Microeconomía 1

Equilibrio general

José Ignacio Heresi

Facultad de Economía y Negocios
Universidad Alberto Hurtado

Modelo Walrasiano

- Empezamos considerando una economía puramente de intercambio (sin producción).
- Hay un número finito I de agentes $i \in \mathbb{I}$ y un número finito L de bienes $l \in \mathbb{L}$.
- Una canasta de bienes es un vector $x \in \mathbb{R}_+^L$.
- Cada agente i tiene una dotación inicial de bienes e^i y una función de utilidad $u^i : \mathbb{R}_+^L \to \mathbb{R}$.
- Estas dotaciones y utilidades son los datos primitivos de la economía, escribimos $\xi((u^i, e^i)_{i \in \mathbb{I}})$.
- Los agentes toman el vector de precios $p \in \mathbb{R}_+^L$ como dados.
- Una asignación es un vector de cantidades no negativas de cada bien para cada consumidor.

Modelo Walrasiano

- Cada agente maximiza su utilidad sujeto a su restricción presupuestaria

$$\max_{x \in \mathbb{R}^L_+} \; u^i(x)$$

$$s.t \;\; px \leq pe^i$$

- El conjunto presupuestario se puede escribir como $B^i(p) = \{x : px \leq pe^i\}$.
- Definición: equilibrio Walrasiano. Un equilibrio Walrasiano para la economía ξ es un vector $(p, (x^i)_{i \in \mathbb{I}})$ tal que
  1. Los agentes maximizan sus utilidades: para todo i

  $$x^i \in \operatorname*{argmax}_{x \in B^i(p)} u^i(x)$$

  2. Los mercados se vacían: para todo bien $l \in \mathbb{L}$

  $$\sum_i x^i_l = \sum_i e^i_l$$

Optimalidad de Pareto

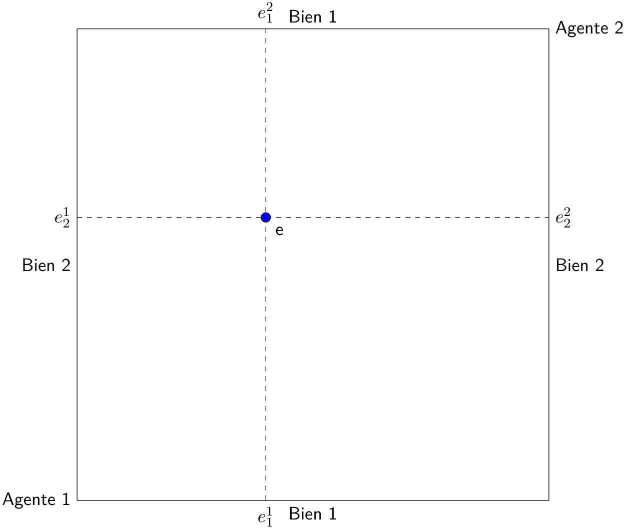
- Definición: asignación factible. Una asignación $(x^i)_{i \in \mathbb{I}} \in \mathbb{R}_+^{I \cdot L}$ es factible si para todo $l \in \mathbb{L}$: $\sum_{i \in \mathbb{I}} x_l^i \leq \sum_{i \in \mathbb{I}} e_l^i$.

- Definición: optimalidad de Pareto. Dada una economía ξ, una asignación factible x es Pareto óptima (o Pareto eficiente) si no hay otra asignación factible $\hat{x}$ tal que $u^i(\hat{x}^i) \geq u^i(x^i)$ para todo $i \in \mathbb{I}$ con desigualdad estricta para algún (algunos) $i \in \mathbb{I}$.

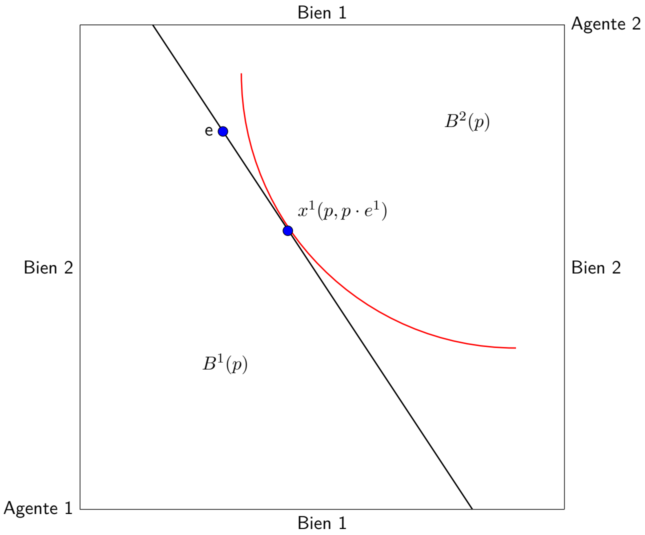
Supuestos

- Para todos los agentes $i \in \mathbb{I}$:
  - Supuesto 1: u^i es continua.
  - Supuesto 2: u^i es creciente. Si $x' >> x$ entonces $u^i(x') > u^i(x)$.
  - Supuesto 3: u^i es cóncava.
  - Supuesto 4: $e^i >> 0$. Todos los agentes tienen al menos un poco de cada bien.
- Una economía de intercambio de dos personas y dos bienes se puede graficar en la caja de Edgeworth.
- Los precios relativos definen los conjuntos presupuestarios para cada individuo.
- Cada consumidor maximiza su utilidad dentro de su conjunto presupuestario lo que resulta en la demanda marshalliana.

Caja de Edgeworth



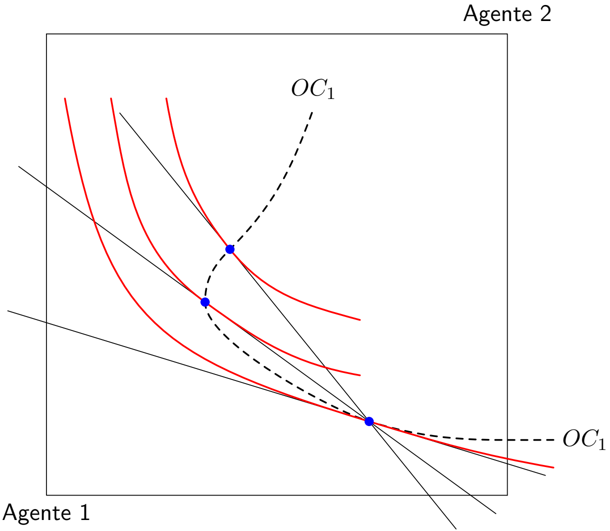
Caja de Edgeworth



Equilibrio Walrasiano

- Para cada agente, la curva que une su demanda marshalliana para distintos precios relativos de ambos bienes es la *offer curve*.
- Un equilibrio Walrasiano es un vector de precios tales que cada agente maximiza su utilidad en su conjunto presupuestario y los mercados se vacían, lo que ocurre en la intersección entre las *offer curve* de cada agente.

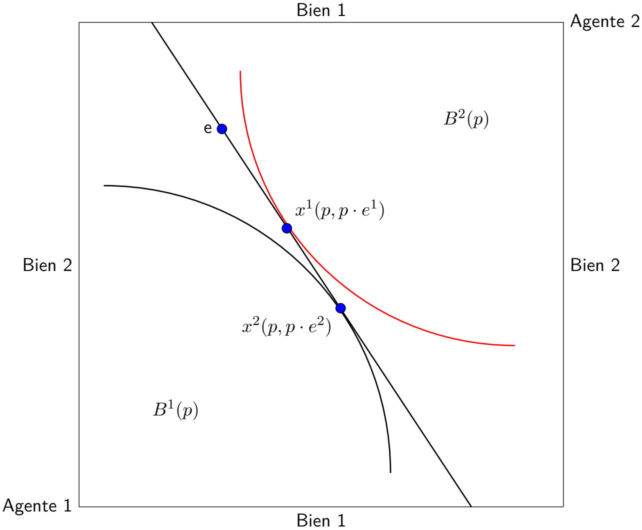
Offer curve



Equilibrio Walrasiano

- También hay situaciones en que los precios no vacían ambos mercados simultáneamente.
- En la siguiente figura, el bien 1 tiene exceso de oferta y el bien 2 tiene exceso de demanda.

Caja de Edgeworth



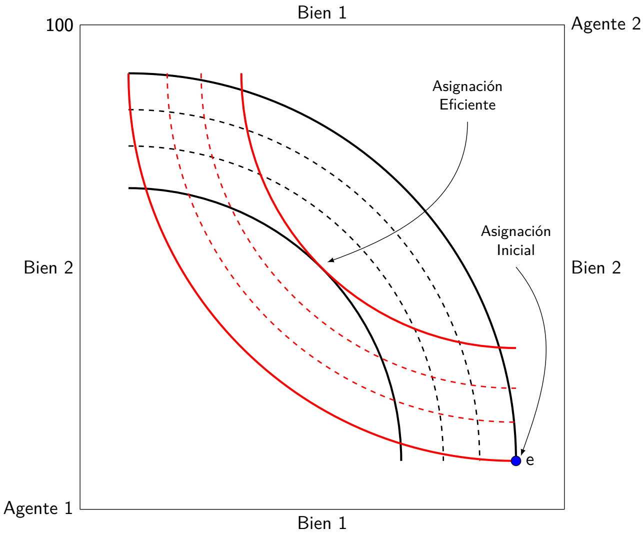
Equilibrio Walrasiano

- Preguntas:
  1. ¿Siempre existe el equilibrio Walrasiano? No siempre existe.
  2. ¿Es este equilibrio único cuando existe? Pueden haber múltiples equilibrios.
- Ejemplo de no existencia de equilibrio Walrasiano:
  1. La dotación inicial del agente 1 es todo el bien 2 de la economía y nada del bien 1.
  2. La dotación inicial del agente 2 es todo el bien 1 de la economía y nada del bien 2.
  3. El agente 1 valora los dos bienes pero su utilidad marginal del bien 1 cuando tiene 0 de ese bien es infinita.
  4. El agente 2 solo valora consumir el bien 1.
  5. Por lo tanto, para cualquier p, el bien 1 siempre enfrenta exceso de demanda.
- Notar que este ejemplo viola el supuesto 4.

Optimalidad de Pareto

- El conjunto de Pareto son todas aquellas asignaciones Pareto óptimas.
- Para una asignación inicial e dada, la curva de contrato es el subconjunto del conjunto de Pareto que ambos agentes prefieren a la asignación e.

Caja de Edgeworth



Teoremas de bienestar

- Primer Teorema del Bienestar. Sea $(p, (x^i)_{i \in \mathbb{I}})$ un equilibrio Walrasiano para la economía ξ. Luego, si el supuesto 2 se cumple, la asignación $(x^i)_{i \in \mathbb{I}}$ es Pareto óptima.
- Este teorema implica que los equilibrios Walrasianos son eficientes en el sentido de Pareto (no considera factores de desigualdad).
- Segundo Teorema del Bienestar. Sea ξ una economía que satisface los supuestos 1 al 4. Si $(e^i)_{i \in \mathbb{I}}$ es Pareto óptima entonces existe un vector de precios $p \in \mathbb{R}^L_+$ tal que $(p, (e^i)_{i \in \mathbb{I}})$ es un equilibrio Walrasiano para ξ.
- Este teorema significa que partiendo de cualquier dotación inicial, para cualquier asignación Pareto óptima, hay una manera de redistribuir recursos y un vector de precios que hace que esa asignación Pareto óptima sea un equilibrio Walrasiano.

Caracterización del equilibrio

- Para encontrar el conjunto de asignaciones Pareto óptimas se resuelve

$$
\begin{aligned}
& \max_{x} u^1(x_1^1, ..., x_L^1) \\
\text{s.a} \quad & u^i(x_1^i, ..., x_L^i) \geq \overline{u}^i \qquad \text{para } i = 2, ..., I \\
& \sum_i x_l^i \leq \sum_i e_l^i \qquad \text{para } l = 1, ..., L
\end{aligned}
$$

- La idea es maximizar la utilidad del primer consumidor (podría ser otro) sujeto a factibilidad de la asignación y a los otros consumidores teniendo al menos un nivel específico de utilidad.
- Variando los niveles de utilidad requeridos para los otros agentes se pueden recuperar todas las asignaciones Pareto óptimas.
- Bajo los supuestos 1 al 3, todas las restricciones son activas en la solución.

Asignaciones Pareto óptimas

- Si además cada función de utilidad es diferenciable entonces podemos usar Kuhn-Tucker.
- Sea λ^i el multiplicador de Lagrange de la restricción del agente i ($\lambda^1 = 1$) y μ_l el de la restricción del bien l.
- Entonces

$$\begin{aligned} \lambda^i \frac{\partial u^i}{\partial x_l^i} - \mu_l &\leq 0 \\ x_l^i &\geq 0 \\ \left(\lambda^i \frac{\partial u^i}{\partial x_l^i} - \mu_l\right) x_l^i &= 0 \end{aligned}$$

- Además de

$$\begin{aligned} u^i(x_1^i, ..., x_L^i) &= \overline{u}^i && \text{para } i = 2, ..., I \\ \sum_i x_l^i &= \sum_i e_l^i && \text{para } l = 1, ..., L \end{aligned}$$

Asignaciones Pareto óptimas

- Asumiendo que $x_l^i > 0$ para todo i, l, en cualquier asignación Pareto eficiente se tiene que

$$MRS_{kl}^i = \frac{\partial u^i / \partial x_k^i}{\partial u^i / \partial x_l^i} = \frac{\partial u^j / \partial x_k^j}{\partial u^j / \partial x_l^j} = MRS_{kl}^j = \frac{\mu_k}{\mu_j}$$

- Es decir, en el óptimo, las tasas marginales de sustitución de todos los agentes para los bienes k, l son iguales entre ellas e iguales al ratio de precios sombra μ_k y μ_l.
- Ahora relacionamos las asignaciones Pareto óptima con el conjunto de equilibrios Walrasianos.

Asignaciones Pareto óptimas

- Sea x una asignación Pareto óptima.
- Sea $e^i = x^i$ y definamos precios $p_l = \mu_l$.
- Para estos precios y dotaciones iniciales, el problema del consumidor i es

$$\max_{\tilde{x}^i} \; u^i(\tilde{x}^i)$$
$$s.a \;\; p\tilde{x}^i \leq pe^i$$

- La restricción es activa en el óptimo por la Ley de Walras.
- Sean $v^1, ..., v^I$ los multiplicadores de Lagrange de las restricciones presupuestarias de cada agente.

Asignaciones Pareto óptimas

- Las condiciones de Kuhn Tucker son

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u^i}{\partial x_l^i} - \upsilon^i p_l &\leq 0 \\
x_l^i &\geq 0 \\
\left(\frac{\partial u^i}{\partial x_l^i} - \upsilon^i p_l \right) x_l^i &= 0
\end{aligned}
$$

- Además, cada restricción de recursos es activa.
- Notar la equivalencia de ambos problemas para $p_l = \mu_l$ y $e^i = x^i$ con $\upsilon^i = 1/\lambda^i$.
- Por lo tanto, si x es Pareto óptimo y $\mu_1, ..., \mu_L$ los precios sombra del problema de Pareto, entonces μ, x es un equilibrio Walrasiano de la economía $\xi((u^i, e^i)_{i \in \mathbb{I}})$.
- Esto es el Segundo Teorema del Bienestar.

Asignaciones Pareto óptimas

- Otra manera de caracterizar asginaciones Pareto eficientes es maximizar una función de bienestar social de la forma $\sum_i \beta^i u^i$ (Bergson-Samuelson) sujeto a una restricción de recursos:

$$\max_{x^1,\ldots,x^L} \sum_i \beta^i u^i(x_1^i, \ldots, x_L^i)$$
$$s.a \sum_i x_l^i \leq \sum_i e_l^i$$

- Las restricciones de recursos serán activas en el óptimo.

Asignaciones Pareto óptimas

- Las condiciones de Kuhn Tucker son

$$\begin{aligned} \beta^i \frac{\partial u^i}{\partial x_l^i}\delta_l &\leq 0 \\ x_l^i &\geq 0 \\ \left(\beta^i \frac{\partial u^i}{\partial x_l^i} - \delta_l\right) x_l^i &= 0 \end{aligned}$$

  con δ_l los multiplicadores de Lagrange de las restricciones.
- Con $\beta^i = \lambda^i$ y $\delta_l = \mu_l$, esto es lo mismo que el problema inicial.

Existencia de equilibrio Walrasiano

- Teorema: Dada una economía ξ que cumple los supuestos 1 al 4, existe un equilibrio Walrasiano (p, x).
- Definición: la funcion de exceso de demanda para el consumidor i es $z^i(p) = x_l^i(p, pe^i) - e^i$, con x^i la demanda Walrasiana del agente i.
- Definición: la funcion de exceso de demanda para el bien l es $z_l(p) = \sum_i x_l^i - \sum_i e_l^i$, con x_l^i la demanda Walrasiana del agente i por el bien l.
- Definición: la funcion de exceso de demanda agregada es $z(p) = \sum_i z^i(p)$ o $z(p) = [z_1(p), ..., z_L(p)]$.

Existencia de equilibrio Walrasiano

- Intuición para dos bienes.
- El objetivo es encontrar un vector de precios $p = (p_1, p_2)$ con $z(p) = 0$.
- Como $z(\cdot)$ es homogénea de grado 0, podemos normalizar $p_2 = 1$.
- La Ley de Walras dice que para el consumidor 1 se tiene $p_1 x_1^1 + p_2 x_2^1 = p_1 e_1^1 + p_2 e_2^1$ (ídem para otros consumidores).
- Entonces, tenemos que $z(p) \cdot p = 0$ o sea $p_1 z_1 + p_2 z_2 = 0$.
- Por lo tanto, es suficiente encontrar un p_1 tal que $z_1(p_1, 1) = 0$.
  - Si esto sucede entonces $z_2(p_1, 1) = 0$ por Ley de Walras nuevamente.

Existencia de equilibrio Walrasiano

- La idea es que $z_1(p_1, 1)$ es una función de p_1, además:
  1. Es continua.
  2. Para valores pequeños de p_1 es estríctamente positiva.
  3. Para valores muy grandes de p_1 es negativa.
- Entonces, debe haber algún valor de p_1 para el cual $z_1 = 0$ y entonces el vector $(p_1, 1)$ es el vector de precios de un equilibrio Walrasiano.
- Los puntos 2. y 3. se muestran usando los últimos dos resultados de la Proposición sobre $z(p)$.

Existencia de equilibrio Walrasiano

- Teorema de Brouwer: asuma que la función $f : R \to R$ es continua y que R es un conjunto convexo, compacto y no vacío. Entonces, existe $x \in R$ tal que $x = f(x)$.
- Teorema de Kakutani: asuma que $A \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto convexo, cerrado y acotado. Asuma que $f : A \to A$ es una correspondencia convexa, no vacía para todo $x \in A$ y que es hemicontinua superior. Entonces, existe $x \in A$ tal que $x \in f(x)$.
- Teorema del máximo de Berge: se tiene una correspondencia $C : Q \to \mathbb{R}^n$, con $c(q)$ compacto y no vacío para todo $q \in Q$ y se tiene una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Considere el problema de maximización $\max f(x)\ s.a.\ x \in c(q)$. Entonces, la correspondencia que maximiza la función es hemicontinua superior y la función de valor es continua.
- El Teorema del máximo también aplica a funciones que se maximizan en un conjunto compacto e implica que la función que maximiza la función es continua.

Existencia de equilibrio Walrasiano: demostración

- Supuesto 1: u^i es continua, estríctamente creciente y estríctamente cuasicóncava.
- Bajo estos supuestos, la demanda marshalliana tiene un valor único para cada $p >> 0$ y es continua en p.
- Se requiere $p >> 0$ para que el conjunto presupuestario sea acotado.
- Si el precio de un bien es 0 entonces la demanda por ese bien es infinita por lo que la demanda marshalliana no es continua.

Existencia de equilibrio Walrasiano: demostración

- La demostración sigue los siguientes pasos.
  - Se quiere mostrar que hay un $p^* >> 0$ tal que $z(p^*) = 0$.
  - Se toman las funciones de exceso de demanda de cada mercado y se modifican para que sean acotadas y se trabaja con estas nuevas funciones.
  - Se define un conjunto de precios como el simplex sumado a una condición que hace que los precios no se acerquen a 0 (pero que convergerán a 0 cuando un $\epsilon \to 0$).
  - Se crea una función $f(p)$ de "manera inteligente" a la que se le aplica el teorema de punto fijo de Brouwer.
  - Esto entrega una ecuación $p^* = f(p^*)$, con p^* que será el de equilibrio Walrasiano.
  - Se hace converger $\epsilon \to 0$ y se demuestra que $p^* >> 0$.
  - Al hacer converger $\epsilon \to 0$, la ecuación $p^* = f(p^*)$, por Ley de Walras y $p^* >> 0$ implicará que $z(p^*) = 0$.

Existencia de equilibrio Walrasiano: demostración

- La función de exceso de demanda del bien l es

$$z_l(p) \equiv \sum_{i \in \mathbb{I}} x_l^i(p, p \cdot e^i) - \sum_{i \in \mathbb{I}} e_l^i$$

- La función de exceso de demanda agregada es

$$z(p) \equiv (z_1(p), ..., (z_l(p)))$$

- Propiedades de $z(p)$ para $p >> 0$:
  - Continua en p (por teorema del máximo).
  - Homogénea de grado 0 ($z(p) = z(\lambda p)$ para todo $\lambda > 0$).
  - Ley de Walras: $p \cdot z(p) = 0$ (suma de individuos en los que la restricción presupuestaria se cumple con igualdad).
- La Ley de Walras implica que si $n-1$ mercados están en equilibrio entonces todos están en equilibrio.

Existencia de equilibrio Walrasiano: demostración

- Definición: un vector de precios p^* es un equilibrio walrasiano si $z(p^*) = 0$.
- Notar que las asignaciones de equilibrio están implícitas en la función de exceso de demanda.
- Teorema A: suponga que $z : \mathbb{R}^l_{++} \rightarrow \mathbb{R}^l$ satisface:
    1. $z(\cdot)$ es continua en $\mathbb{R}_{++}$.
    2. $p \cdot z(p) = 0$ para todo $p >> 0$.
    3. Si $\{p^n\}$ es una secuencia de vectores de precios en $\mathbb{R}^l_{++}$ que convergen a $\overline{p} \neq 0$, y $\overline{p}_l = 0$ para algún bien l, entonces hay algún bien l' con $\overline{p}_{l'} = 0$ y la secuencia de exceso de demanda $\{z_{l'}(p^n)\}$ es no acotada por arriba.

  Entonces, existe un vector de precios $p^* >> 0$ tal que $z(p^*) = 0$.

Existencia de equilibrio Walrasiano: demostración

- Teorema B: si u^i es continua, estríctamente creciente y estríctamente cuasicóncava (supuesto 1) y la dotación agregada de cada bien es estríctamente positiva $\sum_{i=1}^{I} e^i >> 0$, entonces se satisfacen las condiciones 1 a 3 del Teorema A.
- Teorema: existencia de equilibrio Walrasiano. Si u^i es continua, estríctamente creciente y estríctamente cuasicóncava y $\sum_{i=1}^{i} e^i >> 0$, entonces existe al menos un vector de precios $p^* >> 0$ tal que $z(p^*) = 0$.

Existencia de equilibrio Walrasiano: demostración (Teorema A)

- Demostración Teorema A:
- Para cada bien l, sea $\overline{z}_l(p) = min(z_l(p), 1)$ para todo $p >> 0$ (por lo que está acotada por arriba).
- Sea $\overline{z}(p) = [\overline{z}_1(p), ..., \overline{z}_l(p)]$.
- Ahora, fijamos $\epsilon \in (0, 1)$ y sea

$$S_\epsilon = \left\{ p \mid \sum_{l=1}^{L} p_k = 1 \quad y \quad p_l \geq \frac{\epsilon}{1 + 2L} \quad \forall l \right\}$$

- Queremos encontrar p^* tal que $z(p^*) = 0$, partiendo por el conjunto S_ϵ.
- El conjunto S_ϵ es compacto (cerrado y acotado), convexo, y no vacío.
- Es no vacío ya que el vector de precios con cada componente $\frac{2+1/L}{1+2L}$ siempre es parte del conjunto ya que $\epsilon < 1$.

Existencia de equilibrio Walrasiano: demostración (Teorema A)

- Ahora definimos, para cada bien l y para cada $p \in S_\epsilon$

$$f_l(p) = \frac{\epsilon + p_l + max(0, \overline{z}_l(p))}{L\epsilon + 1 + \sum_{m=1}^{L} max(0, \overline{z}_m(p))}$$

- Sea $f(p) = [f_1(p), ..., f_L(p)]$.
- Queremos aplicar el teorema de punto fijo de Brouwer a esta función.
- Se tiene que $\sum_{l=1}^{L} f_l(p) = 1$.
- También se tiene $f_l(p) \geq \frac{\epsilon}{(L\epsilon+1+L\cdot 1)}$ ya que $\overline{z}_l(p) \leq 1$ para cada l.
- Por lo tanto, $f_l(p) \geq \frac{\epsilon}{1+2L}$ ya que $\epsilon < 1$.
- Esto implica que $f : S_\epsilon \to S_\epsilon$.

Existencia de equilibrio Walrasiano: demostración (Teorema A)

- Tenemos también que f_l es continua en S_ϵ ya que z_k es continua por enunciado del teorema y por tanto $\overline{z}_l$ es continua en S_ϵ.
- Por lo que el numerador y denominador de f_l son continuos en S_ϵ.
- Además el denominador está acotado lejos del 0 ya que toma valores de al menos 1.
- Por lo tanto, f es una función continua del conjunto no vacío, compacto y convexo S_ϵ sobre si mismo.
- Aplicamos el Teorema de Brouwer y concluimos que existe $p^\epsilon \in S_\epsilon$ tal que $f(p^\epsilon) = p^\epsilon$. Esto implica que

$$p_l^\epsilon[L\epsilon + \sum_{m=1}^{L} max(0, \overline{z}_m(p^\epsilon))] = \epsilon + max(0, \overline{z}_l(p^\epsilon)) \tag{1}$$

Existencia de equilibrio Walrasiano: demostración (Teorema A)

- Tenemos

$$p_l^\epsilon[L\epsilon + \sum_{m=1}^{L} max(0, \overline{z}_m(p))] = \epsilon + max(0, \overline{z}_l(p^\epsilon))$$

- Ahora dejamos que ϵ se acerque a 0 y consideramos la secuencia de precios que satisfacen esta ecuación.
- Esta secuencia de precios es acotada ya que $p^\epsilon \in S_\epsilon$ implica que el precio de cada mercado está entre 0 y 1.
- Por lo tanto, alguna subsecuencia de p^ϵ debe converger a un p^* (secuencia acotada tiene subsecuencia convergente).
- Lemma: $p^\epsilon \to p^* >> 0$ cuando $\epsilon \to 0$.

Existencia de equilibrio Walrasiano: demostración (Teorema A)

- Tomamos el límite $\epsilon \to 0$ de la ecuación (1) para obtener (para todo l)

$$p_l^* \sum_{m=1}^{L} max(\overline{z}_m(p^*)) = max(0, \overline{z}_l(p^*))$$

- Multiplicamos por $z_l(p^*)$ y sumamos para los l bienes

$$p^* z(p^*) \sum_{m=1}^{L} max(\overline{z}_m(p^*)) = \sum_{l=1}^{L} z_l(p^*) max(0, \overline{z}_l(p^*))$$

- Por Ley de Walras el lado izquierdo es 0 lo que implica que el lado derecho también es 0.
- Pero el signo de $\overline{z}_l(p^*)$ es el mismo que el de $z_l(p^*)$, el lado derecho solo puede ser 0 si $z_l(p^*) \leq 0$ para todo l.
- Esto sumado con la Ley de Walras y $p^* >> 0$ implican que cada $z_l(p^*) = 0$.

Existencia de equilibrio Walrasiano: demostración (Lemma)

- Queremos probar que $p^{\epsilon} \to p^{*} >> 0$ cuando $\epsilon \to 0$.
- Por contradicción, supongemos que no tenemos $p^{*} >> 0$.
- Entonces, hay un $\bar{l}$ tal que $p^{*}_{\bar{l}} = 0$.
- Esto implica por la condición 3 que debe haber un bien l' con $p^{*}_{l'} = 0$ tal que $z_{l'}(p^{\epsilon})$ no acotado por arriba si ϵ tiene a 0.
- Pero $p^{\epsilon} \to p^{*}$ por lo que $p^{\epsilon}_{l'} \to 0$.
- Entonces, el lado de la izquierda de (1) tiende a 0 pero el lado de la derecha no tiene a 0 lo que es una contradicción.
- Por lo tanto, $p^{*} >> 0$.

Existencia de equilibrio Walrasiano: demostración (Teorema B)

- Demostración Teorema B: si se cumple el supuesto 1 y la dotación agregada de cada bien es estríctamente positiva $\sum_{i=1}^{I} e^i >> 0$, entonces se satisfacen las condiciones del Teorema A.
- Acá mostramos que si $\{p^n\}$ es una secuencia de vectores de precios en $\mathbb{R}^l_{++}$ que convergen a $\overline{p} \neq 0$, y $\overline{p}_l = 0$ para algún bien l, entonces hay algún bien l' con $\overline{p}_{l'} = 0$ y la secuencia de exceso de demanda $\{z_{l'}(p^n)\}$ es no acotada por arriba.
- Considere una secuencia $\{p^n\}$ de vectores de precios con algún elemento estríctamente positivo, que converge a $\overline{p} \neq 0$ y tal que $\overline{p}_l = 0$ para algún l.
- Como $\sum_{i=1}^{I} e^i >> 0$, tenemos $\overline{p} \sum_{i=1}^{I} e^i > 0$.
- Entonces $\overline{p} \sum_{i=1}^{I} e^i = \sum_{i=1}^{I} \overline{p} e^i > 0$ lo que implica que para al menos un consumidor i se tiene $\overline{p} e^i > 0$.

Existencia de equilibrio Walrasiano: demostración (Teorema B)

- Consideramos la demanda de este consumidor $x^i(p^n, p^n \cdot e^i)$ a lo largo de la secuencia de precios.
- Por contradicción, suponemos que esta secuencia de demandas es acotada.
- Entonces, tiene subsecuencia convergente, la que definimos como nuestra “nueva” secuencia y tenemos $x^i(p^n, p^n \cdot e^i) \to x^*$.
- Definimos $x^n \equiv x^i(p^n, p^n \cdot e^i)$ para todo n.
- Tenemos que x^n maximiza u^i sujeto a la restricción presupuestaria $p^n x^n = p^n e^i$ para todo n.
- Tomando el límite cuando $n \to \infty$ se tiene que $\overline{p}x^* = \overline{p}e^i > 0$ (desigualdad por como elegimos al consumidor i).

Existencia de equilibrio Walrasiano: demostración (Teorema B)

- Ahora, sea $\hat{x} = x^* + (0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)$ con el 1 en la l ava posición.
- Como u^i es estríctamente creciente en $\mathbb{R}^L_+$, se tiene $u^i(\hat{x}) > u^i(x^*)$.
- Además, como $\overline{p}_l = 0$, se tiene que $\overline{p}\hat{x} = \overline{p}e^i > 0$.
- Como u^i es continua, existe un $t \in (0, 1)$ tal que

$$u^i(t\hat{x}) > u^i(x^*)$$
$$\overline{p} \cdot (t\hat{x}) < \overline{p}e^i$$

- Como $p^n \to \overline{p}$, $x^n \to x^*$ y u^i es continua, implica que para n suficientemente grande

$$u^i(t\hat{x}) > u^i(x^n)$$
$$p^n \cdot (t\hat{x}) < p^n e^i$$

- Lo que contradice que x^n maximiza la utilidad del consumidor a precios p^n, por lo que se concluye que la secuencia de demandas es no acotada.

Existencia de equilibrio Walrasiano: demostración (Teorema B)

- Como la secuencia x^n es no acotada y no negativa, hay algún l' tal que $\{x^n_{l'}\}$ es no acotada por arriba.
- Como el ingreso de i converge a $\overline{p}e^i$ y la secuencia de ingresos de i, o sea $\{p^n e^i\}$, es acotada.
- Por lo tanto, se debe tener que $p^n_{l'} \to 0$ ya que es la única manera que la demanda de ese bien sea no acotada y satisfaga la restricción presupuestaria.
- Por lo tanto, $\overline{p}_{l'} = lim_n p^n_{l'} = 0$.
- A nivel agregado, dado que la dotación del bien es finita, mostramos que hay un bien l' con $\overline{p}_{l'} = 0$ tal que el exceso de demanda de ese bien es no acotado por arriba, por lo que el exceso de demanda agregado también es no acotado por arriba.

Unicidad, estabilidad y estática comparativa

- Preguntas:
  - ¿Es el equilibrio Walrasiano único?
  - ¿Es el equilibrio Walrasiano estable?
  - ¿Impone el equilibrio Walrasiano restricciones observables en los datos? ¿Cómo afecta un cambio en las dotaciones iniciales a los precios de equilibrio?

Unicidad

- El equilibrio Walrasiano no necesariamente es único (es común que no lo sea).
- Ejemplo con dos consumidores y dos bienes.
- Los consumidores tienen funciones de utilidad cuasilineales (respecto a diferentes bienes numerarios)

$$u^1(x_1^1, x_2^1) = x_1^1 - \frac{1}{8}(x_2^1)^{-8}$$
$$u^2(x_1^2, x_2^2) = -\frac{1}{8}(x_1^2)^{-8} + x_2^2$$

- Las dotaciones iniciales son (con $r = 2^{8/9} - 2^{1/9}$)

$$e^1 = (2, r)$$
$$e^2 = (r, 2)$$

Unicidad

- Las demandas Marshallianas son

$$x^1(p_1,p_2) = \left(2 + r\left(\frac{p_2}{p_1}\right) - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{8/9}, \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{-1/9}\right)$$

$$x^2(p_1,p_2) = \left(\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{-1/9}, 2 + r\left(\frac{p_1}{p_2}\right) - \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{8/9}\right)$$

- Se normaliza $p_2 = 1$ y se escribe la función de exceso de demanda agregada como

$$z_1(p_1,1) = x_1^1(p_1,1) + x_1^2(p_1,1) - (2+r)$$

o

$$z_1(p_1,1) = r\left(\frac{1}{p_1} - 1\right) - \left(\frac{1}{p_1}\right)^{8/9} + \left(\frac{1}{p_1}\right)^{1/9}$$

Unicidad

- Tenemos

$$z_1(p_1, 1) = r\left(\frac{1}{p_1} - 1\right) - \left(\frac{1}{p_1}\right)^{8/9} + \left(\frac{1}{p_1}\right)^{1/9}$$

- Esta función es igual a 0 para un $0 < p_1 < 1$, para $p_1 = 1$ y para $p_1 = 2$.
- Pequeños cambios en las preferencias o dotaciones no cambiarían el hecho que hay tres equilibrios.
- En este ejemplo, el equilibrio no es único a nivel *global* pero los equilibrios son únicos *localmente*.
- Sin embargo, *típicamente* los equilibrios son al menos localmente únicos.

Unicidad

- A modo general, lo que se necesita es que en el vector de precios de equilibrio la derivada de la función de exceso de demanda agregada sea no nula.
- Es decir, se requiere que el rango de $\left[\frac{\partial z_l}{\partial p_j}; l, j = 1, ..., L-1\right]$ (matriz de $(L-1) \times (L-1)$) debe ser $L-1$.
- Cuando esto sucede se dice que la economía es regular y el número de equilibrios es finito.
- Debreu (1970) luego mostró que las economías son regulares en *casi todas partes* (no son regulares en un conjunto de puntos con medida igual a 0).

Estabilidad

- Hasta ahora hemos buscado vectores de precios que constituyen un equilibrio Walrasiano sin preguntarnos de donde salen o si es razonable que se observen en una economía.
- Walras sugirió un proceso de ajuste de precios (*tatonnement*).
- Los agentes van a una plaza pública y existe un **subastador Walrasiano** que va anunciado precios.
- Cada agente anuncia su demanda a esos precios.
- Luego el subastador Walrasiano ajusta los precios y los anuncia nuevamente.
- El proceso continúa hasta que los precios ajustan la oferta y la demanda.

Estabilidad

- Una candidata para esta regla de ajuste de precios es

$$p(t+1) = p(t) + \alpha z(p(t))$$

  para un $\alpha > 0$ pequeño.
- El único punto estacionario es aquel en que $z(p) = 0$.
- Estabilidad local: la regla converge a p desde precios iniciales *cercanos*.
- Estabilidad global: la regla converge a p desde *cualquier* vector de precios iniciales.
- Este modelo tiene problemas (principalmente puede haber un ciclo que no converga al equilibrio, Scarf, 1960).

Sonnenschein-Mantel-Debreu

- Acabamos de ver que el equilibrio de la economía puede ser único y puede ser estable, pero no necesariamente lo es.
- Dados los supuestos realizados, no se pueden sacar más conclusiones respecto a características de la función de exceso de demanda.
- Esto es problemático ya que tener multiplicidad de equilibrios y/o que el/los equilibrio(s) no sea estable(s) limitan las conclusiones que se pueden sacar del modelo.
- Esto da paso al siguiente resultado.

Sonnenschein-Mantel-Debreu

- Teorema: Sonnenschein-Mantel-Debreu. Suponga que hay un subconjunto $B \subset \mathbb{R}^L_{++}$ y una función continua $f(p) : B \to \mathbb{R}^L$ que satisface homogeneidad de grado 0 y la Ley de Walras. Entonces, hay una economía ξ con función de exceso de demanda $z(p)$ que satisface $f(p) = z(p)$ en B.
- La interpretación es que *todo puede pasar*. Lo que cumple con las pocas propiedades para la función de exceso de demanda puede pasar en alguna economía.
- Es decir, la teoría de equilibrio general no tiene contenido empírico (es consistente con casi cualquier conjunto de datos).
- Por ejemplo no se podría testear la hipótesis de que los agentes estuvieran intercambiando de manera consistente con un equilibrio Walrasiano a no ser que se hagan supuestos específicos sobre las preferencias.

Sustitutos brutos

- Ahora consideramos una propiedad que permite dar respuestas a las preguntas de unicidad y estabilidad, además de presentar buenas propiedades de estática comparativa.
- Definición: una función de demanda Marshalliana $x(p)$ satisface la propiedad de sustitutos brutos si, cuando p y p' son tales que $p'_k > p_k$ y $p'_l = p_l$ para todo $l \neq k$, entonces $x_l(p') > x_l(p)$ para todo $l \neq k$.
- Un aumento en el precio del bien k aumenta la demanda de todos los otros bienes l (trabajamos con desigualdad estricta aunque se puede generalizar a desigualdad débil).
- Si cada demanda Marshalliana satisface la propiedad de sustitutos brutos, entonces las funciones de exceso de demanda individuales y agregada también la satisfacen.

Sustitutos brutos

- Proposición: si la función de exceso de demanda agregada $z(\cdot)$ satisface la propiedad de sustitutos brutos, la economía tiene a lo más un equilibrio Walrasiano, es decir, $z(p) = 0$ tiene a lo más una solución (normalizada).
- Lemma: si la función de exceso de demanda agregada $z(\cdot)$ satisface la propiedad de sustitutos brutos y $z(p^*) = 0$, entonces para cualquier p no colineal con p^*, se tiene que $p^* z(p) > 0$.
- Proposición: si la función de exceso de demanda agregada $z(\cdot)$ satisface la propiedad de sustitutos brutos y p es un vector de precios de equilibrio Walrasiano, entonces, el proceso de ajuste de precios $\frac{dp}{dt} = \alpha z(p(t))$, con $\alpha > 0$, converge a los precios relativos de p cuando $t \to \infty$ para cualquier condición inicial $p(0)$.

Sustitutos brutos: estática comparativa

- Cualquier cambio que aumente el exceso de demanda del bien k va a subir el precio de ese bien.
- Por ejemplo, con dos bienes y $p_2 = 1$ y los bienes son normales.
- Supongamos que aumenta la dotación inicial del bien 2 para algunos agentes.
- Para cualquier p_1, esto va a aumentar la demanda agregada del bien 1 y por ende su exceso de demanda.
- Esto desplaza la función de exceso de demanda hacia arriba y por lo tanto intersecta al 0 para un nivel más alto de p_1.

Equilibrio general con producción: un consumidor y un productor

- Suponga hay un solo consumidor y una sola firma en la economía.
- Los dos bienes de la economía son el ocio del consumidor y un bien de consumo que produce la firma.
- El consumidor tiene preferencias continuas, convexas y estríctamente monótonas, definidas sobre el consumo de ocio x_1 y el consumo del bien x_2 con función de utilidad $u(x_1, x_2)$.
- El consumidor tiene una dotación inicial de $\overline{L}$ unidades de ocio y nada del bien de consumo.
- La firma usa trabajo para producir el bien de consumo acorde a una función de producción $f(z)$, con z el trabajo.
- La firma maximiza beneficios tomando los precios como dados (p, w): $\max_{z \geq 0} \; pf(z) - wz$.

Equilibrio general con producción: un consumidor y un productor

- La demanda por trabajo es $z(p, w)$ y la producción $q(p, w)$.
- El dueño de la firma es el consumidor y recibe los beneficios de la firma $\pi(p, w)$.
- El problema del consumidor es

$$\begin{aligned} \max_{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+} \quad & u(x_1, x_2) \\ s.a. \quad & p x_2 \leq w(\overline{L} - x_1) + \pi(p, w) \end{aligned}$$

- Las demandas del consumidor son $x_1(p, w)$ y $x_2(p, w)$.
- En un equilibrio Walrasiano se tiene (p^*, w^*) tal que el mercado de consumo y trabajo se vacían, es decir

$$\begin{aligned} x_2(p^*, w^*) &= q(p^*, w^*) \\ z(p^*, w^*) &= \overline{L} - x_1(p^*, w^*) \end{aligned}$$

Equilibrio general con producción: caso general

- Tenemos I consumidores y L bienes.
- Agregamos K firmas, con $k \in \mathbb{K}$ el conjunto de firmas, cada una con conjunto de producción $Y^k \in \mathbb{R}^n$.
- Recordamos que si $y_l < 0$ significa que el bien l se está usando como insumo.
- Los dueños de las firmas son los consumidores.
- El consumidor i posee una participación α^{ki} en la firma k.
- La economía es entonces $\xi = ((u^i, e^i, (\alpha^{ki})_{k\in\mathbb{K}})_{i\in\mathbb{I}}, (Y^k)_{k\in\mathbb{K}})$.

Equilibrio general con producción: caso general

- Supuestos del conjunto de producción para todas las firmas:
  1. Y^k es cerrado y convexo.
  2. $0 \in Y^k$ y $\mathbb{R}^L_{--} \subset Y^k$.
  3. Si $Y = \sum_{k \in \mathbb{K}} Y^k$, entonces $Y \cap -Y = \{0\}$.
- El primer supuesto deja fuera una tecnología de retornos crecientes a escala.
- El segundo supuesto dice que la inacción es posible y que siempre se puede escalar hacia abajo la producción (libre disposición).
- El último supuesto elimina inconsistencias en los conjuntos de producción en que las firmas se coordinan para producir una infinita cantidad de bienes.
  - Por ejemplo si una firma produce 1 kilo de acero con 1 kilo de hierro y otra firma produce 2 kilos de hierro con 1 kilo de acero.

Equilibrio general con producción: caso general

- Las firmas toman precios $p \in \mathbb{R}^L$ como dados y eligen un plan de producción $y^k \in Y^k$ para resolver $max_{y \in Y^k} \; py$.
- Un equilibrio Walrasiano es un vector $(p, (x^i)_{i \in \mathbb{I}}, (y^k)_{k \in \mathbb{K}})$ tal que:
  1. Las firmas maximizan sus beneficios: para todo $k \in \mathbb{K}$

  $$y^k \in argmax_{y \in Y^k} \, py$$

  2. Los consumidores maximizan su utilidad: para todo $i \in \mathbb{I}$

  $$x^i \in argmax_x \; u^i(x)$$
  $$s.a. \;\; p(x - e^i) - p \sum_{k \in \mathbb{K}} \alpha^{ki} y^k \leq 0$$

  3. Los mercados se vacían:

  $$\sum_{i \in \mathbb{I}} (x^i - e^i) - \sum_{k \in \mathbb{K}} y^k = 0$$

Equilibrio general con producción: caso general

- Definición: una asignación y un plan de producción $((x^i)_{i\in\mathbb{I}}, (y^k)_{k\in\mathbb{K}})$ es factible si $\sum_{i\in\mathbb{I}}(x^i - e^i) - \sum_{k\in\mathbb{K}} y^k \leq 0$.
- Definición: una asignación y un conjunto de producción factibles $((x^i)_{i\in\mathbb{I}}, (y^k)_{k\in\mathbb{K}})$ es Pareto eficiente si no hay otra asignación y conjunto de producción factible $((\hat{x}^i)_{i\in\mathbb{I}}, (\hat{y}^k)_{k\in\mathbb{K}})$ tal que mejora $u^i(\hat{x}^i) \leq u^i(x^i)$ para todo i y con desigualdad estricta para al menos un i'.
- Primer Teorema del Bienestar: bajo el supuesto 2 para los consumidores, si $(p, (x^i)_{i\in\mathbb{I}}, (y^k)_{k\in\mathbb{K}})$ es un equilibrio Walrasiano, entonces $((x^i)_{i\in\mathbb{I}}, (y^k)_{k\in\mathbb{K}})$ es Pareto eficiente.

Equilibrio general con producción: caso general

- Segundo Teorema del Bienestar: suponga se cumplen los supuestos 2-4 para los consumidores y el supuesto 1 para las firmas y que $((x^i)_{i\in\mathbb{I}}, (y^k)_{k\in\mathbb{K}})$ es una asignación Pareto eficiente. Suponga que $x^i >> 0$ para todo $i \in \mathbb{I}$. Entonces, hay un vector de precios $p > 0$, tasas de participación en las firmas $(\alpha^{ki})_{i\in\mathbb{I},k\in\mathbb{K}}$ y dotaciones iniciales $(e^i)_{i\in\mathbb{I}}$ tal que $(p, (x^i)_{i\in\mathbb{I}}, (y^k)_{k\in\mathbb{K}})$ es un equilibrio Walrasiano dadas estas dotaciones iniciales y tasas de participación en las firmas.
- Teorema: existencia de equilibrio Walrasiano. Si la economía ξ satisface los supuestos 1 al 4 para los consumidores y 1 al 3 para las firmas, entonces existe un equilibrio Walrasiano en ξ.

Equilibrio general con producción: actividades lineales

- Necesitamos funciones de utilidad y funciones de producción.
- Una manera simple es modelar producción como actividades lineales.
- Hay una sola firma que tiene acceso a un número M de actividades lineales $a_m \in \mathbb{M} \subset \mathbb{R}^L$.
- La firma puede operar cada actividad a un nivel $\gamma \geq 0$.
- Entonces, el conjunto de producción es

$$Y = \{y \in \mathbb{R}^L : y = \sum_{m=1}^{M} \gamma_m a_m \text{ para algún } \gamma \in \mathbb{R}_+^M\}$$

Equilibrio general con producción: actividades lineales

- Libre disposición se satisface si los vectores $(-1, 0, ..., 0)$, $(0, -1, ..., 0)$,...,$(0, 0, ..., -1)$ pertenecen a $\mathbb{M}$.
- Por ejemplo, se pueden tener 4 actividades y dos bienes:
  - Actividad 1 convierte 2 unidades del bien 2 en una unidad del bien 1.
  - Actividad 2 convierte 3 unidades del bien 1 en 1 unidad del bien 2.
  - Además hay dos actividades de libre disposición.
- Entonces, $\mathbb{M} = \{(1, -2), (-3, 1), (0, -1), (-1, 0)\}$.

Equilibrio general con producción: actividades lineales

- Buscamos un vector de precios p y un plan de producción que maximiza beneficios de las firma.
  - Si $pa_m > 0$ para algún m, entonces la firma elige $\gamma_m \to \infty$ y tiene infinitos beneficios, pero hay exceso de oferta.
  - Si $pa_m < 0$ para algún m, entonces el óptimo para la firma es $\gamma_m = 0$.
  - Esto implica que los precios de equilibrios deben satisfacer una condición de beneficios iguales a 0.
- Notar que lo que importa es el conjunto de producción agregado.
- Podríamos tener que distinta firmas operan ditintas actividades y los resultados serían los mismos en este paradigma competitivo.

Ejemplo

- Supongamos hay dos consumidores de tres bienes con función de utilidad

$$u^i(x) = log(x_1) + log(x_2) + log(x_3)$$

- Las dotaciones iniciales son $e^1 = (1, 2, 3)$, $e^2 = (2, 2, 2)$.
- Asumimos que hay dos actividades: $a_1 = (2, -1, 0.5)$ y $a_2 = (0, 1, -1)$.
- Normalizamos $p_3 = 1$.
- Entonces:
  - Si la actividad 2 es usada en equilibrio, entonces debemos tener $p_2 = 1$.
  - Luego, si la actividad 1 es usada en equilibrio, entonces debemos tener $p_1 = 0.25$.
- Estos precios son cotas superiores de los precios de equilibrio si estas actividades no son usadas en equilibrio.

Ejemplo

- Buscamos un equilibrio en que ambas actividades se usan.
- Para precios $p = (0.25, 1, 1)$ resolvemos la maximización del agente i.
- Obtenemos

$$\frac{1}{p_1 x_1^i} = \frac{1}{p_2 x_2^i} = \frac{1}{p_3 x_3^i} \quad \text{y} \quad \sum_l p_l x_l^i = \sum_l p_l e_l^i$$

- Con los precios y las dotaciones iniciales que tenemos

$$\frac{4}{x_1^i} = \frac{1}{x_2^i} = \frac{1}{x_3^i} \quad \text{y} \quad \frac{1}{4} x_1^i + x_2^i + x_3^i = w^i$$

con $w^1 = 5.25$ y $w^2 = 4.5$.

Ejemplo

- Por lo tanto

$$x^1 = (7, 1.75, 1.75) \quad \text{y} \quad x^2 = (6, 1.5, 1.5)$$

- La demanda agregada es $(13, 3.25, 3.25)$.
- Dotación agregada es $(3, 4, 5)$.
- Para que los mercados se vacíen la producción agregada debe ser $(10, -0.75, -1.75)$.
- Esto implica que $\gamma_1 = 5$ y $\gamma_2 = 4.25$.
- ¿Existe equilibrio si solo está activa la actividad 2? ¿y si solo está activa la actividad 1?

Equilibrio general con incertidumbre: versión 1

- Veremos tres maneras en que se puede agregar incertidumbre al modelo de distintas maneras (asumimos que no hay producción).
- En todas ellas, introducimos *estados de la naturaleza* que son comunes para todos los agentes.
- Los agentes no necesariamente deben estar de acuerdo con la probabilidad de cada estado, aunque normalmente se asume que es así.
- Version 1. El modelo tiene un número finito de períodos y en cada período t hay un número de posibles estados de la naturaleza (se parte del período 0).
- Esto se puede representar con un árbol de decisión con S nodos $\epsilon \in \Xi$.
- El predecesor del nodo ϵ es ϵ_- y el conjunto de sus sucesores es $\Upsilon(\epsilon)$.
- En cada período t el conjunto de nodos es $\mathbb{N}_t$.

Equilibrio general con incertidumbre: versión 1

- Hay L bienes en cada nodo por lo que hay en total SL bienes.
- Hay I agentes con dotaciones $e^i \in \mathbb{R}^{SL}_{++}$ y función de utilidad $u^i : \mathbb{R}^{SL}_{+} \to \mathbb{R}$.
- El equilibrio se define como antes: todos los agentes maximizan su utilidad dados los precios y los mercados se vacían. y se le llama equilibrio Arrow-Debreu.
- Todo el intercambio se produce en el período 0 y no hay más intercambio en períodos posteriores.
- Bajos los supuestos previos de las preferencias, existe un equilibrio Walrasiano y se satisfacen los teoremas del bienestar.
- Básicamente un intercambio de bienes ahora especifica el período y el evento bajo el cual ocurre el intercambio.
- Con esto se encuentra una teoría de incertidumbre formalmente idéntica a la con certidumbre.

Equilibrio general con incertidumbre: versión 2

- Versión 2. Sin embargo, no es muy realista asumir que todo el intercambio se produce en el período 0.
- En la práctica hay activos financieros que son intercambiados y que pagan de acuerdo a ciertos eventos (acciones, préstamos, seguros, etc).
- Se reformula el modelo de manera de considerar estos activos.
- En cada nodo ϵ hay mercados spot para los L bienes en ese nodo a precios $p(\epsilon)$.
- En el período 0 hay $(S-1)$ activos de Arrow (uno por nodo futuro), donde un activo de Arrow ϵ paga una unidad del bien 1 en el nodo ϵ.
- Un equilibrio ahora involucra maximización de utilidad y que los mercados se vacíen en cada nodo y en los $S-1$ mercados de activos de Arrow en el período 0.
- Los resultados de equilibrio y teoremas del bienestar todavía se obtienen en esta variación.

Equilibrio general con incertidumbre: versión 3

- Versión 3. Luego, se puede pensar que no hay $(S-1)$ mercados de activos de Arrow pero si hay algunos activos que pagan en contingencias futuras (mercados incompletos).
- Sin el conjunto completo de $(S-1)$ activos de Arrow, el primer teorema del bienestar en general no aplica.
- Para ilustrar veremos modelo financiero simple.
- Hay dos períodos y en cada estado de la naturaleza hay un solo bien de consumo (perecible).
- El precio spot de este bien se normaliza a 1 en cada período.
- Hay $S+1$ estados de la naturaleza, un estado en el período $t=0$ y S estados en $t=1$.

Equilibrio general con incertidumbre: versión 3

- Cada agente tiene dotación inicial $e^i = (e^i_0, ..., e^i_S) \in \mathbb{R}^{S+1}_{++}$ y función de utilidad $u^i : \mathbb{R}^{S+1}_+ \to \mathbb{R}$ sobre $x^i = (x^i_0, ..., x^i_S) \in \mathbb{R}^{S+1}_+$.
- Las funciones de utilidad son estríctamente crecientes, continuas y estríctamente cóncavas.
- Sea $x = (x_0, ..., x_S)$ y $\overline{x} = (x_1, ..., x_S)$ (lo mismo para e y $\overline{e}$)
- La dotación inicial agregada es $e = \sum_{i \in \mathbb{I}} e^i$.
- Hay J activos financieros, cada activo j paga un dividendo $d^j \in \mathbb{R}^S$ en $t = 1$.
- El precio del activo en $t = 0$ es q_j.
- Los activos comienzan con oferta neta igual a 0 y la venta corta es permitida.
- Los dividendos se agregan en la matriz $A = (d^1, ..., d^J) \in \mathbb{R}^{S \times J}$.

Equilibrio general con incertidumbre: versión 3

- En $t = 0$ cada agente elige un portafolio $\alpha^i \in \mathbb{R}^J$, con α^i_j es la cantidad del activo j en manos del agente i.
- Este portafolio define la riqueza del agente en cada estado del período 1.
- Esta riqueza define el consumo en cada estado (precios normalizados a 1): $\overline{x}^i = \overline{e}^i + A\alpha^i$ y $x^i_0 = e^i_0 - \alpha^i q$.
- La demanda neta de cada agente $\overline{x}^i - \overline{e}^i$ pertenece al *span* de la matriz de pagos A:

$$\{z \in \mathbb{R}^s : \exists \alpha \in \mathbb{R}^J \;\; s.a. \;\; z = A\alpha\}$$

- Una economía financiera es $\xi = ((u^i, e^i)_{i \in \mathbb{I}}, A)$.
- Decimos que los mercados son incompletos si $J < S$.

Equilibrio general con incertidumbre: versión 3

- Los precios de mercado son libres de arbitraje si no es posible obtener un ingreso positivo en todos los estados de la naturaleza a través de intercambio a precios del período 0.
- Es decir, no hay posición $\alpha \in \mathbb{R}^J$ con $q\alpha \leq 0$ (costo en $t = 0$) y $A\alpha \geq 0$ (pagos en $t = 1$) con alguna desigualdad estricta.
- En otras palabras, que no haya arbitraje implica que no se puede garantizar un ingreso positivo mañana sin hacer una inversión positiva hoy.
- Como las utilidades son estríctamente crecientes, los precios de los activos deben impedir el arbitraje o habría un problema con la maximización de utilidad.

Equilibrio general con incertidumbre: versión 3

- Teorema: un vector de precios $q \in \mathbb{J}$ imposibilita el arbitraje si y solo si hay un vector estado de precios $\pi \in \mathbb{R}^S_{++}$ tal que $q' = \pi' A$.
- Definición: un equilibrio de mercados financieros para la economía ξ es un conjunto de portafolios $\alpha^* = (\alpha^{1*}, ..., \alpha^{I*}) \in \mathbb{R}^{IJ}$, consumos individuales $(x^i)_{i \in \mathbb{I}}$ y precios $q^* \in \mathbb{R}^J$ tal que:
  1. Los agentes maximizan su utilidad:
  $$(x^i, \alpha^{i*}) \in argmax_{\alpha^i, c^i} \;\; u^i(c^i)$$
  $$s.a. \;\; c^i = e^i + \begin{pmatrix} -q^{*'} \\ A \end{pmatrix} \alpha^i$$
  2. Los mercados se vacían: $\sum_{i \in \mathbb{I}} \alpha^{i*} = 0$.

Equilibrio general con incertidumbre: versión 3

- Para que haya un equilibrio, el arbitraje debe ser imposible.
- Si $J = S$, entonces el equilibrio de mercados financieros es equivalente a un equilibrio Arrow-Debreu.
- Hay un vector estado de precios $\pi \in \mathbb{R}^S_{++}$ único tal que $q' = \pi' A$.
- Este sería un vector de precios de equilibrio en una economía Walrasiana y las asignaciones son las mismas.
- ¿Qué pasa si $J < S$?
- Un equilibrio de mercados financieros existe pero la asignación no necesariamente es eficiente.

Equilibrio general con incertidumbre: versión 3

- Supongamos hay dos estados y un solo bono que paga 1 en cada estado: $d = (1, 1)'$.
- Hay dos agentes con dotaciones iniciales:

$$
\begin{aligned}
e^1 &= (1, 2, 1) \\
e^2 &= (1, 1, 2)
\end{aligned}
$$

- Ambos tienen la misma función de utilidad

$$u^i = (x_0, x_1, x_2) = log(x_0) + \frac{1}{2} log(x_1) + \frac{1}{2} log(x_2)$$

- El único equilibrio no tiene intercambio del bono y cada agente consume su dotación.
- Esta asignación está Pareto dominada por $x^1 = x^2 = (1, 1.5, 1.5)$ que es factible.

Equilibrio general con incertidumbre: versión 3

- Definición: dadas las dotaciones iniciales $(e^i)_{i\in\mathbb{I}}$ y activos A, una asignación $(x^i)_{i\in\mathbb{I}}$ es eficiente restringida si $\sum_{i\in\mathbb{I}}(x^i - e^i) \leq 0$, $x^i - e^i$ pertenecen al *span* de A para todo i y no existe una asignación alternativa $(\hat{x}^i)_{i\in\mathbb{I}}$ que Pareto domine a $(x^i)_{i\in\mathbb{I}}$ y que también satisfaga $\sum_{i\in\mathbb{I}}(\hat{x}^i - e^i) \leq 0$ y $\hat{x}^i - e^i$ pertenece al *span* de A para todo i.
- La interpretación es que el equilibrio al menos aprovecha todas las ganancias del intercambio.
- Teorema: si las funciones de utilidad son estríctamente crecientes, el equilibrio de mercados financieros es eficiente restringido.