

# Fano 共振实验

## 一. 数据处理

### 1. 各元器参量表征

#### (1) $L_1=18mH$ 电感元件的参数测量

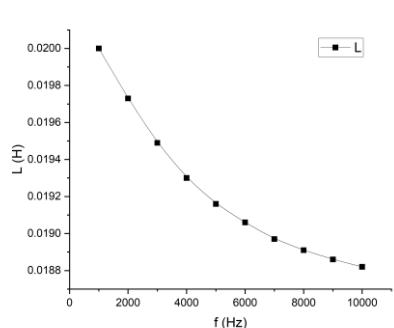


图 1.1.1  $L_1=18mH$  电感元件  $L - f$  关系图

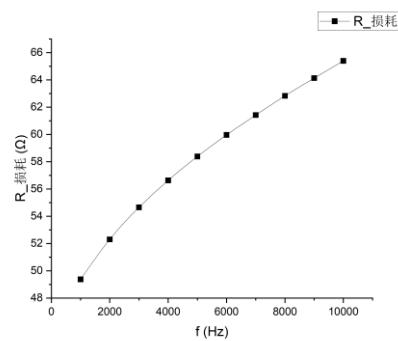


图 1.1.2  $L_1=18mH$  电感元件  $R_{\text{损耗}} - f$  关系图

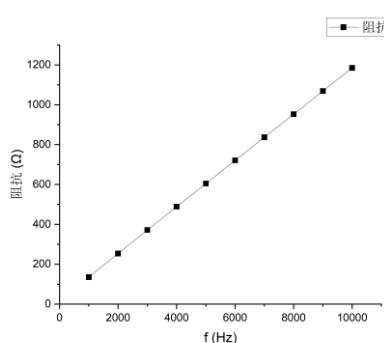


图 1.1.3  $L_1=18mH$  电感元件  $Z_L - f$  关系图

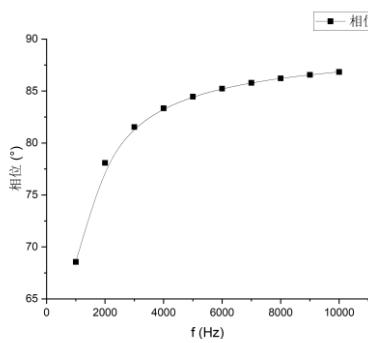


图 1.1.4  $L_1=18mH$  电感元件  $\phi - f$  关系图

#### (2) $L_2=16mH$ 电感元件的参数测量

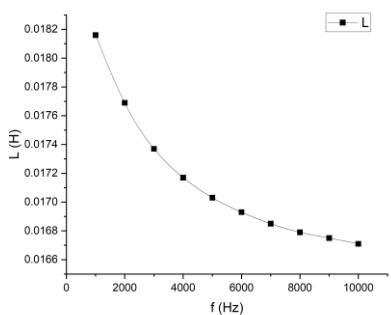


图 1.1.5  $L_2=16mH$  电感元件  $L - f$  关系图

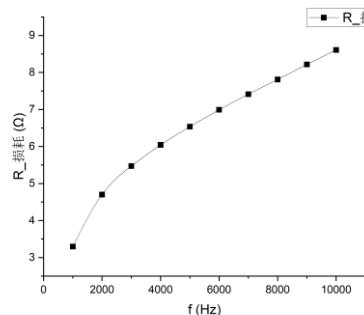


图 1.1.6  $L_2=16mH$  电感元件  $R_{\text{损耗}} - f$  关系图

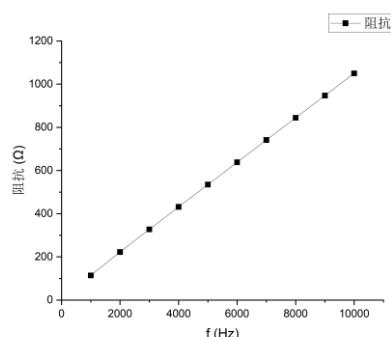


图 1.1.7  $L_2=16mH$  电感元件  $Z_L - f$  关系图

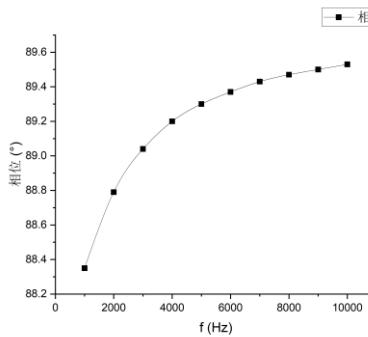


图 1.1.8  $L_2=16mH$  电感元件  $\phi - f$  关系图

### (3) $C_1 = 0.047\mu F$ 电容元件的参数测量

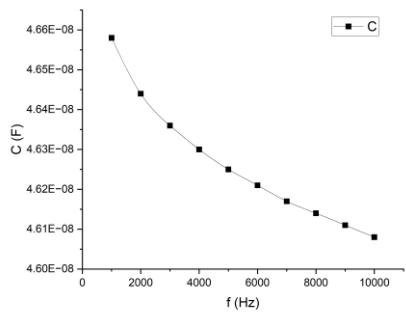


图 1.1.9  $C_1 = 0.047\mu F$  电容元件  $C - f$  关系图

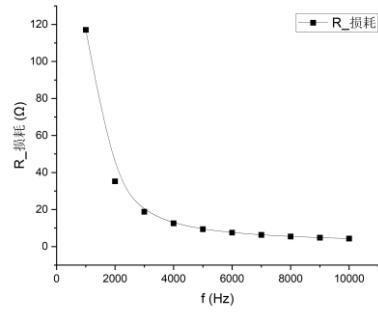


图 1.1.10  $C_1 = 0.047\mu F$  电容元件  $R_{\text{损耗}} - f$  关系图

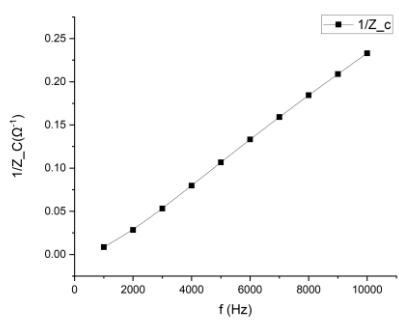


图 1.1.11  $C_1 = 0.047\mu F$  电容元件  $\frac{1}{Z_C} - f$  关系图

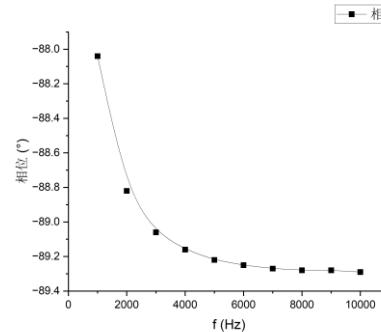


图 1.1.12  $C_1 = 0.047\mu F$  电容元件  $\phi - f$  关系图

### (4) 简单分析

- 1) 电感值随频率升高而降低、电容值随频率升高而降低：

电感的本质是麦克斯韦方程中的磁场变化电场电场的方程。高频时，磁芯的涡流损耗和磁滞损耗增加，降低了磁芯的有效磁导率，从而减小电感值。高频时，介质中的极化可能无法完全响应快速变化的电场，导致电容值下降。

- 2) 电感的电阻损耗随频率升高而增加，电容的电阻损耗随频率升高而减小：

高频时，磁芯中的涡流损耗和磁滞损耗显著增加，导致电感总损耗上升。在低频段，电容的 ESR 主要与介质损耗有关。介质损耗源于电场作用下材料的极化滞后效应。当实验频率远高于某种极化机制的弛豫频率时，极化无法跟上电场变化，对应的损耗贡献显著降低。

- 3) 电感阻抗与频率呈现正比关系，电容阻抗与频率呈现反比关系：

根据公式  $Z_L = 2\pi f L$ ,  $Z_C = \frac{1}{2\pi f C}$ , 可见  $Z_L \propto L$ ,  $Z_C \propto \frac{1}{C}$ 。根据  $L - f$ ,  $C - f$  图像,  $L$  与  $C$  的大小随频率变化并不明显，因此在  $Z_L - f$ ,  $\frac{1}{Z_C} - f$  图像中，曲线的斜率近似不变。

- 4) 电感相位随频率增大而增大，且变化率逐渐减小；电容相位随频率增大而减小，变化率的绝对值逐渐减小：

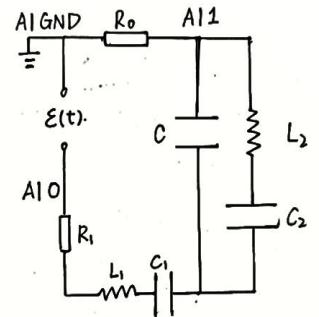
电感的相位  $\phi_L = \arctan\left(\frac{2\pi f L}{R}\right)$ ，电容的相位  $\phi_C = \arctan\left(\frac{R}{2\pi f C}\right)$ 。由反正切函数图像的性质可得。

## 2. Fano 共振的电路与标准参量下的测量结果

Fano 共振电路图如图 1.2.1 所示。

当取：

$$\begin{aligned} R_0 &= 100\Omega, R_1 = 500\Omega \\ C &= 0.5\mu F, C_1 = 0.047\mu F, C_2 = 0.2\mu F \\ L_1 &= 18mH, L_2 = 16mH \end{aligned}$$



时，绘制谐振电路的  $|(\frac{I}{U})| - f$  曲线和  $\Delta\phi - f$  曲线，如图 1.2.2, 1.2.3 所示。

图 1.2.1 Fano 共振电路图

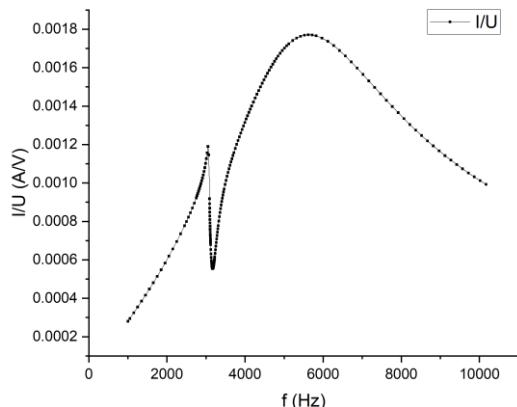


图 1.2.2 Fano 共振  $|(\frac{I}{U})| - f$  曲线

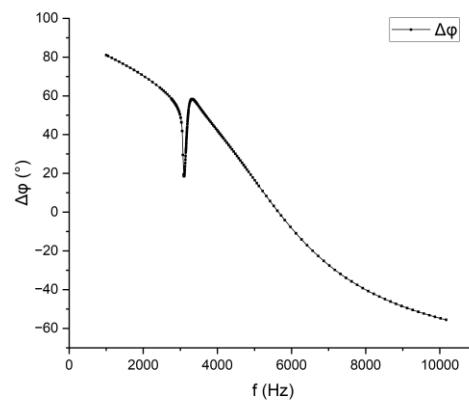


图 1.2.2 Fano 共振  $\Delta\phi - f$  曲线

## 3. 改变参量值，探究 Fano 现象图像的变化

- 1) 改变  $C$  (即改变耦合系数  $g$ )

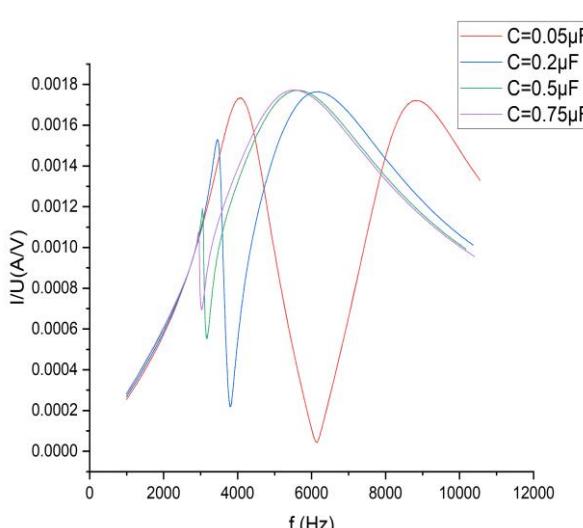


图 1.3.1  $C$  值不同情况下的  $|(\frac{I}{U})| - f$  曲线

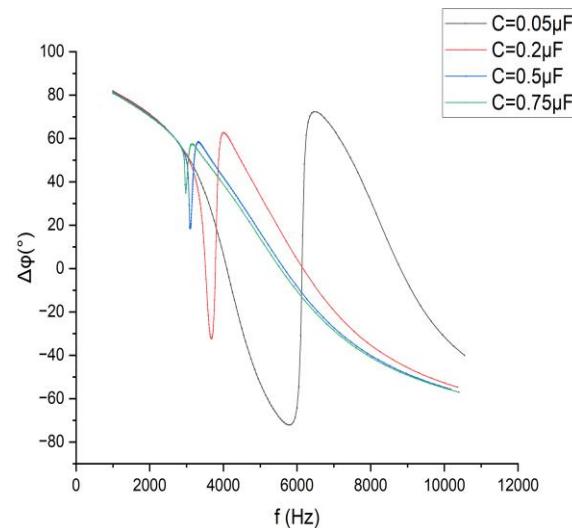


图 1.3.2  $C$  值不同情况下的  $\Delta\phi - f$  曲线

现象：

从图 1.3.1 中可以看出，随着 C 的增大，第一个峰的高度不断增大，横坐标不断右移，每条曲线中两个峰的宽度也不断增大。从图 1.3.2 可以看出，随着 C 的增大，第一个谷的深度不断增大，极小值的横坐标不断右移，谷的宽度不断增大。特别的，当  $C = 0.05\mu F$  时，图像与典型的 Fano 共振曲线已经有一定的差距，此时两个谐振系统的耦合情况已经不再明显。

原因：

Fano 共振是一种典型的弱耦合现象。C 值的变化表征的是耦合系统中耦合系数 g 的变化，C 值越大，g 值越小（具体理论分析见“二、分析与讨论”）。因此，当 C 值不断减小时，g 值会逐渐增大。当 g 值大到一定程度时，电路的弱耦合状态会逐渐转变为强耦合状态，于是呈现出来的图像会与 Fano 共振不太符合。

## 2) 改变 $C_2$ (即改变支路本身的谐振频率)

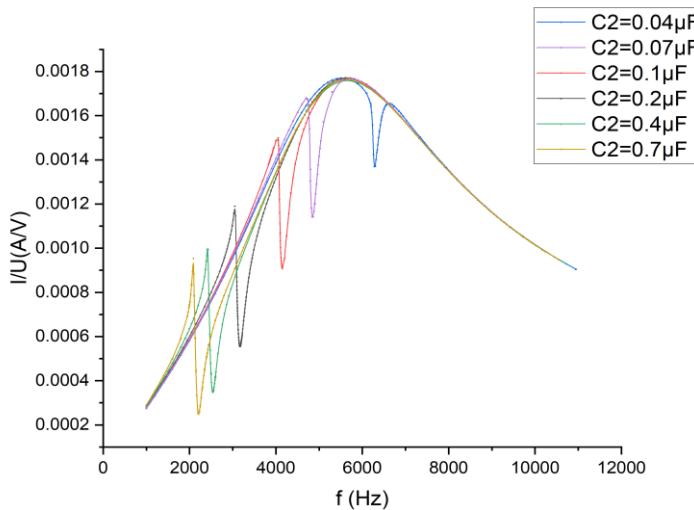


图 1.3.3  $C_2$  值不同情况下的  $\left| \left( \frac{I}{U} \right) \right| - f$  曲线

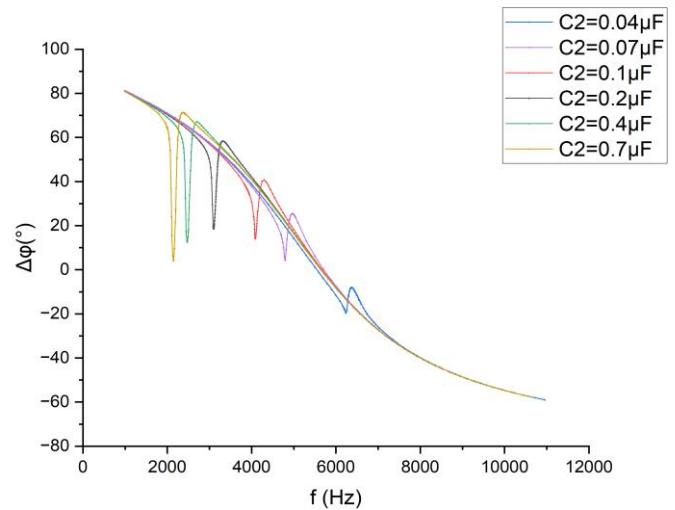


图 1.3.4  $C_2$  值不同情况下的  $\Delta\phi - f$  曲线

现象：

根据图 1.3.3，在一定频率内，随着频率的减小，第一个峰值的高度逐渐增大，横坐标不断右移。当  $C_2 \geq 0.07\mu F$  时，曲线的 Fano 峰呈现的都是先峰后谷的状态；而在  $C_2 < 0.07\mu F$  时，曲线的 Fano 峰呈现的是先谷后峰的状态。根据图 1.3.4，在一定频率内，随着频率的减小，谷的深度不断减小，极小值的横坐标不断右移，峰的高度也不断降低，Fano 峰愈发不明显。

原因：

当  $C_2 \geq 0.07\mu F$  时，在 Fano 峰前， $\omega_2$  振子未过峰值，还未经历相位突变，两个振子相干相长，因此 Fano 峰表现为先峰后谷；在  $C_2 < 0.07\mu F$  时，在 Fano 峰前， $\omega_2$  振子已经过了峰值，经历了值为  $\pi$  的相位突变，两个振子相干相消，因此 Fano 峰表现为先谷后峰。

## 二. 分析与讨论

### 1. 理论公式

$$\begin{cases} L_1 \ddot{q}_1 + R_1 \dot{q}_1 + \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C}\right) q_1 - \frac{q_2}{C} = \varepsilon(t) \\ L_2 \ddot{q}_2 + R_2 \dot{q}_2 + \left(\frac{1}{C_2} + \frac{1}{C}\right) q_2 - \frac{q_1}{C} = 0 \end{cases}$$

令  $x_1 = \sqrt{L_1} q_1, x_2 = \sqrt{L_2} q_2,$

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + \gamma_1 \dot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 = f(t) + g x_2 \\ \ddot{x}_2 + \gamma_2 \dot{x}_2 + \omega_2^2 x_2 = g x_1 \end{cases}$$

其中， $\gamma_1 = \frac{R_1}{L_1}, \gamma_2 = \frac{R_2}{L_2}, \omega_1^2 = \frac{1}{L_1} \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C} \right), \omega_2^2 = \frac{1}{L_2} \left( \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C} \right), g = \frac{1}{C \sqrt{L_1 L_2}}, f(t) = \frac{\varepsilon(t)}{\sqrt{L_2}}.$

设  $x_1 = A_1 e^{i\omega t}, x_2 = A_2 e^{i\omega t},$

解方程得：

$$\frac{I}{U} = \frac{1}{U} \frac{d q_1}{dt} = \frac{i\omega}{L_1} \frac{\omega_2^2 - \omega^2 + i\gamma_2 \omega}{(\omega_1^2 - \omega^2 + i\gamma_1 \omega)(\omega_2^2 - \omega^2 + i\gamma_2 \omega) - g^2}$$

于是可以得到  $\frac{I}{U}$  的模  $\left| \frac{I}{U} \right|$  和相位  $\varphi$ ，其中：

$$\left| \frac{I}{U} \right| = \frac{\omega}{|L_1|} \cdot \frac{\sqrt{(\omega_2^2 - \omega^2)^2 + (\gamma_2 \omega)^2}}{\sqrt{[(\omega_1^2 - \omega^2)(\omega_2^2 - \omega^2) - \gamma_1 \gamma_2 \omega^2 - g^2]^2 + [(\omega_1^2 - \omega^2)\gamma_2 \omega + (\omega_2^2 - \omega^2)\gamma_1 \omega]^2}}$$

### 2. 理论与实测的比较

根据上述理论推导，并用 Python 软件将理论推导得到的图像和实验所得的实际图像整合，得到图 2.2.1。

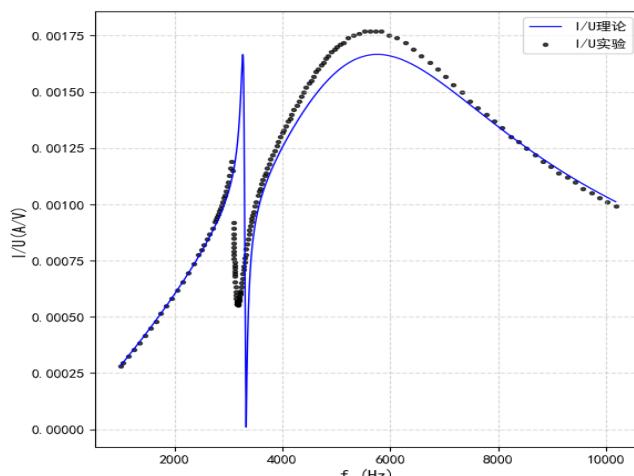


图 2.2.1 Fano 共振理论值与实际值的比较

其中，参量取值如下：

$$\begin{aligned}R_0 &= 100\Omega, R_1 = 500\Omega \\C &= 0.5\mu F, C_1 = 0.047\mu F, C_2 = 0.2\mu F \\L_1 &= 18mH, L_2 = 16mH\end{aligned}$$

分析图像可知，理论值与实际值有相似的变化趋势。理论值的 Fano 峰比实验值更加陡峭，这可能是由于在实际测量中一些额外的电阻未在理论计算中被考虑。并且，在画出理论图像的同时，并未考虑电感的感抗和电容的容抗。此外，电感值和电容值也会随着频率的变化而变化，这一部分差异也并未考虑其中。

### 三. 收获与感想

本次实验采用了类比的方法，以现实生活中常见的耦合谐振子的 Fano 共振现象作为引入，类比到电路里的 Fano 共振现象，这也是一种非常重要的思想，对于我们的学习和日后的科研也至关重要。