Econometría I
Teoría Asintótica

Ramiro de Elejalde

Facultad de Economía y Finanzas
Universidad Alberto Hurtado

Propiedades en muestras pequeñas de los estimadores

Propiedades asintóticas de los estimadores

- Convergencia en probabilidad
- Consistencia.
- Ley (débil) de los grandes números (LGN)
- Teorema de la función continua
- Diferencias entre insesgadez y consistencia
- Convergencia en distribución
- Distribución asintótica normal.
- Teorema de Slutsky
- Teorema de la función continua (para $\xrightarrow{d}$.)
- Método delta

Referencias: Cap. 7 y 8 Hansen (Introduction to Econometrics), y cap. 3 de Wooldridge.

Estimador

- Dada una muestra aleatoria podemos calcular un estimador para "aproximar" los parámetros poblacionales de interés.
- Nos interesa que el estimador tenga "buenas" propiedades.
- En este curso nos enfocamos en las propiedades del estimador cuando $N \to \infty$, las propiedades asintóticas.
  1. Cuando N crece, la distribución del estimador se concentra alrededor del parámetro (consistencia)
  2. Cuando N crece la distribución del estimador (estandarizada) se acerca a una distribución normal (distribución asintótica normal)
- En esta unidad vamos a estudiar teoremas que nos permitan obtener las propiedades asintóticas de los estimadores que vamos a estudiar durante el curso.

Propiedades en muestras pequeñas de los estimadores

Repaso de estadística

- Parámetro: Característica de la población de interés. Ejemplo: $\mu = \mathbb{E}(y)$

Repaso de estadística

- Parámetro: Característica de la población de interés. Ejemplo: $\mu = \mathbb{E}(y)$
- Muestra aleatoria: Muestra de tamaño N de la población obtenida en forma aleatoria y con reeemplazo $\{y_1, y_2, ..., y_N\}$.
  El muestreo aleatorio nos asegura que $y_1, y_2, ..., y_N$ se distribuyen i.i.d.

- Parámetro: Característica de la población de interés. Ejemplo: $\mu = \mathbb{E}(y)$
- Muestra aleatoria: Muestra de tamaño N de la población obtenida en forma aleatoria y con reeemplazo $\{y_1, y_2, ..., y_N\}$.
  El muestreo aleatorio nos asegura que $y_1, y_2, ..., y_N$ se distribuyen i.i.d.
- Estimador: Un estadístico (función de las variables muestrales) que se utiliza para estimar un parámetro de interés. Ejemplo: Media muestral $\bar{y} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i$.

Repaso de estadística

- Parámetro: Característica de la población de interés. Ejemplo: $\mu = \mathbb{E}(y)$
- Muestra aleatoria: Muestra de tamaño N de la población obtenida en forma aleatoria y con reeemplazo $\{y_1, y_2, ..., y_N\}$.
  El muestreo aleatorio nos asegura que $y_1, y_2, ..., y_N$ se distribuyen i.i.d.
- Estimador: Un estadístico (función de las variables muestrales) que se utiliza para estimar un parámetro de interés. Ejemplo: Media muestral $\bar{y} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i$.
- Recordar las propiedades de la varianza $\mathrm{Var}(y)$
  - $\mathrm{Var}(a + bx) = b^2\,\mathrm{Var}(x)$
  - $\mathrm{Var}(bx + cy) = b^2\,\mathrm{Var}(x) + c^2\,\mathrm{Var}(y) + 2bc\,\mathrm{Cov}(x, y)$

Propiedades en muestras pequeñas de los estimadores

- Insesgadez: Un estimador $\hat{\theta}_N$ de un parámetro θ es insesgado si,

$$\mathbb{E}(\hat{\theta}_N) = \theta \text{ para todo } N.$$

Propiedades en muestras pequeñas de los estimadores

- Eficiencia: Un estimador $\hat{\theta}_N$ de un parámetro θ es eficiente si,

$$\mathrm{Var}(\hat{\theta}_N) \leq \mathrm{Var}(\tilde{\theta}_N),$$

  para todo $\tilde{\theta}_N$ en una familia de estimadores de θ con ciertas propiedades (por ejemplo, insesgados y lineales).

Ejemplo: Media muestral

- Dada una muestra i.i.d. $\{y_1, ..., y_N\}$ con $\mathbb{E}(y_i) = \mu$ y $\text{Var}(y_i) = \sigma^2$
- Parámetro: μ.
- Estimador: media muestral

$$\bar{y} = \frac{1}{N} \sum_i y_i.$$

Ejemplo: Media muestral

- Insesgadez: $\mathbb{E}(\bar{y}) = \mu$

Ejemplo: Media muestral

- Eficiencia: $\text{Var}(\bar{y}) = \frac{\sigma^2}{N}$

Propiedades asintóticas de los estimadores

Convergencia de variables aleatorias

- El análisis asintótico se ocupa de estudiar la convergencia de una secuencia de variables aleatorias.
- Cuando aplicamos estos conceptos a econometría, las variables aleatorias son estimadores cuya distribución depende del tamaño de la muestra N y buscamos la distribución del estimador cuando $N \to \infty$.

Ejemplos

- Una secuencia determinística puede ser $\{a_N\}_{N=1}^{\infty}$ donde $a_N = \{2 + \frac{1}{N}\}$.

Ejemplos

- Una secuencia de variables aleatorias puede ser

$$z_N = \begin{cases} 0 & \text{con probabilidad } 1 - \frac{1}{N}, \\ N & \text{con probabilidad } \frac{1}{N}, \end{cases}$$

Ejemplos

- La media muestral para una muestra de tamaño N: $\bar{y}_N$. La secuencia es $\{\bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots\}$.

Convergencia para secuencias determinísticas

- Una secuencia determinística a_N converge a a cuando $N \to \infty$ si para todo $\delta > 0$ existe $N_\delta < \infty$ tal que,

$$|a_N - a| \leq \delta \quad \text{para todo } N \geq N_\delta.$$

- Notación: $a_N \to a$ ó $\lim a_N = a$

Convergencia para secuencias determinísticas

- Ejemplo: La secuencia determinística $\{a_N\}_{N=1}^{\infty}$ donde $a_N = \{2 + \frac{1}{N}\}$ converge a $\lim_{N\to\infty} a_N = 2$.

Convergencia en probabilidad

- Una variable aleatoria z_N converge en probabilidad a una constante c cuando $N \to \infty$ si para todo $\delta > 0$,

$$\lim_{N \to \infty} \Pr(|z_N - c| \leq \delta) = 1$$

- Notación: $z_N \xrightarrow{p} c$ ó $\operatorname{plim} z_N = c$

Convergencia en probabilidad

- Ejemplo: Calcule la convergencia en probabilidad de z_N

$$z_N = \begin{cases} 0 & \text{con probabilidad } 1 - \frac{1}{N}, \\ N & \text{con probabilidad } \frac{1}{N}, \end{cases}$$

Convergencia en probabilidad

- Ejemplo: Calcule la convergencia en probabilidad de z_N

$$z_N = \begin{cases} 0 & \text{con probabilidad } 1 - \frac{1}{N}, \\ N & \text{con probabilidad } \frac{1}{N}, \end{cases}$$

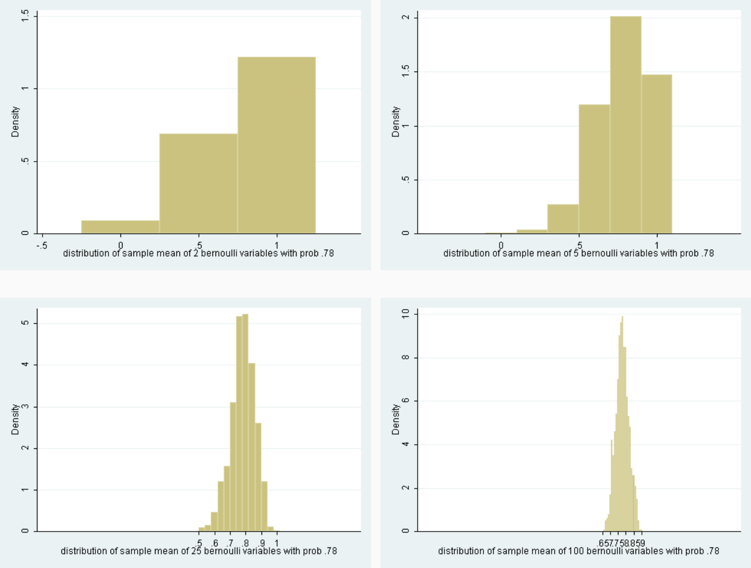
- Respuesta: $z_N \xrightarrow{p} 0$.

Consistencia

- Consistencia: Un estimador $\hat{\theta}_N$ de un parámetro θ es consistente si,

$$\hat{\theta}_N \xrightarrow{p} \theta \text{ cuando } N \to \infty.$$

Ejemplo: Bernoulli con p=0.78



Ley (débil) de los grandes números (LGN)

- Dada una muestra i.i.d. de tamaño N, si $\mathbb{E}\,|y| < \infty$, entonces cuando $N \to \infty$,

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i \xrightarrow{p} \mathbb{E}(y).$$

Ley (débil) de los grandes números (LGN)

- Dada una muestra i.i.d. de tamaño N, si $\mathbb{E}\,|y| < \infty$, entonces cuando $N \to \infty$,

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i \xrightarrow{p} \mathbb{E}(y).$$

- Extensión para vectores aleatorios. Definimos a $\mathbf{y} : \mathbb{R}^m \times 1$. Dada una muestra i.i.d. de tamaño N, si $\mathbb{E}\,|\mathbf{y}| < \infty$, entonces cuando $N \to \infty$,

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \mathbf{y}_i \xrightarrow{p} \mathbb{E}(\mathbf{y}).$$

Ejemplos

- Media muestral

$$\bar{y} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i \xrightarrow{p} \mu$$

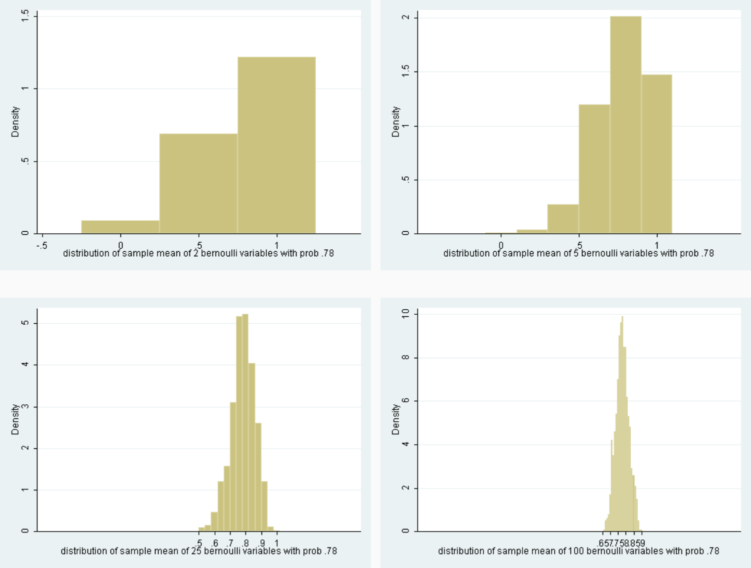
donde $\mu = \mathbb{E}(y)$.

Ejemplos

- Media muestral de y_i^2

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i^2 \xrightarrow{p} \mathbb{E}(y^2)$$

Ejemplo: Distribución muestral para $\bar{y}_N$ de Bernoulli con p=0.78



Teorema de la función continua

- Si $z_N \xrightarrow{p} c$ cuando $N \to \infty$, y $g(.)$ es continua en c, entonces

$$g(z_N) \xrightarrow{p} g(c) \text{ cuando } N \to \infty.$$

Ejemplos

- Varianza muestral

$$
\begin{aligned}
S^2 &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(y_i - \bar{y})^2 \\
&= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i^2 - \bar{y}^2 \xrightarrow{p} \sigma^2,
\end{aligned}
$$

donde $\sigma^2 = \mathrm{Var}(y)$.

Ejemplos

- Desviación estándar muestral: $S \xrightarrow{p} \sigma$

Diferencias entre insesgadez y consistencia

- Insesgadez no implica consistencia.

  Ejemplo: $\tilde{y} = y_1$

Diferencias entre insesgadez y consistencia

- Insesgadez no implica consistencia.

  Ejemplo: $\tilde{y} = y_1$
- Consistencia no implica insesgadez.

  Ejemplo: Varianza muestral S^2

Diferencias entre insesgadez y consistencia

- Insesgadez no implica consistencia.

  Ejemplo: $\tilde{y} = y_1$

- Consistencia no implica insesgadez.

  Ejemplo: Varianza muestral S^2

- Teorema: Si $\lim_{N\to\infty} \mathbb{E}(\hat{\theta}_N) = \theta$ y $\lim_{N\to\infty} \text{Var}(\hat{\theta}_N) = 0$, entonces $\hat{\theta}_N \xrightarrow{p} \theta$ cuando $N \to \infty$.

Diferencias entre insesgadez y consistencia

- Insesgadez no implica consistencia.

  Ejemplo: $\tilde{y} = y_1$

- Consistencia no implica insesgadez.

  Ejemplo: Varianza muestral S^2

- Teorema: Si $\lim_{N\to\infty} \mathbb{E}(\hat{\theta}_N) = \theta$ y $\lim_{N\to\infty} \mathrm{Var}(\hat{\theta}_N) = 0$, entonces $\hat{\theta}_N \xrightarrow{p} \theta$ cuando $N \to \infty$.

- Insesgadez asintótica no implica consistencia, y consistencia no implica insesgadez asintótica.

Diferencias entre insesgadez y consistencia

- Insesgadez no implica consistencia.

  Ejemplo: $\tilde{y} = y_1$

- Consistencia no implica insesgadez.

  Ejemplo: Varianza muestral S^2

- Teorema: Si $\lim_{N\to\infty} \mathbb{E}(\hat{\theta}_N) = \theta$ y $\lim_{N\to\infty} \text{Var}(\hat{\theta}_N) = 0$, entonces $\hat{\theta}_N \xrightarrow{p} \theta$ cuando $N \to \infty$.

- Insesgadez asintótica no implica consistencia, y consistencia no implica insesgadez asintótica.

  Ejemplo donde consistencia no implica insesgadez asintótica: $z_N = 0$ con probabilidad $1 - 1/N$, y $z_N = N$ con probabilidad $1/N$.

Convergencia en distribución

- Dada una variable aleatoria con función de distribución $F_N(u) = \Pr(z_N \leq u)$. z_N converge en distribución a z cuando $N \to \infty$ si para todo u en donde $F(u) = \Pr(z \leq u)$ es continua,

$$F_N(u) \to F(u) \text{ cuando } N \to \infty.$$

Convergencia en distribución

- Ejemplo: Demuestre que

$$F_N(u) = \frac{\exp(Nu)}{1+\exp(Nu)} \to F(u) = \begin{cases} 0 & \text{si } u < 0, \\ 1 & \text{si } u \geq 0. \end{cases}$$

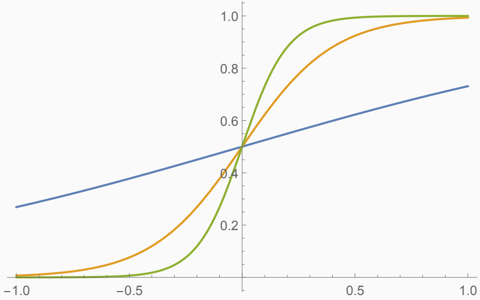


Figure 1: N=1 (azul), N=5 (naranja), N=10 (verde)

Convergencia en distribución

- Dada una variable aleatoria con función de distribución $F_N(u) = \Pr(z_N \leq u)$. z_N converge en distribución a z cuando $N \to \infty$ si para todo u en donde $F(u) = \Pr(z \leq u)$ es continua,

$$F_N(u) \to F(u) \text{ cuando } N \to \infty.$$

- Notación: $z_N \xrightarrow{d} z$.

Convergencia en distribución

- Dada una variable aleatoria con función de distribución $F_N(u) = \Pr(z_N \leq u)$. z_N converge en distribución a z cuando $N \to \infty$ si para todo u en donde $F(u) = \Pr(z \leq u)$ es continua,

$$F_N(u) \to F(u) \text{ cuando } N \to \infty.$$

- Notación: $z_N \xrightarrow{d} z$.
- Convergencia en probabilidad implica convergencia en distribución: $z_N \xrightarrow{p} z \implies z_N \xrightarrow{d} z$.

Convergencia en distribución

- Dada una variable aleatoria con función de distribución $F_N(u) = \Pr(z_N \leq u)$. z_N converge en distribución a z cuando $N \to \infty$ si para todo u en donde $F(u) = \Pr(z \leq u)$ es continua,

$$F_N(u) \to F(u) \text{ cuando } N \to \infty.$$

- Notación: $z_N \xrightarrow{d} z$.
- Convergencia en probabilidad implica convergencia en distribución: $z_N \xrightarrow{p} z \implies z_N \xrightarrow{d} z$.
- Si z_N converge en distribución a una constante entonces z_N converge en probabilidad a dicha constante: $z_N \xrightarrow{d} c \implies z_N \xrightarrow{p} c$

Distribución asintótica normal

- Un estimador $\hat{\theta}_N$ de un parámetro θ se distribuye $\sqrt{N}$-asintóticamente normal si,

$$\sqrt{N}(\hat{\theta}_N - \theta) \xrightarrow{d} \text{Normal}(0, V),$$

donde V es la varianza asintótica de $\sqrt{N}(\hat{\theta}_N - \theta)$ y se denota $\text{AVar}(\sqrt{N}(\hat{\theta}_N - \theta)) = V$.

Distribución asintótica normal

- Decimos $\hat{\theta}_N \overset{a}{\sim} \text{Normal}(\theta, V/N)$ donde $\text{AVar}(\hat{\theta}_N) = V/N$ es la varianza asintótica de $\hat{\theta}_N$ y $sd(\hat{\theta}_N) = V^{1/2}/\sqrt{N}$ es la desviación estandar asintótica de $\hat{\theta}_N$.

Distribución asintótica normal

- Un estimador $\hat{\theta}_N$ de un parámetro θ se distribuye $\sqrt{N}$-asintóticamente normal si,

$$\sqrt{N}(\hat{\theta}_N - \theta) \xrightarrow{d} \text{Normal}(0, V),$$

  donde V es la varianza asintótica de $\sqrt{N}(\hat{\theta}_N - \theta)$ y se denota $\text{AVar}(\sqrt{N}(\hat{\theta}_N - \theta)) = V$.
- Si no conocemos V ¿cómo calculamos el $sd(\hat{\theta}_N)$?

Distribución asintótica normal

- Un estimador $\hat{\theta}_N$ de un parámetro θ se distribuye $\sqrt{N}$-asintóticamente normal si,

$$\sqrt{N}(\hat{\theta}_N - \theta) \xrightarrow{d} \text{Normal}(0, V),$$

  donde V es la varianza asintótica de $\sqrt{N}(\hat{\theta}_N - \theta)$ y se denota $\text{AVar}(\sqrt{N}(\hat{\theta}_N - \theta)) = V$.
- Si no conocemos V ¿cómo calculamos el $sd(\hat{\theta}_N)$?
- Si tenemos un estimador consistente de V, $\hat{V}_N \xrightarrow{p} V$, utilizamos $se(\hat{\theta}_N) = \hat{V}_N^{1/2}/\sqrt{N}$ y lo llamamos error estándar asintótico de $\hat{\theta}_N$

Lindeberg-Lévy Teorema Central del límite (TCL)

- Dada una muestra i.i.d. de tamaño N, si $\text{Var}(y) < \infty$, entonces cuando $N \to \infty$,

$$\sqrt{N}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(y_i - \mathbb{E}(y)) \xrightarrow{d} \text{Normal}(0, \text{Var}(y)).$$

Lindeberg-Lévy Teorema Central del límite (TCL)

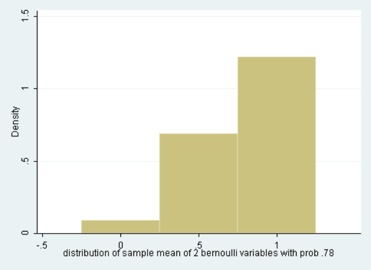
- Dada una muestra i.i.d. de tamaño N, si $\text{Var}(y) < \infty$, entonces cuando $N \to \infty$,

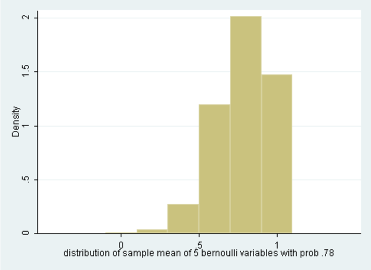
$$\sqrt{N}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(y_i - \mathbb{E}(y)) \xrightarrow{d} \text{Normal}(0, \text{Var}(y)).$$

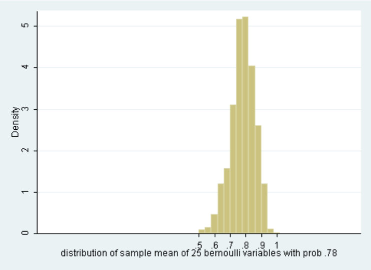
- También se suele escribir:

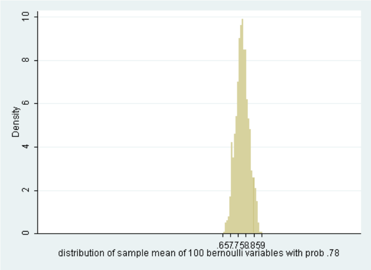
$$\sqrt{N}\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i - \mathbb{E}(y)\right) \xrightarrow{d} \text{Normal}(0, \text{Var}(y)).$$

Ejemplo: Bernoulli con p=0.78

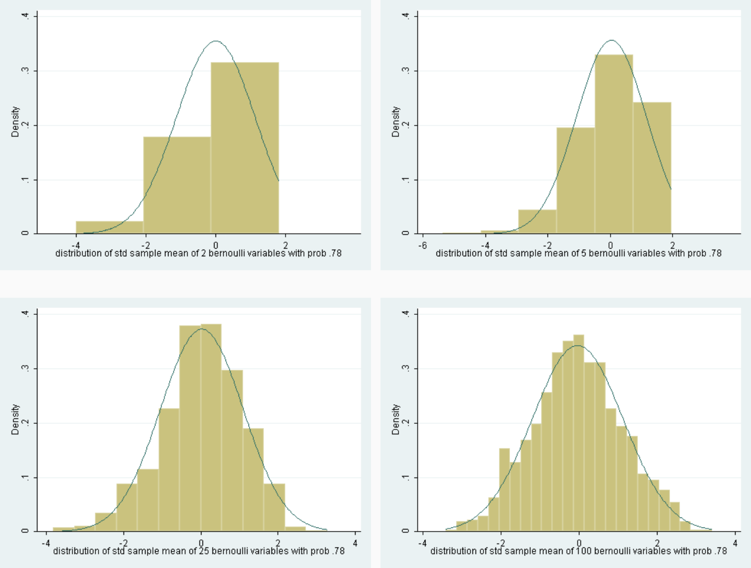








Ejemplo: Distribución muestral de $\sqrt{N}(\hat{p} - p)$ para Bernoulli con p=0.78



Lindeberg-Lévy Teorema Central del límite (TCL)

- Extensión para vectores aleatorios. Definimos a $\mathbf{y} : \mathbb{R}^m \times 1$ y $\text{Var}(\mathbf{y}) = \mathbb{E}[(\mathbf{y} - \mu)(\mathbf{y} - \mu)']$. Dada una muestra i.i.d. de tamaño N, si $\mathbb{E}\,|\mathbf{y}| < \infty$, entonces cuando $N \to \infty$,

$$\sqrt{N}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(\mathbf{y}_i - \mathbb{E}(\mathbf{y})) \xrightarrow{d} \text{Normal}(0, \text{Var}(\mathbf{y})).$$

Ejemplo

- Media muestral

$$\sqrt{N}(\bar{y} - \mu) \xrightarrow{d} \text{Normal}(0, \sigma^2).$$

Ejemplo

- Media muestral

$$\sqrt{N}(\bar{y} - \mu) \xrightarrow{d} \text{Normal}(0, \sigma^2).$$

- Decimos

$$\bar{y} \overset{a}{\sim} \text{Normal}(\mu, \sigma^2/N),$$

$$sd(\bar{y}) = \sigma/\sqrt{N}.$$

Ejemplo

- Media muestral

$$\sqrt{N}(\bar{y} - \mu) \xrightarrow{d} \text{Normal}(0, \sigma^2).$$

- Decimos

$$\bar{y} \overset{a}{\sim} \text{Normal}(\mu, \sigma^2/N),$$

$$sd(\bar{y}) = \sigma/\sqrt{N}.$$

- Para vectores tenemos un resultado similar

$$\sqrt{N}\,(\bar{\mathbf{y}} - \boldsymbol{\mu}) \xrightarrow{d} \text{Normal}(0, \boldsymbol{\Sigma}),$$

Teorema de Slutsky

- Si $z_N \xrightarrow{d} z$ y $c_N \xrightarrow{p} c$ donde c es una constante, cuando $N \to \infty$, entonces
    1. $c_N + z_N \xrightarrow{d} c + z$,
    2. $c_N z_N \xrightarrow{d} c\, z$,
    3. $\frac{z_N}{c_N} \xrightarrow{d} \frac{z}{c}$ si $c \neq 0$.

Teorema de Slutsky

- Ejemplos: Suponga que $z_N \xrightarrow{d} z \sim \text{Normal}(\mu, \sigma^2)$. Encuentre la distribución de asintótica de
  1. $c_N + z_N$,
  2. $c_N z_N$,
  3. $\frac{z_N}{c_N}$.

Teorema de Slutsky

- Ejemplos: Suponga que $z_N \xrightarrow{d} z \sim \text{Normal}(\mu, \sigma^2)$ entonces
  1. $c_N + z_N \xrightarrow{d} c + z \sim \text{Normal}(c + \mu, \sigma^2)$,
  2. $c_N z_N \xrightarrow{d} cz \sim \text{Normal}(c\mu, c^2\sigma^2)$,
  3. $\frac{z_N}{c_N} \xrightarrow{d} \frac{z}{c} \sim \text{Normal}(\frac{\mu}{c}, \frac{\sigma^2}{c^2})$.

Ejemplo: Media muestral con varianza muestral

- Para y escalar

$$\sqrt{N}\frac{(\bar{y}-\mu)}{\sqrt{S^2}} \xrightarrow{d} \text{Normal}(0,1).$$

Ejemplo

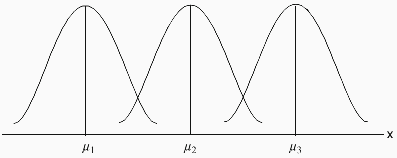
- Varianza muestral

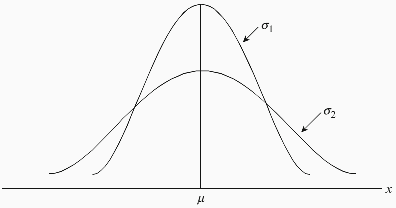
$$\sqrt{N}(S^2 - \sigma^2) \xrightarrow{d} \text{Normal}(0, \mu_4 - (\sigma^2)^2)$$

donde $\mu_4 = \mathbb{E}[(y - \mathbb{E}(y))^4]$.

Repaso de estadística: Funciones de distribución

- Normal univariante: $x \sim \text{Normal}(\mu, \sigma^2)$; normal estandarizada: $z \sim \text{Normal}(0, 1)$
- Normal multivariante: $\mathbf{x} \sim \text{Normal}(\mu, \Sigma)$ donde $\mathbf{x} : K \times 1$, $\mu : K \times 1$ y $\Sigma : K \times K$.





Repaso de estadística: Funciones de distribución

- Normal univariante: $x \sim \text{Normal}(\mu, \sigma^2)$; normal estandarizada: $z \sim \text{Normal}(0, 1)$
- Normal multivariante: $\mathbf{x} \sim \text{Normal}(\mu, \Sigma)$ donde $\mathbf{x} : K \times 1$, $\mu : K \times 1$ y $\Sigma : K \times K$.

  Propiedades:

  - Dada $\mathbf{x} \sim \text{Normal}(\mu, \Sigma)$ y $a : K \times 1$ entonces $a'\mathbf{x} \sim \text{Normal}(a'\mu, a'\Sigma a)$.
  - Dada $\mathbf{x} \sim \text{Normal}(\mu, \Sigma)$ y $A : Q \times K$ entonces $A\mathbf{x} \sim \text{Normal}(A\mu, A\Sigma A')$.
  - Dada $\mathbf{x} \sim \text{Normal}(\mu, \Sigma)$. Entonces $\{x_1, ..., x_K\}$ son independientes si y sólo si Σ es diagonal.

- Ejemplo: Normal bivariante. Obtener función de distribución de $x + y$.

Repaso de álgebra de matrices

- Dado $A \geq 0$ (semidefinida positiva) podemos encontrar B tal que $A = BB'$. Llamamos a $B = A^{1/2}$ (por razones obvias).
- Propiedad: $B^{-1}AB'^{-1} = B^{-1}BB'B'^{-1} = I$. Llamamos a $B^{-1} = A^{-1/2}$.
- Para resumir: dado $A \geq 0$ siempre podemos definir una matriz $A^{-1/2}$ que verifica $A^{-1/2}AA'^{-1/2} = I$.

Ejemplo

- Ejemplo: Si $\mathbf{x} \sim \text{Normal}(0, \Sigma)$ entonces $\Sigma^{-\frac{1}{2}}\mathbf{x} \sim \text{Normal}(0, I_K)$.

Ejemplo: Media muestral con varianza muestral

- Para $\mathbf{y} : K \times 1$

$$\sqrt{N}\widehat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1/2}(\bar{\mathbf{y}} - \boldsymbol{\mu}) \xrightarrow{d} \text{Normal}(0, I_K).$$

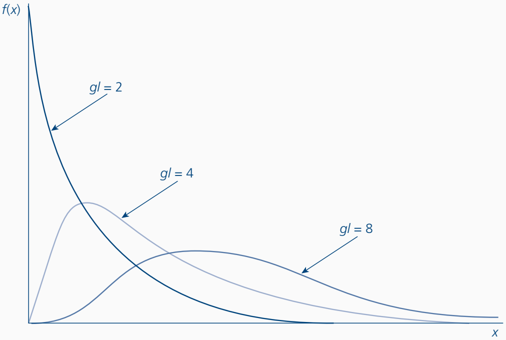
donde $\text{Var}(\mathbf{y}) = \boldsymbol{\Sigma}$ y $\widehat{\boldsymbol{\Sigma}} \xrightarrow{p} \boldsymbol{\Sigma}$.

Teorema de la función continua (para $\xrightarrow{d}$)

- Si $z_N \xrightarrow{d} z$ cuando $N \to \infty$ y $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ tiene un conjunto de puntos de discontinuidad D_g tales que $\Pr(z \in D_g) = 0$, entonces

$$g(z_N) \xrightarrow{d} g(z) \text{ cuando } N \to \infty.$$

- Chi-cuadrado χ^2_Q
- Dadas $\{z_1, ..., z_Q\}$ independientes y $z_j \sim \text{Normal}(0,1)$ entonces $y = \sum_{j=1}^{Q} z_j^2$ se distribuye como una χ^2_Q.



Ejemplo

- Para y escalar

$$N\frac{(\bar{y}-\mu)^2}{S^2} \xrightarrow{d} \chi^2_1.$$

Ejemplo

- Para $\mathbf{y} : K \times 1$

$$N\left(\bar{\mathbf{y}} - \boldsymbol{\mu}\right)' \widehat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1} \left(\bar{\mathbf{y}} - \boldsymbol{\mu}\right) \xrightarrow{d} \chi^2_K.$$

Método delta

- Si $\sqrt{N}(\hat{\theta}_N - \theta) \xrightarrow{d} \text{Normal}(0, V)$ donde θ es $m \times 1$, y $g(\theta) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ es continuamente diferenciable en la vecindad de θ, entonces cuando $N \to \infty$

$$\sqrt{N}(g(\hat{\theta}_N) - g(\theta)) \xrightarrow{d} \text{Normal}(0, G'VG),$$

donde $G(z) = \frac{\partial}{\partial z} g(z)'$ y $G = G(\theta)$.

Ejemplos

- Media muestral al cuadrado: $\bar{y}^2$

$$\sqrt{N}(\bar{y}^2 - \mu^2) \xrightarrow{d} \text{Normal}(0, 4\mu^2\sigma^2).$$

Nota: Diferencia con la distribución asintótica de $N(\bar{y} - \mu)^2$.

Ejemplos

- Dado el vector aleatorio (x_1, x_2) con

$$\mathbb{E}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}$$

y

$$\text{Var}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$$

¿Cuál es la distribución asintótica de $z_N = \log(\bar{x}_1) + \log(\bar{x}_2)$

Ejemplos

- Dado el vector aleatorio (x_1, x_2) con

$$\mathbb{E}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}$$

  y

$$\mathrm{Var}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$$

  ¿Cuál es la distribución asintótica de $z_N = \log(\bar{x}_1) + \log(\bar{x}_2)$

- Respuesta

$$\sqrt{N}((\log(\bar{x}_1) + \log(\bar{x}_2)) - (\log \mu_1 + \log \mu_2))$$
$$\xrightarrow{d} \mathrm{Normal}(0, \frac{\sigma_1^2}{\mu_1^2} + \frac{\sigma_2^2}{\mu_2^2} + 2\frac{\sigma_{12}}{\mu_1 \mu_2})$$