Семинар 3.
Полнодоступная двухсервисная модель Эрланга с различными интенсивностями обслуживания

Рассмотрим звено сети емкостью C. Пусть пользователям сети предоставляются услуги двух типов. Запросы на предоставление услуг представляют собой ПП с интенсивностями λ_1, λ_2. Среднее время обслуживания запросов каждого типа μ_1^{-1}, μ_2^{-1} соответственно.

В классификации Башарина-Кендалла $\underset{\lambda_1\lambda_2}{MM} \mid \underset{\mu_1\mu_2}{MM} \mid C \mid 0$.

Таблица 3.1. Основные обозначения.

C	–	пиковая пропускная способность соты;
λ_1, λ_2	–	интенсивность поступления запросов на предоставление услуги 1, 2-го типа [запросов/ед.вр];
μ_1^{-1}, μ_2^{-1}	–	среднее время обслуживания запроса на предоставление услуги 1, 2-го типа [1/ед.вр];
ρ_1, ρ_2	–	интенсивность предложенной нагрузки, создаваемой запросами на предоставление услуги 1, 2-го типа;
b_1, b_2	–	емкость, необходимая для предоставления услуги 1,2-го типа;
$X_1(t),\ X_2(t)$	–	число запросов 1, 2-го типа, обслуживаемых в системе в момент времени t, $t \geq 0$;
$X\ (t) = \left(X_1(t), X_2(t)\right)$	–	СП, описывающий функционирование системы в момент времени t, $t \geq 0$;
$\mathscr{X}$	–	пространство состояний системы;
n_1, n_2	–	число обслуживаемых в системе запросов 1,2-го типа;
$\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2$	–	множество блокировок запросов на предоставление услуги 1, 2-го типа;
$\mathscr{S}_1, \mathscr{S}_2$	–	множество приема запросов на предоставление услуги 1, 2-го типа.

Пусть $b_1 = b_2 = 1$.

Схема модели (рис. 3.1):

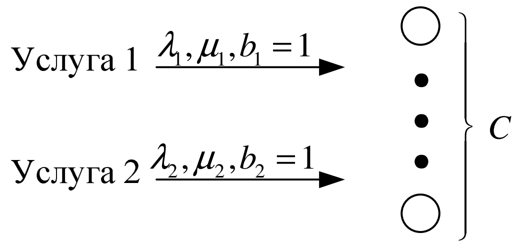


Рис. 3.1. Схема полнодоступной двухсервисной модели Эрланга с различными интенсивностями обслуживания

Пространство состояний системы (рис. 3.2):

$$\mathscr{X} = \{(n_1, n_2) : n_1 \geq 0,\, n_2 \geq 0,\, n_1 + n_2 \leq C\},\quad |\mathscr{X}| = C + 1. \tag{3.1}$$

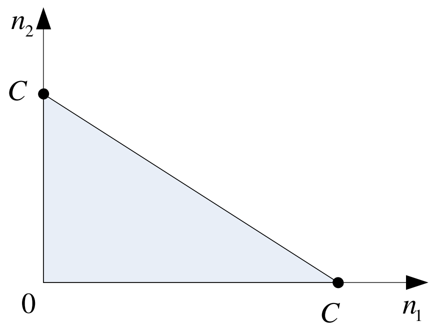


Рис. 3.2. Пространство состояний полнодоступной двухсервисной модели Эрланга с различными интенсивностями обслуживания в общем виде

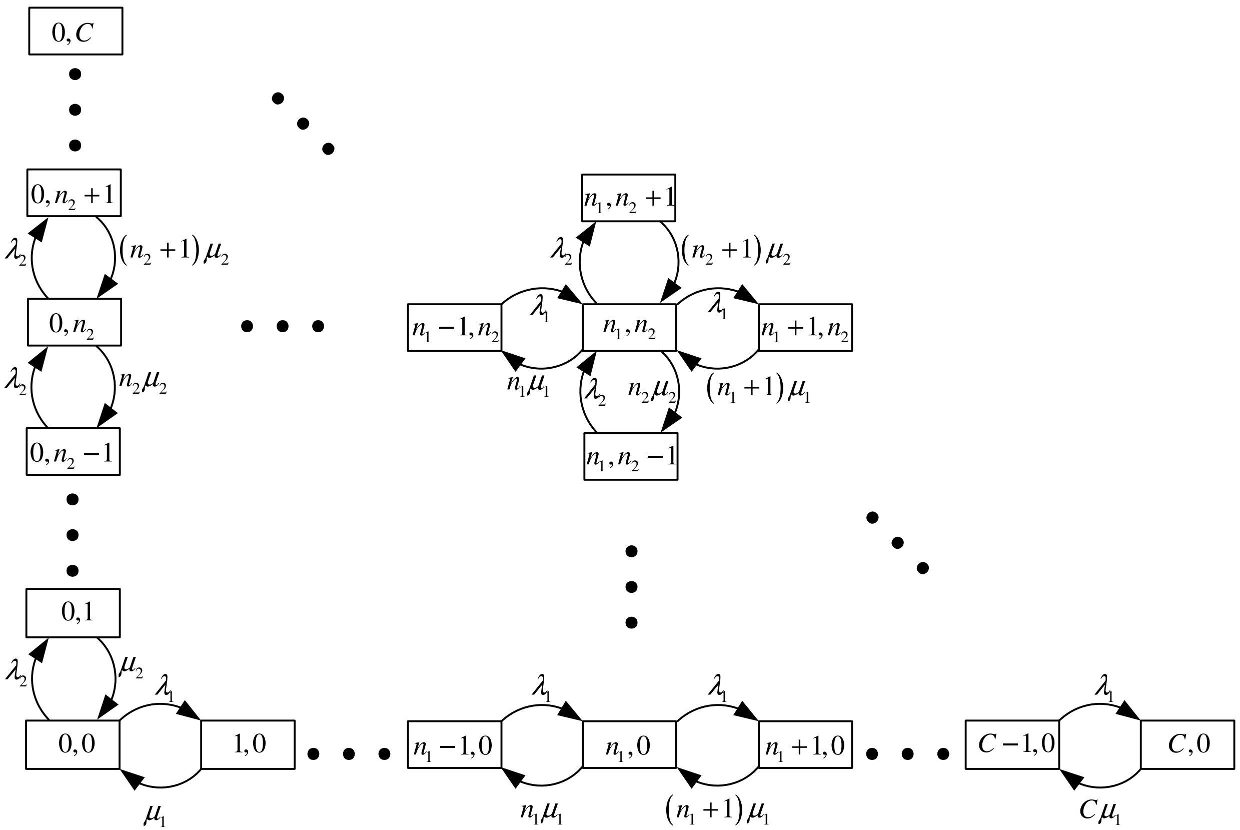


Рис. 3.3. Диаграмма интенсивностей переходов для полнодоступной двухсервисной модели Эрланга с различными интенсивностями обслуживания

Множество блокировок (рис. 3.4) запросов на предоставление услуги i-типа, $i = 1, 2$:

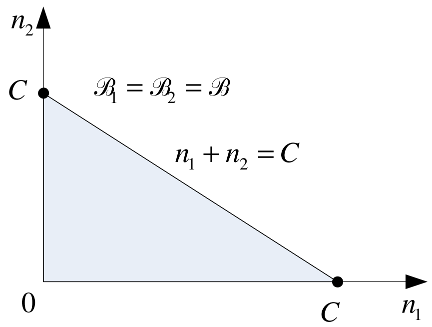


Рис. 3.4. Порядок перебора состояний

$$\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_2 = \left\{ \left(n_1, n_2 \right) : n_1 + n_2 = C \right\}. \quad (3.2)$$

Множество приема запросов на предоставление услуги i-типа, $i = 1, 2$:

$$\mathcal{S}_1 = \mathcal{S}_2 = \overline{\mathcal{B}_i} = \mathcal{X} \setminus \mathcal{B}_i = \left\{ \left(n_1, n_2 \right) : n_1 \geq 0,\ n_2 \geq 0,\ n_1 + n_2 < C \right\}. \quad (3.3)$$

Для составления СУГБ разобьем пространство состояний на семь групп (рис. 3.5):

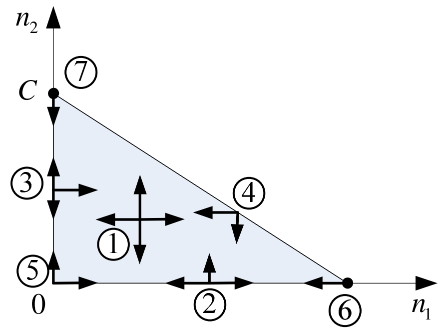


Рис. 3.5. Разбиение пространства состояний на группы для составления СУГБ

СУГБ (3.4):

1) $n_1 = \overline{1, C-1}$, $n_2 = \overline{1, C-1}$

$$p(n_1, n_2)(\lambda_1 + \lambda_2 + n_1\mu_1 + n_2\mu_2) =$$

$$= p(n_1 - 1, n_2)\lambda_1 + p(n_1, n_2 - 1)\lambda_2 + p(n_1 + 1, n_2)(n_1 + 1)\mu_1 + p(n_1, n_2 + 1)(n_2 + 1)\mu_2;$$

2) $n_1 = \overline{1, C-1}$

$$p(n_1, 0)(\lambda_1 + \lambda_2 + n_1\mu_1) = p(n_1 - 1, 0)\lambda_1 + p(n_1 + 1, 0)(n_1 + 1)\mu_1 + p(n_1, 1)\mu_2;$$

3) $n_2 = \overline{1, C-1}$

$$p(0, n_2)(\lambda_1 + \lambda_2 + n_2\mu_2) = p(0, n_2 - 1)\lambda_2 + p(1, n_2)\mu_1 + p(0, n_2 + 1)(n_2 + 1)\mu_2;$$

4) $n_1 = \overline{1, C-1}$

$$p(n_1, C - n_1)(n_1\mu_1 + (C - n_1)\mu_2) = p(n_1 - 1, C - n_1)\lambda_1 + p(n_1, C - n_1 - 1)\lambda_2;$$

5) $p(0,0)(\lambda_1+\lambda_2)=p(1,0)\mu_1+p(0,1)\mu_2$;

6) $p(C,0)\cdot C\mu_1=\lambda_1 p(C-1,0)$;

7) $p(0,C)\cdot C\mu_2=\lambda_2 p(0,C-1)$.

Составим СУГБ в общем виде. Для этого:

1. Введем функцию-индикатор I:

$$I\left(\text{событие А}\right)=\begin{cases}1, \text{ если событие А произошло,}\\ 0, \text{ в противном случае.}\end{cases} \tag{3.5}$$

2. Составим диаграмму интенсивностей переходов для центрального состояния (рис. 3.6):

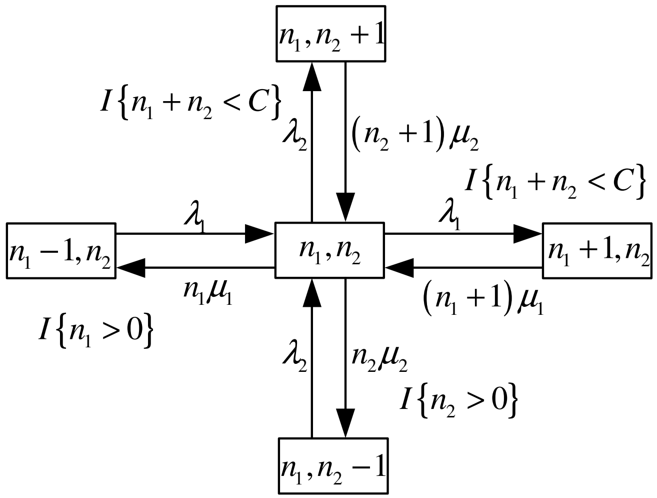


Рис. 3.6. Диаграмма интенсивностей переходов для центрального состояния $(n_1,n_2)\in\mathscr{X}$

СУГБ в общем виде с использованием **функции-индикатора** I :

$$\begin{gathered} p(n_1,n_2)\left[\lambda_1 \cdot I\{n_1+n_2<C\}+\lambda_2 \cdot I\{n_1+n_2<C\}+\right. \\ \left. n_1\mu_1 \cdot I\{n_1>0\}+n_2\mu_2 \cdot I\{n_2>0\}\right]=p(n_1-1,n_2)\lambda_1 \cdot I\{n_1>0\}+ \\ +p(n_1,n_2-1)\lambda_2 \cdot I\{n_2>0\}+p(n_1+1,n_2)(n_1+1)\mu_1 \cdot I\{n_1+n_2<C\}+ \\ +p(n_1,n_2+1)\cdot(n_2+1)\mu_2 \cdot I\{n_1+n_2<C\},\ (n_1,n_2)\in \mathscr{X}. \end{gathered} \tag{3.6}$$

Аналогично **СУГБ** можно записать в общем виде при помощи **функции Хевисайда**:

$$U(x)=\begin{cases} 1,\ x>0, \\ 0,\ x\le 0. \end{cases} \tag{3.7}$$

Тогда функция-индикатор I преобразуется следующим образом:

$$\begin{gathered} I\{n_1+n_2<C\}\to U(C-n_1-n_2), \\ I\{n_i>0\}\to U(n_i),\ i=1,2. \end{gathered} \tag{3.8}$$

СУГБ в общем виде с использованием **функции Хевисайда** U :

$$\begin{gathered} p(n_1,n_2)\left[(\lambda_1+\lambda_2)\cdot U(C-n_1-n_2)+n_1\mu_1 \cdot U(n_1)+n_2\mu_2 \cdot U(n_2)\right]= \\ =p(n_1-1,n_2)\lambda_1 \cdot U(n_1)+p(n_1,n_2-1)\lambda_2 \cdot U(n_2)+\left[p(n_1+1,n_2)\cdot(n_1+1)\mu_1+\right. \\ \left.+p(n_1,n_2+1)\cdot(n_2+1)\mu_2\right]\cdot U(C-n_1-n_2),\ (n_1,n_2)\in \mathscr{X}. \end{gathered} \tag{3.9}$$

Чтобы выписать систему уравнений частичного баланса (СУЧБ), проверим критерий Колмогорова. **Рассмотрим произвольный замкнутый контур** (рис. 3.7):

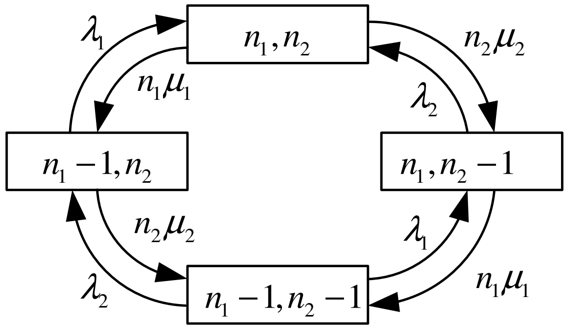


Рис. 3.7. Произвольный замкнутый контур

Рассмотрим произведение интенсивностей переходов

- по часовой стрелке: $n_2\mu_2 n_1\mu_1\lambda_2\lambda_1$;
- против часовой стрелки: $n_1\mu_1 n_2\mu_2\lambda_1\lambda_2$.

Произведения равны. Критерий выполнен, следовательно, СП $\left(X_1(t), X_2(t)\right)$, описывающий поведение системы является обратимым марковским процессом, СУЧБ существует.

СУЧБ $a_{ij} p_i = a_{ji} p_j$ (рис. 3.8):

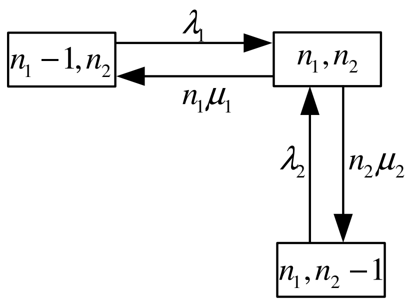


Рис. 3.8. Произвольное состояние для составления СУЧБ

$$\begin{cases} p(n_1, n_2) n_1 \mu_1 = p(n_1 - 1, n_2) \lambda_1, \; n_1 > 0, \\ p(n_1, n_2) n_2 \mu_2 = p(n_1, n_2 - 1) \lambda_2, \; n_2 > 0, \end{cases} \quad (n_1, n_2) \in \mathscr{X}. \tag{3.10}$$

Обозначим $\rho_i = \dfrac{\lambda_i}{\mu}, i = 1, 2.$

Стационарное распределение вероятностей состояний системы:

$$p(n_1, n_2) = \left(\sum_{(n_1, n_2) \in \mathscr{X}} \frac{\rho_1^{n_1}}{n_1!} \cdot \frac{\rho_2^{n_2}}{n_2!} \right)^{-1} \cdot \frac{\rho_2^{n_2}}{n_2!} \cdot \frac{\rho_1^{n_1}}{n_1!}, \; (n_1, n_2) \in \mathscr{X}. \tag{3.11}$$

<u>Доказательство:</u>

Используя СУЧБ, найдем стационарное распределение вероятностей состояний системы $p(n_1,n_2)$, $(n_1,n_2)\in\mathscr{X}$:

$$p(n_1,n_2)=p(n_1-1,n_2)\frac{\lambda_1}{n_1\mu_1}=p(n_1-1,n_2)\frac{\rho_1}{n_1}=p(n_1-2,n_2)\frac{\rho_1}{n_1-1}\cdot\frac{\rho_1}{n_1}=\ldots=$$

$$=p(0,n_2)\frac{\rho_1^{\,n_1}}{n_1!}=p(0,n_2-1)\frac{\rho_2}{n_2}\cdot\frac{\rho_1^{\,n_1}}{n_1!}=p(0,n_2-2)\frac{\rho_2}{n_2-1}\cdot\frac{\rho_2}{n_2}\cdot\frac{\rho_1^{\,n_1}}{n_1!}=\ldots=$$

$$=p(0,0)\cdot\frac{\rho_2^{\,n_2}}{n_2!}\cdot\frac{\rho_1^{\,n_1}}{n_1!},\ (n_1,n_2)\in\mathscr{X}\setminus\{0;0\}.$$

Для нахождения вероятности $p(0,0)$ воспользуемся условием нормировки $\sum\limits_{(n_1,n_2)\in\mathscr{X}}p(n_1,n_2)=1$:

$$p(0,0)+\sum_{(n_1,n_2)\in\mathscr{X}\setminus\{0,0\}}p(0,0)\frac{\rho_1^{\,n_1}}{n_1!}\cdot\frac{\rho_2^{\,n_2}}{n_2!}=1;$$

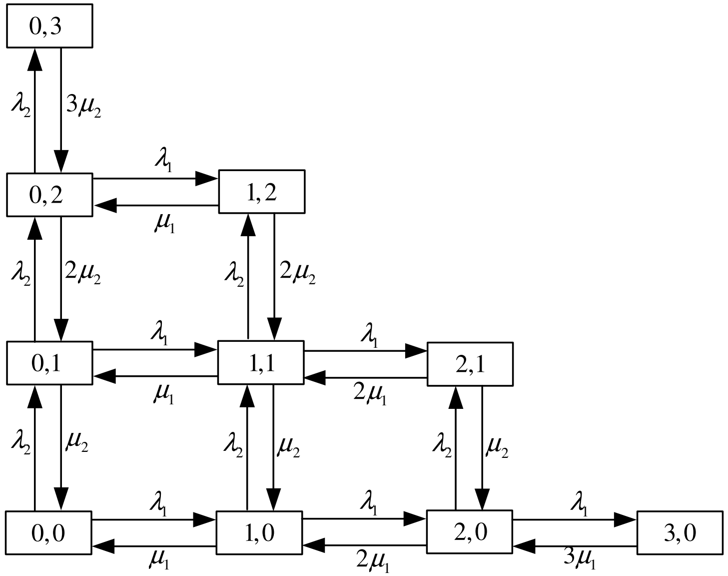
$$p(0,0)=\left(\sum_{(n_1,n_2)\in\mathscr{X}}\frac{\rho_1^{\,n_1}}{n_1!}\cdot\frac{\rho_2^{\,n_2}}{n_2!}\right)^{-1}.$$

Задание №1. Рассматривается полнодоступная двухсервисная модель Эрланга с различными интенсивностями обслуживания: $C = 3$; $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$; $\mu_1 = 2$; $\mu_2 = 1$.

1. Выписать пространство состояний $\mathscr{X}$;
2. Построить диаграмму интенсивностей переходов (в общем виде);
3. Выписать множества блокировок запросов $\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2$;
4. Выписать множества приема запросов $\mathscr{S}_1, \mathscr{S}_2$;
5. Составить СУГБ;
6. Составить СУЧБ;
7. Найти распределение вероятностей состояний системы $p(n_1, n_2)$, $(n_1, n_2) \in \mathscr{X}$.

Решение:

1. $\mathscr{X} = \{(n_1, n_2) : n_1 + n_2 \le 3\} = \{(0,0),(0,1),(1,0),(0,2),(1,1),(2,0),(0,3),(1,2),(2,1),(3,0)\}, |\mathscr{X}| = 10.$

2. 

.

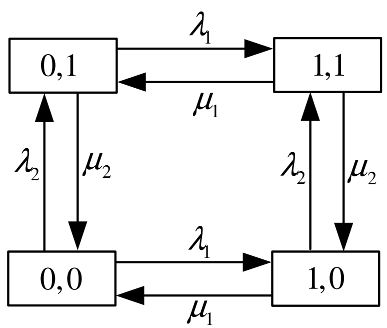
3. $\mathscr{B}_1 = \mathscr{B}_2 = \{(n_1, n_2) : n_1 + n_2 = 3\} = \{(0,3),(1,2),(2,1),(3,0)\}$.

4. $\mathscr{S}_1 = \mathscr{S}_2 = \{(n_1, n_2) : n_1 + n_2 < 3\} = \{(0,0),(0,1),(1,0),(0,2),(1,1),(2,0)\}$.

5. СУГБ:

$$\begin{cases} (\lambda_1+\lambda_2)\,p_{00}=\mu_2 p_{01}+\mu_1 p_{10}; \\ (\lambda_1+\lambda_2+\mu_1)\,p_{10}=\lambda_1 p_{00}+2\mu_1 p_{20}+\mu_2 p_{11}; \\ (\lambda_1+\lambda_2+2\mu_1)\,p_{20}=\lambda_1 p_{10}+3\mu_1 p_{30}+\mu_2 p_{21}; \\ (\lambda_1+\lambda_2+\mu_2)\,p_{01}=\lambda_2 p_{00}+2\mu_2 p_{02}+\mu_1 p_{11}; \\ (\mu_2+\lambda_1+\lambda_2+\mu_1)\,p_{11}=\lambda_2 p_{10}+2\mu_1 p_{21}+2\mu_2 p_{12}+\lambda_1 p_{01}; \\ (2\mu_1+\mu_2)\,p_{21}=\lambda_1 p_{11}+\lambda_2 p_{20}; \\ (\lambda_2+\lambda_1+2\mu_2)\,p_{02}=\lambda_2 p_{01}+\mu_1 p_{12}+3\mu_2 p_{03}; \\ (\mu_1+2\mu_2)\,p_{12}=\lambda_1 p_{02}+\lambda_2 p_{11}; \\ 3\mu_1 p_{30}=\lambda_1 p_{20}; \\ 3\mu_2 p_{03}=\lambda_2 p_{02}. \end{cases}$$

6. Проверим критерий Колмогорова. Рассмотрим произвольный замкнутый контур:



Рассмотрим произведение интенсивностей переходов

- по часовой стрелке: $\lambda_1\mu_2\mu_1\lambda_2$;
- против часовой стрелки: $\mu_1\mu_2\lambda_1\lambda_2$.

Произведения равны. Критерий выполнен, следовательно, СУЧБ существует. СУЧБ:

$$\begin{cases} \lambda_1 p_{01} = \mu_1 p_{11}, \\ \lambda_2 p_{10} = \mu_2 p_{11}, \\ \lambda_1 p_{00} = \mu_1 p_{10}, \\ \lambda_2 p_{00} = \mu_2 p_{01}; \end{cases} \Rightarrow \qquad \begin{matrix} p_{11} = \rho_1 p_{01}, \\ p_{11} = \rho_2 p_{10}, \\ p_{10} = \rho_1 p_{00}, \\ p_{01} = \rho_2 p_{00}; \end{matrix} \qquad \Rightarrow \quad p_{11} = \rho_1 \rho_2 p_{00}.$$

7. Распределение вероятностей состояний системы:

$$p(0,0) = 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{48}+\frac{1}{2}+\frac{1}{8} = \left(\frac{201}{48}\right)^{-1} = \frac{48}{201} = \frac{16}{67};$$

$$p(0,1) = \frac{48}{201};$$

$$p(0,2) = \frac{1}{2}\cdot\frac{48}{201} = \frac{24}{201};$$

$$p(0,3) = \frac{1}{6}\cdot\frac{48}{201} = \frac{8}{201};$$

$$p(1,1) = \frac{1}{2}\cdot\frac{48}{201} = \frac{24}{201};$$

$$p(1,2) = \frac{1}{4}\cdot\frac{48}{201} = \frac{12}{201};$$

$$p(2,1) = \frac{1}{8}\cdot\frac{48}{201} = \frac{6}{201};$$

$$p(3,0) = \frac{1}{48}\cdot\frac{48}{201} = \frac{1}{201};$$

$$p(1,0) = \frac{1}{2}\cdot\frac{48}{201} = \frac{24}{201};$$

$$p(2,0) = \frac{1}{8}\cdot\frac{48}{201} = \frac{6}{201}.$$