

Шредингер вывел свое релятивистское волновое уравнение, заметив, что гамильтониан  $H$  и импульс  $\mathbf{p}$  “электрона Лоренца” с массой  $m$  и зарядом  $e$ , находящегося во внешнем векторном потенциале  $\mathbf{A}$  и кулоновском потенциале  $\phi$ , связаны следующим соотношением<sup>1</sup>:

$$0 = (H + e\phi)^2 - c^2(\mathbf{p} + e\mathbf{A}/c)^2 - m^2c^4. \quad (1)$$

Соотношения де Бройля (0) для *свободной* частицы, представленной плоской волной  $\exp\{2\pi i(\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{x} - vt)\}$ , можно получить, если произвести отождествление

$$\mathbf{p} = \hbar \mathbf{k} \rightarrow -i\hbar \nabla, \quad E = h\nu \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \quad (2)$$

где  $\hbar$  — удобное обозначение (введенное Дираком) для  $h/2\pi$ . Исходя из чисто формальной аналогии Шредингер предположил, что электрон во внешних полях  $\mathbf{A}$ ,  $\phi$  должен описываться волновой функцией  $\psi(\mathbf{x}, t)$ , удовлетворяющей уравнению, получаемому при помощи той же самой замены в (1):

$$0 = \left[ \left( i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + e\phi \right)^2 - c^2 \left( -i\hbar \nabla + \frac{e\mathbf{A}}{c} \right)^2 - m^2c^4 \right] \psi(\mathbf{x}, t). \quad (3)$$

В частности, для стационарных состояний в атоме водорода справедливы равенства  $\mathbf{A} = 0$  и  $\psi = e/(4\pi r)$ . Кроме того, в этом случае  $\psi$  зависит от времени  $t$  экспоненциально:  $\exp(-iEt/\hbar)$ . Поэтому (3) сводится к уравнению

$$0 = \left[ \left( E + \frac{e^2}{4\pi r} \right)^2 - c^2 \hbar^2 \nabla^2 - m^2c^4 \right] \psi(\mathbf{x}) \quad (4)$$

Решения уравнения (4) с наложенными на них разумными граничными условиями, определяют уровни энергии [9]

$$E = mc^2 \left[ 1 - \frac{\alpha^2}{2n^2} - \frac{\alpha^4}{2n^4} \left( \frac{n}{l + 1/2} - \frac{3}{4} \right) + \dots \right], \quad (5)$$

где  $\alpha \equiv / (4\pi\hbar c)$  — “постоянная тонкой структуры”, численное значение которой составляет приблизительно  $1/137$ ,  $n$  — положительное целое число, а  $l$  — орбитальный угловой момент в единицах  $\hbar$ , принимающий целочисленные значения в интервале  $0 \leq l \leq n - 1$ .

<sup>1</sup>Это соотношение лоренц-инвариантно, поскольку величины  $\mathbf{A}$  и  $\phi$  при преобразованиях Лоренца изменяются точно так же, как  $c\mathbf{p}$  и  $E$  соответственно. Гамильтониан  $H$  и импульс  $\mathbf{p}$  Шредингер представлял в виде частных производных действия, однако это неважно для нашего рассмотрения.