

Macroeconomía I

El Modelo Estocástico de Crecimiento

Mauricio M. Tejada

Magister en Economía
Universidad Alberto Hurtado

Incertidumbre y Procesos Estocásticos

Modelo Estocástico de Crecimiento

Métodos de Solución

Incertidumbre y Procesos Estocásticos

- Incertidumbre en t
 - Espacio de Estados (S): conjunto de posibles estados (o eventos) de la naturaleza en t .
 - Notación: $s_t \in S$ es una realización.
 - Ejemplo: $S = \{1, 2\}$ y $\{1 = \text{nieve}, 2 = \text{no nieve}\}$
- Incertidumbre en el tiempo:
 - Existen T períodos ($T \leq \infty$)
 - La historia desde 0 a t es: $s^t = (s_0, s_1, \dots, s_t)$
- Arbol de eventos: Definición descriptiva (no rigurosa pero útil)
 - Cada historia (s^t) hasta t se denomina “fecha del evento” o “nodo” del árbol.
 - Para $t = 0$, $s_0 \in S$ es conocido (s_0 se denomina “raíz” del árbol).
 - Para $t = T$, s^T se denomina “nodo terminal” del árbol.
 - Árbol de eventos: Gráfico con todos los nodos.

- Probabilidad en cada Nodo:
 - Probabilidad no condicional para el nodo s^t : $\pi_t(s^t)$
 - Probabilidad condicional para el s^t en s^τ ($\tau \leq t$): $\pi_t(s^t|s^\tau)$
- Variable aleatoria en t
 - Definición: Se denomina “variable aleatoria” a una función de estados (S) en el momento t
 - Notación: $z_t(s_t)$ es una variable aleatoria en el momento t contingente en el estado s_t
 - Ejemplo: Shocks de tecnología (1 =Eficiencia baja ; 2 =Eficiencia alta, etc)
- Proceso estocástico: Colección de variables aleatorias a través del tiempo, $\{x_t\}_{t=0}^{\infty}$, es denominada proceso estocástico.

- Propiedad de Markov: Se dice que un proceso estocástico $\{x_t\}_{t=0}^{\infty}$ tiene la *propiedad de markov* si para todo $k \geq 1$ y todo t ,

$$\Pr(x_{t+1} | x_t, x_{t-1}, \dots, x_{t-k}) = \Pr(x_{t+1} | x_t).$$

- Un *proceso de Markov* es un proceso estocástico que tiene la propiedad de Markov.
- Existen dos tipos de procesos de Markov:
 - Procesos definidos sobre un espacio de estados discreto (*Cadenas de Markov*).
 - Procesos definidos sobre un espacio de estados continuo.

Definición (*Cadenas de Markov*):

Una cadena de Markov es un proceso de Markov discreto definido por una tripleta de objetos:

1. *Espacio de Estados S : $S = \{1, 2, \dots, n\}$*
2. *Una matriz $(n \times n)$ de transición P (a.k.a. matriz estocástica): $P(i, j) = \Pr(x_{t+1} = j | x_t = i)$*
3. *Un vector $(n \times 1)$ con la distribución inicial π_0 : $\pi_0(i) = \Pr(x_0 = i)$*

Nota: n puede ser finito o infinito.

- Ejemplo I:

$$S = \{1, 2\}$$

$$P = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,7 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix},$$

$$\pi_0 = \begin{pmatrix} 0,1 \\ 0,9 \end{pmatrix}$$

- ¿Que significa que una cadena de Markov muestre dependencia?
- Ejemplo II: *matriz doble estocástica*

$$S = \{1, 2\}$$

$$P = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,7 \\ 0,7 & 0,3 \end{pmatrix},$$

$$\pi_0 = \begin{pmatrix} 0,1 \\ 0,9 \end{pmatrix}$$

- ¿Qué significa matriz doble estocástica?

Cadenas de Markov: Probabilidad No Condicional

- Sea el vector $n \times 1$, $\pi_t = (\pi_t(1), \pi_t(2), \dots, \pi_t(n))'$ la distribución de la cadena en el momento t , donde:

$$\pi_t(i) = \Pr(x_t = i).$$

- La ley de la probabilidad total implica:

$$\begin{aligned}\pi_1(j) &= \Pr(x_1 = j) = \sum_{i=1}^n \Pr(x_0 = i) \Pr(x_1 = j | x_0 = i) \\ &= \sum_{i=1}^n \pi_0(i) P(i, j)\end{aligned}$$

- En notación matricial:

$$\pi_1' = \pi_0' P$$

- En general tenemos:

$$\pi_{t+1}' = \pi_t' P$$

- Preguntas:
 - ¿Cuántas distribuciones estacionarias tiene una cadena de Markov?
 - ¿Si empezamos con una distribución arbitraria π_0 , es posible tener que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \pi_t = \lim_{t \rightarrow \infty} \pi_0' P^t = \pi_\infty ?$$

- Respuesta: Todo depende de P !

Teorema (Estacionariedad Asintótica)

Sea P una matriz estocástica con $P(i, j) > 0 \forall (i, j)$. Entonces P tiene una única distribución estacionaria (π_∞) y $\lim_{t \rightarrow \infty} \pi_t = \lim_{t \rightarrow \infty} \pi_0' P^t = \pi_\infty$ para cada distribución inicial π_0 .

- Como calcular la distribución estacionaria:
 - Método I: Resolver el sistema $(I - P')\pi_\infty = 0$
 - Método II: Usando autovalores y autovectores.
 - Método III: Adivinar y verificar e Iteración.
- Ejemplo: de nuevo la matriz doble estocástica.

$$S = \{1, 2\}$$

$$P = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,7 \\ 0,7 & 0,3 \end{pmatrix},$$

$$\pi_0 = \begin{pmatrix} 0,1 \\ 0,9 \end{pmatrix}$$

- Usando iteración y empezando en π_0 :

Iter	1	2	3	4	...	9	10
$s = 1$	0.620	0.452	0.5192	0.4923	...	0.5001	0.5
$s = 2$	0.380	0.548	0.4808	0.5077	...	0.4999	0.5

- No hay diferencias sustanciales.
- Conceptualmente si necesitamos hacer cambios:
 - El espacio de estados S es un conjunto (contiene un continuo de estados)
 - La distribución inicial π_0 es una *densidad*:

$$\pi_0(s) = \Pr(s_0 = s)$$

- La matriz de *transición* P es una *densidad de transición (condicional)*

$$\pi(s'|s) = \Pr(s_{t+1} = s' | s_t = s)$$

- En un espacio continuo las “sumas” son “integrales”
 - La densidad no condicional evoluciona de acuerdo:

$$\pi_{t+1}(s_{t+1}) = \int_{s_t} \pi_t(s_t) \pi(s_{t+1}|s_t) ds_t$$

Ejemplo: Proceso AR (1)

- Ejemplo: Un proceso autorregresivo o AR(1) $\{z_t\}_{t=0}^{\infty}$ se define como:

$$z_{t+1} = (1 - \rho)\mu + \rho z_t + \epsilon_{t+1}$$

donde $\epsilon_{t+1} \sim f(\epsilon)$ es una variable aleatoria continua i.i.d.. Por ejemplo, $\epsilon_{t+1} \sim N(0, 1)$. Entonces:

$$z_{t+1}|z_t \sim N((1 - \rho)\mu + \rho z_t, 1)$$

- Note la propiedad de Markov:

$$\Pr(z_{t+1}|z_t, z_{t-1}, \dots) = \Pr(z_{t+1}|z_t)$$

- Ejemplo: z_t es un shock tecnológico y

$$\log(z_{t+1}) = 0,95 \log(z_t) + w_{t+1},$$

donde $w_{t+1} \sim N(0, 1)$.

Modelo Estocástico de Crecimiento

- Introduzcamos incertidumbre en el modelo neoclásico de crecimiento
- Suponga que la incertidumbre está asociada a shocks tecnológicos ($\{z_t\}_{t=0}^{\infty}$). El problema del Planificador Central es:

$$\begin{aligned} & \max_{\{c_t, k_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}} U(c_0, c_1, \dots, c_{\infty}) \\ & \text{s.t. } c_t + k_{t+1} \leq z_t F(k_t, n_t) + (1 - \delta)k_t, \quad t = 0, 1, 2, \dots, \infty \\ & \quad k_0 \in X, \quad z_0 \in Z \text{ dado.} \end{aligned}$$

- En un ambiente de incertidumbre el concepto adecuado es el de *utilidad esperada*:

$$U(c_0, c_1, \dots, c_{\infty}) = E_0 \left\{ \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t) \right\},$$

donde $E_0(\cdot) := E(\cdot | z_0)$ es la esperanza condicional en la información disponible en $t = 0$ (i.e., z_0).

- La solución del problema son planes contingentes: $k_{t+1} = g_k(k_t, z_t)$ y $c_t = g_c(k_t, z_t)$ [Funciones de Política].

- Si bien intuitiva, la formulación anterior es un poco vaga. Por ejemplo, escribimos como $\{c_t, k_{t+1}\}_{t=0}^T$ a las variables de elección. ¿Pero como se pueden elegir solamente $T + 1$ valores?
- En un mundo estocástico, cada nodo en el árbol de eventos corresponde a una fecha en el caso determinístico. En $t = 0$, las personas eligen un *plan contingente* de consumo e inversión para cada periodo.
- Algunos eventos no ocurren ex-post t por tanto algunas elecciones de consumo e inversión no ocurren tampoco. Ex ante sin embargo, se tiene que considerar todos los escenarios posibles.
- Para resaltar la naturaleza estocástica del problema, vamos a escribir una versión más completa del mismo. Recordemos que la historia de shocks hasta t es $s^t = (s_0, s_1, \dots, s_t)$. Con esta notación las elecciones contingentes al evento s^t pueden escribirse como $(c_t(s^t), k_{t+1}(s^t))$.

- Tomando las consideraciones anteriores, el problema del Planificador puede escribirse como:

$$\begin{aligned} & \max_{\{c_t(s^t), k_{t+1}(s^t)\}_{t=0}^T} E_0 \left\{ \sum_{t=0}^T \beta^t u(c_t(s^t)) \right\} \\ & \text{s.t. } c_t(s^t) + k_{t+1}(s^t) \leq f(k_t(s^{t-1}), z_t(s^t)), \forall s^t \\ & k_0 \in X, z_0 \in Z \text{ given.} \end{aligned}$$

- Si $s_t \in S$ sólo toma un número finito de valores, la expectativa puede escribirse explícitamente:

$$\begin{aligned} E_0 \left\{ \sum_{t=0}^T \beta^t u(c_t(s^t)) \right\} &= \sum_{t=0}^T \beta^t E_0 [u(c_t(s^t))] \\ &= \sum_{t=0}^T \beta^t \sum_{s^t} \pi_t(s^t) u(c_t(s^t)) \end{aligned}$$

- Ejemplo: sea $T = 1$, $S = \{1, 2\}$, $z_t \in \{z_1, z_2\}$, $s_0 = 1$. La función objetivo se transforma en:

$$u(c_0(1)) + \beta [\pi_1(1, 1) u(c_1(1, 1)) + \pi_1(1, 2) u(c_1(1, 2))]$$

y las restricciones son

$$\begin{aligned}c_0(1) + k_1(1) &\leq f(k_0, z_0(1)), \\c_1(1, 1) + k_2(1, 1) &\leq f(k_1(1), z_1(1, 1)), \\c_1(1, 2) + k_2(1, 2) &\leq f(k_1(1), z_1(1, 2)).\end{aligned}$$

- Las variables de elección son:

$$\{c_0(1), c_1(1, 1), c_1(1, 2), k_1(1), k_2(1, 1), k_2(1, 2)\}.$$

- ¿Cuántas restricciones tenemos? ¿Cuántos niveles de consumo y capital se deben elegir? Compare con el número de nodos en el árbol de eventos.

- Retomemos el problema del Planificador Central simplificando notación (pero manteniendo en mente la idea de planes contingentes):

$$\begin{aligned} & \max_{\{c_t, k_{t+1}\}_{t=0}^T} E_0 \left\{ \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t) \right\} \\ & s.t. \quad c_t + k_{t+1} = z_t F(k_t, n_t) + (1 - \delta)k_t \\ & \quad k_0 \in X, \quad z_0 \in Z \text{ dado.} \end{aligned}$$

- El Lagrangeano en esta especificación estocástica es:

$$\ell_0 = E_0 \left\{ \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t) + \lambda_t (z_t F(k_t, n_t) + (1 - \delta)k_t - c_t - k_{t+1}) \right\}$$

- El operador de expectativas es lineal, entonces es posible diferenciar.
- Las CPO son para c_0 y k_1 :

$$c_0 : E_0 \{ u'(c_0) - \lambda_0 \} = 0$$

$$k_1 : \beta E_0 \{ -\lambda_0 + \beta \lambda_1 (z_1 F_k(k_1, n_1) + 1 - \delta) \} = 0$$

$$\lambda_0 : z_0 F(k_0, n_0) + (1 - \delta)k_0 - c_0 - k_1 = 0$$

- k_0 y z_0 son conocidos al elegir c_0 y k_1 .
- Dado que c_0 y k_1 son no estocásticos, y por tanto el multiplicador λ_0 tampoco lo es, tenemos:

$$\begin{aligned}u'(c_0) &= \lambda_0 \\ \lambda_0 &= \beta E_0 \{ \lambda_1 (z_1 F_k(k_1, n_1) + 1 - \delta) \}\end{aligned}$$

- Consideremos ahora el problema desde $t = 1$ en adelante:

$$\ell_1 = E_1 \left\{ \sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1} u(c_t) + \lambda_t (z_t F(k_t, n_t) + (1 - \delta)k_t - c_t - k_{t+1}) \right\}$$

- De la misma forma que antes:

$$\begin{aligned}u'(c_1) &= \lambda_1 \\ \lambda_1 &= \beta E_1 \{ \lambda_2 (z_2 F_k(k_2, n_2) + 1 - \delta) \}\end{aligned}$$

- Siguiendo de la misma forma para $t = 2, 3, \dots$ tenemos que para cualquier t :

$$u'(c_t) = \lambda_t$$

$$\lambda_t = \beta E_t \{ \lambda_{t+1} (z_{t+1} F_k(k_{t+1}, n_{t+1}) + 1 - \delta) \}$$

$$0 = z_t F(k_t, n_t) + (1 - \delta)k_t - c_t - k_{t+1}$$

- Tenemos la Ecuación de Euler Estocástica:

$$\beta E_t \left\{ \frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)} (z_{t+1} F_k(k_{t+1}, n_{t+1}) + 1 - \delta) \right\} = 1$$

más la restricción de recursos:

$$z_t F(k_t, n_t) + (1 - \delta)k_t = c_t + k_{t+1}$$

- Adicionalmente, y de manera análoga al caso determinístico, tenemos la CTV:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \beta^t E_t \lambda_t k_{t+1} = 0$$

- Aplicando el principio de optimalidad al problema secuencial tenemos:

$$\begin{aligned}v(k_0, z_0) &= \max_{\{c_t, k_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}} E \left\{ \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t) \mid z_0 \right\} \\&= \max_{c_0, k_1, \{c_t, k_{t+1}\}_{t=1}^{\infty}} E \left\{ u(c_0) + \sum_{t=1}^{\infty} \beta^t u(c_t) \mid z_0 \right\} \\&= \max_{c_0, k_1} u(c_0) + \beta \max_{\{c_t, k_{t+1}\}_{t=1}^{\infty}} E \left\{ \sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1} u(c_t) \mid z_0 \right\}\end{aligned}$$

- Por la ley de expectativas iteradas: $E[E[\cdot \mid z_1] \mid z_0] = E[\cdot \mid z_0]$ dado $z_0 \subset z_1$

$$v(k_0, z_0) = \max_{c_0, k_1} u(c_0) + \beta \max_{\{c_t, k_{t+1}\}_{t=1}^{\infty}} E \left\{ E \left\{ \sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1} u(c_t) \mid z_1 \right\} \mid z_0 \right\}$$

- Entonces:

$$v(k_0, z_0) = \max_{c_0, k_1} u(c_0) + \beta E \left\{ \max_{\{c_t, k_{t+1}\}_{t=1}^{\infty}} E \left\{ \sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1} u(c_t) \mid z_1 \right\} \mid z_0 \right\}$$

- Note que:

$$v(x_1, z_1) = \max_{\{c_t, k_{t+1}\}_{t=1}^{\infty}} E \left\{ \sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1} u(c_t) \mid z_1 \right\}$$

- Tenemos la ecuación de Bellman en el contexto estocástico:

$$v(k_0, z_0) = \max_{c_0, k_1} u(c_0) + \beta E \{ v(k_1, z_1) \mid z_0 \}$$

- En general tenemos:

$$v(k_t, z_t) = \max_{c_t, k_{t+1}} u(c_t) + \beta E_t \{v(k_{t+1}, z_{t+1})\}$$

- Por espacio hemos omitido la restricción: $c_t + k_{t+1} = z_t F(k_t, n_t) + (1 - \delta)k_t$.
- El término de expectativa con un espacio de estados discreto es:

$$E \{v(k_{t+1}, z_{t+1}) | z_t = z_i\} = \sum_{j=1}^n p_{ij} v(k_{t+1}, z_{t+1} = z_j)$$

- En un espacio de estados continuo tenemos ($z \in [a, b]$):

$$E \{v(k_{t+1}, z_{t+1}) | z_t\} = \int_a^b v(k_{t+1}, z_{t+1}) \pi(z_{t+1} | z_t) dz_{t+1}$$

- Reemplazando la restricción en la ecuación de Bellman tenemos:

$$v(k_t, z_t) = \max_{k_{t+1}} \{ u(z_t F(k_t, n_t) + (1 - \delta)k_t - k_{t+1}) + \beta E_t \{ v(k_{t+1}, z_{t+1}) \} \}$$

- La CPO es:

$$-u'(z_t F(k_t, n_t) + (1 - \delta)k_t - k_{t+1}) + \beta E_t \{ v_k(k_{t+1}, z_{t+1}) \} = 0$$

- Usando el teorema de la envolvente:

$$v_k(k_t, z_t) = u'(z_t F(k_t, n_t) + (1 - \delta)k_t - k_{t+1}) (z_t F_k(k_t, n_t) + 1 - \delta)$$

- Tomando un período adelante y aplicando expectativas:

$$E_t \{ v_k(k_{t+1}, z_{t+1}) \} = E_t \{ u'(z_{t+1} F(k_{t+1}, n_{t+1}) + (1 - \delta)k_{t+1} - k_{t+2}) (z_{t+1} F_k(k_{t+1}, n_{t+1}) + 1 - \delta) \}$$

- Entonces tenemos la ecuación de Euler estocástica:

$$\beta E_t \left\{ \frac{u'(z_{t+1} F(k_{t+1}, n_{t+1}) + (1 - \delta)k_{t+1} - k_{t+2})}{u'(z_t F(k_t, n_t) + (1 - \delta)k_t - k_{t+1})} (z_{t+1} F_k(k_{t+1}, n_{t+1}) + 1 - \delta) \right\} = 1$$

Métodos de Solución

- Los métodos basados en la Función Valor:
 - Adivinar y Verificar la Función Valor.
 - Iteración de la Función Valor.
- Métodos Basados en la Ecuación de Euler Estocástica
 - Adivinar y Verificar la Función de Política.
 - Iteración de la Función de Política.
 - Métodos de Perturbación (usando aproximaciones de Taylor) .

- Brock and Mirman (1972): Generalización del modelo neoclásico de crecimiento y el punto de partida para los modelos de Ciclos Económico Reales.
- Base: Modelo neoclásico con mercados completos. Las familias pueden usar commodities tipo Arrow-Debreu para asegurarse contra riesgo idiosincrático. Entonces, la fuente interesante de incertidumbre son los shocks agregados.
- El Modelo:

$$u(c) = \log(c), \quad f(k, z) = zk^\alpha, \quad z \text{ i.i.d. and } E(\log(z)) = \mu$$

- El Planificador resuelve:

$$v(k, z) = \max_{0 \leq k' \leq zk^\alpha} \{ \log(zk^\alpha - k') + \beta E[v(k', z') | z] \}$$

- Usemos primero el método de *Adivinar y Verificar la Función Valor*:

$$v(k, z) = C + F \log(k) + G \log(z)$$

- En la ecuación de Bellman tenemos:

$$\begin{aligned}v(k, z) &= \max_{0 < k' < zk^\alpha} \{ \log(zk^\alpha - k') + \beta (C + F \log(k') + G\mu) \}, \\ \implies v(k, z) &= \max_{0 < k' < zk^\alpha} \{ \log(zk^\alpha - k') + \beta [(C + G\mu) + F \log(k')] \}\end{aligned}$$

- Tenemos la misma forma que en el caso determinístico. Las CPO llevan a:

$$k' = \frac{\beta F}{1 + \beta F} A k^\alpha.$$

- Usando esta solución para comparar el lado izquierdo y el lado derecho de la ecuación de Bellman tenemos la solución:

$$\begin{aligned}C &= \left[\log(1 - \alpha\beta) + \frac{\alpha\beta \ln(\alpha\beta)}{1 - \alpha\beta} + \frac{\beta\mu}{1 - \alpha\beta} \right] (1 - \beta)^{-1}, \\ F &= \frac{\alpha}{1 - \alpha\beta}, \\ G &= \frac{1}{1 - \alpha\beta}.\end{aligned}$$

Métodos basados en la Función Valor: Iteración de la FV

- En el método *Iteración de la Función Valor* el procedimiento es exactamente el mismo que en el caso determinístico.
- Supongamos que iniciamos la iteración con:

$$v_0(k, z) = 0, \forall k, z$$

- Resolvemos la ecuación de Bellman con el método Adivinar y Verificar

$$v_1(k, z) = \max_{k'} u(f(k, z) - k') + \beta E[v_0(k', z') | z]$$

- Si $v_1(k, z) = v_0(k, z), \forall k, z$, tenemos la solución, sino continuamos iterando:

$$v_2(k, z) = \max_{k'} u(f(k, z) - k') + \beta E[v_2(k', z') | z]$$

- En general para $j = 0, 1, 2, \dots$

$$v_{j+1}(k, z) = \max_{k'} u(f(k, z) - k') + \beta E[v_j(k', z') | z]$$

- Sistema de ecuaciones en diferencias no lineales estocásticas del modelo estocástico de crecimiento (para $u(c) = \frac{c^{\gamma-1}-1}{\gamma-1}$ y $f(k) = Ak^\alpha$) es:

$$c_t^{-\gamma} = \beta E_t c_{t+1}^{-\gamma} [\alpha A_{t+1} k_{t+1}^{\alpha-1} + 1 - \delta]$$

$$c_t + k_{t+1} = A_t k_t^\alpha + (1 - \delta)k_t$$

$$\ln A_{t+1} = \rho \ln A_t + \sigma \varepsilon_{t+1}$$

- La idea de los métodos de perturbación es encontrar soluciones aproximadas para las funciones de política (válidas alrededor de un punto en particular).
- Estos métodos cubre una amplia gama de modelos, incluyendo aquellos en los cuales la asignación del mercado no es Pareto óptima.
- Referencias: Blanchard y Kahn (1980), Uhlig (1999), Sims (2000), Klein (2000), Schmitt-Grohe y Uribe (2004). Vamos a seguir la exposición de Schmitt-Grohe y Uribe (2004).

- Las condiciones de primer orden de una variedad amplia de modelo puede escribirse de la siguiente forma:

$$E_t f(y_{t+1}, y_t, x_{t+1}, x_t) = 0$$

con y el vector $n_y \times 1$ de variables de control (no predeterminadas) y x el vector $n_x \times 1$ de variables de estado (predeterminadas).

- Además distinguimos entre:

$$x_t = [x_t^1; x_t^2]'$$

con x_t^1 el vector de variables de estado endógenas y x_t^2 el vector de variables de estado exógenas.

- Suponemos que las variables de estado exógenas siguen un proceso estocástico markoviano:

$$x_{t+1}^2 = \Lambda x_t^2 + \tilde{\eta} \sigma \varepsilon_{t+1}$$

con ε_{t+1} un vector de shocks $n_\epsilon \times 1$ con matriz de varianzas y covarianzas I . $\sigma > 0$ mide el grado de incertidumbre y $\tilde{\eta}$ es el parámetro de perturbación ($\tilde{\eta} = 0$ es el caso determinístico).

- Volviendo al modelo de crecimiento estocástico: definamos como $y_t = c_t$ y $x_t = [k_t; \ln A_t]'$, entonces:

$$E_t f(y_{t+1}, y_t, x_{t+1}, x_t) = E_t \begin{bmatrix} y_{1t}^{-\gamma} - \beta y_{1t+1}^{-\gamma} [\alpha e^{x_{2t+1}} x_{1t+1}^{\alpha-1} + 1 - \delta] \\ y_{1t} + x_{1t+1} - e^{x_{2t}} x_{1t}^{\alpha} - (1 - \delta)x_{1t} \\ x_{2t+1} - \rho x_{2t} \end{bmatrix}$$

- La solución del sistema son las funciones de política:

$$\begin{aligned} y_t &= g(x_t, \sigma) \\ x_{t+1} &= h(x_t, \sigma) + \eta \sigma \epsilon_{t+1} \end{aligned}$$

las mismas que mapean estados en decisiones y dependen del nivel de incertidumbre.

- Los métodos de perturbación buscan una aproximación local de las funciones g y h alrededor de un punto particular $(\bar{x}, \bar{\sigma})$.

- Tomando la aproximación de Taylor alrededor del punto $(x, \sigma) = (\bar{x}, \bar{\sigma})$ tenemos (suponemos $n_x = n_y = 1$ para simplificar notación):

$$\begin{aligned} g(x, \sigma) = & g(\bar{x}, \bar{\sigma}) + g_x(\bar{x}, \bar{\sigma})(x - \bar{x}) + g_\sigma(\bar{x}, \bar{\sigma})(\sigma - \bar{\sigma}) \\ & + \frac{1}{2} g_{xx}(\bar{x}, \bar{\sigma})(x - \bar{x})^2 + g_{x\sigma}(\bar{x}, \bar{\sigma})(x - \bar{x})(\sigma - \bar{\sigma}) \\ & + \frac{1}{2} g_{\sigma\sigma}(\bar{x}, \bar{\sigma})(\sigma - \bar{\sigma})^2 + \dots \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} h(x, \sigma) = & h(\bar{x}, \bar{\sigma}) + h_x(\bar{x}, \bar{\sigma})(x - \bar{x}) + h_\sigma(\bar{x}, \bar{\sigma})(\sigma - \bar{\sigma}) \\ & + \frac{1}{2} h_{xx}(\bar{x}, \bar{\sigma})(x - \bar{x})^2 \\ & + h_{x\sigma}(\bar{x}, \bar{\sigma})(x - \bar{x})(\sigma - \bar{\sigma}) \\ & + \frac{1}{2} h_{\sigma\sigma}(\bar{x}, \bar{\sigma})(\sigma - \bar{\sigma})^2 + \dots \end{aligned}$$

- La idea entonces es encontrar las derivadas de las funciones g y h según el orden de la aproximación que utilicemos.

- Usemos una aproximación de Taylor de primer orden alrededor del estado estacionario $(\bar{x}, 0)$:

$$g(x, \sigma) = g(\bar{x}, 0) + g_x(\bar{x}, 0)(x - \bar{x}) + g_\sigma(\bar{x}, 0)\sigma$$

$$h(x, \sigma) = h(\bar{x}, 0) + h_x(\bar{x}, 0)(x - \bar{x}) + h_\sigma(\bar{x}, 0)\sigma$$

- Note que en estado estacionario se cumple $g(\bar{x}, 0) = \bar{y}$ y $h(\bar{x}, 0) = \bar{x}$.
- Usando las funciones de política, sistema de ecuaciones en diferencia puede escribirse:

$$F(x, \sigma) \equiv E_t f(g(h(x, \sigma) + \eta\sigma\epsilon', \sigma), g(x, \sigma), h(x, \sigma) + \eta\sigma\epsilon', x) = 0$$

- Vamos a identificar g_x , h_x , g_σ , y h_σ a partir de las derivadas del sistema anterior.

$$F_\sigma(\bar{x}, 0) = 0$$

$$F_x(\bar{x}, 0) = 0$$

- Tomamos la derivada respecto de σ :

$$\begin{aligned}F_{\sigma}(\bar{x}, 0) &= E_t f_{y'} [g_x (h_{\sigma} + \eta \epsilon') + g_{\sigma}] + f_y g_{\sigma} + f_{x'} (h_{\sigma} + \eta \epsilon') = 0 \\&= f_{y'} [g_x h_{\sigma} + g_{\sigma}] + f_y g_{\sigma} + f_{x'} h_{\sigma} = 0\end{aligned}$$

Donde usamos el hecho que $E_t \epsilon' = 0$. Matricialmente:

$$\begin{bmatrix} f_{y'} g_x + f_{x'} & f_{y'} + f_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{\sigma} \\ g_{\sigma} \end{bmatrix} = 0$$

Note que el sistema lineal es homogéneo, por lo que la solución satisface $h_{\sigma} = 0$ y $g_{\sigma} = 0$.

- Este resultado implica que en la aproximación de primer orden las funciones de política no dependen del riesgo (principio de certeza equivalente). En general, la aproximación de primer orden no puede ser usada para analizar el efecto del riesgo.

- Tomamos la derivada respecto de x :

$$F_x(\bar{x}, 0) = f_{y'} g_x h_x + f_y g_x + f_{x'} h_x + f_x = 0$$

Matricialmente:

$$\begin{bmatrix} f_{x'} & f_{y'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ g_x \end{bmatrix} h_x = - \begin{bmatrix} f_x & f_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ g_x \end{bmatrix}$$

- Sean $A = \begin{bmatrix} f_{x'} & f_{y'} \end{bmatrix}$ y $B = - \begin{bmatrix} f_x & f_y \end{bmatrix}$. Note que tanto A como B son conocidos. Podemos reescribir el sistema como:

$$A \begin{bmatrix} I \\ g_x \end{bmatrix} h_x = B \begin{bmatrix} I \\ g_x \end{bmatrix}$$

- ¿Cómo resolvemos por h_x y g_x ? Transformamos el problema en uno de autovalores generalizado.

Métodos de Perturbación (Aproximación de Primer Orden)

- Primero note que cualquier matriz puede ser descompuesta en:

$$h_x = P\Lambda P^{-1}$$

con Λ la matriz cuya diagonal está poblada por los autovalores de h_x y P cuyas columnas corresponden a los autovectores de h_x .

- Reemplazando:

$$\begin{aligned} A \begin{bmatrix} I \\ g_x \end{bmatrix} P\Lambda P^{-1} &= B \begin{bmatrix} I \\ g_x \end{bmatrix} \\ \underbrace{A \begin{bmatrix} I \\ g_x \end{bmatrix} P}_{Z} \Lambda &= B \underbrace{\begin{bmatrix} I \\ g_x \end{bmatrix} P}_{Z} \\ AZ\Lambda &= BZ \end{aligned}$$

- **Problema de Autovalores Generalizado:** Dadas dos matrices A y B de tamaño $n \times n$, existe una matriz V y una matriz diagonal D tal que:

$$A \begin{bmatrix} V_1 & V_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{11} & \emptyset \\ \emptyset & D_{22} \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} V_1 & V_2 \end{bmatrix}$$

- Ordenando los autovalores de menor a mayor y dejando todos los autovalores menores que 1 en D_{11} , podemos escribir $\Lambda = D_{11}$ y $Z = V_1$. Entonces:

$$\begin{bmatrix} I \\ g_x \end{bmatrix} P = V_1 = \begin{bmatrix} V_{11} \\ V_{12} \end{bmatrix} \rightarrow P = V_{11}$$

- Usando estos resultados tenemos:

$$h_x = V_{11} D_{11} V_{11}^{-1} \text{ y } g_x = V_{12} V_{11}^{-1}$$

Métodos de Perturbación (Aproximación de Segundo Orden)

- La aproximación de Taylor de segundo orden de g y h alrededor del estado estacionario $(x, \sigma) = (\bar{x}, 0)$ es:

$$\begin{aligned}[g(x, \sigma)]^i &= [g(\bar{x}, 0)]^i + [g_x(\bar{x}, 0)]_a^i [(x - \bar{x})]_a + [g_\sigma(\bar{x}, 0)]^i [\sigma] \\ &\quad + \frac{1}{2} [g_{xx}(\bar{x}, 0)]_{ab}^i [(x - \bar{x})]_a [(x - \bar{x})]_b \\ &\quad + \frac{1}{2} [g_{x\sigma}(\bar{x}, 0)]_a^i [(x - \bar{x})]_a [\sigma] \\ &\quad + \frac{1}{2} [g_{\sigma x}(\bar{x}, 0)]_a^i [(x - \bar{x})]_a [\sigma] + \frac{1}{2} [g_{\sigma\sigma}(\bar{x}, 0)]^i [\sigma][\sigma] \\ [h(x, \sigma)]^j &= [h(\bar{x}, 0)]^j + [h_x(\bar{x}, 0)]_a^j [(x - \bar{x})]_a + [h_\sigma(\bar{x}, 0)]^j [\sigma] \\ &\quad + \frac{1}{2} [h_{xx}(\bar{x}, 0)]_{ab}^j [(x - \bar{x})]_a [(x - \bar{x})]_b \\ &\quad + \frac{1}{2} [h_{x\sigma}(\bar{x}, 0)]_a^j [(x - \bar{x})]_a [\sigma] \\ &\quad + \frac{1}{2} [h_{\sigma x}(\bar{x}, 0)]_a^j [(x - \bar{x})]_a [\sigma] + \frac{1}{2} [h_{\sigma\sigma}(\bar{x}, 0)]^j [\sigma][\sigma]\end{aligned}$$

con $i = 1, \dots, n_y$, $a, b = 1, \dots, n_x$, y $j = 1, \dots, n_x$

Métodos de Perturbación (Aproximación de Segundo Orden)

- los elemento $h_x(\bar{x}, 0)$ y $g_x(\bar{x}, 0)$ son conocidos de la aproximación de primer orden.
- Los elementos desconocidos son:

$$[g_{xx}]_{ab}^i, [g_{x\sigma}]_a^i, [g_{\sigma x}]_a^i, [g_{\sigma\sigma}]^i, [h_{xx}]_{ab}^j, [h_{x\sigma}]_a^j, [h_{\sigma x}]_a^j, [h_{\sigma\sigma}]^j$$

- Identificamos estos elementos resolviendo el sistema implícito en:

$$\begin{aligned}g_{xx}(\bar{x}, 0) \text{ y } h_{xx}(\bar{x}, 0) &\rightarrow [F_{xx}(\bar{x}, 0)]_{jk}^i = 0 \\g_{\sigma\sigma}(\bar{x}, 0) \text{ y } h_{\sigma\sigma}(\bar{x}, 0) &\rightarrow [F_{\sigma\sigma}(\bar{x}, 0)]^i = 0 \\g_{\sigma x}(\bar{x}, 0) \text{ y } h_{\sigma x}(\bar{x}, 0) &\rightarrow [F_{\sigma x}(\bar{x}, 0)]_j^i = 0\end{aligned}$$

- El último sistema es homogéneo por lo que $g_{\sigma x}(\bar{x}, 0) = 0$ y $h_{\sigma x}(\bar{x}, 0) = 0$.
- Concluimos al discusión notando que las funciones de política aproximadas dependen de $\frac{1}{2}g_{\sigma\sigma}\sigma^2$ y $\frac{1}{2}h_{\sigma\sigma}\sigma^2$, por lo que es posible analizar el efecto del riesgo en las decisiones.

- Las funciones de política para el caso de una aproximación de primer orden son:

$$\begin{aligned}y &= g(\bar{x}, 0) + g_x(\bar{x}, 0)(x - \bar{x}) \\x' &= h(\bar{x}, 0) + h_x(\bar{x}, 0)(x - \bar{x}) + \eta\sigma\epsilon'\end{aligned}$$

- Una práctica muy común en macroeconomía es expresar las variables en logaritmos, de tal manera que los desvíos respecto del estado estacionario $\hat{x} = \log(x) - \log(\bar{x})$ estén medidos en términos porcentuales.
- Si las variables están medidas en logaritmos la solución sería:

$$\begin{aligned}\hat{y} &= g_x(0, 0)\hat{x} \\ \hat{x}' &= h_x(0, 0)\hat{x} + \eta\sigma\epsilon'\end{aligned}$$

- $h_x(0, 0)$ por tanto una elasticidad e indica el porcentaje del desequilibrio en \hat{x} que se cerrará en un período.

- Suponga $\epsilon \sim N(0, 1)$.
- Usar un generador de números aleatorio para generar una serie de muchos shocks:
 $eps = randn(10000, 1)$.
- Recuperar recursivamente las variables de estado usando las funciones de política. Suponemos que se parte del estado estacionario.

$$\hat{x}[j] = h_x \hat{x}[j-1] + \eta \sigma \epsilon[j], \quad j = 2, \dots, 10000$$

con $\hat{x}[1] = 0$ y dados η y σ .

- Recuperar las variables de control usando las funciones de política.

$$\hat{y}[j] = g_x \hat{x}[j], \quad j = 1, \dots, 10000$$

- Una vez generadas las series del modelo (capital, consumo, producto, etc) se pueden calcular momentos simulados (media, varianza, correlaciones, etc) para para ser comparados con sus contrapartes en los datos.

- Se trata de analizar el efecto dinámico sobre las variables (respuesta) de un shock de una sola vez (impulso). Así, definimos la FIR para una variable z cómo:

$$IRF(z_{t+j}) \equiv E_t z_{t+j} - E_{t-1} z_{t+j}$$

- Para el caso de las variables de estado, usando la función de política y obtenemos:

$$E_t \hat{x}_{t+1} = h_x \hat{x}_t$$

si en el momento inicial estamos en estado estacionario, entonces $\hat{x}_0 = \eta\sigma\epsilon_0$, por lo que:

$$FIR(\hat{x}_t) \equiv E_0 \hat{x}_t - E_{-1} \hat{x}_t = h_x^t [x_0 - E_{-1} x_0] = h_x^t [\eta\sigma\epsilon_0] = h_x^t \hat{x}_0; \quad t \geq 0$$

- La función de impulso respuesta para las variables de control es:

$$FIR(\hat{y}_t) = g_x h_x^t \hat{x}_0$$

- Las FIRs entonces son un gráfico con los desvíos en el eje vertical y los períodos en el eje horizontal.
- Muestran la persistencia de efecto del shock sobre cada variables.
- Permiten dar una medida cuantitativa del efecto del shocks en cada momento del tiempo (y además del efecto completo, la suma de los efectos temporales).
- Permiten tener una medida de la duración del efecto del shock.

¿Cómo Elegir los Parámetros?

- La literatura sugiere dos enfoques alternativos:
 - Estimación
 - Calibración
- ¿Porqué usar calibración y no estimación? *Los modelos son abstracciones*: Están diseñados (deliberadamente) para capturar algunas aspectos de la vida real y abstraerse de otros.
- *Alternativa*: Elegir *sólo* aquellos aspectos o dimensiones de los datos para los cuales el modelo estuvo diseñado.
 - Hoover (1995): *A model is calibrated when its parameters are quatified from causal empiricism or unrelated econometric studies or are chosen to guarantee that the model mimics some particular features of the historical data.*
- *La idea clave detrás de la calibración*: Elegir parámetros implica un ejercicio de *matching* de momentos (¿Qué momentos? - discreción).
- Estimación y calibración son dos variaciones de enfoque para el miso objetivo (de hecho calibración es GMM exactamente identificado)

- Algunas reglas de la calibración:
 - No justificar la elección de parámetros usando estudios previos (ej: especificidad de la pregunta)
 - Hacer honor a la teoría (ej: relación pregunta - modelo)
 - Respetar las métricas (ej: relaciones de largo plazo)
 - Usar métricas consistentes de los datos y del modelo (ej: (1) que se mide en los datos vs el modelo y (2) que se debe incluir en el modelo)
 - Evitar sobre-parametrizaciones (ej: elegir extensiones del modelo que no tengan un número muy grande parámetros)

¿Cómo Elegir los Parámetros?

- Tomemos como ejemplo el modelo de ciclos reales:

$$\begin{aligned} & \max_{\{c_t, k_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}} E_0 \left\{ \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \frac{c_t^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} \right\} \\ & \text{s.t. } c_t + k_{t+1} = z_t k_t^{\alpha} + (1-\delta)k_t \\ & \quad k_0 \in X, \quad z_0 \in Z \text{ dado.} \end{aligned}$$

- Vamos a concentrarnos en realizar un *matching* de las características de largo plazo del modelo.
- Recordemos que el modelo neoclásico fue diseñado para capturar el proceso de acumulación de capital.
- Usemos los siguientes momentos:

$$\frac{k_t}{y_t}, \frac{i_t}{y_t}, r_t$$

- Suponga que tenemos data sobre k, y, i, r para muchos años y tomamos un promedio de los ratios relevantes:

$$\bar{\frac{k}{y}} \approx 2,5, \quad \bar{\frac{i}{y}} \approx 0,2, \quad \bar{r} \approx 0,04$$

¿Cómo Elegir los Parámetros?

- Tomemos 3 momentos y 5 parámetros ($\alpha, \beta, \sigma, \delta, \rho$)
- La tasa de interés en estado estacionario satisface:

$$1 + r = \frac{1}{\beta} \implies \beta = \frac{1}{1 + r} = \frac{1}{1,04} \approx 0,96$$

- La inversión en estado estacionario satisface:

$$i = \delta k \implies \delta = \frac{i}{k} = \frac{i/y}{k/y} = \frac{0,2}{2,5} = 0,08$$

- El stock de capital de estado estacionario satisface:

$$\alpha k^{\alpha-1} = \alpha \frac{k}{y} = \frac{1}{\beta} - (1 - \delta) \implies \alpha = \frac{k}{y} \left(\frac{1}{\beta} - 1 + \delta \right) = 0,3$$

- El parámetro σ no afecta las condiciones de estado estacionario. Estudios micro sugieren es está entre $[1, 2,5]$. Se puede usar $\sigma \rightarrow 1$ y por tanto $u(c_t) = \log(c_t)$.
- El parámetro ρ no afecta al estado estacionario. Típicamente se calibra: contabilidad de crecimiento + regresión AR(1).