Macroeconomía I

Modelos de Crecimiento Endógeno

Mauricio M. Tejada

Magister en Economía
Universidad Alberto Hurtado

Contenidos

Introducción

- Desde las contribuciones de Romer (1986) y Lucas (1988) la teoría del crecimiento económico se convierte en uno de los campos de investigación más activos de los últimos tiempos.
- Los modelo de Crecimiento Endógeno son modelos en los cuales, a diferencia del modelo de Ramsey-Cass-Koopmans, el crecimiento económico surge de forma endógena.
- La idea central es incorporar explícitamente al modelo otros factores reproducibles (como capital humano) o la generación de nuevas tecnologías, tal que la economía puede experimentar crecimiento sin acudir a un factor exógeno.
- La tecnología surge o bien como subproducto de la actividad económica o bien como fruto de una actividad (I+D) guiada por incentivos económicos individuales.
- La literatura sobre crecimiento endógeno es muy extensa y aquí nos limitaremos a ver algunos ejemplos del tipo de modelos que se suelen utilizar.

Modelos de Primera Generación

El Modelo AK: Asignación Centralizada

- El producto total de la economía esta dado por:

$$Y_t = F(K_t, L_t) = AK_t$$

  donde $A > 0$ es un parámetros exógeno y N_t no crece.

- En forma intensiva:

$$y_t = F(k_t, 1) = Ak_t$$

- El planificado social resuelve el siguiente problema:

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t) \\ s.a \quad & c_t + k_{t+1} = Ak_t + (1-\delta)k_t \end{aligned}$$

  donde

El Modelo AK: Asignación Centralizada

- Las CPO son:

$$\begin{aligned} \frac{u'(c_t)}{u'(c_{t+1})} &= \beta(1+A-\delta) \\ c_t + k_{t+1} &= (1+A-\delta)k_t \\ \lim_{t\to\infty} \beta^t u'(c_t)k_{t+1} &= 0 \end{aligned}$$

- Suponga $u(c_t) = \frac{c_t^{1-\sigma}-1}{1-\sigma}$, la ecuación de Euler es:

$$\frac{c_{t+1}}{c_t} = [\beta(1+A-\delta)]^{\frac{1}{\sigma}}$$

alternativamente:

$$\ln c_{t+1} - \ln c_t = \frac{1}{\sigma}[\ln(1+A-\delta) - \ln(1+\rho)]$$

- El crecimiento del consumo es proporcional a la diferencia entre el retorno neto del capital y la tasa de descuento.

El Modelo AK: Asignación Centralizada

- La restricción de recursos es:

$$c_t + k_{t+1} = (1 + A - \delta)k_t$$

- La restricción de recursos es lineal en k y las preferencias son homotéticas: *La función de política debiera ser lineal.*
- Nuestra conjetura de solución es:

$$\begin{aligned} c_t &= (1 - s)(1 + A - \delta)k_t \\ k_{t+1} &= s(1 + A - \delta)k_t \end{aligned}$$

donde s es un coeficiente que debe ser determinado.

- Note que bajo nuestra conjetura:

$$\frac{k_{t+1}}{k_t} = \frac{c_{t+1}}{c_t} = \frac{y_{t+1}}{y_t}$$

- Para asegurar crecimiento perpetuo tenemos que: $\beta(1+A-\delta) > 1$.
- De la restricción de recursos sabemos que

$$\frac{c_t}{k_t} + \frac{k_{t+1}}{k_t} = (1+A-\delta)$$

y por tanto:

$$\frac{c_t}{k_t} = (1+A-\delta) - [\beta(1+A-\delta)]^{\frac{1}{\sigma}}$$

- Usando $c_t = (1-s)(1+A-\delta)k_t$ y resolviendo para s tenemos:

$$s = \beta^{\frac{1}{\sigma}}(1+A-\delta)^{\frac{1}{\sigma}-1}$$

- De manera equivalente (definiendo $R = A-\delta$, el retorno social neto del capital):

$$s = \beta^{\frac{1}{\sigma}}(1+r)^{\frac{1}{\sigma}-1}$$

El Modelo AK: El Equilibrio Competitivo

- Existe un número muy grande de firmas con acceso a la tecnología AK. Si las firmas maximizan el pago de los factores será:

$$r = A \quad y \quad w = 0$$

- Existe un número muy grande de familias y el modelo admite representación mediante un agente representativo.
- El problema del agente representativo es:

$$\max_{\{c_t, k_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}} \quad \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \frac{c_t^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma}$$

$$s.a \quad c_t + k_{t+1} = rk_t + (1-\delta)k_t$$

- La ecuación de Euler para las Familias es:

$$\frac{c_{t+1}}{c_t} = [\beta(1+R)]^{\frac{1}{\sigma}} = [\beta(1+A-\delta)]^{\frac{1}{\sigma}}$$

- Note que la asignación es la misma que la del Planificador central. El equilibrio competitivo es Pareto óptimo.

Proposición
Considere la economía AK con preferencias CRRA y suponga que $\beta(1+A-\delta) > 1 > s = \beta^{\frac{1}{\sigma}}(1+A-\delta)^{\frac{1}{\sigma}-1}$. *Entonces, el equilibrio competitivo es Pareto eficiente y la economía exhibe un crecimiento sostenido. El capital, el producto y el consumo crecen a la misma tasa:*

$$[\beta(1+A-\delta)]^{\frac{1}{\sigma}} > 1$$

y el consumo y la inversión están dados por:

$$\begin{aligned} c_t &= (1-s)(1+A-\delta)k_t \\ k_{t+1} &= s(1+A-\delta)k_t \end{aligned}$$

con $s = \beta^{\frac{1}{\sigma}}(1+A-\delta)^{\frac{1}{\sigma}-1}$.

El Modelo AK: El Equilibrio Competitivo

- Note que las tasa de crecimiento es creciente en A, $1/\sigma$, y β. Por tanto, diferencias en la tecnología y en las preferencias pueden inducir a diferencias en el crecimiento de largo plazo.

Aprendiendo al Hacer y Desbordes de Conocimiento: Equilibrio Competitivo

- Los beneficio de acumular capital humano son incrementos en la productividad. El costo es que absorbe recursos con usos alternativos.
- El capital humano también genera externalidades positivas en la sociedad.
- Suponga que la producción de una firma $m \in [0, M]$ está caracterizada por:

$$Y_t^m = F(K_t^m, h_t L_t^m)$$

donde h_t representa el nivel agregado de capital humano o conocimiento.

- h_t es endógeno desde el punto de vista de la sociedad pero exógeno desde el punto de vista de la empresa.
- Cada empresa maximiza beneficios:

$$\Pi_t^m = F(K_t^m, h_t L_t^m) - r_t K_t^m - w_t L_t^m$$

- Las condiciones de primer orden:

$$\begin{aligned} r_t &= F_K(K_t^m, h_t L_t^m) \\ w_t &= F_L(K_t^m, h_t L_t^m) h_t \end{aligned}$$

Usando las condiciones que clarean los mercados de factores tenemos que $K_t^m / L_t^m = k_t$ donde k_t es el capital por trabajador agregado.

- Entonces, dados los precios de los factores:

$$\begin{aligned} r_t &= F_k(k_t, h_t) = f'(\kappa_t) \\ w_t &= F_L(k_t, h_t) = \left[f(\kappa_t) - f'(\kappa_t)\kappa_t \right] h_t \end{aligned}$$

donde $f(\kappa_t) = F(\kappa_t, 1)$ y $\kappa_t = k_t / h_t$.

- El problema de las familias es:

$$\max_{\{c_t, k_{t+1}, b_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}} \quad \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t)$$
$$s.a \quad c_t + k_{t+1} = (1 + r_t - \delta)k_t$$

- La CPO para una solución interior es:

$$\frac{u'(c_t)}{\beta u'(c_{t+1})} = 1 + r_{t+1} - \delta$$

- Para cerrar el modelo es necesario definir como h_t es determinado. Arrow y Romer asumen que *la acumulación de capital humano es un sub-producto del proceso de aprendizaje en la producción*.

$$h_t = \eta k_t$$

  con $\eta > 0$ alguna constante.
- Así, el ratio κ_t esta determinado: $\kappa_t = \frac{1}{\eta}$

Aprendiendo al Hacer y Desbordes de Conocimiento: Equilibrio Competitivo

- Definamos las constantes A y ω como:

$$A = f'(1/\eta) \quad y \quad \omega = f(1/\eta)\eta - f'(1/\eta)$$

- Los precios de equilibrio de los factores son por tanto:

$$r_t = A \quad y \quad w_t = \omega k_t$$

- Usando la ecuación de Euler tenemos:

$$\frac{u'(c_t)}{u'(c_{t+1})} = \beta\,(1 + A - \delta)$$

- Finalmente, ya se mostró que en este contexto el capital y el producto crecen a la misma tasa que el consumo.

Proposición

Sean $A = f'(1/\eta)$ *y* $\omega = f(1/\eta)\eta - f'(1/\eta)$ *y suponga que* $\beta(1 + A - \delta) > 1 > \beta^{\frac{1}{\sigma}}(1 + A - \delta)^{\frac{1}{\sigma} - 1}$ *con* $u(c_t)$ *una función de utilidad CRRA. Entonces la economía exhibe crecimiento balanceado (y sostenido). El capital físico, el consumo, el producto, el conocimiento y los salarios crecen a la misma tasa:*

$$\frac{y_{t+1}}{y_t} = \frac{k_{t+1}}{k_t} = \frac{c_{t+1}}{c_t} = \{\beta\,[1 + A - \delta]\}^{\frac{1}{\sigma}} > 1$$

El salario está dado por $w_t = \omega k_t$ *mientras que la inversión es igual al ahorro con tasa de ahorro* $s = \beta^{\frac{1}{\sigma}}\,[1 + A - \delta]^{\frac{1}{\sigma} - 1}$.

Aprendiendo al Hacer y Desbordes de Conocimiento: Asignación Pareto Eficiente

- Analicemos ahora la asignación del Planificador Central.
- El Planificador reconoce que el conocimiento es proporcional al stock de capital e internaliza el efecto del aprendizaje en la práctica.
- Entonces la función de producción es:

$$y_t = F(k_t, h_t) = A^* k_t$$

donde $A^* = f(1/\eta)\eta = A + \omega$ representa el retorno social del capital.

- Entonces, la tecnología de Planificador es una del tipo AK.
- La ecuación de Euler seria entonces:

$$\frac{u'(c_t)}{u'(c_{t+1})} = \beta(1 + A^* - \delta)$$

- Note que el retorno social del capital es mayor que el retorno privado.

$$A^* > A = r_t$$

- La diferencia es ω, la fracción del retorno social que es desperdiciada en forma de ingreso al trabajo.

Proposición

Sea $A^* = A + \omega$ *y suponga que* $\beta(1 + A - \delta) > 1 > \beta^{\frac{1}{\sigma}}(1 + A - \delta)^{\frac{1}{\sigma}-1}$ *con* $u(c_t)$ *una función de utilidad CRRA. Entonces la asignación Pareto óptima exhibe crecimiento balanceado (y sostenido). El capital físico, el consumo, el producto, el conocimiento y los salarios crecen a la misma tasa:*

$$\frac{y_{t+1}}{y_t} = \frac{k_{t+1}}{k_t} = \frac{c_{t+1}}{c_t} = \{\beta\,[1 + A^* - \delta]\}^{\frac{1}{\sigma}} > 1$$

Note que $A^* > A$ *y por tanto la tasa de crecimiento del equilibrio competitivo es menor que la de la asignación Pareto óptima.*

Modelos de Segunda Generación

- Existen dos sectores: el sector del bien final y el sector de bienes intermedios.
- El sector del bien final es perfectamente competitivo (los beneficios son cero). El producto se consume o se usa como insumo en los otros dos sectores.
- En el sector del bien intermedio existe competencia monopolística (diferenciación de producto).
  - Cada productor es cuasi-monopolista y tiene beneficios positivos.
  - Para ser una empresa de este sector, ésta primero debe invertir en I+D y crear un variedad nueva (con su "blueprint").
  - El "blueprint" es la tecnología (conocimiento) para transformar el bien final en uno intermedio diferenciado.
- La inversión de I+D y la creación de variedades (con su "blueprints") están protegidos por patentes perpetuas.
  - Existe libre entrada en la actividad de I+D.

El Modelo de Romer: La Tecnología

- La tecnología del sector del bien final es neoclásica y usa trabajo L_t y el insumo compuesto χ_t:

$$Y_t = F(\chi_t, L_t) = A(\chi_t)^{\alpha}(L_t)^{1-\alpha}$$

- El insumo compuesto esta dado por la agregación CES de los bienes intermedios:

$$\chi_t = \left[\sum_{j=1}^{N_t} X_{t,j}^{\epsilon}\right]^{\frac{1}{\epsilon}}$$

donde N_t denota el número de variedades en el sector de bienes intermedios y $X_{t,j}$ la cantidad producida de la variedad j.

El Modelo de Romer: La Tecnología

- En lo que sigue suponemos por simplicidad que $\epsilon = \alpha$, lo que implica:

$$Y_t = F(\chi_t, L_t) = A(L_t)^{1-\alpha} \sum_{j=1}^{N_t} (X_{t,j})^{\alpha}$$

- Este supuesto implica que el producto marginal de cada bien intermedio es independiente de los demás.

$$\frac{\partial Y_t}{\partial X_{t,j}} = \alpha A \left(\frac{L_t}{X_{t,j}} \right)^{1-\alpha}$$

- En una versión más general, los productos intermedios podrían ser complementos o substitutos.
- Vamos a interpretar los bienes intermedios como bienes de capital y por tanto en el agregado:

$$K_t = \sum_{j=1}^{N_t} X_{t,j}$$

- Note que si $X_{t,j} = X$ para todo j y t tendríamos:

$$Y_t = AL_t^{1-\alpha} N_t X^{\alpha} \ \ y \ \ K_t = N_t X$$

lo que implica:

$$Y_t = A \left(N_t L_t\right)^{1-\alpha} K_t^{\alpha}$$

- En la medida que los insumos se usen en cantidades idénticas, el conocimiento N_t se comporta como un progreso tecnológico aumentador de trabajo.

El Modelo de Romer: El Sector de los Bienes Finales

- Como el sector de los bienes finales es competitivo, las empresas son tomadoras de precios.
- Las firmas maximizan:

$$\Pi_t = Y_t - w_t L_t - \sum_{j=1}^{N_t} p_{t,j} X_{t,j}$$

donde w_t es el salario y $p_{j,t}$ es el precio del insumo j.

- Los beneficios este sector son cero dado RCE y las demandas de cada insumo están dadas por las CPO:

$$\begin{aligned} w_t &= \frac{\partial Y_t}{\partial L_t} = (1-\alpha) A \frac{Y_t}{L_t} \\ p_{t,j} &= \frac{\partial Y_t}{\partial X_{t,j}} = \alpha A \left(\frac{L_t}{X_{t,j}} \right)^{1-\alpha} \end{aligned}$$

para todo $j = 1, ..., N_t$.

- Existe competencia monopolística en el sector de los bienes intermedios.
- Cada empresa enfrenta una demanda que tiene pendiente negativa. Entonces, el productor del insumo j resuelve:

$$\Pi_{t,j} = p_{t,j} X_{t,j} - \kappa(X_{t,j})$$

sujeto a la curva de demanda:

$$X_{t,j} = L_t \left(\frac{\alpha A}{p_{t,j}} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

donde $\kappa(X_{t,j})$ representa el costo de producir $X_{j,t}$ en términos de unidades del bien final.

- Suponemos que la función de costos es lineal:

$$\kappa(X_{t,j}) = X_{j,t}$$

El supuesto implícito es que la tecnología de producción de bienes intermedios es la misma que la usada para producir el bien final.

El Modelo de Romer: El Sector de los Bienes Intermedios

- De las CPO, el precio óptimo satisface:

$$p_{t,j} = p = \frac{1}{\alpha} > 1$$

- La oferta óptima es a su vez:

$$X_{t,j} = xL$$

con $x = A^{\frac{1}{1-\alpha}} \alpha^{\frac{2}{1-\alpha}}$.

- Los beneficios resultantes son:

$$\Pi_{t,j} = \pi L$$

con $\pi = (p-1)x = \frac{1-\alpha}{\alpha} A^{\frac{1}{1-\alpha}} \alpha^{\frac{2}{1-\alpha}}$.

- Note que el precio es mayor que el costo marginal $p = \frac{1}{\alpha} > \kappa'(X) = 1$. El gap es el mark-up que las firmas cargan a sus compradores.

El Modelo de Romer: Inversión en Innovación (I+D)

- El valor de invertir en I+D y entrar al mercado es el valor presente de los beneficios del bien intermedio j desde el período t:

$$V_{t,j} = \Pi_{t,j} + \frac{\Pi_{t+1,j}}{1+R_{t+1}} + \frac{\Pi_{t+2,j}}{(1+R_{t+1})(1+R_{t+2})} + \dots \quad \rightarrow \quad V_{t,j} = \Pi_{t,j} + \frac{V_{t+1,j}}{1+R_{t+1}}$$

- Como $\Pi_{t,j} = \pi L$ para todo j y t. Entonces, mientras la economía siga una senda de crecimiento balanceado deberíamos esperar $R_t = R$ para todo t. Entonces:

$$V_{t,j} = V = \frac{\pi L}{R/(1+R)} \approx \frac{\pi L}{R}$$

- Interpretación:
  - El costo de oportunidad de mantener un activo de valor V con "blueprint" en lugar de invertir en bonos es RV.
  - El dividendo que el activo paga en cada período es πL.
  - Arbitraje: Dividendos = Costos de Oportunidad.

El Modelo de Romer: Inversión en Innovación (I+D)

- Los "blueprints" son producidos con las misma tecnología del bien final: Los innovadores compran bienes finales y los transforman en "blueprints".
- Dado un gasto Z_t, la frontera de posibilidades de invención es:

$$N_{t+1} = N_t + \eta Z_t$$

  con $\eta > 0$ y $N_0 > 0$ dado.
- Un mayor gasto en I+D conduce a la invención de nuevas máquinas. Mientras más alto es η, más eficiente es el gasto en I+D en producir "blueprints".
- Existe libre entrada para invertir en I+D, lo que significa que cualquier individuo o empresa puede gastar una unidad del bien final para generar de flujo η "blueprints".
- Condición de libre entrada:

$$(\eta V_{j,t} - 1) Z_{j,t} = 0 \quad \rightarrow \quad V = \frac{1}{\eta}$$

- La familia representativa resuelve el siguiente problema:

$$\max_{\{c_t, a_{t+1}\}} \quad \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t)$$
$$s.a \quad c_t + a_{t+1} \leq w_t + (1 + R_t)a_t$$

- La condición de Euler usual es:

$$\frac{u'(c_t)}{u'(c_{t+1})} = \beta(1 + R_{t+1})$$

y suponiendo una función de utilidad instantánea CRRA:

$$\frac{c_{t+1}}{c_t} = [\beta(1 + R_{t+1})]^{\frac{1}{\sigma}}$$

- El bien final se usa para consumo C_t, para la producción de bienes intermedios $K_t = \sum_{j=1}^{N_t} X_{t,j}$, o para la producción de "blueprints" en el sector innovador $Z_t = \frac{\Delta N_t}{\eta}$.
- La restricción de Recursos es

$$C_t + K_t + \frac{\Delta N_t}{\eta} = Y_t$$

  donde $C_t = c_t L$.
- La suma de las restricciones de recursos de los distintos agentes y las condiciones de clareo de mercado deberían reducirse a esta restricción de recursos. ¿Esto ocurre? ¿Cuáles son las condiciones de clareo de mercado?

- Del valor de la innovación de la condición de libre entrada sabemos: $\eta V = \eta \pi L / R = 1$, entonces:

$$R = \eta \pi L = \frac{(1-\alpha)\eta A^{\frac{1}{1-\alpha}} \alpha^{\frac{2}{1-\alpha}} L}{\alpha}$$

confirmando que la tasa de interés es estacionaria.

- En la ecuación de Euler tenemos:

$$\frac{c_{t+1}}{c_t} = \left[\beta(1 + \frac{(1-\alpha)\eta A^{\frac{1}{1-\alpha}} \alpha^{\frac{2}{1-\alpha}} L}{\alpha})\right]^{\frac{1}{\sigma}}$$

- También note que la restricción de recursos se reduce a:

$$\frac{C_t}{N_t} + X + \frac{1}{\eta}\left[\frac{N_{t+1}}{N_t} - 1\right] = \frac{Y_t}{N_t} = AL^{1-\alpha} X^{\alpha}$$

donde $X = xL = K_t / N_t$.

El Modelo de Romer: La Restricción de Recursos y el Equilibrio

- Note que C_t/N_t es constante en la senda de crecimiento balanceado y por tanto C_t, N_t, K_t y Y_t crecen a la misma tasa $1+\gamma$:

$$1+\gamma = \left[\beta\left(1+\frac{(1-\alpha)\eta A^{\frac{1}{1-\alpha}}\alpha^{\frac{2}{1-\alpha}}L}{\alpha}\right)\right]^{\frac{1}{\sigma}}$$

- Las tasa de crecimiento:
  - Es creciente en η (eficiencia en la producción de conocimiento).
  - Es creciente en L y en cualquier factor que incremente la escala (aumentando beneficios en el sector de bienes intermedios y la demanda en el innovador): *Efecto Escala*

El Modelo de Romer: Eficiencia e Implicaciones de Política

- El Planificador central elige $\{C_t, (X_{j,t})_{j=1,\dots,N_t]}, N_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}$ de tal manera de maximizar la utilidad sujeto a la restricción de recursos y a la tecnología.
- Por simetría en la producción el planificador elige: $X_{j,t} = X_t = x_t L$ para todo j.
- El problema entonces es

$$\max_{\{C_t,(X_{j,t})_{j=1,\dots,N_t]},N_{t+1}\}} \quad \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t)$$

$$s.a \quad C_t + N_t X_t + \frac{N_{t+1} - N_t}{\eta} = Y_t = A L^{1-\alpha} N_t X_t^{\alpha}$$

donde $C_t = c_t L$.

- De la condición de primer orden con respecto a X_t tenemos:

$$X_t = x^* L$$

donde $x^* = A^{\frac{1}{1-\alpha}} \alpha^{\frac{1}{1-\alpha}}$ es el nivel óptimo de de producción de bienes intermedios.

El Modelo de Romer: Eficiencia e Implicaciones de Política

- De la condición de Euler tenemos la tasa de crecimiento óptima:

$$1 + \gamma^* = \frac{c_{t+1}}{c_t} = \left[\beta(1 + \frac{(1-\alpha)\eta A^{\frac{1}{1-\alpha}} \alpha^{\frac{1}{1-\alpha}} L}{\alpha}) \right]^{\frac{1}{\sigma}}$$

note que $R^* = \frac{1-\alpha}{\alpha} \frac{A^{\frac{1}{1-\alpha}} \alpha^{\frac{1}{1-\alpha}} L}{\eta}$ y representa el retorno social de los ahorros.

- Note que:

$$x^* = x\alpha^{-\frac{1}{1-\alpha}} > x$$

El nivel de producción de bienes intermedios es mayor en el óptimo de Pareto. Esto refleja la distorsión del monopolista. El gap $x^*/x = 1/\alpha$ es el mark-up.

Crecimiento con desbordes de conocimiento

- Una alternativa al modelo anterior es tener "factores escasos" utilizados en I+D. Ahora suponemos que investigadores y científicos son los creadores clave de I+D. Dado que no es posible un aumento sostenido en el uso de estos factores no puede haber un crecimiento endógeno.
- Se requiere que haya efecto "desbordes" de conocimiento de la I+D pasada, lo que hace que los factores escasos factores utilizados en I+D sean cada vez más productivos con el tiempo. En otras palabras, los investigadores actuales "se paran sobre los hombros de los gigantes del pasado".
- Dado que los efectos de contagio del conocimiento desempeñan un papel importante en muchos modelos de crecimiento económico, es útil ver cómo funciona el modelo de variedades.
- El entorno es idéntico al anterior, con la excepción de la frontera de posibilidades de innovación, es:

$$N_{t+1} = N_t + \eta N_t L_{R,t}$$

con $L_{R,t}$ el la cantidad de trabajo asignada a I+D.

- La función de producción en el sector de bienes finales es:

$$Y_t = A(L_{E,t})^{1-\alpha} \sum_{j=1}^{N_t} (X_{t,j})^{\alpha}$$

- Suponemos que el trabajo es homogéneo que que los trabajadores pueden moverse libremente entre sectores, de tal forma que el salarios es el mismo entre sectores w_t. Por tanto $L_{R,t} + L_{E,t} = L$.
- El costo total de producir "blueprints" es $w_t L_{R,t}$.
- Resolviendo el modelo tenemos que el conocimiento (y la economía) crece a tasa:

$$\frac{N_{t+1}}{N_t} = 1 + \gamma = \beta(1 + \eta\alpha L_{Y,t})$$

con

$$L_Y = \frac{\eta L - \beta}{\eta\,(\beta\alpha + 1)}$$

Note que para obtener una solución cerrada hemos supuesto además que $u(c) = \log c$.

Otros Modelos de Crecimiento Endógeno (de 1ra y 2da Generación)

- El producto total de la economía esta dado por:

$$Y_t = F(K_t, H_t) = F(K_t, h_t L_t)$$

donde $F(\cdot)$ es neoclásica, K_t es el stock de capital agregado, h_t es el stock de capital humano por trabajador, y $H_t = h_t L_t$ es el trabajo efectivo.

- En términos per cápita:

$$y_t = F(k_t, h_t)$$

- El producto puede ser usado para consumo o para acumular capital (físico y humano)

$$c_t + i_t^k + i_t^h \leq y_t$$

- Las leyes de movimiento de los stocks de capital están dadas por:

$$\begin{aligned} k_{t+1} &= (1-\delta_k)k_t + i_t^k \\ h_{t+1} &= (1-\delta_h)h_t + i_t^h \end{aligned}$$

- Combinando la restricción de recursos con las leyes de movimiento:

$$c_t + k_{t+1} + h_{t+1} = F(k_t, h_t) + (1-\delta_k)k_t + (1-\delta_h)h_t$$

- El problema del planificador central es entonces:

$$\begin{aligned} \max_{\{c_t, k_{t+1}, h_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}} \quad & \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t) \\ s.a \quad & c_t + k_{t+1} + h_{t+1} = F(k_t, h_t) + (1-\delta_k)k_t + (1-\delta_h)h_t \\ & k_0, h_0 \quad dados. \end{aligned}$$

- Las CPO son:

$$\begin{aligned}
\frac{u'(c_t)}{u'(c_{t+1})} &= \beta\left[1 + F_k(k_{t+1}, h_{t+1}) - \delta_k\right] \\
\frac{u'(c_t)}{u'(c_{t+1})} &= \beta\left[1 + F_h(k_{t+1}, h_{t+1}) - \delta_h\right] \\
c_t + k_{t+1} + h_{t+1} &= F(k_t, h_t) + (1-\delta_k)k_t + (1-\delta_k)h_t
\end{aligned}$$

- Usando la función de producción (con RCE) tenemos:

$$y_t = F(k_t, h_t) = F\left(\frac{k_t}{h_t}, 1\right) h_t = F\left(\frac{k_t}{h_t}, 1\right) \frac{h_t}{k_t + h_t}\left[k_t + h_t\right]$$

o de manera equivalente:

$$y_t = A(\kappa)\left[k_t + h_t\right]$$

donde:

$$A(\kappa) = \frac{F(\kappa, 1)}{1 + \kappa}$$

es el retorno del capital total.

- Multiplicando las condiciones de Euler por $\frac{k_{t+1}}{k_{t+1}+h_{t+1}}$ y $\frac{h_{t+1}}{k_{t+1}+h_{t+1}}$, respectivamente, y sumándolas tenemos:

$$\frac{u'(c_t)}{u'(c_{t+1})} = \beta \left\{ 1 + \frac{k_{t+1}\left[F_k(k_{t+1}, h_{t+1}) - \delta_k\right] + h_{t+1}\left[F_h(k_{t+1}, h_{t+1}) - \delta_h\right]}{k_{t+1} + h_{t+1}} \right\}$$

- Usando el teorema de Euler:

$$F(k_{t+1}, h_{t+1}) = k_{t+1} F_k(\cdot) + h_{t+1} F_h(\cdot)$$

- Definamos:

$$\delta(\kappa) = \frac{\kappa}{1+\kappa}\delta_k + \frac{1}{1+\kappa}\delta_h$$

- Entonces:

$$\frac{u'(c_t)}{u'(c_{t+1})} = \beta\left[1 + A(\kappa_{t+1}) - \delta(\kappa_{t+1})\right]$$

- Combinado las dos ecuaciones de Euler podemos inferir que:

$$F_k(k_{t+1}, h_{t+1}) - \delta_k = F_h(k_{t+1}, h_{t+1}) - \delta_h$$

- Note que $F_k(k_{t+1}, h_{t+1}) = F_k(\kappa_{t+1})$ y $F_h(k_{t+1}, h_{t+1}) = F_h(\kappa_{t+1})$. Entonces esta condición determina un único estado estacionario en κ:
- Por ejemplo: si $F(k, h) = k^{\alpha} h^{1-\alpha}$ y $\delta_k = \delta_h$ tenemos que:

$$\frac{F_h}{F_k} = \frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{h}{k} \Rightarrow \kappa^* = \frac{\alpha}{1-\alpha}$$

- Perspectiva alternativa: Note que κ^* resuelve:

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & F(k_{t+1}, h_{t+1}) - \delta_k k_{t+1} - \delta_h h_{t+1} \\ s.a \quad & k_{t+1} + h_{t+1} = constante \end{aligned}$$

- De manera equivalente:

$$\kappa^* = argmax_\kappa \left[1 + A(\kappa) - \delta(\kappa)\right]$$

esto es, se busca el ratio capital físico vs. capital humano que maximiza el retorno de los ahorros.

Proposición
Considere la economía con capital físico y capital humano descrita arriba y sea:

$$\kappa^* = argmax_{\kappa} \left[1 + A(\kappa) - \delta(\kappa)\right]$$

y suponga que $(\beta, \sigma, F, \delta_k, \delta_h)$ *satisfacen* $\beta(1 + A(\kappa) - \delta(\kappa)) > 1 > \beta^{\frac{1}{\sigma}}(1 + A(\kappa) - \delta(\kappa))^{\frac{1}{\sigma}-1}$ *con* $u(c_t)$ *una función de utilidad CRRA. Entonces la economía exhibe crecimiento balanceado (y sostenido). El capital físico, el humano, el consumo y el producto crecen a la misma tasa:*

$$\frac{y_{t+1}}{y_t} = \frac{k_{t+1}}{k_t} = \frac{h_{t+1}}{h_t} = \frac{c_{t+1}}{c_t} = \{\beta \left[1 + A(\kappa) - \delta(\kappa)\right]\}^{\frac{1}{\sigma}} > 1$$

mientras que las tasa de inversión es $\left\{\beta^{\frac{1}{\sigma}} \left[1 + A(\kappa) - \delta(\kappa)\right]\right\}^{\frac{1}{\sigma}-1}$ *y el ratio óptimo de capital físico sobre humano es* κ^*. *Las tasa de crecimiento es creciente en la productividad, creciente en la ESI y decreciente en la tasa de descuento.*

- La restricción presupuestaria del consumidor representativo es:

$$c_t + i_t^k + i_t^h = r_t k_t + w_t h_t$$

- Las leyes de movimiento de ambos tipos de capital son:

$$\begin{aligned} k_{t+1} &= i_t^k + (1-\delta_k)k_t \\ h_{t+1} &= i_t^h + (1-\delta_h)h_t \end{aligned}$$

- Entonces, el problema del consumidor representativo es:

$$\begin{aligned} \max_{\{c_t, k_{t+1}, h_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}} \quad & \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t) \\ s.a \quad & c_t + k_{t+1} + h_{t+1} = (1 + r_t - \delta_k)k_t \\ & +(1 + w_t - \delta_h)h_t \end{aligned}$$

- Note que $r_t - \delta_k$ y $w_t - \delta_h$ son los retornos netos de mercado del capital físico y humanos, respectivamente.

- La CPO para una solución interior es:

$$\frac{u'(c_t)}{\beta u'(c_{t+1})} = 1 + r_{t+1} - \delta_k = 1 + w_{t+1} - \delta_h$$

- Las firmas maximizan beneficios y los mercados son competitivos:

$$r_t = F_k(\kappa_t, 1) \quad y \quad w_t = F_h(\kappa_t, 1)$$

  donde $\kappa_t = k_t/h_t$.

- Combinando $r_t - \delta_k = w_t - \delta_h$ tenemos:

$$\frac{F_k(\kappa_t, 1)}{F_h(\kappa_t, 1)} = \frac{r_t}{w_t} = \frac{\delta_h}{\delta_k}$$

  y por tanto $\kappa_t = \kappa^*$ como en el óptimo de Pareto.

- Además $R_t = A(\kappa^*) - \delta(\kappa^*)$. El equilibrio competitivo es Pareto óptimo. Esto ocurre porque los retornos sociales del capital coinciden con los privados.

- El Gobierno influencia a la economía por varios canales:
  - Decide el tamaño de los impuestos.
  - Decide la forma que toman los impuestos (impuestos al valor agregado, sobre la renta, sobre sociedades, sobre transmisiones patrimoniales e incluso el impuesto inflacionario sobre el dinero).
  - Decide el tamaño del gasto.
  - Decide el tipo de gasto (carreteras, armamento, tecnología, subsidios de desempleo, pensiones de jubilación, etc.).
  - Decide la Regulación (regulación antimonopolio, leyes de garantía de derechos de propiedad, leyes de libre circulación de mercancías, etc.)
  - Política Fiscal y Monetaria.
- Estudiamos la relación el tamaño del gasto público y el crecimiento económico.
- Partimos del supuesto que el gasto público es deseable (externalidad positiva en la producción o en el consumo).
- Barro (1990): El gasto público es productivo. Además son flujos productivos por lo que el bien público debe ser suministrado en cada momento del tiempo.

- Función de producción con bienes públicos (no rivales y no excluyentes):

$$y_m = Ak_m^{\alpha} G^{1-\alpha}$$

- Función de producción bienes suministrados por el gobierno son privados en el sentido de que son rivales y excluibles.

$$y_m = Ak_m^{\alpha} g_m^{1-\alpha} \quad con \quad G = \sum_{m=0}^{M} g_m$$

- Función de producción con bienes públicos que puede ser parcialmente excluibles o sujetos a congestión.

$$y_m = Ak_m^{\alpha} \left(\frac{G}{K} \right)^{1-\alpha}$$

Gasto Público y el Modelo de Barro: Equilibrio Competitivo

- Suponga que la población crece a tasa n: $L_{t+1}/L_t = 1 + n$, que el gobierno cobra un impuesto al ingreso τ y que el presupuesto del gobierno está equilibrado $g = \tau y$.
- Para la familia representativa tenemos la restricción de recursos:

$$c_t + i_t = r_t k_t + w_t$$

- Ley de movimiento del stock de capital:

$$(1+n)k_{t+1} = (1-\delta)k_t + i_t$$

- Combinando la restricción de recursos con las leyes de movimiento:

$$c_t + (1+n)k_{t+1} = r_t k_t + w_t + (1-\delta)k_t$$

- El problema de la familia representativa es entonces:

$$\max_{\{c_t, k_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}} \quad \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t)$$

$$s.a \quad c_t + (1+n)k_{t+1} = r_t k_t + w_t + (1-\delta)k_t$$

- El Lagrangiano (para una solución interior) es:

$$\ell_0 = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left[u(c_t) + \lambda_t \left(r_t k_t + w_t + (1-\delta) k_t - c_t - (1+n) k_{t+1} \right) \right]$$

- Las CPO para las Familias son:

$$\begin{aligned} u'(c_t) - \lambda_t &= 0 \\ -(1+n)\lambda_t + \beta \lambda_{t+1}(r_{t+1} + 1 - \delta) &= 0 \\ (r_t k_t + w_t + (1-\delta) k_t - c_t - (1+n) k_{t+1}) &= 0 \end{aligned}$$

- Por tanto:

$$\begin{aligned} \frac{u'(c_t)}{u'(c_{t+1})} &= \frac{\beta \left[1 + r_{t+1} - \delta \right]}{1+n} \\ c_t + (1+n) k_{t+1} &= r_t k_t + w_t + (1-\delta) k_t \end{aligned}$$

- Usando las preferencias CRRA tenemos:

$$\frac{c_{t+1}}{} = \left\{ \frac{\beta \left[1 + r_{t+1} - \delta \right]}{} \right\}^{\frac{1}{\sigma}}$$

Gasto Público y el Modelo de Barro: Equilibrio Competitivo

- Por otro lado las empresas maximizan beneficios netos de impuestos:

$$\max_{\{k_t^m\}}(1-\tau)Y_t^m - r_t K_t^m - w_t L_t^m$$

- Las condiciones de primer orden son:

$$\begin{aligned} r_t &= (1-\tau)f_k(X_t, g_t^m) \\ w_t &= (1-\tau)\left[f(X_t, g_t^m) - f_k(X_t, g_t^m)X_t\right] \end{aligned}$$

con $X_t = K_t^m / L_t^m$.

- Sabemos que $X_t = k_t$ y por tanto

$$\begin{aligned} r_t &= (1-\tau)f_k(k_t, g_t) \\ w_t &= (1-\tau)\left[f(k_t, g_t) - f_k(k_t, g_t)k_t\right] \end{aligned}$$

- Note que $y_t = Ak_t^\alpha g_t^{1-\alpha}$ tenemos:

$$r_t = \alpha(1-\tau)A\left(\frac{g_t}{k_t}\right)^{1-\alpha}$$

- Reemplazando en la ecuación de Euler:

$$\frac{c_{t+1}}{c_t} = \left\{ \frac{\beta\left[1+\alpha(1-\tau)A\left(\frac{g_t}{k_t}\right)^{1-\alpha} - \delta\right]}{1+n} \right\}^{\frac{1}{\sigma}}$$

- Note que $g = \tau y$ entonces:

$$\frac{g_t}{y_t} = \tau \Rightarrow \frac{g_t}{Ak_t^{\alpha} g_t^{1-\alpha}} = \tau \Rightarrow \frac{g_t}{k_t} = (A\tau)^{\frac{1}{\alpha}}$$

- Entonces:

$$\frac{c_{t+1}}{c_t} = \left\{ \frac{\beta\left[1+\alpha(1-\tau)A^{\frac{1}{\alpha}}(\tau)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} - \delta\right]}{1+n} \right\}^{\frac{1}{\sigma}}$$

- En el agregado tenemos:

$$\begin{aligned} c_t + (1+n)k_{t+1} &= (1-\tau)y_t + (1-\delta)k_t \\ c_t + (1+n)k_{t+1} &= \left[(1-\tau)A^{\frac{1}{\alpha}}(\tau)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} + 1 - \delta\right] k_t \end{aligned}$$

- Nuestra conjetura de solución es:

$$\begin{aligned} c_t &= (1-s)\left[(1-\tau)A^{\frac{1}{\alpha}}(\tau)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} + 1 - \delta\right] k_t \\ (1+n)k_{t+1} &= s\left[(1-\tau)A^{\frac{1}{\alpha}}(\tau)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} + 1 - \delta\right] k_t \end{aligned}$$

donde s es un coeficiente que debe ser determinado.

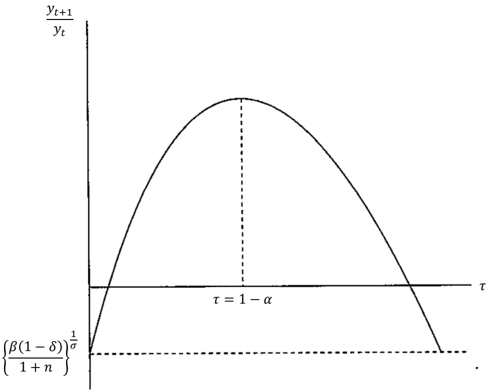
- Note que bajo nuestra conjetura:

$$\frac{k_{t+1}}{k_t} = \frac{c_{t+1}}{c_t} = \frac{y_{t+1}}{y_t}$$

- Entonces:

$$\frac{y_{t+1}}{y_t} = \left\{ \frac{\beta\left[1 + \alpha(1-\tau)A^{\frac{1}{\alpha}}(\tau)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} - \delta\right]}{1+n} \right\}^{\frac{1}{\sigma}}$$

- Relación entre el tamaño del Estado (g/y) y la tasa de crecimiento:



- Existe una tasa de impuesto que maximiza el crecimiento de la economía:

$$\frac{\partial y_{t+1}/y_t}{\partial \tau} = 0 \Rightarrow \tau = 1 - \alpha$$

Proposición

Suponga que $\beta\left[1+\alpha(1-\tau)A^{\frac{1}{\alpha}}(\tau)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}-\delta\right]>1+n$ *y que* $u(c_t)$ *es una función de utilidad CRRA. Entonces la economía exhibe crecimiento balanceado (y sostenido). El capital físico, el consumo, el producto crecen a la misma tasa:*

$$\frac{y_{t+1}}{y_t}=\frac{k_{t+1}}{k_t}=\frac{c_{t+1}}{c_t}=\left\{\frac{\beta\left[1+\alpha(1-\tau)A^{\frac{1}{\alpha}}(\tau)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}-\delta\right]}{1+n}\right\}^{\frac{1}{\sigma}}$$

El retorno del capital esta dado $r_t=\alpha(1-\tau)A^{\frac{1}{\alpha}}(\tau)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}$*, mientras que salario dado por* $w_t=(1-\alpha)(1-\tau)A^{\frac{1}{\alpha}}(\tau)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}k_t$*. Finalmente, el tamaño óptimo del gobierno es:*

$$\frac{g_t}{y_t}=\tau=1-\alpha$$

Gasto Público y el Modelo de Barro: Asignación Centralizada

- Restricción de recursos:

$$c_t + i_t + g_t = y_t \Rightarrow c_t + i_t = (1-\tau)y_t$$

- Ley de movimiento del stock de capital:

$$(1+n)k_{t+1} = (1-\delta)k_t + i_t$$

- Combinando la restricción de recursos con las leyes de movimiento:

$$c_t + (1+n)k_{t+1} = y_t - g_t + (1-\delta)k_t$$

- El problema del Planificador Central es entonces:

$$\begin{aligned} \max_{\{c_t, k_{t+1}, g_t\}_{t=0}^{\infty}} \quad & \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t) \\ s.a \quad & c_t + (1+n)k_{t+1} = y_t - g_t + (1-\delta)k_t \\ & k_0 \quad dado. \end{aligned}$$

Gasto Público y el Modelo de Barro: Asignación Centralizada

- El Lagrangiano (para una solución interior) es:

$$\ell_0 = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left[u(c_t) + \lambda_t \left(A k_t^{\alpha} g_t^{1-\alpha} + (1-\delta)k_t - g_t - c_t - (1+n)k_{t+1} \right) \right]$$

- Las CPO para el Planificador son:

$$\begin{aligned} u'(c_t) - \lambda_t &= 0 \\ -(1+n)\lambda_t + \beta\lambda_{t+1}(\alpha A \left(\frac{g_{t+1}}{k_{t+1}}\right)^{1-\alpha} + 1 - \delta) &= 0 \\ (1-\alpha)\, A \left(\frac{g_t}{k_t}\right)^{-\alpha} - 1 &= 0 \\ (y_t + (1-\delta)k_t - g_t - c_t - (1+n)k_{t+1}) &= 0 \end{aligned}$$

Gasto Público y el Modelo de Barro: Asignación Centralizada

- Note que:

$$\frac{g_t}{y_t} = \tau \Rightarrow \frac{g_t}{Ak_t^{\alpha} g_t^{1-\alpha}} = \tau \Rightarrow \frac{g_t}{k_t} = (A\tau)^{\frac{1}{\alpha}}$$

- Por tanto:

$$\tau = \frac{g_t}{y_t} = 1 - \alpha$$

- Usando las preferencias CRRA tenemos:

$$\frac{c_{t+1}}{c_t} = \left\{ \frac{\beta \left[\alpha A^{\frac{1}{\alpha}} (1-\alpha)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} + 1 - \delta \right]}{1+n} \right\}^{\frac{1}{\sigma}}$$

Proposición

Suponga que $\beta\left[\alpha A^{\frac{1}{\alpha}}(1-\alpha)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}+1-\delta\right]>1+n$ *y que* $u(c_t)$ *es una función de utilidad CRRA. Entonces la asignación Pareto óptima exhibe crecimiento balanceado (y sostenido). El capital físico, el consumo, y el producto crecen a la misma tasa:*

$$\frac{y_{t+1}}{y_t}=\frac{c_{t+1}}{c_t}=\left\{\frac{\beta\left[\alpha A^{\frac{1}{\alpha}}(1-\alpha)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}+1-\delta\right]}{1+n}\right\}^{\frac{1}{\sigma}}>1$$

Note que la tasa de crecimiento del equilibrio competitivo es menor que la de la asignación Pareto óptima para todo τ. *Finalmente, note que la tecnología puede ser reescrita como:*
$y_t=A^{\frac{1}{\alpha}}(\tau)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}k_t=A(\tau)k_t$

- La economía esta poblada por un número grande de "emprendedores"
- Cada emprendedor vive por $1 + T$ períodos, donde T es aleatorio.
- Condicional en estar vivo, existe una probabilidad n (constante) de morir (salir del mercado) en cada período.
- En cada periodo una masa n de emprendedores muere y una masa n de nuevos emprendedores nace. La población es constante.
- Al nacer los emprendedores están dotados del cocimiento agregado y son jóvenes como para generar "nuevas ideas". Después sólo se dedican a producir.
- I+D surge cuando los jóvenes emprendedores intentan incrementar los beneficios de su producción futura. Existen además desbordes de conocimiento (entonces el conocimiento agregado aumenta).

- Sea V_{t+1}^j el valor de la innovación del emprendedor j realizada en el período t e implementada en $t+1$.
- Sea z_t^j la cantidad de trabajo (calificado) que el emprendedor j emplea en I+D.
- Sea $q(z_t^j)$ la probabilidad de que la actividad I+D sea exitosa.
  - Suponemos $q : \mathbb{R} \to [0,1]$, $q(0) = 0$, $q' > 0 > q''$, $q'(0) = \infty$, y $q'(\infty) = 0$.
- El investigador potencial maximiza:

$$q(z_t^j) V_{t+1}^j - w_t z_t^j$$

- De la CPO se sigue que:

$$q'(z_t^j) V_{t+1}^j = w_t \Rightarrow z_t^j = g\left(\frac{V_{t+1}^j}{w_t}\right)$$

donde $g(v) = q^{-1}(1/v)$. z es estacionario sólo si V y w crecen a la misma tasa.

- ¿Que determina el valor de la innovación? Sea A_t^j la PTF del emprendedor j. Los beneficios de su producción son:

$$\Pi_t^j = A_t^j \hat{\pi}$$

  donde $\hat{\pi}$ representan los beneficios normalizados. Por simplicidad supongamos que son exógenos.
- Cuando el emprendedor nace aprende sobre el conocimiento agregado: $A_t^j = A_t$ para el que nace en t. En el primer período el emprendedor realiza I+D.
  - Si es exitoso: A_t^j crece permanentemente a tasa $(1+\gamma)$.
  - Si falla: A_t^j se mantienen en su nivel inicial.
- Resumiendo, para un emprendedor nacido en t y para cualquier período $\tau > t+1$ tenemos:

$$A_\tau^j = \begin{cases} A_t & I + D \textit{ no exitoso} \\ (1+\gamma)A_t & I + D \textit{ exitoso} \end{cases}$$

- Los dividendos generados por un intento de I+D exitoso son $\gamma A_t \hat{\pi}$ por periodo para todo $\tau > t$ (relativo a los no exitosos). Entonces el valor de la innovación es:

$$V_{t+1} = \sum_{\tau=t+1}^{\infty} \left(\frac{1-n}{1+R}\right)^{\tau} \gamma A_t \hat{\pi} = \gamma A_t \hat{v}$$

  donde:

$$\hat{v} = \sum_{\tau=t+1}^{\infty} \left(\frac{1-n}{1+R}\right)^{\tau} \hat{\pi} \approx \frac{\hat{\pi}}{R+n}$$

  R es la tasa de interés y $1-n$ la probabilidad de sobrevivir. Note que $\hat{v}$ es decreciente en R y en n.

- Nota: Suponemos que n es exógeno. Sin embargo, éste podría ser exógeno dado que la probabilidad de que un proyecto fracase puede desplazar emprendedores.

- ¿Cuál es el costo de innovar? Suponga que existe una tecnología simple de producción de bienes finales: $y_t = A_t l_t$ donde l_t es el trabajado usado en la producción. Cómo w_t es el costo del trabajo, entonces:

$$w_t = A_t$$

- Equilibrio: combinando las ecuaciones para V_{t+1} y para w_t tenemos:

$$\frac{V_{t+1}}{w_t} = \gamma \hat{v}$$

- Entonces el nivel de I+D de los emprendedores nacidos en t es:

$$z_t^j = z_t = g\left(\gamma \hat{v}\right)$$

- Sin embargo, el resultado del proceso de I+D es estocástico a nivel individual. La tasa agregada de innovación es:

$$\lambda_t = q(z_t) = \lambda\left(\gamma \hat{v}\right)$$

donde $\lambda(x) = q(g(x))$.

- Se sigue que la tecnología agregada crece a tasa:

$$\frac{A_{t+1}}{A_t} = 1 + \gamma\lambda_t = 1 + \gamma\lambda\left(\gamma\hat{v}\right)$$

- Estática comparativa:
    - $\frac{\partial A_{t'+1}/A_t}{\partial\hat{\pi}} = \gamma\lambda'\left(\gamma\hat{v}\right)\frac{1}{R+n} > 0$. Mayores beneficios incrementan el incentivo a innovar.
    - $\frac{\partial A_{t'+1}/A_t}{\partial\gamma} = \lambda\left(\gamma\hat{v}\right) + \gamma\lambda'\left(\gamma\hat{v}\right)\frac{\hat{\pi}}{R+n}$. Doble efecto: aumenta los incentivos a innovar y aumenta el efecto desborde de las innovaciones individuales en la tecnología agregada.
- El producto agregado de la economía es: $y_t = y_t^E(A_t) + y_t^O(A_t)$, entonces y_t crece a la misma tasa que el conocimiento agregado.

El Mundo de la Ideas y El Modelo de Aghion-Howitt con Entrada

- Consideremos un mercado particular j en el cual el productor j tiene poder monopólico.
- Suponga que ahora hay un competidor externo: "outsider" que tiene la opción de realizar I+D y crear un mejor producto sustituto del producto j.
- Para simplificar supongamos que en caso de se exitoso el proceso de I+D la innovación es "radical" (no sólo reduce costos y aumenta la productividad sino que desplaza completamente al incumbente).
  - Note que el enfoque producción-innovación depende de la estructura de mercado.
  - Ejemplo: La competencia entre el entrante y el incumbente (a la Cournot) define cuanto de participación le queda a la firma que entra (afectando los incentivos a la innovación).

- Valor de la innovación para el "outsider": Si es exitoso en el proceso de I+D pasa de no tener mercado a tener todo el mercado. El valor de la innovación corresponde a el total de beneficios:

$$V_{t+1}^{out} = \sum_{\tau=t+1}^{\infty} \left(\frac{1-n}{1+R}\right)^{\tau} (1+\gamma)A_t\hat{\pi} = (1+\gamma)A_t\hat{v}$$

- Valor de la innovación para el incumbente: Si es exitoso en la innovación, mejora la productividad en una factor $(1+\gamma)$ y por tanto el valor de la innovación es:

$$V_{t+1}^{in} = \sum_{\tau=t+1}^{\infty} \left(\frac{1-n}{1+R}\right)^{\tau} \gamma A_t\hat{\pi} = \gamma A_t\hat{v}$$

- Note que $V_{t+1}^{out} > V_{t+1}^{in}$ ya que el incumbente sólo valora las ganancias de productividad y beneficios, mientras que el "outsider" valora además el beneficio del incumbente.
- Suponga ahora que sólo "outsiders" realizan I+D (habría que relajar para ello las condiciones de inada de $q(\cdot)$). Sería una solución de esquina.

El Mundo de la Ideas y El Modelo de Aghion-Howitt con Entrada

- Bajo el supuesto anterior:

$$\frac{V_{t+1}^{out}}{w_t} = (1+\gamma)\hat{v}$$

- Entonces el nivel de I+D de los emprendedores nacidos en t es:

$$z_t^{out} = z_t = g\left((1+\gamma)\hat{v}\right)$$

- La tasa agregada de innovación es:

$$\lambda_t = q(z_t) = \lambda\left((1+\gamma)\hat{v}\right)$$

  donde de nuevo $\lambda(x) = q(g(x))$.

- Finalmente, la tecnología agregada crece a tasa:

$$\frac{A_{t+1}}{A_t} = 1 + \gamma\lambda_t = 1 + \gamma\lambda\left((1+\gamma)\hat{v}\right)$$

- Como ahora la salida se produce endógenamente como un desplazamiento de incumbentes por oursiders:

$$n = \lambda \left((1+\gamma)\hat{v} \right)$$

reinterpretamos la probabilidad de muerte como la probabilidad de ser desplazado.

- Como $\hat{v} = \frac{\hat{\pi}}{R+n}$ entonces $\hat{v}$ resuelve:

$$\hat{v} = \frac{\hat{\pi}}{R + \lambda \left((1+\gamma)\hat{v} \right)}$$

- Note que ahora un incremento en los beneficios $\hat{\pi}$ aumentan $\hat{v}$ en una proporción menor que 1 porque también se genera el fenómeno desplazamiento.