Subject:
Date

chapter 2-2:

3: $(21)^{0.\overline{33}} = 2.758924174$

	a	b	c	d
0	1	1	1	1
1	1.952380952	7.666666667	0	4.582575695
2	2.121754273	5.230203739	0	2.14069514 ^ 292
3	2.242849691	3.742696919	0	
4	2.334839672	2.994853568	⋮	X
5	2.40709338	2.777022226		اصلاً جواب نداره
6	2.465059287	2.759041866	X	meet نمیکنه
7	2.512243462	2.758924168		
8	2.55105796	✓	اصلاً جواب نداره	
9	2.583223765		meet نمیکنه	
10	2.61006974 2			
11	2.63257471			
12	2.65150122			
13	2.667477485			
14	2.68099427			
15	2.692453852			
16	2.702185969			
17	2.710462809			
18	2.717510379			
19	2.723517725419			
20	2.72864142779			
21	2.73301572289			
22	2.73675212709			
23	2.73994529223			
24	2.74326069126			
25	2.74551113176			
26	2.74743665643			
27	2.74908460085			
28	2.75049529059			
29	2.7517031099			
30	2.75273739924			
31	2.75362321138			
32	2.75438194981			
33	2.75503190894			
34	2.75558873203			
35	2.75606058...2			
36	2.75647445621			
37	2.75682481702			
38	2.75712495289			
39	2.75738215154			

PAPCO

Subject:
Date

40 → 2.75760256297

41 → 2.757791454 33

42 → 2.75795333719

43 → 2.758.920 7628

44 → 2.7582109825 4

45 → 2.75831289267

46 → 2.7584.-23722

47 → 2.75 84 7509884

48 → 2.7585 3926217

49 → 2.7585 9 42565 3

50 → 2.75-86413 9 2-3

51 → 2.75868 17 9 331

52 → 2. 75 8716421 45

53 → 2.75 8746101 91

54 → 2.7587 71 54172

55 → 2.75879334682

56 → 2.76129 9495065 1

Subject :

Date

chapter 2-2

سوال 3

a.

$$g(x) \quad (P_n) = \frac{20x + \frac{21}{x^2}}{21} = \frac{20}{21}x + \frac{1}{x^2}$$

$$g'(x) = \frac{20}{21} - \frac{2}{x^3}$$

$$g'(21^{1/3}) = \frac{20}{21} - \frac{2}{21} = \frac{6}{7} = .185\ 714285\ 7$$

b. $$g(x) = x - \frac{x^3 - 21}{3x^2} = \frac{3x^3 - x^3 + 21}{3x^2} = \frac{2x^3}{3x^2} + \frac{21}{3x^2}$$

$$= \frac{2}{3}x + \frac{7}{x^2}$$

$$g'(x) = \frac{2}{3} - \frac{14}{x^3} \longrightarrow g'(21^{1/3}) = \frac{2}{3} - \frac{2}{3} = 0$$

c. $$g(x) = x - \frac{x^4 - 21x}{x^2 - 21} = \frac{x^3 - 21x - x^4 + 21x}{x^2 - 21}$$

$$= \frac{x^3 - x^4}{x^2 - 21} = \frac{x^3(1-x)}{x^2 - 21}$$

PAPCO

Subject:
Date

$$g'(x) = 1 - \frac{2x^5 - 84x^3 + 21x^2 + 441}{(x^2 - 21)^2}$$

$$g'(21^{1/3}) = 5.70559$$

d. $g(x) = \left(\frac{21}{x}\right)^{0.5}$

$$g'(x) = -\frac{1}{2}\frac{\sqrt{21}}{\sqrt{x^3}} \longrightarrow g'(21^{1/3}) = -\frac{1}{2}\frac{\sqrt{21}}{\sqrt{21}} = -\frac{1}{2}$$

براساس مقدار شیب

$d > b > a > c \rightarrow$ /

d: fastest

c: slowest

/: اصلاً converge نمیشه

این ترتیب اینجا مهمه چون بیشتر از مقدار $g'(x)$، کوچکتر از ۱

و بزرگتر از ۱- بشه، پس حتماً جواب برای fixed point داریم.

و حالا اگر این عدد نزدیکتر به ۰ باشه، با تعداد iteration های کمتری

به این جواب میرسیم

Subject:
Date

11. theorem: $g \in C[a,b]$

$g(x) \in [a,b]$

$x \in [a,b]$

$g'(x)$ exits on (a,b)

$|g'(x)| \leq K < 1$ for $x \in [a,b]$

→ for any number $p_0 \in [a,b]$, the sequence defined by $p_n = g(p_{n-1})$, $n \geq 1$ converges to the unique fixed print $p \in [a,b]$

---

a.

$$g(x) = \frac{2 - e^x + x^2}{3}$$

$0 < g(0) = 1/3 < 0.5$

$0 < g(0.15) = 1/3 (0.9) < 0.5$

$$g'(x) = \frac{3(-e^x + 2x)}{3^2} = \frac{-e^x + 2x}{3}$$

$$\left| \frac{-e^x + 2x}{3} \right| < 1 \longrightarrow g''(x) = \frac{(-e^x + 2)3 - 0}{3^2} = \frac{2 - e^x}{3}$$

$$g''(0) = \frac{2-1}{3} = 1/3$$

$$g''(0.15) = \frac{2 - e^{0.15}}{3} = \frac{0.134}{3} \approx 0.1$$

$\left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array}\right\} g''(x) > 0$ for $[0, 0.15]$

g' صعودی، g' بس $\longrightarrow g'(0) = -1/3$, $g'(1) = -\frac{1}{3}(e^{0.15} - 1) \longrightarrow |g'(x)| < 1$

فرض : $P_0 = 0$

$e = 2.71828182$

$a = 0$
$b = 0.5$

	P
0	0
1	$0.\overline{3333}$
2	0.23897249068
3	0.26262696648
4	0.25653978169
5	0.25812460286
6	0.25771579747
7	0.25782119171
8	0.25779401618
9	0.25780102304 →

اینجا دیگه error از 10^{-5} کوچکتره پس ادامه نمیدیم

b. $g(x) = \frac{5}{x^2} + 2$

$$g'(x) = \frac{-(2x)5}{x^4} = \frac{-10}{x^3}$$

$$|g'(x)| = \frac{10}{x^3} < 1 \longrightarrow |g'(2.5)| = \left|\frac{10}{(2.5)^3}\right| = 0.64 < 1$$

$$|g'(3)| = \left|\frac{10}{3^3}\right| = 0.37 < 1$$

$$2.5 < g(2.5) = 0.8 + 2 = 2.8 < 3$$

$$2.5 < g(3) = 0.\overline{5} + 2 = 2.5 < 3$$

$b = 3,\ a = 2.5$ ← پس

PAPCO

Subject:
Date

فرض $P_0 = 2.5$

	p	error
0	2.5	
1	2.8	0/3
2	2.63775562	0/2
3	2.718622914	0/2
4	2.67650663165	0/19
5	2.697964536 56	0/21
6	2.68690634938	0/011
7	2.69257262496	0/005
8	2.68966048902	/002
9	2.6911544067	0/0014
10	2.69038672676	0/0007
11	2.6907861 3596	0/0003
12	2.69057887324	0/0002
13	2.69068265354	0/000103
14	2.69062937496	0/00005327857
15	2.69065672627	0/0000273513
16	2.69064268489	0/00001404138
17	2.69064989328	0/00000720839 →

دیگه از اینجا به بعد ادامه

نمیدم چون error کوچیکتر از 10^{-5} شد

PAPCO

Subject:
Date

c. $g(x) = \left(\frac{e^x}{3}\right)^{0/5}$

$g'(x) = \frac{e^x \times 3 - 0}{3^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{e^x}{3}\right)^{-1/2} = \frac{1}{2}\left(3/e^x\right)^{1/2}$

$\frac{1}{2}\left(3/e^x\right)^{1/2} < 1 \longrightarrow$ ✓ برقرار است

$g'(0/25) = 0/76 < 1$
$g'(1) = 0/52 < 1$ } ✓ ↗

$0/25 < g(0/25) = 0/65 < 1$

$0/25 < g(1) = 0/95 < 1$

↓

$a = 0/25$

$b = 1$

	P	error
0	0/25	
1	0/6542235644	0/14
2	0/80075971184	0/06
3	0/861632	0/02
4	0/88826	0/011
5	0/9001663	0/005
6	0/9055407 6	0/002
7	0/907977	0/0011
8	0/909084	0/0005
9	0/9095875	0/0002
10	0/90981649	0/0001
11	0/909920	0/00047
12	0/909968	0/000021
13	0/9099895 7	0/000009

→ چون error زیر 10^{-5} بود دیگر ادامه نمیدهیم

Subject:
Date

$d_0 \quad g(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$

$g'(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x \longrightarrow |g'(x)| < 1$

$-1 < \left(\frac{1}{5}\right)^x < 1$

$g'(0.3) = 0.6170338862$

$g'(0.7) = 0.3241313194$ $\Big\} < 1$

$0.3 < g(0.3) = 0.6170 < 0.7$

$0.3 < g(0.7) = 0.32 < 0.7$

	p	error
0	0.3	
1	0.668740304976	0.3
2	0.34085571	0.2
4	0.39460156	0.1
8	0.44462443	0.044
16	0.466932	0.004
32	0.4669913	0.0000053
33	0.469645	0.0000040
34	0.4696044	0.0000030
35	0.469635	0.0000023
36	0.469611	0.0000017
37	0.469629	0.0000013
38	0.469616	0.0000009

$a_2 0.3$

$b_2 0.7$

PAPCO

Subject:

Date

e. $g(x) = \left(\frac{1}{6}\right)^x$

$|g'(x)| = |\left(\frac{1}{6}\right)^x| < 1$

$\rightarrow -1 < \left(\frac{1}{6}\right)^x < 1 \longrightarrow g'(0/3) = 0/584190$

$g'(0/6) = 0/341278$

$\Big\}\ < 1$

$0/3 < g(0/3) = 0/5841 < 0/6$

$0/3 < g(0/6) = 0/34 < 0/6$

$\Big\} \longrightarrow a = 0/3,\ b = 0/6$

با فرض $p_0 = 0/3$

	p	error
0	0/3	
1	0/58419068	0/2
2	0/351684204	0/18
4	0/384744	0/11
8	0/4213367	0/04
16	0/4434023	0/008
32	0/44792397	0/0002
40	0/44803971	0/000043
44	0/448053160460	0/0000017
45	0/44807108	0/0000014
46	0/4480564	0/000011
47	0/44806823	0/00000093

از ۵ تا ۴۷ تکرار شد، ادامه ندادیم

Subject:
Date

f. $g(x) = 0.5(\sin x + \cos x)$

$g'(x) = 0.5(\cos x - \sin x)$

$\leftarrow \sin x \geq -1 \;,\; \cos x \geq 1$ بیشترین حالت

$\frac{1}{2}(2) = 1 < 1$

پس نتیجه $|g'(x)| < 1$ همواره برقرار است بنابراین

$$\left.\begin{array}{l} 0 < g(0) = 0.5(0+1) = \frac{1}{2} < 1 \\ 0 < g(1) = 0.5(1.38) = 0.69 < 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} a = 0 \\ b = 1 \end{array}$$

	p	error
0	0	
1	0.5	0.1
2	0.67	0.02
3	0.703	0.001
4	0.704	0.0000094
5	0.7048062960 8	0.0000005381

که از 5 تکرار شده ادامه میدهیم

Subject:
Date

16. a. $p = 2p - Ap^2$

$$Ap^2 - 2p + p = 0 \longrightarrow Ap^2 - p = 0$$

$$\longrightarrow p(Ap - 1) = 0 \begin{cases} p = 0 \longrightarrow \text{چون خود سوال گفته } \neq 0 \text{ درنظر نمی گیریم} \\ p = \frac{1}{A} \checkmark \end{cases}$$

b. باید $|g'(x)| < 1$ باشد

$$|g'(x)| = |2 - 2Ax| < 1 \longrightarrow -1 < 2 - 2Ax < 1$$

$$2(1 - Ax) > -1 \longrightarrow 1 - Ax > -\frac{1}{2} \longrightarrow -Ax > -\frac{3}{2}$$

$$Ax < \frac{3}{2} \longrightarrow x < \frac{3}{2A}$$

$$2(1 - Ax) < 1 \longrightarrow 1 - Ax < \frac{1}{2} \longrightarrow -Ax < -\frac{1}{2}$$

$$Ax > \frac{1}{2} \longrightarrow x > \frac{1}{2A}$$

$$x \in \left(\frac{1}{2A}, \frac{3}{2A}\right)$$

Subject:
Date

2-3

11. a. $3xe^x = 0 \quad x \in [a,b]$

newtons method: $p_0 = 1.5$ $\quad f(x) = 3xe^x$

$f'(x) = 3(e^x + xe^x)$

$= 3e^x(1+x)$

$\frac{f(x)}{f'(x)} = \frac{3xe^x}{3e^x(1+x)} = \frac{x}{1+x}$

	p	error
0	1.5	
1	0.9	0.4
2	0.426815	0.2
3	0.12742280	0.1
4	0.01440149	0.01
5	0.00020445	0.0002
6	0.00000041	0.00000004 → ۴ رقم اعشار درست

$p_6 = 0.000000004179471331138939$

secant روش

$$p_n = p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})(p_{n-1} - p_{n-2})}{f(p_{n-1}) - f(p_{n-2})}$$

$\begin{cases} p_0 = 1 \\ p_1 = 2 \end{cases}$

PAPCO

Subject:
Date

b. $f(x) = 2x + 3\cos x - e^x$

newtons method:

$f'(x) = 2 - 3\sin x - e^x$

	p	error
0	0/5	
1	2.325234	0/7
2	1/592329	0/3
3	1/288816	0/04
4	1/2409045	0/001
5	1/2397154	0/.....72

$P_5 = 1/239715427875.389$

secant روش

Subject :
Date

21. $f(x) = 4x^2 - e^x - e^{-x} \rightarrow f'(x) = 8x - e^x + e^{-x}$

a. $P_0 = -10$

$$P_n = P_{n-1} - \frac{f(P_{n-1})}{f'(P_{n-1})}$$

P_{10}, P_0

	P	error
0	-10	
1	-9,014580912	0,9
2	-8,045615815	0,9
3	-7,1092872	0,8
4	-6,233881650 3	0,7
5	-5,46342800	0,6
6	-4,85720018 3	0,3
7	-4,47521364	0,1
8	-4,326856732	0,02
9	-4,30659277	0,003
10	-4,302403741	

0,000000100 61 ← کمتر از 10^{-5} شد، ادامه نمیدیم

b. $P_0 = -5$

P_4, P_0

	P	error
0	-5	
1	-4,553348	0,2
2	-4,347778	0,04
3	-4,307630	0,001
4	-4,30624687	0,00000 01596

از 10^{-5} کمتر شد پس ادامه نمیدیم

PAPCO

Subject:

Date

c. $p_0 = -3$

	p	error
0	-3	
1	1,0019361	0/16
2	0/83852054	0/01
3	0/8246057	0/0001
4	0/82449859	0/000000063

p_0, p_4

از 10^{-3} کمتر شد پس ادامه نمیدهیم

d. $p_0 = -1$

	p	error
0	-1	
1	-0/83824471	0/01
2	-0/82460166	0/0001
3	-0/82449859	0/0000000590

p_0, p_3

از 10^{-3} کمتر شد ادامه نمیدهیم

e.

$p_0 = 0$

$f'(p_0) = 0 - 1 + 1 = 0$

و قابل محاسبه نیست چون

یکی از شروط روش نیوتن

این بود که مشتق (f') صفر نباشد چون در مخرج است و کسر را بی معنی

می‌کند

PAPCO

Subject:
Date

f. $p_0 = 1$

p_0, p_3

	p	error
0	1	
1	0/83824711	0/01
2	0/8246016670	0/0001
3	0/82449859 11	0/0000000059 01

از 10^{-5} کمتر شد از اینجا متوقف

g. $p_0 = 3$

p_0, p_4

	p	error
0	3	
1	-1/00193616	0/16
2	-0/83852052	0/01
3	-0/8246057 6	0/0001
4	-0/8244985916	0/0000000063

از 10^{-5} کمتر شد از اینجا متوقف

h. $p_0 = 5$

p_0, p_4

	p	error
0	5	
1	4/55334844	0/2
2	4/34777841 6	0/04
3	4/3076301 89	0/001
4	4/3062468700	0/0000001596

از 10^{-5} کمتر شد از اینجا متوقف

Subject:
Date

i. $P_0 = 10$

P_0, P_{10}

	P	error
0	10	
1	9,01	0,96
2	8,04	0,93
3	7,1092	0,87
4	6,233	0,77
5	5.463	0,606
6	4,857200	0,38
7	4,4752	0,1
8	4,326856	0,02
9	4,306592	0,0003
10	4,3062453	0,00000000100061

از 10^{-5} که ۵ رقم درست شد ادامه ندیم

27.

$$A = \frac{P}{i}\left[1-(1+i)^{-n}\right]$$

$$\frac{P}{i}\left[1-(1+i)^{-n}\right] - A = 0$$

$$P\left[1-(1+i)^{-n}\right] - Ai = 0$$

A → amount of mortage → 135,000

1000 ← P → " " each payment

i → interest rate per period for n payment periods

PAPCO $n = 12 \times 30 = 360$

Subject:
Date

$$f(i) = 1000\left[1-(1+i)^{-360}\right] - 135000\,i$$

$$f'(i) = 1000 \times (-360)(1+i)^{-361} - 135000$$

$i_0 = 0.01$

$$i_n = i_{n-1} - \frac{f(i_{n-1})}{f'(i_{n-1})}$$

	i	error
0	0.01	
1	0.00697952	0.00002
2	0.00675260	0.0000006
3	0.00674999175	0.000000396
4	0.00674999171	0.000000001474

$0.00674999171 \times 12 = 8.099900059089$

میتونی تا همین 8.1 % پرداخت کنی بصورت تقریبی

26.

$$A = \frac{P}{i}\left[(1+i)^n - 1\right]$$

$$\frac{P}{i}\left[(1+i)^n - 1\right] - A = 0$$

rate of interest

$$P\left[(1+i)^n - 1\right] - Ai = 0$$

regularly deposited 15..

amount in account 75....

$2. \times 12 = 240$

PAPCO

Subject:
Date

$$F(i) = 1500\left[(1+i)^{240} - 1\right] - 750000\,i$$

$$F'(i) = 360000\,(1+i)^{239} - 750000$$

$$i_n = i_{n-1} - \frac{F(i_{n-1})}{F'(i_{n-1})}$$

	i	error
0	0.01	
1	0.0076571 9	0.001
2	0.0062271 27	0.00005
3	0.0056484 9	0.0000095
4	0.0055532 4.7	0.0000024

$12 \times 0.005553247382377245 =$

0.06663888

$\therefore$ 6.67 %

P4PCO