1. Conjuntos, elementos pertenencia: $S, x, x \in S$

2. Descripción de conjuntos:

   (a) Numeración: $S = \{2, 4, 6\}$

   (b) Regla de membresía: $S = \{x \in \mathbb{N}, (x \text{ es par}(x \leq 6)\}$

   $$S = \{x \in \Omega : P(x)\}$$

   donde Ω = conj. universal; ϕ = conj. vacío

3. Algunos conj numéricos:

   (a) $\mathbb{N} \equiv \{1, 2, \ldots\}$

   (b) $\mathbb{Z} \equiv \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$

   (c) $\mathbb{Q} \equiv \left\{\frac{r}{s} : (r, s \in Z)(s \neq 0)\right\}$

   (d) $\mathbb{R} \equiv$ números reales.

4. $S = T$ sii $\forall s \in S \to s \in T$ y $\forall t \in T \to t \in S$

5. $S \subset T$ sii $\forall s \in S \Rightarrow s \in T$ Entonces: $S = T$ sii $S \subset T$ y $T \subset S$. Note $\phi \subset S \forall S \subset \Omega$

6. Una familia de conjuntos es un conjunto cuyos elementos son conjuntos:

   $$A \equiv \{A_i \subset \Omega : i \in I\}$$

   $I \equiv$ conj. de índices

   Un ejemplo es el conjunto potencia de S

   $$2^S \equiv \{S_i' \subset \Omega : S_i' \subset S\}$$

7. $\cup_{i \in I} S_i = \{s \in \Omega : (\exists i \in I)(s \in S_i)\}$

   $\cap_{i \in I} S_i = \{s \in \Omega : (\forall i \in I)(s \in S_i)\}$

8. Una familia de conjuntos $A \equiv \{A_i \subset \Omega : i \in I\}$. Luego los elementos de A son di:

- muto amente exclusivos si son disjuntos de a pares: $A_i \cap A_j = \emptyset \ (i \neq j)$

9. Una partición de S es una familia de conjuntos disjuntos con unión igual a S:

$$\{S_i : i \in I\} \text{ tal que } \forall i \neq j \ S_i \cap S_j = \emptyset \text{ y } U_{i \in I} S_i = S$$

- $S^0 = \{x \in \Omega : x \notin S\}$ y $S - T = \{x \in \Omega : (x \in S)(x \notin T)\}$. Note: $S^0 = \Omega - S$

1 Relacionas y Productos cartesiano:

$S = \{s_1, s_2\} = \{s_2, s_1\} \ \Rightarrow$ orden no 'cuenta'. Por el contrario $(a, b) = (c, d)$ sii $a = c$ y $b = d$. Llame a (s, t) par ordencdo y a s el 'primes' lamento de (s, t). Dados S y T:

$$S \times T \equiv \{(s, t) : s \in S, \ t \in T\}$$

text not clear una familia $(S_i)_{i \in I}$:

$$\underset{i \in I}{X} S_i \equiv \{(s_1, \ldots, s_I\} : \ s_i \in S_i$$

(a) Dados S y T una relación ente S y T un subconjunto de $S \times T$:

$$f \subset S \times T$$

y, $s \in S$ si relacione a $t \in T$ sii $(s, t) \in f$. Intuitivamente f asocia algunos elementos & S a uno es mas elementos de T. Llame si t la imagen de s (par so puesto cuando $(s, t) \in f$). El conjunto imagen de $s \in S$ es

$$\text{rng}(s) = \{t \in T : (s, t) \in f\}$$

text not clear $A \subset S$, luego:

$$\mathrm{rng}(A) : \{t \in T : (\exists s \in A)(s,t) \in f\} = \bigcup_{s\in A} \mathrm{rng}(s)$$

Dado f defina

$$f^{-1} \equiv \{(t,s) : (s,t) \in f\} \text{ (inversa de } f)$$

a imagen inversa de $B \subset T$ es

$$f^{-1}(B) = \{s \in S : (\exists t \in B)(s,t) \in f\} = \bigcup_{t\in B} f^{-1}(t)$$

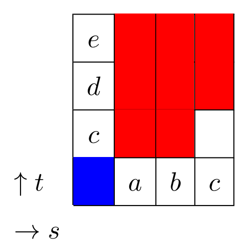
Así

$$\mathrm{dom}\, f \equiv \{s \in S : (\exists\ t \in T)((s,t) \in f)\}$$

$$\mathrm{rng}\, f \equiv \{t \in T : (\exists\ s \in S)\,((s,t) \in f)\}$$

Ejemplo: $S = \{a,b,c\}$ y $T = \{c,d,e\}$ Luego $S \times T$ es 'representado' por el conjunto de 'caldas' del arreglo rectangular debajo:

e	(a,e)	(b,c)	(c,e)
d	(a,d)	(b,d)	(c,d)
c	(a,c)	(b,c)	(a,c)
$t\uparrow$ $s\rightarrow$	 a	 b	 c



Lea f = precede en el diccionario $\Rightarrow (s,t) \in f \Leftrightarrow s$ orene primero en el alfabeto que t. En este caso:

- $\mathrm{dom}\, f = \{a,b,c\}$
- $\mathrm{rng}\, f = \{c,d,e\}$
- $\mathrm{rng}(a) = \{c,d,e\},\ \mathrm{rng}(b) = \{c,d,e\}$ y $\mathrm{rng}(c) = \{d,e\}$
- Sea $A = \{b,c\}$. Luego $\mathrm{rng}(A) = \{c,d,e\} = \mathrm{rng}(b) \cup \mathrm{rng}(c)$.

- $f^{-1}(c) = \{a, b\}, \ f^{-1}(d) = f^{-1}(e) = \{a, b, c\}$
- Sea $B = \{c, d\}$. Luego $f^{-1}(B) = \{a, b, c\}$

Si $S = T$ decimos que f es una relación en S. Sea f una relación en S. Luego:

(i) reflexión si $\forall s \in S, \ (s, s) \in f$

(ii) simétrica si cuando el par $(x_1, x_2) \in f$ luego $(x_2, x_1) \in f$

(iii) antisimétrica si $\forall x_1, x_2 \in S, ((x_1, x_2) \in f \text{ y } (x_2, x_1) \in f) \Rightarrow x_1 = x_2$

(iv) transition si $\forall x_1, x_2, x_3 \in S, \ (x_1, x_2) \in f \text{ y } (x_2, x_1) \in f \Rightarrow (x_1, x_3) \in f$

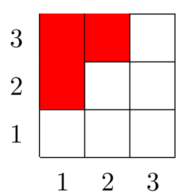
(v) completa si $(x_1, x_2) \in f \ \circ \ (x_2, x_1) \in f$

<u>Ejemplos:</u> Sea $S = \{1, 2, 3\}$

(a) $f \equiv < \quad \Rightarrow (x, y) \in f$ si $x < y$

(b) $f \equiv \geq \quad \Rightarrow (x, y) \in f$ sii $x \geq y$

(c) $f \equiv =$



<u>Propiedades</u>

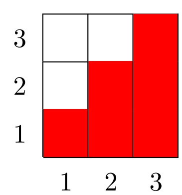
(i) No es reflexión y a que un meno no puede ser menor a si mismo.

(ii) No es simétrica y a que un meno no puede ser mayor y menor que otro

(iii) No es antisimétrica

(iv) Es transition y a $(1, 2) \in f, (2, 3) \in f$ y $(1, 3) \in f$.

(v) No es complete y a que par $j(2, 2) \notin f$.



<u>Propiedades</u>

(i) Es reflexión

(ii) Ne es simétrica ya que par ejemplo $(2, 1) \in f$ pero $(1, 2) \notin f$

(iii) Es completa ya que $(i, i) \in f \ \forall i \in S$. Luego si $(i, j) \notin f$, Fiene que $(j, i) \in f$

FUNCIONES:

Sean S y T dos conjuntos no vacíos. Una función de S es 1

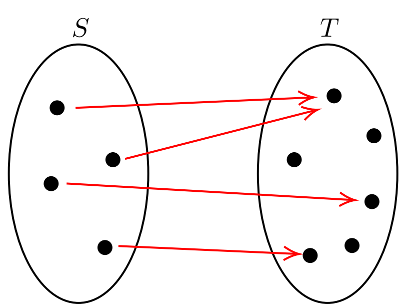
$$f : S \to T$$

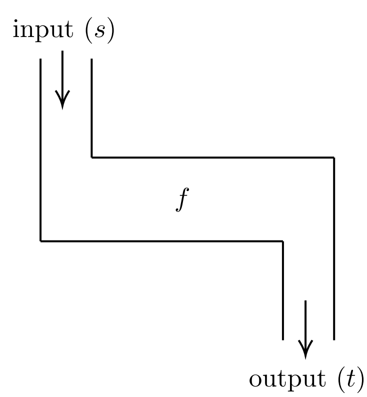
Es una relación de valor único:

$$(s,t) \in f \text{ y } (s,t') \in f \quad \Rightarrow \quad t = t'$$

En lugar de escribir $(s,t) \in f$ escribimos $t = f(s)$ y decimos que t es la imagen de S.

$S \equiv$ dominio, $T \equiv$ conjunto de llegada. El conjunto de todas las funciones con dominio S y conj. de llegada T se denote con T^S.



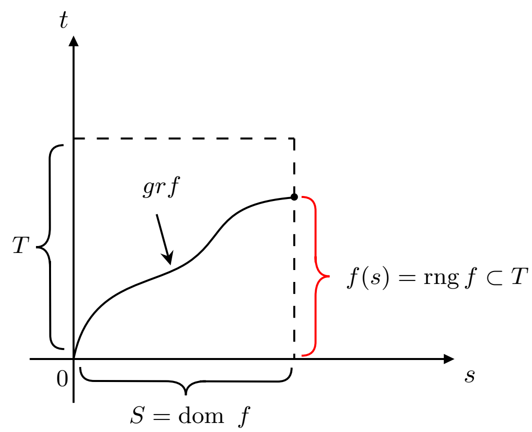


- Sea $A \subset S$, luego la imagen de A bajo f es

$$f(A) = \{t \in T : (\exists\ s \in A)(s,t) \in f\} = \{f(a) :\ a \in A\} = \cup_{s \in A} f(s)$$

$$\text{rng}\, f = \{t \in T : (\exists\ s \in S)(s,t) \in f\} = f(s) \subset G$$

$$\begin{aligned} grf &= \{(s,t) : (s \in S)(t \in T)(s,t) \in f\} \\ &= \{(s,t) : (s \in S)(t \in f(s))\} \end{aligned}$$



- Sea $B \subset T$, luego la imagen inversa de B bajo f es

$$f^{-1}(B) = \{s \in S : (t \in B)(t = f(s))\} = \{s \in S : f(s) = B\}$$

$B = \{b\}$ escribimos:

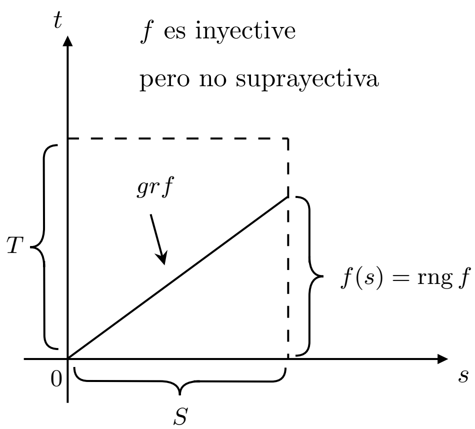
$$f^{-1}(b) \equiv f^{-1}(\{b\})$$

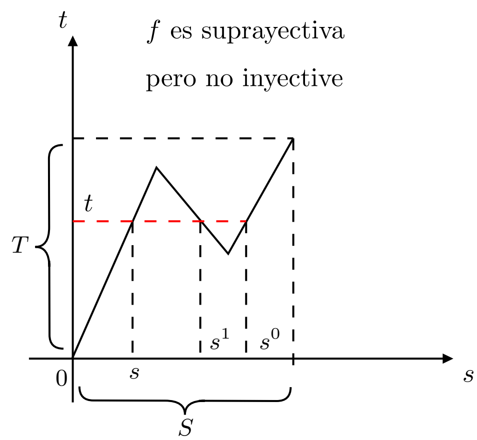
f es inyectiva si no repite las imágenes; en otras palabras si $\forall t \in T$, existe como máximo ún ni elemento de S tal que $f(s) = t$. Formalmente; las tres cara eterizaciones son nítidas.

1. f es inyectiva sii $\forall\ x_1, x_2 \in S$ tal que $f(x_1) = f(x_2) \ \Rightarrow\ x_1 = x_2$
2. f es inyectiva sii $\forall x_1, x_2 \in S,\ x_1 \neq x_2 \ \Rightarrow\ f(x_1) \neq f(x_2)$
3. $\forall t \in T$ se tiene que $f^{-1}(t)$ es on conjunto unitario o vacío.

f es suprayectiva si $f(s) = \text{rng}\, f = T$. Alternativamente f suprayectiva si $\forall\ t \in T,\ f^{-1}(t) \neq \phi$.

<u>Ejemplos</u>



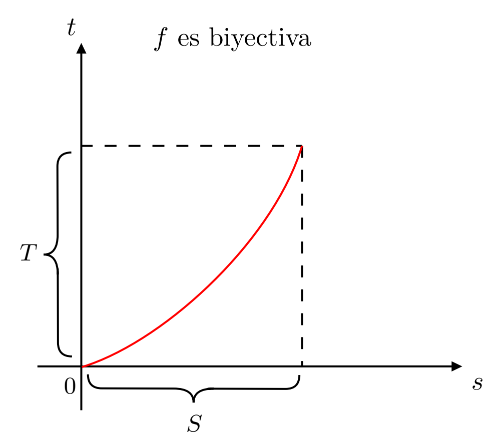


Si f es suprayectiva e inyectiva, decimos que f es biyectiva:

$$f^{-1}(t) = \{S\} \quad \forall t \in T$$

- $\forall\ t \in T,\ \exists!$ (existe exactamente) un elemento en S.

<u>DEF:</u> Sea $f : S \to T$. f es biyectiva sii $(\forall\ t \in T)(\exists!\ s \in S)$ tal que $t = f(s)$



Si f es biyectiva $\exists!$ función S inversa:

$$f^{-1} : T \to S$$

<u>OBSV:</u> Si $\operatorname{rng} f \neq T$, defines

$$X \equiv \operatorname{rng} f$$

y luego si f es inyectiva, g es biyectiva

$$g : S \to X$$

y por lo tanto $\exists$ una función inversa

$$g^{-1} : X \to S$$

Una correspondencia de S en T

$$F : S \rightrightarrows T$$

Es una función que asigna a todo $s \in S$ un subconjunto de T

$$f : S \to 2^T$$

El dominio efectivo de F es un conjunto $X \subset S$ tal que $\forall x \in X,\ F(x) \neq \phi$. Para toda correspondencia F, $\exists$ relación $R_F \subset S \times T$ tal que $(s,t) \in R_F$ sii $t \in F(S)$. Mentar similar, a toda relación $R \subset S \times T$ podemos a saciar una correspondencia $F_R : S \rightrightarrows T$ tal que $F_R(s) = \{t \in T : (s,t) \in R\}$

$\mathbb{R}^n$: Linear y planos: El conjunto de todos los números reales es

$$\mathbb{R} = \{x| - \infty < x < +\infty\}$$

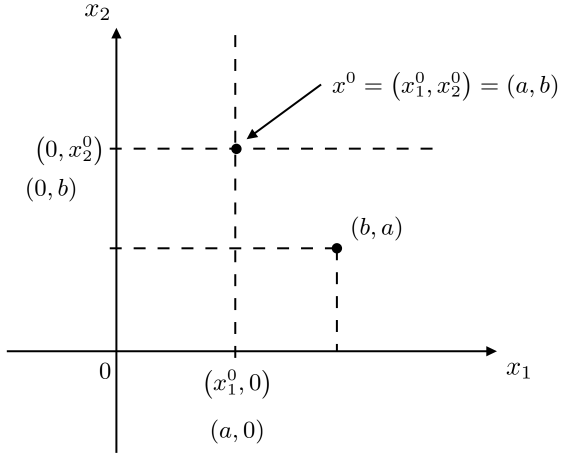
balizando n veces el producto cartesianas de $\mathbb{R}$ consigo mismo:

$$\underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}}_{n \text{ `veces'}} \equiv \mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_i \in \mathbb{R},\ \forall i = 1, \ldots, n\}$$

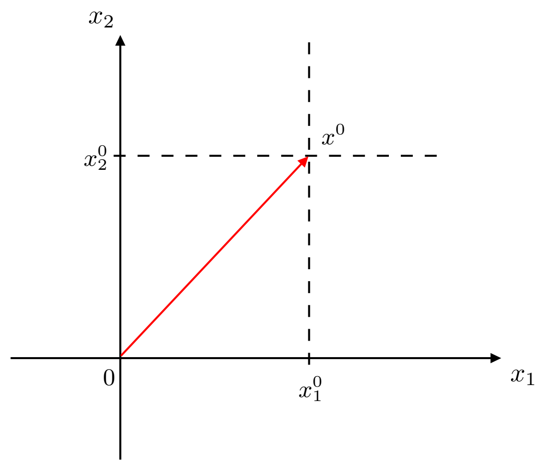
Todo entonces que $x \in \mathbb{R}^n$ es una lista ordenada de números y el numero x_i es la i-ésima componente le x.

insidere $\mathbb{R}^2$. Luego $x^0 = (x_1^0, x_2^0)$ se representa como.

(a) Punto (ORDENAROS)



(b) Vector



<u>Vectors:</u> Recuerde que 2 vectores x y z son iguale sii

$$(x_1, \ldots, x_n) = (z_1, \ldots, z_n); \quad \vec{o} = (0, 0, \ldots, 0)$$

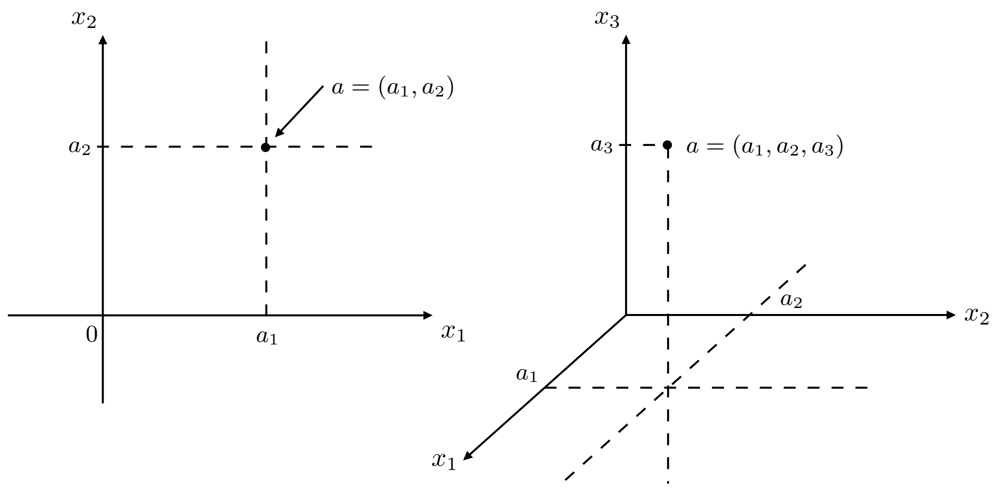
Operaciones vectoriales:

(i) $x + z = (x_1 + z_1, \ldots, x_n + z_n) = z + x$

(ii) $x + \vec{o} = x$

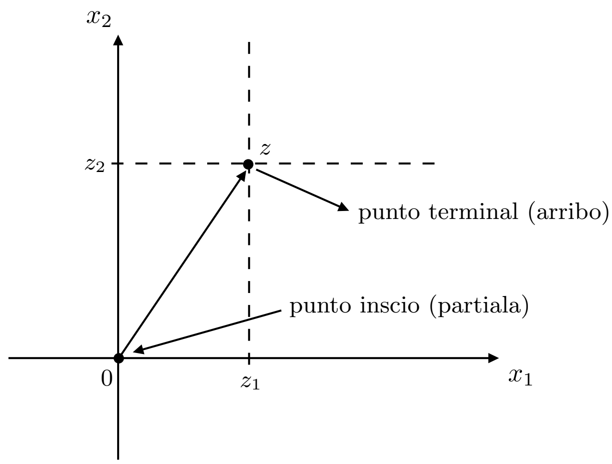
(iii) $k(x_1, \ldots, x_n) = kx = (kx_1, \ldots, kx_n) \quad \forall k \in \mathbb{R}$

La geometría vectorial: Sea $a \in \mathbb{R}^n$. Luego podamos interpretarlos como 'puntos' en $\mathbb{R}^n$.



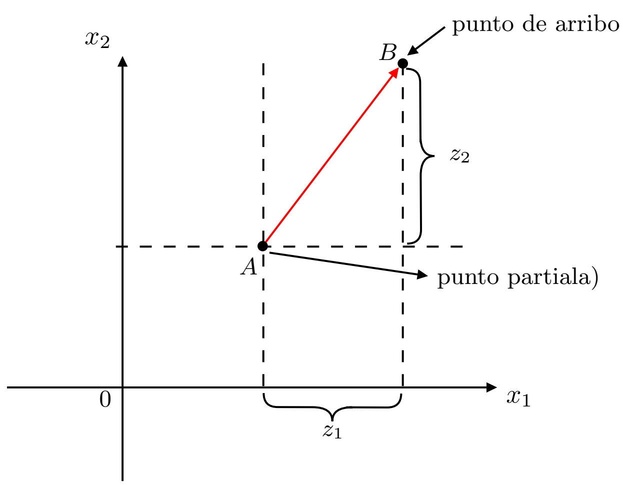
Pero las operaciones vectoriales cuando consideraran a un vector como un punto no hacen mucho sentido. Conviene entroncar interpretar a los vectores como desplazamiento.

Mas precisamente interpretamos al vector $z \in \mathbb{R}^n$ mediante un segmento lineal dirigido desde el origen $\vec{o}$ al punto en cuestión. Tales vectores se denominar vectores de posición:



y pensamos en el punto $\vec{o}$ como punto de partida y al punto z como punto terminal o ambo. De esta manera $\mathbb{R}^2$ como el conj. de todos los vectores posicionales uno por cada $x \in \mathbb{R}^2 = n\mathbb{R}^n$.

Ahora bien podemos generalizar esta idea y permitir que el punto de partida sea diferente al origen:



entonces, el segmento lineal corresponde en este caso a un desplazan lento de $A \subset \mathbb{R}^2$ a $B \in \mathbb{R}^2$. es un 'comando' compuesto de dos órdenes;

01: Desplazace z_1 unidades hacia la 'derecha' ('iza') de A

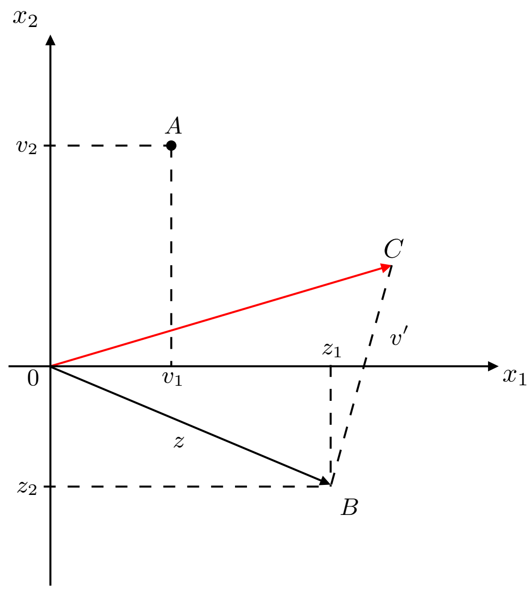
02: Desplazace z_2 unidades hacia 'arriba' ('abajo') de A para arriba a B.

En goal, dados 2 puntos A y B en $\mathbb{R}^2$, el vector desplazamiento desde A or B es

$$\vec{AB} = (b_1 - a_1, \ldots, b_n - a_n)$$

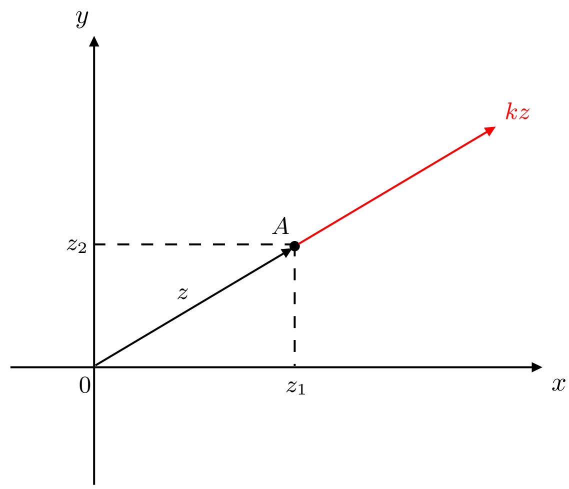
donde $B = (b_1, \ldots, b_n)$ y $A = (a_1, \ldots, a_n)$.

Podemos usar vectores para representar linear en $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \ldots, \mathbb{R}^n$. Para elles conviene representar geométricamente las operaciones vectoriales.



$v + z$ se obtiene 'aplicando' a B(a A) el vector v (el vector z), Note que llamamos al desplazamiento paralelo de v, v'

<u>Produoro ESCALAR:</u> $1 < k$



$KZ = (kz_1, kz_2)$ observe que el segmento lineal que representa a z tiene pendiente igual

$$\frac{z_2 - 0}{z_1 - 0} = \frac{z_2}{z_1} = \frac{\Delta Y}{\Delta X}$$

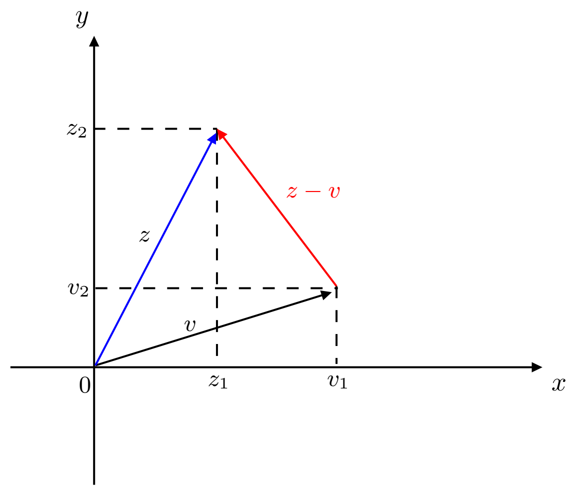
De manera similar el segmento lineal que representa a $z' = (kz_1, kz_2)$ tiene perdiente igual a $\dfrac{\Delta Y}{\Delta X} = \dfrac{z_2}{z_1}$

KZ es una 'prolongación' de z

Observe que $-v = (-1, v)$, luego:

$$z - v = z + (-v)$$

<u>DIFERENCIA DE VECTORES:</u> $z - v$



Luego $(z - v)$ es el vector tal que al sumarre a v resulta en z. De allí la representación text unclear.

Linear: Ecuaciones vectoriales y paramétricas

Una curva en $\mathbb{R}^2$ (el gráfico de una función) se puede representas como el conjunto es puntos (x, y) como función de un parámetro t:

$$x = f(t)$$

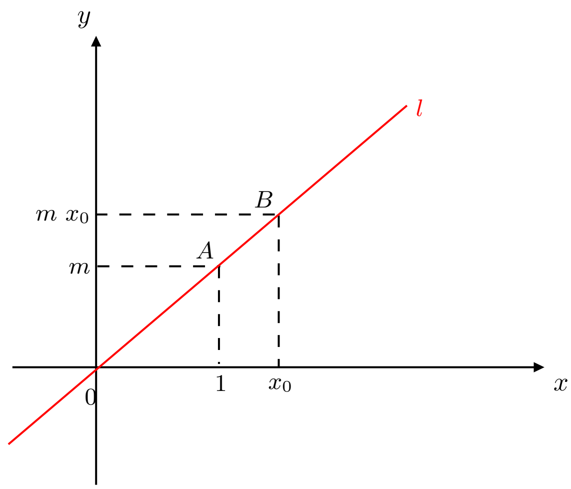
$$y = g(t)$$

Podemos pensar en una función

$$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$$

definida par $\begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \end{pmatrix}$.

Concretamente, recuerde que el gráfico de $y = mx + c$ es una linea recta:



Como podemos representas $A \in l$ mediante vectores? Simplemente como

$$v \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$$

que $v \equiv v - 0$, y el punto B lo podemos obtener a través la multiplicación scaler de v para $t > 1$

$$t \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ mx_0 \end{pmatrix} = x_0 \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad t = x_0$$

Como x_0 es arbitrario la ecuación de l se puede representar: vectorialmente como

$$x = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} = tv$$

iote que $x(t) = t,\ y(t) = tm$. Denote entonces

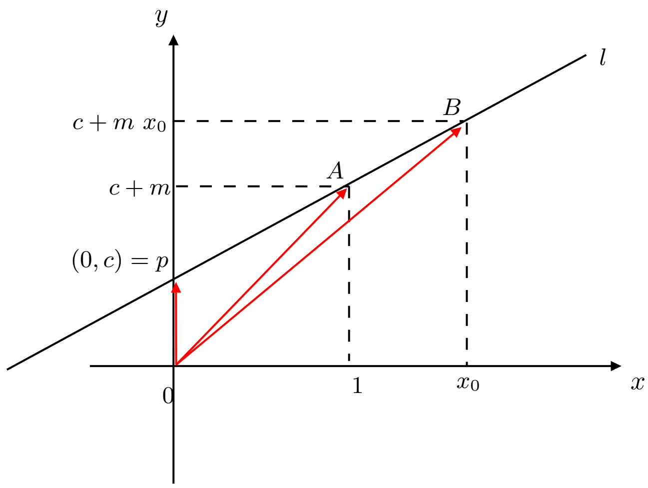
$$x = tv$$

onde $x(t) = (x(t), y(t))$

y definimos

$$l \equiv \left\{x \in \mathbb{R}^2 : x = tv \text{ para } -\infty < t < \infty\right\}$$

Suponga ahora que $c > 0$:



Llame v al vector que sumado al vector $(0, c)$ resulta en A:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ c+m \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \quad v &= \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} \end{aligned}$$

y el punto $A \in l$ se puede obtener sumando:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix}}_{p} + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}}_{v}$$

El punto B le podemos obtener

$$\begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix}}_{p} + \begin{pmatrix} x_0 \\ mx_0 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix}}_{p} + \underbrace{x_0}_{x_0 v} \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$$

Como x_0 os arbitrario tenemos:

$$l \equiv \{x \in \mathbb{R}^2 : \ x = P + tv \text{ para } -\infty < t < \infty\} \quad \text{(ECUACIÓN VECTORIAL)}$$

Note que $v = (1, m)$ es un vector 'paralelo' a l que se llama vector de dirección. y:

$$\left.\begin{aligned} x &= p_0 + tv_0 \\ y &= p_1 + tv_1 \end{aligned}\right\} \text{Ecuaciones perimétricas}$$

y $t \equiv$ parámetro. En general:

<u>DEFINICIÓN:</u> La forma vectorial de la ecuación de una linea $l \in \mathbb{R}$ es:

$$x = p + tv$$

Londe $p =$ punto sobre la linea y $v \neq 0$, es el vector de dirección

<u>Ejemplo:</u> Suponga que $y = 4x - 5$. Luego:

$$\begin{aligned} P &= \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix} \\ v &= \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

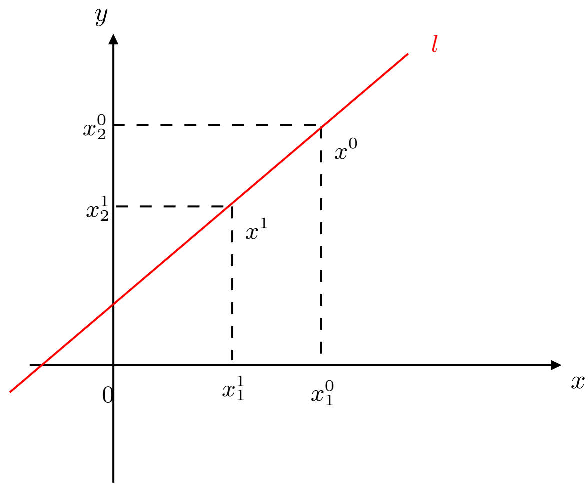
Entonces:

$$x = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ para } -\infty < t < \infty.$$

Si $x = 2 \;\Rightarrow\; y = 8 - 5 = 3 \;\Rightarrow\; x = (2,3)$ y usando $t = 2$ obtenemos el mis no resultado. Observe que también otras parametrizaciones; Por ejemplo:

$$x = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix}$$

entonces $s = q$ corresponde a $(2,3)$.



Luego $v = x^0 - x^1$ y partiendo de x^1:

$$x = x^1 + t(x^0 + x^1)$$

$$x = tx^0 + (1-t)x^1$$

la linea que contiene x^0 y x^1 es (generalizando a $\mathbb{R}^n$):

$$l = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : x = tx^0 + (1-t)x^1,\ -\infty < t < \infty \right\}$$

note que el segmento lineal entra x^0 y x^1 es:

$$\left[x^0, x^1\right] = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : x = tx^0 + (1-t)x^1,\ 0 \leq t \leq 1 \right\}$$

A point $x = tx^0 + (1-t)x^1$ se le llama combinación convexa de x^0 y x^1. El conjunto de todas combinaciones convexa de $[x^0, x^1] = l[x_0, x_1]$

Dador dos puntos $x^0, x^1 \in \mathbb{R}^n$, a cualquier punto $x \in \mathbb{R}^n$ dedo por

$$x = tx^0 + (1-t)x^1$$

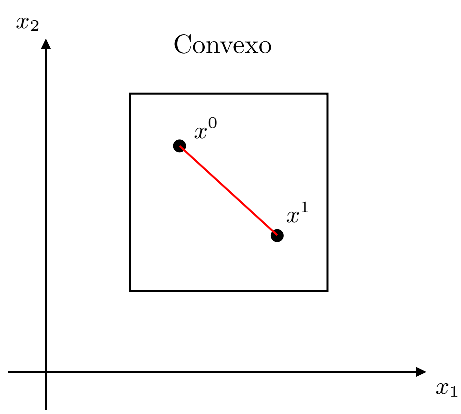
Para $0 \leq t \leq 1$ le llamamos combinación convexa. Recuerde def. de intérnale.

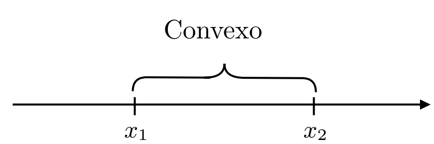
<u>DEF:</u> $S \subset \mathbb{R}^n$ es convexo si para todos los pares de puntos $x^0, x^1 \in S$, el segmento lineal $l[x_0, x_1] \subset S$. En otras palabras, S es convexo si contiene todas las combinaciones convexas de todas los paras de sus elementos; S es convexo sii $\forall$ x^0 y x^1

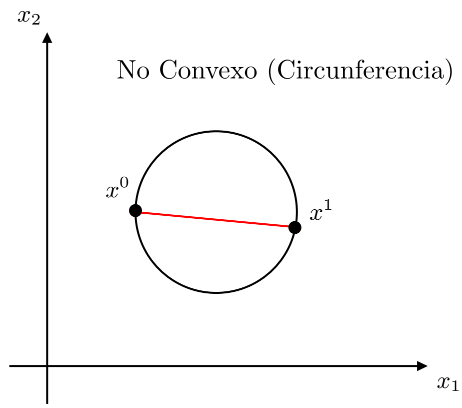
$$x = tx^0 + (1-t)x^1 \in S$$

$0 \leq t \leq 1$

Ejemplos:







Proposición: Sea $(S_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una colección de conjuntos convexos. Luego:

$$\bigcap_{i\in\mathbb{N}} S_i$$

es un conjunto convexo.

Demost: Si $\cap_{i\in\mathbb{N}} S_i = \phi$ es vacía, no hay nada que demostrar. Considere ahora S_1 y S_2. Llame $S = S_1 \cap S_2$. Considere dos elementos cualesquiera de S, x^0 y x^1. Debemos demostrar que:

$$x^t \equiv tx^0 + (1-t)x^1 \in S$$

$\forall\ 0 \leq t \leq 1$. Dado que x^0 y $x^1 \in S_i$ para $i = 1,2$ (debido a que $x^j \in S$ para $j = 0,1$) y S_i $i = 1,2$ es convexo se tiene por definición que

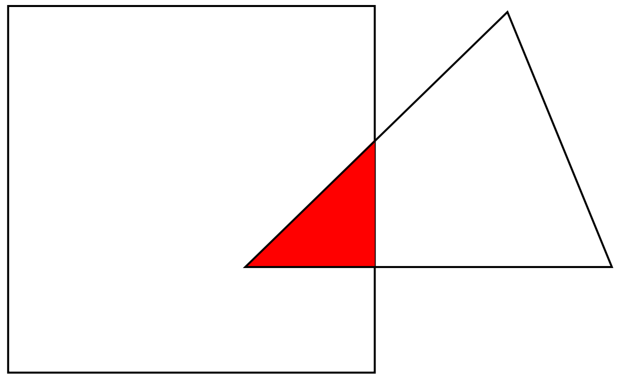
$$x^t \equiv tx^0 + (1-t)x^1 \in S_i \text{ para } i = 1,2$$

$\Rightarrow x^t \in S$. $\forall t \in [0,1]$.

Suponga ahora que $\cap_{i=1}^{n-1} S_i$ es un conjunto convexo. Llame $S \equiv \cap_{i=1}^{n-1}$. Dehemos demos demostrar que

$$\bigcap_{i=1}^{n-1} \cap S_i$$

Es convexo Dado que $\cap_{i=1}^{n-1} S$ es convexo $\rightarrow S \cap S_n$ es convexo por la 1^0 parte de lo demostración



unión de conjuntar convexos no es necesariamente convexa. Por $j[0,1] \cup [2,3]$.

DEF: Sea $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, luego f es creciente en I si $\forall\ x_1, x_2 \in I$ tal que $x_1 < x_2$, se tiene que $f(x_1) \leq f(x_2)$. f es est. creciente en I si $\forall\ x_1, x_2 \in I$ tal que $x_1 < x_2$, se tiene que $f(x_1) < f(x_2)$.

ejemplo: $f(x) = x^2\ \forall x \in [0, \infty)$. Recuerde que $x^0 \geq x^1$ sii $x_i^0 \geq x_i^1\ \forall i$ y que $x^0 \gg x^1$ sii $x + i^0 > x_i^1\ \forall\ i$

Sea ahora $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ para $S \subset \mathbb{R}^n$. Luego:

(i) f es creciente si $f(x^0) \geq f(x^1)$ cuando $x^0 \geq x^1$.

(ii) f es estrictamente creciente si es creciente y $f(x^0) > f(x^1)$ cuando $x^0 \gg x^1$.

(iii) f es fuertemente creciente si $f(x^0) > f(x^1)$ cuando $x^0 \neq x^1$ y $x^0 \geq x^1$.

Observaciones:

1. f es creciente si el valor de la función no decrece cuando se incremente uno o mas componentes de x

Ejemplos:

(i) $f(x) = c\ \forall\ x \in \mathbb{R}^n$ (creciente)

(ii) $f(x_1, x_2) = \min\{x_1, x_2\}$ es estrictamente creciente; $x \in \mathbb{R}_+^n$

(iii) $f(x_1, x_2) = x_1 x_2$ para $x \in \mathbb{R}_+$ es fuertemente creciente.

Conjuntos relacionados a funciones

DEF 1: Sea $f : S \rightarrow \mathbb{R}$. Luego el conjunto de nivel de f para $y_0 \in \mathbb{R}$ es:

$$L(y_0) \equiv \{x \in S | f(x) = y_0\}$$

Lerna tira mente el conj. de nivel de f relativo a $x^0 \in \mathbb{R}^n$ es

$$L(x^0) \equiv \left\{x \in S | f(x) = f(x^0)\right\}$$

Observe que usando conjuntos de nivel podemos representas toda la función al en cuento oder $y \in f(S)$. Note también que $L(y_0) \subset S \rightarrow\downarrow$ la dimensional necesaria para representar f en una unidad.

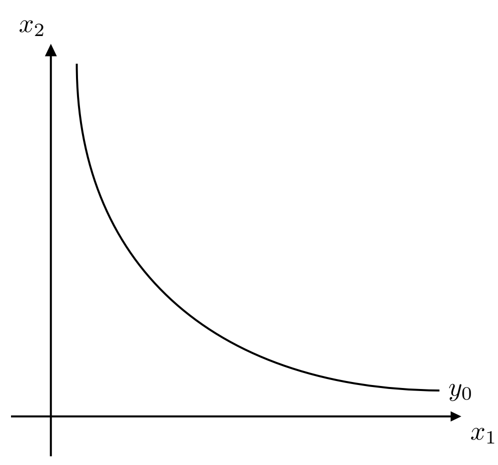
Sea $y_0 \neq y_1$. Luego $L(y_0) \cap L(y_1) = \phi$. Si la intersección no para vacía $\Rightarrow\ \exists$

$z \in L(y_0)$ y $z \in L(y_1)\ \Rightarrow\ f(z) = y_0 = y_1$ lo que es imposible por definición de función.

Ejemplos:

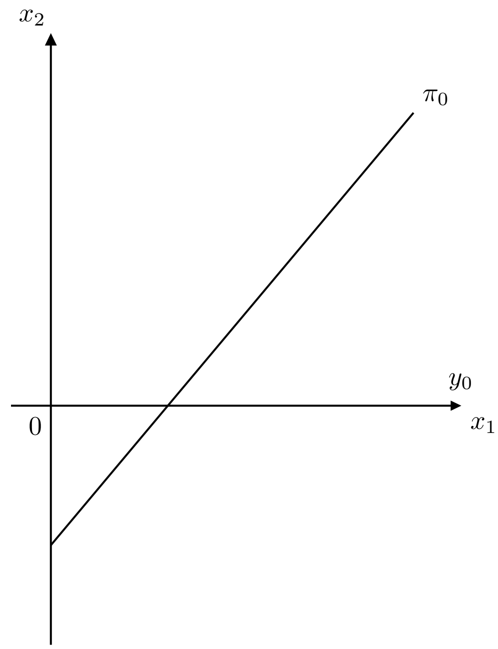
1. $y = x_1^{0.5} x_2^{0.5}\ \Rightarrow\ L(y_0) = \left\{(x_1, x_2) : x_1^{0.5} x_2^{0.5} = y_0\right\}$. Podemos gráficas, 'despejando' 2 para obtener

$$x_2 = \frac{(y_0)}{x_1} = \frac{k}{x_1}$$

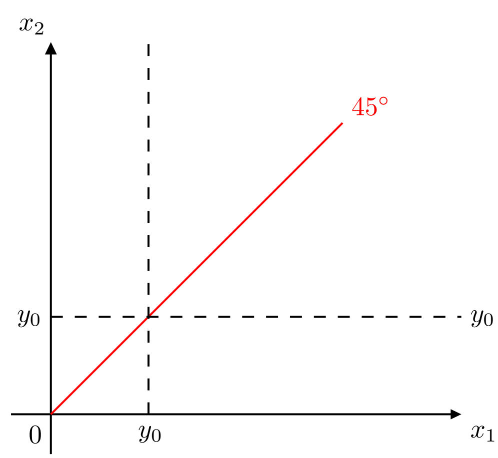


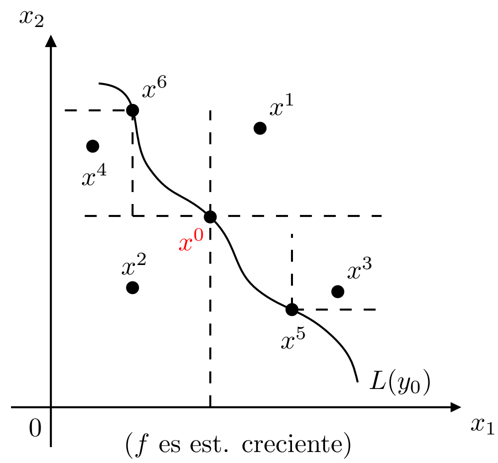
2. $\pi(x,p) = p_1 x_1 - p_2 x_2$. Luego $L(\pi_0) = \left\{x \in \mathbb{R}^2 | p_1 x_2 + p_2 x_2 = \pi_0\right\}$

$$\Rightarrow \quad = (x_1, x_2) \in L(\pi_0) \quad \Leftarrow \quad x_2 \quad = \quad \frac{p_1}{p_2} \cdot x_1 - \frac{\pi_0}{p_2}$$



3. $y(x) \quad = \quad \min\{x_1, x_2\} \quad \Rightarrow \quad L(y_0) \quad \equiv \quad \left\{x \in \mathbb{R}^0_+ : \ \min\{x_1, x_2\} = y_0\right\}$





(f es est. creciente)

Note:

- $f(x^2) < f(x^0) < f(x^1)$
- $f(x^4) < f(x^0) < f(x^3)$

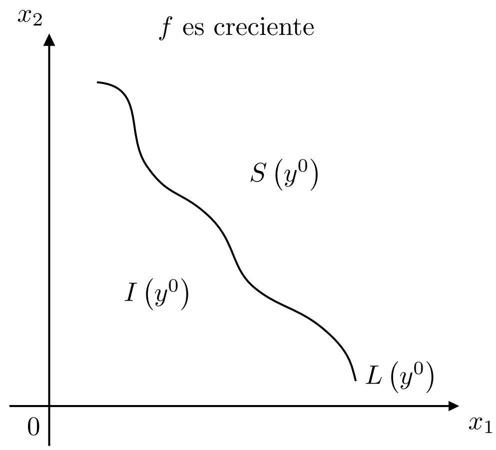
Entonces:

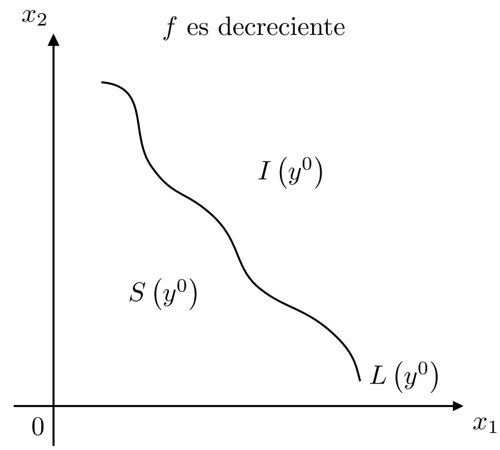
1. $S(y^0) \equiv \{x | x \in X,\ f(x) \geq y^0\}$ (Conj. superior, Contorno superior)
2. $S'(y^0) \equiv \{x | x \in X,\ f(x) > y^0\}$ (Cont. superior estricto)
3. $I(y^0) \equiv \{x | x \in X,\ f(x) \leq y^0\}$ (Contorno inferior)
4. $I'(y^0) \equiv \{x | x \in X,\ f(x) < y^0\}$ (Contorno inferior estricto)

Proposición: Para cualquier $f : X \to \mathbb{R}$, $y^0 \in \mathbb{R}$:

- $L(y^0) \subset S(y^0)$
- $L(y^0) \subset I(y^0)$
- $L(y^0) = S(y^0) \cap I(y^0)$
- $S'(y^0) \subset S(y^0)$
- $I'(y^0) \subset I(y^0)$
- $S'(y^0) \cap L(y^0) = \phi$
- $I'(y^0) \cap L(y^0) = \phi$

- $S'(y^0) \cap I'(y^0) = \phi$





UNCIONES CÓNCAVAS:

- $f: X \to \mathbb{R}$ y $X \subset \mathbb{R}^n$ es CONVEXO. Para $x^0, x^1 \in X$

$$x^t \equiv tx^0 + (1-t)x^1$$

para $t \in [0,1]$ denota la combinación convexa de x^0 y x^1. Observe que $x^t \in X$.

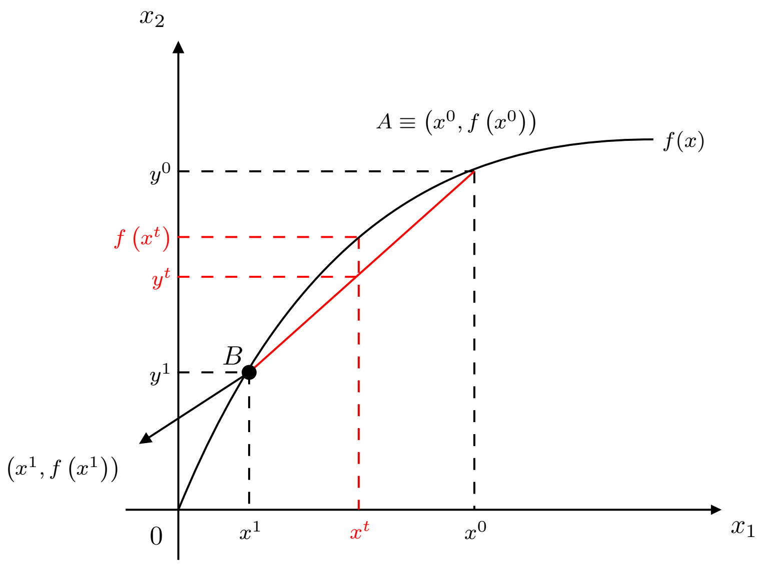
DEF: $f: X \to \mathbb{R}$ es uno función cóncava si para todo par $x^0, x^1 \in X$

$$f(x^t) \geq tf(x^0) + (1-t)f(x^1) \quad \forall t \in [0,1]$$

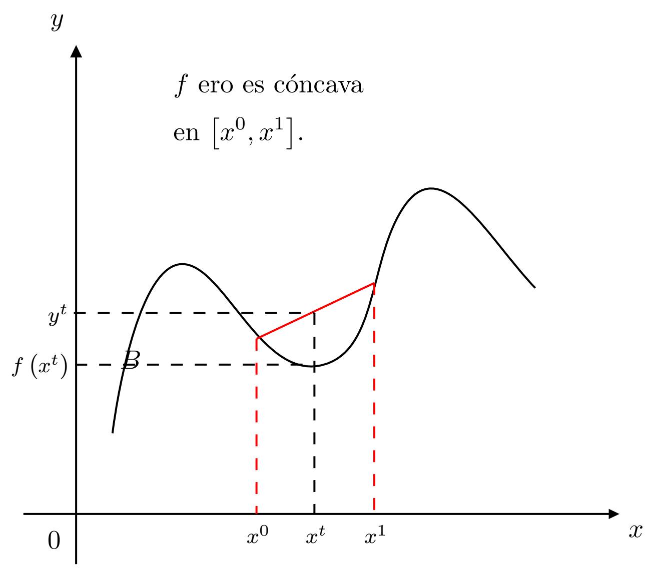
Note:

- $f(x^t) \equiv$ valor de f para la combinación convexa x^t
- $tf(x^0) + (1-t)f(x^1) \equiv$ combinación convexa de dos valores de f

$X \subset \mathbb{R}$. Luego



- Note $f(x^t) \geq y^t$.
- f es convexa sii para todo par de puntos $(x^0, y^0), (x^1, y')$ en su gráico, la linea recta que une los mismos se encuentra uno por debajo de su gráico.



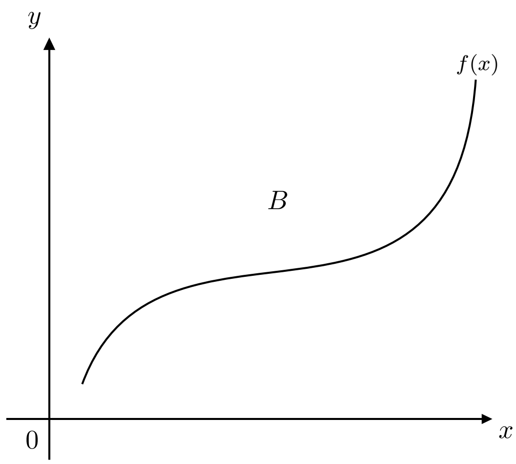
<u>Efinición:</u> Llame al conjunto

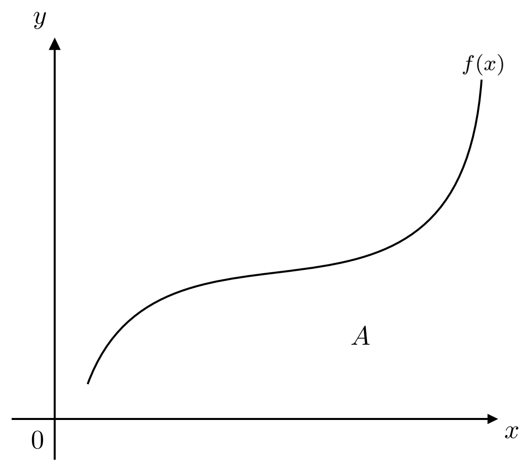
$$A \equiv \{(x, y) | x \in X, f(x) \geq y\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

grafo inferior o subgrafo y:

$$B = \{(x, y) | x \in X, f(x) \leq y\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

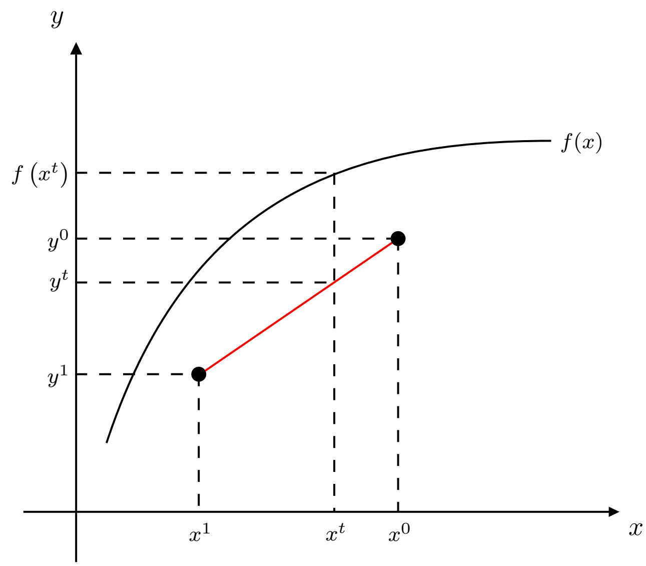
Supergrafo de f





Proposición:

f es concava A es convexo



Demostración:

1. f es cóncava $\Rightarrow$ A es convexo.

2. inca: Demostrar que para puntor arbitrarios $z^i = \left(x^i, y^i\right)$ $i = 1, 2$ en A, luego $z^t \in A \ \forall \ t \in [0, 1]$

3. Que implica 2? Por definición de A debemos mostrar que $(x^t, y^t) \in A$.

4. Como demostrar que $x^t \in A$? Dado que f es cóncava, sabemos que X es convexo y por lo tanto $x^t \in A \ \forall \ t \in [0, 1]$

5. Solo nos falta de mostrar que $y^t \leq f(x^t) \ \forall \ t \in [0, 1]$. Observe

   (a) $y^t = ty^0 + (1-t)y' \leq tf(x^0) + (1-t)f(x^1) \quad \forall \ t \in [0, 1]$

   Dado que como $z^i \in A$, se tiene que $y^i \leq f(x^i)$. Luego por def. de concavidad:

   (b) $y^t \leq tf(x^0) + (1-t)f(x^1) \leq f(x^t) \quad \forall \ t \in [0, 1]$

   $\Rightarrow$ $y^t \leq f(x^t)$ y por lo tanto $z^t \in A$. Como z^i para $i = 1, 2$ son puntar arbitrarios, lemas demostrado la primera parte.

- A es convexo $\Rightarrow$ f es cóncava

1. idea: Considere dos puntar arbitrarios $z^i \equiv (x^i, y^i) \in A$, luego

$$f(x^t) \geq tf(x^0) + (1-t)f(x^1)$$

2. Sea $z^i \in A$. Luego dado que A es convexo.

$$z^t \equiv (x^t, y^t) \in A \quad \forall\ t \in [0,1]$$

3. El punto (2) implica pos definicion de A que

   i) x^0, x^1 y $x^t \in \ \forall\ t \in [0,1]$

   ii) $y^t \leq f(x^t)\ \forall\ t \in [0,1]$

4. Dado que $z^i \in A$, tenemos que

   iii) $y^i \leq f(x^i)$ para $i = 1, 2$.

5. Dado que debemos tomar puntos en el gráfico de f podemos 'ajustar' (iii) y:

   iv) $y' = f(x^i)$ para $i = 1, 2$

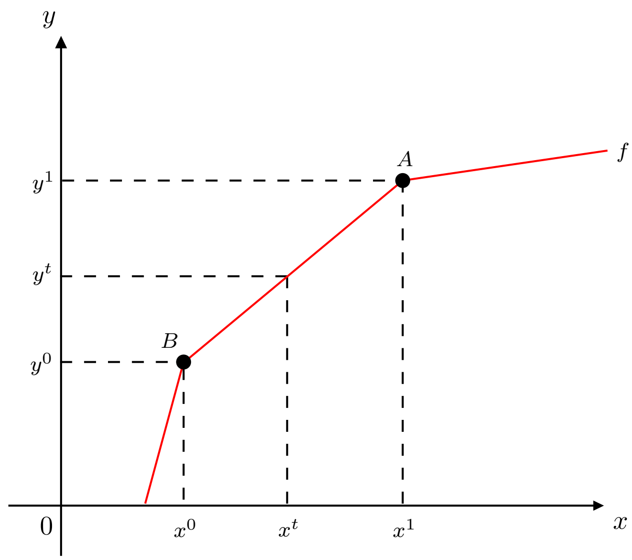
6. Usando (iv):

   v) $ty^0 + (1-t)y' = tf(x^0) + (1-t)f(x^1) \equiv y^t$

7. Usando (ii) y (v)

$$tf(x^0) + (1-t)f(x^1) \leq f(x^t) \quad \forall\ t \in [0,1]$$

Observe que la def permite segmentos lineales:



Definimos entonces:

DEF:

$f : X \Rightarrow R$ es estrictamente cóncava sii $\forall\ x^0 \neq x^1 \in X$

$$f(x^t) > tf(x^0) + (1-t)f(x^1) \quad \forall t \in (0,1)$$

Proposición: Sea $f : X \to \mathbb{R}$ cóncava. Luego $S(y) \subset X$ es convexo para todo $y \in \mathbb{R}$.

Demostración: Recuerde que

$$S(y) = \{x \in X | f(x) \geq y\}$$

Paros:

1. Sean x^0 y $x^1 \in S(y)$. Bebemos demostrar que $x^t \in X$ y que $f(x^t) \geq y$.
2. Dado que X es convexo $\Rightarrow\ x^t \in X$.
3. Dado que $x^i \in S(y)$ para $i = 1, 2$:

   (i) $f(x^0) \geq y$

(ii) $f(x^1) \geq y$

4. (i),(iii):

$$\text{(iii) } tf(x^0) + (1-t)f(x^1) \geq y$$

5. (iii) $\Rightarrow$ $f(x^t) \geq y$ dado que f es cóncava $\square$

Observación: La implicancia es en un solo sentido, i.e. $S(y)$ es convexo $\Rightarrow$ f sea cóncava

DEF: $f : X \to \mathbb{R}$ cuasicóncava sii $\forall\ x^0, x^1 \in X$

$$f(x^t) \geq \min\left[f(x^0), f(x^1)\right] \quad \forall \quad t \in [0,1]$$

- $f(x^t) \equiv$ value of function at the convex combination of x^0, x^1.
- $\min\left[f(x^0), f(x^1)\right] \equiv$ valor menor de la función entre e sos puntos.
- Esta def. es general; i.e. $X \subset \mathbb{R}^n$ para $\forall\ n \in \mathbb{N}$.

Proposición: $f : x \to \mathbb{R}$ es cuasi-cóncava sii $S(y)$ es convexo $\forall\ y \in \mathbb{R}$

Demostración:

- f es cuasicóncava $\Rightarrow$ $S(y)$ es convexo $\forall\ y \in \mathbb{R}$.
  1. idea: debemos de mostrar que si $x^0, x^1 \in S(y)$, luego $x^t \in S(y)\ \forall\ t \in [0,1]$. Para ello debemos valemos la def. anterior.
  2. Primero note que como $x^i \in S(y) \Rightarrow x^i \in X$ par def. de $S(y)$
  3. Segundo, nos que da entonces mostrar que $f(x^t) \geq y\ \forall\ t \in [0,1]$. Que into tenemos? Como $x^i \in S(y)$

$$\text{(i) } f(x^i) \geq y \quad \text{para } i = 1, 2.$$

  4. (3)-(i) $\Rightarrow$

$$\text{(ii)} \ \min\{f(x^0), f(x^1)\} \geq y$$

Sando la def. anterior y (3)-(ii) tenemos que

$$f(x^t) \geq y. \quad \Rightarrow \quad S(y) \text{ es convexo.}$$

$S(y)$ es convexo $\forall \ y \in \mathbb{R} \Rightarrow f$ es cuasi-cóncava.

1. Sean $x^0, x^1 \in S(y)$. Entonces por def. de $S(y) \Rightarrow x^1 \in X$ para $i = 1, 2$ Como X es convexo $\Rightarrow \ x^t \in X$.
2. Suponga que $f(x^0) \geq f(x^1)$. Llame $y^0 \equiv f(x^0), \ y' \equiv f(x^1)$. Note ahora que $S(y')$ es convexo. Es obvio que x^0 y $x^1 \in S(y')$. Entonces dado que $S(y')$ es convexo se tiene que $x^t \in S(y')$. Por def. de $S(y') \Rightarrow \ f(x^t) \geq f(x^1)$. Se sigue entonces que f es cuasi-cóncava ya que

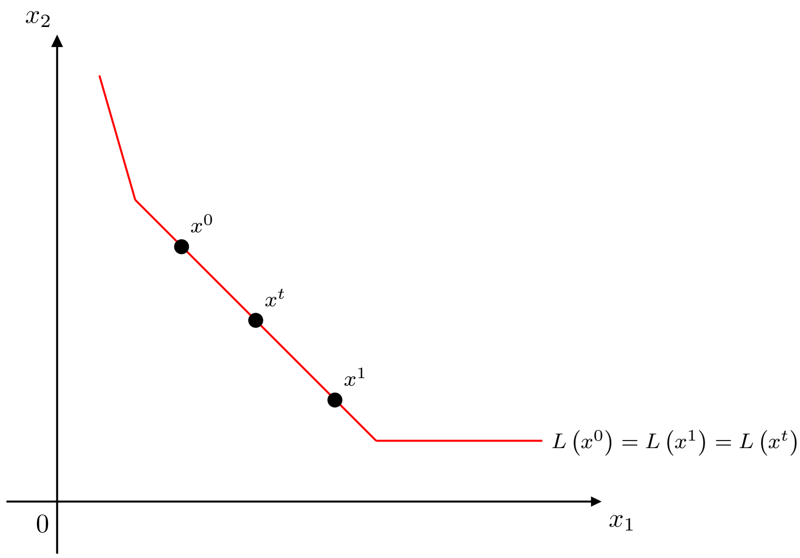
$$f(x^t) \geq f(x^1) \equiv \min\left\{f(x^0), f(x^1)\right\}$$

Entonces:

f es cuasi-cóncava $\Rightarrow \ S(y)$ is convexo $\forall \ y \in \mathbb{R}$

$S(y)$ es convexo $\forall \ y \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad f$ es cuasi-cóncava

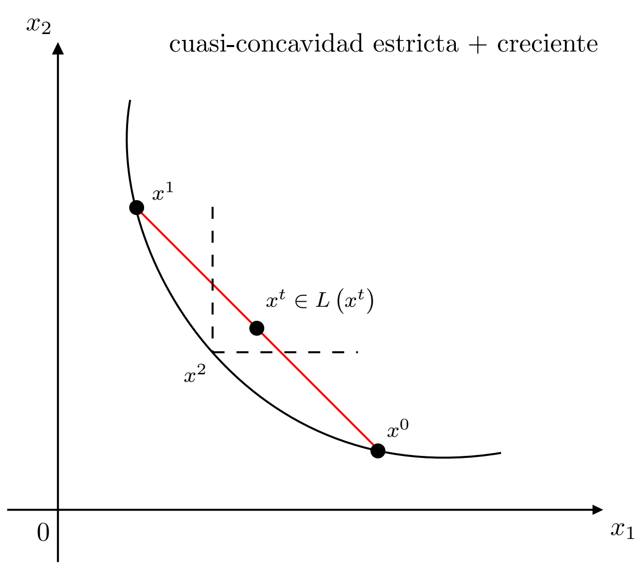
Los conj. Superiores pulden tenor segmentos lineales:



DEF: $f : x \to \mathbb{R}$ es estrictamente cuasicóncava sii $\forall\ x^0 \neq x^1 \in X$

$$f(x^t) > \min\left[f(x^0), f(x^1)\right] \quad \forall t \in [0, 1]$$

Observe el contraste:



inalmente:

Proposición:

$$f \text{ es (estrictamente) cóncava } \Rightarrow f \text{ (estrictamente) cuasicóncava.}$$

Emostración: ya lemos demostrado que si tes (est.) cóncava $\Rightarrow$ $S(y)$ es convexo. Otra demostración le siguiente. Asume que x^0 y $x^1 \in X$. Luego por def de concaoided:

$$\begin{aligned} f(x^t) \quad \geq \quad & tf(x^0) + (1-t)f(x^1) \geq \min\left[f(x^0), f(x^1)\right] t + \min\left[f(x^0), f(x^1)\right] \\ & (1-t) = \min\left[f(x^0), f(x^1)\right] \end{aligned}$$

Def: $f : x \to \mathbb{R}$ es

(i) Convexa si - f es cóncava

(ii) est. convexa si - f es convexa.

(iii) (est) cuasicónvexa si - f es cuasicónvexa

Observación:

- $f(x) = x^2 \ \forall \ x \in [0, \infty)$ es cuasi-cóncava pero no es cóncava.
- $f(x) = x_1 x_2 \ \forall \ x \in \mathbb{R}_+$ es cuasi-cóncava pero no es cóncava

FUNCIONAR CUASI-CÓNCAVAS

Formalmente sea $C_0 = \{f : X \to \mathbb{R} | f \text{ es cóncava}\}$ y $Q_0 = \{f : X \to \mathbb{R} | \ f \text{ es cuasicóncava}\}$;

$C_0' \equiv \{f : X \to \mathbb{R} | \ f \text{ es est. cóncava}\}$ y $Q_0' \equiv \{f : X \to \mathbb{R} | \ f \text{ est. cuasicóncava}\}$. Luego

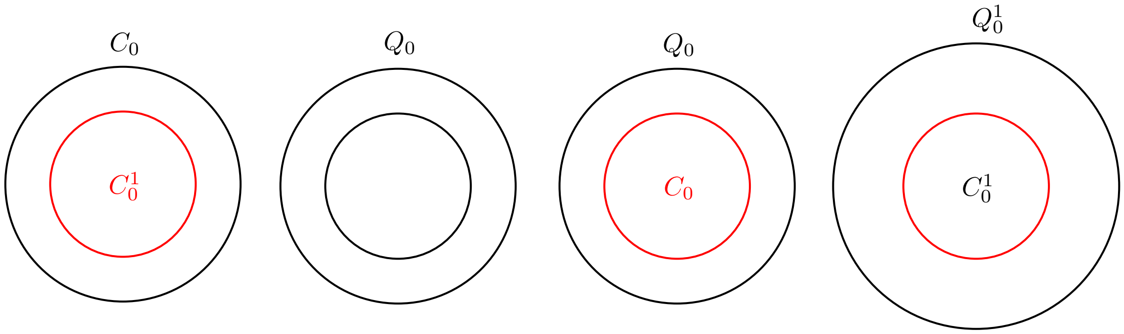
Luego:

1. $C_0' \subset C_0$: Si f es est. cóncava $\Rightarrow f$ es cóncava

2. $C_0 \subset Q_0$: Si f es cóncava $\Rightarrow f$ es cuasicóncava.

3. $C_0' \subset Q_0'$: Si f es est. cóncava $\Rightarrow f$ es est. cuasi-cóncava.

4. $Q_0' \subset Q_0$: Si f es est. cuasi-cóncava $\Rightarrow$ f es cuasi-cóncava.



Torología: Nociones ELE MENTOLES

1. métrica: medida de distancia

2. Un espacio métrico es un conjunto y una medida de distancia entresus elementos

3. $(\mathbb{R}, d)$ para

$$d(x^0, x^1) = \left| x^0 - x^1 \right|$$

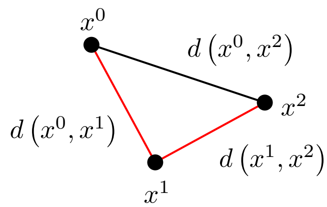
4. Note que:

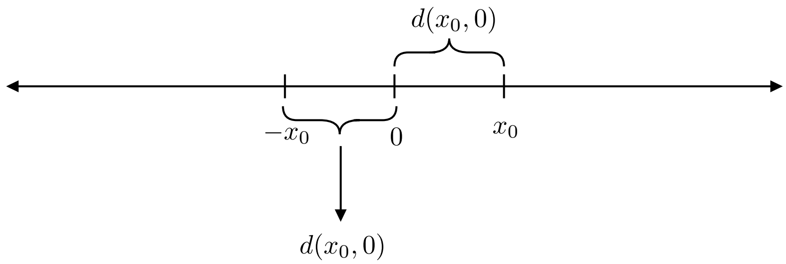
   - P1: $0 \leq d(x^0, x^1) < \infty \quad \forall x^0, x^1 \in \mathbb{R}$.

   - P2: $d(x^0, x^1) = d(x^1, x^0) \quad \forall x^0, x^1 \in \mathbb{R}$

   - P3: $d(x^0, x^1) = 0$ sii $x^0 \equiv x^1$

   - P4: $d(x^0, x^2) \leq d(x^0, x^1) + d(x^1, x^2)$ (desigualdad triangular)





5. Recuerde que:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

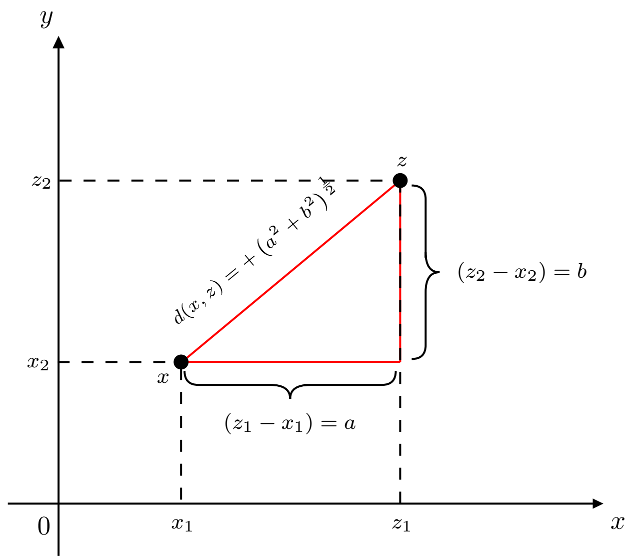
6. Entonces:

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - 0)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow \ \|x\| = d(x, 0)$$

7. Entonces, en general:

$$d(x, z) = \|x - z\| = \|z - x\|$$



8. Dada una métrica, podemos hacer precisos los conceptos de 'cercanía' entre puntos.

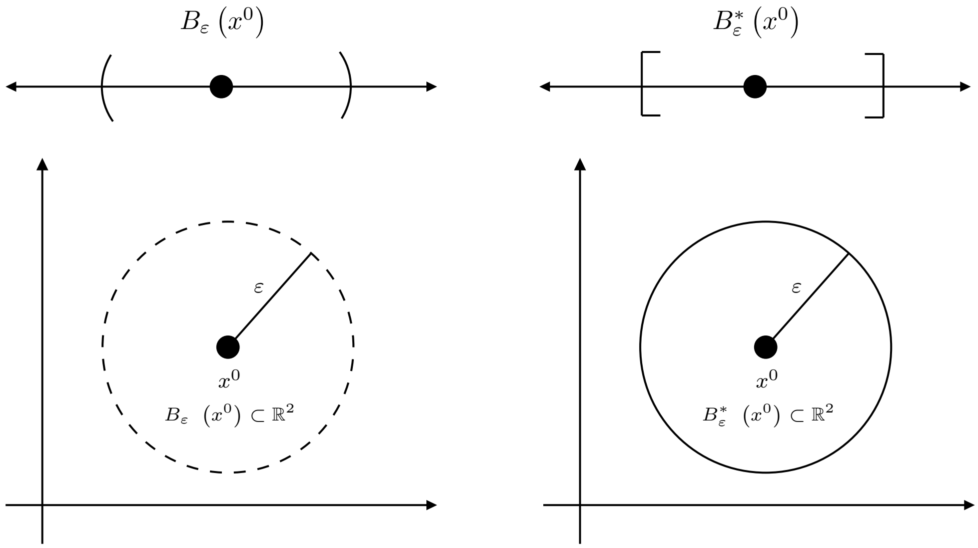
Def:

(i) La bola abierta con centro $x^0 \in \mathbb{R}^n$ y radio $\varepsilon > 0$ es

$$B_\varepsilon(x^0) \equiv \left\{x \in \mathbb{R}^n | d(x^0, x) M \varepsilon\right\}$$

(ii) La bola cerrada con centro en $x^0 \in \mathbb{R}^n$ y radio $\varepsilon > 0$ es

$$B^*_\varepsilon(x^0) \equiv \left\{x \in \mathbb{R}^n | d(x^0, x) \leq \varepsilon\right\}$$



Note que $B_\varepsilon(x^0)$ y $B^*_\varepsilon(x^0) \subset \mathbb{R}^n$. Luego:

1. Sea $X \subset \mathbb{R}^n$. Decimos que $x \in X$ es un punto interior de X si existe algún $\varepsilon > 0$, tal que $B_\varepsilon(x) \subset X$. El conjunto de todos los puntos interiores de X se denomine el interior de X y denotamos con X^0
2. Un conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ es abierto si $X = X^0$

Ejemplos:

1. $\phi = \phi^0$
2. $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$
3. $I = (a,b) = \mathring{I}$
4. $A \equiv \{1, 2, \ldots, n\} \subset \mathbb{R}$. Luego $\mathring{A} = \phi \neq A$.
5. $\mathring{B}_\varepsilon(x^0) = B_\varepsilon(x^0)$ (idea: $\varepsilon' = \varepsilon - d(x^0, x)\ \forall\ x \in B_\varepsilon(x^0)$).

Proposición: Sea $A_i = \mathring{A}_i\ \forall\ i \in \mathbb{N}$. Luego:

(i) $\cup_{i=1}^{\infty} A_i$ es abierto (arbitraria)

(ii) $\cap_{i=1}^{n} A_i$ es abierto (finita)

Demostración:

1. Debemos demostrar que $\left(\cup_{i=1}^{\infty} A_i\right)^0 = (\cup_{i=1}^{\infty} A_i)$, Esto implica demostrar que todo punto en $(\cup_{i=1}^{\infty} A_i)$ es interior. Para demostrar esto, debemos mostrar que $\forall \times \varepsilon\, (\cup_{i=1}^{\infty} A_i)$ es posible encontrar $B_\varepsilon(x) \subset (\cup_{i=1}^{\infty} A_i)$.

   Sea $x \in (\cup_{i=1}^{\infty} A_i) \Rightarrow \exists$ al menos on conjunto A_j tal que $x \in A_j$. Luego dado que $A_j = A_j^0$, tiene que $\exists$ un $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(x) \subset A_j$. Par def de unión $\Rightarrow B_\varepsilon(x) \subset (\cup_{i=1}^{\infty} A_i)$ y estamos

2. Debemos demostrar que $(\cap_{i=1}^{n} A_i) = \left(\cap_{i=1}^{n} A_i\right)^\circ \;\; \Rightarrow \;\; \forall x \in (\cap_{i=1}^{\infty} A_i)$ es interior $\Rightarrow x \in (\cap_{i=1}^{\infty} A_i)$ existe una $B_\varepsilon(x) \subset (\cap_{i=1}^{n} A_i)$.

   Sea $x \in (\cap_{i=1}^{n} A_i) \Rightarrow x \in A_i \; \forall\, i = 1, 2, \ldots, n$ (def. de intersección). Luego dada que $A_i = A_i^0 \forall$

   $E\mathbb{N} \Rightarrow \exists$ un $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(x) \subset A_i \; \forall\, i \in \mathbb{N}$. Por def. de intersección $\Rightarrow B_\varepsilon(x) \subset (\cap_{i=1}^{n} A_i)$

Par qué no podemos extender (ii) se $i \in \mathbb{N}$? Considere $A_n = \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \subset \mathbb{R}$. Luego $A_n = A_n^0$

$\forall n \in \mathbb{N}$. Observe que

- Sea $X \subset \mathbb{R}^n$. Decimos que $z \in \mathbb{R}^n$ es un punto frontera de X sii $\forall \varepsilon > 0$:

  (i) $B_\varepsilon(z) \cap X \neq \phi$

  (ii) $B_\varepsilon(z) \cap X^0 \neq \phi$

  El conjunto de todos los puntos frontera de X se denota con ∂X

- EL conjunto clausura de X es

$$C_x \equiv X \cup \partial X$$

  unimos que X es cerrado sii

$$X = C_x$$

  Note que $X \subset C_x$ y $X = C_x$ sii $\partial X \in X$ entonces $X \subset \mathbb{R}^n$ es cerrado sii

$$\partial X \subset X$$

es difícil demostrar que:

<u>Prop:</u> $X \subset \mathbb{R}^n$ es cerrado sii X^0 es abiertos

$$\partial X \subset C \Leftrightarrow \mathbb{R}^n - X = X^c = \mathring{X}^c$$
$$(X \text{ es cerrado}) \Leftrightarrow (X^c \text{ abierto})$$

Observe que como $\partial X \subset X$ si X es cerrado, luego $\partial X \not\subset X^c$ y como $\mathring{X}^c = X^c$

$$X = X^0 \Leftrightarrow \partial X \not\subset X$$

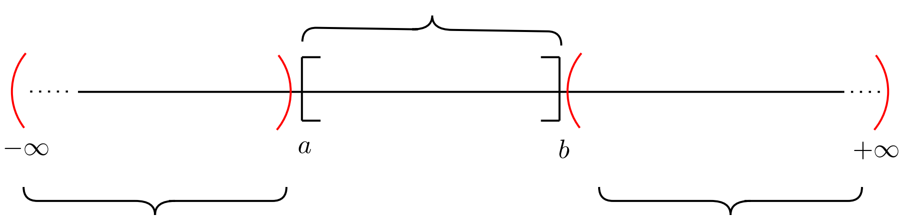
$$(X \text{ es abierto}) \Leftrightarrow (X \text{ no contiene ninguno de sus puntos frontera})$$

Entonces:

$$X \text{ es cerrado sii } X = X^0 \cup \partial S$$

<u>Clustración</u>

$$X \equiv [a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}$$



$$\underbrace{A = \{x \in \mathbb{R} \mid -\infty < x < a\} = \mathring{A}}_{A \text{ es abierto}} \qquad \underbrace{B = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < \infty\} = \mathring{B}}_{B \text{ es abierto}}$$

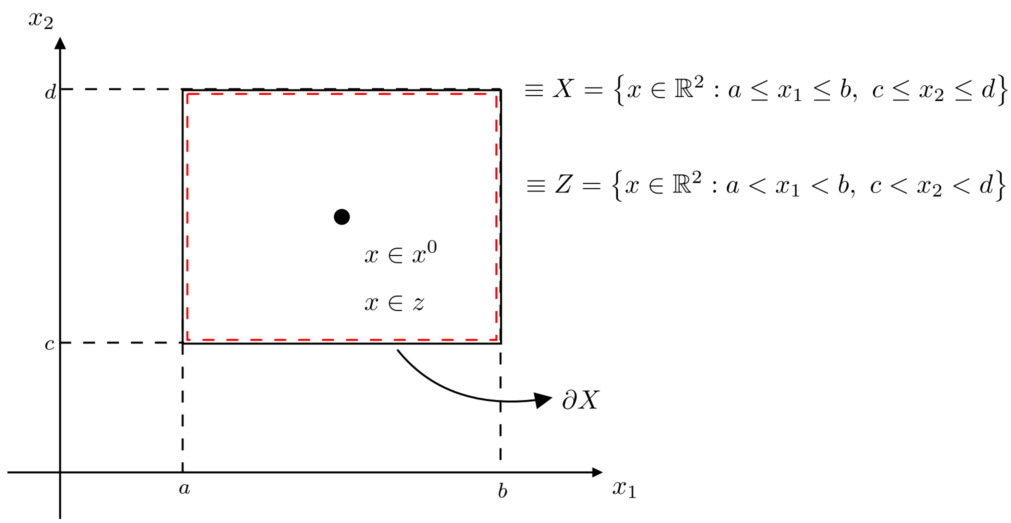
Luego cabemos que $A \cup B$ es abierto $\Rightarrow X$ ex cerrado dado que $X = \mathbb{R} - (A \cup B) = (A \cup B)^c$

Observe que $\partial X = \{a, b\} = \partial A = \partial B$ pero $\partial A \not\subset A$ y $\partial B \not\subset B$ y como $\partial X \subset X \ \Rightarrow X$ es cerrado.

- $A = \{1, 2, \ldots, n\}$

  Note que $\mathring{A} = \phi$ y $\phi \subset A$ pero $A \neq \phi$, A no es abierto, Es A cerrado? Note que

$$\partial A = \{1, 2, 3\} = A = C_A = A \cup \partial A = A^0 \cup \partial S$$



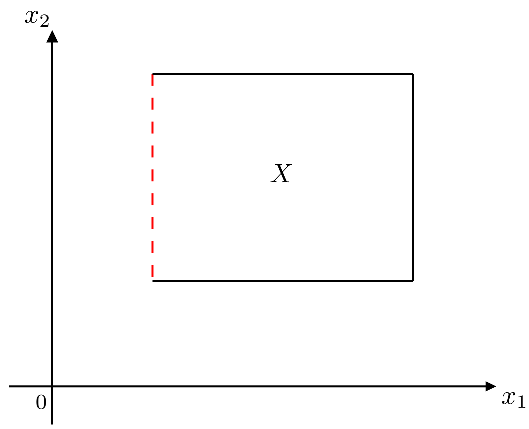
EN $\mathbb{R}^n$

Define:

$$\begin{aligned}
A_1 &\equiv \left\{X \in \mathbb{R}^2 L(x_1, c) \text{ y } (a \leq x_1 \leq b)\right\} \\
A_2 &\equiv \left\{X \in \mathbb{R}^2 : (x_1, d) \text{ y } (a \leq x_1 \leq b)\right\} \\
A_3 &\equiv \{x \in \mathbb{R}^2 : (a, x_2) \text{ y } (c \leq x_2 \leq d)\} \\
A_4 &\equiv \{x \in \mathbb{R}^2 : (b, x_2) \text{ para } c \leq x_2 \leq d\}
\end{aligned}$$

$$\partial X = \partial Z = \cup_{i=1}^{n} A_i$$

Pero $\partial X \subset X$ y $\partial Z \not\subset Z$. Note que



ts cerrado ni abierto.

Como ϕ y $\mathbb{R}^n$ son abiertos $\Rightarrow \phi$ y $\mathbb{R}^n$ son abiertos y cerrados:

$$X \text{ puede ser} \begin{cases} \text{Abierto} \\ \text{Cerrado} \\ \text{Abierto y errado} \\ \text{Ni abierto ni cerrado} \end{cases}$$

Finalmente:

Prop:

(i) Sea X_i cerrado $\forall\ i \in \mathbb{N}$, luego:

$$\cap_{i=1}^{\infty} X_i$$

es un conjunto cerrado.

(ii) Sea X_i cerrado para $\forall i \leq n$. Entonces

$$\cup_{i=1}^{n} X_i$$

cerrado

Demost:

(i) Sea $X \in \partial(X_1 \cap X_2)$. Luego $x \in X_1$ y $x \in X_2$ dedo que X_1 y X_2 son cerrados $\Rightarrow X \in (X_1 \cap X_2$ son cerrados $\Rightarrow x \in (X_1 \cap X_2) \Rightarrow \cap_{i=1}^{2} X_i$ es cerrado. Usando inducción, se obtiene el todo.

(ii) Sea $x \in \partial\left(\cup_{j=1}^{n} X_i\right) \Rightarrow \exists$ al meno un i'tal que $x \in X_i$, dado que X_i es cerrado para todo $i \Rightarrow x \in \cup_{i=1}^{n} X_i$ pos def. de unión.

DEF: Sea $A \subset \mathbb{R}^n$. A es acotado sii existieron $\varepsilon > 0$ tal que $A \subset B_\varepsilon(x)$ para algún $x \in \mathbb{R}^n$.

Observe que si A es acotado entonces$A \subset B_{\varepsilon'}(x)$. para $x = 0$. Entonces A es acotado sii $A \subset B_\varepsilon(0)$ para $0 \in \mathbb{R}^n \Rightarrow A$ es acotado si existe una distancia ε talque $\forall a \in A$, $d(o, a) < \varepsilon$.

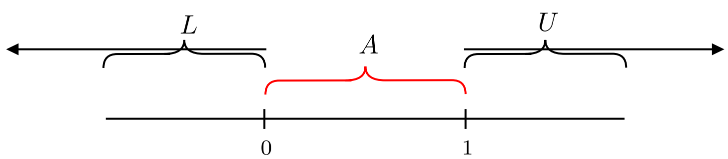
Observe:

$$A \equiv [a, b] \text{ y } B \equiv (a, b) \text{ son a cotados}$$

En $\mathbb{R}$ conviene introducía nuera vocabulario. Sea $A \subset \mathbb{R}$. Luego cualquier número real l tal que $l \leq a \forall\ a \in A$ se llama cota inferior de A. Cualquier número real i'tal que $a \leq u\ \forall\ a \in A$ se llama cota superior de A. Decimos que A es a cotado interiormente (superiormente) si tiene al menos una cota inferior (cota superior). A es cotado si esta.

tanto acotado inferior como superiormente.

Observe que si A esta a cotado inf. (sup.) luego A tiene mer de una cota inferior (superior)



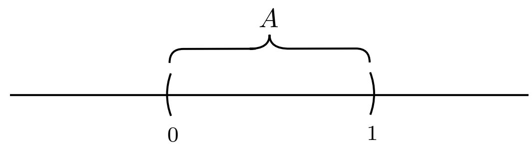
Note que o es una cota inf y $\perp$ es una cota superior. Entonces decimos que $x \in U$ es la minima cota superior de A si

- $x \in U$ (x es una cota superior)
- Si $x' \in U$, luego $x \leq x'$

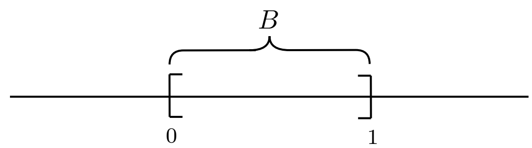
mínima cota superior de A se denota con M y la máxima cota inf la denotamos con $m \forall A \subset \mathbb{R}$:

$m \leq M$ El $A_0 \subset \mathbb{R}$ garantiza la existe, de m y $M \forall A \subset \mathbb{R}$ que es acotado.

Llamamos a $M(m)$ el máximo de A (mínimo) sii $M(m) \in A$. Observe que



A nu time máximo; pero



tiene máximo. Asume que A es acotado. Luego:

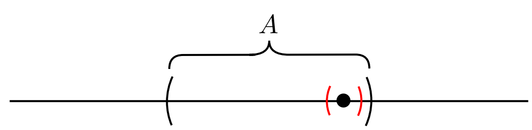
TEOREMA:

(i) Sea $A \subset \mathbb{R}$ abierto. Luego m y $M \notin A$; A no posee máximo ni mínimo.

(ii) Sea $A \subset \mathbb{R}$ cerrado. Luego m y $M \in A$; A posee máximo y mínimo.

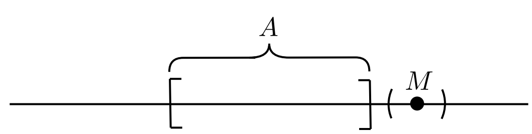
Demostración:

(i) Supongo que $M \in A$:



Entonces como $A = \mathring{A}, \exists$ un $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(M) \subset A$. Luego considere $a = M + \frac{1}{2}\varepsilon' \;\Rightarrow\; a \in B_\varepsilon(M) \;\underset{m}{\Rightarrow} a \in A$ y $M < a \;\rightarrow\; M \not\int U \;\Rightarrow M$ no pose de con la menos de todas los cotas superiores.

(ii) Suponga que A es cerrado:



y que $M \notin A \Rightarrow M \in A^c$ y $A^c = \mathring{A}^c \Rightarrow \exists \varepsilon > 0$ tal que $x \in B_\varepsilon(M) \subset A^c \Rightarrow x^1 = x - \frac{1}{2}\varepsilon > a \;\forall\; a \in A$ pero $x' < M$ la coal contradia que $M \in U$.

DEF: Decimor que A es comacto sii

(i) $M \in A$

(ii) $m \in A$

Es decir si A contiene tanto su máximo como so mínimo

Note que A debe ser entonces a cotado y cambo.

Limitis y continuidad

DEF: Una conocería de números reales es una función

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$

Ejemplos:

1. $f(n) = n^2$
2. $f(n) = (-1)^n$
3. $f(n) = \dfrac{1}{n}$
4. $f(n) = 1 + \dfrac{1}{n}$

Notation: Se usa

$$x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$

y es denote $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Note que x_n es el numero que toma x cuando se coalva en. De esa forma x_n es el enésimo termino de la función x. Note también que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es difenente del rango de x

$$\{x_n | x_n = f(n) \text{ para } n \in \mathbb{N}\}$$

Ejemplos:

1. $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} = \{n^2\}_{n=1}^{\infty}$

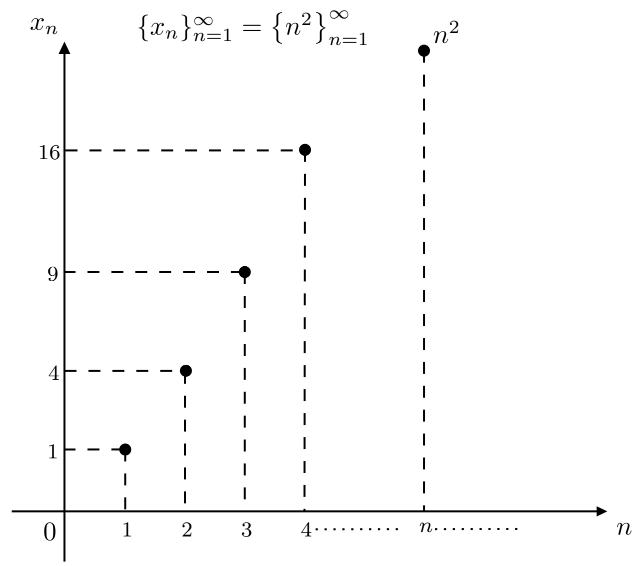
2. $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} = \{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty} \quad \{x_n\}$ para $x_n = (-1)^n \ \forall \ n \in \mathbb{N}$

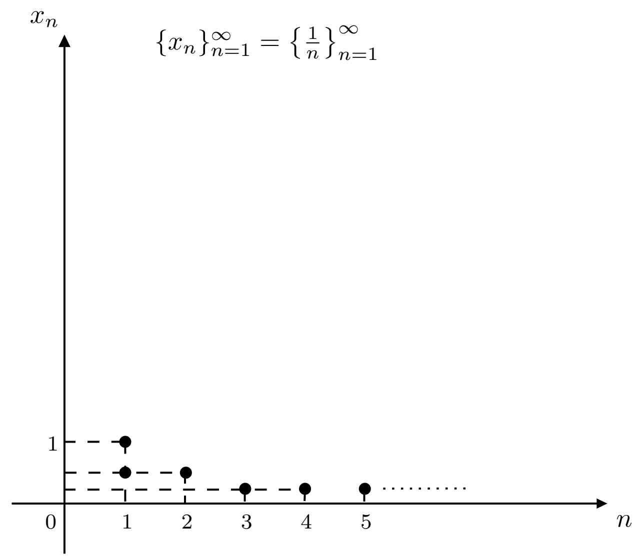
3. $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} = \{\frac{1}{b}\}_{n=1}^{\infty}$

4. $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{1 + \dfrac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$.

Gráfico de x es:

$$Gr \equiv \{(i, x_i) | i \in \mathbb{N} \text{ para todo } i\}$$





Segunda secuencia converge a cero mientras qui la primera diverge:

DEF: El limite de $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ es $a \in \mathbb{R}$ denota de pos $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ o $x_n \to a$ si $\forall \varepsilon > 0$ existe un N_ε tal que

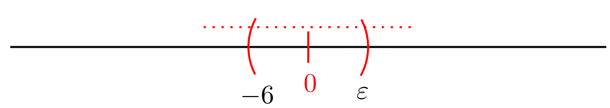
$$|x_n - a| = d(x_n, a) < \varepsilon$$

$\forall n \geq N_\varepsilon$

Ejemplo: Sea

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{1}{(-2)^n}\right\}_{n=1}^{\infty}$$

Note:



Entonces:

Proposicion: $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \to 0$

Demost: Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario. Escoja $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que $2^{N_\varepsilon} > \frac{1}{\varepsilon}$. Lea $n \in \mathbb{N}$ y $n \geq N_\varepsilon$. Luego si

- n es par $\Rightarrow \left|+\dfrac{1}{(-2)^n}\right| = \dfrac{1}{2^n}$ y luego

$$\frac{1}{2^n} < \varepsilon \ \forall\ \varepsilon > 0 \text{ sii } n \geq N_\varepsilon$$

- n es impar $\Rightarrow \left|\dfrac{1}{(-2)^n}\right| = \dfrac{1}{2^n}$

La idea es similar para funciones en general.

- Sea I un intervalo abierto en $\mathbb{R}$. Sea $a \in I$. Suponga que f está definida en I excepto posiblemente en a. Sea entonces $I - \{a\} \equiv X$. Dado un número $L \in \mathbb{R}$ escribimos

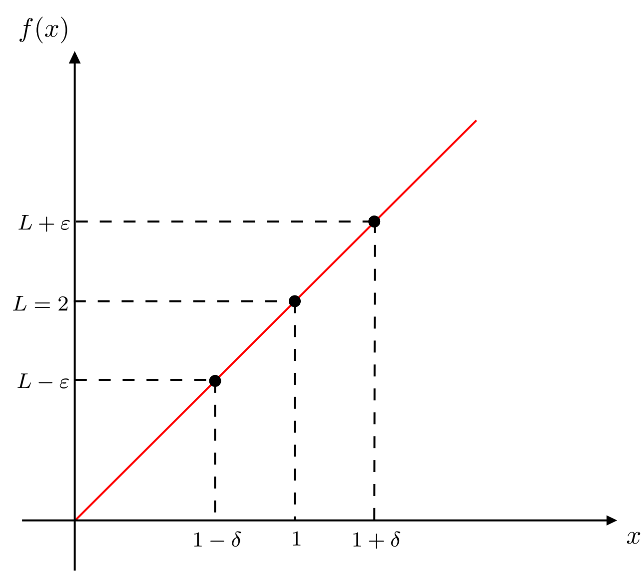
$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

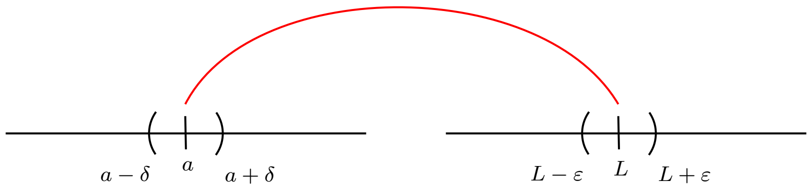
Si

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists$ un $\delta > o$, tal que $|f(x) - L| = d(x, L) < \varepsilon$ cuando x satisface $0 < |x - a| \equiv d(x, a) < \delta$

Observe que la condición $n \geq N_\varepsilon$ se reemplaza por la condición $d(x, a) < \delta$ or ejemplo:

(i) $f(x) = 1 + x$ para $x \in [0, \infty)$ y $a = 1$. Entonces $L = 2$





Formalmente i sea $\varepsilon >$ arbitrario, luego

$$\lim_{x \to a} f(x) = 1 + a$$

Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario. Escoja $\delta = \varepsilon$. Luego

$$d(1+x, 1+a) = |x-a|$$

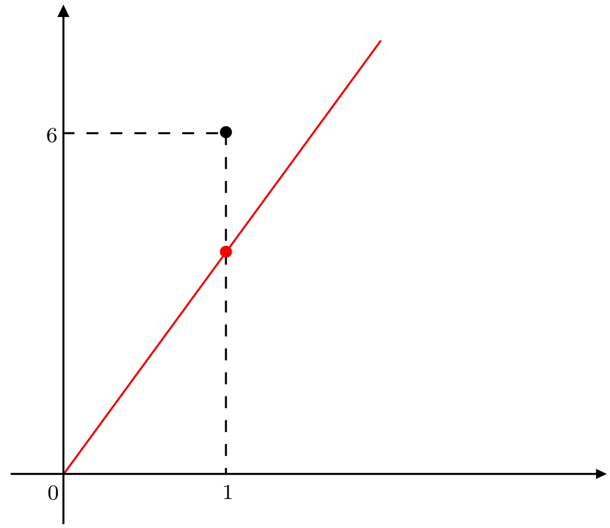
y si $x - a > 0 \;\Rightarrow\; x - a < a \;\Leftrightarrow\; x < 0 + a$ $\square$

<u>Ejemplo:</u>

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & \text{para } x \neq 1 \\ 6 & \text{si} \qquad\qquad x = 1 \end{cases}$$

Note que

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{para } x \neq 1 \\ 6 & \text{si} \qquad\qquad x = 1 \end{cases}$$



$L = 2$. Sea $\varepsilon >$ arbitrario. Luego

$$\lim_{x \to 1} f(x) = L = 2$$

Scoga $\varepsilon = 1$

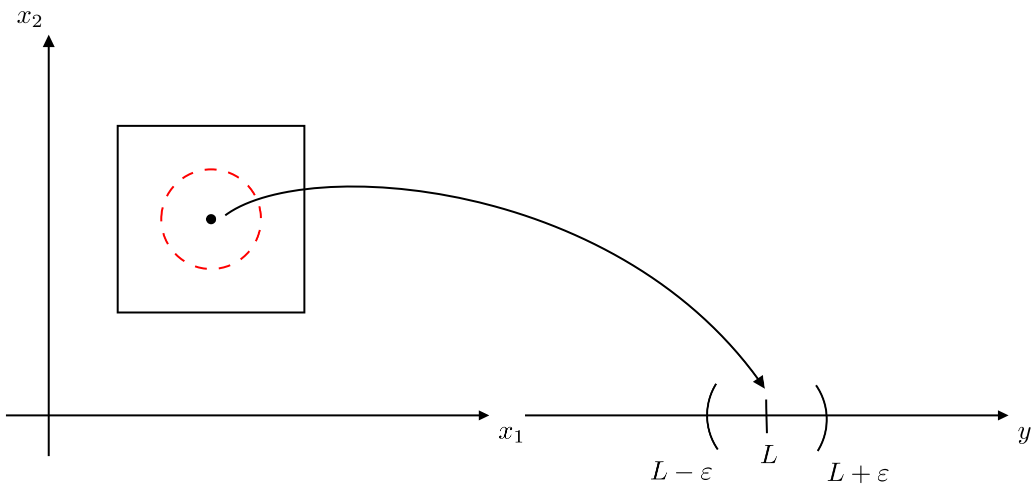
Sea ahora $F : X \to \mathbb{R}$ para $X \subset \mathbb{R}^n$. Luego décimas que $L \in \mathbb{R}$ es el limite de $F(x)$ y escribimos (X no necesariamente precluye a)

$$\lim_{x \to a} F(x) = L$$

$(a \in \mathbb{R}^b)$

si

$$\begin{cases} \forall\ \varepsilon > 0,\ \exists \text{ un } \delta > 0 \text{ tal que si} \\ 0 < d(x,a) \equiv \|x - a\| < \delta \\ \text{Luego } d(f(x),a) = |F(x) - a| < \varepsilon. \end{cases}$$



DEF: Sea $F : X \to \mathbb{R}$ (X incluye a). Decimos que F es continúa en a si

$$\lim_{x \to a} f(x) = F(a)$$

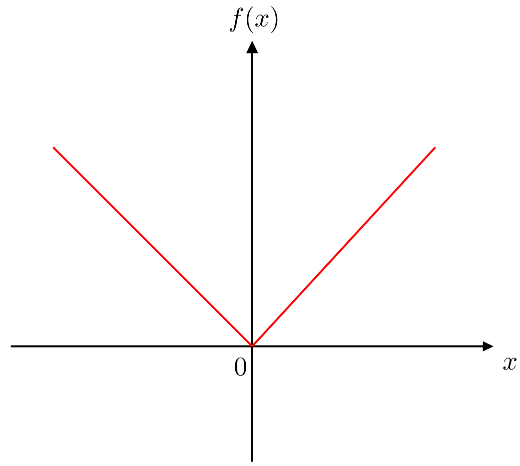
o:

$$\begin{cases} \forall\ \varepsilon > 0,\ \exists \text{ un } \delta > 0 \text{ tal que si} \\ d(x,a) = \|x-a\| < \delta \text{ luego } d(f(x), F(a)) = |F(x) - F(a)| < \varepsilon. \end{cases}$$

Note que la continuidad $\not\Rightarrow$ suavidad o diferenciabilidad. Por ej:

$$f(x) = |x| \text{ para } -\infty < x < \infty$$

Luego:



Luego $F(0) = 0$ y escoge $\delta = \varepsilon$. F es continúa pero no diferenciable en $x = 0$.

Finalmente:

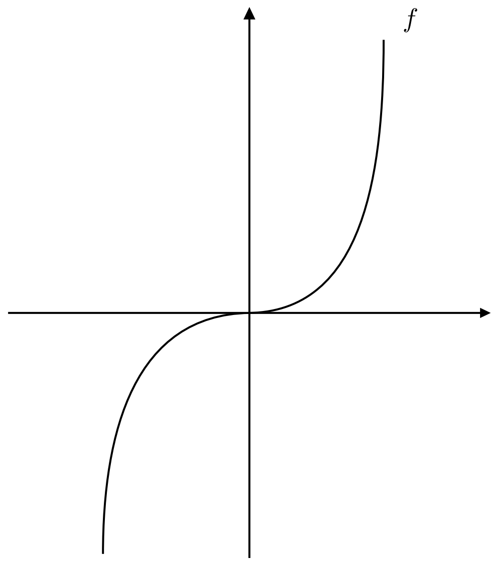
<u>TEOREMA MAXIMO:</u> Sea $X \subset \mathbb{R}^n$ compacto y $F : X \to \mathbb{R}$ continua en X. Luego $\exists$ points $x^0, x^1 \in D$ tal que

$$f(x^0) \leq f(x) \leq f(x^1) \quad \forall x \in X$$

<u>OBS:</u> Proveo cond. suf. Pero nada día si no se cumplen lar cond.

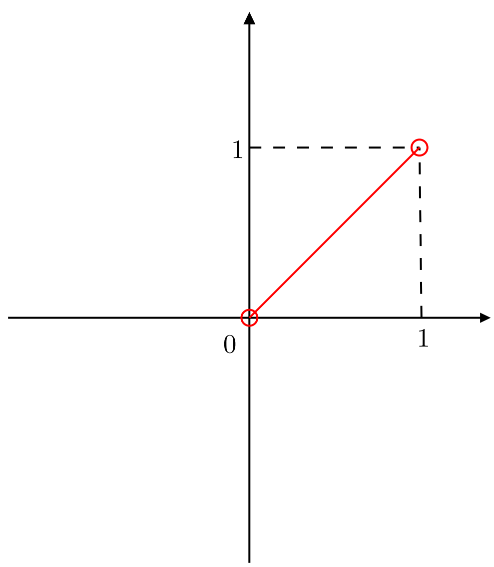
<u>Ejemplos:</u>

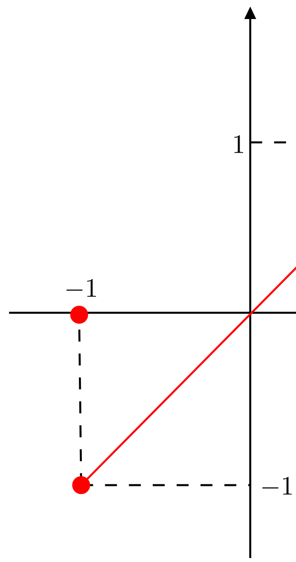
1. Sea $X = \mathbb{R}$ y $F(x) = x^3 \ \forall \ \mathbb{R}$.



Como X no es compacto $\Rightarrow$ $F(x) = \mathbb{R}$ $\quad\Rightarrow$ x^0 y x^1 No existen.

2. Sea $X = (0,1)$ y $F(x) = x$. Luego:



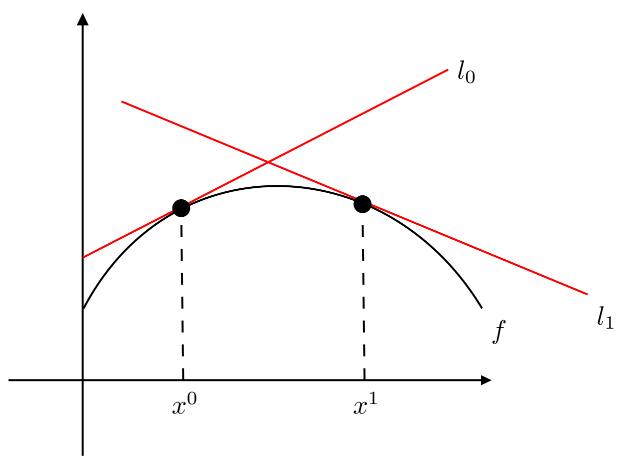


Entonces $F(x) = (0, 1) \quad \Rightarrow x^0$ y x^1 no existen.

3. $X = [-1, 1]$ y $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x = -1 \text{ o } x = 1 \\ x & \text{si} \quad -1 < x < 1 \end{cases}$

$$F(x) = (-1, 1) \Rightarrow \text{ ni } x^0, \text{ ni } x^1 \text{ existen.}$$

Calculo y Optimización:



Concavidad: Sea X un intervalo de $\mathbb{R}$ y $F : X \to \mathbb{R}$. Luego:

1. F es Cóncava

2. $F''(x) \leq 0 \quad \forall x \in \mathring{X}$

3. $\forall x^0 \in X: \; F(x) \leq F(x^0) + F'(x^0)(x - x^0) \quad \forall x \in X.$

4. Si $F''(x) < 0 \quad \forall x \in \mathring{X} \quad \Rightarrow F$ is est. Cóncava

Si $F : X \subset \mathbb{R}^n \to R$, se tiene que:

$$F_i(x) = \frac{\lim\limits_{h \downarrow 0} F(x_{-i}, x_i + h) - F(x_{-i}, x_i)}{h} \equiv \text{derivada parcial}$$

El varctor gradiente es

$$\nabla F(x) = (F_1(x), \ldots, F_n(x))$$

Recuerde que:

$$F_{ij} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(F_i(x)\right) = \frac{\partial^2 F(x)}{\partial x_i \partial x_j}$$

Entonces

$$\nabla F_i(x) = (F_{i1}(x), \ldots, F_{ii}(x), \ldots, F_{in}(x)) \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Luego

$$H(x) = \begin{pmatrix} \nabla F_1(x) \\ \nabla F_2(x) \\ \vdots \\ \nabla F_n(x) \end{pmatrix}$$

Hesiano (Segunda derivada)

Asumimos que $F_{ij} = F_{ji}$ (Young theorem). Luego en $\mathbb{R}^n$

1. F es cóncava
2. $H(x)$ es semi-definida negativa $\forall x \in \mathring{X}$
3. $\forall x^0 \in X: \ F(x) \leq F(x^0) + \nabla F(x^0)(x - x^0) \ \forall x \in X$
4. Si $H(x)$ es definida negativa $\forall x \in X$, luego F es estr. cóncava

<u>TEST:</u>

Los menores precipites de $H(x)$ son

$$
\begin{aligned}
D_1(x) &= |F_{11}| = F_{11} \\
D_2(x) &= \begin{vmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{vmatrix} \\
\vdots &= \\
D_i(x) &= \begin{vmatrix} F_{11} & F_{12} & \cdots & F_{1i} \\ \vdots & & & \\ F_{i1} & F_{i2} & \cdots & F_{ii} \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

Luego:

1. Si $(-1)^i D_i > 0, \ i = 1, 2, \ldots, n, \ H(x)$ es definida negativa en x, Si $H(x)$ es DN $\forall \ x \in X \Rightarrow F$ es est cóncava
2. Si $D_i(x) > 0 \ \forall \ i = 1, 2, \ldots, n, \ H(x)$ es definida positiva en x, Si $H(x)$ es DP $\forall x \in X \ \Rightarrow F$ es est. cónvexa.

Defina:

1. $\max\limits_{x} F(x)$
   $x \in \mathbb{R}$

   Luego asomiento que el conj. de soluciones es No sacía:

   * Sie s es un max local de F, luego $F'(x) = 0$

   <u>Entoicion:</u> $F(s + h) - F(s) \approx dy = F'(x)h$.

Note que (*) $\rightarrow$ la solución s pertena al conjunto de puntos coticos de F:

$$\{x : F'(x) = 0\}$$

Luego:

$**$ Si $F'(s) = 0$ y $F''(s) < 0 \Rightarrow F$ tiene un unico max. local en s

Intuición: Como $f''(s) < 0 \;\Rightarrow\; \exists\, B_\varepsilon(s)$ tal que $f'(x) > 0$ para $\forall\, x \in (s-\varepsilon, s)$ y $F'(x) < 0\ \forall \varepsilon(s, s+\varepsilon)$

$***$ Si $F'(s) = 0$ y F es est. concava en $\Rightarrow$ s el unico max global de F en $\mathbb{R}^n$.

2. Defina

$$\max F(x)$$
$$x \in \mathbb{R}^n$$

$*$ Si F alcanza un óptimo local en x^*, luego x^* resudare:

$$\nabla F(x^*) = 0$$

Ej: $F(x) = x_2 - 4x_1^2 + 3x_1x_2 - x_2^2 \quad \Rightarrow\; x_1^* = \dfrac{3}{7}$ y $x_2^* = \dfrac{8}{7}$. Luego:

$**$ Si $\nabla F(x^*) = 0$ y $H(x)$ en $x = x^*$ es Def. negativa $\Rightarrow F$ alcanza un max local en x^*

Ej: $H(x) = \begin{pmatrix} -8 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ y $D_1(x) = -8 < 0$ y $D_2(x) = 7 > 0 \Rightarrow$ x^* es un max. local.

<u>TEOREMA LOCAL-GLOBAL:</u>

Sea $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ cóncava. Luego los siguientes incisos con equivalentes:

(i) $\nabla F(x^*) = 0$

(ii) F alcanza en max local en x^*

(iii) F alcanza un max global en x^*

(iii) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (i). Ahora mostramos que (i) $\Rightarrow$ (iii). Sabemos que:

$$F(x) \leq F(x^*) + \nabla F(x^*)(x - x^*) \quad \Rightarrow \quad F(x) \leq F(x^*) \quad \forall x$$

Sea $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Cóncava. Luego

$$\underset{x}{\text{argmax}}\{F(x) : x \in X\}$$

Convexo.

$S \equiv \left\{x \in \mathbb{R}^n | F(x) \geq F(x^1) \ \forall x^1 \in \mathbb{R}^n\right\}$. Sean x^* y $x^{**} \in S$. Luego:

$$F(tx^* + (1-t)x^{**}) \geq F(x^*) \quad \Rightarrow \quad F(x^t) \geq F(x^*) \quad \Rightarrow \quad F(x^t) = F(x^*)$$

<u>TEOREMA:</u> Si x^* maximiza F que es est. cóncava, luego

$$F(x^*) > F(x) \quad \forall x \neq x^*$$

Suponga que no $\Rightarrow F(x') = F(x^*) \ \forall \ x' \neq x^*$. Luego:

$$\begin{aligned} &F(x^t) > tF(x^1) + (1-t)F(x^*) \ \forall \ t \in (0,1) \\ &F(x^t) > F(x^1) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ x^1 no es un max. global.

<u>TEOREMA:</u> Si F es est. cóncava y $\nabla F(x^*) = 0 \ \Rightarrow \ x^*$ es el onico max global.

<u>Programación NO-LINEAL</u>

Sea

$$F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

$$X \subset \mathbb{R}^n$$

Luego nuestro problema es:

$$\max F(x)$$
$$x \in X$$

$F \equiv$ función objetivo

$X \equiv$ conj. factible

$C \equiv$ variables elección.

Sumimos:

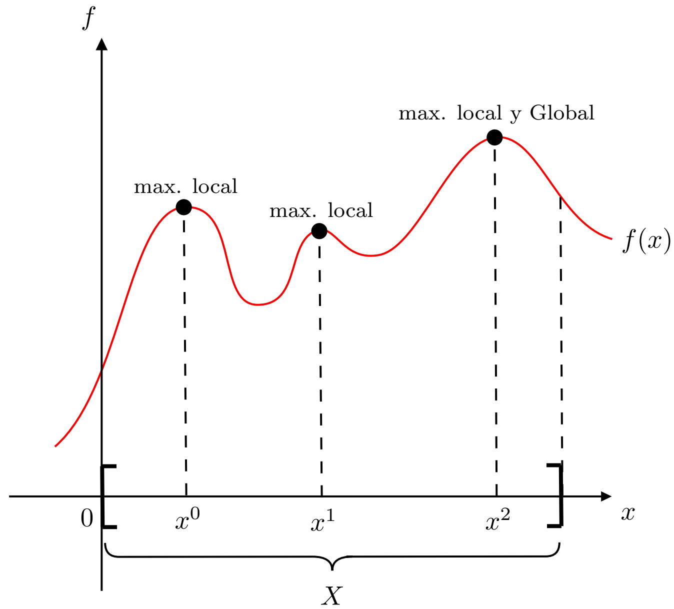
A1: F es diferenciable en $\mathbb{R}^n$ y X es compacto

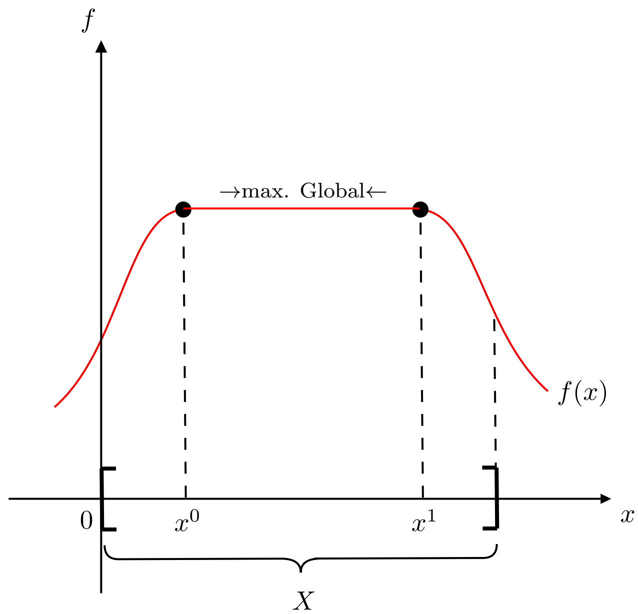
garantiza que (P) tiene al menos q solución. Ahora decimos que un punto factible $x^* \in X$

- $x^* \in X$ es un max global si $F(x^*) \geq F(x)\ \forall\ x \in X$
- $x^* \in X$ es un max. local si existe una bola abierta $B_\varepsilon(x^*) \cap X \neq \phi$ tal que $F(x^*) \geq F(x)$

$x \in X \cap B_\varepsilon(x^*)$, Recuerde que:

$$B_\varepsilon(x^*) \equiv \{x \in \mathbb{R}^n :\ d(x, x^*) < \varepsilon\}$$





Luego:

- x^* es un max local (global) estricto 0 unico si:

$$F(x^*) > F(x)\ \forall\ x \in B_\varepsilon(x^*) \cap X \text{ MAX LOCAL ESTRICTO)}$$

$$F(x^*) > F(x) \; \forall x \in X \text{ MAX. GLOBAL ESTRICTO}$$

En economía, en general, X se caracteriza en términos de rest. funcionales. Sea $G^j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ para $n = 1, 2, \dots, m$. Luego se asume en general:

$$\begin{aligned} &G^j(x) \leq c_j \quad j = 1, 2, \dots, m \\ &x_j \geq 0 \end{aligned}$$

Entonces en general:

$$X \equiv \left\{ x \in \mathbb{R}^n | G^j(x) \leq c_j \quad j = 1, 2, \dots, m; \quad x \geq 0 \right\}$$

Finalmente:

$$\text{(P)} \qquad \begin{aligned} &\max_x F(x) \\ &x \in X \equiv \left\{ x \in \mathbb{R}^n | G^j(x) \leq c_j, \; j = 1, 2, \dots, m, \quad x \geq 0 \right\} \end{aligned}$$

<u>Ejemplos:</u>

1. <u>Problema del consumidor:</u>

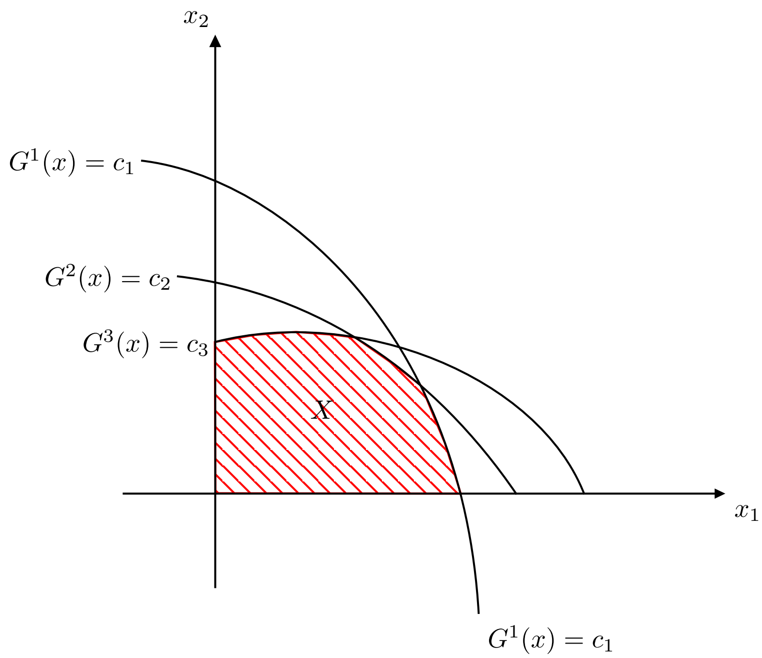
   (i) $F(x) = u(x); \; x \geq 0$ y $\underbrace{\sum_{i=1}^{n} p_i x_i \leq y}_{G(x) \leq c}$

2. <u>Minimización castor:</u>

   (a) $F(x) = \sum_{i=1}^{n} w_i x_i, \; x \geq 0$ y $f(x) \geq y$ es $-f(x) \leq -y \;\Rightarrow\; G(x) \leq c$ es $-f(x) \leq -y$

We will assume that $X = \phi$

X puede ser gráficamente representado par ej:



<u>REST. DE IGUALDAD:</u> Ahora consideramos

$$\max_x F(x)$$
$$X \equiv \{x \in \mathbb{R}^2 : \ G(x) = c\}$$

Vea notas para este caso. En general:

<u>TEOREMA LAGRANGE:</u> Sea $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $G^j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funcionas diferenciables. Suponga que es un óptimo (máximo-mínimo) o solución de:

$$\max_x F(x)$$
$$x \in X \equiv \{x \in \mathbb{R}^n : G^j(x) = c_j \quad \forall \ j = 1, 2, \ldots, m\}$$

$m < n$ Luego si:

- $\nabla G^j(x^*), \ j = 1, 2, \ldots, m$ son linealmente: adependientes, existen m números

  $A_j^* \quad j = 1, 2, \ldots, m$ tal que:

$$\frac{\partial L(x^*,\lambda^*)}{\partial x_i} = F_i(x^*) - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j G_i^j(x^*) = 0 \quad i = 1,2,\ldots,n$$

usa obtener la solución tenemos un sistema de $r+m$ reacciones

$$(E_i) \quad \frac{\partial L(x^*,\lambda^*)}{\partial x_i} = 0 \quad i = 1,2,\ldots,n$$

$$(E_j) \quad \frac{\partial L(x^*,\lambda^*)}{\partial \lambda_j} = G^j(x^8) - c^j = 0 \quad j = 1,2,\ldots,m$$

Podemos evalúan F en tolas aquellos puntos que satisfagan simultáneamente E_i y E_j.

EL SIGNIFICADO DEL MULTIPLICADON

ea

$$\begin{aligned}
&\max_{x\in X} F(x_1,x_2)\\
&X(c) \equiv \left\{x \in \mathbb{R}^2 | g(x_1,x_2) = c\right\}\\
&c \in C \subset \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Ejemplo:

- $F(x_1,x_2) = x_1 + x_2 - \frac{1}{2} \cdot x_2^2 - x_1^2$

  $g(x) = x_1 + x_2 = c, \quad c \in [0,1]$

  $\Rightarrow$ CPO:

$$1 - 2x_1 - \lambda = 0 \tag{1}$$

$$1 - x_2 - \lambda = 0 \tag{2}$$

$$x_1 + x_2 = c \tag{3}$$

D2 (1) y (2):

$$1 - 2x_1 = \lambda = 1 - x_2 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 2x_1 \tag{4}$$

Sando (4) en (3):

$$3x_1 = c \quad \Rightarrow \quad x_1^* = \frac{c}{3};\ x_2^* = \frac{2}{3}c$$

y $\lambda^* = \dfrac{(3-2c)}{3}$

Note que:

$$x_i^*(c),\ \lambda^*(c) \quad i = 1, 2$$

y $v(c) = F(x_1^*(c), x_2^*(c)) = c - \dfrac{3}{9}c^2 \quad \Rightarrow \quad v(c) = c\left(1 - \dfrac{3}{9} \cdot c\right)$

Es decir

$$v(c) = \max_x \{F(x) | g(x) = c\} = F(x_1^*(c), x_2^*(c))$$

TEOREMA: Sean F y g funciones C^1. La solución para un determinado valor de c es $(x_1^*(c), x_2^*(c), \lambda^*(c))$. Su ponga que $x_i^*(c)$ y $\lambda^*(c)$ son funciones c^1 de c. Luego:

$$\lambda^*(c) = \frac{d}{dc}F(x^*(c)) = v^1(c)$$

Demostración: Usando la Regla de la cadena:

1. $v'(c) = F_1(x^*(c))x_1'(c) + F_2(x'(c))x_2'(c)$ luego las CPO son:

2. $F_i(x^*(c)) - \lambda^*(c)g_i(x^*(c)) = 0 \quad i = 1, 2$

   Entonces: (2) en (1)

$$
\begin{aligned}
v'(c) &= \lambda^*(c)g_1(x^*(c)) + x_1'(c) + \lambda^*(c)g_2(x^*(c))x_2'(c) \\
&= \lambda^*(c)\left[g_1(x^*(c))\frac{dx_1^*(c)}{dc} + g_2(x^*(c))\frac{dx_2^*(c)}{dc}\right]
\end{aligned}
$$

pero como $g(x_1^*(c), x_2^*(c)) = c$ se tiene que:

$$
g_1(x^*(c))\frac{dx_1^*(c)}{dc} + g_2(x^*(c))\frac{dx_2^*}{dc}(c) = 1
$$

$$
\Rightarrow \qquad v'(c) = \lambda^*(c)
$$

En nuestro ejemplo:

$$
v'(c) = 1 - \frac{6}{9}c \quad \Rightarrow \quad v'(c) = 1 - \frac{2}{3}c = \lambda^*(c)
$$

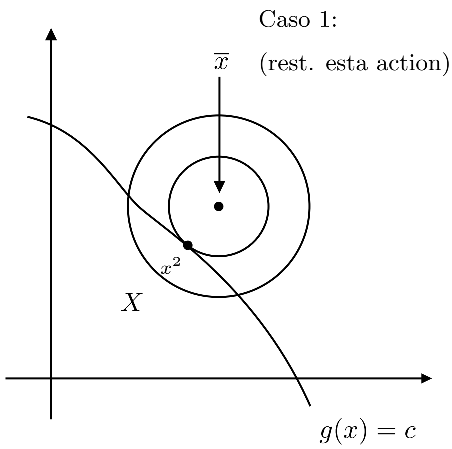
Si hay m restricciones de igualdad:

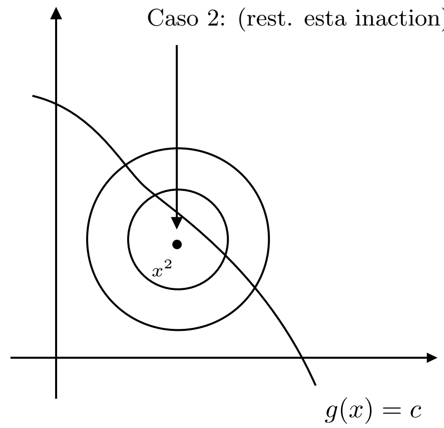
$$
\lambda_j^*(c_1, c_2, \ldots, c_m) = v_j'(c_1, \ldots, c_m)
$$

<u>Kohn-Tucker:</u> Suponga que $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y considere

$$
\begin{aligned}
&\max_{x \in X} F(x) \\
&X \equiv \{x \in \mathbb{R}^n | g(x) \leq c\}
\end{aligned}
$$

Suponga que $n = 2$. Considere:





El Lagrangiano es

$$L(x) = F(x) - \lambda(g(x) - c)$$

Luego:

- Si $g(x^*) = c$, entonces $L_i(x^*) = 0 \quad \forall i = 1, 2, \ldots, n$
- Si $g(x^*) < c$, Luego $F_i'(x^*) = 0 \quad \forall i$

Proposición: $\lambda^* \geq 0$

Caso 1: Si $\lambda^* < 0 \quad \Rightarrow \quad v'(c) < 0 \quad \Rightarrow \quad x^* \in \mathring{X} \quad \Rightarrow$ contradice x^* es óptimo. En el caso 2, $\lambda^* = 0$

Entonces: en el caso 2, $F_i'(x^*) = L_i'(x^*)$. Ahora

Caso 1: $\lambda^* \geq 0$ y $g(x^*) = c$

Caso 2: $\lambda^* = 0$ y $g(x^*) < c$

Luego podemos resumin:

$$L_i(x^*) = 0 \quad \forall\ i = 1, 2, \ldots, n$$

$$\lambda^* \geq 0,\ g(x^*) \leq c \text{ y } \lambda^* = 0 \text{ o } g(x^*) - c = 0$$

$\Rightarrow$

$$L_i(x^*) = 0 \quad \forall\ i$$

$$\lambda^* \geq 0,\ g(x^*) \leq c \text{ y } \lambda^*(g(x^*) - c) = 0$$

En general:

$$L(x) = F(x) - \sum_{j=1}^{m},\ \lambda_j(g^j(x) - c)$$

lar condiciones de Kuhn-Tocker para

$$(\mathrm{P}) \qquad \begin{aligned} &\max_{x \in X} F(x) \\ &X \equiv \left\{x \in \mathbb{R}^2 | g^j(x) \leq c_j \quad \forall\ j = 1, 2, \ldots, m\right\} \end{aligned}$$

un

$$\begin{aligned} &K_i'(x^*) = 0 \quad \forall\ i \\ &\lambda_j \geq 0,\ g_j(x^*) \leq c \text{ y } \lambda_j \left[g^j(x^*) - c\right] = 0 \quad \forall\ j = 1, 2, \ldots, m \end{aligned}$$

Si x^* satisface las condiciones de $K - T$, resuelve x^* el problema?? El siguiente teorema responde a esta pregunta.

TEOREMA 1: Sean F y g^j para $j = 1, 2, \ldots, m$ difenenciables. Asuma que:

(i) F es cóncava

(ii) g^j para $\forall\ j$ es lineal o g^j para $\forall j$ es convexa y existe on $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $g^j(x) < c_j\ \forall\ j$ Luego x^* resuelve (P) sii x^* satisface las $K - T$ condiciones de $K - T$

TEOREMA 2: Asuma que:

F es cuasi-cóncava y que g^j es lineal $\forall\ j$

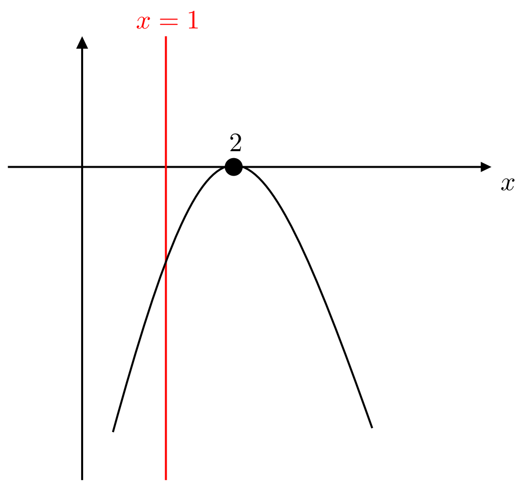
Luego si x^* resuelve (P), existe un vector λ^* que es unico y que (x^*, λ^*) satisface los condicionar le $K-T$ y si (x^*, λ) satisface los condiciones de $K-T$ y $F_i'(x^*) \neq o \; \forall \; i$, x^* resuelve P.

Ejemplos:

$$\max_{x \in X} \left[-(x-2)^2\right]$$
$$X \equiv \{x \in \mathbb{R} | x \geq 1\}$$

Note que $F(x) = -(x-2)^2 \quad \Rightarrow \quad F'(x) = -2(x-2) \quad \Rightarrow \quad F'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2$ y $F''(x) = -2 < 0$

Entonces:



$x^* = 2$.

Usando $K-T$ note que

$$\max_{x \in X} \left[-(x-2)^2\right]$$
$$X \equiv \{x \in \mathbb{R} | 1 - x \leq 0\}$$

F es cóncava y $g(x)$ es lineal. Entonces:

$$-2(x-2) + \lambda = 0 \tag{1}$$

$$\lambda \geq 0,\ x-1 \geq 0 \text{ y } \lambda(x-1)=0 \tag{2}$$

Suponga que $x = 1 \quad \Rightarrow \quad \lambda \geq 0$ y de (1):

$$2+\lambda = 0 \quad \text{imposible.}$$

Entonces sea $x > 1 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 0$ y $x^* = 2$

$$\max_{x\in X}\left[-(x_1-4)^2-(x_2-4)^2\right]$$
$$X \equiv \left\{x \in \mathbb{R}^2 :\ x_1+x_2 \leq 4 \text{ y } x_1+3x_2 \leq 9\right\}$$

Las condiciones de $K-T$ son:

$$-2(x_1-4)-\lambda_1-\lambda_2 = 0 \tag{1}$$

$$-2(x_2-4)-\lambda_1-3\lambda_2 = 0 \tag{2}$$

$$x_1+x_2 \leq 4,\ \lambda_1 \geq 0 \text{ y } \lambda_1(x_1+x_2-4)=0 \tag{3}$$

$$x_1+3x_2 \leq 9,\ \lambda_2 \geq 0 \text{ y } \lambda_2(x_1+3x_2-9)=0 \tag{4}$$

Usando $K-T$ note que

$$\max_{x\in X}\left[-(x-2)62\right]$$
$$X \equiv \{x \in \mathbb{R} | 1-x \leq 0\}$$

F es cóncava y $g(x)$ es lineal. Entonces:

$$-2(x-2)+\lambda = 0 \tag{1}$$

$$\lambda \geq 0,\ x-1 \geq 0 \text{ y } \lambda(x-1)=0 \tag{2}$$

Suponga que $x = q \quad \Rightarrow \quad \lambda \geq 0$ y de (1):

$$2 + \lambda = 0 \quad \text{imposible}$$

Entonces sea $x > 1 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 0$ y $x^* = 2$

$$\max_{x \in X} \left[-(x_1 - 4)^2 - (x_2 - 4)^2 \right]$$
$$X \equiv \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : \; x_1, x_2 \leq 4 \text{ y } x_1 + 3x_2 \leq 9 \right\}$$

Las condiciones de $K - T$ son:

$$-2(x_1 - 4) - \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \tag{1}$$

$$-2(x_2 - 4) - \lambda_1 - 2\lambda_2 = 0 \tag{2}$$

$$x_1 - x_2 \leq 4, \; \lambda_1 \geq 0 \text{ y } \lambda_1(x_1, x_2 - 4) = 0 \tag{3}$$

$$x_1 + 3x_2 \leq 0, \; \lambda_2 \geq 0 \text{ y } \lambda_2(x_1 + 3x_2 - 9) = 0 \tag{4}$$

Luego:

	g_1	g_2
1.	I	I
2.	A	A
3.	I	A
4.	A	I

1. $(I, I) \Rightarrow \lambda_1 = 0 = \lambda_2$. Luego de (1) y (2)

$$-2(x_1 - 4) = 0$$
$$-2(x_2 - 4) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_2 = 4$$

   Pero luego g_1 no se satiface.

2. $(A, A) \Rightarrow \lambda_i \geq 0 \; \forall \; i$ y que:

$$x_1 + x_2 = 4 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 4 - x_2$$
$$x_1 + 3x_2 = 9 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 9 - 3x_2$$

Entonces

$$x_2 = 4 - (9 - 3x_2) = -5 + 3x_2$$
$$2x_2 = 5 \ \Rightarrow \ x_2 = \frac{5}{2} \quad \text{y} \quad x_1 = \frac{3}{2}$$

Luego (1) y (2)

$$\begin{aligned}
&-2\left(\frac{3}{2} - 4\right) - \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\
&-2\left(-\frac{5}{2}\right) = \lambda_1 + \lambda_2 \\
&5 = \lambda_1 + \lambda_2 \ \Rightarrow \ \lambda_1 = 5 - \lambda_2 \\
&3 = \lambda_1 + 3\lambda_2 \\
&3\lambda_2 + 5 - \lambda_2 = 3 \ \Rightarrow \ 2\lambda_2 + 5 = 3 \ \Rightarrow \ 2\lambda_2 = -2 \text{ (imposible)}
\end{aligned}$$

(I, A) Luego:

$$x_1 + x_2 < 4, \ \lambda_1 = 0$$
$$x_1 + x_2 \cdot 3 = 9 \text{ y } \lambda_2 \geq 0$$

En (1), (2)

$$\begin{aligned}
&-2(x_1 - 4) = \lambda_2 && \text{(a)} \\
&-2(x_2 - 4) = 3\lambda_2 && \text{(b)} \\
&x_1 + 3x_2 = 9 && \text{(c)}
\end{aligned}$$

Usando (a) en (b):

$$
\begin{aligned}
-2(x_2-4) &= 3(-2(x_1-4)) \\
-2(x_2-4) &= -6(x_1-4) \\
-2x_2+8 &= -6x_1+24 \\
2x_2-8 &= 6x_1-24 \\
2x_2 &= 6x_1-16 \\
x_2 &= 3x_1-8
\end{aligned}
$$

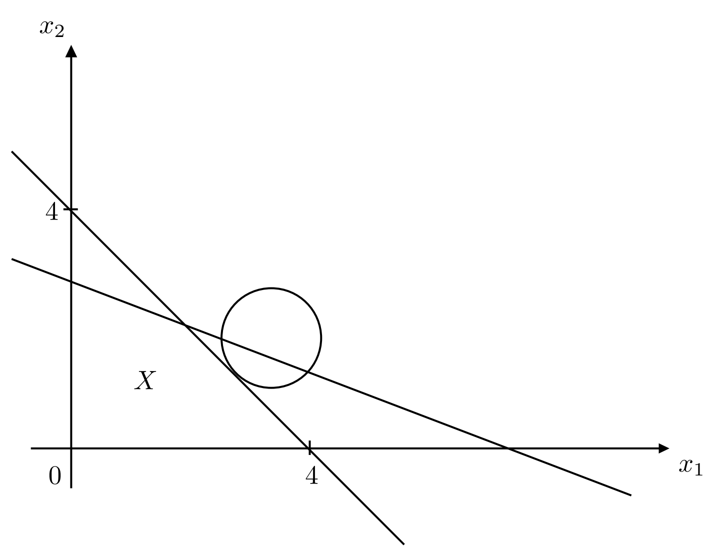
En (c):

$$x_1+9x_1-24=9 \ \Rightarrow \ 10x_1=33 \ \Rightarrow \ x_1=33/10 \text{ y } x_2=19/10$$

pero $\dfrac{33}{10}+\dfrac{19}{10}=4.9>4$

$(A,I) \Rightarrow x_1+x_2=4,\ \lambda_1 \geq 0$ y $\lambda_2=0$ Entonces:

$$\begin{array}{l} -2(x_1-4)=\lambda_1 \\ -2(x_2-4)=\lambda_1 \end{array} \quad \Rightarrow \quad x_1^*=x_2^*=2 \ ; \ \lambda_1^*>0$$



$$\begin{array}{llcll} \text{Donde} & g_1'(x) & = & x_1 + x_2 = 4 & \Rightarrow & x_2 = 4 - x_1 \\ & g^2(x) & = & 3x_2 + x_1 = 9 & \Rightarrow & x_2 = 3 - \dfrac{1}{3}x_1 \end{array}$$

TEOREMAS DE LA ENVOLVENTE:

1. Sea $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada pos $F(x, a)$ para $a \in \mathbb{R}$. Considere

$$\max_{x \in \mathbb{R}^n} F(x, a)$$

y assuma que $x^*(a)$ es la solución del problema. Suponga que x^* es C^1. Luego:

$$v'(a) = \frac{d}{da} \cdot F(x^*(a), a) = F_a(x^*(a), a) = \frac{\partial F(x^*(a), a)}{\partial a}$$

Demostración: Usando la RC:

$$\begin{aligned} v'(a) = \sum_{i=1}^{n} F_i(x^*(a), a)\frac{dx_i^*}{da} + F_a(x^*(a), a) & \\ & = \quad F_a(x^*(a), a) \end{aligned}$$

que $\nabla F_i(x^*, a) = 0$

Ejemplos:

(a) $F(x, a) = -x^2 + 2ax + 4a^2$

Entonces:

$F_x'(x, a) = -2x + 2a = 0 \;\Rightarrow\; x^*(a) = a$

$v(a) = 5a^2$ y $v'(a) = 10a$

Usando el TE:

$$\frac{\partial F}{\partial a}(x^*(a), a) = F_a(x^*(a), a) = 2x^*(a) + 8a = 10a$$

2. Sean F y $g^i : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones C^1 y $x^*(a) = (x_1^*(a), \ldots, x_2^*(a))$ sea a solución de

$$\max_{x \in X} F(x,a)$$
$$X \equiv \left\{ x \in \mathbb{R}^n | g^j(x,a) = 0 \right\}$$

Luego:

$$v'(a) = \frac{dF(x^*(a),a)}{da} = \frac{\partial L}{\partial a}(x^*(a), \lambda^*(a), a)$$

Demostración:

(a) $\dfrac{dF(x^*(a),a)}{da} = \sum_{i=1}^{n} F_i'(x^*(a),a)\dfrac{dx_1^*(a)}{da} + F_a'(x^*(a),a)$

(b) Las CPO con:

$$F_i(x^*(a),a) - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^* g_i^j(x^*(a),a) = 0$$

(c) Entonces:

$$\begin{aligned} v'(a) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \lambda_j^* g_i^j(x^*(a),a)\frac{dx_i^*}{da} + F_a'(x^*(a),a) \\ &= \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^* \left(\sum_{i=1}^{n} g_i^j \frac{x_i^*}{da} \right) + F_a'(x^*(a),a) \end{aligned}$$

(d) Luego

$$\begin{array}{lll} g^j(x^*(a),a) = 0 & \Rightarrow & \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} g_i^j \frac{dx_i^*}{da} + g_a^j = 0 & \Rightarrow & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} g_i^j \frac{dx_i^*}{da} = -g_a^j(x^*(a),a) \end{array}$$

(e) Use en 3:

$$v'(a) = -\sum_{j=1}^{m} \lambda_j^* g_a^j(x^*(a),a) + F_a'(x^*(a),a) \tag{*}$$

(f) $L(a) - F(x^*(a),a) - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^* g^j(x^*(a),a)$

$$y: \quad \frac{\partial L(a)}{\partial a} = F'_a(x^*(a), a) - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^* g_a^j(x^*(a), a) \tag{**}$$