2.2 다음 진술들에 대하여 동의하는지 혹은 그렇지 않은지를 그 이유와 함께 설명하여라.

(a) $Cov(Y,X)$와 $Cor(Y,X)$는 -∞와 +∞ 사이의 값을 가질 수 있다.
(b) $Cov(Y,X)=0$ 또는 $Cor(Y,X)=0$이면, Y와 X 사이에 아무런 관계가 없다고 결론지을 수 있다.
(c) Y 대 $\hat{Y}$의 산점도에 있는 점들에 적합된 최소 제곱회귀선은 절편항 0과 기울기 1을 가진다.

Solve)

(a) $Cov(Y,X) = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})(x_i-\overline{x})}{n-1}$ 이다.

$$-\infty < \sum_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})(x_i-\overline{x}) < \infty \ (\because -\infty < (y_i-\overline{y}),(x_i-\overline{x}) < \infty)$$이므로,

$Cov(Y,X)$는 -∞와 +∞ 사이의 값을 가지게 된다.
$Cor(Y,X)$ 또한 -∞와 +∞ 사이의 값을 갖는지 확인해 보자.
우선 $Cov(U,V),\ U=\dfrac{Y-E(Y)}{\sqrt{Var(Y)}},\ V=\dfrac{X-E(X)}{\sqrt{Var(X)}} \sim N(0,1)$에 관한 아래식을 보자.

$$Cov(U,V)=E(UV)-E(U)E(V)$$

$$=E\left(\frac{(Y-E(Y))(X-E(X))}{\sqrt{Var(Y)}\sqrt{Var(X)}}\right)-0\ ,\ (\because U,V\sim N(0,1)\text{이므로}\ E(U),E(V)=0)$$

$$=\frac{Cov(Y,X)}{\sqrt{Var(Y)Var(X)}}\ ,\ Cov(Y,X)=E(Y-E(Y))(X-E(X))$$

$$=Cor(Y,X)$$

위 식을 통해 $Cov(U,V)=Cor(Y,X)$임을 알 수 있다.
U,V의 분산에 대해 다음이 성립한다.

1) $Var(U+V)=Var(U)+Var(V)+2Cov(U,V)$
2) $Var(U-V)=Var(U)+Var(V)-2Cov(U,V)$

위의 결과 $Cov(U,V)=Cor(Y,X)$을 식에 대입해보면 다음과 같다.

1) $Var(U+V)=Var(U)+Var(V)+2Cov(U,V)$
$=2+2Cov(U,V)\ ,\ (\because U,V\sim N(0,1)$이므로 $Var(U),Var(V)=1)$
$=2+2Cor(Y,X)\geq 0\ ,\ (\because Var(U,V)\geq 0,\ Cov(U,V)=Cor(Y,X))$
$\Leftrightarrow Cor(Y,X)\geq -1$

2) $Var(U-V)=Var(U)+Var(V)-2Cov(U,V)$
$=2-2Cov(U,V)\ ,\ (\because U,V\sim N(0,1)$이므로 $Var(U),Var(V)=1)$

따라서 $-1\leq Cor(Y,X)\leq 1$이므로 (a)의 진술에 동의할 수 없다.
$\therefore -\infty < Cov(Y,X) < \infty\ ,\ -1 < Cor(Y,X) < 1$

(b) $Z\sim Unif(0,2\pi)$이고, $X=\sin z\ ,\ Y=\cos z$일 때, $X^2+Y^2=\sin^2 z+\cos^2 z=1$이다.

이를 통해 X와 Y는 서로 독립이 아님을 알 수 있다.
그리고 아래의 식을 보자.

$$E(XY) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \sin z cos z dz = 0$$

$$E(X) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \sin z dz = 0$$

$$E(Y) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \cos z dz = 0$$

$$\therefore Cov(Y,\ X) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0$$

$$Cor(Y, X) = \frac{Cov(Y, X)}{S_y \ \bullet \ S_x} = 0$$

각각 구한 값으로 $Cov(Y, X)$, $Cor(Y, X)$가 모두 0임을 알 수 있다.
따라서 위의 예를 통해, “$Cov(Y, X)$ 또는 $Cor(Y, X)$가 0이면, Y와 X 사이에 아무런 관계가 없다.”에 대한 반례가 성립하므로 위의 진술에 동의할 수 없다.
$\therefore Cov(Y, X)$또는 $Cor(Y, X)$가 0이면, Y와 X사이에 아무런 관계가 없다고 할 수 없다.

(c) Y 와 $\hat{Y}$의 관계는 $Y = \beta_0 + \beta_1 \hat{Y} + \epsilon$, $(\hat{Y} = \hat{\beta_0^*} + \hat{\beta_1^*} X)$의 선형모형이라고 가정할 수 있다.

따라서 각 관측개체는 $y_i = \beta_0 + \beta_1 \hat{y_i} + \epsilon_i$로 표현이 가능하고, 다음과 같이 바꿔 쓸 수 있다.

$$\epsilon_i = y_i - \beta_0 - \beta_1 \hat{y_i}, \ (\hat{y} = \hat{\beta_0^*} + \hat{\beta_1^*} x_i)$$

위 식의 제곱합을 최소로하는 직선인 최소제곱회귀선을 구하면 된다.
다음은 제곱합 $S(\beta_0, \beta_1)$을 최소로 하는 β_0, β_1을 추정하는 과정이다.

$$S(\beta_0, \beta_1) = \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \beta_0 - \beta_1 \hat{y_i})$$

$$\frac{\partial S(\beta_0, \beta_1)}{\partial \beta_0} = -2 \sum_{i=1}^{n} (y_i - \beta_0 - \beta_1 \hat{y_i}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \beta_0 = \bar{y} - \beta_1 \bar{\hat{y}} \qquad \cdots (1)$$

$$\frac{\partial S(\beta_0, \beta_1)}{\partial \beta_1} = -2 \sum_{i=1}^{n} \hat{y} (y_i - \beta_0 - \beta_1 \hat{y_i}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} y_i \hat{y_i} - \beta_0 \sum_{i=1}^{n} \hat{y_i} - \beta_1 \sum_{i=1}^{n} \hat{y_i}^2 = 0 \quad \cdots (2)$$

(1)을 (2)에 대입하여 풀면, 다음과 같다.

$$\sum_{i=1}^{n} y_i \hat{y_i} - \beta_0 \sum_{i=1}^{n} \hat{y}_i - \beta_1 \sum_{i=1}^{n} \hat{y_i}^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} y_i \hat{y_i} - (\bar{y} - \beta_1 \bar{\hat{y}}) \sum_{i=1}^{n} \hat{y}_i - \beta_1 \sum_{i=1}^{n} \hat{y_i}^2, \ (\because \beta_0 = \bar{y} - \beta_1 \bar{\hat{y}})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} y_i \hat{y} - n\bar{y}\bar{\hat{y}} + n\beta_1 \bar{\hat{y}}^2 - \beta_1 \sum_{i=1}^{n} \hat{y}_i^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} y_i \hat{y}_i - n\bar{y}\bar{\hat{y}} = \beta_1 \left(\sum_{i=1}^{n} \hat{y}^2 - n\bar{\hat{y}}^2 \right)$$

$$\Leftrightarrow \beta_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i \hat{y}_i - n\bar{y}\bar{\hat{y}}}{\sum_{i=1}^{n} \hat{y}^2 - n\bar{\hat{y}}^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})(\hat{y}_i - \bar{\hat{y}})}{\sum_{i=1}^{n} (\hat{y}_i - \bar{\hat{y}})^2}$$

$$\Leftrightarrow \beta_1 = \frac{\hat{\beta}_1^* \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})(x_i - \bar{x})}{\hat{\beta}_1^{*2} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}, \ \hat{y}_i = \hat{\beta}_0^* + \hat{\beta}_1^* x_i, \ \bar{\hat{y}} = \hat{\beta}_0^* + \hat{\beta}_1^* \bar{x}$$

$$\Leftrightarrow \beta_1 = 0, \ \hat{\beta}_1^* = \frac{\sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})(x_i - \bar{x})}{\sum^{n} (x - \bar{x})^2} \qquad \cdots (3)$$

따라서 β_1의 최소제곱추정치는 $\hat{\beta}_1 = 1$이다.
(3)을 다시 (1)에 대입해보면 다음과 같다.

$$\beta_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{\hat{y}}$$

$$= \bar{y} - \bar{\hat{y}} \ , \ \hat{\beta}_1 = 1$$

$$= 0 \ , \ \hat{\beta}_0^* = \bar{y} - \hat{\beta}_1^* \bar{x} \Leftrightarrow \bar{y} = \hat{\beta}_0^* + \hat{\beta}_1^* \bar{x}$$
$$, \ \bar{\hat{y}} = \hat{\beta}_0^* + \hat{\beta}_1^* \bar{x}$$

이를 통해 β_0의 최소제곱추정치는 $\hat{\beta}_0 = 0$임을 알 수 있다.
따라서 $\hat{\beta}_1 = 1, \hat{\beta}_0 = 0$ 이므로,“ Y 대 $\hat{Y}$의 산점도에 있는 점들에 적합된 최소제곱회귀선은 절편항 0과 기울기 1을 가진다.”라고 할 수 있다.

2.3 표 2.9에 있는 회귀분석 결과를 이용하여 다음 가설들에 대한 검정을 수행하여라 (a=0.1).

변수	계수	표준오차	t-검정	p-값
상수	4.162	3.355	1.24	0.2385
Units	15.509	0.505	30.71	<0.0001

(a) $H_0 : \beta_1 = 15$ 대 $H_0 : \beta_1 \neq 15$

(b) $H_0 : \beta_1 = 15$ 대 $H_0 : \beta_1 > 15$

(c) $H_0 : \beta_0 = 0$ 대 $H_0 : \beta_0 \neq 0$

(d) $H_0 : \beta_0 = 5$ 대 $H_0 : \beta_0 \neq 5$

Solve)

(a) 1. 가설설정: $H_0 : \beta_1 = 15$ vs $H_0 : \beta_1 \neq 15$

2. 유의수준: $\alpha = 0.1$

3. 검정통계량

$$t_1 = \frac{\widehat{\beta_1} - \beta_1}{s_. e\,(\widehat{\beta_1})} = \frac{15.509 - 15}{0.505} = 1.00792$$

$(\widehat{\beta_1} = 15.509,\ \beta_1 = 15,\ s_. e(\widehat{\beta_1}) = 0.505\,)$

4. 기각역: $t_1 = 1.00792 < 1.78 = t_{\alpha/2}(12)$

5. 유의수준 $\alpha = 0.1$ 하에서 검정통계량 t_1이 임계값보다 작으므로 귀무가설을 기각할 수 없다.

$\Leftrightarrow H_0$ 채택

(b) 1. 가설설정: $H_0 : \beta_1 = 15$ vs $H_0 : \beta_1 > 15$

2. 유의수준: $\alpha = 0.1$

3. 검정통계량

$$t_1 = \frac{\widehat{\beta_1} - \beta_1}{s_. e\,(\widehat{\beta_1})} = \frac{15.509 - 15}{0.505} = 1.00792$$

$(\widehat{\beta_1} = 15.509,\ \beta_1 = 15,\ s_. e(\widehat{\beta_1}) = 0.505\,)$

4. 기각역: $t_1 = 1.00792 < 1.36 = t_{\alpha}(12)$

5. 유의수준 $\alpha = 0.1$ 하에서 검정통계량 t_1이 임계값보다 작으므로 귀무가설을 기각할 수 없다.

$\Leftrightarrow H_0$ 채택

(c) 1. 가설설정: $H_0 : \beta_0 = 0$ vs $H_0 : \beta_0 \neq 0$

2. 유의수준: $\alpha = 0.1$

3. 검정통계량

$$t_0 = \frac{\widehat{\beta_0} - \beta_0}{s.e(\widehat{\beta_0})} = \frac{4.162 - 0}{3.355} = 1.240536$$

$(\widehat{\beta_0} = 4.162, \beta_0 = 0, s.e(\widehat{\beta_0}) = 3.355)$

4. 기각역: $t_0 = 1.240536 < 1.78 = t_{\alpha/2}(12)$

5. 유의수준 $\alpha = 0.1$ 하에서 검정통계량 t_0이 임계값보다 작으므로 귀무가설을 기각할 수 없다.

$\Leftrightarrow H_0$ 채택

(d) 1. 가설설정: $H_0 : \beta_0 = 5$ vs $H_0 : \beta_0 \neq 5$

2. 유의수준: $\alpha = 0.1$

3. 검정통계량

$$t_0 = \frac{\widehat{\beta_0} - \beta_0}{s.e(\widehat{\beta_0})} = \frac{4.162 - 5}{3.355} = -0.249776$$

$(\widehat{\beta_0} = 4.162, \beta_0 = 5, s.e(\widehat{\beta_0}) = 3.355)$

4. 기각역: $t_0 = -0.249776 < 1.78 = t_{\alpha/2}(12)$

5. 유의수준 $\alpha = 0.1$ 하에서 검정통계량 t_0이 임계값보다 작으므로 귀무가설을 기각할 수 없다.

$\Leftrightarrow H_0$ 채택

2.4 표 2.9에 있는 회귀분석 결과를 이용하여 β_0에 대한 99% 신뢰구간을 구축하여라.

변수	계수	표준오차	t-검정	p-값
상수	4.162	3.355	1.24	0.2385
Units	15.509	0.505	30.71	<0.0001

Solve)

β_0의 신뢰구간 $(\alpha = 0.01)$: $\widehat{\beta_0} \pm t_{\alpha/2}(12) \cdot s.e(\widehat{\beta_0})$

$= 4.162 \pm (3.06 \cdot 3.355)$, $\widehat{\beta_0} = 4.162$, $t_{\alpha/2}(12) = 3.06$, $s.e(\widehat{\beta_0}) = 3.355$

$\Leftrightarrow (-6.1043, 14.4283)$

$\therefore$ β_0의 신뢰구간 $(\alpha = 0.01)$: $(-6.1043, 14.4283)$

2.6 표 2.5의 데이터와 표 2.7의 적합값 및 잔차를 이용하여 다음을 보여라.

[표 2.5] 수리시간(Minutes)과 수리될 부품(Units)의 수

번호	Minutes	Units	번호	Minutes	Units
1	23	1	8	97	6
2	29	2	9	109	7
3	49	3	10	119	8
4	64	4	11	149	9
5	74	4	12	145	9
6	87	5	13	154	10
7	96	6	14	166	10

[표 2.7] 컴퓨터 수리시간 데이터에 대한 적합값 $\hat{y}_i$와 보통의 최소제곱잔차 e_i

i	x_i	y_i	$\hat{y}_i$	e_i	i	x_i	y_i	$\hat{y}_i$	e_i
1	1	23	19.67	3.33	8	6	97	97.21	-0.21
2	2	29	35.18	-6.18	9	7	109	112.72	-3.72
3	3	49	50.69	-1.69	10	8	119	128.23	-9.23
4	4	64	66.20	-2.20	11	9	149	143.74	5.26
5	4	74	66.20	7.80	12	9	145	143.74	1.26
6	5	87	81.71	5.29	13	10	154	159.25	-5.25
7	6	96	97.21	-1.21	14	10	166	159.25	6.75

(a) $Cor(Y, X) = Cor(Y, \hat{Y}) = 0.994$

(b) $SST = 27768.348$

(c) $SSE = 348.848$

Solve)

(a) $Cor(Y, X) = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})(x_i - \overline{x})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}}$ 이다.

위의 식에 표 2.5의 데이터를 대입하면 다음과 같다.

$$\frac{\sum_{i=1}^{14}(y_i - \overline{y})(x_i - \overline{x})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{14}(y_i - \overline{y})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{14}(x_i - \overline{x})^2}}, \overline{y} = 97.21, \overline{x} = 6$$

$$= \frac{(-74.21) \bullet (-5) + (-68.21) \bullet (-4) + \cdots + 68.79 \bullet 4}{\sqrt{(-74.21)^2 + (-68.21)^2 + \cdots + (68.79)^2}\sqrt{((-5)^2 + (-4)^2 + \cdots + 4^2}}$$

$= 0.993698 \fallingdotseq 0.994$

따라서 $Cor(Y,X)=0.994$을 구할 수 있다.

$Cor(Y,\hat{Y})$ 또한 $Cor(Y,X)$와 같은 값을 갖는지 확인해보자.

$$Cor(Y,\hat{Y}) = \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})(\hat{y_i}-\overline{\hat{y}})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(\hat{y_i}-\overline{\hat{y}})^2}}$$ 이다.

위의 식에 표 2.7의 데이터를 대입하면 다음과 같다.

$$\frac{\sum_{i=1}^{14}(y_i-\overline{y})(\hat{y_i}-\overline{\hat{y}})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{14}(y_i-\overline{y})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{14}(\hat{y_i}-\overline{\hat{y}})^2}}, \overline{y}=97.21, \overline{\hat{y}}=97.21$$

$$= \frac{(-74.21)\cdot(-77.54)+(-68.21)\cdot(-62.03)+\cdots+68.79\cdot 62.03}{\sqrt{(-74.21)^2+(-68.21)^2+\cdots+(68.79)^2}\sqrt{((-77.54)^2+(--62.03)^2+\cdots+62.03^2}}$$

$= 0.993710 \fallingdotseq 0.994$

따라서 $Cor(Y,\hat{Y})$ 또한 0.994를 구할 수 있다.

위의 두 결과를 통해 $Cor(Y,X) = Cor(Y,\hat{Y}) = 0.994$임을 보일 수 있다.

(b) $SST = \sum_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2$이다.

위의 식에 표 2.5의 데이터를 대입하면 다음과 같다.

$\sum_{i=1}^{14}(y_i-\overline{y})^2, \overline{y}=97.21$

$=(23-97.21)^2+(29-97.21)^2+\cdots+(166-97.21)^2$

$=(-74.21)^2+(-68.21)^2+\cdots+(68.78)^2$

$= 27768.36 \fallingdotseq 27768.348$

따라서 $SST=22768.348$임을 보일 수 있다.

(c) $SSE = \sum_{i=1}^{n}(y_i-\hat{y_i})^2 = \sum_{i=1}^{n}e_i^2$이다.

위의 식에 표 2.7의 데이터를 대입하면 다음과 같다.

$\sum_{i=1}^{14}(y_i-\hat{y_i})^2 = \sum_{i=1}^{14}e_i^2$

$=(3.33)^2+(-6.18)^2+\cdots+(6.75)^2$

$= 348.7212 \fallingdotseq 348.848$

따라서 $SSE = 348.848$임을 보일 수 있다.

2.8 최소제곱법을 이용하여 단순선형회귀모형 $Y = \beta_0 + \beta_1 X + \epsilon$을 데이터에 적합할 때, $H_0 : \beta_1 = 0$가 기각되지 않는다고 가정하자. 이것은 모형을 $Y = \beta_0 + \epsilon$과 같이 단순하게 쓸 수 있음을 의미한다. β_0의 최소제곱추정치는 $\widehat{\beta_0} = \overline{y}$이다(이를 증명할 수 있는가?).

(*) β_0의 최소제곱추정치는 $\widehat{\beta_0} = \overline{y}$이다(이를 증명할 수 있는가?).

(a) 이 경우 최소제곱잔차는 무엇인가?

(b) 최소제곱잔차의 합계가 0임을 보여라.

Solve)

(*) 모형 $Y = \beta_0 + \epsilon$ 에서 각 관측개체는 $y_i = \beta_0 + \epsilon_i$ 로 표현될 수 있다.

β_0의 최소제곱추정치는, $\sum_{i=1}^{n} \epsilon_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \beta_0)^2$을 최소로 하는 $\widehat{\beta_0}$임을 알 수 있다.

위의 식을 β_0에 대해 미분하면 다음과 같다.

$$\frac{d}{d\beta_0} \sum_{i=1}^{n} (y_i - \beta_0)^2 = -2 \sum_{i=1}^{n} (y_i - \beta_0) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} y_i = \sum_{i=1}^{n} \beta_0$$

$$\Leftrightarrow n\overline{y} = n\beta_0$$

$$\therefore \overline{y} = \beta_0$$

이를 통해 최소제곱추정치 $\widehat{\beta_0} = \overline{y}$임을 알 수 있다.

(a) 최소제곱잔차는 $e_i = y_i - \widehat{y_i}$ 으로, 최소제곱법으로 구한 적합값 $\widehat{y_i}$을 통해 구할 수 있다.

β_0의 최소제곱추정치는 $\widehat{\beta_0} = \overline{y}$임을 알고 있으므로, $\widehat{y_i} = \widehat{\beta_0} = \overline{y}$ 임을 쉽게 구할 수 있다.

따라서 최소제곱잔차 $e_i = y_i - \widehat{y_i} = y_i - \overline{y}$ 이다.

$$\therefore e_i = y_i - \overline{y} \ (e_i : \text{최소제곱잔차})$$

(b) 위의 (a)의 풀이를 통해 $\sum_{i=1}^{n} e_i = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \overline{y})$라는 사실을 알 수 있다.

식을 전개하면 다음과 같다.

$$\sum_{i=1}^{n} e_i = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \overline{y})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} y_i - n\overline{y} = n\overline{y} - n\overline{y} \ (\because \sum_{i=1}^{n} y_i = n\overline{y}\ ) = 0$$

따라서 위의 식을 통해 최소제곱잔차 e_i의 합이 0임을 알 수 있다.

2.13 다음의 $y_1, y_2, \cdots, y_n$은 알려지지 않은 평균 μ와 분산 σ^2으로부터 추출된 표본이다. 평균 μ를 추정하는 하나의 방법은 다음의 선형모형을 적합시키고 제곱합 $\sum_{i=1}^{n}(y_i - \mu)^2$을 최소화하는 최소제곱방법을 이용하는 것이다.

$$y_i = \mu + \epsilon; \qquad i = 1, 2, \cdots, n$$

다른 하나의 방법은 수직거리의 합 $\sum_{i=1}^{n}|y_i - \mu|$을 최소화하는 최소절댓값(LAV: least absolute value) 방법을 이용하는 것이다.

(a) μ의 최소제곱 추정치는 표본평균 $\overline{y}$임을 증명하여라.
(b) μ의 최소절댓값 추정치는 표본중위수임을 증명하여라.
(c) 표본평균의 장점과 단점을 하나씩 설명하여라.
(d) 표본중위수의 장점과 단점을 하나씩 설명하여라.
(e) μ에 대한 위 두 개의 추정치 중 어느 것을 선택할 것인가? 그 이유는 무엇인가?

Solve)

(a) 주어진 선형모형 $y_i = \mu + \epsilon_i$는 $\epsilon_i = y_i - \mu$로 나타 낼 수 있다.

여기서 ϵ_i의 제곱합, 즉 $\sum_{i=1}^{n}\epsilon_i^2 = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \mu)^2$를 최소화하는 μ가 최소제곱추정치가 된다.

따라서 위의 식을 μ에 대해 미분하면 다음과 같다.

$$\frac{d}{d\mu}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \mu)^2 = -2\sum_{i=1}^{n}(y_i - \mu) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n}y_i = \sum_{i=1}^{n}\mu$$

$$\Leftrightarrow n\overline{y} = n\mu$$

$$\therefore \mu = \overline{y}$$

이를 통해 μ의 최소제곱추정치는 $\overline{y}$임을 알 수 있다.

(b) 주어진 선형모형 $y_i = \mu + \epsilon_i$는 $\epsilon_i = y_i - \mu$로 나타 낼 수 있다.

여기서 $|\epsilon_i|$의 합, 즉 $\sum_{i=1}^{n}|\epsilon_i| = \sum_{i=1}^{n}|y_i - \mu|$를 최소화하는 μ가 최소절댓값추정치가 된다.

이를 구하기 위해, y_i를 크기순으로 $y_{(1)}, y_{(2)} \cdots y_{(n)}$로 다음과 같이 나타내었다.

$y_{(1)} < y_{(2)} < \cdots < y_{(n-1)} < y_n$, $(n = 1, 2, \cdots, n)$

$\sum_{i=1}^{n} |y_i - \mu| = f(\mu)$라고 했을 때, $f(\mu)$의 최소를 만족하는 μ는 다음과 같이 구할 수 있다.

$y_{(k)} \le \mu \le y_{(k+1)}$, $(1 \le k \le n-1)$ 일 때,

$$f(\mu) = \sum_{i=1}^{k} (\mu - y_{(i)}) + \sum_{i=k+1}^{n} (y_{(i)} - \mu)$$

$$= k\mu - (n-k)\mu + \sum_{i=1}^{k} y_{(i)} + \sum_{i=k+1}^{n} y_{(i)}$$

$$= (2k-n)\mu + \sum_{i=1}^{k} y_{(i)} + \sum_{i=k+1}^{n} y_{(i)}$$

1) $2k - n < 0$일 경우, 함수 $f(x)$는 $[y_{(k)}, y_{(k+1)}]$에서 감소한다. , $(k = 1, 2, \cdots, \frac{n}{2})$

2) $2k - n > 0$일 경우, 함수 $f(x)$는 $[y_{(k)}, y_{(k+1)}]$에서 증가한다. , $(k = \frac{n}{2} + 1, \frac{n}{2} + 2, \cdots, n-1)$

1),2)를 모두 고려했을 때, $\mu = y_{(\frac{n}{2}+1)}$ 일 때, $f(\mu)$의 기울기가 0이므로, $f(\mu)$가

위의 n이 짝수인 경우, $y_{(\frac{n}{2})}$와 $y_{(\frac{n}{2}+1)}$사이의 적당한 실수 하나를 중앙값으로 정한다.

예를 들면, $y_{(k)}$와 $y_{(k+1)}$의 산술평균을 중앙값으로 할 수 있다.
따라서, μ의 최소절댓값추정치는 표본y_i의 중위수임을 알 수 있다.

(c) 장점: 모든 자료의 값을 이용하여 나타낸다.
단점: 모든 자료의 값을 이용하므로, 이상치의 영향을 받는다.

(d) 장점: 자료의 값의 분포가 치우쳐 있거나, 이상치가 있어도, 그 영향을 덜 받기 때문에 표본평균보다 유용하게 사용할 수 있다.
단점: 모든 자료의 값을 활용하지 못한다.

(e) 표본평균을 사용할 것이다. 이상치가 흔하게 나오지 않는다고 생각하고, 또한 표본자료의 모든 값을 이용하여 잘 나타내므로, 표본중위값보다 대체적으로 μ의 추정치로 적합하다고 생각했기 때문이다.