

# Econometría I

## Modelo Lineal de Regresión: Inferencia por MCO

---

Ramiro de Elejalde

Facultad de Economía y Finanzas  
Universidad Alberto Hurtado

Contraste de una restricción lineal sobre un parámetro

Intervalo de confianza

Una restricción lineal sobre múltiples parámetros

Múltiples restricciones lineales

Restricciones no lineales

**Referencias:** Cap. 7 y 9 de Hansen, cap. 3.5.2 y 4.2.3 de Wooldridge, y cap. 7 de Stock and Watson.

# Estimación MCO: Tamaño de clase y rendimiento académico

## Salida de Stata

```
. reg testscr str el_pct, robust
```

Linear regression

Number of obs = 420  
F( 2, 417) = 223.82  
Prob > F = 0.0000  
R-squared = 0.4264  
Root MSE = 14.464

-----						
		Robust				
testscr		Coef.	Std. Err.	t	P> t	[95% Conf. Interval]
-----+-----						
str		-1.101296	.4328472	-2.54	0.011	-1.95213 -.2504616
el_pct		-.6497768	.0310318	-20.94	0.000	-.710775 -.5887786
_cons		686.0322	8.728224	78.60	0.000	668.8754 703.189
-----						

# Contraste de hipótesis e intervalos de confianza

- En esta unidad vamos a estudiar como incorporar la influencia de la aleatoriedad muestral en el análisis de los resultados.

⇒ Contraste de hipótesis

⇒ Intervalos de confianza

## Contraste de una restricción lineal sobre un parámetro

---

# Contraste de una restricción lineal sobre un parámetro

Hipótesis nula

$$H_0 : \beta_j = \beta_{j,0}.$$

Hipótesis alternativa

$$H_1 : \beta_j \neq \beta_{j,0}.$$

- **Regla de decisión:** Un estadístico  $T_N$ , un valor crítico  $c_\alpha$  y una regla de decisión:
  1. No rechazar  $H_0$  si  $T_N \leq c_\alpha$ ,
  2. Rechazar  $H_0$  si  $T_N > c_\alpha$ .

- **Regla de decisión:** Un estadístico  $T_N$ , un valor crítico  $c_\alpha$  y una regla de decisión:
  1. No rechazar  $H_0$  si  $T_N \leq c_\alpha$ ,
  2. Rechazar  $H_0$  si  $T_N > c_\alpha$ .
- **Test estadístico:** Estadístico t en valor absoluto

$$|t_N| = \left| \frac{\hat{\beta}_j - \beta_{j,0}}{\text{s.e.}(\hat{\beta}_j)} \right|$$



## Error tipo I y tamaño del test

	Decisión en el contraste de hipótesis	
	No rechazar $H_0$	Rechazar $H_0$
$H_0$ es verdadera	Decisión correcta	Error tipo I
$H_1$ es verdadera	Error tipo II	Decisión correcta

- El **tamaño del test** es la probabilidad del error tipo I. El **tamaño asintótico del test**  $\alpha$  es dicha probabilidad en el límite:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \Pr(\text{Rechazar } H_0 | H_0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \Pr(T_N > c_\alpha | H_0) = \Pr(T > c_\alpha) = \alpha$$

donde  $T_N \xrightarrow{d} T$  bajo  $H_0$ .

## Error tipo I y tamaño del test

	Decisión en el contraste de hipótesis	
	No rechazar $H_0$	Rechazar $H_0$
$H_0$ es verdadera	Decisión correcta	Error tipo I
$H_1$ es verdadera	Error tipo II	Decisión correcta

- Clave: Buscar  $T_N$  cuya distribución asintótica bajo  $H_0$  sea conocida.
- Si la distribución asintótica de  $T_N$  no depende de parámetros desconocidos, el estadístico es **asintóticamente pivotal**.
- Fijamos  $\alpha$  y obtenemos  $c_\alpha$  de la distribución asintótica de  $T_N$ .

- **Test estadístico:** Estadístico t en valor absoluto

$$|t_N| = \left| \frac{\hat{\beta}_j - \beta_{j,0}}{s.e.(\hat{\beta}_j)} \right| \xrightarrow{d}_{H_0} |Z|,$$

donde  $Z \sim \text{Normal}(0, 1)$  y  $\Pr(|Z| \leq u) = 2\Phi(u) - 1$

- **Test estadístico:** Estadístico t en valor absoluto

$$|t_N| = \left| \frac{\hat{\beta}_j - \beta_{j,0}}{\text{s.e.}(\hat{\beta}_j)} \right| \xrightarrow{d}_{H_0} |Z|,$$

donde  $Z \sim \text{Normal}(0, 1)$  y  $\Pr(|Z| \leq u) = 2\Phi(u) - 1$

**Demostración:**

$$\begin{aligned} t_N &= \frac{\hat{\beta}_j - \beta_{j,0}}{\text{s.e.}(\hat{\beta}_j)}, \\ &= \sqrt{N} \frac{\hat{\beta}_j - \beta_{j,0}}{\hat{v}_{jj}^{1/2}}, \\ &= \sqrt{N} \frac{\hat{\beta}_j - \beta_{j,0}}{v_{jj}^{1/2}} \frac{v_{jj}^{1/2}}{\hat{v}_{jj}^{1/2}} \xrightarrow{d}_{H_0} Z \sim \text{Normal}(0, 1), \end{aligned}$$

usando el teorema de Slutsky y la distribución asintótica normal.

- **Test estadístico:** Estadístico  $t$  en valor absoluto

$$|t_N| = \left| \frac{\hat{\beta}_j - \beta_{j,0}}{s.e.(\hat{\beta}_j)} \right| \xrightarrow{d}_{H_0} |Z|$$

donde  $Z \sim \text{Normal}(0, 1)$  y  $\Pr(|Z| \leq u) = 2\Phi(u) - 1$ .

**Demostración:**

$$t_N \xrightarrow{d}_{H_0} Z \sim \text{Normal}(0, 1),$$

entonces utilizando el TFC

$$|t_N| \xrightarrow{d}_{H_0} |Z| \quad \text{donde } Z \sim \text{Normal}(0, 1).$$

La probabilidad acumulada de  $|Z|$  viene dada por

$$\begin{aligned} \Pr(|Z| \leq u) &= \Pr(-u \leq Z \leq u) \\ &= \Phi(u) - \Phi(-u) = \Phi(u) - (1 - \Phi(u)) \\ &= 2\Phi(u) - 1. \end{aligned}$$

- **Test estadístico:** Estadístico t en valor absoluto

$$|t_N| = \left| \frac{\hat{\beta}_j - \beta_{j,0}}{\text{s.e.}(\hat{\beta}_j)} \right| \xrightarrow{d}_{H_0} |Z|,$$

donde  $Z \sim \text{Normal}(0, 1)$  y  $\Pr(|Z| \leq u) = 2\Phi(u) - 1$ .

- **Valor crítico**  $c_\alpha = z_{1-\alpha/2}$  donde  $\alpha$  es el tamaño del test y  $\Phi(z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$ .

- **Test estadístico:** Estadístico t en valor absoluto

$$|t_N| = \left| \frac{\hat{\beta}_j - \beta_{j,0}}{\text{s.e.}(\hat{\beta}_j)} \right| \xrightarrow{d}_{H_0} |Z|,$$

donde  $Z \sim \text{Normal}(0, 1)$  y  $\Pr(|Z| \leq u) = 2\Phi(u) - 1$ .

- **Valor crítico**  $c_\alpha = z_{1-\alpha/2}$  donde  $\alpha$  es el tamaño del test y  $\Phi(z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$ .

**Demostración:**

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \Pr(\text{Rechazar } H_0 | H_0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \Pr(|t_N| > c_\alpha | H_0) = \Pr(|Z| > c_\alpha) = \alpha.$$

Pero

$$\begin{aligned} \Pr(|Z| > c_\alpha) &= 1 - \Pr(|Z| \leq c_\alpha) \\ &= 1 - (2\Phi(c_\alpha) - 1) = 2(1 - \Phi(c_\alpha)) = \alpha \\ &\iff \Phi(c_\alpha) = 1 - \alpha/2 \\ &\iff c_\alpha = z_{1-\alpha/2} \end{aligned}$$

- **Test estadístico:** Estadístico  $t$  en valor absoluto

$$|t_N| = \left| \frac{\hat{\beta}_j - \beta_{j,0}}{\text{s.e.}(\hat{\beta}_j)} \right| \xrightarrow{d_{H_0}} |Z|,$$

donde  $Z \sim \text{Normal}(0, 1)$  y  $\Pr(|Z| \leq u) = 2\Phi(u) - 1$ .

- **Valor crítico**  $c_\alpha = z_{1-\alpha/2}$  donde  $\alpha$  es el tamaño del test.  
Si  $\alpha = 0.05$ , entonces  $c_\alpha = z_{0.975} = 1.96$ .
- **Regla de decisión:** Si  $|t_N| > z_{1-\alpha/2}$ , rechazamos  $H_0$ .  
Cuando rechazamos la hipótesis nula  $H_0 : \beta_j = 0$ , solemos decir que  $\beta_j$  es estadísticamente significativo.



## Ejemplo: Tamaño de clase y rendimiento académico

- Modelo

$$testscr_i = \beta_0 + \beta_1 str_i + \beta_2 el\_pct_i + u_i,$$

- **Hipótesis nula:** El tamaño de clase no tiene efecto sobre el rendimiento académico.  
Formalmente:

$$H_0 : \beta_1 = 0.$$

- **Hipótesis alternativa:** El tamaño de clase tiene efecto sobre el rendimiento académico.  
Formalmente:

$$H_1 : \beta_1 \neq 0.$$

## Salida de Stata

```
. reg testscr str el_pct, robust
```

Linear regression

Number of obs = 420

F( 2, 417) = 223.82

Prob > F = 0.0000

R-squared = 0.4264

Root MSE = 14.464

-----						
		Robust				
testscr		Coef.	Std. Err.	t	P> t	[95% Conf. Interval]
-----+-----						
str		-1.101296	.4328472	-2.54	0.011	-1.95213 -.2504616
el_pct		-.6497768	.0310318	-20.94	0.000	-.710775 -.5887786
_cons		686.0322	8.728224	78.60	0.000	668.8754 703.189
-----						

- Significancia estadística y significancia económica.

El **p-valor** se define como  $p_N = \Pr(T > T_N)$  donde  $T_N \xrightarrow{d}_{H_0} T$ .

- **Intuición:** La regla de decisión es rechazar  $H_0$  si  $T_N > c_\alpha$  donde  $\Pr(T > c_\alpha) = \alpha$ . Una regla de decisión equivalente es calcular el p-valor  $\Pr(T > T_N) = p_N$  y rechazar si  $p_N < \alpha$ .

El **p-valor** se define como  $p_N = \Pr(T > T_N)$  donde  $T_N \xrightarrow{d}_{H_0} T$ .

- **Intuición:** La regla de decisión es rechazar  $H_0$  si  $T_N > c_\alpha$  donde  $\Pr(T > c_\alpha) = \alpha$ . Una regla de decisión equivalente es calcular el p-valor  $\Pr(T > T_N) = p_N$  y rechazar si  $p_N < \alpha$ .
- Dado que  $\Pr(T > T_N)$  es decreciente en  $T_N$ , el p-valor es una transformación monótona de  $T_N$  y por lo tanto es un estadístico equivalente.
- **El p-valor es el nivel de significatividad marginal:** el mayor valor de  $\alpha$  tal que se rechaza  $H_0$ .
- Para  $H_0 : \beta_j = \beta_{j,0}$  y  $H_1 : \beta_j \neq \beta_{j,0}$  con el estadístico t tenemos:

$$p_N = \Pr(T > T_N) = \Pr(|Z| > |t_N|) = 2(1 - \Phi(|t_N|)).$$

## Salida de Stata

```
. reg testscr str el_pct, robust
```

Linear regression

Number of obs = 420  
F( 2, 417) = 223.82  
Prob > F = 0.0000  
R-squared = 0.4264  
Root MSE = 14.464

-----						
		Robust				
testscr		Coef.	Std. Err.	t	P> t	[95% Conf. Interval]
-----+-----						
str		-1.101296	.4328472	-2.54	0.011	-1.95213 -.2504616
el_pct		-.6497768	.0310318	-20.94	0.000	-.710775 -.5887786
_cons		686.0322	8.728224	78.60	0.000	668.8754 703.189
-----						

## Error tipo II y poder del test

	Decisión en el contraste de hipótesis	
	No rechazar $H_0$	Rechazar $H_0$
$H_0$ es verdadera	Decisión correcta	Error tipo I
$H_1$ es verdadera	Error tipo II	Decisión correcta

- El poder del test  $\pi_N(\beta_j)$  es uno menos la probabilidad del error tipo II:

$$\Pr(\text{Rechazar } H_0 | H_1) = \Pr(T_N > c_\alpha | H_1) = \pi_N(\beta_j).$$

## Error tipo II y poder del test

	Decisión en el contraste de hipótesis	
	No rechazar $H_0$	Rechazar $H_0$
$H_0$ es verdadera	Decisión correcta	Error tipo I
$H_1$ es verdadera	Error tipo II	Decisión correcta

- El **poder del test**  $\pi_N(\beta_j)$  es uno menos la probabilidad del error tipo II:

$$\Pr(\text{Rechazar } H_0 | H_1) = \Pr(T_N > c_\alpha | H_1) = \pi_N(\beta_j).$$

- En general, el poder del test aumenta a medida que  $\beta_j$  se aleja de  $\beta_{j,0}$  y a medida que el tamaño de la muestra aumenta.
- El objetivo en la construcción del test es obtener un poder alto sujeto al tamaño del test.
- Si el poder es igual al tamaño del test, el test no provee información sobre la hipótesis de interés.

- **Consistencia** frente a la alternativa fija  $H_1$ : Si rechazamos con probabilidad uno bajo  $H_1$  cuando  $N \rightarrow \infty$ ,

$$\begin{aligned}\lim_{N \rightarrow \infty} \pi_N(\beta_j) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \Pr(\text{Rechazar } H_0 | H_1) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \Pr(T_N > c_\alpha | H_1) \\ &= 1.\end{aligned}$$



- **Test estadístico:** Estadístico t en valor absoluto

$$|t_N| = \left| \frac{\hat{\beta}_j - \beta_{j,0}}{s.e.(\hat{\beta}_j)} \right| \xrightarrow{d}_{H_0} |Z|,$$

donde  $Z \sim \text{Normal}(0, 1)$  y  $\Pr(|Z| \leq u) = 2\Phi(u) - 1$ .

- El contraste con el test estadístico t es **consistente**.

- **Test estadístico:** Estadístico t en valor absoluto

$$|t_N| = \left| \frac{\hat{\beta}_j - \beta_{j,0}}{s.e.(\hat{\beta}_j)} \right| \xrightarrow{d}_{H_0} |Z|,$$

donde  $Z \sim \text{Normal}(0, 1)$  y  $\Pr(|Z| \leq u) = 2\Phi(u) - 1$ .

- El contraste con el test estadístico t es **consistente**.

## Demostración

$$t_N = \frac{\hat{\beta}_j - \beta_{j,0}}{s.e.(\hat{\beta}_j)} = \frac{\hat{\beta}_j - \beta_j}{s.e.(\hat{\beta}_j)} + \sqrt{N} \frac{\beta_j - \beta_{j,0}}{\hat{v}_{jj}^{1/2}}$$
$$\xrightarrow{d}_{H_1} \begin{cases} Z + \infty & \text{si } \beta_j > \beta_{j,0}, \\ Z - \infty & \text{si } \beta_j < \beta_{j,0}. \end{cases} \quad \text{donde } Z \sim \text{Normal}(0, 1).$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \Pr(|t_N| > z_{1-\alpha/2} | H_1) = \Pr(|Z \pm \infty| > z_{1-\alpha/2} | H_1) = 1$$

## Poder asintótico local

- Consistencia es un requisito mínimo para una test, pero no es una buena aproximación al poder del test.
- Una **alternativa local** es una hipótesis alternativa  $H_{1,N}$  que converge a  $H_0$  a cierta velocidad. En este caso,  $\beta_{j,N} = \beta_{j,0} + N^{-1/2}h$  donde  $h$  es un parámetro.
- El **poder asintótico local** de un test es el límite cuando  $N \rightarrow \infty$  del poder del test bajo la alternativa local:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \Pr(\text{Rechazar } H_0 | H_{1,N}) = \lim_{N \rightarrow \infty} \Pr(T_N > c_\alpha | H_{1,N}).$$

- Poder asintótico local del test es decreciente en  $v_{jj}$

Dada la alternativa local  $H_{1,N} : \beta_{j,N} = \beta_{j,0} + N^{-1/2}h$ , el poder asintótico es  $\lim_{N \rightarrow \infty} \Pr(|t_N| > z_{1-\alpha/2} | H_{1,N}) = \Phi(\delta - c_\alpha) + \Phi(-\delta - c_\alpha)$  donde  $\delta = h/v_{jj}^{1/2}$ . El poder local es decreciente en  $v_{jj}$  (dado  $h$ ).

- Poder asintótico local del test es decreciente en  $v_{jj}$

Dada la alternativa local  $H_{1,N} : \beta_{j,N} = \beta_{j,0} + N^{-1/2}h$ , el poder asintótico es  $\lim_{N \rightarrow \infty} \Pr(|t_N| > z_{1-\alpha/2} | H_{1,N}) = \Phi(\delta - c_\alpha) + \Phi(-\delta - c_\alpha)$  donde  $\delta = h/v_{jj}^{1/2}$ . El poder local es decreciente en  $v_{jj}$  (dado  $h$ ).

### Demostración

$$\begin{aligned} t_N &= \frac{\hat{\beta}_j - \beta_{j,0}}{s.e.(\hat{\beta}_j)} = \frac{\hat{\beta}_j - \beta_{j,N}}{s.e.(\hat{\beta}_j)} + \sqrt{N} \frac{\beta_{j,N} - \beta_{j,0}}{\hat{v}_{jj}^{1/2}} \\ &= \frac{\hat{\beta}_j - \beta_{j,N}}{s.e.(\hat{\beta}_j)} + \frac{h}{\hat{v}_{jj}^{1/2}} \xrightarrow{d}_{H_{1,N}} Z + \delta \quad \text{donde } Z \sim \text{Normal}(0, 1), \end{aligned}$$

utilizando  $\beta_{j,N} = \beta_{j,0} + h N^{-1/2}$ .

- Poder asintótico local del test es decreciente en  $v_{jj}$

Dada la alternativa local  $H_{1,N} : \beta_j = \beta_{j,0} + N^{-1/2}h$ , el poder asintótico es  $\lim_{N \rightarrow \infty} \Pr(|t_N| > z_{1-\alpha/2} | H_{1,N}) = \Phi(\delta - c_\alpha) + \Phi(-\delta - c_\alpha)$  donde  $\delta = h/v_{jj}^{1/2}$ . El poder local es creciente en  $\delta$ .

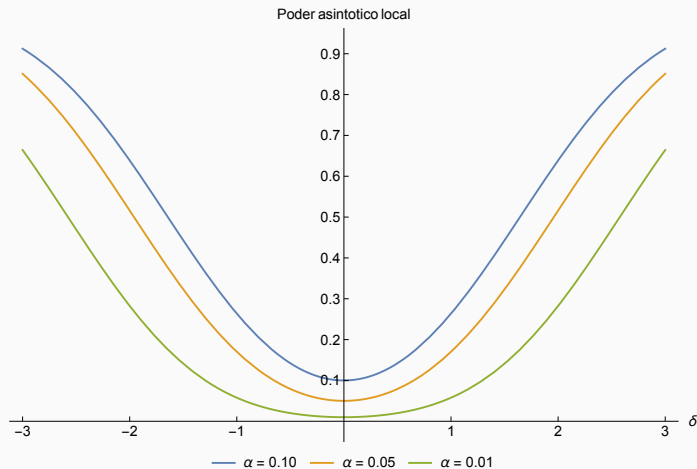
### Demostración

$$t_N \xrightarrow{d_{H_{1,N}}} Z + \delta$$

donde  $Z \sim \text{Normal}(0, 1)$ . Entonces

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \Pr(|t_N| > z_{1-\alpha/2} | H_{1,N}) &= \Pr(|Z + \delta| > c_\alpha) \\ &= 1 - \Pr(|Z + \delta| < c_\alpha) \\ &= 1 - \Pr(-c_\alpha < Z + \delta < c_\alpha) \\ &= 1 - \Pr(-c_\alpha - \delta < Z < c_\alpha - \delta) \\ &= 1 - [\Phi(c_\alpha - \delta) - \Phi(-c_\alpha - \delta)] \\ &= 1 - \Phi(c_\alpha - \delta) + \Phi(-c_\alpha - \delta) \\ &= \Phi(-c_\alpha + \delta) + \Phi(-c_\alpha - \delta). \end{aligned}$$

## Poder asintótico local es decreciente en $v_{jj}$



**Figure 1:** Poder asintótico local t-estadístico.

# Hipótesis alternativa de una cola

- Hipótesis nula

$$H_0 : \beta_j = \beta_{j,0}.$$

- Hipótesis alternativa

$$H_1 : \beta_j > \beta_{j,0}.$$

- Test estadístico: Estadístico t

$$t_N = \frac{\hat{\beta}_j - \beta_{j,0}}{s.e.(\hat{\beta}_j)} \xrightarrow{d}_{H_0} Z \quad \text{donde} \quad Z \sim \text{Normal}(0,1).$$

- Valor crítico  $c_\alpha = z_{1-\alpha}$ :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \Pr(\text{Rechazar } H_0 | H_0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \Pr(t_N > c_\alpha | H_0) = \Pr(Z > c_\alpha) = \alpha \iff c_\alpha = z_{1-\alpha}.$$

Si  $\alpha = 0.05$ , entonces  $c_\alpha = z_{0.95} = 1.645$ .

- Regla de decisión: Si  $t_N > c_\alpha$ , rechazamos  $H_0$ .



# Hipótesis alternativa de una cola

- Hipótesis nula

$$H_0 : \beta_j = \beta_{j,0}.$$

- Hipótesis alternativa

$$H_1 : \beta_j < \beta_{j,0}.$$

- Test estadístico: Estadístico t

$$t_N = \frac{\hat{\beta}_j - \beta_{j,0}}{s.e.(\hat{\beta}_j)} \xrightarrow{d}_{H_0} Z \quad \text{donde} \quad Z \sim \text{Normal}(0,1).$$

- Valor crítico  $c_\alpha = z_{1-\alpha}$ :

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \Pr(\text{Rechazar } H_0 | H_0) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \Pr(-t_N > c_\alpha | H_0) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \Pr(t_N \leq -c_\alpha | H_0) = \alpha \\ &\iff \Pr(Z \leq -c_\alpha) = \alpha \iff c_\alpha = z_{1-\alpha}. \end{aligned}$$

## Hipótesis alternativa de una cola

- Hipótesis nula

$$H_0 : \beta_j = \beta_{j,0}.$$

- Hipótesis alternativa

$$H_1 : \beta_j < \beta_{j,0}.$$

- Test estadístico: Estadístico t

$$t_N = \frac{\hat{\beta}_j - \beta_{j,0}}{s.e.(\hat{\beta}_j)} \xrightarrow{d}_{H_0} Z \quad \text{donde} \quad Z \sim \text{Normal}(0, 1).$$

- Valor crítico  $c_\alpha = z_{1-\alpha}$ . Si  $\alpha = 0.05$ , entonces  $c_\alpha = z_{0.95} = 1.645$ .
- Regla de decisión: Si  $-t_N > c_\alpha$  ó  $t_N < -c_\alpha$ , rechazamos  $H_0$ .

- Para  $H_0 : \beta_j = \beta_{j,0}$  y  $H_1 : \beta_j > \beta_{j,0}$ , tenemos:

$$p_N = \Pr(T > T_N) = \Pr(Z > t_N) = 1 - \Phi(t_N).$$

- Para  $H_0 : \beta_j = \beta_{j,0}$  y  $H_1 : \beta_j < \beta_{j,0}$ , tenemos:

$$p_N = \Pr(T > T_N) = \Pr(-Z > -t_N) = \Pr(Z < t_N) = \Phi(t_N)$$

## Intervalo de confianza

---

## Intervalo de confianza

- $\hat{\beta}_j$  es una estimación puntual de  $\beta_j$ .
- Un concepto más amplio, es un **intervalo de confianza**  $\hat{C}_N = [L_N, U_N]$  con el objetivo que  $(1 - \alpha)\%$  de la veces (**nivel de cobertura o nivel de confianza**) dicho intervalo contenga a  $\beta_j$ :  $\lim_{N \rightarrow \infty} \Pr(\beta_j \in \hat{C}_N) = 1 - \alpha$
- Para un nivel de confianza de  $1 - \alpha$ :

$$\hat{C}_N = [\hat{\beta}_j - c_\alpha \text{s.e.}(\hat{\beta}_j), \hat{\beta}_j + c_\alpha \text{s.e.}(\hat{\beta}_j)]$$

- Para un nivel de confianza de  $1 - \alpha$ :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \Pr \left( -c_\alpha < \frac{\hat{\beta}_j - \beta_j}{s.e.(\hat{\beta}_j)} < c_\alpha \right) = \Pr(-c_\alpha < Z < c_\alpha) = 1 - \alpha$$

donde  $Z \sim \text{Normal}(0, 1)$  y  $c_\alpha = z_{1-\alpha/2}$ . Entonces,

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \Pr \left( -c_\alpha < \frac{\hat{\beta}_j - \beta_j}{s.e.(\hat{\beta}_j)} < c_\alpha \right) = \\ \lim_{N \rightarrow \infty} \Pr \left( \hat{\beta}_j - c_\alpha s.e.(\hat{\beta}_j) < \beta_j < \hat{\beta}_j + c_\alpha s.e.(\hat{\beta}_j) \right) = 1 - \alpha. \end{aligned}$$

Por lo tanto  $\hat{C}_N = [\hat{\beta}_j - c_\alpha s.e.(\hat{\beta}_j), \hat{\beta}_j + c_\alpha s.e.(\hat{\beta}_j)]$

# Estimación MCO: Tamaño de clase y rendimiento académico

## Salida de Stata

```
. reg testscr str el_pct, robust
```

Linear regression

Number of obs = 420  
F( 2, 417) = 223.82  
Prob > F = 0.0000  
R-squared = 0.4264  
Root MSE = 14.464

-----						
		Robust				
testscr		Coef.	Std. Err.	t	P> t	[95% Conf. Interval]
-----+-----						
str		-1.101296	.4328472	-2.54	0.011	-1.95213 -.2504616
el_pct		-.6497768	.0310318	-20.94	0.000	-.710775 -.5887786
_cons		686.0322	8.728224	78.60	0.000	668.8754 703.189
-----						

$$[-1.10 - 1.96 \times .433, -1.10 + 1.96 \times .433] = [-1.950, -.253]$$

Stata utilizar los valores críticos de la t-student

## Una restricción lineal sobre múltiples parámetros

---



# Una restricción lineal sobre múltiples parámetros

- Hipótesis nula

$$H_0 : r' \beta = \theta_0,$$

donde  $r$  es un vector de  $K \times 1$  y  $\theta_0$  es un escalar.

- Hipótesis alternativa

$$H_1 : r' \beta \neq \theta_0.$$

# Una restricción lineal sobre múltiples parámetros

- Hipótesis nula

$$H_0 : r' \beta = \theta_0,$$

donde  $r$  es un vector de  $K \times 1$  y  $\theta_0$  es un escalar.

- Hipótesis alternativa

$$H_1 : r' \beta \neq \theta_0.$$

- Regla de decisión: Un estadístico  $T_N$ , un valor crítico  $c_\alpha$  y una regla de decisión:
  1. No rechazar  $H_0$  si  $T_N \leq c_\alpha$ ,
  2. Rechazar  $H_0$  si  $T_N > c_\alpha$ .

## Una restricción lineal sobre múltiples parámetros

- **Test estadístico:** Estadístico t en valor absoluto

$$|t_N| = \left| \sqrt{N} \frac{r' \hat{\beta} - \theta_0}{\sqrt{r' \hat{V} r}} \right| \xrightarrow{d}_{H_0} |Z| \quad \text{donde } Z \sim \text{Normal}(0, 1).$$

# Una restricción lineal sobre múltiples parámetros

- **Test estadístico:** Estadístico t en valor absoluto

$$|t_N| = \left| \frac{\sqrt{N} r' \hat{\beta} - \theta_0}{\sqrt{r' \hat{V} r}} \right| \xrightarrow{d}_{H_0} |Z| \quad \text{donde } Z \sim \text{Normal}(0, 1).$$

**Demostración:** Utilizando la distribución asintótica normal:

$$\sqrt{N}(\hat{\beta} - \beta) \xrightarrow{d} \text{Normal}(0, V).$$

Utilizando el método delta para  $g(x) = r'x$ ,

$$\begin{aligned} \sqrt{N}(r' \hat{\beta} - r' \beta) &\xrightarrow{d} \text{Normal}(0, r' V r), \\ \implies \sqrt{N}(r' \hat{\beta} - \theta_0) &\xrightarrow{d}_{H_0} \text{Normal}(0, r' V r). \end{aligned}$$

Utilizando el teorema de Slutsky,

$$t_N = \frac{\sqrt{N}(r' \hat{\beta} - \theta_0)}{\sqrt{r' \hat{V} r}} \xrightarrow{d}_{H_0} Z \sim \text{Normal}(0, 1).$$

# Una restricción lineal sobre múltiples parámetros

- **Test estadístico:** Estadístico t en valor absoluto

$$|t_N| = \left| \sqrt{N} \frac{r' \hat{\beta} - \theta_0}{\sqrt{r' \hat{V} r}} \right| \xrightarrow{d}_{H_0} |Z| \quad \text{donde } Z \sim \text{Normal}(0, 1).$$

- **Valor crítico**  $c_\alpha = z_{1-\alpha/2}$ .
- **Regla de decisión:** Si  $|t_N| > z_{1-\alpha/2}$ , rechazamos  $H_0$ .

## Retornos de la educación (NLSY) (Blackburn and Neumark (QJE, 1992))

- ¿Cuál es el efecto de un año adicional de educación sobre los salarios?
- **Datos:** Young Men's Cohort of the National Longitudinal Survey (NLSY). 5,225 individuos fueron encuestados por primera vez en 1966 a la edad de 14-24 años y luego en intervalos de uno o dos años. La muestra utilizada incluye solamente hombres que no son de raza negra, entrevistados en 1980 y que respondieron la pregunta sobre ingreso. Tamaño de la muestra  $N = 935$ .

## Retornos de la educación (NLSY) (Blackburn and Neumark (QJE, 1992))

- ¿Cuál es el efecto de un año adicional de educación sobre los salarios?
- Variables:
  - Log del salario en 1980 (*lwage*).
  - Años de educación (*educ*).
  - IQ test score realizado en 1968 (*IQ*).
  - Años de experiencia laboral (*exper*).
  - Años de tenure (trabajando en el mismo lugar) (*tenure*).
  - Dummies de está casado (*married*), vive en el sur de USA (*south*) y vive en un área urbana (*urban*).

$$\log wage_i = \beta_0 + \beta_1 educ_i + \beta_2 exper_i + \beta_3 tenure_i + \beta_4 IQ_i + x_i' \beta + u_i,$$

donde  $x_i$  incluye regresores adicionales.



# Estimación MCO: Retornos de la educación (NLSY)

## Salida de Stata

Linear regression

Number of obs = 935  
F( 7, 927) = 52.82  
Prob > F = 0.0000  
R-squared = 0.2524  
Root MSE = .36552

-----						
		Coef.	Robust Std. Err.	t	P> t	[95% Conf. Interval]
-----+-----						
educ		.0542004	.0072877	7.44	0.000	.0398982 .0685027
IQ		.0047061	.0009314	5.05	0.000	.0028783 .006534
exper		.0141831	.0032564	4.36	0.000	.0077923 .0205739
tenure		.0118061	.0025521	4.63	0.000	.0067976 .0168146
married		.2082196	.0395385	5.27	0.000	.1306243 .2858149
south		-.0974561	.0273761	-3.56	0.000	-.1511823 -.0437299
urban		.1714902	.0266955	6.42	0.000	.1190995 .2238809
_cons		5.047173	.1158771	43.56	0.000	4.819761 5.274585
-----						

## Retornos de la educación (NLSY)

- Modelo poblacional

$$\log wage_i = \beta_0 + \beta_1 educ_i + \beta_2 exper_i + \beta_3 tenure_i + \beta_4 IQ_i + x_i' \beta + u_i,$$

- Hipótesis nula:** Un año adicional de experiencia y un año adicional de tenure tienen el mismo efecto sobre el salario.

Formalmente:

$$H_0 : \beta_2 = \beta_3 \text{ ó } \beta_2 - \beta_3 = 0.$$

- Hipótesis alternativa:** Un año adicional de experiencia y un año adicional de tenure tienen efectos distintos sobre el salario.

Formalmente:

$$H_1 : \beta_2 \neq \beta_3 \text{ ó } \beta_2 - \beta_3 \neq 0.$$

# Estimación MCO: Retornos de la educación (NLSY)

## Salida de Stata

```
.      matrix list e(V)

symmetric e(V) [8,8]
      educ      IQ      exper      tenure      married      south      urban      _cons
educ      .00005311
IQ      -3.605e-06      8.674e-07
exper      .00001065      -3.073e-07      .0000106
tenure      -1.898e-06      4.350e-08      -2.529e-06      6.513e-06
married      1.046e-06      -1.873e-06      -.00001243      -9.007e-06      .00156329
south      -.00001055      5.755e-06      3.735e-06      7.042e-06      9.887e-06      .00074945
urban      -.00003273      1.646e-06      -9.453e-06      5.571e-06      .00004269      .00011974      .00071265
_cons      -.00043456      -.0000368      -.00020062      -2.857e-06      -.00103976      -.00084779      -.00023681      .0134275
```

- Test estadístico

$$\begin{aligned} t_N &= \sqrt{N} \frac{\hat{\beta}_2 - \hat{\beta}_3}{\sqrt{\hat{V}_{22} + \hat{V}_{33} - 2\hat{V}_{23}}}, \\ &= \frac{\hat{\beta}_2 - \hat{\beta}_3}{\sqrt{\widehat{AVar}(\hat{\beta}_2) + \widehat{AVar}(\hat{\beta}_3) - 2\widehat{AVar}(\hat{\beta}_2, \hat{\beta}_3)}}, \\ &= \frac{.0142 - .0118}{[.0000106 + 6.513 \times 10^{-6} - 2(-2.529 \times 10^{-6})]^{\frac{1}{2}}}, \\ &= 0.505. \end{aligned}$$

- $|t_N| < 1.96$ : No rechazamos  $H_0$ .
- pvalor=.614

Salida de Stata

```
.          test exper-tenure = 0

( 1)  exper - tenure = 0

      F( 1, 927) =    0.25
      Prob > F =    0.6138
```

## Múltiples restricciones lineales

---

- Hipótesis nula

$$H_0 : R'\beta = \theta_0,$$

donde  $R$  es una matriz de  $K \times q$  con  $\text{rango}(R) = q$  y  $\theta_0$  es un vector de  $q \times 1$ .

- Hipótesis alternativa

$$H_1 : R'\beta \neq \theta_0.$$

- Hipótesis nula

$$H_0 : R'\beta = \theta_0,$$

donde  $R$  es una matriz de  $K \times q$  con  $\text{rango}(R) = q$  y  $\theta_0$  es un vector de  $q \times 1$ .

- Hipótesis alternativa

$$H_1 : R'\beta \neq \theta_0.$$

- Regla de decisión: Un estadístico  $T_N$ , un valor crítico  $c_\alpha$  y una regla de decisión:
  1. No rechazar  $H_0$  si  $T_N \leq c_\alpha$ ,
  2. Rechazar  $H_0$  si  $T_N > c_\alpha$ .



- **Test estadístico:** Estadístico de Wald

$$W_N = N(R'\hat{\beta} - \theta_0)'(R'\hat{V}R)^{-1}(R'\hat{\beta} - \theta_0) \xrightarrow{d}_{H_0} \chi_q^2.$$

- **Demostración:** Utilizando la distribución asintótica normal y el método delta para  $g(x) = R'x$ :

$$\begin{aligned}\sqrt{N}(\hat{\beta} - \beta) &\xrightarrow{d} \text{Normal}(0, V), \\ \implies \sqrt{N}(R'\hat{\beta} - R'\beta) &\xrightarrow{d} \text{Normal}(0, R'VR), \\ \implies \sqrt{N}(R'\hat{\beta} - \theta_0) &\xrightarrow{d}_{H_0} \text{Normal}(0, R'VR).\end{aligned}$$

Utilizando el teorema de Slutsky,

$$(R'\hat{V}R)^{-1/2}\sqrt{N}(R'\hat{\beta} - R'\beta) \xrightarrow{d} \text{Normal}(0, I_q).$$

Utilizando el TFC y que  $\sum_{k=1}^q z_k^2 \sim \chi_q^2$  donde  $z_k \sim \text{Normal}(0, 1)$  independientes,

$$W_N = N(R'\hat{\beta} - \theta_0)'(R'\hat{V}R)^{-1}(R'\hat{\beta} - \theta_0) \xrightarrow{d}_{H_0} \chi_q^2.$$

- **Test estadístico:** Estadístico de Wald

$$W_N = N(R'\hat{\beta} - \theta_0)'(R'\hat{V}R)^{-1}(R'\hat{\beta} - \theta_0) \xrightarrow{d}_{H_0} \chi_q^2.$$

- **Valor crítico**  $c_\alpha$ :  $\Pr(\chi_q^2 > c_\alpha) = \alpha$  ó  $\Pr(\chi_q^2 \leq c_\alpha) = 1 - \alpha$ .
- **Regla de decisión:** Si  $W_N > c_\alpha$ , rechazamos  $H_0$ .
- **p-valor:**  $\Pr(\chi_q^2 > W_N) = 1 - G(W_N)$  donde  $G(\cdot)$  es la función de distribución de una  $\chi_q^2$ .

- Test estadístico: Estadístico de Wald

$$W_N = N(R'\hat{\beta} - \theta_0)'(R'\hat{V}R)^{-1}(R'\hat{\beta} - \theta_0) \xrightarrow{d}_{H_0} \chi_q^2.$$

- El contraste con el test estadístico de Wald es consistente.

- **Test estadístico:** Estadístico de Wald

$$W_N = N(R'\hat{\beta} - \theta_0)'(R'\hat{V}R)^{-1}(R'\hat{\beta} - \theta_0) \xrightarrow{d}_{H_0} \chi_q^2.$$

- El contraste con el test estadístico de Wald es **consistente**.

### Demostración

$$\begin{aligned} W_N &= N(R'\hat{\beta} - \theta_0)'(R'\hat{V}R)^{-1}(R'\hat{\beta} - \theta_0), \\ &= N(R'\hat{\beta} - R'\beta)'(R'\hat{V}R)^{-1}(R'\hat{\beta} - R'\beta) \\ &\quad + N(R'\beta - \theta_0)'(R'\hat{V}R)^{-1}(R'\beta - \theta_0) + \\ &\quad + 2N^{1/2}(R'\beta - \theta_0)'(R'\hat{V}R)^{-1/2}N^{1/2}(R'\hat{V}R)^{-1/2}(R'\hat{\beta} - R'\beta), \\ &\xrightarrow{d}_{H_1} \chi_q^2 + \infty. \end{aligned}$$

El segundo término domina ( $N \times$  positivo) al tercer termino ( $N^{1/2} \times$  positivo ó negativo  $\times N(0, I)$ )

# Retornos de la educación (NLSY)

- Modelo poblacional

$$\log wage_i = \beta_0 + \beta_1 educ_i + \beta_2 exper_i + \beta_3 tenure_i + \beta_4 IQ_i + x_i' \beta + u_i,$$

- **Hipótesis nula:** Ni la educación ni IQ tienen efecto sobre el salario.

Formalmente:

$$H_0 : \beta_1 = 0 \text{ y } \beta_4 = 0.$$

- **Hipótesis alternativa:** Educación ó IQ tienen efecto sobre el salario (al menos uno de los dos).

Formalmente:

$$H_1 : \beta_1 \neq 0 \text{ ó } \beta_4 \neq 0.$$

# Estimación MCO: Retornos de la educación (NLSY)

## Salida de Stata

Linear regression

Number of obs = 935  
F( 7, 927) = 52.82  
Prob > F = 0.0000  
R-squared = 0.2524  
Root MSE = .36552

-----						
		Coef.	Robust Std. Err.	t	P> t	[95% Conf. Interval]
-----+-----						
educ		.0542004	.0072877	7.44	0.000	.0398982 .0685027
IQ		.0047061	.0009314	5.05	0.000	.0028783 .006534
exper		.0141831	.0032564	4.36	0.000	.0077923 .0205739
tenure		.0118061	.0025521	4.63	0.000	.0067976 .0168146
married		.2082196	.0395385	5.27	0.000	.1306243 .2858149
south		-.0974561	.0273761	-3.56	0.000	-.1511823 -.0437299
urban		.1714902	.0266955	6.42	0.000	.1190995 .2238809
_cons		5.047173	.1158771	43.56	0.000	4.819761 5.274585
-----						

## Estimación MCO: Retornos de la educación (NLSY)

$$\begin{aligned}\frac{R' \hat{V} R}{N} &= \begin{pmatrix} \widehat{\text{AVar}}(\hat{\beta}_{educ}) & \widehat{\text{AVar}}(\hat{\beta}_{educ}, \hat{\beta}_{IQ}) \\ \widehat{\text{AVar}}(\hat{\beta}_{educ}, \hat{\beta}_{IQ}) & \widehat{\text{AVar}}(\hat{\beta}_{IQ}) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} .00005311 & -3.605 \times 10^{-6} \\ -3.605 \times 10^{-6} & 8.674 \times 10^{-7} \end{pmatrix} \\ \left[ \frac{R' \hat{V} R}{N} \right]^{-1} &= \begin{pmatrix} 26228 & 109005 \\ 109005 & 1605875 \end{pmatrix} \\ W_N &= (.054 \ .0047) \begin{pmatrix} 26228 & 109005 \\ 109005 & 1605875 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} .054 \\ .0047 \end{pmatrix} = 168.22\end{aligned}$$



Salida de Stata

```
.      test educ IQ
```

```
( 1)  educ = 0
```

```
( 2)  IQ = 0
```

```
F( 2, 927) = 84.11
```

```
Prob > F = 0.0000
```

- Límite de la distribución t y la distribución F: Se puede demostrar que

$$t_{N-K} \xrightarrow{d} Z \sim \text{Normal}(0, 1),$$
$$F_{q,N-K} \xrightarrow{d} \chi_q^2/q \implies q F_{q,N-K} \xrightarrow{d} \chi_q^2,$$

donde  $t_{N-K}$  es una variable aleatoria con distribución t de Student con  $N - K$  grados de libertad;  $F_{q,N-K}$  es una variable aleatoria con distribución F de Fischer-Snedecor con  $q$  grados de libertad en el numerador y  $N - K$  grados de libertad en el denominador.

## Resultados reportados por Stata

- Stata reporta en la salida de reg el p-valor de una t de Student para el estadístico  $t$ ; y reporta en la salida de test un estadístico  $F_N = W_N/q$  con el p-valor de una F de Fischer-Snedecor. Estos ajustes son irrelevantes en muestras grandes.

## Relación entre el estadístico F y el estadístico de Wald

- Estadístico F:

$$F_N = \frac{(SSR_N^r - SSR_N^u)/q}{SSR_N^u/N}$$

donde  $SSR_N^u$  es la suma de los residuos al cuadrado del modelo no restringido y  $SSR_N^r$  es la suma de los residuos al cuadrado del modelo restringido.

- Únicamente bajo homoscedastidad se cumple que

$$F_N = W_N/q.$$

- **Hipótesis nula:** El modelo no tiene poder explicativo.

$$H_0 : \beta_1 = \dots = \beta_K = 0,$$

### Hipótesis alternativa

$H_1$  : Al menos un coeficiente es distinto de cero.

Test de Wald con  $R = I_K$  y  $\theta_0$  un vector de ceros de  $K \times 1$ .

- Es un test irrelevante con los tamaños de muestra actuales.

# Estimación MCO: Retornos de la educación (NLSY)

## Salida de Stata

Linear regression

Number of obs = 935  
F( 7, 927) = 52.82  
Prob > F = 0.0000  
R-squared = 0.2524  
Root MSE = .36552

-----						
		Coef.	Robust Std. Err.	t	P> t	[95% Conf. Interval]
-----+-----						
educ		.0542004	.0072877	7.44	0.000	.0398982 .0685027
IQ		.0047061	.0009314	5.05	0.000	.0028783 .006534
exper		.0141831	.0032564	4.36	0.000	.0077923 .0205739
tenure		.0118061	.0025521	4.63	0.000	.0067976 .0168146
married		.2082196	.0395385	5.27	0.000	.1306243 .2858149
south		-.0974561	.0273761	-3.56	0.000	-.1511823 -.0437299
urban		.1714902	.0266955	6.42	0.000	.1190995 .2238809
_cons		5.047173	.1158771	43.56	0.000	4.819761 5.274585
-----						

## Restricciones no lineales

---

- Hipótesis nula

$$H_0 : r(\beta) = \theta_0,$$

donde  $r$  es un vector de  $q$  funciones reales  $r_j : \mathbb{R}^K \rightarrow \mathbb{R}$  y  $\theta_0$  es un vector de  $q \times 1$ .

- Hipótesis alternativa

$$H_1 : r(\beta) \neq \theta_0.$$



- Hipótesis nula

$$H_0 : r(\beta) = \theta_0,$$

donde  $r$  es un vector de  $q$  funciones reales  $r_j : \mathbb{R}^K \rightarrow \mathbb{R}$  y  $\theta_0$  es un vector de  $q \times 1$ .

- Hipótesis alternativa

$$H_1 : r(\beta) \neq \theta_0.$$

- Regla de decisión: Un estadístico  $T_N$ , un valor crítico  $c_\alpha$  y una regla de decisión:
  - No rechazar  $H_0$  si  $T_N \leq c_\alpha$ ,
  - Rechazar  $H_0$  si  $T_N > c_\alpha$ .

- **Test estadístico:** Estadístico de Wald

$$W_N = N (r(\hat{\beta}) - \theta_0)' (\hat{R}' \hat{V} \hat{R})^{-1} (r(\hat{\beta}) - \theta_0) \xrightarrow{d}_{H_0} \chi_q^2,$$

donde  $\hat{R} = \frac{\partial}{\partial \beta} r(\hat{\beta})'$ .

- **Test estadístico:** Estadístico de Wald

$$W_N = N (r(\hat{\beta}) - \theta_0)' (\hat{R}' \hat{V} \hat{R})^{-1} (r(\hat{\beta}) - \theta_0) \xrightarrow{d}_{H_0} \chi_q^2,$$

donde  $\hat{R} = \frac{\partial}{\partial \beta} r(\hat{\beta})'$ .

**Demostración:** Utilizando la distribución asintótica normal y el método delta para  $r(x)$ :

$$\begin{aligned} \sqrt{N}(\hat{\beta} - \beta) &\xrightarrow{d} \text{Normal}(0, V), \\ \implies \sqrt{N}(r(\hat{\beta}) - r(\beta)) &\xrightarrow{d} \text{Normal}(0, R' V R), \\ \implies \sqrt{N}(r(\hat{\beta}) - \theta_0) &\xrightarrow{d}_{H_0} \text{Normal}(0, R' V R). \end{aligned}$$

Luego seguimos los mismos pasos que con restricciones lineales.

- **Test estadístico:** Estadístico de Wald

$$W_N = N (r(\hat{\beta}) - \theta_0)' (\hat{R}' \hat{V} \hat{R})^{-1} (r(\hat{\beta}) - \theta_0) \xrightarrow{d}_{H_0} \chi_q^2,$$

donde  $\hat{R} = \frac{\partial}{\partial \beta} r(\hat{\beta})'$ .

- **Valor crítico**  $c_\alpha$ :  $\Pr(\chi_q^2 > c_\alpha) = \alpha$  ó  $\Pr(\chi_q^2 \leq c_\alpha) = 1 - \alpha$ .
- **Regla de decisión:** Si  $W_N > c_\alpha$ , rechazamos  $H_0$ .

## Restricciones no lineales

- El test t y el test de Wald funcionan bien para hipótesis lineales pero tienen problemas para hipótesis no lineales

Ambos tests no son invariantes a cómo formulamos  $H_0$

Ejemplo: Podemos formular  $H_0$  como  $\beta_1 = 1$ ;  $(\beta_1 - 1)^2 = 0$ ;  $(\beta_1 - 1)^3 = 0$ , y obtener conclusiones distintas.

## Efectos de la contaminación en los precios de las viviendas (Harrison and Rubinfeld (JEEM, 1978))

- ¿Cuál es el efecto de una mayor concentración óxido nitroso en el aire en el precio de las viviendas?
- Modelo

$$\log(\text{price}) = \beta_0 + \beta_{\text{nox}} \log(\text{nox}) + \beta_{\text{rooms}} \text{rooms} + \beta_{\text{stratio}} \text{stratio} + u_i,$$

donde *price* es el precio de la vivienda, *nox* es la cantidad de óxido nitroso en el aire (contaminación), *rooms* es el número de habitaciones y *stratio* es el ratio estudiante/profesor en la comuna.

# Estimación MCO: Efectos de la contaminación en los precios de las viviendas

## Salida de Stata

```
. reg lprice lnox rooms stratio, robust
```

Linear regression

Number of obs = 506  
F( 3, 502) = 143.33  
Prob > F = 0.0000  
R-squared = 0.5760  
Root MSE = .26729

-----						
		Robust				
lprice		Coef.	Std. Err.	t	P> t	[95% Conf. Interval]
-----+-----						
lnox		-.6453292	.0601569	-10.73	0.000	-.7635195 -.5271389
rooms		.256727	.0253943	10.11	0.000	.2068348 .3066192
stratio		-.0508733	.0047898	-10.62	0.000	-.060284 -.0414627
_cons		10.35946	.2627574	39.43	0.000	9.843218 10.8757
-----						

## Cambios grandes con logaritmo

- Cuando los efectos marginales son grandes,  $\frac{\partial \log y}{\partial x}$  puede que no sea una buena aproximación a  $\frac{\frac{\Delta y}{y}}{\Delta x}$ . Podemos calcular el cambio exacto.



## Cambios grandes con logaritmo

- Cuando los efectos marginales son grandes,  $\frac{\partial \log y}{\partial x}$  puede que no sea una buena aproximación a  $\frac{\frac{\Delta y}{y}}{\Delta x}$ . Podemos calcular el cambio exacto.
- Dado el modelo  $\log y = \beta_0 + \beta_1 x + u$ , donde  $u \perp x$ . Podemos escribir

$$\mathbb{E}(y|x) = \exp(\beta_0 + \beta_1 x) \mathbb{E}(\exp(u)),$$

de donde

$$\begin{aligned} \frac{\mathbb{E}(y|x = \bar{x} + 1) - \mathbb{E}(y|x = \bar{x})}{\mathbb{E}(y|x = \bar{x})} \times 100 &= \left( \frac{\exp(\beta_0 + \beta_1(\bar{x} + 1))}{\exp(\beta_0 + \beta_1(\bar{x}))} - 1 \right) \times 100 \\ &= (\exp(\beta_1) - 1) \times 100. \end{aligned}$$

# Efectos de la contaminación en los precios de las viviendas (Harrison and Rubinfeld (JEEM, 1978))

- Hipótesis nula

$$H_0 : (\exp(\beta_{rooms}) - 1) \times 100 = 0.$$

- Hipótesis alternativa

$$H_1 : (\exp(\beta_{rooms}) - 1) \times 100 \neq 0.$$

- $r(\hat{\beta}) = (\exp(\hat{\beta}_{rooms}) - 1) \times 100 = 29.3$
- $\hat{R} = \exp(\hat{\beta}_{rooms}) \times 100$
- $\frac{1}{N} \hat{R}' \hat{V} \hat{R} = \exp(\hat{\beta}_{rooms}) 100 \times \widehat{AVar}(\hat{\beta}_{rooms}) \times \exp(\hat{\beta}_{rooms}) 100 = 10.8$
- $W_N = N \frac{r(\hat{\beta})^2}{\hat{R}' \hat{V} \hat{R}} = \frac{29.3^2}{10.8} = 79.5$

# Estimación MCO: Efectos de la contaminación en los precios de las viviendas

## Salida de Stata

```
. nlcom (exp(_b[rooms]) -1)*100
```

```
_nl_1: (exp(_b[rooms]) -1)*100
```

-----						
lprice	Coef.	Std. Err.	t	P> t	[95% Conf. Interval]	
-----+-----						
_nl_1	29.26922	3.282702	8.92	0.000	22.81969	35.71875
-----						

```
. testnl (exp(_b[rooms]) -1)*100 = 0
```

```
(1) (exp(_b[rooms]) -1)*100 = 0
```

```
F(1, 502) =      79.50  
Prob > F =      0.0000
```