弦上驻波

$g = 9.8kg/m^2$

一. 弦线线密度的测量

实验弦线直径$d_0 = 1.210mm$　　样品弦线的直径：$d = 1.200mm$；

样品弦线的长度：$l = 787.0mm$　　样品弦线的质量：$m = 1.53g$。

线密度：$\mu = \frac{m}{l} = 1.944 \times 10^{-3} kg/m$。

二. 探究$f - n$关系

实验条件：L=60.0cm，T=3mg，m=1kg。

$v_{\text{理论}} = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$，$v_{\text{实际}} = f\lambda = f\frac{2L}{n}$，即$f = \frac{nv}{2L}$

表 1. 共振频率与驻波波腹个数的关系表

n/个	$f_{\text{信号源}}/Hz$	$f_{\text{驻波}}/Hz$
1	54.1	108.2
2	109.3	223.2
3	163.3	324.6
4	216.4	422.8
5	272.1	537.6

对$f_{\text{驻波}} - n$进行最小二乘法拟合，$f = an + b$，有：

$$a = 105.84Hz, b = 5.76,$$
$$r = 0.99958, \sigma_a = 1.7644$$

由此计算出弦线上横波的传播速度：

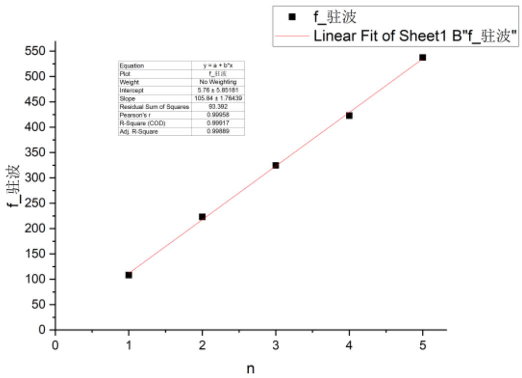
$$v = 2L \cdot a = 127.008m/s$$

拟合得到的误差$\sigma_v = v\sqrt{\left(\frac{\sigma_L}{L}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_a}{a}\right)^2}$

测量弦线长度的尺子$e_L = 0.2mm$，$\sigma_L = \frac{e_L}{\sqrt{3}}$

计算可得：$\sigma_v = 2m/s$，$v = (127 \pm 2)m/s$

图 1.　f-n 关系图



三. 探究$f-T$关系

1. 实验数据处理

实验条件：L=60.0cm，n=1，m=1kg。

$$lnf=\frac{1}{2}lnT+\left(ln\frac{n}{2L}-\frac{1}{2}ln\mu\right)$$

$$f=\frac{n}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

$$f^2=\frac{n^2}{4L^2\mu}T$$

表 2.共振频率 f 和弦线张力 T 的关系

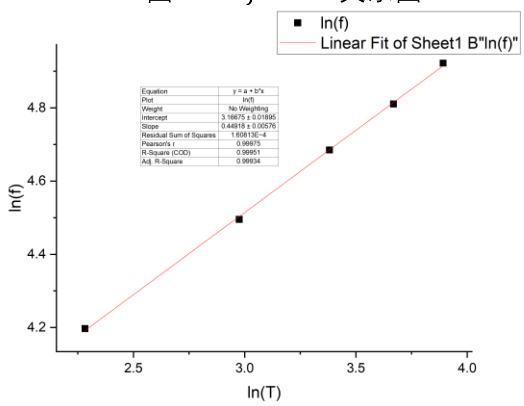
T/N	$f_{信号源}/\mathrm{Hz}$	$f_{驻波}/Hz$	lnT	lnf	$\sqrt{(T)}$	f^2
9.8	33.4	66.5	2.28	4.20	3.13	4422.25
19.6	44.8	89.6	2.98	4.50	4.43	8028.16
29.4	54.1	108.3	3.38	4.68	5.42	11728.89
39.2	61.8	122.8	3.67	4.81	6.26	15079.84
49	68.7	137.3	3.89	4.92	7.00	18851.29

对$lnf-lnT$作线性拟合:

$$lnf=0.45lnT+3.17$$

其中，斜率 0.45<0.5，r=0.99975。

图 2. $lnf-lnT$关系图

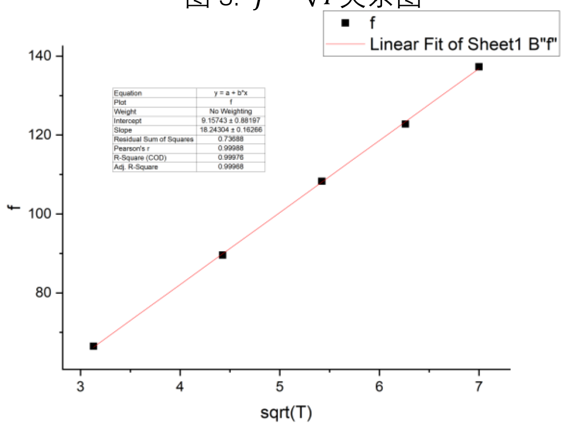


对$f-\sqrt{T}$作线性拟合:

$$f=18.24\sqrt{T}+9.16$$

$$\mathrm{r}=0.99988,\sigma_{slope}=0.16,\sigma_{intercept}=0.9$$

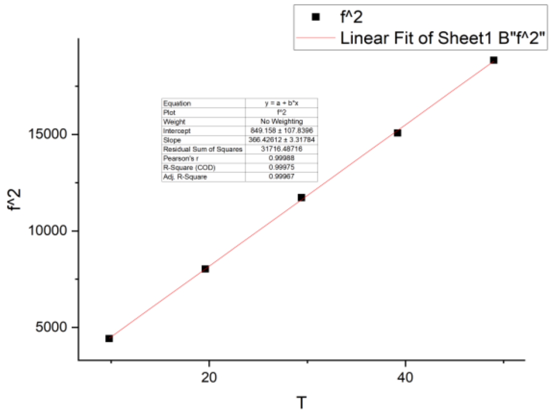
图 3. $f-\sqrt{T}$关系图



对f^2-T作线性拟合：

$$f^2=366.43T+849.16$$
$$\mathrm{r}=0.99988,\sigma_{slope}=3,\sigma_{intercept}=108$$

图 4. $f^2-\mathrm{T}$关系图



2. 比较与分析

（1） 在实际作出的$lnf-lnT$关系图中，斜率为约等于 0.45<理论数值 0.5，这可能是因为以下几点原因：

1) 张力 T 的测量误差，具体误差来源见（4）。
2) 频率 f 的测量误差：驻波判读不准，未在弦上形成清晰稳定的波腹时记录频率，导致 f 偏离真实值。

（2） $f-\sqrt{T}$图和$f^2-\mathrm{T}$图意义的不同：

1) $f-\sqrt{T}$图直接反映了共振频率 f 随着拉力大小变化的变化，而$f^2-\mathrm{T}$图则反映的是f^2随着拉力大小变化的变化。
2) $f-\sqrt{T}$图更容易观察f和$\sqrt{T}$的线性关系，因为二者的幂次更低，线性关系更加明显；而f^2-T图对数据偏差更加敏感，能够更大程度上反应系统的偏差，因为f^2和T的幂次更高，对误差有放大作用。

（3） $lnf-lnT$关系图的优势：与后面两张图相比较而言，$lnf-lnT$关系图忽略了 L 值和 μ 值测量误差的影响，而仅仅考虑 f 与 T 的关系；而$f-\sqrt{T}$图和$f^2-\mathrm{T}$图则会较大程度受到 L 值和 μ 值测量误差的影响。

（4） T的系统误差可能来源：

1) 张力 T 的测量误差：实验中，T 是由力矩转换而被提供，在实际的力矩转换过程中，可能存在误差，导致作用在弦上的力的大小不等于所记录的力的大小。

2) 弦线没有拉直，导致弦线实际所受的力与所记录的力不同。

3) 砝码存在生锈等情况、且质量可能不为 1kg。

（5） T 的误差估计：根据f^2-T图，估计 T 的误差为$\frac{849.16}{366.43}=2.32N$

四. 探究$f-L$的关系

1. 实验数据处理

实验条件：T=3mg，m=1kg，n=1。

$$f=\frac{n}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

$$lnf=-lnL+ln\frac{n\sqrt{T}}{2\sqrt{\mu}}$$

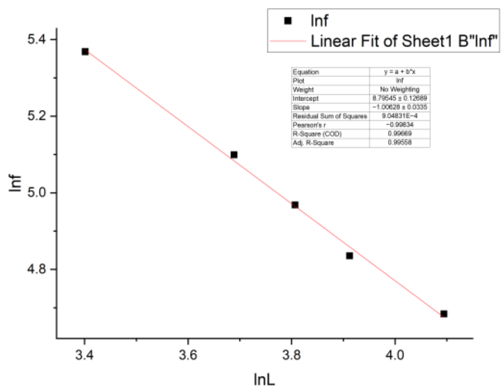
表 3.共振频率 f 与弦线长度 L 的关系

L/cm	$f_{信号源}/Hz$	$f_{驻波}/Hz$	lnf	lnL	L^{-1}
60	54.1	108.2	4.68	4.09	0.017
50	63.9	125.9	4.84	3.91	0.022
45	71.2	143.8	4.97	3.81	0.022
40	80.2	163.9	5.10	3.69	0.025
30	107.1	214.5	5.37	3.40	0.033

对$lnf-lnL$作线性拟合：

$$lnf=-1.0063lnL+8.7955$$
$$r=-0.99834,\sigma_{slope}=0.03,\sigma_{intercept}=0.13$$

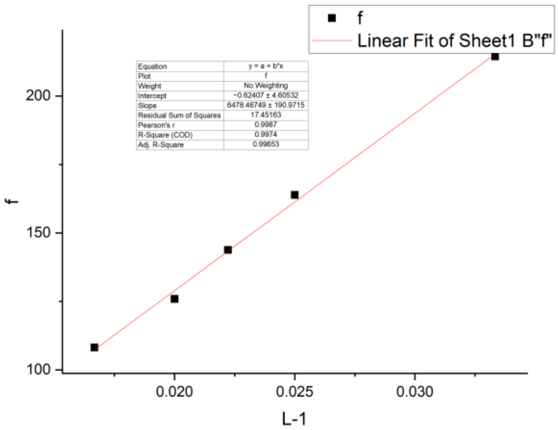
图 5. $lnf-lnL$关系图



对$f-L^{-1}$作线性拟合：

$$f=6478.5L^{-1}-0.6$$
$$r=0.9987,\sigma_{slope}=191,\sigma_{intercept}=5$$

图 6. $f-L^{-1}$关系图



2. 比较与分析

(1) $lnf-lnL$图和$f-L^{-1}$图意义的不同:

1) $lnf-lnL$图验证的是f与 L 的幂律关系，通过对数将理论公式线性化；而$f-L^{-1}$则之间反应 f 与 L 的反比的线性关系，并且可以通过斜率直接计算出其他物理量，如波速等。

2) 在分析$lnf-lnL$图的斜率时可以忽略 T、μ 等测量的影响，而仅仅考虑 L 和 f 的误差；而$f-L^{-1}$的斜率则含有更加丰富的物理含义。

五. 分析与讨论

- 通过不同作图法分析理论与实验误差的主要来源:

1) 有效长度测量误差，相对误差为 $\frac{0.1}{60}\sim10^{-3}$

2) 弦线质量的测量误差，相对误差为$\frac{0.01}{1.53}\sim10^{-3}$

3) 弦线长度测量误差，由于弦线无法完全拉直，造成了系统误差，弯折角最大估计为 5 度，则因此造成的相对误差为$\left(\frac{1}{\cos 5°}-1\right)\sim10^{-4}$

4) 弦线张力 T 的测量误差：根据f^2-T图，估计 T 的误差约为$\frac{849.16}{366.43}$=2.32N，相对误差~10^{-2}。

5) 频率 f 的测量误差:允差约为$2\times0.01=0.02Hz$,相对误差~10^{-4};也存在驻波人为判读不准，未在弦上形成清晰稳定的波腹时记录频率，导致 f 偏离真实值的情况；此外，实验中还可能会出现假共振的情况，若未准确判断共振，则也会有误差。

由此可见，本实验误差最大的地方在于弦线张力 T 的测量，这也可以从lnf与lnT关系图的斜率为 0.45<0.5 中可以看出。

六. 思考与感悟

在预习时，我只知道确定弦线的基频可以使用理论公式计算的方法，但是上课后我才明白，原来有一种更为常见、更为生活化的方法：用手轻轻拨一下琴弦，当琴弦还在振动时示波器上出现的最低的那个频率就是弦的基频。这种方法在实验中更加方便，也与我们的生活息息相关。

此外，在实验中还会出现假共振的情况，这会干扰我们对真实共振频率的测量。所以需要常常用手碰一碰琴弦，消除掉假共振。这也是我在看书预习时未曾想到过的。

这次实验让我意识到，看似简单的实验操作里其实暗藏着很多可挖掘的细节，也加深了我对于一些问题的理解。