

**Отчет по лабораторной работе №4:
Неполнодоступная двухсервисная
модель Эрланга с резервированием для
второго типа и различными
интенсивностями обслуживания.
Первыми заполняются
зарезервированные приборы**

**Дисциплина: Основы проектирования сетей и систем
телекоммуникаций**

Выполнила: Ким Реачна, НПИбд-01-20

Содержание

1	Теоретические сведения	4
2	Численный анализ	10

Список иллюстраций

1.1	Схема недоступная двухсервисная модель Эрланга с различными интенсивностями обслуживания	5
1.2	Пространство состояний недоступной двухсервисной модели Эрланга с различными интенсивностями обслуживания в общем виде	5
1.3	Диаграмма интенсивностей переходов для недоступной двухсервисной модели Эрланга с различными интенсивностями обслуживания	6
2.1	Импортируйте библиотеку	10
2.2	Начальные значения	10
2.3	Функция расчета стационарного распределения вероятностей состояний систем $p_{(0,0)}$ и $p_{(n_1,n_2)}$	11
2.4	Стационарное распределение вероятностей системы в исходном состоянии $p_{(0,0)}$	11
2.5	Стационарное распределение вероятностей для каждого состояния и сумма вероятностей	12
2.6	Вероятность блокировки заявок на услуги 1,2-го типа B_1, B_2 и Среднее число \bar{N}	13
2.7	Построение графика зависимости вероятности блокировки обслуженных запросов от интенсивности запросов для услуги 1, 2 типа	14
2.8	Построение графика зависимости среднего числа обслуживаемых запросов от интенсивности поступления	15

1 Теоретические сведения

Рассмотрим звено сети емкостью . Пусть пользователям сети предоставляются услуги двух типов. Запросы на предоставление услуг представляют собой ПП с интенсивностями λ_1, λ_2 . Среднее время обслуживания запросов каждого типа μ_1^{-1}, μ_2^{-1} соответственно. Рассмотрим случай равенства μ . Часть пропускной способности соты зарезервирована для обслуживания запросов на предоставление услуги 2-го типа. Оставшаяся часть пропускной способности является полностью доступной для запросов на предоставление услуг обоих типов. Предположим, что сначала заполняются зарезервированные приборы.

Основные обозначения:

- C - общее число приборов;
- g - число полностью доступных приборов;
- $C - g$ - число зарезервированных приборов;
- λ_1, λ_2 - интенсивность поступления заявок 1, 2-го типа [заявок/ед.вр.];
- μ^{-1} - среднее время обслуживания заявки 1, 2-го типа [ед.вр.];
- ρ_1, ρ_2 - интенсивность предложенной нагрузки, создаваемой заявками 1, 2-го типа;
- $X(t)$ - число заявок, обслуживаемых в системе в момент времени $t, t \geq 0$
- X - пространство состояний системы;
- n - число обслуживаемых в системе заявок;
- B_1, B_2 - множество блокировки заявок 1, 2-го типа;
- S_1, S_2 - множество приема заявок 1, 2-го типа.

Схема модели (рис. 1.1):

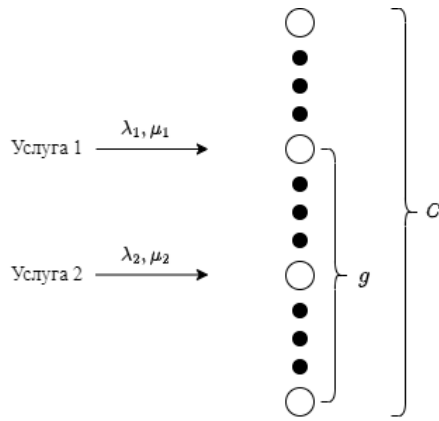


Рис. 1.1: Схема недоступная двухсервисная модель Эрланга с различными интенсивностями обслуживания

Пространство состояний системы (рис. 1.2):

$$X = \{(n_1, n_2) : n_1 = \overline{0, g}, n_2 = \overline{0, C}, n_1 + n_2 \leq C\} \quad (4.1)$$

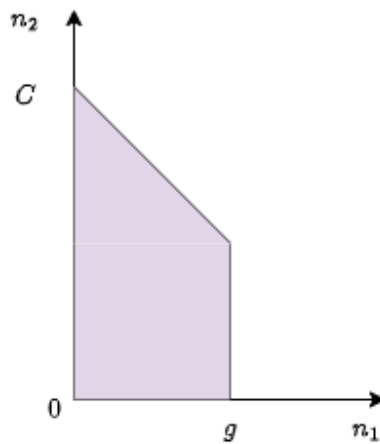


Рис. 1.2: Пространство состояний недоступной двухсервисной модель Эрланга с различными интенсивностями обслуживания в общем виде

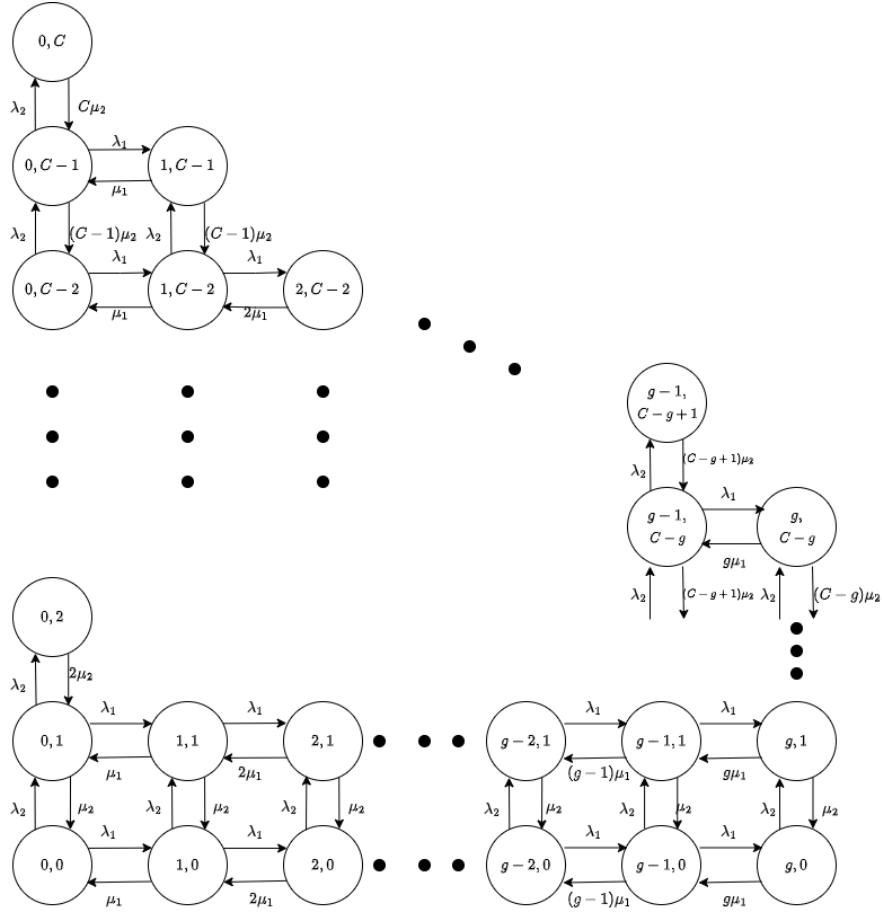


Рис. 1.3: Диаграмма интенсивностей переходов для неполнодоступной двухсервисной модель Эрланга с различными интенсивностями обслуживания

Множество блокировок запросов на предоставление услуги i -типа, $i = 1, 2$:

$$B_1 = \{(n_1, n_2) \in X : n_1 = g \vee n_1 + n_2 = C\} \quad (4.2)$$

$$B_2 = \{(n_1, n_2) \in X : n_1 + n_2 = C\} \quad (4.3)$$

Множество приема запросов на предоставление услуги i -типа, $i = 1, 2$:

$$S_1 = \{(n_1, n_2) \in X : n_1 < g \vee n_1 + n_2 < C\} \quad (4.4)$$

$$S_2 = \{(n_1, n_2) \in X : n_1 + n_2 < C\} \quad (4.5)$$

СУГБ:

$$\left\{ \begin{array}{l} 1) p(n_1, n_2)(\lambda_1 + \lambda_2 + (n_1 + n_2)\mu) \\ \quad = p(n_1 - 1, n_2)\lambda_1 + p(n_1, n_2 - 1)\lambda_2 \\ \quad \quad + p(n_1 + 1, n_2)(n_1 + 1)\mu + p(n_1, n_2 + 1)(n_2 + 1)\mu, \\ \quad n_1 = \overline{1, g - 1}, n_2 = \overline{1, C - 1} \\ 2) p(n_1, 0)(\lambda_1 + \lambda_2 + n_1\mu) \\ \quad = p(n_1 - 1, 0)\lambda_1 + p(n_1 + 1, 0)(n_1 + 1)\mu_1 + p(n_{1,1}\mu_2), \\ \quad n_1 = \overline{1, g - 1}; \\ 3) p(0, n_2)(\lambda_1 + \lambda_2 + n_2\mu) \\ \quad = p(0, n_2 - 1)\lambda_2 + p(1, n_2)\mu + p(0, n_2 + 1)(n_2 + 1)\mu, \\ \quad n_2 = \overline{1, C - 1} \\ 4) p(n_1, C - n_1)(n_1\mu + (C - n_1)\mu) \\ \quad = p(n_1 - 1, C - n_1)\lambda_1 + p(n_1, C - n_1 - 1)\lambda_2, \\ \quad n_1 = \overline{1, g} \\ 5) p(0, 0)(\lambda_1, \lambda_2) = p(1, 0)\mu + p(0, 1)\mu \\ 6) p(0, C)C\mu = \lambda_2 p(0, C - 1) \\ 7) p(g, 0)(\mu + \lambda_2) \\ \quad = p(g - 1, 0)\lambda_1 + p(g, 1)\mu \\ 8) p(g, n_2)(\lambda_2 + g\mu + n_2\mu) \\ \quad = p(g, n_2 + 1)(n_2 + 1)\mu + p(g - 1, n_2)\lambda_1 + p(g, n_2 - 1)\lambda_2 \\ \quad n_2 = \overline{0, c - g - 1} \end{array} \right. \quad (4.6)$$

СУЛБ:

$$\begin{cases} p(n_1, n_2)n_1\mu_1 = p(n_1 - 1, n_2)\lambda_1, n_1 > 0, \\ p(n_1, n_2)n_2\mu_2 = p(n_1, n_2 - 1)\lambda_2, n_2 > 0, (n_1, n_2) \in X \end{cases} \quad (4.7)$$

Обозначим

$$\rho_i = \frac{\lambda_i}{\mu_i}, i = 1, 2 \quad (1.1)$$

Стационарное распределение вероятностей состояний системы:

$$\begin{aligned} p(n_1, n_2) &= p(n_1 - 1, n_2) \frac{\lambda_1}{n_1 \mu_1} \\ &= p(n_1 - 1, n_2) \frac{\rho_1}{n_1} \\ &= p(n_1 - 2, n_2) \frac{\rho_1}{n_1 - 1} \cdot \frac{\rho_1}{n_1} \\ &= \dots \\ &= p(0, n_2) \frac{\rho_1^{n_1}}{n_1!} \\ &= p(0, n_2 - 1) \frac{\rho_2}{n_2} \cdot \frac{\rho_1^{n_1}}{n_1!} \\ &= p(0, n_2 - 2) \frac{\rho_2}{n_2 - 1} \cdot \frac{\rho_2}{n_2} \cdot \frac{\rho_1^{n_1}}{n_1!} \\ &= \dots \\ &= p(0, 0) \cdot \frac{\rho_2^{n_2}}{n_2!} \cdot \frac{\rho_1^{n_1}}{n_1!} \in X \setminus \{0, 0\} \end{aligned} \quad (4.8)$$

где:

$$p(0, 0) + \sum_{(n_1, n_2) \in X \setminus \{0, 0\}} p(0, 0) \cdot \frac{\rho_2^{n_2}}{n_2!} \cdot \frac{\rho_1^{n_1}}{n_1!} = 1; \quad (4.9)$$

$$p(0, 0) = \left(\sum_{(n_1, n_2) \in X} \frac{\rho_2^{n_2}}{n_2!} \cdot \frac{\rho_1^{n_1}}{n_1!} \right)^{-1}$$

Основные вероятностные характеристики модели:

- Вероятность блокировки заявок на предоставление услуги 1-ог типа:

$$B_1 = \sum_{(n_1, n_2) \in B_1} p(n_1, n_2) \quad (4.11)$$

- Вероятность блокировки заявок на предоставление услуги 2-ог типа:

$$B_2 = \sum_{(n_1, n_2) \in B_2} p(n_1, n_2) \quad (4.12)$$

- Среднее число \bar{N} обслуживаемых в системе запросов

$$\bar{N} = \sum_{(n_1, n_2) \in X} (n_1 + n_2) p(n_1, n_2) \quad (4.13)$$

2 Численный анализ

Для расчета основных вероятностных характеристик модели были взяты следующие параметры:

$$C = 4, g = 2, \lambda_1 = \overline{1, 20}, \lambda_2 = 1, \mu_1 = 2, \mu_2 = 1 \quad (4.14)$$

Код написан на языке Python в Google Colab:

```
[15] 1 import math  
      2 import numpy as np  
      3 import matplotlib.pyplot as plt
```

Рис. 2.1: Импортируйте библиотеку

```
[16] 1 C = 4  
      2 g = 2  
      3 lambda1 = 20  
      4 lambda2 = 1  
      5 mu1 = 2  
      6 mu2 = 1  
      7 rho1 = lambda1/mu1  
      8 rho2 = lambda2/mu2
```

Рис. 2.2: Начальные значения

```

[17] 1 def compute_probabilities(C, rho1, rho2, g):
2     p = np.zeros((g+1, C+1))
3
4     for n1 in range(g+1):
5         for n2 in range(C+1):
6             if n1 + n2 <= C:
7                 p[0][0] += (rho1 ** n1) * (rho2 ** n2) / (math.factorial(n1) * math.factorial(n2))
8
9     p[0][0] = 1 / p[0][0]
10
11    for n1 in range(g+1):
12        for n2 in range(C+1):
13            if n1 == n2 == 0:
14                continue
15            if n1 + n2 <= C:
16                p[n1][n2] = p[0][0] * (rho1 ** n1) * (rho2 ** n2) / (math.factorial(n1) * math.factorial(n2))
17    return p

```

Рис. 2.3: Функция расчета стационарного распределения вероятностей состояний систем $p_{(0,0)}$ и $p_{(n_1, n_2)}$

```

[18] 1 p = compute_probabilities(C, rho1, rho2, g)
2 print(f"Распределение вероятностей системы в исходном состоянии  $p_{(0,0)} = \{p[0][0]\}$ ")

```

Распределение вероятностей системы в исходном состоянии $p_{(0,0)} = 0.006477732793522267$

Рис. 2.4: Стационарное распределение вероятностей системы в исходном состоянии $p_{(0,0)}$

```
[19] 1 print(f"Распределение вероятностей для каждого состояния:")
      2 for n1 in range(g+1):
      3     for n2 in range(C+1):
      4         print(f"p({n1},{n2}) = {p[n1][n2]}")
      5 total_p = np.sum(p)
      6 print(f"Сумма всех вероятностей: {total_p}")
```

Распределение вероятностей для каждого состояния:

```
p(0,0) = 0.006477732793522267
p(0,1) = 0.006477732793522267
p(0,2) = 0.0032388663967611335
p(0,3) = 0.0010796221322537112
p(0,4) = 0.0002699055330634278
p(1,0) = 0.06477732793522267
p(1,1) = 0.06477732793522267
p(1,2) = 0.032388663967611336
p(1,3) = 0.010796221322537112
p(1,4) = 0.0
p(2,0) = 0.32388663967611336
p(2,1) = 0.32388663967611336
p(2,2) = 0.16194331983805668
p(2,3) = 0.0
p(2,4) = 0.0
Сумма всех вероятностей: 1.0
```

Рис. 2.5: Стационарное распределение вероятностей для каждого состояния и сумма вероятностей

```

[20] 1 lambda1_values = np.arange(1, lambda1 + 1)
2 B1_values = []
3 B2_values = []
4 N_values = []
5
6 for lambda1 in lambda1_values:
7     rho1 = lambda1 / mu1
8     rho2 = lambda2 / mu2
9     p = compute_probabilities(C, rho1, rho2, g)
10
11     B1 = 0
12     B2 = 0
13     N = 0
14
15     for n1 in range(g+1):
16         for n2 in range(C+1):
17             if n1 == g or n1 + n2 == C:
18                 B1 += p[n1][n2]
19             if n1 + n2 == C:
20                 B2 += p[n1][n2]
21             if n1 + n2 <= C:
22                 N += (n1 + n2) * p[n1][n2]
23
24     B1_values.append(B1)
25     B2_values.append(B2)
26     N_values.append(N)
27
28     if lambda1 == 20:
29         print(f"Вероятность блокировки заявок на услуги 1-ог типа B1: {B1}")
30         print(f"Вероятность блокировки заявок на услуги 2-ог типа B2: {B2}")
31         print(f"Среднее число N обслуживаемых запросов N: {N}")

```

Вероятность блокировки заявок на услуги 1-ог типа B1: 0.820782726045884
 Вероятность блокировки заявок на услуги 2-ог типа B2: 0.17300944669365723
 Среднее число N обслуживаемых запросов N: 2.6191632928475035

Рис. 2.6: Вероятность блокировки заявок на услуги 1,2-ог типа B_1 , B_2 и Среднее число \bar{N}

```
[21] 1 plt.plot(lambdal_values, B1_values, label="$B_1$", color='red')
      2 plt.plot(lambdal_values, B2_values, label="$B_2$", color='blue')
      3 plt.title("Вероятность блокировки в зависимости от интенсивности запросов")
      4 plt.xlabel("Интенсивности поступления запросов")
      5 plt.ylabel("Вероятность блокировки")
      6 plt.legend()
      7 plt.show()
```

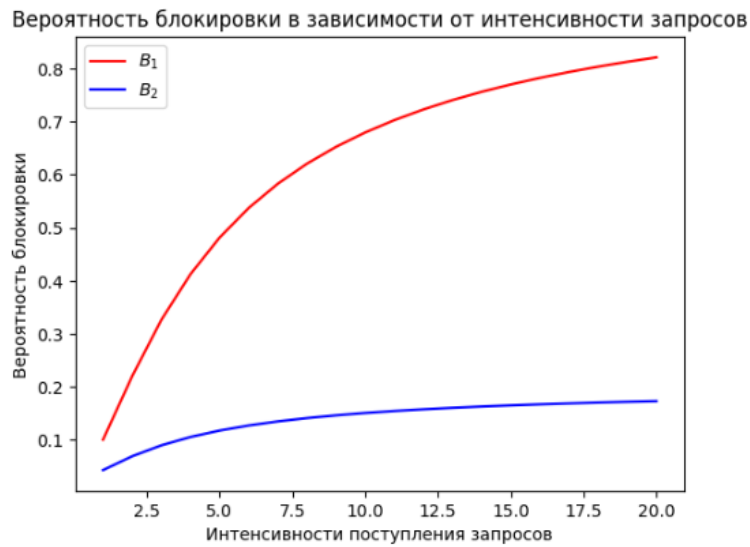


Рис. 2.7: Построение графика зависимости вероятности блокировки обслуженных запросов от интенсивности запросов для услуги 1, 2 типа

```
[22] 1 plt.plot(lambda1_values, N_values, label="$N$", color='blue')
      2 plt.title("Среднее число N обслуживаемых в зависимости от интенсивности запросов")
      3 plt.xlabel("Интенсивности поступления запросов")
      4 plt.ylabel("Среднее число запросов")
      5 plt.legend()
      6 plt.show()
```

Среднее число N обслуживаемых в зависимости от интенсивности запросов

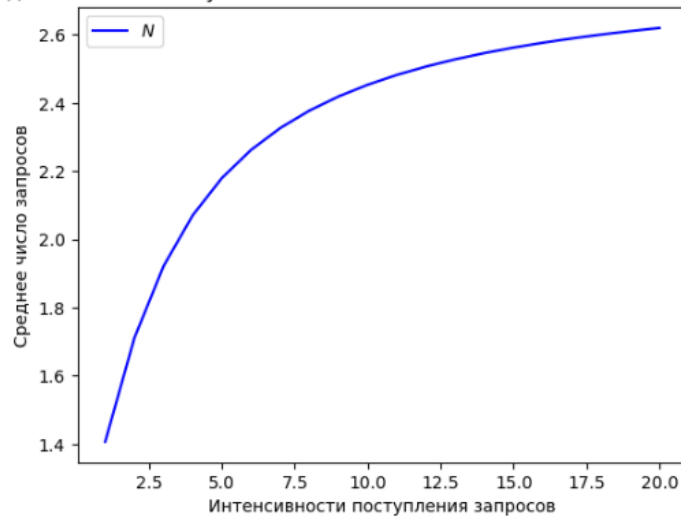


Рис. 2.8: Построение графика зависимости среднего числа обслуживаемых запросов от интенсивности поступления