대수의 법칙을 프로그램으로 실행시켜보기

책 제목 : Newton HIGHLIGHT 88 통계와 확률의 원리 기본 원리와 응용 사례 30
참가자 : 2090 강실한, 21105 김서진, 21108 김지섭

요약

본 연구는 대수의 법칙을 이용하여 동전을 n번 던졌을 때 앞, 뒤가 나오는 비율이 정말로 1 : 1인지 비율을 구하는 프로그램을 작성해보고 실행시켜보는 연구이다.
또한 확률론과 통계학에서 중요한 정리중의 하나인 대수의 법칙을 다루고 있다
이번 연구를 통해서 우리는 대수의 법칙이 무엇인지, 어디에 활용되는지 등을 자세히 알고 우리의 전공과 관련된 프로그래밍을 경험하며 실력을 쌓는 뜻 깊은 경험을 할 수 있다.

Ⅰ 서론

본 조사는 '뉴턴 하이라이트 확률과 통계의 원리'라는 책과 대수의 법칙 관련 논문을 참고하였다. 먼저 우리는 대수의 법칙에 대하여 조사를 하였고 그로부터 얻은 지식을 어디에 사용할 수 있을지 궁리해보았다. 그러다가 동전을 1000번 이상 던졌을 때 앞면과 뒷면이 나오는 비율이 정말로 1 : 1이 되는지 궁금해졌다. 실제로 해보려고도 했는데 그러기에는 비효율적이며 우리가 있었기에 우리의 전공을 살려서 프로그램을 만들어 이를 증명해보고자 한다.

Ⅱ 본론

1. 대수의 법칙

대수의 법칙이란 표본의 크기가 충분히 클 때 표본의 평균이 기대되는 평균에 수렴하게 되는 조건을 보여주는 정리로, 성공률 p값을 모르는 경우에 시행횟수 n을 크게 하면 n번의 반복실험에서 성곡의 상대도수를 측정하여 성공확률 p값을 추정할 수 있음을 이론적으로 설명해주고 있어 상대도수적 관점에서의 확률에 대하여 이론적인 근거를 제공하며 표본의 크기가 충분히 클 때 표본 집단의 표본평균과 표본비율을 이용하여 모집단에 대한 모평균 또는 모비율을 추정할 수 있음을 보여준다. 쉽게 말해서 '어떤 시행에서 사건 A가 일어날 수학적 확률이 p일 때, n번의 독립시행()에서 사건 A가 일어나는 횟수를 X라고 하면, 임의의 작은 양수 h에 대하여 확률 $P\left(\left|\frac{X}{n}-p\right|<h\right)$는 n이 한없이 커짐에 따라 1에 한없이 가까워진다.' 라는 것 이다. 대수의 법칙은 크게 대수의 약법칙과 대수의 강법칙으로 나눌 수 있는데 대수의 법칙을 증명하기 위한 이론적 수단으로 사용되는 마코프 부등식과 체비셰프 부등식으로 대수의 약법칙을 증명할 수 있고, 확률변수열의 부분 합에 대한 극한분포를 보여주는 중심극한논리를 이용하여 대수의 강법칙을 증명할 수 있다.

2. 대수의 약법칙

각 시행에서 성공할 확률은 p이고 실패할 확률은 1-p인 n번의 독립시행을 실행한다고 하자. 만일 X를 이러한 n번의 독립시행에서 일어난 성공의 횟수라 하면 X는 n과 p를 모수로 하는 이항분포를 따른다. 이 때 $\dfrac{X}{n}$는 p에 대한 정보가 없을 때 p에 대한 추정량으로 사용되고 있다. 실제 체비셰프 부등식을 이용하여 $\dfrac{X}{n}$값과 p의 값이 근접함을 살펴보면 $\lim_{n\to\infty}P\left(\left|\frac{X}{n}-p\right|<\epsilon\right)=1$이다. 마코프의 대수의 약법칙은 독립성에 대한 전제를 가정하지 않고 있는 경우로 확률변수열 $X_1, X_2, \cdots, X_n$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}Var\left(\frac{S_n}{n}\right)=0$이면, 임의의 $\epsilon>0$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}P\left(\left|\frac{S_n}{n}-a_n\right|<\epsilon\right)=1$이다.

3. 대수의 강법칙

일반적으로 대수의 법칙은 확률변수열의 평균이 어떤 의미에서 기대되는 평균에 수렴하는 조건을 나타내고 있다. 지금부터 살펴볼 대수의 강법칙은 동일한 분포를 갖는 확률변수열의 산술평균이 확률 1로 그 분포의 평균에 수렴함을 보여주는 것으로 앞에서 살펴본 대수의 약법칙보다 더 강력하게 확률변수열의 평균이 기대되는 평균에 수렴함을 보여주고 있다.

4. 대수의 약법칙과 대수의 강법칙의 차이점

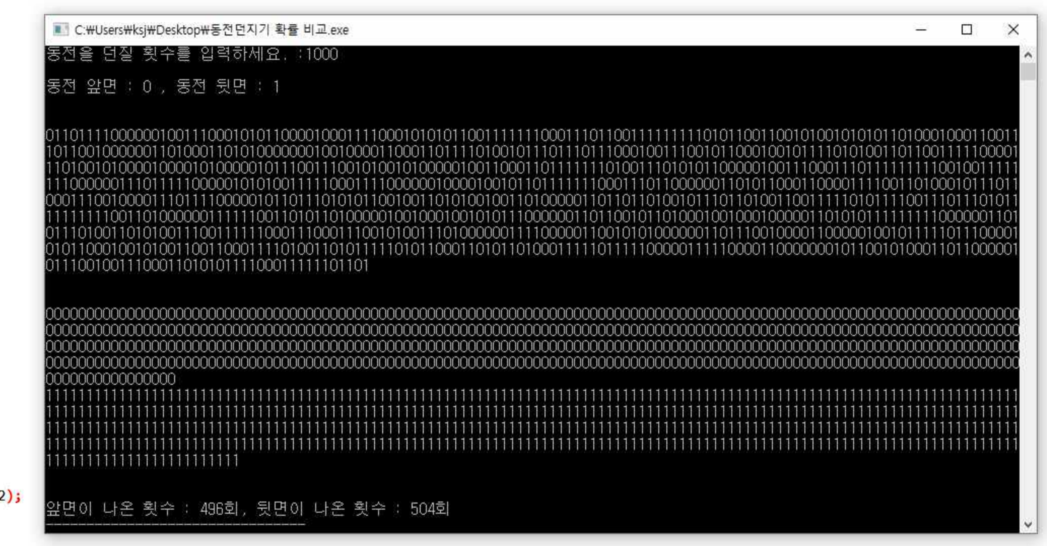
대수의 법칙은 임의의 고정된 n의 큰 값 n^*에 대하여 $\overline{X_{n^*}}=\dfrac{X_1+X_2+\cdots+X_{n^*}}{n}$의 값이 μ 가까이의 값이 된다는 것으로 대수의 약법칙은 확률변수들이 수렴하게 되는 확률값의 수렴을 나타내며, 강법칙은 확률변수들의 수렴을 나타내고 있다. 즉 대수의 약법칙은 n^*보다 더 큰 모든 n에 대하여서도 $\overline{X_{n^*}}$이 μ근방에 있다는 것을 뜻하는 것은 아니다. 반면 강법칙은 확률 1로써 임의의 양의 실수값 ϵ에 대하여 $\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\mu\right|$가 ϵ보다 큰 경우가 단지 유한 번밖에 없음을 뜻한다.

5. 동전을 n번 던졌을 때 앞, 뒷면이 나오는 비율을 구하는 프로그램

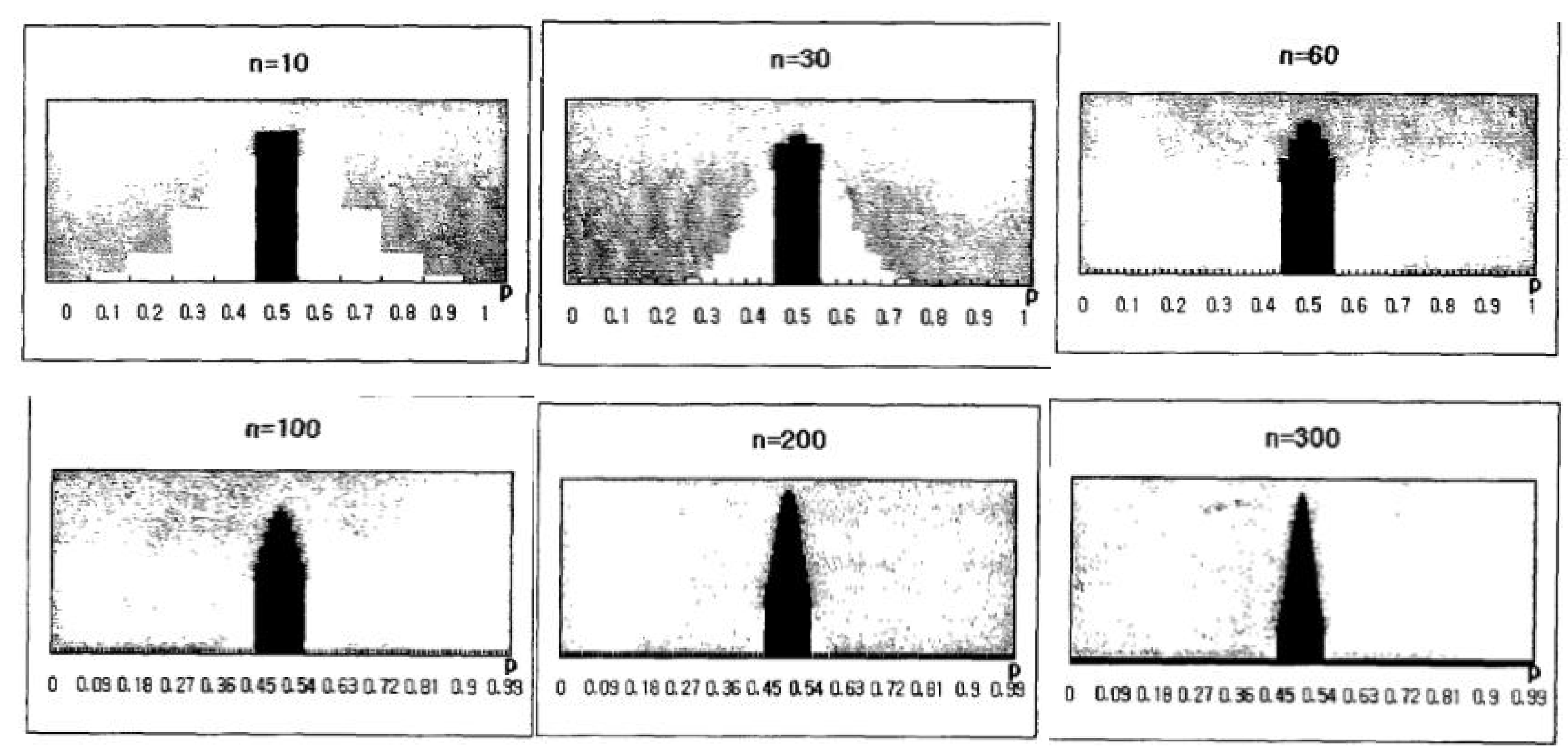
대수의 법칙을 이용하여 동전을 n번 던졌을 때 앞, 뒷면이 나오는 비율을 구하는 프로그램을 만들어 보았다. 먼저 대략적인 알고리즘을 구상했다. 처음에 동전을 던질 횟수를 입력하면 앞면을 0, 뒷면을 1로 설정하여 입력한 횟수만큼 0과 1을 무작위로 출력한다. 그 후 0과 1을 나누어 각각 출력된 횟수만큼 다시 출력하여 비율이 한눈에 보이게끔 출력한다. 마지막으로 앞면과 뒷면이 각각 몇 번씩 출력되는지 숫자로 나타내도록 했다.

과정 : 1. 코딩을 하기 전 동전을 던지는 거에 대한 알고리즘을 생각해본다.
2. 알고리즘을 바탕으로 크게 세 부분으로 나눈다.
   과정 ㄱ. 동전을 던질 횟수 입력한다.
   과정 ㄴ. 동전을 뒤집어 나온 무작위의 결과를 순서대로 출력한다.
   과정 ㄷ. 앞이 나온 것과 뒤가 나온 것의 횟수가 비교되도록 각각 분류한다.
   과정 ㄹ. 과정 2를 바탕으로 앞과 뒤가 나온 횟수를 세어 그 값을 출력한다.
3. 각 과정을 거칠 때마다 오류가 없는지 프로그램을 실행해 본다.
4. 오류가 있으면 어느 부분에서 오류가 발생했는지 확인 후 수정한다.
5. 코드 완성 후 마지막으로 실행해본다.

```c
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <time.h>

int main() {

    int i, r, num=0, cnt1=0, cnt2=0;

    srand(time(NULL));
    printf("동전을 던질 횟수를 입력하세요. :"), scanf("%d", &num);
    printf("\n동전 앞면 : 0 , 동전 뒷면 : 1\n\n\n");

    for(i=1;i<=num;i++) {
        r=rand()%2;
        printf("%d", r);

        if(r==0)
            cnt1++;
        else if(r==1)
            cnt2++;
    }
    printf("\n\n\n");

    for(i=1;i<=cnt1;i++) {
        printf("0");
    }
    printf("\n");

    for(i=1;i<=cnt2;i++) {
        printf("1");
    }
    printf("\n\n\n앞면이 나온 횟수 : %d회, 뒷면이 나온 횟수 : %d회", cnt1, cnt2);

    return 0;
}
```



<그림1. 동전던지기 확률을 구하는 프로그램의 코드> <그림2. 코드의 실행화면>



<그림3. 동전을 던지는 횟수에 따른 확률분포>

Ⅲ 결론

1. 결과

동전을 던지는 횟수가 적었을 때는 앞면이 나오는 비율과 뒷면이 나오는 비율이 1 : 1인 경우도 있었지만 비율의 차이가 많이 나는 경우도 빈번했다. 하지만 동전을 던지는 횟수가 많아질수록 앞면이 나오는 비율과 뒷면이 나오는 비율이 점점 1 : 1에 가까워졌다. 이러한 프로그램 실행 결과로 인해 대수의 법칙인 "n이 한없이 커짐에 따라 1에 한없이 가까워진다."라는 사실을 도출해낼 수 있다.

2. 전망 및 활용성

우리가 작성한 프로그램을 활용하면 또 다른 상황에서 여러 번 반복하기 힘든 어떤 행위를 몇 번 반복했을 때 어떤 결과가 도출될지를 대략적으로 예측할 수 있을 것이다.

3. 이 연구의 시사점

이번 연구를 통해서 우리는 대수의 법칙이 무엇인지, 어디에 활용되는지 등을 자세히 알고 우리의 전공과 관련된 프로그래밍을 경험하며 실력을 쌓는 뜻 깊은 경험을 할 수 있었다.

Ⅳ 참고 자료

▶ 참고문헌
1. Newton HIGHLIGHT 88 통계와 확률의 원리 기본 원리와 응용 사례 30 (서적)
2. 대수의 법칙에 관한 연구 - 저자 : 이명일, 발행정보 : 연세대학교 | 2000년 (논문)

▶ 참고 그림
1. 그림 1 : 직접 만든 프로그램
2. 그림 2 : 직접 만든 프로그램
3. 그림 3 : 대수의 법칙에 관한 연구 - 저자 : 이명일, 발행정보 : 연세대학교 | 2000년 (논문)