0), (1,0), (2,0), (3,0), (0,1), (1,1), (2,1), (0,2), (1,2), (0,3)\}.$$

5. Для нахождения стационарного распределения вероятностей состояний системы проверим критерий Колмогорова. Так как произведения интенсивностей переходов по любому замкнутому

циклу в одну и другую сторону равны, то СП $(X_1(t), X_2(t))$ является обратимым и существует частичный баланс.

1)	$p_{10} = \rho_1 p_{00};$	$p_{10} = \frac{1}{2} \cdot \frac{48}{211} = \frac{24}{211};$
2)	$p_{20} = \frac{\rho_1^2}{2} p_{00};$	$p_{20} = \frac{1}{8} \cdot \frac{48}{211} = \frac{6}{211};$
3)	$p_{30} = \frac{\rho_1^3}{3!} p_{00} = \frac{\rho_1^3}{6} p_{00};$	$p_{30} = \frac{1}{48} \cdot \frac{48}{211} = \frac{1}{211};$
4)	$p_{01} = \rho_2 p_{00};$	$p_{01} = 1 \cdot \frac{48}{211} = \frac{48}{211};$
5)	$p_{11} = \rho_1 \rho_2 p_{00};$	$p_{11} = \frac{1}{2} \cdot \frac{48}{211} = \frac{24}{211};$
6)	$p_{21} = \frac{\rho_1^2}{2} \rho_2 p_{00};$	$p_{21} = \frac{1}{8} \cdot \frac{48}{211} = \frac{6}{211};$
7)	$p_{31} = \frac{\rho_1^3}{6} \rho_2 p_{00};$	$p_{31} = \frac{1}{48} \cdot \frac{48}{211} = \frac{1}{211};$
8)	$p_{02} = \frac{\rho_2^2}{2} p_{00};$	$p_{02} = \frac{1}{2} \cdot \frac{48}{211} = \frac{24}{211};$
9)	$p_{12} = \rho_1 \frac{\rho_2^2}{2} p_{00};$	$p_{12} = \frac{1}{4} \cdot \frac{48}{211} = \frac{12}{211};$
10)	$p_{22} = \frac{\rho_1^2}{2} \frac{\rho_2^2}{2} p_{00};$	$p_{22} = \frac{1}{16} \cdot \frac{48}{211} = \frac{3}{211};$
11)	$p_{03} = \frac{\rho_2^3}{3!} p_{00} = \frac{\rho_2^3}{6} p_{00};$	$p_{03} = \frac{1}{6} \cdot \frac{48}{211} = \frac{8}{211};$
12)	$p_{13} = \frac{\rho_2^3}{6} \rho_1 p_{00};$	$p_{13} = \frac{1}{12} \cdot \frac{48}{211} = \frac{4}{211};$
13)	$p_{04} = \frac{\rho_2^4}{4!} p_{00} = \frac{\rho_2^4}{24} p_{00};$	$p_{04} = \frac{1}{24} \cdot \frac{48}{211} = \frac{2}{211}.$

С учетом условия нормировки $\sum_{(n_1, n_2) \in X} p(n_1, n_2) = 1$

$$p_{00} = \left(1 + \rho_1 + \frac{\rho_1^2}{2} + \frac{\rho_1^3}{6} + \rho_2 + \rho_1 \rho_2 + \frac{\rho_1^2}{2} \rho_2 + \frac{\rho_1^3}{6} \rho_2 + \frac{\rho_2^2}{2} + \rho_1 \frac{\rho_2^2}{2} + \frac{\rho_1^2}{2} \frac{\rho_2^2}{2} + \frac{\rho_2^3}{6} + \frac{\rho_2^3}{6} \rho_1 + \frac{\rho_2^4}{24} \right)^{-1} = \left(\frac{211}{48} \right)^{-1} \approx 0,23.$$

6. Вероятность блокировки запроса на предоставление услуги 1-го типа:

$$B_1 = \sum_{(n_1, n_2) \in B_1} p(n_1, n_2) = p_{30} + p_{31} + p_{22} + p_{13} + p_{04} = \frac{11}{211} \approx 0,05;$$

Вероятность блокировки запроса на предоставление услуги 2-го типа:

$$B_2 = \sum_{(n_1, n_2) \in B_2} p(n_1, n_2) = p_{04} + p_{13} + p_{22} + p_{31} = \frac{10}{211} \approx 0,0.$$

7. Среднее число обслуживаемых в системе запросов 1-го типа:

$$\begin{aligned}\bar{N}_1 &= \sum_{\substack{n_1=0, \\ (n_1, n_2) \in X}}^g n_1 p(n_1, n_2) = \sum_{n_2=0}^3 p(1, n_2) + 2 \sum_{n_2=0}^2 p(2, n_2) + \\ &+ 3 \sum_{n_2=0}^1 p(3, n_2) = 1 \cdot (p(1, 0) + p(1, 1) + p(1, 2) + p(1, 3)) + 2 \cdot \\ &\cdot (p(2, 0) + p(2, 1) + p(2, 2)) + 3 \cdot (p(3, 0) + p(3, 1)) = \frac{100}{211} \approx 0,47;\end{aligned}$$

Среднее число обслуживаемых в системе запросов 2-го типа:

$$\begin{aligned}\bar{N}_2 &= \sum_{\substack{n_2=0, \\ (n_1, n_2) \in X}}^C n_2 p(n_1, n_2) = \sum_{n_1=0}^3 p(n_1, 1) + 2 \sum_{n_1=0}^2 p(n_1, 2) + 3 \sum_{n_1=0}^1 p(n_1, 3) + \\ &+ 4 \sum_{n_1=0}^0 p(n_1, 3) = 1 \cdot (p(0, 1) + p(1, 1) + p(2, 1) + p(3, 1)) + \\ &+ 2 \cdot (p(0, 2) + p(1, 2) + p(2, 2)) + 3 \cdot (p(0, 3) + p(1, 3)) + \\ &+ 4 \cdot p(0, 4) = \frac{201}{211} \approx 0,95.\end{aligned}$$

8. Среднее число запросов, обслуживаемых в системе:

$$\begin{aligned}\bar{N} &= \bar{N}_1 + \bar{N}_2 = \sum_{(n_1, n_2) \in X} (n_1 + n_2) p(n_1, n_2) = \\ &= 1 \cdot (p(1, 0) + p(0, 1)) + 2 \cdot (p(2, 0) + p(1, 1) + p(0, 2)) + \\ &+ 3 \cdot (p(0, 3) + p(1, 2) + p(2, 1) + p(3, 0)) + \\ &+ 4 \cdot (p(0, 4) + p(1, 3) + p(2, 2) + p(3, 1)) = \frac{301}{211} \approx 1,43.\end{aligned}$$