Tampereen yliopisto

Kim Sarén

YMPYRÄN PERUSRYHMÄ

Informaatioteknologian ja viestinnän tiedekunta
Pro gradu -tutkielma
Matematiikka
Elokuu 2020

TIIVISTELMÄ

Kim Sarén: Ympyrän perusryhmä
Pro gradu -tutkielma
Tampereen yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen tutkinto-ohjelma
Elokuu 2020

Tämän pro gradu -tutkielman keskiössä on ympyrän perusryhmärakenteen määrittäminen. Aihealue kategorisoituu algebrallisen topologian piiriin, jossa topologisia avaruuksia tutkitaan abstraktin algebran keinoin. Jotta voitaisiin ylipäätään ymmärtää mitä perusryhmä tarkoittaa, tarvitaan kuitenkin melkoisesti tietämystä poluista sekä polkuhomotopioista. Teksti alkaakin polkuihin liittyvän teorian kertauksella, erityistä huomiota kiinnittäen teeman kannalta oleellisiin polun ilmentymiin: silmukoihin sekä yhdistettyihin polkuihin.

Kertaavan osion jälkeen määritellään polkuhomotopian käsite. Konkretisoidusti polkuhomotopialla tarkoitetaan sellaista jatkuvaa kuvausta, jonka avulla pystytään muuttamaan samat päätepisteet jakavia polkuja toinen toisikseen. Tähän liittyen on osoitettava, että polkuhomotopia on ekvivalenssirelaatio. Tällöin samaan ekvivalenssiluokkaan kuuluvien polkujen joukosta käytetään nimitystä polkuluokka. Huomataan, että polkujen tulo on hyvinmääritelty polkuluokkien suhteen ja määritellään tämän nojalla myös polkuluokkien tulo.

Edellisistä tuloksista seuraa, että saman kantapisteen jakavien silmukoiden polkuluokkien joukko varustettuna polkuluokkien tulolla on algebrallinen ryhmärakenne. Tutkitaan tähän liittyen eri kantapisteen suhteen määritettyjä perusryhmiä samassa topologisessa avaruudessa ja osoitetaan, että näitä yhdistää isomorfinen kuvaus. Ympyrän perusryhmään johdattelevana teemana tutkitaan vielä korkeampiulotteisten pallojen perusryhmää. Lopputulema on, että tutkittu perusryhmä on triviaali. Siis jokainen silmukka korkeampiulotteisessa pallossa on polkuhomotopinen vakiopolun kanssa.

Ympyrän perusryhmän määrittäminen on selkeästi työläämpi prosessi kuin korkeampiulotteisten pallojen tapauksessa. Tämä vaatii ensinnäkin nostojen ja peiteavaruuksien käsitteiden määrittelyä sekä näihin liittyen useampia todistuksessa vaadittavia tuloksia, erityisesti polkujen sekä polkuhomotopioiden nostamiseen liittyen. Pohjatulosten avulla saadaan määritettyä ympyrän perusryhmä: $\pi_1(\mathbb{S}^1)$ on sopivan polkuluokan $[\omega]$ virittämä ääretön syklinen ryhmä. Tarkemmin ilmaistuna tämä tulos on ekvivalentti sen kanssa, että ympyrän perusryhmälle pätee isomorfismi $(\mathbb{Z},+) \cong (\pi_1(\mathbb{S}^1),\cdot)$. Tekstin lopuksi todistetaan algebran peruslause käyttämällä ympyrän perusryhmään liittyviä tuloksia. Vaikka taustalla on paljon työtä, niin itse todistus saadaan näiden tietojen pohjalta hyvin eleganttiin ja helposti ymmärrettävään muotoon.

Avainsanat: topologia, algebrallinen topologia, polku, silmukka, homotopia, polkuhomotopia, perusryhmä, ympyrän perusryhmä
Tämän julkaisun alkuperäisyys on tarkastettu Turnitin OriginalityCheck –ohjelmalla.

Sisältö

1 Johdanto

Tämän tutkielman rakenne koostuu neljästä pääluvusta, joiden asiasisältö on kumulatiivista: teksti alkaa taustakäsitteistön muodostamisesta, ja jokainen luku perustuu sitä aikaisempien tietokokonaisuuksien varaan. Tekstin ensisijaisena tavoitteena on määrittää ja esitellä lukijalle ympyrän perusryhmärakenne.

Luvussa 2 esitetään tekstin sisällön ymmärtämisen kannalta olennaisinta avainkäsitteistöä. Erityisesti perehdytään jo entuudestaan tuttuun polun käsitteeseen syventämällä samalla tarkastelua sen tämän tekstin kannalta olennaisiin erityistyyppeihin, näistä keskeisimpänä silmukkaan. Tässä luvussa todistetaan lisäksi jatkon kannalta olennainen aputulos, liimauslemma. Tämä tulos mahdollistaa erityisesti yhdistettyjen polkujen jatkuvuuden määrittämisen.

Luku 3 keskittyy homotopian käsitteeseen, tarkentaa sitä polkujen tapaukseen sekä esittelee erinäisiä polkuhomotopiaan liittyviä perustuloksia. Luku antaa tarvittavat työkalut topologisen avaruuden polkujen jatkuvaan deformaatioon eli muovaamiseen toinen toisikseen sopivien jatkuvien kuvausten kautta. Osoitetaan lisäksi, että polkuhomotopia on ekvivalenssirelaatio ja määritellään sen suhteen polkuluokan käsite. Merkittävää on, että polkujen tulo on hyvinmääritelty polkuluokkien suhteen: tämä mahdollistaa polkuluokkien tulon määrittelemisen, jonka varaan seuraavan luvun käsitteenmuodostus nojaa.

Luvun 4 alussa osoitetaan, että topologisen avaruuden pisteiden suhteen määritettyjen silmukoiden polkuluokkien joukko varustettuna polkuluokkien tulolla määrittää algebrallisen ryhmärakenteen. Tästä ryhmästä käytetään nimitystä perusryhmä. Tutustutaan lisäksi kantapisteen vaihtoon, triviaaleihin perusryhmiin sekä tätä kautta yhdesti yhtenäisiin topologisiin avaruuksiin. Luvun lopuksi tutkitaan vielä korkeampiulotteisia palloja ja osoitetaan, että näiden perusryhmä on triviaali.

Luku 5 aloitetaan ympyrän silmukoiden tarkastelusta ja tähän liittyen noston sekä peiteavaruuden määrittelemisestä. Peiteavaruuksiin perehdytään laajemmin ensimmäisessä aliluvussa, jossa tutkitaan erityisesti polkujen ja polkuhomotopioiden nostamista. Näiden tulosten kautta osoitetaan, että ympyrän perusryhmä on polkuluokan $[\omega]$ virittämä ääretön syklinen ryhmä. Tutkielman lopuksi todistetaan, että jokaisella ei-vakiolla polynomilla, jolla on kompleksilukukertoimisia termejä on myös juuria kompleksiavaruudessa. Tulos tunnetaan yleisesti algebran peruslauseena, ja esitetty todistus on kulminaatio tämän tekstin asiasisällöstä.

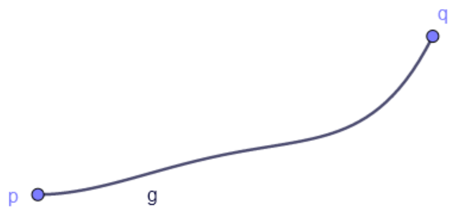
Pohjatietoina lukijalta oletetaan matematiikan kandidaatin tutkintoon verrattavissa olevaa tietopohjaa sekä erityisesti topologian asiakokonaisuuksien hallintaa maisteriopintojen tasolla. Esimerkiksi Tampereen yliopistossa järjestettävä topologian maisterikurssi antaa tekstin ymmärtämiseksi vaadittavat esitiedot. Tutkielman pääasiallinen lähdeteos on Allen Hatcherin *Algebraic Topology*, mutta tekstissä on viitattu runsaasti myös John M. Leen teokseen *Introduction to topological manifolds, 2nd edition*, erityisesti aliluvun 4.2 osalta.

2 Polku

Tämä luku kattaa peruskäsitteistöä, jonka varaan tulevaa asiasisältöä rakennetaan. Aloitetaan esittelemällä formaali määritelmä polulle.

Määritelmä 2.1. Olkoon $I = [0, 1]$ lukuväli ja X topologinen avaruus. Jatkuvaa kuvausta $f : I \to X$ kutsutaan avaruuden X **poluksi**.

Oleellisesti topologisessa avaruudessa polku on siis jatkuva kuvaus **alkupisteestä** $f(0)$ **loppupisteeseen** $f(1)$. Polun geometrinen havainnollistus on intuitiivinen ja analogia myös reaalimaailman polkuihin ilmeinen, kuten viereisestä kuvasta voidaan havaita.



Kuva 2.1: Yksinkertainen polku

Huomautus. Polun **päätepisteellä** viitataan tässä tekstissä yleisellä tasolla alku- tai loppupisteeseen, ja tätä ilmaisua käytetään erityisesti tilanteissa, joissa halutaan viitata näistä molempiin samanaikaisesti.

2.1 Erilaisia polkuja

Seuraavissa luvuissa tarvitaan runsaasti alakäsitteistöä poluista. Tutustutaan tässä aliluvussa tämän tekstin kannalta keskeisimpiin polkurakenteisiin sekä niiden erityispiirteisiin.

Polkua kutsutaan **silmukaksi**, mikäli sen alku- ja loppupiste ovat samat. Luvussa 4 tullaan määrittelemään perusryhmät nimenomaan silmukoiden suhteen. Tämä polun alityyppi on siis erityisen oleellinen tulevaa ajatellen. Toinen polun erityistapaus on **vakiopolku**, jossa polku kuvautuu aina samalle vakioarvolle lähtöarvosta riippumatta. Vakiopolku on määritelmän nojalla triviaalisti myös silmukka.

Olkoon X topologinen avaruus ja $f, g\colon I \to X$ sen polkuja, joilla $f(1) = g(0)$. Tällöin on mahdollista muodostaa kuvaus $f \cdot g\colon I \to X$, jossa

$$(f \cdot g)(s) = \begin{cases} f(2s), & \text{kun} \quad 0 \le s \le \frac{1}{2} \\ g(2s-1), & \text{kun} \quad \frac{1}{2} \le s \le 1. \end{cases}$$

Kuvauksesta käytetään nimitystä **yhdistetty polku** tai **polkujen tulo**. Tämä kuvaus on selkeästi hyvinmääritelty, mutta nimityksestään huolimatta ei ole itsestäänselvää, että kuvaus on jatkuva. Osoitetaan tämä seuraavan aputuloksen kautta.

Lause 2.1. *(Liimauslemma) Olkoon X ja Y topologisia avaruuksia, I jokin indeksijoukko ja $\{A_i\}$ joko avaruuden X avoin peite tai sen äärellinen suljettu peite. Jos $f_i\colon A_i \longrightarrow Y$ ovat jatkuvia kuvauksia siten, että $f_i|_{A_i\cap A_j} = f_j|_{A_i\cap A_j}$ kaikilla $i, j \in I$, niin on olemassa yksikäsitteinen jatkuva kuvaus $f\colon X \longrightarrow Y$, jolla $f|_{A_i} = f_i$ kaikilla $i \in I$.*

Todistus. (Vrt. [2, s. 58-59]) Määritellään aluksi kuvaus $f : X \longrightarrow Y$, $f = \bigcup_{i\in I} f_i$, joka on selkeästi hyvinmääritelty oletuksen $f_i|_{A_i\cap A_j} = f_j|_{A_i\cap A_j}$ nojalla. Kuvaus on lisäksi yksikäsitteinen, sillä jos $g : X \longrightarrow Y$ on mielivaltainen lemman ehdot täyttävä kuvaus, niin samasta oletuksesta kuin aiemmin on helppo nähdä, että $f(x) = g(x)$ jokaisella $x \in X$. Siis jatkuvuutta huomioimatta lemman ehdot täyttävä kuvaus on olemassa.

Todistetaan vielä, että kuvaus on jatkuva. Tässä täytyy tarkastella erikseen tapauksia, joissa $\{A_i\}$ on avaruuden X avoin peite tai sen äärellinen suljettu peite. Ensimmäisessä tapauksessa osoitetaan, että maaliavaruuden avoimen joukon alkukuva on avoin. Jälkimmäinen tapaus on lähes analoginen, mutta osoitetaan, että maaliavaruuden suljetun joukon alkukuva on suljettu. Johdetaan kuitenkin ensin lyhyt aputulos. Huomataan, että kun $K \subset Y$, niin kaikilla $i \in I$ pätee

$$x \in f_i^{-1}(K) \iff x \in A_i \text{ ja } f(x) = f_i(x) \in K \iff x \in f^{-1}(K) \cap A_i,$$

eli $f_i^{-1}(K) = f^{-1}(K) \cap A_i$. Tämän nojalla voidaan päätellä, että

$$f^{-1}(K) = f^{-1}(K) \cap X = f^{-1}(K) \cap \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} f_i^{-1}(K),$$

siis $f^{-1}(K) = \bigcup_{i\in I} f_i^{-1}(K)$.

Oletetaan ensin, että $\{A_i\}$ on avoin peite ja $K \subset Y$ maaliavaruuden avoin osajoukko. Tällöin $f_i^{-1}(K) \subset A_i$ on avoin kuvauksen f_i jatkuvuuden perusteella ja erityisesti siis $f_i^{-1}(K) \subset X$ on avoin. Nyt koska $f^{-1}(K) = \bigcup_{i\in I} f_i^{-1}(K)$ ja jokainen $f_i^{-1}(K) \in X$ on avoin, niin $f^{-1}(K)$ on avoin avointen joukkojen yhdisteenä.

Oletetaan sitten, että $\{A_i\}$ on äärellinen suljettu peite ja olkoon $K \subset Y$ maaliavaruuden suljettu osajoukko. Tällöin myös $f_i^{-1}(K) \subset A_i$ on suljettu ja erityisesti $f_i^{-1}(K) \subset X$ on suljettu. Nyt kuten aiemmin $f^{-1}(K) = \bigcup_{i\in I} f_i^{-1}(K)$, joten $f^{-1}(K)$ on äärellisen monen suljetun joukon yhdisteenä suljettu. Siis tämän ja edellisen kohdan nojalla f on jatkuva. □

Palataan sitten hetkeksi aiempaan väitteeseen yhdistetyn polun jatkuvuudesta. Ensinnäkin tiedetään, että $f, g\colon I \longrightarrow X$ ovat jatkuvia. Yhdistetyssä polussa kummatkin näistä poluista kuljetaan kaksinkertaisella nopeudella, ja ne ovat tällöin oikeastaan muotoa $\widetilde{f}\colon [0, \frac{1}{2}] \to X$ ja $\widetilde{g}\colon [\frac{1}{2}, 1] \to X$, missä

$$\begin{aligned} \widetilde{f}(s) &= f(2s) && \text{kaikilla } s \in [0, \tfrac{1}{2}] \text{ ja} \\ \widetilde{g}(s) &= g(2s-1) && \text{kaikilla } s \in [\tfrac{1}{2}, 1]. \end{aligned}$$

Esimerkiksi $\widetilde{f}$ voidaan määrittää jatkuvan kuvauksen $\phi\colon [0, \frac{1}{2}] \longrightarrow X$ kautta, missä $\phi(s) = 2s$ kaikilla $s \in [0, \frac{1}{2}]$. Tällöin $\widetilde{f} = f \circ \phi$, joten $\widetilde{f}$ on jatkuvien kuvausten yhdisteenä jatkuva. Vastaavasti sopivan kuvauksen kautta voidaan osoittaa, että myös $\widetilde{g}$ on jatkuva. Liimauslemman ehdot täyttyvät: on olemassa jatkuvat kuvaukset $\widetilde{f}, \widetilde{g}$, joilla määrittelyjoukkojen risteämiskohdassa $s = \frac{1}{2}$ pätee

$$\widetilde{f}(\tfrac{1}{2}) = f(1) = g(0) = \widetilde{g}(\tfrac{1}{2}).$$

Siis yhdistetty polku on jatkuva.

Huomautus. Käänteisesti missään tapauksessa, jossa ehto $f(1) = g(0)$ ei toteudu kyseessä ei olisi edes funktio, sillä tällöin $f \cdot g$ saisi kaksi erillistä arvoa pisteessä $\frac{1}{2}$.

Toisinaan voi olla hyödyllistä kulkea polkua myös vastakkaiseen suuntaan. Tämä onnistuu **käänteispolun** avulla, joka muodostetaan seuraavasti: jos $f\colon I \to X$ on polku, niin sen käänteispolku on kuvaus $\overline{f}\colon I \to X$, jolla $\overline{f}(x) = f(1-x)$ kaikilla $x \in I$. Kuvaus on selkeästi jatkuva, sillä kyseessä on oleellisesti jälleen välin I uudelleen parametrisointi jatkuvan kuvauksen $\phi\colon I \to I$ kautta siten, että $\overline{f} = f \circ \phi$.

Esimerkki 2.1. Olkoon $\mathbb{R}^2$ topologinen avaruus ja $(0,0) \neq p \in \mathbb{R}^2$ jokin vakio. Tällöin

- $f_1\colon I \to \mathbb{R}^2,\ f_1(s) = sp$ on polku, mutta ei vakiopolku tai silmukka,

- $f_2\colon I \to \mathbb{R}^2,\ f_2(s) = p$ on vakiopolku ja täten myös silmukka,

- $f_3\colon I \to \mathbb{R}^2,\ f_3(s) = (cos(2\pi s), sin(2\pi s))$ on silmukka, muttei vakiopolku,

- $f_4\colon I \to \mathbb{R}^2,\ f_4(s) = (1-s)p$ on polun f_1 käänteispolku ja

- $f_5\colon I \to \mathbb{R}^2,\ f_5(s) = \begin{cases} 2sp, \text{kun} & 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ p, \text{kun} & \frac{1}{2} \leq s \leq 1. \end{cases}$ on yhdistetty polku $f_1 \cdot f_2$.

Tässä f_5 on selvästi määritelty, sillä f_1 sekä f_2 ovat polkuja ja

$$f_1(\tfrac{1}{2}) = 2 \cdot \tfrac{1}{2}p = p = f_2(\tfrac{1}{2}),$$

eli kuvaukset ovat yhdistettäviä lauseen 2.1 nojalla.

3 Polkuhomotopia

Aiemmassa luvussa muodostettiin polun käsite sekä tutkittiin sen esiintymiä. Tässä luvussa ollaan kiinnostuneita polkujen muovaamisesta, tai toisin ilmaistuna niiden deformaatiosta, kuten lähdemateriaalissa usein puhutaan. Käytännössä tavoitteena on pystyä vääntämään topologisen avaruuden polkuja jatkuvasti toisikseen ilman, että muutetaan alku- tai loppupisteitä. Määritellään tätä varten **homotopian** käsite.

Määritelmä 3.1. Olkoot $f_0, f_1 \colon X \to Y$ topologisen avaruuden jatkuvia kuvauksia. Kuvausta $F \colon X \times I \to Y$ kutsutaan homotopiaksi, mikäli se toteuttaa seuraavat ehdot:

- $F(s, 0) = f_0(s)$ ja $F(s, 1) = f_1(s)$ kaikilla $s \in X$
- F on jatkuva

Tällöin sanotaan, että kuvaukset ovat **homotopisia** ja merkitään $f_0 \sim f_1$.

Homotopia siis kuvaa arvoja pisteistä $f_0(s)$ kohti arvoja $f_1(s)$, kun $s \in X$. Käytännössä jokaista indeksivälin I arvoa vastaa homotopiassa jokin funktio f_t siten, että $f_t : X \to Y$, jossa $f_t(s) = F(s, t)$, kaikilla $s, t \in I$. Asiaa voi konkretisoida suureiden kautta: jokaista ajanhetkeä t vastaa funktio f_t, jonka kuvaama arvo riippuu paikasta s. Homotopia ei kuitenkaan itsessään täysin saavuta asetettua tavoitetta, sillä se ei takaa kuvauksia f_t vastaavien päätepisteiden staattisuutta deformaation aikana. Tätä varten määritelmää on soveliasta vielä tarkentaa.

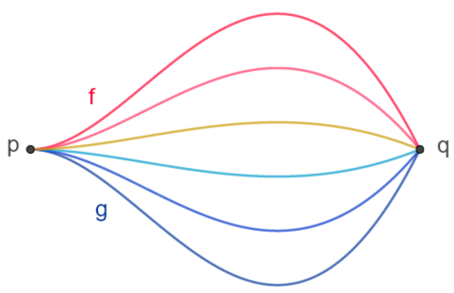
Määritelmä 3.2. Olkoot $f_0, f_1 \colon I \to X$ topologisen avaruuden polkuja, joilla on sama alkupiste p ja loppupiste q. Kuvausta $F \colon I \times I \to X$ kutsutaan **polkuhomotopiaksi**, mikäli se toteuttaa seuraavat ehdot:

- $F(0, t) = p$ ja $F(1, t) = q$ kaikilla $t \in I$
- F on homotopia

Tällöin sanotaan, että polut ovat **polkuhomotopisia** ja merkitään $f_0 \simeq f_1$.

Huomautus. Ensimmäiseen ehtoon viitataan tässä tekstissä usein sanomalla, että kuvaus F on polkuja vastaavien päätepisteiden suhteen kiinnitetty kaikilla $t \in I$.

Polkuhomotopia on erikoistapaus tavalliselle homotopialle. Eroavaisuutena on vain, että päätepisteet ovat staattisia ja homotopia on määritelty polkujen suhteen. Käytännössä tämä tarkoittaa sitä, että jokaisella muuttujan t arvolla käsitellään polkua $f_t \colon I \to X$, missä $f_t(s) = F(s, t)$, kaikilla $s, t \in I$. Sovitaan vielä selkeyden vuoksi, että tässä tekstissä puhuttaessa polkujen homotopisuudesta viitataan nimenomaan polkuhomotopian käsitteeseen. Esitetään tyypillinen esimerkki aiheeseen liittyen.



Kuva 3.1: Polkuhomotopia $f \simeq g$

Esimerkki 3.1. (Vrt. [1, s. 25]) Olkoon $f_0, f_1\colon I \to \mathbb{R}^n$ polkuja, joilla on sama alku- ja loppupiste. Väitetään, että nämä polut ovat polkuhomotopisia kuvauksen $F\colon I \times I \to \mathbb{R}^n$,

$$F(s,t) = (1-t)f_0(s) + tf_1(s)$$

kautta. Osoitetaan tämä vetoamalla kohta kohdalta määritelmään 3.2.

- Oletuksen nojalla tutkitut polut jakavat samat päätepisteet, joten $f_0(0) = f_1(0)$ sekä $f_0(1) = f_1(1)$. Tällöin $F(0,t) = f_0(0)$ ja $F(1,t) = f_0(1)$ kaikilla $t \in I$.

- Selkeästi $F(s,0) = f_0(s)$ sekä $F(s,1) = f_1(s)$ kaikilla $s \in I$, eli homotopian ensimmäinen ehto täyttyy.

- Muistetaan, että jatkuvien kuvausten yhteenlasku ja skalaarilla kertominen säilyttävät jatkuvuuden. Nyt koska f_0 sekä f_1 ovat jatkuvia niin tästä seuraa, että myös F on jatkuva ja toteuttaa täten homotopian jälkimmäisen ehdon.

Näistä ensimmäisen kohdan nojalla kuvaus F on kiinnitetty sitä vastaavien polkujen päätepisteiden suhteen kaikilla $t \in I$. Kaksi jälkimmäistä kohtaa taas takaavat, että kyseessä on homotopia määritelmän 3.1 mukaisesti. Yhdistämällä nämä päätelmät saadaan, että F on todella polkuhomotopia $f_0 \simeq f_1$.

Edellisessä esimerkissä määritetty polkuhomotopia kulkee lineaarisesti pisteiden $f_0(s)$ ja $f_1(s)$ välistä yhdysjanaa pitkin jokaisella arvolla $s \in I$, kun $t \in I$. Mikäli $f_0(s)$ ja $f_1(s)$ saavat jossain pisteessä $s \in I$ saman arvon, niin tällöin $f_t(s) = f_0(s)$ kaikilla $t \in I$. Tämä toteutuu erityisesti polkuhomotopian päätepisteissä, jotka ovat määritelmän mukaan staattiset. Vastaavia polkuhomotopioita kutsutaan **lineaarisiksi polkuhomotopioiksi**.

Tuloksen konkreettinen seuraus on, että avaruuden $\mathbb{R}^n$ samat päätepisteet jakaville poluille voidaan aina määrittää polkuhomotopia. Tulos voidaan yleistää laajemminkin: jos $X \subset \mathbb{R}^n$ on konveksi joukko, niin luonnollisesti jokaisen pisteen $x, y \in X$ välille on mahdollista piirtää vastaava yhdysjana kuin esimerkissä 3.1. Siis avaruuden X polkujen välille voidaan asettaa lineaarinen polkuhomotopia täysin analogisesti kuin yllä on esitetty.

3.1 Polkuhomotopian ominaisuuksia

Seuraavien tulosten kannalta on oleellista pystyä luokittelemaan ja käsittelemään polkuhomotopioiden suhteen samankaltaisia joukkoja. Tällainen luokittelu on mahdollista **polkuluokkien** kautta, jotka oleellisesti määrittävät polkujen ekvivalenssiluokat. Mikäli f on jonkin topologisen avaruuden polku, niin käytetään polkuluokasta merkintää $[f]$. Käytännössä tämä tarkoittaa, että kaikilla saman topologisen avaruuden poluilla g, joilla pätee $f \simeq g$, niin $g \in [f]$. Konkreettisesti samaan polkuluokkaan kuuluvat siis sellaiset polut, jotka voidaan vääntää toisikseen jonkin polkuhomotopian kautta. Osoitetaan seuraavan tuloksen avulla, että määritelty joukko on todella ekvivalenssiluokka.

Lause 3.1. *Polkuhomotopia on ekvivalenssirelaatio.*

Todistus. (Vrt. [1, s. 26]) Olkoon X topologinen avaruus ja $f\colon I \to X$ polku, jonka alkupiste on p ja loppupiste on q. Tällöin $f \simeq f$ *vakiohomotopian* $C\colon I \times I \to X$, jolla $C(s,t) = f(s)$ kaikilla $s, t \in I$, kautta. Siis polkuhomotopia on refleksiivinen.

Olkoon sitten $g\colon I \to X$ sellainen polku, että $f \simeq g$. Tällöin määritelmän nojalla on olemassa niiden välinen polkuhomotopia $F\colon I \times I \to X$. Tarkastellaan nyt kuvausta $\widetilde{F}\colon I \times I$, jolla $\widetilde{F}(s,t) = F(s, 1-t)$ kaikilla $s, t \in I$ ja osoitetaan, että kyseessä on homotopia $g \simeq f$. Ensinnäkin koska F on polkuhomotopia, niin

$$\widetilde{F}(0,t) = F(0, 1-t) = p \quad \text{ja} \quad \widetilde{F}(1,t) = F(1, 1-t) = q$$

kaikilla $t \in I$, kun p on kuvausta F vastaavien polkujen alkupiste ja q niiden loppupiste. Homotopiaehdon nojalla tälle kuvaukselle pätee

$$\widetilde{F}(s,0) = F(s,1) = g(s) \quad \text{ja} \quad \widetilde{F}(s,1) = F(s,0) = f(s)$$

kaikilla $s \in I$. Kuvaus voidaan lisäksi esittää muodossa

$$\widetilde{F}(s,t) = F(s, 1-t) = (F \circ \phi)(s,t),$$

missä $\phi\colon I \times I \to I \times I$ on kuvaus, jolla $\phi(s,t) = (s, 1-t)$. Tämä kuvaus on selkeästi jatkuva, joten myös $\widetilde{F}$ on kahden jatkuvan kuvauksen yhdisteenä jatkuva. Tämän nojalla $g \simeq f$, eli polkuhomotopia toteuttaa symmetrian.

Olkoon lopuksi $h\colon I \to X$ polku, jolla $g \simeq h$. Tällöin on olemassa polkuhomotopia $G : I \times I \to X$, joka yhdistää polut g ja h. Osoitetaan, että $H\colon I \times I \to X$,

$$H(s,t) = \begin{cases} F(s, 2t), & \text{kun} \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ G(s, 2t-1), & \text{kun} \quad \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

on polkuhomotopia $f \simeq h$. Tässä kuvataan molempien kuvausten F ja G arvot muuttujan t suhteen kaksinkertaisella nopeudella: aluksi kuvausta F pitkin ensimmäisellä puolivälillä, loput välistä kuvausta G mukaillen. Nyt kaikilla $t \in I$

$$F(0, 2t) = G(0, 2t-1) = p \quad \text{ja} \quad F(1, 2t) = G(1, 2t-1) = q,$$

eli kuvaus on sitä vastaavien polkujen päätepisteiden suhteen kiinnitetty. Kuvaukselle pätee lisäksi

$$H(s,0) = f(s) \quad \text{ja} \quad H(s,1) = h(s)$$

kaikilla $s \in I$, joten homotopian ensimmäinen ehto toteutuu. Tarkasti määriteltynä H on yhdiste funktioista $\widetilde{F}\colon I \times [0, \frac{1}{2}]$ ja $\widetilde{G}\colon I \times [\frac{1}{2}, 1]$, joilla

$$\begin{aligned} \widetilde{F}(s,t) &= F(s, 2t) && \text{kaikilla} \;\; s \in I, \;\; t \in [0, \tfrac{1}{2}] \;\; \text{ja} \\ \widetilde{G}(s,t) &= G(s, 2t-1) && \text{kaikilla} \;\; s \in I, \;\; t \in [\tfrac{1}{2}, 1]. \end{aligned}$$

Tässä $\widetilde{F}$ ja $\widetilde{G}$ ovat jatkuvia vastaavin perustein kuin aiemmin osoitettiin yhdistettyä polkua määritellessä. Kuvauksilla on ainoastaan pisteen $t = \frac{1}{2}$ määräämä yhteinen pistejoukko määrittelyjoukkojen suhteen, jossa $\widetilde{F}(s, \frac{1}{2}) = \widetilde{G}(s, \frac{1}{2})$ kaikilla $s \in I$. Liimauslemman ehdot täyttyvät, joten H on jatkuva. Siis $f \simeq h$, josta seuraa polkuhomotopian transitiivisuus. $\square$

Koska polkuhomotopia on ekvivalenssirelaatio, niin polkuluokat todella muodostavat polkujen ekvivalenssiluokan. Tämä on oleellinen tulos jatkoa ajatellen, mutta tuloksella on myös välittömiä sovellusalueita. Joskus voi olla esimerkiksi helpompi osoittaa kahden polun välinen homotopisuus käyttäen kolmatta polkua välikappaleena ja toteamalla ensiksi mainittujen polkujen homotopisuus transitiivisuuden kautta.

Esimerkki 3.2. Olkoon X topologinen avaruus ja $f_0, f_1 \colon I \to X$ sen polkuja, joilla $f_0 \simeq f_1$. Tällöin on olemassa niitä vastaava polkuhomotopia $F \colon I \times I \to X$. Määritellään tätä hyödyntäen kuvaus $\overline{F} \colon I \times I \to X$, jolla $\overline{F}(s,t) = F(1-s,t)$ kaikilla $s,t \in I$. Koska F on polkuhomotopia, niin kuvaukselle $\overline{F}$ pätee tällöin

$$\begin{aligned}\overline{F}(0,t) &= F(1,t) = f_t(1) = \overline{f}_t(0),\\ \overline{F}(1,t) &= F(0,t) = f_t(0) = \overline{f}_t(1)\end{aligned}$$

kaikilla $t \in I$ sekä

$$\begin{aligned}\overline{F}(s,0) &= F(1-s,0) = f_0(1-s) = \overline{f}_0(s),\\ \overline{F}(s,1) &= F(1-s,1) = f_1(1-s) = \overline{f}_1(s)\end{aligned}$$

kaikilla $s \in I$. Nyt koska lisäksi $\overline{F} = F \circ \phi$, missä $\phi \colon I \times I \to I \times I$ on jatkuva kuvaus, jolla $\phi(s,t) = (1-s,t)$, niin $\overline{F}$ on selvästi jatkuva. Kuvaus $\overline{F}$ on tällöin polkuhomotopia $\overline{f}_0 \simeq \overline{f}_1$. Koska päinvastainen todistus on symmetrinen, niin tästä seuraa, että $f_0 \simeq f_1 \iff \overline{f}_0 \simeq \overline{f}_1$.

Ennen seuraavan tuloksen esittämistä on tarpeen käsitteellistää polun **uudelleen parametrisointi**. Olkoon X topologinen avaruus ja $\phi \colon I \to I$ jatkuva kuvaus, jolla $\phi(0) = 0$ ja $\phi(1) = 1$. Tätä kuvausta kutsutaan välin I **parametrisaatioksi**. Kuvaus $\widetilde{f} : I \to X$ on polun $f : I \to X$ uudelleen parametrisointi, mikäli on olemassa edellä kuvatun kaltainen parametrisaatio ϕ, jolla $\widetilde{f} = f \circ \phi$. Yhdiste on selvästi hyvinmääritelty ja toisaalta myös polku, sillä se on jatkuva kahden jatkuvan kuvauksen yhdisteenä. Todistetaan tähän liittyen jatkon kannalta hyödyllinen tulos.

Lause 3.2. *Olkoon X topologinen avaruus ja $f \colon I \to X$ polku. Tällöin mille tahansa välin I parametrisaatiolle $\phi \colon I \to I$ pätee $f \simeq f \circ \phi$.*

Todistus. Määritellään kuvaus $F \colon I \times I \to X$ asettamalla $F(s,t) = (f \circ \widetilde{\phi})(s,t)$ kaikilla $s,t \in I$, missä $\widetilde{\phi} \colon I \times I \to$ on kuvaus, jolla

$$\widetilde{\phi}(s,t) = (1-t)\phi(s) + ts$$

kaikilla $s,t \in I$. On helppo nähdä, että kaikilla $s \in I$ pätee

$$\widetilde{\phi}(s,0) = \phi(s) \quad \text{ja} \quad \widetilde{\phi}(s,1) = s.$$

Tässä $\widetilde{\phi}$ muodostaa polkuhomotopian $\phi \simeq Id_I$, missä kuvaus $Id_I : I \to I$ on välin I identtinen kuvaus. Siis $Id_I(s) = s$ kaikilla $s \in I$. Polkuja vastaavat päätepisteet ovat kiinnitettyjä kuvauksessa F, sillä

$$F(0,t) = f(0) \quad \text{ja} \quad F(1,t) = f(1)$$

kaikilla $t \in I$. Lisäksi kaikilla $s \in I$ pätee

$$F(s,0) = (f \circ \phi)(s) \quad \text{ja} \quad F(s,1) = f(s),$$

joten ensimmäinen homotopiaehto toteutuu. Myös toinen homotopiaehto on voimassa, sillä F on jatkuvien kuvausten f sekä $\widetilde{\phi}$ yhdisteenä jatkuva. Tässä parametrisaation $\widetilde{\phi}$ jatkuvuus on perusteltavissa kuvausten ϕ sekä id_I jatkuvuudella, kun muistetaan, että jatkuvien kuvausten yhteenlasku ja skalaarilla kertominen säilyttävät jatkuvuuden. Siis ollaan osoitettu, että $f \circ \phi \simeq f$. $\square$

Edellisen tuloksen nojalla polun uudelleen parametrisointi säilyttää polkuhomotopian. Siis jos f on polku ja ϕ välin I parametrisaatio, niin ensinnäkin tuloksesta seuraa, että $f \circ \phi \simeq f$. Toisaalta jos g on polku, jolla $f \circ \phi \simeq g$, niin aiemmin todistettu polkuhomotopian ekvivalenssi takaa, että symmetrisyyden ja transitiivisuuden nojalla myös $f \simeq g$!

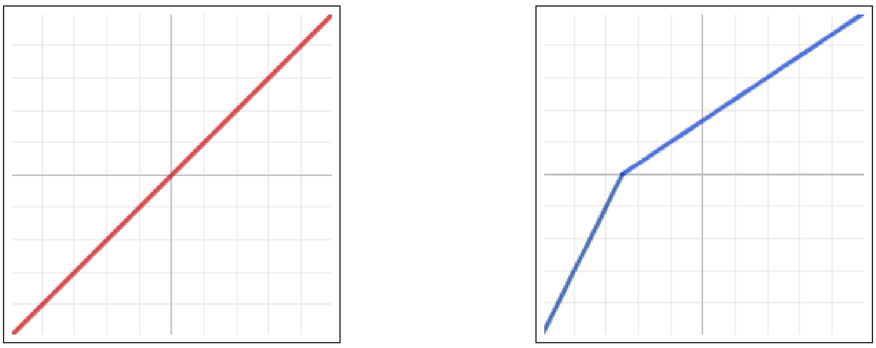
Esimerkki 3.3. Olkoon $f\colon I \to \mathbb{R}^2$, $f(s) = (s, 2s)$ polku. Tällöin $g : I \to \mathbb{R}^2$,

$$g(s) = \begin{cases} (2s, 4s), & \text{kun} \quad 0 \leq s \leq \frac{1}{4} \\ (\frac{2}{3}s + \frac{1}{3}, \frac{4}{3}s + \frac{2}{3}) & \text{muulloin} \end{cases}$$

on polun f uudelleen parametrisointi kuvauksen $\phi : I \to I$,

$$\phi(s) = \begin{cases} 2s, & \text{kun} \quad 0 \leq s \leq \frac{1}{4} \\ \frac{2}{3}s + \frac{1}{3}, & \text{muulloin} \end{cases}$$

kautta, eli $g = f \circ \phi$. Siis $f \simeq g$.



(a) Identtinen kuvaus id_I (b) Parametrisointi ϕ

Edellisessä esimerkissä parametrisaatiofunktio ϕ kuvaa ensimmäisen neljäsosan välistä I kaksinkertaisella nopeudella ja loput välistä kolmasosanopeutta, mitä voidaan havainnollistaa oheisella kuvalla. Geometrisesti g siis venyttää polun f arvoja parametrisaation ϕ mukaisesti. Osoitetaan seuraavaksi tulos yhdistettyjen polkujen homotopiaan liittyen.

Lause 3.3. *Polkujen yhdistäminen on hyvinmääritelty polkuluokkien suhteen. Siis jos* $f_0 \simeq f_1$ *ja* $g_0 \simeq g_1$*, siten että* f_0 *ja* g_0 *ovat yhdistettäviä, niin myös* f_1 *ja* g_1 *ovat yhdistettäviä ja* $f_0 \cdot g_0 \simeq f_1 \cdot g_1$.

Todistus. (Vrt. [2, s. 188-189]) Olkoon X topologinen avaruus ja kuvaukset $f_0, f_1, g_0, g_1 \colon I \to X$ oletuksen mukaisia polkuja. Tästä seuraa ensinnäkin, että $f_0 \simeq f_1$ sekä $g_0 \simeq g_1$. Tämän nojalla siis $f_0(1) = f_1(1)$ ja $g_0(0) = g_1(0)$. Lisäksi koska f_0 ja g_0 ovat yhdistettäviä, niin $f_0(1) = g_0(0)$. Edellisistä päättelyistä seuraa suoraan, että $f_1(1) = g_1(0)$. Siis myös f_1 ja g_1 ovat yhdistettäviä. Lisäksi oletuksen nojalla on olemassa jatkuvat kuvaukset $F \colon I \times I \to X$ sekä $G \colon I \times I \to X$, joista ensimmäinen vastaa polkuhomotopiaa $f_0 \simeq f_1$ ja jälkimmäinen polkuhomotopiaa $g_0 \simeq g_1$. Määritellään näitä polkuhomotopioita hyödyntäen kuvaus $H \colon I \times I \to X$, jolla

$$H(s,t) = \begin{cases} F(2s,t), & \text{kun } 0 \le s \le \frac{1}{2}, \ 0 \le t \le 1 \\ G(2s-1,t), & \text{kun } \frac{1}{2} \le s \le 1, \ 0 \le t \le 1. \end{cases}$$

Tässä F sekä G ovat polkuhomotopioina jatkuvia ja selvästi $F(1,t) = G(0,t)$ kaikilla $t \in I$, joten liimauslemman nojalla myös H on jatkuva. Nyt koska

$$H(s,0) = \begin{cases} f_0(2s), & \text{kun } 0 \le s \le \frac{1}{2} \\ g_0(2s-1), & \text{kun } \frac{1}{2} \le s \le 1 \end{cases} = (f_0 \cdot g_0)(s)$$

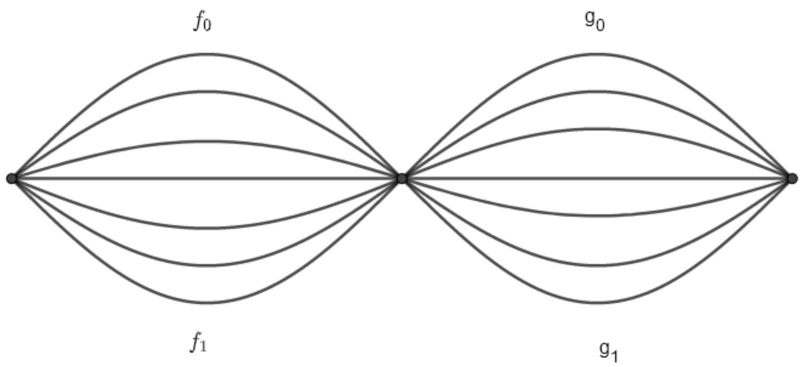
sekä

$$H(s,1) = \begin{cases} f_1(2s), & \text{kun } 0 \le s \le \frac{1}{2} \\ g_1(2s-1), & \text{kun } \frac{1}{2} \le s \le 1 \end{cases} = (f_1 \cdot g_1)(s)$$

kaikilla $s \in I$, niin homotopiaehto toteutuu. Kuvaukselle H pätee lisäksi

$$H(0,t) = F(0,t) \quad \text{ja} \quad H(1,t) = G(1,t),$$

joten se on kiinnitetty polkuja vastaavien päätepisteiden suhteen kaikilla arvoilla $t \in I$. Tämä on suora seuraus siitä, että F sekä G ovat polkuhomotopioita. Edellisten kohtien nojalla H toteuttaa kaikki polkuhomotopian ehdot, joten $f_0 \cdot g_0 \simeq f_1 \cdot g_1$. □



Kuva 3.3: Polkuhomotopia $f_0 \cdot g_0 \simeq f_1 \cdot g_1$

Ollaan osoitettu, että yhdistettyjen polkujen välinen homotopisuus riippuu vain niissä yhdistettävien polkujen homotopisuudesta. Tässä kohtaa on mielekästä määritellä käsitteenä **polkuluokkien tulo**. Jos f, g ovat yhdistettäviä polkuja, niin merkitään polkuluokkien tuloa kuten $[f] \cdot [g] = [f \cdot g]$. Laskutoimitus on hyvinmääritelty lauseen 3.3 nojalla.

Lause 3.4. *Olkoon X sekä Y topologisia avaruuksia, $F\colon X \to Y$ jatkuva kuvaus ja $f, g\colon I \to X$ polkuja. Tällöin jos $f \simeq g$, niin myös $F \circ f \simeq F \circ g$.*

Todistus. Oletuksen nojalla $f \simeq g$ jolloin on olemassa ne yhdistävä polkuhomotopia $H\colon I \times I \to X$. Nyt koska kuvaukset $F \circ f, F \circ g\colon I \to Y$ ovat hyvinmääritelty sekä jatkuvien kuvausten yhdisteenä jatkuvia, niin ne ovat tällöin myös polkuja. Lisäksi voidaan osoittaa, että $F \circ H\colon I \times I \to Y$ muodostaa polkuhomotopian $F \circ f \simeq F \circ g$, sillä

$$(F \circ H)(s, 0) = (F \circ f)(s) \quad \text{ja} \quad (F \circ H)(s, 1) = (F \circ g)(s)$$

kaikilla $s \in I$ sekä

$$(F \circ H)(0, t) = (F \circ f)(0) \quad \text{ja} \quad (F \circ H)(1, t) = (F \circ f)(1)$$

kaikilla $t \in I$. Tästä seuraa, että kuvaus toteuttaa homotopiaehdon ja on staattinen polkuja vastaavien päätepisteiden suhteen sekä lisäksi jatkuvien kuvausten yhdisteenä jatkuva. Siis $F \circ H$ on polkuhomotopia, joka yhdistää polut $F \circ f$ ja $F \circ g$. □

Edellisestä tuloksesta seuraa, että polkuhomotopisuus säilyy homeomorfismissa molempiin suuntiin. Tämä on perusteltavissa sillä, että jos F on jokin homeomorfismi topologisten avaruuksien välillä, niin myös sen käänteiskuvaus F^{-1} on määritelty ja molemmat kuvaukset ovat tällöin jatkuvia. Edellinen lause on siis suoraan sovellettavissa homeomorfismiin ja sen käänteiskuvaukseen.

4 Perusryhmä

Tässä luvussa tavoitteena on käsitteellistää algebrallinen ryhmärakenne samankaltaisten polkuluokkien suhteen. Erityisesti kiinnostus kohdistuu silmukoihin eli polkuihin, jotka alkavat ja päättyvät samaan pisteeseen. Käytetään merkintää $\pi_1(X, x_0)$, jolla viitataan topologisen avaruuden X pisteen x_0 määrittämien silmukoiden polkuluokkien joukkoon. Väitetään, että $(\pi_1(X, x_0), \cdot)$ muodostaa ryhmärakenteen. Tämän todistamiseksi pitää osoittaa, että se toteuttaa algebrallisen ryhmärakenteen neljä ehtoa.

Lause 4.1. *Joukko $\pi_1(X, x_0)$ varustettuna laskutoimituksella $[f] \cdot [g] = [f \cdot g]$ muodostaa ryhmärakenteen.*

Todistus. (Vrt. [1, s. 26-27]) Yhdiste $f \cdot g$ on selvästi hyvinmääritelty, kun f, g ovat silmukoita saman kantapisteen x_0 suhteen. Tällöin myös $f \cdot g$ on silmukka pisteen x_0 suhteen, joten $[f \cdot g] \in \pi_1(X, x_0)$. Siis laskutoimitus on suljettu joukossa $\pi_1(X, x_0)$.

Olkoon $[f], [g], [h] \in \pi_1(X, x_0)$, jolloin sekä $(f \cdot g) \cdot h$ että $f \cdot (g \cdot h)$ ovat hyvinmääriteltyjä, sillä muodostetut polut ovat silmukoita saman kantapisteen suhteen. Soveltamalla polkujen tuloa kahdesti sulkujen määräämässä järjestyksessä saadaan

$$((f \cdot g) \cdot h)(s) = \begin{cases} f(4s), & \text{kun} \quad 0 \leq s \leq \frac{1}{4} \\ g(4s-1), & \text{kun} \quad \frac{1}{4} \leq s \leq \frac{1}{2} \\ h(2s-1), & \text{kun} \quad \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

ja

$$(f \cdot (g \cdot h))(s) = \begin{cases} f(2s), & \text{kun} \quad 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ g(4s-2), & \text{kun} \quad \frac{1}{2} \leq s \leq \frac{3}{4} \\ h(4s-3), & \text{kun} \quad \frac{3}{4} \leq s \leq 1. \end{cases}$$

Tällöin $(f \cdot g) \cdot h$ on uudelleen parametrisointi polusta $f \cdot (g \cdot h)$ parametrisaation $\phi_1 \colon I \to I$,

$$\phi_1(s) = \begin{cases} 2s, & \text{kun} \quad 0 \leq s \leq \frac{1}{4} \\ s + \frac{1}{4}, & \text{kun} \quad \frac{1}{4} \leq s \leq \frac{1}{2} \\ \frac{s+1}{2}, & \text{kun} \quad \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

kautta. Perustelu on seuraava: $f \cdot (g \cdot h)$ kuvaa polun f arvot kaksinkertaista nopeutta ja polkujen g, h arvot nelinkertaisella nopeudella. Parametrisoinnin ϕ_1 kautta polut f, g kuvautuvat nelinkertaisella ja polku h kaksinkertaisella nopeudella, mikä vastaa polkua $(f \cdot g) \cdot h$. Laskemalla saadaan, että kaikilla $s \in I$ on voimassa

$$((f \cdot (g \cdot h)) \circ \phi_1)(s) = \begin{cases} f(4s), & \text{kun} \quad 0 \leq s \leq \frac{1}{4} \\ g(4s-1), & \text{kun} \quad \frac{1}{4} \leq s \leq \frac{1}{2} \\ h(2s-1), & \text{kun} \quad \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases} = ((f \cdot g) \cdot h)(s),$$

joten päättely on pätevä. Siis lauseen 3.2 nojalla $(f\cdot g)\cdot h \simeq f\cdot(g\cdot h)$, eli polkuluokkien tulo on liitännäinen joukossa $\pi_1(X,x_0)$.

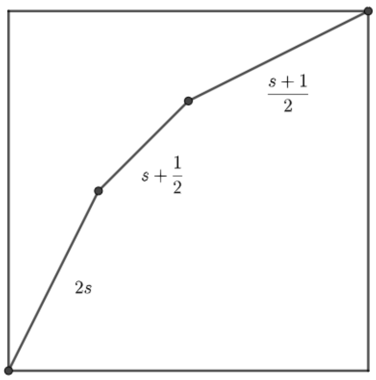
Olkoon sitten $[f] \in \pi_1(X,x_0)$ ja $c_{x_0}\colon I \to X$ vakiopolku indeksinsä suhteen. Tällöin $f \cdot c_{x_0}$ on uudelleen parametrisointi polusta f kuvauksen $\phi_2\colon I \to I$,

$$\phi_2(s) = \begin{cases} 2s, & \text{kun} \quad 0 \le s \le \frac{1}{2} \\ 1, & \text{kun} \quad \frac{1}{2} \le s \le 1 \end{cases}$$

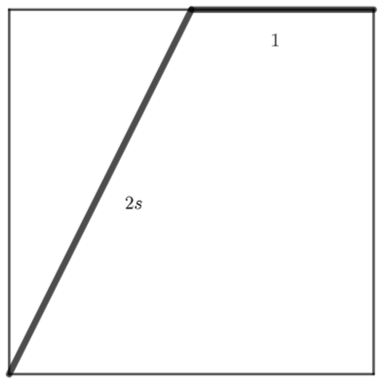
kautta. Parametrisaatio ϕ_2 kuvaa ensimmäisellä puolivälillä polun f arvot kaksinkertaisella nopeudella ja loput välistä vakiona arvolle $f(1) = c_{x_0}(s)$, kaikilla $s \in I$. Laskemalla saadaan, että

$$(f \cdot c_{x_0})(s) = \begin{cases} f(2s), & \text{kun} \quad 0 \le s \le \frac{1}{2} \\ f(1), & \text{kun} \quad \frac{1}{2} \le s \le 1 \end{cases} = (f \circ \phi_2)(s),$$

kaikilla $s \in I$. Siis lauseen 3.2 nojalla todella pätee $f \simeq f \cdot c_{x_0}$. Vastaavasti voidaan osoittaa, että $f \simeq c_{x_0} \cdot f$ sopivan parametrisaation kautta. Koska f on silmukka, niin tämä parametrisaatio voidaan määrittää vastaavasti kuin ϕ_2, mutta kuvaten ensimmäinen puolisko vakiolle 0. Lopputulema on kuitenkin, että $[c_{x_0}]$ on molemminpuoleinen neutraalialkio polkuluokalle $[f]$.



(a) Parametrisaatio ϕ_1



(b) Parametrisaatio ϕ_2

Olkoon jälleen $[f] \in \pi_1(X,x_0)$. Osoitetaan, että $[\overline{f}] \in \pi_1(X,x_0)$ on sen käänteisalkio. Määritellään tätä varten kuvaus $H\colon I \times I \to X$ asettamalla

$$H(s,t) = \begin{cases} f(2s), & \text{kun} \quad 0 \le s \le \frac{t}{2} \\ f(t), & \text{kun} \quad \frac{t}{2} \le s \le 1 - \frac{t}{2} \\ f(2-2s), & \text{kun} \quad 1 - \frac{t}{2} \le s \le 1. \end{cases}$$

Tässä $f(2-2s) = \overline{f}(2s)$. Kuvaus H kulkee jokaista arvoa t kohdin välin $[0, \frac{t}{2}]$ kaksinkertaista nopeutta polkua f, välin $[\frac{t}{2}, 1 - \frac{t}{2}]$ vakiopolkua $f(t)$ ja loput välistä kaksinkertaista nopeutta käänteispolkua $\overline{f}$ pitkin. Kuva 4.2 antaa tästä geometrisen havainnollistuksen. Kuvaus H on selvästi jatkuva liimauslemmaa soveltamalla. Nyt koska $[f] \in \pi_1(X,x_0)$, niin $f(0) = f(1) = x_0$. Tällöin $H(0,t) = x_0 = H(1,t)$, joten kuvaus on staattinen muuttujan s arvoilla 0 sekä 1. Lisäksi jos $c_{x_0} : I \longrightarrow X$ on vakiopolku pisteen x_0 suhteen, niin $H(s,0) = f(0) = c_{x_0}(s)$ kaikilla $s \in I$ ja

$$H(s,1) = \begin{cases} f(2s), & \text{kun} \quad 0 \le s \le \frac{1}{2} \\ f(2-2s), & \text{kun} \quad \frac{1}{2} \le s \le 1 \end{cases} = (f \cdot \overline{f})(s), \text{ kaikilla } s \in I.$$

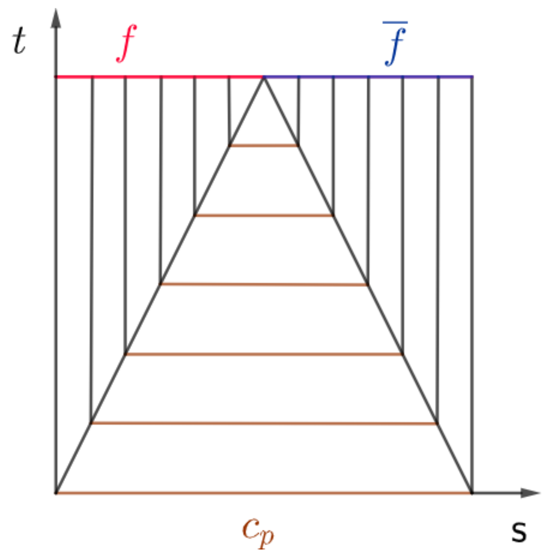
Siis myös homotopiaehto toteutuu, joten H on polkuhomotopia $c_p \simeq f \cdot \overline{f}$. Täysin analogisesti voidaan osoittaa, että $c_{x_0} \simeq \overline{f} \cdot f$. Siis $[\overline{f}]$ on polkuluokan $[f]$ käänteisalkio. □

Huomautus. Neutraalialkio sekä käänteisalkio ovat tietenkin tavalliseen tapaan yksikäsitteisiä. Nimittäin jos tutkitaan joukkoa $\pi_1(X, x_0)$, niin $[c_{x_0}]$ on tämän joukon neutraalialkio. Jos myös $[g]$ on tämän joukon neutraalialkio, niin määritelmän nojalla

$$[c_{x_0}] = [c_{x_0}] \cdot [g] = [g].$$

Vastaavasti jos $[f] \in \pi_1(X, x_0)$, niin $[\overline{f}]$ on sen käänteisalkio. Mikäli $[g]$ on myös käänteisalkio polkuluokalle $[f]$, niin soveltamalla neutraalialkion sekä käänteisalkion määritelmää ja polkuluokkien tulon liitännäisyyttä saadaan, että

$$[\overline{f}] = [\overline{f}] \cdot [c_{x_0}] = [\overline{f}] \cdot ([f] \cdot [g]) = ([\overline{f}] \cdot [f]) \cdot [g] = [c_{x_0}] \cdot [g] = [g].$$



Kuva 4.2: Kuvaus H

Edellisen tuloksen kannalta huomattavaa on, että liitännäisyys koskee nimenomaan *polkuluokkien* tuloa, sillä polkujen tulo *ei* ole liitännäinen. Sovitaan selkeyden vuoksi, että mikäli polkujen tuloa ei ole erikseen järjestetty, niin tässä tekstissä tulot lasketaan esiintymisjärjestyksessä kuten $f \cdot g \cdot h = (f \cdot g) \cdot h$.

Esimerkki 4.1. (Vrt [1, s. 27]) Olkoon $X \in \mathbb{R}^n$ konveksi joukko ja $x_0 \in X$ piste avaruudessa. Tällöin kaikilla silmukoilla f, joilla $[f] \in \pi_1(X, x_0)$, pätee esimerkin 3.1 nojalla, että $f \equiv x_0$. Siis jokainen vastaavan perusryhmän silmukka on homotopinen kantapisteen x_0 määrittämän vakiopolun kanssa. Tällöin sanotaan, että perusryhmä on **triviaali** ja merkitään $\pi_1(X, x_0) = 0$.

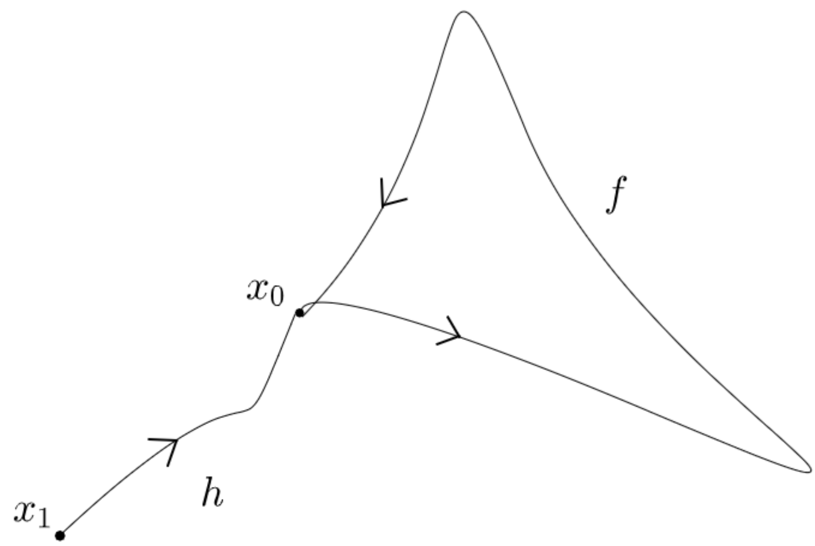
Esimerkki 4.2. Osoitetaan lauseeseen 3.3 liittyvä seuraus hyödyntämällä edellä esitettyä lausetta. Väitetään, että mikäli $f_0 \cdot g_0 \simeq f_1 \cdot g_1$ ja $g_0 \simeq g_1$, niin tällöin täytyy päteä myös $f_0 \simeq f_1$. Soveltamalla esimerkkiä 3.2 oletukseen $g_0 \simeq g_1$ saadaan, että $\overline{g}_0 \simeq \overline{g}_1$. Edellisen huomion sekä lauseiden 3.3 ja 4.1 nojalla tällöin

$$f_0 \simeq f_0 \cdot (g_0 \cdot \overline{g}_0) \simeq (f_0 \cdot g_0) \cdot \overline{g}_0 \simeq (f_1 \cdot g_1) \cdot \overline{g}_1 \simeq f_1 \cdot (g_1 \cdot \overline{g}_1) \simeq f_1,$$

mistä seuraa suoraan haluttu tulos $f_0 \simeq f_1$.

Epätriviaalin perusryhmän määrittäminen voi olla työlästä, sillä tällöin pitäisi pystyä ensinnäkin todistamaan, että tutkitussa perusryhmässä on toisistaan erillisiä polkuluokkia ja toisaalta erittelemään näistä jokainen. Tähän aiheeseen paneudutaan tarkemmin luvussa 5, jossa määritetään ympyrän perusryhmä.

4.1 Kantapisteen vaihto ja yhdesti yhtenäiset avaruudet



Kuva 4.3: Kantapisteen vaihto

Seuraava oleellinen kysymys liittyy kantapisteen valintaan perusryhmän kannalta. Erityisesti ollaan kiinnostuneita siitä, millaisia yhteyksiä topologisen avaruuden toisistaan eriävillä perusryhmillä voi olla. Olkoon $\pi_1(X, x_0)$ ja $\pi_1(X, x_1)$ topologisen avaruuden X perusryhmiä kahden eri kantapisteen suhteen. Ensimmäisenä on oleellista huomioida, että mikäli X ei ole polkuyhtenäinen, niin pisteiden x_0 ja x_1 välillä ei välttämättä ole niitä yhdistäviä polkuja, jolloin tutkittavien perusryhmien välillä ei tietenkään ole yhteyttä. Tämän takia perusryhmien tapauksessa toimitaan usein nimenomaan polkuyhtenäisisissä avaruuksissa.

Oletetaan sitten, että pisteestä x_1 pisteeseen x_0 on olemassa polku $h\colon I \to X$ sekä täten myös sen käänteispolku $\overline{h}\colon I \to X$. Tällöin silmukan f, jolla $[f] \in \pi_1(X, x_0)$, kautta voidaan määrittää tulo $h \cdot f \cdot \overline{h}$, joka muodostaa silmukan kantapisteen x_1 suhteen. Tämä silmukka kulkee aluksi polkua h pitkin pisteestä x_1 pisteeseen x_0, sen jälkeen silmukkaa f pitkin uudestaan pisteeseen x_0 ja lopuksi polkua $\overline{h}$ pitkin takaisin pisteeseen x_1. Vastaavasti minkä tahansa perusryhmän $\pi_1(X, x_0)$ polkuluokan silmukan kautta voidaan muodostaa silmukka kantapisteen x_1 suhteen polkujen h ja $\overline{h}$ avulla.

Nyt voidaan määritellä **kantapisteen vaihto** $\beta_h \colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_1)$ asettamalla $\beta_h[f] = [h \cdot f \cdot \overline{h}]$, missä $[f]$ on jokin perusryhmän $\pi_1(X, x_0)$ polkuluokka ja h on polku pisteestä x_1 pisteeseen x_0. Tässä huomattavaa on, että ainoastaan polkuluokan valinnalla on merkitystä: jos $[f] = [g]$, niin polkuluokkien tulon määritelmän nojalla saadaan

$$[h \cdot f \cdot \overline{h}] = [h] \cdot [f] \cdot [\overline{h}] = [h] \cdot [g] \cdot [\overline{h}] = [h \cdot g \cdot \overline{h}],$$

eli tällöin $\beta_h[f] = \beta_h[g]$. Osoitetaan seuraavaksi kantapisteen vaihtoon liittyvä keskeinen tulos.

Lause 4.2. *Kantapisteen vaihto* $\beta_h \colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_1)$ *on isomorfismi, jonka käänteiskuvaus on* $\beta_{\overline{h}} \colon \pi_1(X, x_1) \to \pi_1(X, x_0)$.

Todistus. Jokaiselle $[f] \in \pi_1(X, x_0)$ pätee

$$(\beta_h \circ \beta_{\overline{h}})[f] = \beta_h[\overline{h} \cdot f \cdot h] = [h \cdot \overline{h} \cdot f \cdot h \cdot \overline{h}] = [f]$$

ja vastaavasti $(\beta_{\overline{h}} \circ \beta_h)[f] = [f]$, joten $\beta_{\overline{h}}$ on todella kantapisteen vaihdon käänteiskuva. Tästä seuraa suoraan, että kuvaus β_h on bijektiivinen. Lisäksi kaikille $[f \cdot g] \in \pi_1(X, x_0)$ voidaan osoittaa laskemalla, että

$$\beta_h[f \cdot g] = [h \cdot f \cdot g \cdot \overline{h}] = [h \cdot f \cdot \overline{h} \cdot h \cdot g \cdot \overline{h}] = \beta_h[f] \cdot \beta_h[g]$$

ja tietenkin myös $\beta_{\overline{h}}[f \cdot g] = \beta_{\overline{h}}[f] \cdot \beta_{\overline{h}}[g]$. Kuvaus on siis homomorfismi ja edellisten päättelyiden nojalla myös isomorfismi. □

Tämän tuloksen nojalla mikäli X on polkuyhtenäinen, niin perusryhmä on isomorfismin suhteen riippumaton kantapisteen valinnasta, jolloin voidaan käyttää merkintää $\pi_1(X)$. Esimerkiksi ilmaus "$\pi_1(X)$ on triviaali" voi olla luonteva, kun $\pi_1(X, p) = \{[c_p]\}$ kaikilla $p \in X$. Kuitenkin kantapisteet määrittävät erilaisia isomorfismeja, joten tilanteessa, jossa viitataan spesifiin perusryhmän jäseneen tai perusryhmien väliseen homomorfismiin on tehtävä asianmukainen tarkennus sovellettavista kantapisteistä.

Esimerkki 4.3. Olkoon X topologinen avaruus ja $g \colon I \to X$ polku pisteestä x_0 pisteeseen x_1. Tällöin jos $h \colon I \to X$ on polku pisteestä x_1 pisteeseen x_2, niin tulo $g \cdot h$ on hyvinmääritelty polku pisteestä x_0 pisteeseen x_2. Näiden polkujen suhteen voidaan määrittää kantapisteen vaihdot, jolloin jokaisella $[f] \in \pi_1(X, x_2)$

$$\beta_{g \cdot h}[f] = [g \cdot h \cdot f \cdot \overline{g \cdot h}] = [g \cdot h \cdot f] \cdot [\overline{g \cdot h}]$$

ja

$$(\beta_g \circ \beta_h)[f] = \beta_g[\beta_h[f]] = \beta_g[h \cdot f \cdot \overline{h}] = [g \cdot h \cdot f \cdot \overline{h} \cdot \overline{g}] = [g \cdot h \cdot f] \cdot [\overline{h} \cdot \overline{g}].$$

Nyt koska kaikilla $s \in I$ pätee

$$\begin{cases} g(2-2s), & \text{kun} \quad 0 \leq 1-s \leq \frac{1}{2} \\ h(1-2s), & \text{kun} \quad \frac{1}{2} \leq 1-s \leq 1 \end{cases} = \begin{cases} h(1-2s), & \text{kun} \quad 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ g(2-2s), & \text{kun} \quad \frac{1}{2} \leq s \leq 1, \end{cases}$$

niin tästä seuraa suoraan, että

$$(\overline{g \cdot h})(s) = (g \cdot h)(1-s) = (\overline{h} \cdot \overline{g})(s),$$

kaikilla $s \in I$. Siis $[\overline{g \cdot h}] = [\overline{h} \cdot \overline{g}]$ ja edelleen $\beta_{g \cdot h} = \beta_g \circ \beta_h$.

Edellisen esimerkin konkreettinen merkitys on ilmeinen: mikäli g sekä h ovat yhdistettäviä polkuja, niin niiden suhteen määritelty kantapisteen vaihto on sama kuin polkujen suhteen erillisesti määriteltyjen kantapisteen vaihtojen yhdiste.

Polkuyhtenäisen topologisen avaruuden sanotaan olevan **yhdesti yhtenäinen**, mikäli sen perusryhmä on triviaali. Seuraava tulos viittaa samaan asiaan.

Lause 4.3. *Topologinen avaruus X on yhdesti yhtenäinen jos ja vain jos jokaista avaruuden X pistettä yhdistää yksikäsitteinen polkuluokka.*

Todistus. (Vrt. [1, s. 28]) Oletetaan ensin, että X on yhdesti yhtenäinen. Tällöin X on määritelmän nojalla polkuyhtenäinen ja $\pi_1(X) = 0$. Nyt jos f, g ovat polkuja pisteestä x_0 pisteeseen x_1, niin $f \simeq f \cdot \overline{g} \cdot g \simeq g$. Tämä on perusteltavissa seuraavasti: koska $\pi_1(X) = 0$, niin $f \cdot \overline{g} \simeq c_{x_0}$ sekä $\overline{g} \cdot g \simeq c_{x_1}$, missä siis c_{x_0} ja c_{x_1} ovat vakiopolkuja indeksiensä suhteen. Tietenkin myös $f \cdot c_{x_1} \simeq f$ ja $c_{x_0} \cdot g \simeq g$. Ketjuttamalla edelliset päätelmät sekä soveltamalla polkuluokkien perusominaisuuksia saadaan

$$f \simeq f \cdot c_{x_1} \simeq f \cdot (\overline{g} \cdot g) \simeq (f \cdot \overline{g}) \cdot g \simeq c_{x_0} \cdot g \simeq g,$$

joka on haluttu tulos. Siis kaikki polut, jotka jakavat samat päätepisteet ovat polkuhomotopisia ja sisältyvät samaan yksikäsitteiseen polkuluokkaan.

Oletetaan sitten, että jokaista avaruuden X pistettä x_0 ja x_1 yhdistää yksikäsitteinen polkuluokka. Tällöin ensinnäkin jokaisen pisteen välillä on epätyhjä polkuluokka ja täten pisteet x_0 ja x_1 yhdistävä polku, siis X on polkuyhtenäinen. Toisekseen, koska jokainen kaksi pistettä yhdistävä polkuluokka on olemassa ja yksikäsitteinen, niin mielivaltaisen pisteen $x \in X$ suhteen määritetyt silmukat kuuluvat kaikki samaan polkuluokkaan ja ovat täten polkuhomotopisia vakiopolun c_x kanssa. Siis $\pi_1(X) = 0$. □

4.2 Pallojen perusryhmä

Ennen seuraavaa lukua tutkitaan vielä korkeampiulotteisia palloja, siis topologisia avaruuksia $\mathbb{S}^n$, missä $n \geq 2$. Syy rajaukseen on yksinkertainen: korkeampiulotteisten pallojen tapauksessa voidaan osoittaa, että perusryhmä on triviaali muutaman aputuloksen kautta. Ympyrän tapaus on melko lailla mutkikkaampi, kuten myöhemmin tullaan huomaamaan.

Muistetaan topologian perustuloksista, että punkteerattu n-pallo on homeomorfinen n-asteisen euklidisen avaruuden kanssa. Todistuksen perusajatus pohjautuukin juuri tähän huomioon: mikäli avaruuden $\mathbb{S}^n$ silmukat voitaisiin rinnastaa vastaavan punkteeratun avaruuden $\mathbb{S}^n \setminus \{y\}$ silmukoihin, niin homeomorfismin kautta olisi mahdollista osoittaa, että koska $\pi_1(\mathbb{R}^n) = 0$, niin myös $\pi_1(\mathbb{S}^n \setminus \{y\}) = 0$ ja edelleen $\pi_1(\mathbb{S}^n) = 0$. Päättely on kuitenkin puutteellinen, sillä mielivaltaisesti valittu silmukka saattaa kuvautua koko sen maalijoukolle. Tällöin edellä esitetty päättely ei enää päde, sillä avaruuden $\mathbb{S}^n$ täyttävä silmukka ei kuvaudu homeomorfisesti avaruuteen $\mathbb{R}^n$. Voidaan kuitenkin osoittaa, että tällaisia polkuja voi muuttaa sopivan polkuhomotopian kautta siten, että ne eivät täytä koko avaruutta. Tätä varten tarvitaan työkalu, joka mahdollistaa polkujen hajottamisen pienempiin osiin.

Palautetaan vielä mieleen aiheeseen liittyvää keskeistä käsitteistöä ennen seuraavien tulosten esittelyä. Olkoon M kompakti metrinen avaruus ja $S \subset M$ sen rajoitettu osajoukko. Joukon S **halkaisija** on $d(S) = sup\{d(x, y) \mid x, y \in S\}$, eli suurin etäisyys kahden pisteen välillä tarkastellessa kaikkia joukon pisteitä. Olkoon sitten $\{U_i\}$ avaruuden M avoin peite. Tällöin $\delta > 0$ on peitteen **Lebesguen luku**, mikäli kaikki joukot $S \subset M$, joiden halkaisija on pienempi kuin δ sisältyvät johonkin peitteen joukoista $U \in \{U_i\}$. Osoitetaan seuraavaksi, että jokaista kompaktin metrisen avaruuden avointa peitettä kohden on olemassa tällainen luku.

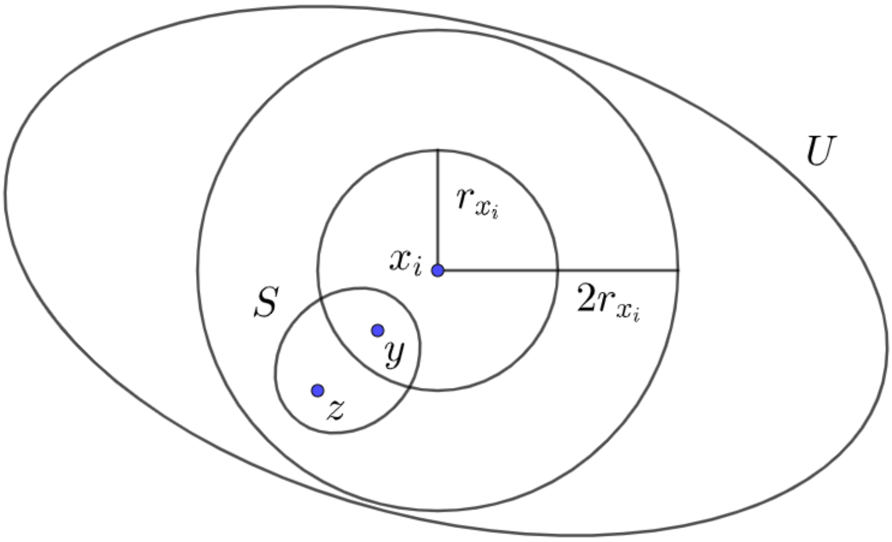
Lause 4.4. *Jokaisella kompaktin metrisen avaruuden avoimella peitteellä on Lebesguen luku.*

Todistus. (Vrt. [2, s. 194-195]) Olkoon M kompakti metrinen avaruus ja $\{U_i\}$ jokin sen avoin peite. Tällöin jokainen piste $x \in M$ kuuluu johonkin joukkoon $U \in \{U_i\}$. Nyt koska U on avoin, niin jokaisella sen pisteellä on tällöin säteen $r(x)$ määräämä ympäristö, jolla $B_{2r(x)}(x) \subset U$. Lisäksi tiedetään, että jokaisen avaruuden pisteen suhteen määritetyt kuulat $\{B_{r(x)}(x) \mid x \in M\}$ muodostavat avaruuden avoimen peitteen. Edelleen koska M on kompakti, niin on olemassa äärellinen osapeite $\{B_{r(x_1)}(x_1), \ldots, B_{r(x_n)}(x_n)\}$.

Osoitetaan, että $\delta = min\{r(x_1), \ldots, r(x_n)\}$ on Lebesguen luku alussa määritetylle peitteelle $\{U_i\}$. Tätä varten tulee osoittaa, että kaikki tätä halkaisijaltaan pienemmät joukot sisältyvät johonkin peitteen joukoista. Olkoon $S \subset M$ jokin tällainen joukko ja $y \in S$ mikä tahansa joukon piste. Tällöin on olemassa $x_i \in M$ siten, että $y \in B_{r(x_i)}(x_i)$. Edelleen, alun määrittelyjen nojalla säteet valikoitiin siten, että $B_{2r(x_i)}(x_i) \subset U$, jollain $U \in \{U_i\}$. Riittää siis osoittaa, että $S \subset B_{2r(x_i)}(x_i)$, jolloin tietenkin myös $S \subset U$. Kuva 4.4 havainnollistaa tätä ajatusta. Valitaan sitten mielivaltainen $z \in S$. Soveltamalla kolmioepäyhtälöä saadaan

$$d(z, x_i) \leq d(z, y) + d(y, x_i) < \delta + r(x_i) < 2r(x_i),$$

mikä todistaa väitteen. □



Kuva 4.4: Lauseen 4.4 todistukseen liittyvä havainnollistus

Lause 4.5. *Olkoon X, Y topologisia avaruuksia ja $F\colon X \to Y$ homeomorfismi. Tällöin X on polkuyhtenäinen $\iff$ Y on polkuyhtenäinen.*

Todistus. Muistetaan, että polkuyhtenäisen avaruuden kuva jatkuvan surjektion kautta on myös polkuyhtenäinen. Nyt koska F on homeomorfismi, niin se ja sen käänteiskuvaus $F^{-1}\colon Y \to X$ ovat molemmat jatkuvia bijektioita. Siis jos X on polkuyhtenäinen, niin myös $F(X) = Y$ on polkuyhtenäinen. Vastaavasti jos Y on polkuyhtenäinen, niin tällöin $F^{-1}(Y) = X$ on polkuyhtenäinen. □

Lause 4.6. *Olkoon X topologinen avaruus, $f\colon I \to X$ sen polku, $0 = a_0 < \cdots < a_n = 1$ jokin yksikkövälin I jako ja $\phi_i\colon I \to [a_{i-1}, a_i]$ jokaista muodostettua osaväliä vastaavia lineaarisia kuvauksia, joilla pätee*

$$\phi_i(s) = a_{i-1} + s(a_i - a_{i-1}).$$

Tällöin jos jokaista osaväliä $[a_{i-1}, a_i]$ kohden määritellään kuvaukset $f_i\colon I \to X$, $f_i(s) = (f \circ \phi_i)(s)$, niin

$$[f] = [f_1] \cdot \ldots \cdot [f_n].$$

Todistus. Määritellään aluksi kuvaus $\widetilde{f_i}\colon I \to X$ asettamalla $\widetilde{f_i}(s) = (f \circ \widetilde{\phi_i})(s)$, missä $\widetilde{\phi_i}\colon I \to [0, a_i]$, kun $i \in \{1, \ldots, n\}$, on määritelmää vastaava lineaarinen kuvaus $I \mapsto [0, a_i]$. Todistetaan väite induktiolla osoittamalla, että $\widetilde{f_i} \cdot f_{i+1} \cdot \ldots \cdot f_n \simeq f$ aloittamalla arvosta $i = n$. Tämä laskutoimitus tarkoittaa tarkasteltujen polkujen tuloa siinä järjestyksessä kuin ne on esitetty, vasemmalta oikealle. Siis ensimmäisenä lasketaan tulo $\widetilde{f_i} \cdot f_{i+1}$, sitten $(\widetilde{f_i} \cdot f_{i+1}) \cdot f_{i+2}$ ja niin edelleen. Mitä aiemmin polku esiintyy lausekkeessa, niin sitä useammin siihen sovelletaan polkujen tuloa ja sitä nopeammin se kuljetaan tavalliseen verrattuna.

Tapaus $i = n$ on triviaali, sillä määrittelyjen nojalla pätee $\widetilde{f_n} = f \circ \widetilde{\phi_n}$, joten lauseen 3.2 nojalla $\widetilde{f_n} \simeq f$. Tehdään sitten induktio-oletus, että $\widetilde{f_i} \cdot f_{i+1} \cdot \ldots \cdot f_n \simeq f$

jollain $i \in \{2, \dots, n\}$ ja väitetään, että myös $\widetilde{f_{i-1}} \cdot f_i \cdot \ldots \cdot f_n \simeq f$. Tämä tulo on hyvinmääritelty, sillä

$$\widetilde{f_{i-1}}(1) = f(a_{i-1}) = f_i(0) \quad \text{ja} \quad f_k(1) = f(a_k) = f_{k+1}(0)$$

kaikilla $k \in \{i, \dots, n-1\}$. Osoitetaan, että $\widetilde{f_{i-1}} \cdot f_i \simeq \widetilde{f_i}$. Tässä $\widetilde{f_i}$ on polku, joka vastaa kuvauksen f rajoittumaa välillä $[0, a_i]$ ja tulo on muotoa

$$(\widetilde{f_{i-1}} \cdot f_i)(s) = \begin{cases} f(2sa_{i-1}), & \text{kun } 0 \le s \le \frac{1}{2} \\ f(a_i(2s-1) + 2a_{i-1}(1-s)), & \text{kun } \frac{1}{2} \le s \le 1. \end{cases}$$

Nyt koska $a_{i-1} \in [0, a_i]$, niin täytyy olla olemassa jokin luku $t \in I$ siten, että $\widetilde{f_i}(t) = f(a_{i-1}) = \widetilde{f_{i-1}}(1)$. Laskemalla saadaan, että

$$\widetilde{f_i}(t) = \widetilde{f_{i-1}}(1) \iff f(ta_i) = f(a_{i-1}) \iff ta_i = a_{i-1} \iff t = \frac{a_{i-1}}{a_i}.$$

Tämän huomion nojalla voidaan muodostaa parametrisaatio $\rho \colon I \to I$,

$$\rho(s) = \begin{cases} 2st, & \text{kun } 0 \le s \le \frac{1}{2} \\ (2s-1) + 2t(1-s), & \text{kun } \frac{1}{2} \le s \le 1, \end{cases}$$

joka kuvaa ensimmäisen puolivälin yksikkövälistä I lineaarisesti välille $[0, t]$ ja toisen puolivälin välille $[t, 1]$. Nyt $\widetilde{f_i} \circ \rho$ on määritelty ja avaamalla laskutoimitus saadaan

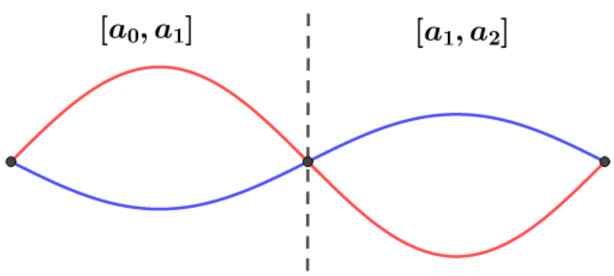
$$(\widetilde{f_i} \circ \rho)(s) = \begin{cases} f(2sa_{i-1}), & \text{kun } 0 \le s \le \frac{1}{2} \\ f(a_i(2s-1) + 2a_{i-1}(1-s)), & \text{kun } \frac{1}{2} \le s \le 1, \end{cases}$$

Tällöin selvästi $\widetilde{f_{i-1}} \cdot f_i = \widetilde{f_i} \circ \rho$, joten lauseen 3.2 nojalla $\widetilde{f_{i-1}} \cdot f_i \simeq \widetilde{f_i}$. Soveltamalla nyt edellistä havaintoa induktio-oletuksen, polkuhomotopian transitiivisuuden ja lauseen 3.4 kanssa saadaan, että

$$\widetilde{f_{i-1}} \cdot f_i \cdot \ldots \cdot f_n \simeq \widetilde{f_i} \cdot f_{i+1} \cdot \ldots \cdot f_n \overset{\text{(IO)}}{\simeq} f,$$

mikä todistaa induktioväitteen. Nyt jos tutkitaan tapausta $i = 1$, niin saadaan että $f \simeq f_1 \cdot \ldots \cdot f_n$, josta seuraa suoraan haluttu tulos $[f] = [f_1] \cdot \ldots \cdot [f_n]$. □

Edellisessä tuloksessa yksikköväli I jaettiin osaväleihin ja näitä osavälejä vastaavista kuvauksen f rajoittumista muodostettiin polkuja lineaaristen kuvausten ϕ_i kautta. Lauseen konkreettinen merkitys on, että ensinnäkin polkuja pystytään muovaamaan yksikkövälin jakoa vastaavien rajoittumien suhteen ja toisekseen, että tällä tavalla muodostetut polut ovat edelleen polkuhomotopisia alkuperäisen polun kanssa.



Kuva 4.5: Kahden osavälin suhteen väännetty polku.

Lause 4.7. *Olkoon $\mathbb{S}^n$ topologinen avaruus, kun $n \geq 2$, $P \in \mathbb{S}^n$ pallon pohjoisnapa ja $f : I \to \mathbb{S}^n$ silmukka minkä tahansa muun kantapisteen suhteen. Tällöin f on polkuhomotopinen jonkin avaruuden $\mathbb{S}^n \setminus \{P\}$ silmukan kanssa.*

Todistus. (Vrt. [2, s. 195]) Olkoon $\{U, V\}$ avaruuden $\mathbb{S}^n$ avoin peite, missä

$$U = \mathbb{S}^n \setminus \{E\} \quad \text{ja} \quad V = \mathbb{S}^n \setminus \{P\},$$

kun $E \in \mathbb{S}^n$ on pallon etelänapa. Nyt koska f on jatkuva kuvaus, $U, V \subset \mathbb{S}^n$ ovat avoimia ja $U \cup V = \mathbb{S}^n$, niin $\{f^{-1}(U), f^{-1}(V)\}$ muodostaa avoimen peitteen yksikkövälille I. Lauseen 4.4 nojalla tälle peitteelle on olemassa jokin Lebesguen luku $\delta > 0$, jonka suhteen voidaan määrittää $m \in \mathbb{Z}_+$ siten, että $\frac{1}{m} < \delta$. Mikäli väli I jaetaan tasaisesti osaväleihin $0 = a_0 < \cdots < a_m = 1$, niin jokaisen osavälin halkaisija on pienempää kuin Lebesguen luku, jolloin f kuvaa jokaisen tällaisen osavälin joko joukkoon U tai V. Jollain osavälin päätepisteellä saattaa kuitenkin päteä $f(a_i) = P$, mikä on jatkon kannalta ongelmallista. Tällöin kuitenkin

$$f([a_{i-1}, a_i]) \not\subset V \quad \text{ja} \quad f([a_i, a_{i+1}]) \not\subset V,$$

joten molempien osavälien kuvan täytyy kuulua joukkoon U. Voidaan siis poistaa ongelmallinen piste a_i, jolloin muodostettu suurempi osaväli $[a_{i-1}, a_{i+1}]$ kuvautuu kokonaisuudessaan joukkoon U. Kun kaikki tällaiset pisteet on poistettu, niin vastaavasti kuin lauseessa 4.6 voidaan määritellä kokoelma polkuja $\{f_1, \ldots, f_n\}$, missä jokainen polku f_i vastaa osavälin $[a_{i-1}, a_i]$ määräämää rajoittumaa polusta f.

Seuraavaksi pitää osoittaa, että jokainen muodostettu polku, jonka kuva on joukossa U on polkuhomotopinen jonkin joukon V polun kanssa. Olkoon f_i jokin tällainen joukon U polku, jolloin aiempien määrittelyjen perusteella $f_i(0) \neq P \neq f_i(1)$, kaikilla $i \in \{1, \ldots, n\}$. Nyt koska $U \approx \mathbb{R}^n$ ja homeomorfismin indusoidut kuvaukset ovat myös homeomorfismeja, niin saadaan $U \setminus \{P\} \approx \mathbb{R}^n \setminus \{a\}$, jollain $a \in \mathbb{R}^n$. Koska $n \geq 2$, niin $\mathbb{R}^n \setminus \{a\}$ on polkuyhtenäinen, joten lauseen 4.4 nojalla myös $U \setminus \{P\}$ on polkuyhtenäinen. Siis tällöin on olemassa polku $\widetilde{f_i} : I \to U \setminus \{P\}$, jolla on samat päätepisteet kuin polulla f_i. Lisäksi koska

$$U \approx \mathbb{R}^n \quad \text{ja} \quad \pi_1(\mathbb{R}^n) = 0,$$

niin lauseesta 3.4 seuraa, että myös $\pi_1(U) = 0$. Nyt koska polkua $\widetilde{f_i}$ voidaan tietysti tarkastella myös joukon U polkuna, niin edellisen nojalla ja vastaavasti kuin esimerkissä 4.2 päättelemällä saadaan, että jokaisella $i \in \{1, \ldots, n\}$ pätee $f_i \simeq \widetilde{f_i}$.

Kokoelmassa $\{f_1, \ldots, f_n\}$ jokainen joukon U polku voidaan korvata vastaavalla joukon V polulla $\widetilde{f_i}$. Polkujen tulo on tällöin edelleen määritelty, ja koska $f_i \simeq \widetilde{f_i}$ jokaisella $i \in \{1, \ldots, n\}$, niin uuden kokoelman polkujen tulo on edelleen määritelty ja lauseen 4.6 nojalla polkuhomotopinen polun f kanssa. Tämä tulo on haluttu polku, jonka kuva ei sisällä pistettä P. □

Huomautus. Rajaus $n \geq 2$ on oleellinen edellisessä tuloksessa, sillä mikäli näin ei olisi, niin $\mathbb{R}^n \setminus \{a\}$ ja vastaavasti myös $U \setminus \{P\}$ olisivat epäyhtenäisiä.

Yllä esitetty tulos yleistyy myös tapaukseen, jossa pohjoisnapa on korvattu millä tahansa muulla pallon pisteellä. Sovelletaan tätä huomiota sekä aiempia tuloksia ja määritetään näiden avulla korkeampiulotteisten pallojen perusryhmä.

Lause 4.8. *Pallo $\mathbb{S}^n$ on yhdesti yhtenäinen, kun $n \geq 2$.*

Todistus. (Vrt. [2, s. 195]) Olkoon $P \in \mathbb{S}^n$ pohjoisnapa ja x mikä tahansa muu piste samassa joukossa. Tällöin jos $f\colon I \to \mathbb{S}^n$ on silmukka kantapisteen x suhteen, niin lauseen 4.8 nojalla f on polkuhomotopinen joukon $\mathbb{S}^n \setminus \{P\}$ silmukan kanssa. Samassa lauseessa todettiin, että $\pi_1(\mathbb{S}^n \setminus \{P\}) = 0$, joten lauseen 3.4 nojalla f on polkuhomotopinen vakiopolun c_x kanssa. Vastaavasti voidaan osoittaa myös minkä tahansa kantapisteen P silmukoille soveltamalla lausetta 4.7 pisteen E suhteen. Siis $\pi_1(\mathbb{S}^n) = 0$. Koska tämä avaruus on lisäksi polkuyhtenäinen, niin se on määritelmän nojalla yhdesti yhtenäinen. □

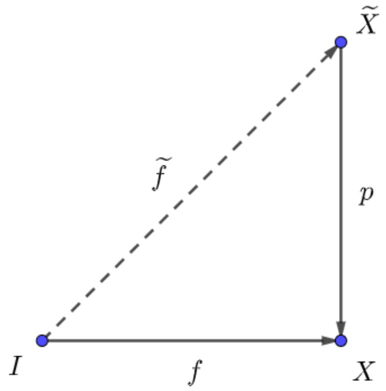
Ollaan siis todistettu edellisen tuloksen kautta, että korkeampiulotteisten pallojen perusryhmä on todella triviaali.

5 Ympyrän perusryhmä

Tarkastellaan tässä luvussa ympyrää $\mathbb{S}^1$ ja osoitetaan, että kyseessä on ensimmäinen tutkittu avaruus, jonka perusryhmä on epätriviaali. Tarkemmin tullaan huomaamaan, että ympyrän perusryhmä on polun $\omega \colon I \to \mathbb{S}^1$,

$$\omega(s) = (cos(2\pi s), sin(2\pi s))$$

virittämä ääretön syklinen ryhmä pisteen $(1, 0)$ suhteen. **Syklisellä ryhmällä** viitataan sellaiseen ryhmärakenteeseen, jossa jokainen tutkitun joukon alkio voidaan määrittää jonkin yksittäisen alkion potensseina ryhmän laskutoimituksen suhteen. Tämän ryhmän jäsenet ovat silmukoita, jotka kulkevat $n \in \mathbb{Z}$ kertaisesti ympyrän ympäri. Tätä lukumäärää kutsutaan silmukan **kierrosluvuksi**.



Kuva 5.1: Polku f ja nosto $\widetilde{f}$

Todistuksessa tulee osoittaa, että jokainen silmukka ympyrässä $\mathbb{S}^1$ kuuluu jonkin yksikäsitteisen kokonaisluvun n määräämään polkuluokkaan $[\omega]^n$. Lisäksi on todistettava, että kaikilla $n \in \mathbb{Z}$ pätee $[\omega]^n = [\omega_n]$, kun

$$\omega_n(s) = (cos(2\pi ns), sin(2\pi ns)).$$

Käytännössä tämä tarkoittaisi, että edellisten päättelyiden nojalla $[\omega]$ virittäisi ympyrän perusryhmän, jolloin jokainen silmukka ympyrässä kuuluisi johonkin sen kokonaislukupotenssin määräämään polkuluokkaan. Koska tällöin polkuluokat $[\omega_n]$ ovat yksikäsitteisiä jokaista kokonaislukua n kohden, niin tämä syklinen ryhmä olisi lisäksi ääretön.

Tämän todistaminen vaatii kuitenkin paljon työtä. Aloitetaan vertailemalla avaruuden $\mathbb{S}^1$ polkuja avaruuden $\mathbb{R}$ polkuihin jatkuvan kuvauksen $p \colon \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$,

$$p(s) = (cos(2\pi s), sin(2\pi s))$$

kautta. Aiemmin määritelty silmukka ω_n on tällöin yhdiste $p \circ \widetilde{\omega}_n$, missä $\widetilde{\omega}_n \colon I \to \mathbb{R}$ on määritelty asettamalla $\widetilde{\omega}_n(s) = ns$. Polkua $\widetilde{\omega}_n$ kutsutaan polun ω_n **nostoksi**. Esitetään seuraavaksi tämän formaali määritelmä.

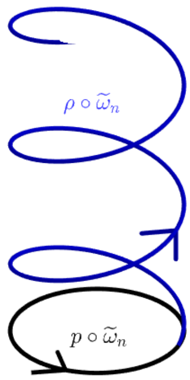
Määritelmä 5.1. Olkoon X, Y, Z topologisia avaruuksia ja $f \colon Z \to X$ sekä $p \colon Y \to X$ jatkuvia kuvauksia. Tällöin jatkuvaa kuvausta $\widetilde{f} \colon Z \to Y$ kutsutaan kuvauksen f nostoksi, mikäli $f = p \circ \widetilde{f}$.

Huomautus. Sanotaan myös, että $\widetilde{f}$ *nostaa* kuvauksen f.

Määritelmä on esitetty yleisessä muodossa, mutta sen ehdot pätevät selkeästi myös edellä esitetyille kuvauksille. Havainnollistetaan nyt aiempaa pohdintaa geometrisesti. Määritellään kuvaus $\rho \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ asettamalla

$$\rho(s) = (cos(2\pi s), sin(2\pi s), s).$$

Tällöin yhdiste $\rho \circ \widetilde{\omega}_n$ piirtää heliksin avaruuteen $\mathbb{R}^3$, jossa kuvaukset kulkevat nyt ympyrärataa heliksin suhteen n kertaa ylöspäin kun $n > 0$ ja alaspäin kun $n < 0$. Aiemmin määritetty kuvaus $p \circ \widetilde{\omega}_n$ on tämän heliksin projektio tasolle $\mathbb{R}^2$. Tutkitut kuvaukset ovat näiden projektioiden määräämiä tason $\mathbb{S}^1$ silmukoita, joiden kierrosluvun $\widetilde{\omega}_n$ määrää.



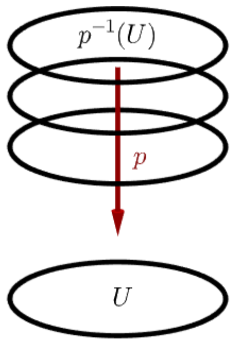
Todistetaan väittämä ympyrän perusryhmästä vasta luvussa 5.2. Sitä ennen täytyy perehtyä vielä peiteavaruuksiin, joiden kautta voidaan johtaa olennaisia nostoihin liittyviä tuloksia.

5.1 Peiteavaruudet

Aloitetaan määrittelemällä peiteavaruus.

Määritelmä 5.2. Olkoon X topologinen avaruus. Topologista avaruutta $\widetilde{X}$ kutsutaan sen peiteavaruudeksi, mikäli on olemassa sellainen jatkuva kuvaus $p\colon \widetilde{X} \to X$, että jokaisella pisteellä $x \in X$ on olemassa ympäristö U, jonka alkukuva $p^{-1}(U)$ on yhdiste toisistaan erillisistä avoimista joukoista $V_i \subset p^{-1}(U)$, joiden määräämät rajoittumakuvaukset $p|_{V_i} : V_i \to U$ ovat homeomorfismeja.

Määritelmän mukaisia joukkoja U kutsutaan **tasaisesti peitetyiksi**. Käytännössä jokaisella peitettävän avaruuden pisteellä on siis ympäristö, joka voidaan peittää tasaisesti sen alkukuvien kautta siten, että ne muodostavat toisistaan pistevieraat lokaalit homeomorfismit takaisin joukkoon U.



Tämän luvun kannalta merkityksellistä on, että $\mathbb{R}$ varustettuna luvun alussa määritellyllä kuvauksella p on avaruuden $\mathbb{S}^1$ peiteavaruus. Seuraava tulos on ekvivalentti tämän kanssa.

Lause 5.1. *Olkoon $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ jatkuva kuvaus, jolla $p(s) = (cos(2\pi s), sin(2\pi s))$. Tällöin jokaisella pisteellä $x \in \mathbb{S}^1$ on tasaisesti peitetty ympäristö.*

Todistus. Oletetaan ensin, että $x \neq (1,0)$. Tällöin joukko $\mathbb{S}^1 \setminus \{(1,0)\}$ on avoin ympäristö pisteelle x. Alkukuva

$$p^{-1}(\mathbb{S}^1 \setminus \{(1,0)\}) = \{]n, n+1[\ \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

on selvästi pistevieras yhdiste avoimia joukkoja avaruudessa $\mathbb{R}$, joiden rajoittumat kuvauksen p suhteen ovat lokaaleja homeomorfismeja.

Oletetaan sitten, että $x = (1,0)$. Tällöin joukko $U = \{(x,y) \in \mathbb{S}^1 \mid x > 0\}$ on avoin ympäristö pisteelle x. Tämän ympäristön alkukuva

$$p^{-1}(U) = \{\left]-\tfrac{1}{4} + n, \tfrac{1}{4} + n\right[\ \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

on jälleen pistevieras yhdiste avoimia joukkoja avaruudessa $\mathbb{R}$, joiden rajoittumat kuvauksen p suhteen ovat lokaaleja homeomorfismeja. $\square$

Osoitetaan seuraavaksi tuloksia liittyen polkujen sekä polkuhomotopioiden nostamiseen. Esitetään kuitenkin ensin yleisempi tulos, jonka avulla jäljelle jäävien tulosten todistaminen onnistuu melko helposti.

Lause 5.2. *Olkoon X, Y topologisia avaruuksia, $\widetilde{X}$ avaruuden X peiteavaruus ja $F\colon Y \times I \to X$ jatkuva kuvaus. Nyt jos $\widetilde{F}\colon Y \times \{0\} \to \widetilde{X}$ on nosto rajoittumalle $F|_{Y\times\{0\}}$, niin on olemassa tätä vastaava yksikäsitteinen nosto $\widetilde{F}\colon Y \times I \to \widetilde{X}$ kuvaukselle F.*

Todistus. (Vrt. [1, s. 30-31]) Rakennetaan aluksi kuvauksen rajoittuman nosto määrittelyalueella $N \times I$, missä N on jokin pisteen $y \in Y$ ympäristö. Todistuksen aluksi täytyy kuitenkin tehdä hieman alustavaa työtä muodostamalla määrittelyalueen suhteen sopivat tarkasteluvälit, joiden kautta voidaan rakentaa haluttu nosto osittain. Aloitetaan tarkastelemalla avaruutta X. Koska $\widetilde{X}$ on sen peiteavaruus, niin jokaisella pisteellä $x \in X$ on olemassa tasaisesti peitetty ympäristö peiteavaruuden varustetun kuvauksen $p\colon \widetilde{X} \to X$ suhteen. Tämän nojalla kuvauksen F jatkuvuudesta seuraa, että jokaisella pisteellä $(y, t) \in Y \times I$ on ympäristö $N_t \times]a, b[$, jonka kuva $F(N_t \times]a, b[)$ sisältyy pisteen $F(y, t) \in X$ tasaisesti peitettyyn ympäristöön U_i. Nämä joukot $N_t \times]a, b[$ muodostavat avoimen peitteen avaruudelle $\{y\} \times I$, ja koska tämä avaruus on kompakti, niin äärellisen monta tällaista joukkoa peittävät sen. Nyt koska I on lisäksi kompakti metrinen avaruus, niin lauseen 4.4 nojalla tälle peitteelle on olemassa Lebesguen luku, jonka avulla voidaan muodostaa välin jako

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$$

siten, että jokainen osaväli $[t_i, t_{i+1}]$ sisältyy johonkin aiemmin määritellyistä väleistä $]a, b[$. Tutkitaan vielä tätä jakoa vastaavaa joukkoa $N = \cap N_t$. Tälle joukolle pätee, että

- $N \neq \emptyset$, sillä ainakin $(y, t) \in N$,
- $N \subset N_t$, kaikilla joukoilla N_t,
- N on äärellisen monen avoimen joukon yhdisteenä avoin.

Näiden huomioiden nojalla voidaan korvata jokainen joukko N_t joukolla N siten, että joukkojen $N \times [t_i, t_{i+1}]$ kuvat sisältyvät edelleen aikaisempien joukkojen kuvia vastaaviin tasaisesti peitettyihin ympäristöihin U_i jokaisella $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$.

Muodostetaan seuraavaksi nosto määrittelyalueella $N \times I$ käyttämällä määriteltyä rajoittuman $F|_{Y\times\{0\}}$ nostoa $\widetilde{F}$. Tehdään tämä induktiivisesti jokaista osaväliä $[0, t_i]$ kohden, missä $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$, ja jossa jokainen t_i vastaa aiemmin määriteltyjen osavälien päätepisteitä. Aloitetaan arvosta 0, jolloin tutkitaan joukkoa $N \times \{0\}$. Koska $\widetilde{F}$ on nosto rajoittumalle $F|_{Y\times\{0\}}$, niin se on triviaalisti sitä myös rajoittumalle $F|_{N\times\{0\}}$. Oletetaan sitten, että ollaan muodostettu nosto

$$\widetilde{F}_i\colon N \times [0, t_i] \to \widetilde{X}$$

rajoittumalle $F|_{N\times[0,t_i]}$, missä $i \in \{0, 1, \ldots n-1\}$. Nyt aiempien päättelyiden nojalla $F(N \times [t_i, t_{i+1}]) \subset U_i$, kun $U_i \subset X$ on pisteen $F(y, t_i)$ tasaisesti peitetty ympäristö.

Tälle ympäristölle on olemassa sellainen joukko $\widetilde{U}_i \subset \widetilde{X}$, joka sisältää pisteen $\widetilde{F}_i(y, t_i)$ ja kuvautuu homeomorfisesti takaisin joukkoon U_i peiteavaruuden kuvauksen p kautta. Korvataan nyt joukko N sitä mahdollisesti pienemällä pisteen y ympäristöllä tekemällä leikkaus

$$(N \times \{t_i\}) \cap (\widetilde{F}_i^{-1}(\widetilde{U}_i)),$$

joka on epätyhjä, sillä $(y, t_i) \in \widetilde{F}_i^{-1}(\widetilde{U}_i)$. Käytetään leikkauksen kautta muodostetusta pisteen y ympäristöstä edelleen merkintää N. Tällöin muodostetulle joukolle $N \times \{t_i\}$ pätee $\widetilde{F}_i(N \times \{t_i\}) \subset \widetilde{U}_i$. Määritellään nyt kuvaus $\widetilde{F}_{i+1}\colon N \times [t_i, t_{i+1}] \longrightarrow \widetilde{X}$ asettamalla

$$\widetilde{F}_{i+1}(s) = (p_i^{-1} \circ F)(s),$$

missä $p_i^{-1}\colon U_i \longrightarrow \widetilde{U}_i$ on peiteavaruuden kuvauksen p rajoittuman käänteiskuvaus. Kuvaus $\widetilde{F}_{i+1}$ on hyvinmääritelty, jatkuvien kuvausten yhdisteenä jatkuva ja sille pätee

$$F|_{N \times [t_i, t_{i+1}]}(s) = p \circ \widetilde{F}_{i+1}(s),$$

joten se on kuvauksen F nosto määrittelyalueen $N \times [t_i, t_{i+1}]$ suhteen. Nyt koska lisäksi

$$\widetilde{F}_i(N \times \{t_i\}) = \widetilde{F}_{i+1}(N \times \{t_i\}),$$

niin kuvaukset voidaan yhdistää jatkuvaksi kuvaukseksi koko alueella $N \times [0, t_{i+1}]$. Tämä kuvaus on edellisten päättelyiden nojalla rajoittuman $F|_{N \times [0, t_{i+1}]}$ nosto. Koska osavälejä on rajallinen määrä, niin toistamalla tätä operaatiota saadaan lopulta muodostettua nosto $\widetilde{F}$ koko määrittelyalueelle $N \times I$.

Osoitetaan sitten noston yksikäsitteisyys erikoistapauksessa, jossa Y on piste. Tällöin Y voidaan jättää merkinnästä kokonaan pois ja ajatella kuvausta tavallisena polkuna $F\colon I \longrightarrow X$. Oletetaan siis, että $\widetilde{F}$ ja $\widetilde{F}'$ ovat nostoja kuvaukselle F siten, että $\widetilde{F}(0) = \widetilde{F}'(0)$. Todistetaan tämäkin tapaus induktiivisesti osoittamalla, että $\widetilde{F} = \widetilde{F}'$ jokaisella välillä $[0, t_i]$ aloittaen pisteestä $\{0\}$, kun arvot t_i ovat aiemmin määriteltyjen osavälien päätepisteitä. Alkuaskel on triviaali oletuksen nojalla, joten siirrytään suoraan induktioaskeleeseen olettamalla, että $\widetilde{F} = \widetilde{F}'$ jollain välillä $[0, t_i]$, kun $i \in \{0, \ldots, n-1\}$. Nyt koska $F([t_i, t_{i+1}]) \subset U_i$, missä $U_i \subset X$ on tasaisesti peitetty, niin alkukuva $p^{-1}(U_i)$ muodostuu toisistaan erillistä joukoista $\widetilde{U}_i$, joista jokainen kuvautuu lokaalisti homeomorfisesti takaisin joukkoon U_i kuvauksen p kautta. Koska $\widetilde{F}$ on nosto, niin sille täytyy nyt päteä, että sen kuva $\widetilde{F}([t_i, t_{i+1}])$ sisältyy näihin joukkoihin $\widetilde{U}_i$. Nyt kuitenkin koska $\widetilde{F}$ on jatkuva kuvaus, niin yhtenäisen joukon $[t_i, t_{i+1}]$ kuva $\widetilde{F}([t_i, t_{i+1}])$ on myös yhtenäinen. Koska joukot $\widetilde{U}_i$ ovat toisistaan erilliset, niin tällöin täytyy päteä, että kuva sisältyy täsmälleen yhteen näistä joukoista. Vastaavasti voidaan osoittaa, että sama pätee myös kuvalle $\widetilde{F}'([t_i, t_{i+1}])$. Induktio-oletuksen nojalla $\widetilde{F}(t_i) = \widetilde{F}'(t_i)$, joten molempien nostojen kuvaus määrittelyalueelta $[t_i, t_{i+1}]$ sisältyy välttämättä samaan joukkoon $\widetilde{U}_i$. Nyt koska p on lokaali homeomorfismi $\widetilde{U}_i \mapsto U_i$, niin se on tietenkin myös injektio. Siis koska tällä välillä pätee $p \circ \widetilde{F} = p \circ \widetilde{F}'$, niin tällöin myös $\widetilde{F} = \widetilde{F}'$. Yhdistämällä tämä induktio-oletukseen saadaan, että väite pätee välillä $[0, t_{i+1}]$, mikä todistaa induktioväitteen.

Muodostetaan lopuksi nosto koko määrittelyalueelle $Y \times I$ yhdistämällä muodostetut rajoittumia $N \times I$ vastaavat nostot. Oletetaan, että $\widetilde{F}\colon N_1 \times I \longrightarrow \widetilde{X}$ ja

$\widetilde{F}'\colon N_2 \times I \to \widetilde{X}$ ovat kuvauksen F nostoja vastaavilta määrittelyalueiltaan kuten aiemmissa päättelyissä. Nyt jos $y \in N_1 \cap N_2$, niin koska edellisten päättelyiden nojalla joukon $\{y\} \times I$ nosto on yksikäsitteinen, niin tällöin täytyy päteä $\widetilde{F}(y,t) = \widetilde{F}'(y,t)$ kaikilla $t \in I$. Siis muodostetut nostot saavat saman arvon, kun määrittelyalueet risteävät ja ne voidaan täten siis yhdistää hyvinmääritellyksi, jatkuvaksi ja yksikäsitteiseksi kuvaukseksi koko alueella $Y \times I$. □

Edellinen tulos sanoo, että jokainen alkupisteensä suhteen määritelty nosto määrittää yksikäsitteisen noston koko tarkasteluvälille. Lauseen ehdot täyttävällä kuvauksella saattaa toki olla muitakin nostoja, mutta tällöin niillä on eri alkupiste. Rajaus alkupisteen suhteen on välttämätön, sillä muuten olisi mahdollista rakentaa "nostoja", jotka peiteavaruuksien luonteen vuoksi saattaisivat saada saman kuvan useammassa eri pisteessä. Tällöinhän kyseessä ei olisi edes kuvaus! Tutkitaan seuraavaksi asiaa tarkemmin polkujen ja polkuhomotopioiden nostamisen saralla.

Lause 5.3. *Olkoon X topologinen avaruus, $\widetilde{X}$ sen peiteavaruus varustettuna kuvauksella $p\colon \widetilde{X} \to X$ ja $f\colon I \to X$ pisteestä x_0 alkava polku. Tällöin jokaista pistettä $\widetilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$ vastaa yksikäsitteinen kuvaus $\widetilde{f}\colon I \to \widetilde{X}$, joka nostaa polun f.*

Todistus. (Vrt. [1, s. 30]) Olkoon $\widetilde{x}_0$ mielivaltainen piste joukossa $p^{-1}(x_0)$. Jokaiselle tällaiselle pisteelle voidaan määrittää kuvaus $\widetilde{f}\colon \{0\} \to \widetilde{X}$, jolla $\widetilde{f}(s) = \widetilde{x}_0$. Tämä kuvaus on selkeästi hyvinmääritelty, jatkuva ja sille pätee $f(0) = (p \circ \widetilde{f})(0)$, joten se nostaa kuvauksen f rajoitettuna määrittelyalueen pisteeseen $\{0\}$. Soveltamalla nyt lausetta 5.2 tähän nostoon sekä kuvaukseen f erikoistapauksessa, jossa Y on yksittäinen piste saadaan pistettä $\widetilde{x}_0$ vastaava yksikäsitteinen nosto $\widetilde{f}\colon I \to \widetilde{X}$. □

Lause 5.4. *Olkoon X topologinen avaruus, $\widetilde{X}$ sen peiteavaruus varustettuna kuvauksella $p\colon \widetilde{X} \to X$ ja $f_t\colon I \to X$ polkuhomotopia sellaisten polkujen välillä, joiden alkupiste on x_0. Tällöin jokaista pistettä $\widetilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$ vastaa yksikäsitteinen polkuhomotopia $\widetilde{f}_t\colon I \to \widetilde{X}$, joka nostaa polkuhomotopian f_t.*

Todistus. (Vrt. [1, s. 30]) Polkuhomotopiaa f_t vastaa kuvaus $F\colon I \times I \to X$, missä $F(s,t) = f_t(s)$ kaikilla $s,t \in I$. Tutkitaan aluksi rajoittumaa $F|_{I\times\{0\}}$. Tätä rajoittumaa voidaan ajatella tavallisena polkuna, joten lauseen 5.3 nojalla sitä vastaa alkupisteen $\widetilde{x}_0$ suhteen määritelty yksikäsitteinen nosto $\widetilde{F}\colon I \times \{0\} \to \widetilde{X}$. Soveltamalla lausetta 5.2 tähän nostoon sekä kuvaukseen F saadaan samaa alkupistettä vastaava yksikäsitteinen nosto $\widetilde{F}\colon I \times I \to \widetilde{X}$. Nyt koska F on polkuhomotopia, niin rajoittumat $F|_{\{0\}\times I}$ ja $F|_{\{1\}\times I}$ ovat vakiokuvauksia. Näitä rajoittumia vastaavat nostot $\widetilde{F}|_{\{0\}\times I}$ ja $\widetilde{F}|_{\{1\}\times I}$ ovat lauseen 5.3 nojalla yksikäsitteisiä, joten myös niiden on oltava vakiokuvauksia. $\widetilde{F}$ on lisäksi jatkuva kuvaus, joten kyseessä on selkeästi polkujen $\widetilde{F}|_{I\times\{0\}}$ ja $\widetilde{F}|_{I\times\{1\}}$ välinen polkuhomotopia. Tämä polkuhomotopia on aiempien päättelyiden nojalla yksikäsitteinen, vastaa alkupistettä $\widetilde{x}_0$ ja nostaa polkuhomotopian F. Siis myös tätä vastaava kuvaus $\widetilde{f}_t\colon I \to \widetilde{X}$, jolla $\widetilde{f}_t(s) = \widetilde{F}(s,t)$ kaikilla $s,t \in I$, on alkupisteen $\widetilde{x}_0$ suhteen yksikäsitteinen polkuhomotopia, joka nostaa kuvauksen f_t. □

5.2 Ympyrän perusryhmä

Luvun alustuksessa väitettiin, että $[\omega_n] = [\omega]^n$. Tämä huomio on oleellinen ympyrän perusryhmän määrittämisessä ja vaatii tarkempaa perustelua.

Lause 5.5. *Olkoon ω, $\omega_n \colon I \to \mathbb{S}^1$ aiempien määrittelyjen mukaisia silmukoita. Tällöin $[\omega_n] = [\omega]^n$, missä $n \in \mathbb{Z}$.*

Todistus. Todistetaan aluksi induktiolla luvun $n \in \mathbb{N}$ suhteen, että väite pätee luonnollisilla luvuilla. Tapaukset $n = 0$ ja $n = 1$ ovat triviaaleja. Tehdään induktio-oletus, että $[\omega_n] = [\omega]^n$, jollain arvolla $n \in \mathbb{N}$ ja väitetään, että myös $[\omega_{n+1}] = [\omega]^{n+1}$. Muodostetaan aluksi välin I jako $0 < \frac{n}{n+1} < 1$ ja määritellään tätä vastaavat jatkuvat lineaariset kuvaukset $\phi_n \colon I \to [0, \frac{n}{n+1}]$ sekä $\phi_{n+1} \colon I \to [\frac{n}{n+1}, 1]$, joilla

$$\phi_n(s) = \frac{ns}{n+1} \quad \text{ja} \quad \phi_{n+1}(s) = \frac{n+s}{n+1}.$$

On helppo nähdä, että tällöin $\omega_n = \omega_{n+1} \circ \phi_n$ ja $\omega = \omega_{n+1} \circ \phi_{n+1}$. Nyt soveltamalla lausetta 4.6 sekä induktio-oletusta saadaan, että

$$[\omega_{n+1}] = [\omega_n] \cdot [\omega] \overset{\text{(IO)}}{=} [\omega]^n \cdot [\omega] = [\omega]^{n+1},$$

mikä todistaa induktioväitteen, joten väite pätee luonnollisille luvuille. Huomataan lisäksi, että $\overline{\omega}_n = \omega_{-n}$. Siis tällöin $[\omega_{-n}]$ on polkuluokan $[\omega_n]$ käänteisalkio. Nyt koska $[\omega]^{-n}$ on lisäksi polkuluokan $[\omega]^n$ käänteisalkio, niin esimerkkiä 3.2 soveltamalla saadaan, että

$$[\omega_n] = [\omega]^n \iff [\overline{\omega}_n] = [\overline{\omega}]^n \iff [\omega_{-n}] = [\omega]^{-n}.$$

Siis väite on voimassa myös negatiivisille kokonaisluvuille. Yhdistämällä tämä aiempiin päättelyihin saadaan, että väite pätee kaikilla kokonaisluvuilla. □

Melko mittavan pohjustuksen jälkeen ollaan viimein valmiita todistamaan luvun alussa esitetty väittämä ympyrän perusryhmästä soveltamalla edellisiä tuloksia.

Lause 5.6. *Ympyrän perusryhmä $\pi_1(\mathbb{S}^1)$ on silmukan $\omega \colon I \to \mathbb{S}^1$,*

$$\omega(s) = (cos(2\pi s), sin(2\pi s))$$

polkuluokan $[\omega]$ virittämä ääretön syklinen ryhmä.

Todistus. (Vrt. [1, s. 30]) Aloitetaan todistus osoittamalla, että jokainen silmukka ympyrässä on polkuhomotopinen jonkin silmukan ω_n kanssa, missä n on tämän silmukan kierroslukua vastaava kokonaisluku. Olkoon $f \colon I \to \mathbb{S}^1$ silmukka kantapisteen $x_0 = (1, 0)$ suhteen, eli $[f] \in \pi_1(\mathbb{S}^1, x_0)$. Lauseen 5.3 nojalla silmukalle on olemassa alkupisteiden $m \in \mathbb{Z}$ suhteen yksikäsitteinen nosto $\widetilde{f} \colon I \to \mathbb{R}$. Valitaan näiden nostojen joukosta sellainen, joka alkaa pisteestä 0. Nyt koska

$$(p \circ \widetilde{f})(1) = x_0 \quad \text{ja} \quad p^{-1}(x_0) = \mathbb{Z},$$

niin loppupisteelle täytyy päteä $\widetilde{f}(1) = n \in \mathbb{Z}$. Tällöin $\widetilde{f}$ on polku pisteestä 0 pisteeseen n. Kuitenkin myös $\widetilde{\omega}_n : I \to \mathbb{R}$, $\widetilde{\omega}(s) = ns$ on polku, jolla on samat päätepisteet ja $\widetilde{f} \simeq \widetilde{\omega}_n$ lineaarisen polkuhomotopian $(1-t)\widetilde{f} + t\widetilde{\omega}_n$ kautta. Tämän nojalla myös

$$f = p \circ \widetilde{f} \simeq p \circ \widetilde{\omega}_n = \omega_n$$

kuvauksen p ja edellisen lineaarisen polkuhomotopian yhdisteen muodostaman polkuhomotopian kautta. Siis $[f] = [\omega_n]$.

Osoitetaan sitten, että luvun $n \in \mathbb{Z}$ määräämä polkuluokka $[\omega_n]$ on yksikäsitteinen. Tehdään tämä olettamalla, että $f \simeq \omega_n$ ja $f \simeq \omega_m$, jolloin myös $\omega_n \simeq \omega_m$. Tällöin on olemassa polkuhomotopia $f_t : I \to \mathbb{S}^1$, jolla pätee

$$f_0(s) = \omega_m(s) \quad \text{ja} \quad f_1(s) = \omega_n(s),$$

kaikilla $s \in I$. Lauseen 5.4 nojalla on olemassa yksikäsitteinen polkuhomotopia $\widetilde{f_t} : I \to \mathbb{R}$, joka nostaa polkuhomotopian f_t, ja jonka esittämät polut alkavat pisteestä $k \in \mathbb{Z}$. Valitaan näiden nostojen joukosta sellainen, jolla $\widetilde{f_t}(0) = 0$, kaikilla $t \in I$. Erityisesti nyt $\widetilde{f_0}$ on kuvauksen ω_m ja $\widetilde{f_1}$ kuvauksen ω_n nosto. Nämä nostot alkavat pisteestä 0, ja lauseen 5.3 nojalla nostot ovat yksikäsitteisiä alkupisteensä suhteen; siis täytyy päteä

$$\widetilde{f_0} = \widetilde{\omega}_m \quad \text{ja} \quad \widetilde{f_1} = \widetilde{\omega}_n,$$

sillä tiedetään, että myös $\widetilde{\omega}_m$ ja $\widetilde{\omega}_n$ ovat pisteestä 0 lähtevät, yksikäsitteiset nostot kuvauksille ω_m ja ω_n. Koska $\widetilde{f_t}$ on polkuhomotopia, niin loppupiste $\widetilde{f_t}(1)$ on riippumaton arvosta t. Nyt

$$\widetilde{f_0}(1) = m \quad \text{ja} \quad \widetilde{f_1}(1) = n$$

ja loppupisteet $\widetilde{f_t}(1)$ ovat staattisia kaikilla $t \in I$, joten $m = n$. Siis luku n on todella yksikäsitteinen.

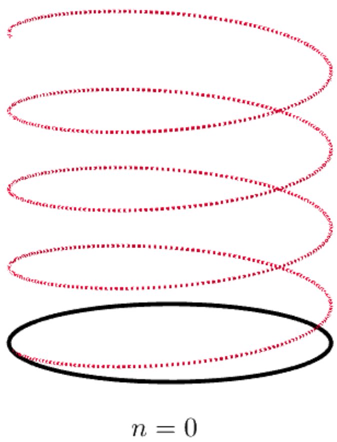
Osoitetaan lopuksi, että polkuluokka $[\omega]$ virittää ympyrän perusryhmän. Mikäli $[f] \in \pi_1(\mathbb{S}^1, x_0)$, niin edellisten päättelyiden nojalla sille täytyy päteä $[f] = [\omega_n]$, jollain $n \in \mathbb{Z}$. Lisäksi lauseessa 5.5 todistettiin, että kaikilla kokonaisluvuilla n pätee $[\omega_n] = [\omega]^n$. Toisin sanoen jokainen perusryhmän jäsen voidaan esittää polkuluokan $[\omega]$ kokonaislukupotensseina, joten ympyrän perusryhmä on tämän polkuluokan virittämä syklinen ryhmä. Koska $[\omega]^n \in \pi_1(\mathbb{S}^1, x_0)$ kaikilla $n \in \mathbb{Z}$, ja jokainen kierrosluvun n määräämä polkuluokka on yksikäsitteinen, niin tämä syklinen ryhmä on lisäksi ääretön. □

Huomautus. Tulos on esitetty usein myös isomorfismina $(\mathbb{Z}, +) \cong (\pi_1(\mathbb{S}^1), \cdot)$. Käytännössä tämä tarkoittaa aivan samaa asiaa: jokaista ympyrän perusryhmän jäsentä vastaa yksikäsitteinen kokonaisluku n, ja sen jäsenten välistä tuloa vastaava kokonaisluku on sama kuin niitä vastaavien kokonaislukujen summa.

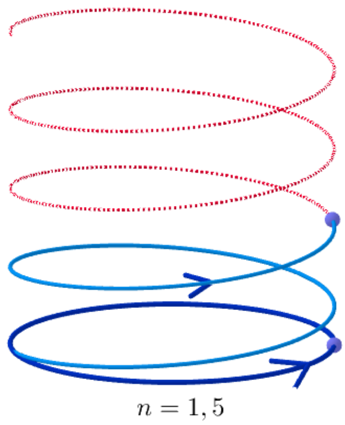
Perehdytään vielä hieman tarkemmin edellisen lauseen merkitykseen. Ensinnäkin tuloksen nojalla jokainen ympyrän silmukka on polkuhomotopinen jonkin yksikäsitteisen kertaluvun $n \in \mathbb{Z}$ määräämän silmukan ω_n kanssa. Tutkittu silmukka voi tietenkin kulkea ympyrää myötä- tai vastapäivään ja vaihtaa suuntaa samassa jatkuvassa kuvauksessa. Kuitenkin silmukkana se palaa lopuksi alkupisteeseensä. Mikäli nyt ajatellaan jokaista vastapäivään kuljettua kierrosta positiivisena ja myötäpäivään kuljettua kierrosta negatiivisena, niin laskemalla nämä yhteen saadaan luku $n \in \mathbb{Z}$, joka kuvaa kuinka monta kertaa ja mihin suuntaan silmukka on kiertänyt ympyrän suhteessa alkuperäiseen. Tämä luku on jo aiemmin mainittu silmukan kierrosluku, joka määrää minkälaiseen ympyrän polkuluokkaan tämä silmukka kuuluu. Asiaa voi visualisoida jälleen alustuksessa esitetyn heliksin avulla, jossa jokainen positiivinen kierrosluku vie polkua ylöspäin heliksissä ja negatiivinen kierroslukumäärä siinä alaspäin. Seuraavan esimerkin on tarkoitus havainnollistaa asiaa konkreettisemmin.

Esimerkki 5.1. Olkoon $f\colon I \to \mathbb{S}^1$ silmukka, jolla

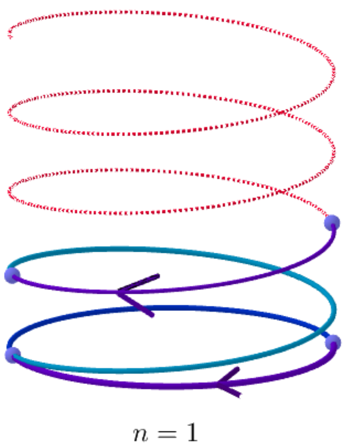
$$f(s) = \begin{cases} (cos(4\pi s), sin(4\pi s)), & \text{kun } 0 \leq s \leq \frac{3}{4} \\ (cos(4\pi s), -sin(4\pi s)), & \text{kun } \frac{3}{4} < s \leq 1. \end{cases}$$



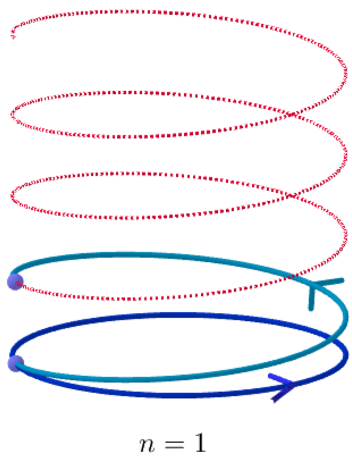
(a) Alkutilanne esimerkissä 5.1



(b) Kuvaus kulkee aluksi heliksiä 1,5 kierrosta ylöspäin



(c) Sitten 0,5 kierrosta alaspäin



(d) Lopullinen kierroslukumäärä on $n = 1$

Tämä kuvaus on selkeästi hyvin määritelty silmukka ympyrässä $\mathbb{S}^1$ kantapisteen $(1,0)$ suhteen. Visuaalisesti tämä silmukka kulkee aluksi ympyrän kerran vastapäivään ympäri välillä $\left[0,\frac{1}{2}\right]$, sitten vastapäivään ympyrän puoliväliin saakka välillä $\left[\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right]$ ja kulkee lopuksi takaisin pisteeseen (1,0) myötäpäivään puoliympyrää pitkin välillä $\left[\frac{3}{4},1\right]$. Trigonometristen muunnoskaavojen avulla voidaan osoittaa, että jatkuva kuvaus $\widetilde{f}\colon I \to \mathbb{R}$

$$\widetilde{f}(s) = \begin{cases} 2s, & \text{kun } 0 \le s \le \frac{3}{4} \\ 3-2s, & \text{kun } \frac{3}{4} < s \le 1. \end{cases}$$

on silmukan nosto, joka alkaa pisteestä 0 ja päättyy pisteeseen 1. Lauseen 5.6 nojalla siis $f \simeq \omega_1$, joten tämän silmukan kierrosluku on 1.

Ympyrän perusryhmällä on useita suoria ja merkittäviä seurauksia. Todistetaan tekstin lopuksi näistä yksi osoittamalla algebran peruslause edellisten tulosten avulla.

Lause 5.7. *Jos ei-vakiolla polynomilla on kompleksilukukertoimisia termejä, niin sillä on myös juuria kompleksilukujen joukossa.*

Todistus. (Vrt. [1, s. 31]) Koska polynomi on supistettavissa korkeimman termin kertoimen suhteen, voidaan tarkastella muotoa $p(z) = z^n + a_i z^{n-1} + \cdots + a_n$ olevaa polynomia. Oletetaan, että tällä polynomilla ei ole juuria joukossa $\mathbb{C}$. Tutkittua polynomia voidaan ajatella kuvauksena kompleksiavaruudesta kompleksiavaruuteen. Tämä kuvaus on jatkuva eikä oletuksen nojalla sisällä juuria, joten se kuvaa jokaisen kompleksiavaruuden ympyrän $|z| = r$, $r \ge 0$ silmukaksi. Jokaista tällaista sädettä r kohden voidaan määritellä kuvaus $f_r(s)\colon I \to \mathbb{C}$, jolla

$$f_r(s) = \frac{p(re^{2\pi i s})/p(r)}{\left|p(re^{2\pi i s})/p(r)\right|}.$$

Tämä kuvaus on hyvinmääritelty, jatkuva ja sille pätee $|f_r(s)| = 1$ kaikilla $s \in I$. Siis $f_r(s) \in \mathbb{S}^1$. Edelleen, koska $f_r(0) = 1$ ja $f_r(1) = 1$, niin kuvaus muodostaa avaruuden $\mathbb{S}^1$ silmukan kantapisteen $x = (1,0)$ suhteen. Nyt jos $r, r' \ge 0$ ja $r \ge r'$, niin jokaisen kuvauksen f_r ja $f_{r'}$ välille voidaan muodostaa polkuhomotopia sopivan jatkuvan lineaarisen kuvauksen $I \mapsto [r', r]$ kautta soveltamalla edellä määriteltyä kuvausta. Koska f_0 on vakiosilmukka, niin edellisen nojalla voidaan päätellä, että $[f_r] = 0$ kaikilla arvoilla r.

Kiinnitetään sitten sellainen arvo r, joka on suurempaa kuin $|a_1| + \cdots + |a_n|$ ja suurempaa kuin 1. Tällöin jos rajoitutaan tutkimaan ympyrää $|z| = r$, niin

$$|z^n| > (|a_1| + \cdots + |a_n|)\left|z^{n-1}\right| > \left|a_1 z^{n-1}\right| + \cdots + |a_n| \ge \left|a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n\right|.$$

Välitön seuraus tästä on, että polynomilla $p_t(z) = z^n + t(a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n)$ ei ole juuria ympyrässä $|z| = r$, kun $0 \le t \le 1$. Määritellään nyt kiinnitetyn säteen r suhteen kuvaus $F_r\colon I \times I \to \mathbb{C}$ asettamalla

$$F_r(s,t) = \frac{p_t(re^{2\pi i s})/p_t(r)}{\left|p_t(re^{2\pi i s})/p_t(r)\right|}.$$

Tämä kuvaus on hyvinmääritelty, jatkuva ja sille pätee

$$F_r(s, 0) = \omega_n(s) \quad \text{sekä} \quad F_r(s, 1) = f_r(s),$$

kaikilla $s \in I$ sekä

$$F_r(0, t) = 1 \quad \text{sekä} \quad F_r(1, t) = 1,$$

kaikilla $t \in I$, joten F_r muodostaa polkuhomotopian $\omega_n \simeq f_r$. Lauseen 5.6 nojalla polkuluokka $[\omega_n]$ on äärettömän syklisen ryhmän $\pi(\mathbb{S}^1)$ n-kertainen virittäjä. Kuitenkin $[\omega_n] = [f_r] = 0$, joten edellisen huomion perusteella täytyy päteä $n = 0$, sillä $[\omega_n] \neq 0$ kaikilla muilla arvoilla $n \in \mathbb{Z}$. Aiempien päättelyiden nojalla polynomin p aste on tällöin 0, joten se on vakiopolynomi. Siis mikäli polynomi on oletuksen mukainen ei-vakio polynomi, niin sillä täytyy olla vähintään yksi juuri joukossa $\mathbb{C}$. □

Huomautus. Todistuksessa tehty rajaus $r > 1$ on oleellinen: mikäli näin ei olisi, niin tällöin $|z^n| \geq |z^{n+1}|$, kaikilla $n \in \mathbb{N}$ ja

$$(|a_1| + \cdots + |a_n|) \left|z^{n-1}\right| \leq \left|a_1 z^{n-1}\right| + \cdots + |a_n|,$$

eikä polynomin p_t muodostusta edeltävä päättely olisi silloin pätevä. Tästä seuraisi, että polynomilla saattaisi hyvinkin olla nollakohtia, eikä kuvaus F_r olisi välttämättä hyvinmääritelty.

Lähteet

[1] Hatcher, A. *Algebraic Topology*. Cambridge: Cambridge University Press, 2002.

[2] Lee, J.M. *Introduction to topological manifolds, 2nd edition*. New York: Springer, 2011.