Microeconomía 1

Incertidumbre

José Ignacio Heresi

Facultad de Economía y Negocios
Universidad Alberto Hurtado

Repaso variables aleatorias (Tadelis 19.4)

- Una variable aleatoria (o estocástica) describe un variable que está relacionada al azar, que puede tomar distintos resultados (*outcomes*), cada uno de ellos asociado a una probabilidad (*probability* o *likelihood*).
- Hay variables aleatorias discretas y continuas.
- Un evento es un resultado o un conjunto de resultados que pueden ocurrir.
- Si todos los resultados de una variable aleatoria son números, entonces se puede definir la función de distribución acumulada (*cumulative distribution function CDF*), que describe la probabilidad de que un valor x sea menor o igual a un valor especificado x_0.
- Es decir, $F(x_0) = \Pr\{x \leq x_0\}$.

Repaso variables aleatorias (Tadelis 19.4)

- Cualquier CDF cumple las siguientes propiedades:
  - Si $x_2 > x_1$ entonces $F(x_2) \geq F(x_1)$.
  - $F(-\infty) = 0$ y $F(\infty) = 1$.
  - $1 - F(x_0) = \Pr\{x > x_0\}$.
- Para una distribución discreta, la *CDF* es una función *step* con saltos en cada resultado posible.
- Para una distribución continua, la *CDF* crece gradual y continuamente.
- Si la CDF de una distribución continua es diferenciable, entonces su derivada $f = F'$ se llama la función de densidad de probabilidad.
- Teorema fundamental del cálculo: para $x_2 > x_1$, se tiene que $\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = F(x_2) - F(x_1)$.

Repaso variables aleatorias (Tadelis 19.4)

- El valor esperado (o esperanza) es, para variables discretas y continuas, respectivamente:

$$\mathbb{E}(x) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$$
$$\mathbb{E}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

- Esto es el promedio ponderado por las probabilidades de cada resultado.
- Ejercicio: la distribución uniforme en el intervalo $[a, b]$ tiene función de densidad $f(x) = \frac{1}{b-a}$ y CDF $F(x) = \frac{x-a}{b-a}$. Calcule el valor esperado de la distribución.

Incertidumbre

- Sea X el conjunto de posibles resultados/premios/consecuencias/eventos (por ahora consideramos que es finito).
- Se asume que las probabilidades de cada resultado son conocidas.
- Una lotería simple, definida sobre resultados $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$, es una distribución de probabilidades $p = \{p_1, p_2, ..., p_n\}$, con $p_k \geq 0$ es la probabilidad de que x_k ocurra y $\sum_{k=1}^{n} p_k = 1$.
- Las loterías se pueden representar en el simplex (de $n - 1$ dimensiones).
- El espacio de loterías definido sobre X es $P(X)$, definido como

$$P(X) = \{(p_1, ..., p_n) : p_i \geq 0 \text{ y } p_1, ..., p_n = 1\}$$

Loterías y preferencias

- Si tenemos dos loterías, p y p', entonces cualquier combinación convexa $\alpha p + (1-\alpha)p'$ con $\alpha \in [0,1]$ también es una lotería (equivalentemente P es un conjunto convexo).
- A esto se le llama lotería compuesta en las que a loterías simples se les asignan probabilidades (que suman 1).
- Las preferencias sobre las loterías están dadas por una relación de preferencias $\succsim$ sobre P, que se asume completa y transitiva.
- Definición: continuidad. Una relación de preferencias $\succsim$ sobre el espacio de loterías P es continua si para cualquier $p, p', p'' \in P$, existe un $\alpha \in [0,1]$ tal que $\alpha p + (1-\alpha)p'' \sim p'$.

Utilidad esperada

- Definición: independencia. Una relación de preferencias $\succsim$ sobre el espacio de loterías P satisface independencia si para cualquier $p, p', p'' \in P$ y cualquier $\alpha \in [0,1]$, se tiene que

$$p \succsim p' \iff \alpha p + (1-\alpha)p'' \succsim \alpha p' + (1-\alpha)p''$$

- Como $\succsim$ es completa, transitiva y continua, puede ser representada por una función de utilidad $U : P \to \mathbb{R}$, con $p \succsim p'$ si y solo si $U(p) \geq U(p')$.
- Definición: forma de utilidad esperada. Una función de utilidad $U : P \to \mathbb{R}$ tiene forma de utilidad esperada (o es una función de utilidad Neumann-Morgenstern) si hay números $(u_1, ..., u_n)$ para cada uno de los resultados $(x_1, ..., x_n)$ tal que para todo $p \in P$, $U(p) = \sum_{i=1}^{n} p_i u_i$.

Utilidad esperada

- Una función tiene forma de utilidad esperada si y solo si es lineal en las probabilidades, es decir

$$U\left(\sum_{k=1}^{K} \alpha_k p_k\right) = \sum_{k=1}^{K} \alpha_k U(p_k)$$

  para cualesquiera K loterías y $\sum_{k=1}^{K} \alpha_k = 1$.
- Para dos loterías esto es $U(\alpha p + (1-\alpha)p') = \alpha U(p) + (1-\alpha)U(p')$.
- En la teoría del consumidor se tenía que las funciones de utilidad eran solo ordinales, por lo que transformaciones crecientes de dichas utilidades mantenían sus propiedades.
- Esto no es así para la utilidad esperada.

Utilidad esperada

- Proposición: transformación lineal de U. Sea $U : P \to \mathbb{R}$ una función de utilidad esperada que representa $\succsim$ en P. Entonces, $V : P \to \mathbb{R}$ es una representación de utilidad esperada de $\succsim$ si y solo si hay escalares a y $b > 0$ tal que $V(p) = a + bU(p)$ para todo $p \in P$.
- Teorema: von Neumann y Morgenstern, 1947. Una relación de preferencias $\succsim$ completa y transitiva en P satisface continuidad e independencia si y solo si admite una representación de utilidad esperada $U : P \to \mathbb{R}$.
- Intuitivamente, el axioma de independencia implica curvas de indiferencia lineales y paralelas.
- La representación en forma de utilidad esperada implica linealidad, lo que también implica curvas de indiferencia lineales y paralelas.

Ejemplo

- Supongamos que hay tres resultados posibles: el primero, entrega $2.500.000, el segundo $500.000 y el tercero $0.
- Entre las siguientes loterías, ¿cuál prefiere?

$$
\begin{aligned}
p^1 &= (0, 1, 0) \\
p^{1'} &= (0.1, 0.89, 0.01)
\end{aligned}
$$

- Y entre las siguientes?

$$
\begin{aligned}
p^2 &= (0, 0.11, 0.89) \\
p^{2'} &= (0.1, 0, 0.9)
\end{aligned}
$$

- Comunmente, se da que $p^1 \succ p^{1'}$ y $p^{2'} \succ p^2$, lo cual no es consistente con la forma de utilidad esperada.

Actitudes frente al riesgo

Actitudes frente al riesgo

- De ahora en adelante consideramos que los resultados posibles son cantidades monetarias.
- Por lo tanto, X es la línea de los reales (o algún intervalo).
- Una lotería está representada por una función de distribución acumulada $F(\cdot)$.
- Si U tiene forma de utilidad esperada, entonces para todo F

$$U(F) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x)dF(x)$$

- En MWG a u se le llama función de utilidad Bernoulli y a U se le llama función de utilidad von Neumann-Morgenstern (vNM).
- Se asume que u es creciente y continua.

Actitudes frente al riesgo

- Sea L_x una lotería degenerada que tiene probabilidad del evento x igual a 1.
- Definición: aversión al riesgo. Un tomador de decisión es (estrictamente) averso al riesgo si para cualquier lotería no degenerada F con valor esperado $E_F = \int x dF(x)$, el tomar de decisión prefiere (estrictamente) L_{E_F} a F.
- O sea, el tomador de decisión siempre prefiere la certeza de obtener el valor esperado de la lotería que la lotería misma.
- Aversión al riesgo es lo mismo que decir que

$$\int u(x)dF(x) \leq u\left(\int x dF(x)\right) \quad \text{para todo } F$$

- A esta expresión matemática se le llama desigualdad de Jensen.

Actitudes frente al riesgo

- La desigualdad de Jensen es la propiedad que define a las funciones cóncavas.
- Proposición. Un tomador de decisión es averso al riesgo si y solo si u es cóncava.
- Un agente averso al riesgo prefiere la certeza del valor esperado de la lotería que la lotería. Pero, ¿cuánto lo prefiere?
- Definición: equivalente cierto. El equivalente cierto $c(F,u)$ es la cantidad de dinero tal que

$$u(c(F,u)) = \int u(x)dF(x)$$

- Es equivalente decir que un individuo es averso al riesgo, que u es cóncava y que el equivalente cierto es menor o igual al valor esperado de la lotería (para todas las loterías)

Actitudes frente al riesgo

- Para comparar el grado de aversión al riesgo entre dos agentes, una manera es comparar el equivalente cierto entre ambos.
- El agente con menor equivalente cierto es el más averso al riesgo.
- Otra manera fue desarrollada por Arrow y Pratt.
- Definición: coeficiente absoluto de aversión al riesgo Arrow-Pratt. Para cualquier función de utilidad Bernoulli $u(\cdot)$ dos veces diferenciable, este coeficiente es

$$A(x) = -\frac{u''(x)}{u'(x)}$$

Actitudes frente al riesgo

- Proposición. Las siguientes definiciones de u es *más averso al riesgo* que v son equivalentes:
    1. Si u prefiere una lotería F a un resultado x con certeza, entonces v también prefiere F.
    2. Para todo F, $c(F,u) \leq c(F,v)$.
    3. La función u es *más cóncava* que v: existe alguna función concava creciente g tal que $u = g \circ v$.
    4. Para todo x, $A(x,u) \geq A(x,v)$.
- Alternativamente, (3) se puede escribir como que u es más averso al riesgo que v si $v = h \circ u$ para una función creciente y convexa h.

Actitudes frente al riesgo y niveles de riqueza

- Definición. La función de utilidad Bernoulli $u(\cdot)$ tiene aversión al riesgo absoluta decreciente (constante, creciente) si $A(x, u)$ es decreciente (constante, creciente) en x.
  - Aversión al riesgo absoluta decreciente (DARA): si un individuo con menos riqueza está dispuesto a tomar una lotería, para loterías que suman o restan riqueza, también está dispuesto el individuo más rico.
- Definición. Para cualquier función de utilidad Bernoulli $u(\cdot)$, el coeficiente de aversión relativa al riesgo en x es $R(x) = -xu''(x)/u'(x)$.
  - Aversión al riesgo absoluta decreciente (DRRA): si un individuo con menos riqueza está dispuesto a tomar una lotería, para loterías que multplican o dividen riqueza, también está dispuesto el individuo más rico.

Actitudes frente al riesgo y niveles de riqueza

- Para $x \geq 0$, una lotería proporcional paga tx, con t una variable aleatoria no negativa con cdf F.
- Podemos definir un equivalente cierto para tasas de retorno $\hat{t} = cr(F, x, u)$ tal que

$$u(\hat{t}x) = \int u(tx)dF(t)$$

- Entonces, $\hat{t}$ es la tasa de retorno tal que el agente está indiferente entre $\hat{t}x$ de seguro y la lotería que paga tx con t distribuido F.
- Proposición. Un agente tiene aversión al riesgo relativa decreciente, es decir, $R(x)$ es decreciente en x, si y solo si $cr(F, x, u)$ es creciente en x.

Comparando alternativas riesgosas

- Proposición: dominancia estocástica de primer orden. La distribución G domina estocásticamente en primer orden a F si para todo x, $G(x) \leq F(x)$, o, equivalentemente, para cualquier función no decreciente $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se tiene que $\int u(x)dG(x) \geq \int u(x)dF(x)$.
    - La primera noción quiere decir que es más probable que la distribución G pague más que un valor x en comparación a la distribución F.
    - La segunda noción quiere decir que cualquier agente que prefiere pagos mayores prefiere la lotería G a la F.

Comparando alternativas riesgosas

- Proposición: dominancia estocástica de segundo orden. Considere dos loterías F y G con la misma media. La distribución de G domina estocásticamente en segundo orden a F si para todo x, $\int_{-\infty}^{x} G(y)dy \leq \int_{-\infty}^{x} F(y)dy$, o, equivalentemente, para cualquier función cóncava $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se tiene que $\int u(x)dG(x) \geq \int u(x)dF(x)$.
- Todo agente averso al riesgo prefiere G a F. Esto puede verse a través de la siguiente definición.
- Definición: mean preserving spread. La distribución F es un *mean preserving spread* de G si y solo si existen variables aleatorias x, y, ϵ tal que

$$y = x + \epsilon,$$

con $x \sim G$, $y \sim F$ y $\mathbb{E}(\epsilon|x) = 0$ for all x.

Comparando alternativas riesgosas

- Dominancia estocástica de primer y segundo orden solo ordenan parcialmente las loterías.
- La mayoría de las distribuciones no se pueden ranquear de acuerdo a estos criterios.
- Si F no domina estocásticamente en primer orden a G, entonces algún agente prefiere G.
- Si F no domina estocásticamente en segundo orden a G, entonces algún agente averso al riesgo prefiere G.

Aplicaciones: demanda por aseguramiento

- Un agente con riqueza w enfrenta una probabilidad p de tener una pérdida L.
- Se puede asegurar contra esta pérdida comprando un seguro.
- El seguro paga una cantidad a en caso de la pérdida y cuesta qa pesos $(0 \leq q \leq 1)$.
- ¿Cuánta cantidad a de seguro debe comprar?
- El problema de optimización es

$$\max_{a} \; pu(w - qa - L + a) + (1 - p)u(w - qa)$$

- Se asume que u es cóncava.

Aplicaciones: demanda por aseguramiento

- La condición de primer orden es

$$pu'(w - qa - L + a)(1 - q) - (1 - p)u'(w - qa)q = 0$$

- La concavidad de u hace que esta condición sea necesaria y suficiente para la solución.
- Beneficio marginal de un dólar adicional de seguro en el estado malo es igual al costo marginal del seguro en el estado bueno (ajustado por probabilidades de cada estado).
- Si el seguro es actuarialmente justo, o sea $q = p$, la condición se simplifica a

$$u'(w - qa - L + a) = u'(w - qa) \implies a^* = L$$

- En este caso, el agente averso al riesgo se cubre completamente contra la pérdida.

Aplicaciones: demanda por aseguramiento

- Ahora, consideremos que $q > p$.
- La condición de primer orden se puede escribir como

$$\frac{u'(w - qa - L + a)}{u'(w - qa)} = \frac{(1-p)q}{p(1-q)} > 1 \implies a^* < L$$

- Ahora, el agente no se asegura completamente.
- Ya no se iguala la riqueza en ambos estados (pérdida y no pérdida).

Aplicaciones: demanda por aseguramiento

- Estática comparativa: riqueza w.
- Tenemos que si la función objetivo es llamada U, entonces:

$$\frac{\partial U^2}{\partial a \partial w} = pu''(w - qa - L + a)(1 - q) - (1 - p)u''(w - qa)q$$

- Teorema de Topkis: Sea $f(x, \theta)$ supermodular en x, θ. Entonces, $x^*(\theta) = argmax_{x \in D} f(x, \theta)$ es no decreciente en θ, donde D satisface ciertas condiciones de regularidad.
- Sin embargo, el signo de $\frac{\partial U^2}{\partial a \partial w}$ es ambiguo.
- A nivel local, si $\frac{\partial U^2}{\partial a \partial w} > 0$ evaluado en $a^*(w)$, entonces $a^*(w') > a^*(w)$ para todo $w' > w$ (¿por qué?).

Aplicaciones: demanda por aseguramiento

- Entonces, usando la condición de primer orden

$$\left.\frac{\partial U^2}{\partial a \partial w}\right|_{a=a^*(w)} = pu'(w-qa-L+a)(1-q)\left[\frac{u''(w-qa-L+a)}{u'(w-qa-L+a)} - \frac{u''(w-qa)}{u'(w-qa)}\right]$$

- Dado que $q > p$, nos centramos en valores $a < L$.
- El signo de la expresión depende del paréntesis cuadrado:

$$\left.\frac{\partial U^2}{\partial a \partial w}\right|_{a=a^*(w)} =^{signo} [A(w-qa) - A(w-qa-L+a)]$$

- Entonces:
  - Si $p = q$, entonces $a^* = L$ para todos los w.
  - Si $p < q$, $a^*(w)$ decrece con w si el agente tiene aversión al riesgo absoluta decreciente.
  - Si $p < q$, $a^*(w)$ crece con w si el agente tiene aversión al riesgo absoluta creciente.

Aplicaciones: demanda por aseguramiento

- Estática comparativa: precio del seguro q.
- Si aumenta el precio del seguro:
  - Efecto directo: cae la demanda por el seguro.
  - Efecto ingreso: el agente se hace menos rico, lo que puede cambiar la aversión al riesgo del individuo.
- Si el agente tiene aversión al riesgo absoluta constante o creciente, entonces el aumento del precio del seguro disminuye la demanda.
- Si el agente tiene aversión al riesgo absoluta decreciente, entonces la demanda por el seguro puede aumentar.

Aplicaciones: problema del portafolio

- Agente con riqueza w debe decidir donde invertir su dinero.
- Tiene dos opciones: un activo seguro con retorno r y un activo riesgoso con un retorno aleatorio z con cdf F.
- Agente tiene función de utilidad creciente y cóncava u.
- El agente compra una cantidad a del activo riesgoso y $w - a$ en el activo seguro.
- Su problema de maximización es

$$\max_{a \in [0,w]} \int u[az + (w-a)r] dF(z)$$

Aplicaciones: problema del portafolio

- La condición de primer orden es

$$= \int (z-r)u'(az+(w-a)r)dF(z) = 0$$

- Benchmark: agente neutro al riesgo. Supongamos que $u(x) = \alpha x$ para algún $\alpha > 0$.
- En este caso, la condición de primer orden puede no ser útil para caracterizar el problema.
- El agente maximiza $\int \alpha[az+(w-a)r]dF(z)$.
- La derivada con respecto a a es

$$\int \alpha(z-r)dF(z)$$

Aplicaciones: problema del portafolio

- Tenemos

$$\int \alpha(z-r)dF(x) = \alpha \int z dF(z) - \alpha r \int dF(z)$$
$$= \alpha(\mathbb{E}(z) - r)$$

- Entonces:
  - Si $\mathbb{E}(z) > r \implies a^* = w$.
  - Si $\mathbb{E}(z) < r \implies a^* = 0$.
- Agente neutro al riesgo pone toda su riqueza en el activo con mayor retorno esperado.

Aplicaciones: problema del portafolio

- Agente averso al riesgo. Suponemos ahora que $u'' < 0$.
- Problema bien comportado por lo que la condición de primer orden caracteriza la solución.
- Vamos a mostrar que si $\mathbb{E}(z) > r$, entonces el agente averso al riesgo igual invierte una parte de su riqueza en el activo riesgoso.
- Para ver esto, evaluamos la condición de primer orden en $a = 0$

$$u'(wr)\int(z-r)dF(z) = u'(wr)(\mathbb{E}(z)-r) > 0$$

- Notar que para $u'' < 0$ la función objetivo es estríctamente cóncava en a, por lo que la condición de primer orden decrece en a.
- Por lo tanto, el agente debe incrementar a para que la condición de primer orden se cumpla.

Aplicaciones: problema del portafolio

- Estática comparativa.
- Ahora, mostramos que un agente menos averso al riesgo invierte más en el activo riesgoso (para todo nivel de riqueza).
- Supongamos existen dos agentes, con funciones de utilidad u y v respectivamente.
- El problema de cada agente es

$$\max_a \int u(a(z-r)+wr)dF(z)$$
$$\max_a \int v(a(z-r)+wr)dF(z)$$

Aplicaciones: problema del portafolio

- Una condición suficiente para que el agente v invierta más en el activo riesgoso que u es

$$\int u'(a(z-r)+wr)(z-r)dF(z) = 0$$
$$\Longrightarrow \int v'(a(z-r)+wr)(z-r)dF(z) \geq 0$$

- Recordamos que u es más averso al riesgo que v si $v = h \circ u$ para una función no decreciente y convexa h. Entonces

$$\int v'(a(z-r)+wr)(z-r)dF(z) \geq 0$$
$$\Longleftrightarrow \int h'(u(a(z-r)+wr)) \cdot u'(a(z-r)+wr)(z-r)dF(z) \geq 0$$

Aplicaciones: problema del portafolio

- Tenemos

$$\iff \int h'(u(a(z-r)+wr)) \cdot u'(a(z-r)+wr)(z-r)dF(z) \geq 0$$

- Esta condición se cumple ya que h' es positivo y creciente en z.
- El segundo término es positivo solo si $z > r$.
- Por lo tanto, el "ponderador" h', al ser creciente en z, pone cada vez más peso a medida que z es más grande.
- Así, los valores con mayor peso son aquellos con $z > r$ lo que implica que se cumple la condición.

Aplicaciones: problema del portafolio II

- Veamos un problema del portafolio alternativo.
- Un agente tiene riqueza inicial x_0 y función de utilidad Bernoulli $u(x) = -\frac{1}{\gamma} exp(-\gamma x)$ con $\gamma > 0$.
- El agente puede invertir su riqueza en dos posibles activos.
    - Un activo libre de riesgo que renta b sobre lo invertido.
    - Una acción que tiene precio p_0 y tendrá valor p al final del período, con $p \sim N(\overline{p}, \sigma^2)$.
- El agente compra a acciones, con $ap_0 \leq x_0$.

1. Determine cómo se distribuye la riqueza final del agente.
2. Plantee el problema de maximización del agente y resuélvalo.
3. Inteprete la fórmula del portafolio óptimo.

Críticas conductuales

- 1. Críticas al axioma de independencia.
- 2. Aversión al riesgo para montos altos:
  - Ejemplo: supongamos que un agente averso al riesgo rechaza una lotería con probabilidades 50/50 de ganar \$110 y perder \$105 para cualquier nivel de riqueza.
  - Entonces, rechaza una lotería 50/50 de perder 1.000 y ganar 10.000.000.000.

Críticas conductuales

- 3. Riesgo vs incertidumbre:
  - Situaciones en que se conocen las probabilidades: riesgo.
  - Situaciones en que uno no sabe las probabilidades: incertidumbre.
  - Experimento de Ellsberg: una urna tiene 300 bolas. 100 rojas y 200 son una combinación de azules y blancas. Se saca una bola al azar.
  - Recibes 100 si adivinas correctamente el color. ¿Prefieres elegir rojo o blanco?
  - Recibes 100 si adivinas correctamente un color distinto al de la bola. ¿Prefieres elegir rojo o blanco?

Críticas conductuales

- 4. *Framing effects*:
  - Decisión 1: una pandemia se espera que mate 600 personas. Hay dos programas alternativos.
  - Programa A: salva 200 personas.
  - Programa B: con probabilidad $2/3$ nadie se salva y con probabilidad $1/3$ todos se salvan.
  - Decisión 2: una pandemia se espera que mate 600 personas. Hay dos programas alternativos.
  - Programa C: 400 personas mueren con certeza.
  - Programa D: con probabilidad $2/3$ 600 personas mueren y con probabilidad $1/3$ nadie muere.
- Se encuentra que el 72% de la gente elige A sobre B y el 78% de la misma gente elige D sobre C.

Ejercicio

- Considere dos tomadores de decisiones con utilidad $x_1(x) = -exp(-\lambda x)$, $\lambda > 0$ y $u_2(x) = x$. Sea L una lotería sobre $\mathbb{R}_+$.

1. Suponga que el agente 1 prefiere L por sobre un pago seguro igual a x^*. Muestre que 2 también prefiere L por sobre el pago seguro x^*.
2. Suponga ahora que 1 prefiere x^* por sobre L. Muestre que 2 no necesariamente prefiere x^*.