DOI: 10.15960/j.cnki.issn.1007-6093.2015.04.004

# 求解无容量设施选址问题的半拉格朗日松弛新方法*

张惠珍[1,2,†] 魏欣[1] 马良[1]

**摘要** 无容量设施选址问题 (un-capacitated facility location, UFL) 是应用于诸多领域的经典组合优化难题, 半拉格朗日松弛方法是求解 UFL 问题的一种精确方法. 分析了半拉格朗日松弛方法在求解 UFL 问题时所具有的性质, 在此基础上, 对求解 UFL 问题的半拉格朗日松弛方法进行了一定的理论完善, 并探讨了提高半拉格朗日松弛方法求解性能的有效途径. 数值计算结果表明: 改进方法具有明显的可行性和有效性.

**关键词** 无容量设施选址, 拉格朗日松弛, 半拉格朗日松弛, 原始-对偶最优解
**中图分类号** O221.7
**2010 数学分类号** 90C27

# A new semi-Lagrangian relaxation method to solve the un-capacitated facility location problem*

ZHANG Huizhen[1,2,†] WEI Xin[1] MA Liang[1]

**Abstract** The un-capacitated facility location (UFL) problem is a classical combinatorial optimization hard problem and has been applied in various fields. The semi-Lagrangian relaxation method is one of the exact solution methods to the UFL. In this paper, the mathematical nature of the SLR applied to solve the UFL is further studied. Based on this, the SLR applied to solve the UFL is improved from the theoretical point of view, and the approach is also discussed to enhance its computational capability. The numerical results show that the improvement proposed in this paper is feasible and effective.

**Keywords** un-capacitated facility location, Lagrangian relaxation, semi-Lagrangian relaxation, primal-dual optimal solution
**Chinese Library Classification** O221.7
**2010 Mathematics Subject Classification** 90C27

## 0 引言

无容量设施选址 (un-capacitated facility location, UFL) 问题是一种具有广泛的实际

收稿日期: 2014-11-24
* 基金项目: 国家自然科学基金(No.71401106), 上海市教育委员会科研创新项目(No.14YZ090), 上海市一流学科建设项目(No.S1201YLXK), 高等学校博士学科点专项科研基金联合资助课题(No.20123120120005), 上海高校青年教师培养资助计划(No.slg12010), 沪江基金(No.A14006)
1. 上海理工大学管理学院, 上海 200093, School of Management, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China
2. 上海理工大学超网络(中国)研究中心, 上海 200093, Center for Supernetworks Research, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China
† 通信作者 E-mail: zhzzywz@gmail.com

应用背景, 易于描述却难于求解的典型组合优化问题, 已被归入NP-难题. 该问题意在选择一些地址去建造某种设施(如：超市、银行、消防站、医院等)为顾客提供某种服务, 以满足每个顾客的需求并使消耗的费用最少.

假设所有的候选设施都没有容量限制, 给定建造设施的位置集 $I=\{1,\cdots,m\}$, 客户集 $J=\{1,\cdots,n\}$. $c_{ij}>0$ 表示位置 $i$ 的设施到客户 $j$ 的花费, 其通常依赖位置 $i$ 的设施的单位生产费用、从 $i$ 到 $j$ 的单位运输费用、出售给客户 $i$ 的销售价格等因素; $f_i>0$ 是在位置 $i$ 建造设施的费用. 要求每一个客户都应被分配到一个设施以使其需求得到满足, 并使总消耗最少:

$$\min \quad z=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}+\sum_{i=1}^{n}f_iy_i \tag{0.1}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^{m}x_{ij}=1, \qquad \forall j\in J, \tag{0.2}$$

$$x_{ij}\leqslant y_i, \qquad \forall i\in I,\ \forall j\in J, \tag{0.3}$$

$$x_{ij}\in\{0,1\}, \qquad \forall i\in I,\ \forall j\in J, \tag{0.4}$$

$$y_i\in\{0,1\}, \qquad \forall i\in I, \tag{0.5}$$

其中, $x_{ij}=1$ 表示客户 $j$ 的需求由位置 $i$ 的设施满足, 否则 $x_{ij}=0$; $y_i=1$ 表示 $i$ 点建造设施, 否则 $y_i=0$.

目前, 用于求解UFL问题的算法大致可分为三类：精确算法、智能优化算法和近似算法(在多项式时间内能够求得问题的一个解, 并且其目标函数值与最优解的目标函数值之比不超过一个常数的算法被称为近似算法[1]. 用来度量算法求得的近似解与问题最优解之间差距的指标被称为近似算法的性能比, 亦称近似比[1]). 求解UFL问题的精确算法主要包括：分支定界法[2]、割平面算法、列生成算法. 这些算法能够求得最优解, 但适用于规模较小的问题, 且计算速度慢. 用于求解UFL问题的智能优化算法主要包括：禁忌搜索算法[3–4]、遗传算法[5]、邻域搜索法[6]、粒子群算法[7-8]等. 这些算法搜索效率高, 适用于解决大规模问题, 但容易陷入局部最优, 一般只能求得问题的满意解, 不一定是最优解. 近十几年来, 求解UFL问题的近似算法也得到了长足的发展, 如：1.488-近似算法[9]. 由精确算法和智能优化算法的优缺点可知：一方面, 改进精确算法使其求解效率得以提高; 另一方面, 设计一种能集多种智能优化算法优点于一身并能弥补各自原来不足之处的混合智能优化算法, 这是求解UFL问题的算法的两大研究趋向.

文献[10-11]提出了一种用于求解带有等式约束问题的拉格朗日松弛新方法——半拉格朗日松弛(semi-Lagrangian relaxation, SLR)方法, 并将其用于UFL问题的求解. 半拉格朗日松弛方法仅适应于带有等式约束的组合优化问题的求解, 而且利用其所计算的目标函数值与原问题的最优目标函数值没有差别.

本文在对求解UFL问题的半拉格朗日松弛方法进行理论扩充的基础上, 探讨了提高半拉格朗日松弛算法的求解效率的有效途径. 文章研究内容不仅对求解UFL问题的半拉格朗日松弛算法从理论上进行了完善, 而且为后续研究中半拉格朗日松弛算法的进一步改进奠定了相关基础.

# 1 求解UFL问题的半拉格朗日松弛方法

## 1.1 UFL问题的半拉格朗日松弛

将 UFL 问题中的等式约束 (0.2) 吸收到目标函数 (0.1), 同时将 (0.2) 松弛为"$\leqslant$"的不等式约束, 得到UFL的半拉格朗日对偶问题为

$$\mathrm{SLD} := \max_{u\in\mathbb{R}^n} q(u), \tag{1.6}$$

其中, $u$ 为半拉格朗日乘子向量, $q(u)$ 为半拉格朗日松弛问题

$$\begin{aligned}
q(u) \quad &= \min_{x,y} \mathfrak{L}(u,x,y) && && (1.7)\\
\text{s.t.} \quad &\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \leqslant 1, && \forall j\in J && (1.8)\\
&x_{ij} \leqslant y_i, && \forall i\in I,\ \forall j\in J && (1.9)\\
&x_{ij}\in\{0,1\}, && \forall i\in I,\ \forall j\in J && (1.10)\\
&y_i\in\{0,1\}, && \forall i\in I && (1.11)
\end{aligned}$$

$\mathfrak{L}(u,x,y)$ 为半拉格朗日函数,

$$\begin{aligned}
\mathfrak{L}(u,x,y) &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} + \sum_{i=1}^{m} f_i y_i + \sum_{j=1}^{n} u_j\Big(1-\sum_{i=1}^{m} x_{ij}\Big)\\
&= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(c_{ij}-u_j)x_{ij} + \sum_{i=1}^{m} f_i y_i + \sum_{j=1}^{n} u_j
\end{aligned}$$

为了更好地论述 UFL 问题和半拉格朗日松弛方法的数学特性, 本文约定下述符号:

$X^*$: UFL 问题 (0.1)~(0.5) 的最优解集;

$U^*$: UFL 的半拉格朗日对偶问题 (1.6) 的最优解集;

$X(u)$: 给定半拉格朗日乘子向量 $u$, 半拉格朗日松弛问题 $q(u)$ 的最优解集;

$c_j^1 \leqslant c_j^2 \leqslant \cdots \leqslant c_j^m$: 给定 $\forall j\in J$, 向量 $(c_{1j},c_{2j},\cdots,c_{mj})$ 中元素的升序排列;

$\tilde{c}_j$: $\tilde{c}_j := \min_{i\in I}\{c_{ij}+f_i\}$;

$\tilde{c}$: $\tilde{c} := (\tilde{c}_1,\tilde{c}_2,\cdots,\tilde{c}_n)$;

$c^1$: $c^1 := (c_1^1,c_2^1,\cdots,c_n^1)$;

$[\alpha]^-$: $\alpha\in\mathbb{R}$ 且 $[\alpha]^- := \min\{\alpha,0\}$;

$[\alpha]^+$: $\alpha\in\mathbb{R}$ 且 $[\alpha]^+ := \max\{\alpha,0\}$;

$\mathrm{int}(S)$: $S$ 的所有内点组成的集合;

$F(X)$: UFL 问题 (0.1)-(0.5) 的可行解集.

**定义 1.1** 若 $u^*\in U^*$, $(x^*,y^*)\in X(u^*)\cap X^*$, 则称 $(x^*,y^*,u^*)$ 为一原始-对偶最优点.

为了更好地理解半拉格朗日松弛方法的数学特性, 本文将文献 [10-11] 中的研究结论总结为如下定理.

**定理 1.1** (1) 半拉格朗日松弛问题 $q(u)$ 单调非递减, 若 $u'\geqslant u$, 则 $q(u')\geqslant q(u)$; 若 $u'>u$且 $u'\notin U^*$, 则 $q(u')>q(u)$;

(2) $\sum\limits_{j\in J}\left(1-\sum\limits_{i=1}^{m}x_{ij}\right)$ 是 $q(u)$ 在点 $u$ 的次梯度;

(3) SLD 的最优目标值与 UFL 问题 (1)-(5) 的最优目标值相等;

(4)$(x,y)$ 是 $q(u)$ 的最优解, 且 $\sum\limits_{j\in J}\left(1-\sum\limits_{i=1}^{m}x_{ij}\right)=0$, 则 $u\in U^*$, $(x,y)$ 为原 UFL 问题的最优解;

(5) 若 $u\in \mathrm{int}(U^*)$, $(x,y)$ 是 $q(u)$ 的最优解, 则 $\sum\limits_{j\in J}\left(1-\sum\limits_{i=1}^{m}x_{ij}\right)=0$;

(6) $u^*$为 SLD 的最优解, 则 $\{u|u\geqslant u^*\}\subseteq U^*$;

(7) 若 $u\geqslant\tilde{c}$, 则 $u\in U^*$; 若 $u>\tilde{c}$, 则 $u\in\mathrm{int}(U^*)$;

(8) 若 $u\in\mathrm{int}(U^*)$, 则 $u\geqslant c^1$.

## 1.2 求解SLD的对偶上升算法

定理 1.1 说明: 对给定的 $u$, 计算 $q(u)$ 及 $u$ 的一个次梯度, 若次梯度满足定理 1.1(4), 则已达到最优解; 否则更新 $u$, 继续寻求 $q(u)$ 上升的方向. 计算步骤可总结为如下算法 1.1.

**算法 1.1**

步骤1. 初始化: 设置循环次数 $k=0$, $\varepsilon>0$.

for $j\in J=\{1,2,\cdots,n\}$, $c_j^1\leqslant c_j^2\leqslant\cdots\leqslant c_j^m$, 任取 $l\in I=\{1,\cdots,m\}$, 令 $u_j^0=c_j^l+\varepsilon$, $\tilde{c}_j=\min\limits_{i\in I}\{c_{ij}+f_i\}$, $c_j^{m+1}=+\infty$

end

步骤2. 求解 $q(u^k)$ : 计算 $(x^k,y^k)$ 及次梯度 $s^k$

$$s_j^k=1-\sum_{i=1}^{m}x_{ij}^k,\quad j\in J$$

步骤3. 停止准则: 若 $\sum\limits_{j\in J}s_j^k=0$, 停止循环迭代, $(x^k,y^k,u^k)$ 即为原始-对偶最优解; 否则, 转步骤4.

步骤4. 更新乘子向量: 若 $s_j^k=1(j\in J)$, 更新相应的半拉格朗日乘子为

$$u_j^{k+1}=\min\{c_j^l,\tilde{c}_j\}+\varepsilon, l=\min\{l+1,n\}.$$

步骤5. 更新循环次数 $k:=k+1$, 并转步骤2.

**定理 1.2** (1) 算法 1.1 为一对偶上升方法; (2) 若 $U^*\neq\varnothing$, 则算法 1.1 将在有限步迭代后收敛到一个原始-对偶最优点[10-11].

# 2 UFL 问题的半拉格朗日松弛方法的进一步讨论

**定理 2.1** $u\in\Re^n$, $X(u)=(x,y)$ 为 $q(u)$ 的最优解. 若 $[c_{ij}-u_j]^+>0$, 则 $x_{ij}=0$.

**证明** 给定 $\forall i_0\in I$, $\forall j_0\in J$, 若 $[c_{i_0j_0}-u_{j_0}]^+>0$. 考虑下述两种情况:

(1) 若 $y_{i_0}=0$, 则由 $(x,y)$ 为 $q(u)$ 的最优解可知: $x_{i_0j_0}=0$; (2) 若 $y_{i_0}=1$, 假设 $x_{i_0j_0}=1$, 则可定义 $(\tilde{x},\tilde{y})$ 为

$$\begin{cases}\tilde{x}_{ij}=x_{ij}, & i\neq i_0 \text{ 或 } j\neq j_0,\\ \tilde{x}_{i_0j_0}=0,\end{cases}\qquad \tilde{y}_i=y_i,\quad i\in I,$$

易知: $(\tilde{x},\tilde{y})$ 为 $q(u)$ 的可行解. 并由 $[c_{ij}-u_j]^+>0$可得: $\mathfrak{L}(u,\tilde{x},\tilde{y})<\mathfrak{L}(u,x,y)$. 这与 $(x,y)$ 为 $q(u)$ 的最优解相矛盾.

综上所述, 若 $(x,y)$ 为 $q(u)$ 的最优解, $[c_{ij}-u_j]^+>0$, 则 $x_{ij}=0$.

**定理 2.2** $u\in\mathbb{R}^n$, $X(u)=(x,y)$ 为 $q(u)$ 的最优解. 记 $I_1:=\{i\in I|y_i=1\}$, 可得:

(a) $\sum\limits_{j\in J}[c_{ij}-u_j]^-\leqslant\sum\limits_{j\in J}(c_{ij}-u_j)x_{ij}$, $i\in I$;

(b) $\sum\limits_{i\in I_1}[c_{ij}-u_j]^-\leqslant\sum\limits_{i\in I_1}(c_{ij}-u_j)x_{ij}$, $j\in J$.

**证明** 给定 $\forall i\in I,\forall j\in J$. 由 $[\alpha]^-$ 的定义可知: $[c_{ij}-u_j]^-\leqslant c_{ij}-u_j$ 且 $[c_{ij}-u_j]^-\leqslant 0$. 又由 $x_{ij}\in\{0,1\}$ 可知: ① 若 $x_{ij}=1$, 则 $[c_{ij}-u_j]^-\leqslant c_{ij}-u_j=(c_{ij}-u_j)x_{ij}$; ② 若 $x_{ij}=0$, 则 $[c_{ij}-u_j]^-\leqslant 0=(c_{ij}-u_j)x_{ij}$. 进而, 可推知: (a) 和 (b) 成立.

**定理 2.3** 若 $(x^*,y^*,u^*)$ 是给定 UFL 问题的原始-对偶最优解. 记 $I_1:=\{i\in I|y_i^*=1\}$, 则:

(a) $\sum\limits_{j\in J}[c_{ij}-u_j^*]^-+f_i<0$, $i\in I_1$;

(b) $\sum\limits_{i\in I_1}[c_{ij}-u_j^*]^-<0$, $j\in J$.

**证明** 由定义 1.1 知: 若 $(x^*,y^*,u^*)$ 为一原始-对偶最优解, 则 $(x^*,y^*)\in X^*\cap X(u^*)$, $u^*\in U^*$.

首先, 证明 (a) 成立. 假设存在 $i_0\in I_1$, $\sum\limits_{j\in J}[c_{i_0j}-u_j^*]^-+f_{i_0}\geqslant 0$, 则对于给定的 $u^*$, 定义 $(\tilde{x},\tilde{y})$ 为

$$\begin{cases}\tilde{x}_{ij}=x_{ij}^*,\ \ i\neq i_0,\ j\in J,\\ \tilde{x}_{i_0j}=0,\ \ i=i_0,\ j\in J,\end{cases}\qquad\qquad \begin{cases}\tilde{y}_i=y_i,\ \ i\neq i_0,\\ \tilde{y}_i=0,\ \ i=i_0.\end{cases}$$

进而, 可知下述两种情况存在:

1. 若 $\sum\limits_{j\in J}[c_{i_0j}-u_j^*]^-+f_{i_0}>0$, 由 $(\tilde{x},\tilde{y})$ 及定理 2.2(a) 可得:

$$\begin{aligned}\sum_{j\in J}(c_{i_0j}-u_j^*)\tilde{x}_{i_0j}+f_{i_0}\tilde{y}_{i_0}=0&<\sum_{j\in J}[c_{i_0j}-u_j^*]^-+f_{i_0}\\&\leqslant\sum_{j\in J}(c_{i_0j}-u_j^*)x_{i_0j}^*+f_{i_0}y_{i_0}^*.\end{aligned}\tag{2.12}$$

由此可得: $\mathfrak{L}(u^*,\tilde{x},\tilde{y},)<\mathfrak{L}(u^*,x^*,y^*)$, 这与$(x^*,y^*)$为$q(u^*)$ 的最优解矛盾.

2. 若 $\sum\limits_{j\in J}[c_{i_0j}-u_j^*]^-+f_{i_0}=0$, 由 $(\tilde{x},\tilde{y})$ 及定理 2.2(a) 可得:

$$\begin{aligned}\sum_{j\in J}(c_{i_0j}-u_j^*)\tilde{x}_{i_0j}+f_{i_0}\tilde{y}_{i_0}=0&=\sum_{j\in J}[c_{i_0j}-u_j^*]^-+f_{i_0}\\&\leqslant\sum_{j\in J}(c_{i_0j}-u_j^*)x_{i_0j}^*+f_{i_0}y_{i_0}^*\\&=\sum_{j\in J}(c_{i_0j}-u_j^*)x_{i_0j}^*+f_{i_0}.\end{aligned}\tag{2.13}$$

1) 若 (2.13) 中的不等式严格成立, 与情况 1 相似, $\mathfrak{L}(u^*,\tilde{x},\tilde{y},)<\mathfrak{L}(u^*,x^*,y^*)$, 这与 $(x^*,y^*)$ 为 $q(u^*)$ 的最优解矛盾;

2) 若 (2.13) 中的等式严格成立, 由 $\mathfrak{L}(u^*,\tilde{x},\tilde{y},)=\mathfrak{L}(u^*,x^*,y^*)$ 可得: $(\tilde{x},\tilde{y})$ 亦为 $q(u^*)$ 的最优解, 即 $(\tilde{x},\tilde{y})\in X(u^*)$. 然而, 由 $\sum\limits_{i\in I}\tilde{x}_{ij_0}=0$ 知: $\sum\limits_{j\in J}\left(1-\sum\limits_{i=1}^{m}\tilde{x}_{ij}\right)=1$. 进而, 由定理 1.1(4) 知: $u^*\notin U^*$. 这与 $u^*\in U^*$ 相矛盾.

下述为 $\sum\limits_{i\in I}\tilde{x}_{ij_0}=0$ 的推导过程. 由等式严格成立的 (2.13) 及 $f_{i_0}>0$ 知: 向量 $(x^*_{i_01},x^*_{i_02}\cdots,x^*_{i_0n})$ 中至少存在一个分量取值为"1". 假设 $x^*_{i_0j_0}=1$, 则由 $\sum\limits_{i\in I}x^*_{ij_0}=1$ 知: $\sum\limits_{i\neq i_0}x^*_{ij_0}=0$. 进而, 由 $(\tilde{x}(u^*),\tilde{y}(u^*))$ 的定义可得:

$$\sum_{i\in I}\tilde{x}_{ij_0}=\tilde{x}_{i_0j_0}+\sum_{i\neq i_0}\tilde{x}_{ij_0}=\tilde{x}_{i_0j_0}+\sum_{i\neq i_0}x^*_{ij_0}=0.$$

其次, 证明 (b) 成立. 假设存在 $j_0\in J$, $\sum\limits_{i\in I_1}[c_{ij_0}-u^*_{j_0}]^-=0$, 则对给定的 $u^*$, 可定义 $(\tilde{x},\tilde{y})$ 为

$$\begin{cases}\tilde{x}_{ij}=x^*_{ij}, & j\neq j_0\\ \tilde{x}_{ij_0}=0, & j=j_0\end{cases}, \qquad \tilde{y}_i=y_i,\ \ i\in I.$$

进而, 由定理 2.2(b) 可推知:

$$\begin{aligned}\sum_{i\in I}(c_{ij_0}-u^*_{j_0})\tilde{x}_{ij_0}&=\sum_{i\in I_1}(c_{ij_0}-u^*_{j_0})\tilde{x}_{ij_0}=0\\&=\sum_{i\in I_1}[c_{ij_0}-u^*_{j_0}]^-\leqslant\sum_{i\in I_1}(c_{ij_0}-u^*_{j_0})x^*_{ij_0}\\&\leqslant\sum_{i\in I}(c_{ij_0}-u^*_{j_0})x^*_{ij_0},\end{aligned}$$

则: $\mathfrak{L}(u^*,\tilde{x},\tilde{y})\leqslant\mathfrak{L}(u^*,x^*,y^*)$. 然而, 由 $\sum\limits_{i\in I}\tilde{x}_{ij_0}=0$ 知: $\sum\limits_{j\in J}\left(1-\sum\limits_{i=1}^{m}\tilde{x}_{ij}\right)\neq 0$. 进而, 由定理 1.1 知: $u^*\notin U^*$. 这与 $u^*\in U^*$ 相矛盾.

**定理 2.4** 给定 $u^*\in\Re^n$, $X(u^*)=(x^*,y^*)$ 为 $q(u^*)$ 的最优解. 记 $I_1:=\{i\in I|y^*_i=1\}$. 若 $\sum\limits_{i\in I_1}[c_{ij}-u^*_j]^-<0(\forall j\in J)$, 则 $(x^*,y^*,u^*)$为给定 UFL 问题的原始-对偶最优解.

**证明** 假设存在 $j_0\in J$, $\sum\limits_{i\in I}x^*_{ij_0}=0$.

令 $c_{i_0j_0}-u^*_{j_0}=\min\limits_{i\in I_1}\{c_{ij_0}-u^*_{j_0}\}$, 由 $\sum\limits_{i\in I_1}[c_{ij}-u^*_j]^-<0$ 知: $c_{i_0j_0}-u^*_{j_0}<0$. 定义 $(\tilde{x},\tilde{y})$ 为:

$$\begin{cases}\tilde{x}_{ij}=x_{ij}, & i\neq i_0,\ j\neq j_0\\ \tilde{x}_{i_0j_0}=1\end{cases}; \qquad \tilde{y}_i=y_i,\ \ i\in I.$$

易知 $(\tilde{x},\tilde{y})$ 为 $q(u^*)$ 的可行解, 且 $\mathfrak{L}(u^*,\tilde{x},\tilde{y})<\mathfrak{L}(u^*,x^*,y^*)$. 这与 $(x^*,y^*)$ 为 $q(u^*)$ 的最优解相矛盾.

因此, $\sum\limits_{i=1}^{m}x^*_{ij}=1(j\in J)$, $\sum\limits_{j\in J}\left(1-\sum\limits_{i=1}^{m}x^*_{ij}\right)=0$. 由定理 1.1(4) 知: $(x^*,y^*,u^*)$ 为给定 UFL 问题的原始-对偶最优解.

# 3 UFL 问题的半拉格朗日松弛方法的改进

**推论3.1** 对给定的半拉格朗日乘子向量 $u$, 若 $q(u)$ 中存在目标函数系数大于等于“0” ($(c_{ij}-u_j)\geqslant 0$) 的变量 $x_{ij}$, 则可将变量 $x_{ij}$ 的取值先行固定为“0”, 并不改变 $q(u)$ 的最优目标函数值.

**证明** 给定半拉格朗日乘子向量 $u\in\Re^n$, $\forall i\in I$, $\forall j\in J$, $(c_{ij}-u_j)\geqslant 0$, 存在下述两种情况:

(1) 若 $(c_{ij}-u_j)>0$, 则由定理 2.1 知: $q(u)$ 的最优解 $(x,y)$ 中变量 $x_{ij}=0$. 因此, 将变量 $x_{ij}$ 的取值先行固定为“0”, 并不改变原问题 $q(u)$ 的最优目标函数值;

(2) 若 $(c_{ij}-u_j)=0$, 假设存在 $q(u)$ 的最优解 $(x,y)$, 且 $x_{ij}=1$. 记 $(\tilde{x},\tilde{y})$ 为 $q(u)$ 的可行解, 该可行解中 $\tilde{x}_{ij}=0$, 其余变量取值与最优解 $(x,y)$ 中变量取值相同. 由 $(c_{ij}-u_j)=0$ 得: $\mathfrak{L}(u,x,y)=\mathfrak{L}(u,\tilde{x},\tilde{y})$, 因此, $(\tilde{x},\tilde{y})$ 也为 $q(u)$ 的最优解. 因此, 将变量 $x_{ij}$ 的取值先行固定为“0”, 并不改变原问题 $q(u)$ 的最优目标函数值.

由推论 3.1 知: 给定半拉格朗日乘子向量 $u\in\Re^n$, $q(u)$ 中目标函数系数大于等于“0”的变量可先行固定为“0”, 缩小解的搜索空间, 减小 $q(u)$ 的求解难度.

定理 1.1(6) 说明对偶问题 (1.6) 的最优解集是无界的. 令非支配最优解集为 $U^*$ 的帕雷托边界, 图 1 给出集合 $U^*$ 和半拉格朗日乘子向量 $u$ 从起点 $O$ 到 $U^*$ 的一条可能轨道 $OAC$. 图 1 中, 在原点 $O(u=0)$, $x=0$, $q(u)$ 的求解复杂度沿轨道 $OAC$ 逐渐增长; 在 $U^*$ 的内点 $C$, $(c_{ij}-u_j)<0(i\in I,\ j\in J)$, 此时 $q(u)$ 的求解复杂度与原问题的求解复杂度相当(约束数和变量数相同). 如果 $q(u)$ 在 $U^*$ 的帕雷托边界附近的求解复杂度较低, 那么, 可通过求解一系列复杂度较低的问题, 逐步逼近并求得原问题的最优解.

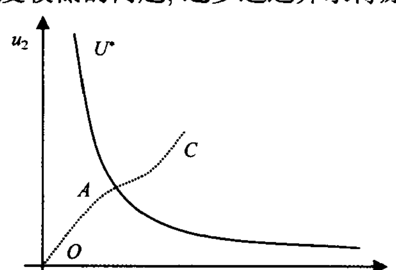


**图1** $U^*$和拉格朗日乘子$u$的可能轨道

利用半拉格朗日松弛方法求解 UFL 问题时, 如果 $u$ 取值太小, 那么逐步逼近最优解的循环次数及计算总时间均会增加. 为了减少半拉格朗日松弛方法求解 UFL 问题时的循环迭代次数, 提高算法的求解效率, 本文根据定理 2.3 和定理 2.4 分两步改进求解 UFL 问题的半拉格朗日松弛方法: 第一步, 求解使定理 2.3(a) 成立的 $u$ 及 $q(u)$; 第二步, 若 $u$ 及 $q(u)$ 的最优解不能使定理 2.4 成立, 则改进 $u$, 记改进后的 $u$ 为 $u'$, 使 $u'$ 及 $q(u')$ 的最优解满足定理 2.3(b).

第一步: 求解使定理 2.3(a) 成立的 $u$.

求使定理 2.3(a) 成立, 取值较小, 且尽可能接近于 $U^*$ 的帕雷托边界的半拉格朗日乘

子向量 $u$, 可转化为求解下述问题 $p(u)$:

$$p(u): \quad = \min_u \sum_{j\in J} u_j \tag{3.1}$$

$$\text{s.t.} \sum_{j\in J}[c_{ij}-u_j]^- + f_i < 0, \quad i\in I, \tag{3.2}$$

$$u \geqslant 0. \tag{3.3}$$

通常情况下, $p(u)$ 的可行域为非凸集. 因此, $p(u)$ 不属于凸规划问题. 为了求解简便, 可通过较易求解的问题 $p(\lambda)$ 求解 $u$.

$$p(\lambda) \quad := \min_{\lambda\in\mathbb{R}} \sum_{j\in J} u_j(\lambda), \tag{3.4}$$

$$\text{s.t.} \sum_{j\in J}[c_{ij}-u_j(\lambda)]^- + f_i < 0, \quad i\in I, \tag{3.5}$$

$$u(\lambda) = \lambda u^0 + (1-\lambda)\tilde{c}, \tag{3.6}$$

$$0 \leqslant \lambda \leqslant 1, \tag{3.7}$$

其中, $u^0$ 为初始半拉格朗日乘子向量(可根据经验自行给定).

在已知初始半拉格朗日乘子向量 $u^0$, 最优半拉格朗日乘子向量 $\tilde{c}$ 的情况下, 通过求解 $p(\lambda)$ 可求得确保定理 2.3(a) 成立, 取值较小且比较接近于 $U^*$ 的帕雷托边界的半拉格朗日乘子向量 $u$.

第二步: 改进 $u$, 使定理 2.3(b) 成立.

假设算法 1.1 第 $k$ 次循环求解 $q(u^k)$ 的最优解为 $(x^k, y^k)$, 若次梯度 $\sum_{j\in J}\left(1-\sum_{i=1}^m x_{ij}^k\right) \neq 0$, 则 $u^k \notin \text{int}(U^*)$, $(x^k, y^k, u^k)$ 不满足定理 2.3(b). 改进 $u^k$, 求满足定理 2.3(b) 的 $u^{k+1}$ 的过程如下:

首先, 求解问题 $p(u)^{k+1}$:

$$p(u)^{k+1} := \min_u \sum_{j\in J} u_j, \tag{3.8}$$

$$\text{s.t.} \sum_{i\in I_1^k}[c_{ij}-u_j]^- \leqslant 0, \quad j\in J, \tag{3.9}$$

$$u \geqslant u^k, \tag{3.10}$$

其中, $I_1^k := \{i\in I | y_i^k = 1\}$.

其次, 利用 $p(u)^{k+1}$ 的最优解 $u$ 更新 $u^{k+1}$ 为: $u^{k+1} = u + \varepsilon(\varepsilon > 0)$.

**定理 3.1** 问题 $p(u)^{k+1}$ 的解为:

$$u_j = \max\left\{\min_{i\in I_1^k}\{c_{ij}\}, u_j^k\right\}, \quad j\in J,$$

其中, $I_1^k := \{i\in I | y_i^k = 1\}$.

**证明** 算法 1.1 第 $k$ 次循环求解 $q(u^k)$ 的最优解为 $X(u^k) = (x^k, y^k)$, 次梯度 $s_{j_0}^k = 1 - \sum_{i=1}^m x_{ij_0}^k (\forall j_0 \in J)$ 存在下述两种情况:

1. 若 $s_{j_0}^k=0(\forall j_0\in J)$, 由定理 1.1 知: $\exists i_0\in I$, $x_{i_0j_0}^k=1$ 且 $c_{i_0j_0}\leqslant u_{j_0}^k$. 因此, 对于 $i_0\in I_1^k$, 存在: $\min\limits_{i\in I_1^k}\{c_{ij_0}\}\leqslant c_{i_0j_0}\leqslant u_{j_0}^k$, 则

$$\max\left\{\min_{i\in I_1^k}\{c_{ij_0}\},u_{j_0}^k\right\}=u_{j_0}^k.$$

此外, 由 $p(u)^{k+1}$ 的数学表达, 显然可知: $u_{j_0}=u_{j_0}^k$.

2. 若 $s_{j_0}^k=1(\forall j_0\in J)$, 则由定理 1.1 可知: $x_{ij_0}^k=0(i\in I)$, 且 $c_{ij_0}\geqslant u_{j_0}^k(i\in I_1^k)$. 由此可得: $\min\limits_{i\in I_1^k}\{c_{ij_0}\}\geqslant u_{j_0}^k$, 则

$$\max\left\{\min_{i\in I_1^k}\{c_{ij_0}\},u_{j_0}^k\right\}=\min_{i\in I_1^k}\{c_{ij_0}\}.$$

由 $p(u)^{k+1}$ 的数学表达知: $u_{j_0}=\min\limits_{i\in I_1^k}\{c_{ij_0}\}$ 显然成立.

通过求解 $p(\lambda)$, 求得 $u(\lambda^*)$, 利用 $u(\lambda^*)$ 初始化算法 1.1 的步骤 1 中的半拉格朗日乘子向量, 并利用 $u_j^{k+1}=\max\left\{\min\limits_{i\in I_1^k}\{c_{ij}\},u_j^k\right\}+\varepsilon$ 更新算法 1.1 步骤4 中的半拉格朗日乘子, 即可得到改进的半拉格朗日松弛算法.

**定理 3.2** (1) 改进后的半拉格朗日松弛算法为一对偶上升算法; (2) 若 $U^*\neq\varnothing$, 则改进的半拉格朗日松弛算法将在有限步迭代后收敛到一个原始-对偶最优点.

**证明** (1) 由半拉格朗日乘子的更新方式 $u_j^{k+1}=\max\left\{\min\limits_{i\in I_1^k}\{c_{ij}\},u_j^k\right\}+\varepsilon$, 可知: $u^{k+1}>u^k$, 则由定理 1.1(1) 得: $q(u^{k+1})\geqslant q(u^k)$. 因此, 改进的半拉格朗日松弛算法为一对偶上升方法.

(2) 算法在有限次迭代后, 若其次梯度 $\sum\limits_{j\in J}\left(1-\sum\limits_{i=1}^m x_{ij}^k\right)=0$, 则 $u^k\in U^*$ , 算法收敛到一原始-对偶最优点; 若其次梯度 $\sum\limits_{j\in J}\left(1-\sum\limits_{i=1}^m x_{ij}^k\right)\neq 0$, 记 $\sum\limits_{j\in J}\left(1-\sum\limits_{i=1}^m x_{ij}^k\right)=\gamma$, $\tilde{u}^k=\min\limits_{j\in J}\{u_j^k\}$, 并由半拉格朗日乘子的更新方式 $u_j^{k+1}=\max\left\{\min\limits_{i\in I_1^k}\{c_{ij}\},u_j^k\right\}+\varepsilon$ 可知: $u^k>\min\limits_{j\in J}\{u_j^0\}+(k-1)\varepsilon$. 进而, 由 $\sum\limits_{i=1}^m\sum\limits_{j=1}^n c_{ij}x_{ij}+\sum\limits_{i=1}^m f_iy_i\geqslant 0$ 及 $u^k>0$ 得:

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}(u^k,x^k,y^k)&=\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^n c_{ij}x_{ij}^k+\sum_{i=1}^m f_iy_i^k+\sum_{j=1}^n u_j^k\Big(1-\sum_{i=1}^m x_{ij}^k\Big)\\&\geqslant\sum_{j=1}^n u_j^k\Big(1-\sum_{i=1}^m x_{ij}^k\Big)\geqslant\tilde{u}^k\sum_{j=1}^n\Big(1-\sum_{i=1}^m x_{ij}^k\Big)\\&>(\min_{j\in J}\{u_j^0\}+(k-1)\varepsilon)\gamma.\end{aligned}$$

显然, $\lim\limits_{k\to\infty}\mathfrak{L}(u^k,x^k,y^k)=+\infty$. 这与 $U^*\neq\varnothing$ 相矛盾.

## 4 算例分析

为了验证本文改进后的半拉格朗日松弛方法的可行性及其求解性能, 选择 UFL 基准

问题库[12]中的 13 个算例进行测试, 并将计算结果与文献 [11] 所给的计算结果进行对比分析.

本文实验环境：Intel Core Duo 2.80 GHz处理器，3.95 GB内存，操作系统为Win XP，数据前期处理由Matlab2008b完成，循环迭代中利用优化软件Cplex12.5求解$q(u^k)$. 文献[11]的实验环境为：Pentium-IV 3.0 GHz处理器，3 GB内存，操作系统为Win XP，数据前期处理由Matlab7.0完成，循环迭代中利用Cplex9.1求解$q(u^k)$，迭代计算的CPU时间最长为7 200s.

表 1 给出了所求实例的规模 $n$, $f_i(i \in I)$, 文献 [11] 所给的 (已知) 最优目标函数值, 利用文献 [11] 的 SLR 方法 (算法 1.1, SLR) 计算的结果和利用本文改进的 SLR 方法计算的结果, 包括：循环次数、最后一次循环所求得的目标函数值和 CPU 时间.

需要注意的是：SLR 及改进后的 SLR 属于循环迭代计算方法, 因此, 由于计算时间的限制, 在规定的计算时间内最后一次循环迭代所计算的目标函数值可能仅为最优目标函数值的下界, 如：由文献 [11] 的 SLR 方法求解算例 3 000-1 000, 在 2 h内共循环迭代 8 次, 第 8 次循环迭代所求$q(u^8)$ 的最优目标函数值为 1 602 120, 仅为该算例最优目标函数值的下界.

由表 1 知：本文改进半拉格朗日松弛方法的途径是可行的. 由于计算设备及优化软件版本的不同, 虽然 CPU 时间并不能明显说明改进后的 SLR 的计算效率优于原 SLR 方法的计算效率, 但改进后的 SLR 的循环次数明显小于原 SLR 方法的循环次数, 而且仅用 1 次循环, 消耗 2 375 s求得算例 3000-100 的最优目标函数值 1 602 154, 优于文献 [11] 所给的 (已知) 最优目标值 1 602 335.

**表 1** UFL 算例及其利用 SLR 和改进的 SLR 的计算结果

| Ins. | $n$ | $f_i$ ($i \in I$) | (已知)最优目标值 | SLR 循环次数 | SLR 目标函数值 | SLR CPU时间/s | 改进的SLR 循环次数 | 改进的SLR 目标函数值 | 改进的SLR CPU时间/s |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 500-1000 | 500 | 224 | 99 169 | 1 | 99 169 | 4 | 1 | 99 169 | 0 |
| 500-100 | 500 | 2 236 | 326 790 | 1 | 326 790 | 2 | 1 | 326 790 | 1 |
| 500-10 | 500 | 22 361 | 798 577 | 1 | 798 577 | 5 | 1 | 798 577 | 3 |
| 1000-1000 | 1 000 | 316 | 220 560 | 1 | 220 560 | 6 | 1 | 220 560 | 1 |
| 1000-100 | 1 000 | 3 162 | 607 878 | 2 | 607 878 | 19 | 1 | 607 878 | 12 |
| 1000-10 | 1 000 | 31 623 | 1 434 154 | 5 | 1 434 154 | 1 061 | 1 | 1 434 154 | 610 |
| 1500-1000 | 1 500 | 387 | 334 962 | 1 | 334 962 | 10 | 1 | 334 962 | 2 |
| 1500-100 | 1 500 | 3 873 | 866 454 | 1 | 866 454 | 22 | 1 | 866 454 | 33 |
| 1500-10 | 1 500 | 38 730 | 2 000 801 | 5 | 2 000 801 | 3 156 | 1 | 2 000 801 | 1 408 |
| 2000-1000 | 2 000 | 447 | 437 686 | 1 | 437 686 | 12 | 1 | 437 686 | 6 |
| 2500-1000 | 2 500 | 500 | 534 405 | 1 | 534 405 | 18 | 1 | 534 405 | 13 |
| 3000-1000 | 3 000 | 548 | 643 463 | 3 | 643 463 | 63 | 1 | 643 463 | 28 |
| 3000-100 | 3 000 | 5 477 | 1 602 335 | 8 | 1 602 120 | 8 428 | 1 | 1 602 154 | 2 375 |

## 5 结论

很多组合优化问题属于 (或可等价转换为) 带等式约束的优化难题, 它们均可利用半拉格朗日松弛方法求解. 但是, 半拉格朗日松弛算法在求解大规模组合优化难题时, 随着

循环次数的增长, $q(u)$ 的求解规模增大, 导致很难在合理的计算时间内求得问题的最优解.

本文通过研究半拉格朗日松弛算法求解 UFL 问题时的数学机理, 探讨了半拉格朗日松弛方法的改进途径, 并给出其理论依据, 为半拉格朗日松弛方法的改进奠定了相关基础.

## 参 考 文 献

[1] 堵丁柱, 葛可一, 胡晓东. 近似算法的设计与分析 [M]. 北京：高等教育出版社, 2011.
[2] Klose A. A branch and bound algorithm for an UFLP with a side constrain [J]. *International Transactions in Operational Research*, 1998, **5**(2): 155-168.
[3] Al-Sultan K S, Al-Fawzan M A. A tabu search approach to the uncapacitated facility location problem [J]. *Annals of Operations Research*, 1999, **86**: 91-103.
[4] Laurent M, Hentenryck P V. A simple tabu search for warehouse location [J]. *European Journal of Operational Research*, 2004, **157**(3): 576-591.
[5] Jaramillo J H, Bhadury J, Batta R. On the use of genetic algorithms to solve location problems [J]. *Computers and Operations Research*, 2002, **29**(6): 761-779.
[6] Ghosh D. Neighborhood search heuristics for the uncapacitated facility location problem [J]. *European Journal of Operational Research*, 2003, **150**(1): 150-162.
[7] 王大志, 闫杨, 汪定伟, 等. 基于OpenMP求解无容量设施选址问题的并行PSO算法 [J]. 东北大学学报(自然科学版), 2008, **29**(12): 1681-1684.
[8] Sujay S, Arnab K, Kashinath D. A modified continuous particle swarm optimization algorithm for uncapacitated facility location problem [C]//Information Technology and Mobile Communication, Communications in Computer and Information Science; Berlin Heidelberg: Springer, 2011, 305-311.
[9] Shi Li. A 1.488 approximation algorithm for the uncapacitated facility location problem [J]. *Information and Computation*, 2013, **222**(1): 45-58.
[10] Beltran-Royo C, Tadonki C, Vial J P. Solving the *p*-median problem with a semi-Lagrangian relaxation [J]. *Computational Optimization and Applications*, 2006, **35**(2): 239-260.
[11] Beltran-Royo C, Vial J P, Alonso-Ayuso A. Semi-Lagrangian relaxation applied to the uncapacitated facility location problem [J]. *Computational Optimization and Applications*, 2012, **51**(1): 387-409.
[12] M. Hoefer. Ufllib, 2006. http://www.mpi-inf.mpg.de/departments/d1/projects/benchmarks/UflLib/index.html.