形式语言与自动机　作业 1

1951112　林日中

习题 2.2.5　给出接受下列在字母表 {0,1} 上的语言的 DFA：

a) 所有任何 5 个连续符号都至少包含 2 个 0 的串的集合.

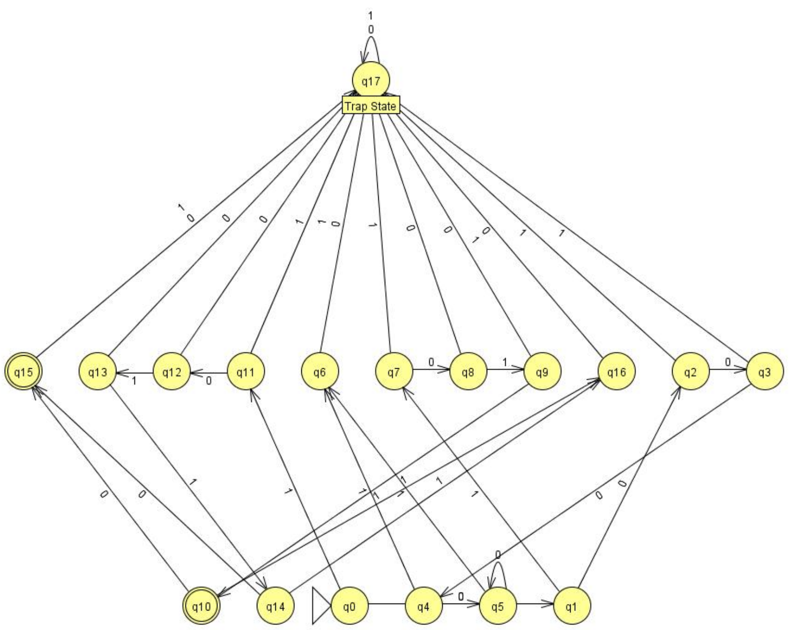
b) 所有倒数第 10 个符号是 1 的串的集合.

c) 以 01 开头或结尾（含同时）的串的集合.

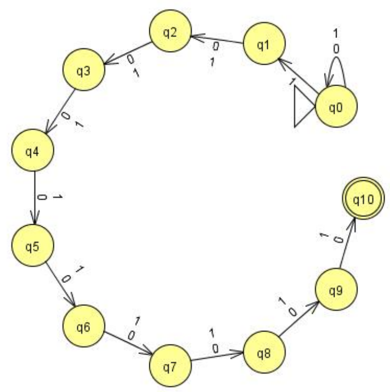
d) 0 的个数被 5 整除，1 的个数被 3 整除的串的集合.

解答.

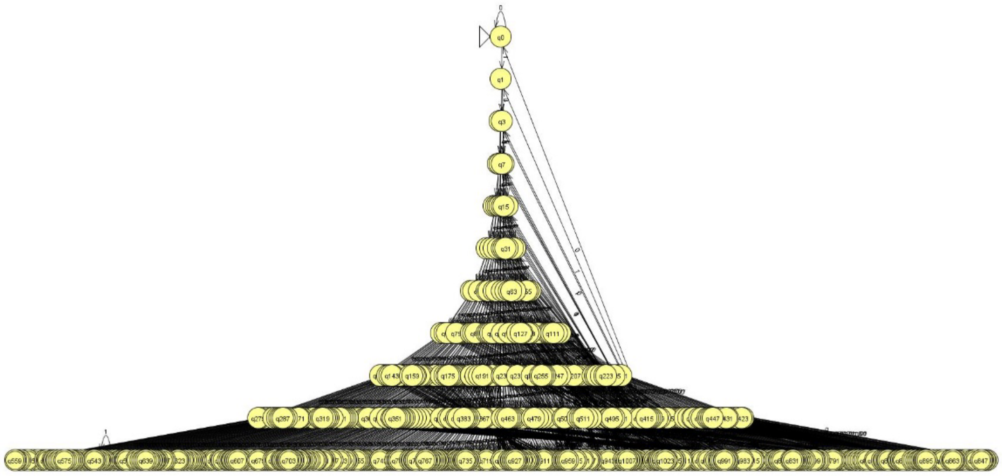
a)



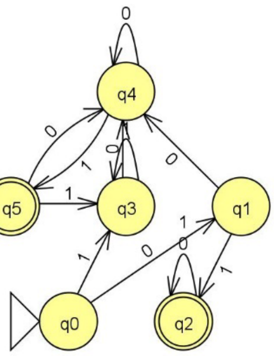
b) 本题对应的 NFA 为



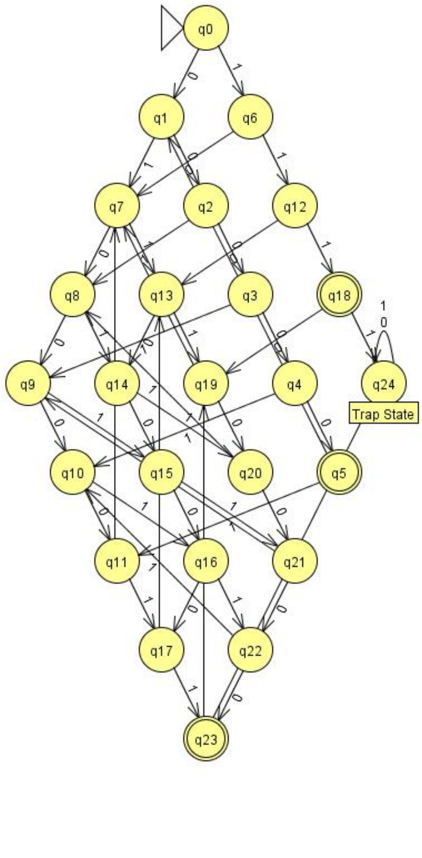
对应的 DFA 为



c)


q4
q5
q3
q1
q0
q2
0
1

d)


q0
q1
q6
q7
q2
q12
q8
q13
q3
q18
q9
q14
q19
q4
q24
Trap State
q10
q15
q20
q5
q11
q16
q21
q17
q22
q23
0
1

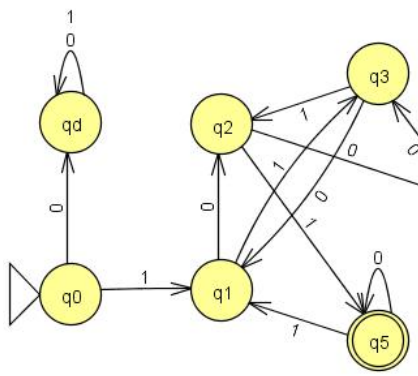
习题 2.2.6 给出接受下列在字母表 {0,1} 上的语言的 DFA：

a) 所有以 1 开头，当解释成二进制整数时是 5 的倍数的串的集合. 例如，串 101、1010 和 1111 都属于这个语言，而 0、100 和 111 则不属于.

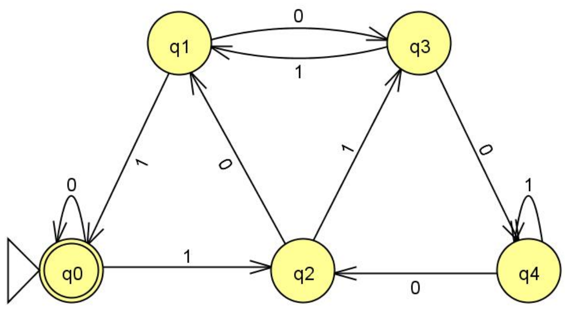
b) 所有倒过来解释成二进制整数时被 5 整除的串的集合. 属于这个语言的串的例子是 0、010011、1001100 和 0101.

解答.

a)



b)



习题 2.2.9 设 $A = (Q, \Sigma, \sigma, q_0, q_f)$ 是一个 DFA，假设对所有属于 Σ 的 a，有 $\sigma(q_0, a) = \sigma(q_f, a)$.

a) 证明：对所有 $w \neq \varepsilon$，有 $\hat{\sigma}(q_0, w) = \hat{\sigma}(q_f, w)$.

b) 证明：如果 x 是属于 $L(A)$ 的非空串，则对所有 $k > 0$，x^k（即 x 连写 k 遍）也属于 $L(A)$.

解答.

a) 令 $w = az \neq \varepsilon, |w| \geq 1, a \in \Sigma, |z| \geq 0$.

记 $\sigma(q_0,a)=\sigma(q_f,a)=q$.

$|z|=0$ 时，结论显然成立；$|z|>0$ 时，对同样的状态（q）输入同样的串（z），一定会到达相同的状态，即 $\hat{\sigma}(q,z)=\hat{\sigma}(q,z)$.

故有 $\hat{\sigma}(q_0,w)=\hat{\sigma}(q_f,w)$. 原命题得证.

b) 由 a) 有 $\forall w\neq\varepsilon,\hat{\sigma}(q_0,w)=\hat{\sigma}(q_f,w)$.

由 x 是属于 $L(A)$ 的非空串，有 $\hat{\sigma}(q_0,x)=q_f$.

故有 $\hat{\sigma}(q_0,x)=\hat{\sigma}(q_f,x)=q_f$.

$k=1$ 时，显然有 $\hat{\sigma}(q_0,x^k)=q_f$.

假设 $k=k_0>1$ 时，有 $\hat{\sigma}(q_0,x^k)=q_f$；那么 $k=k_0+1$ 时，有

$$\hat{\sigma}(q_0,x^k)=\hat{\sigma}(q_0,x^{k_0+1})=\hat{\sigma}(\hat{\sigma}(q_0,x^{k_0}),x)=\hat{\sigma}(q_f,x)=q_f$$

即 $\forall k>0$, $x^k\in L(A)$. 原命题得证.

习题 2. 2. 10 考虑下列转移表的 DFA：

	0	1
$\rightarrow A$	A	B
$*B$	B	A

非形式化地描述这个 DFA 接受的语言，通过对输入串的长度进行归纳，证明这个描述是正确的.

提示：当建立归纳假设时，断言什么样的输入导致每个状态，而不只是断言什么样的输入导致接受状态，这样更明智些.

解答. 这个 DFA 接受含有奇数个 1 的输入串. 要证明这个描述，只需证明 $\hat{\sigma}(A,w)=A$ 当且仅当 w 有偶数个 1.

$|w|=0$ 时，空串 w 一定含有偶数个 1（0 个 1），有 $\hat{\sigma}(A,w)=A$.

假设对短于 w 的字符串的语句 $z\,(w=za,a=0,1)$，命题成立. 那么有以下 2 种情况.

① $a=0$.

如果 w 有偶数个 1，则 z 也有. 根据归纳假设，有 $\hat{\sigma}(A,z)=A$. 由 DFA 的转移表，有 $\hat{\sigma}(A,w)=A$.

如果 w 有奇数个 1，则 z 也有. 根据归纳假设，有 $\hat{\sigma}(A,z)=B$. 由 DFA 的转移表，

有 $\hat{\sigma}(A,w)=B$.

因此，在这种情况下，$\hat{\sigma}(A,w)=A$ 当且仅当 w 有偶数个 1.

② $a = 1$.

如果 w 有偶数个 1，则 z 有奇数个 1. 根据归纳假设，有 $\hat{\sigma}(A,z)=B$. 由 DFA 的转移表，有 $\hat{\sigma}(A,w)=A$.

如果 w 有奇数个 1，则 z 有偶数个 1. 根据归纳假设，有 $\hat{\sigma}(A,z)=A$. 由 DFA 的转移表，有 $\hat{\sigma}(A,w)=B$.

因此，在这种情况下，$\hat{\sigma}(A,w)=A$ 当且仅当 w 有偶数个 1.

综上，原命题得证.

习题 2.2.11 对下列转移表重复习题 2.2.10.

	0	1
$\rightarrow * A$	B	A
$* B$	C	A
C	C	C

解答. 这个 DFA 接受不含有 00 的输入串. 要证明这个描述，只需证明当输入串 w 中不含有 00 时，若 w 以 0 结尾，则有 $\hat{\sigma}(A,w)=B$，否则 $\hat{\sigma}(A,w)=A$；当 w 中含有 00 时，$\hat{\sigma}(A,w)=C$.

$|w|=0$ 时，对于空串 w 一定有 w 中不含有 00 且不以 0 结尾，显然有 $\hat{\sigma}(A,w)=A$.

假设对短于 w 的字符串的语句 $z\,(w=za, a=0,1)$，命题成立. 那么有以下 2 种情况.

① $a = 0$.

如果 w 不含有 00，则 z 也没有，且 z 以 1 结尾. 根据归纳假设，有 $\hat{\sigma}(A,z)=A$. 由 DFA 的转移表，有 $\hat{\sigma}(A,w)=\sigma(\hat{\sigma}(A,z),0)=\sigma(A,0)=B$.

如果 w 含有 00，则 z 含有 00，或 z 不含有 00 但以 0 结尾. 根据归纳假设，有 $\hat{\sigma}(A,z)=C$ 或 $\hat{\sigma}(A,z)=B$. 由 DFA 的转移表，有 $\hat{\sigma}(A,w)=\sigma(\hat{\sigma}(A,z),0)=C$.

因此，在这种情况下，当输入串 w 中不含有 00 时，若 w 以 0 结尾，则有 $\hat{\sigma}(A,w)=B$，否则 $\hat{\sigma}(A,w)=A$；当 w 中含有 00 时，$\hat{\sigma}(A,w)=C$.

② $a = 1$.

如果 w 不含有 00，则 z 也没有. 根据归纳假设，有 $\hat{\sigma}(A,z)=A$ 或 $\hat{\sigma}(A,z)=B$. 由 DFA 的转移表，有 $\hat{\sigma}(A,w)=\sigma(\hat{\sigma}(A,z),1)=A$.

如果 w 含有 00，则 z 也有. 根据归纳假设，有 $\hat{\sigma}(A,z)=C$. 由 DFA 的转移表，有 $\hat{\sigma}(A,w)=\sigma(\hat{\sigma}(A,z),1)=\sigma(C,1)=C$.

因此，在这种情况下，当输入串 w 中不含有 00 时，若 w 以 0 结尾，则有 $\hat{\sigma}(A,w)=B$，否则 $\hat{\sigma}(A,w)=A$；当 w 中含有 00 时，$\hat{\sigma}(A,w)=C$.

综上，原命题得证.

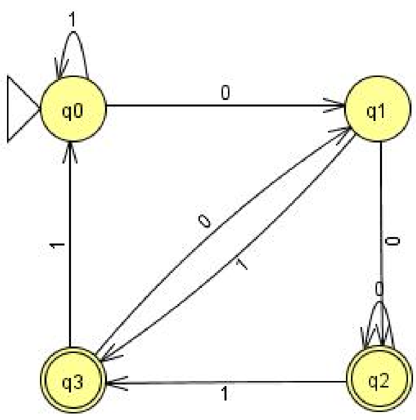
习题 2.3.3 把下列 NFA 转化为 DFA，并且非形式化地描述它接受的语言：

	0	1
$\rightarrow p$	$\{p,q\}$	$\{p\}$
q	$\{r,s\}$	$\{t\}$
r	$\{p,r\}$	$\{t\}$
$*s$	$\emptyset$	$\emptyset$
$*t$	$\emptyset$	$\emptyset$

解答. 转化成的 DFA 为

	0	1
$\rightarrow\{p\}$	$\{p,q\}$	$\{p\}$
$\{p,q\}$	$\{p,q,r,s\}$	$\{p,t\}$
$*\{p,q,r,s\}$	$\{p,q,r,s\}$	$\{p,t\}$
$*\{p,t\}$	$\{p,q\}$	$\{p\}$

重命名后在 JFLAP 中绘出即



它接受倒数第 2 位为 0 的输入串.

习题 2.3.4 给出接受下列语言的非确定型有穷自动机. 尝试尽可能多利用非确定性.

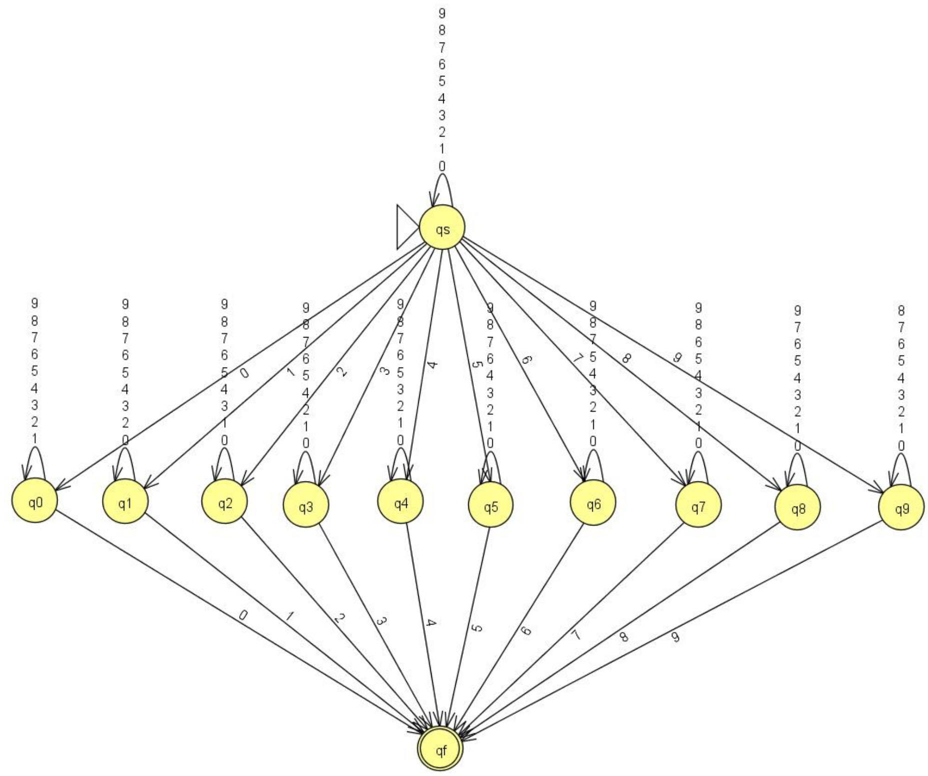
a) 在字母表 $\{0,1,\ldots,9\}$ 上的串的集合，使得结尾数字在前面出现过.

b) 在字母表 $\{0,1,\ldots,9\}$ 上的串的集合，使得结尾数字在前面没有出现过.

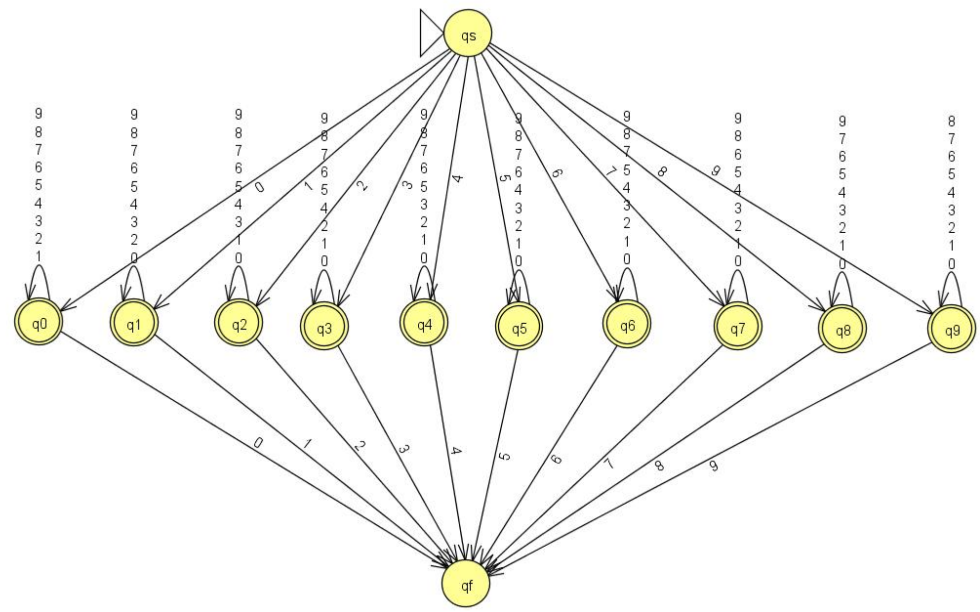
c) 0 和 1 的串的集合，使得有两个 0 间隔的位置数是 4 的倍数. 注意，0 算是 4 的倍数.

解答. 接受各语言的 NFA 如下所示.

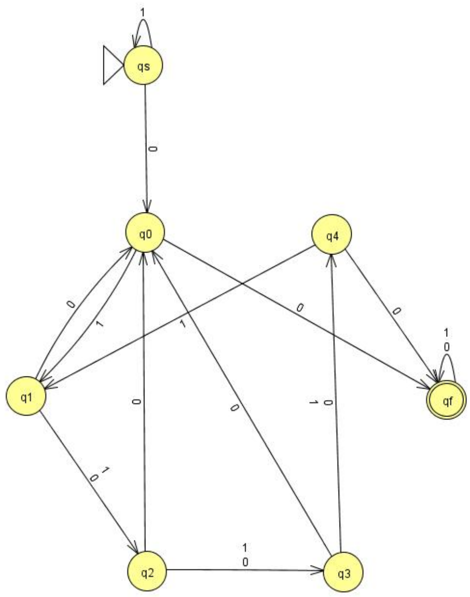
a)



b)



c)



习题 2.3.7 在例 2.13 中我们断言：NFA N 在读输入序列 w 后，对 $i=1,2,\dots,n$，处在状态 q_i 中，当且仅当 w 的倒数第 i 个符号是 1. 证明这个断言.

解答. 下面利用反证法证明.

假设在题设条件下，w 的倒数第 i 个符号为 0.

① 若倒数第 i 个符号输入后，N 处在状态 q_0（即 q_1 前的状态），那么在之后的输入中，N 最多可以到达状态 q_{i-1}，而不可能到达 q_i.

② 若倒数第 i 个符号输入后，N 处在状态 $q_f, 2 \le f < n$，

a. 若 $i \ge 2$，那么在之后的 $i-1$ 个输入后，N 处于状态 $q_{f+i-1}, f+i-1 \le n$，而 $f+i-1 \ge i+1$，那么此时不可能有 N 处在状态 q_i 中.

b. 若 $i=1$，那么 N 最终处于状态 q，又有 $f \ge 2$，故此时不可能有 N 处在状态 q_i 中.

综上，假设在所有情况下都与已知矛盾. 故为满足题设条件，w 的倒数第 i 个符号必为 1. 原命题得证.

习题 2.4.1 设计识别下列串的集合的 NFA.

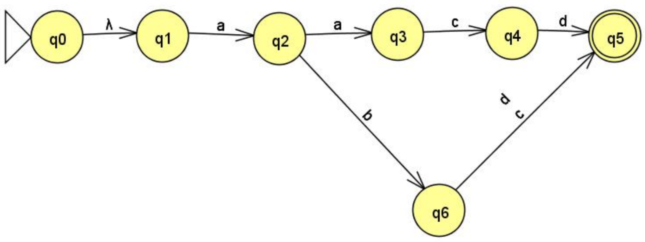
a) abc、abd 和 aacd，假设字母表是 $\{a,b,c,d\}$.

b) 0101、101 和 011.

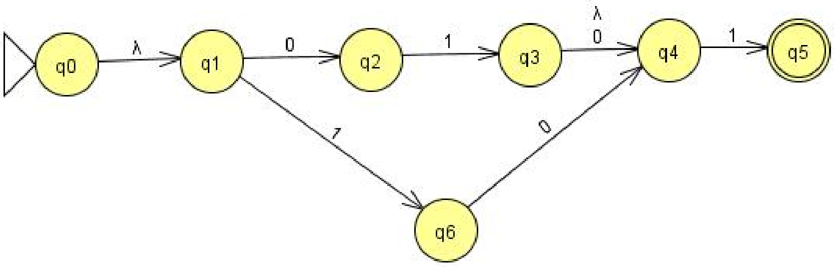
c) ab、bc 和 ca，假设字母表是 $\{a,b,c\}$.

解答. 各 NFA 如下所示.

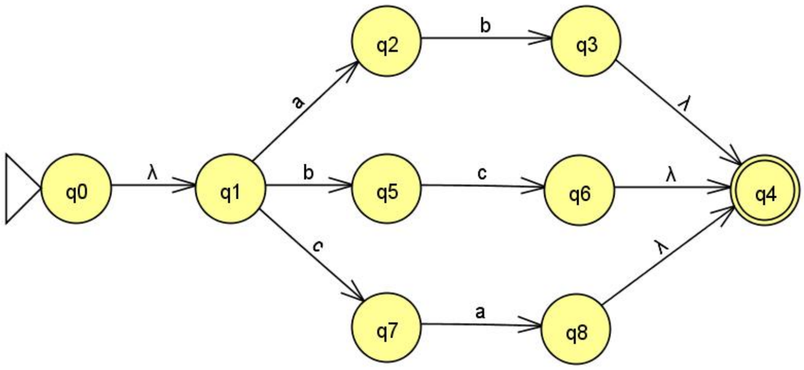
a)



b)



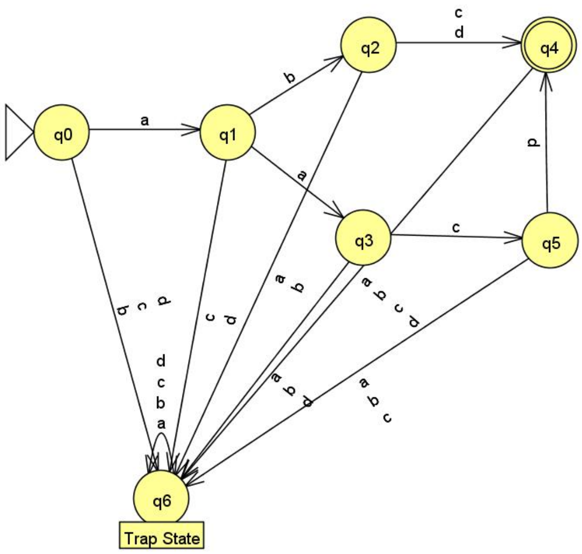
c)



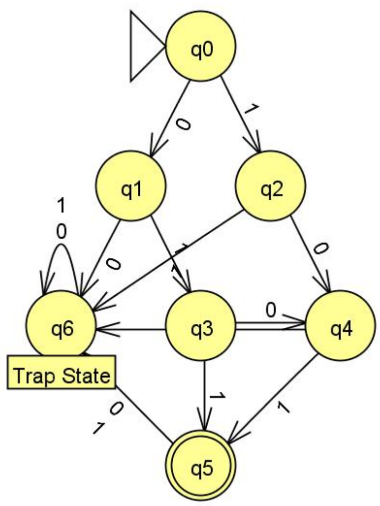
习题 2.4.2 把习题 2.4.1 的每个 NFA 转化成 DFA.

解答. 转化成的 DFA 如下所示.

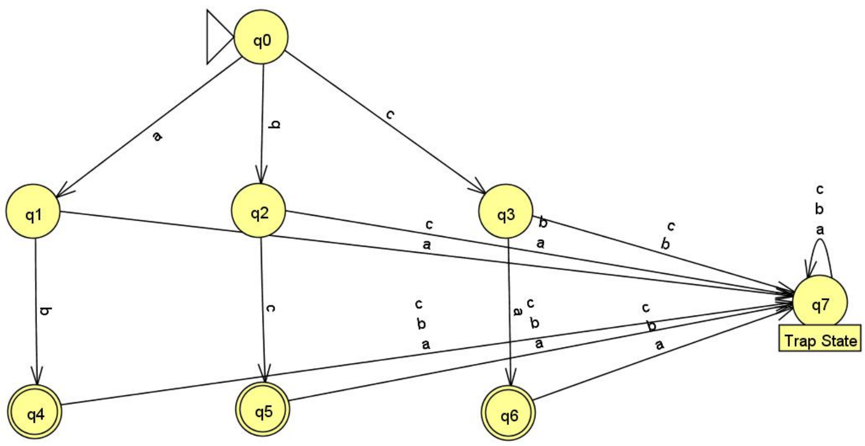
a)



b)



c)



习题 2 用 JFLAP 构建接受下列语言的 FA，其中，$\Sigma = \{0,1\}$：

1) 包含偶数个 0 和奇数个 1；

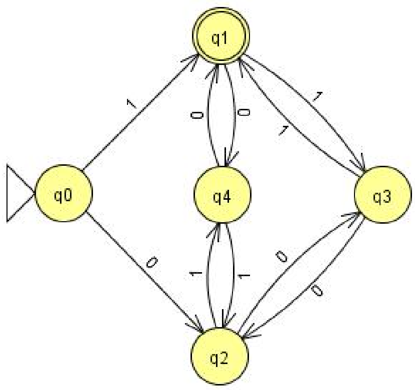
2) 包含偶数个 0，且至少 2 个 1；

3) 0 和 1 的个数要么都是偶数，要么都是奇数；

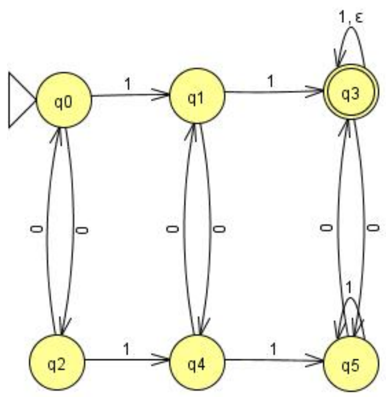
4) 任意个 0 后面跟随偶数个 1.

解答. 各小题对应的 FA 如下所示.

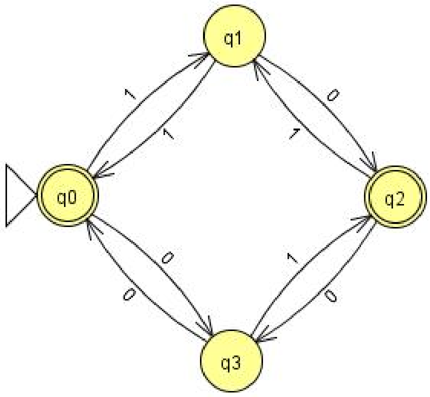
1)



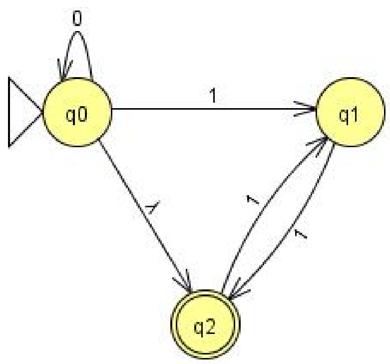
2)



3)

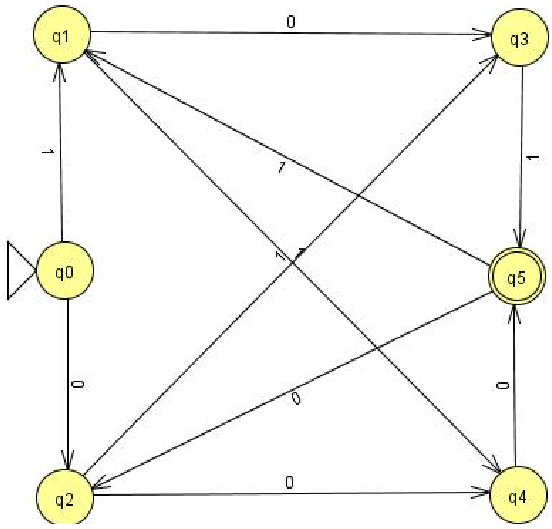


4)



习题 3 语言 $L = \{\, \omega \mid \omega = a_0b_0c_0a_1b_1c_1 \dots a_nb_nc_n, \frac{\begin{array}{r} a_n \dots a_1a_0 \\ +\, b_n \dots b_1b_0 \end{array}}{c_n \dots c_1c_0}, a_i, b_i, c_i \in \{0,1\}, n \geq 0, 0 \leq i \leq n,$ 这里的加号“ + ”代表二进制加 }，试判断 L 是不是正则语言. 如果不是的话，请说明理由；如果是的话，请用 JFLAP 构造.

解答. L 是正则语言. 识别该语言的 DFA 如下所示.


q0
q1
q2
q3
q4
q5
0
1