李群和李代数及其应用

第二章 半单纯李代数及其根系

刘玉鑫

北京大学物理学院理论物理研究所

目 录

第一节 李代数的正则形式及其根的性质

第二节 半单李代数的根图与李代数的分类

第三节 素根系和邓金图

第四节 根的确定

北京大学物理学院, 2020年春季学期

§ 2.2 半单李代数的根图与半单李代数的分类

§ 2.2.1 半单李代数的根和根图的基本特征

一、性质

在正则形式的嘉当–外尔基下，半单李代数的根的性质归纳为：

(1) 如果 a 是根，则 $-a$ 也是根；

(2) 如果 a 和 b 是非零根，则 $2\frac{(a,b)}{(a,a)}$ 是整数；

(3) 如果 a 和 b 是非零根，则 $b-2\frac{(a,b)}{(a,a)}a$ 也是根；

(4) 两非零根 a、b 之间的夹角 φ 由下式定义：

$$cos\varphi = \frac{(a,b)}{((a,a)\,(b,b))^{1/2}} \;,$$

其数值由 $cos^2\varphi = 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}$ 决定。

由于 a 和 $-a$ 都是根，因此仅需考虑锐角，即有：

$$\varphi = \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6} \,.$$

§ 2.2 半单李代数的根图与半单李代数的分类

§ 2.2.1 半单李代数的根和根图的基本特征

一、性质

(5) 两非零根 a、b 之间的长度比为 $K_{ab}=\left(\frac{(a,a)}{(b,b)}\right)^{1/2}=\left(\frac{m'}{m}\right)^{1/2}$.

由 $\frac{(a,b)(b,a)}{(a,a)(b,b)}=\cos^2\varphi=\frac{mm'}{4}=0,\frac{1}{4},\frac{2}{4},\frac{3}{4}$ 知，

如果 $\varphi=\frac{\pi}{6},mm'=3$，则 $\frac{(a,b)}{(a,a)}=\frac{1}{2}$，或 $\frac{3}{4}$，$\frac{(b,a)}{(b,b)}=\frac{3}{2}$，或 $\frac{1}{4}$，

即有 $\frac{(b,b)}{(a,a)}=\frac{1}{3}$，或 3，则 $K_{ab}=\sqrt{3}$ 或 $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

如果 $\varphi=\frac{\pi}{4},mm'=2$，则 $\frac{(b,b)}{(a,a)}=\frac{1}{2}$，或 2，$K_{ab}=\sqrt{2}$ 或 $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

如果 $\varphi=\frac{\pi}{3},mm'=1$，则 $\frac{(b,b)}{(a,a)}=1$，$K_{ab}=1$.

如果 $\varphi=\frac{\pi}{2},mm'=0$，则 $\frac{(b,b)}{(a,a)}=$ 不确定，K_{ab} 不确定。

特殊地，单李代数最多只能有两种不同长度的根。

§ 2.2 半单李代数的根图与半单李代数的分类

§ 2.2.1 半单李代数的根和根图的基本特征

二、根图

1. 定义

对l秩半单李代数，定义其正交归一基为仅某一行矩阵元为1、其它矩阵元都为0的l行列矩阵，

在该正交归一基为基的坐标系中表征根的性质的图示称为半单李代数的根图。

2. 基本特征

由根的基本性质知，根图的基本特征有：

(1) 长度比为$\sqrt{3}$、或$\sqrt{2}$、或1、或不定；

(2) 相邻根之间的夹角度可能是$\dfrac{\pi}{6}$、或$\dfrac{\pi}{4}$、或$\dfrac{\pi}{3}$、或$\dfrac{\pi}{2}$．

§2.2.2 典型半单李代数的根图

一、二秩半单李代数的根图

因为 $l=2$，则其根图可在二维平面上明显展示。

对于非零根，相邻两根夹角 φ 是满足关系：

$$\cos^2\varphi=\frac{mm'}{4}=0,\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{2},\ \frac{3}{4},$$

其中 $m,m'=q-p$，$q,p=$非负整数，且 $p+q\le 3$.

具体如下。

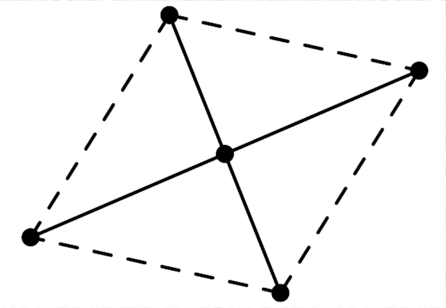
1. $\cos^2\varphi=\frac{mm'}{4}=0$

$\because\ mm'=0$，两相邻根a、b之间夹角 $\varphi=90^{\circ}$，

则仅有两对（4个）互逆的非零根；

又 $\because (a,b)=0$，则两不同根长度间无关系。

图示如右，非零根对应菱形的四个顶点。



特点：共6个根，即该李代数的维数为6.

$\because 6=2\cdot 3=\frac{1}{2}4(4-1)$，则可猜测它与 $so(4)\sim so(3)\oplus so(3)$ 的根图相同。

§ 2.2.2 典型半单李代数的根图

一、二秩半单李代数的根图

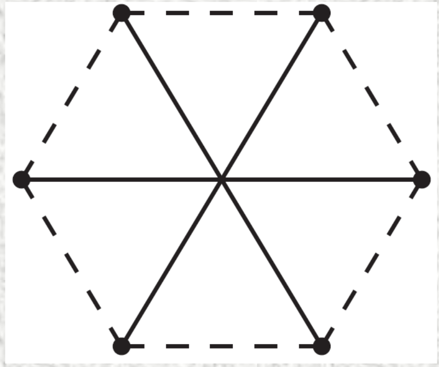
2. $\cos^2\varphi = \frac{mm'}{4} = \frac{1}{4}$

$\because\ mm' = 1$，两相邻根a、b之间夹角 $\varphi = 60°$,

则仅有三对（6个）互逆的非零根;

又$\because\ mm' = 1$ 仅有解 $m = m' = 1$,

由 $\frac{2(b,a)}{(b,b)} = m' = m = \frac{2(a,b)}{(a,a)} = 1$ 则知，$a^2 = b^2$，即不同根等长。



图示如右， 非零根对应正六边形的六个顶点。

特点：共8个根（6个非零根、2个零根），

即该李代数为8维李代数。

$\because\ 8 = 3^2 - 1$,

则可猜测它与$su(3)$的根图相同。

外推：$su(l+1)$李代数的非零根对应$(l+1)$维空间中的l维超平面中互成$60°$夹角、长度相同的射线的端点。

§ 2.2.2 典型半单李代数的根图

一、二秩半单李代数的根图

3. $\cos^2\varphi = \dfrac{mm'}{4} = \dfrac{1}{2}$

$\because\ \cos^2\varphi = 1/2$，两相邻根a、b之间夹角 $\varphi = 45°$，

则仅有四对（8个）互逆的非零根；

又 $\because mm' = 2$ 有解 $m = 2$、$m' = 1$，和 $m = 1$、$m' = 2$，

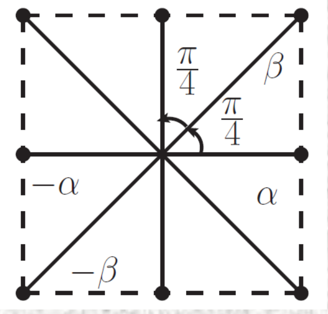
由 $\dfrac{2(a,b)}{(a,a)} = m$ 和 $\dfrac{2(b,a)}{(b,b)} = m'$ 则知，$\dfrac{a^2}{b^2} = 2$、或 $1/2$，

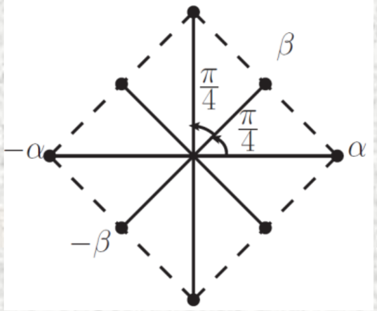
即 相邻根的长度有 $\sqrt{2}$ 倍的关系。

两种长度比情况下非零根的根图如右，

非零根对应正方形的四个顶点和

和两对边的中点。





特点：共10个根(8个非零、2个零)，即该李代数为10维李代数。

$\because\ 10 = \frac{1}{2}5(5-1) = 2(2\cdot 2+1)$，

则可猜测这两种情况分别与 $so(5,R)$、$sp(4,R)$ 的根图相同。

§ 2.2.2 典型半单李代数的根图

一、二秩半单李代数的根图

$$4.\ \cos^2\varphi=\frac{mm'}{4}=\frac{3}{4}$$

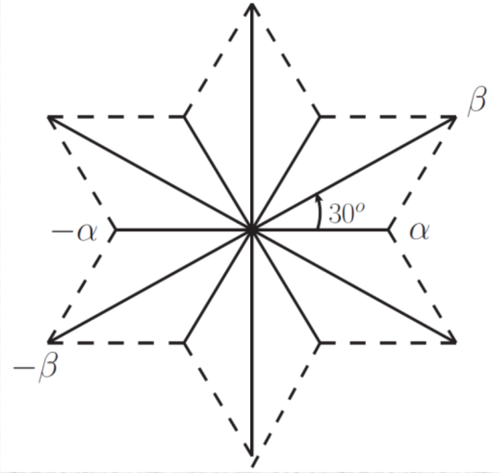
$\because\ \cos^2\varphi=3/4$，两相邻根a、b之间夹角 $\varphi=30°$，

则仅有六对（12个）互逆的非零根；

又 $\because\ mm'=3$ 有解 $m=3$、$m'=1$，和 $m=1$、$m'=3$，

由 $\frac{2(a,b)}{(a,a)}=m$ 和 $\frac{2(b,a)}{(b,b)}=m'$ 则知，$\frac{a^2}{b^2}=3$、或 $1/3$，

即 相邻根的长度有 $\sqrt{3}$ 倍的关系。



在二维平面上画出，即有右图示的根图，

非零根对应 David 星的12 顶点。

特点：共14 个根(12 个非零、2个零)，

即该李代数为14 维李代数；

找不到典型矩阵群对应的李代数与之对应，

即不对应典型李代数，亦即为例外李代数，常记为G_2。

二、三秩及高秩半单李代数的根图

对 l 秩李代数，取基为正交归一基 $\{e_i | i = 1,2,\cdots,l\}$，

其中 e_i 为仅 第 i 行矩阵元为1、其它矩阵元都为0 的 l 行1列矩阵。

按相邻非零根间的夹角 φ 满足 $\cos^2\varphi = \frac{mm'}{4} = 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}$，

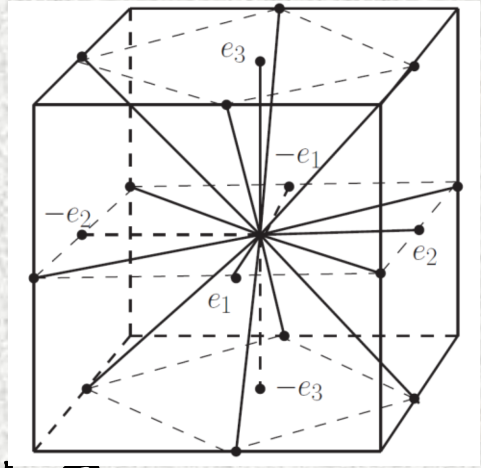
我们有下列根图。

1. $\cos^2\varphi = \frac{mm'}{4} = 0$ 情况

(1) 对 $l = 3$

$\because$ $mm' = 0$，$(a,b) = 0$，则两相邻根 a、b 之间夹角 $\varphi = 90^\circ$，

不同根的长度间无确定关系。



取它们相等，在三维空间则有右图示的根图；

非零根对应正方体的中心到12条棱的中点的连线。

取原点在中心、坐标轴沿三对面中心连线，

则非零根为：$\pm e_1 \pm e_2, \pm e_2 \pm e_3, \pm e_3 \pm e_1$.

$\because$ $15 = 3 \cdot 5 = \frac{1}{2} 6(6-1)$，则它可能与 $so(6)$ 的根图相同。

§ 2.2.2 典型半单李代数的根图

二、三秩及高秩半单李代数的根图

1. $\cos^2\varphi = \frac{mm'}{4} = 0$ 情况

(2) 对 $l > 3$

$\because\ mm' = 0$，$(a,b) = 0$，

则两相邻根a、b之间夹角 $\varphi = 90^{\circ}$，

不同根的长度间无确定关系。

取它们相等，

则非零根可表述为：$\pm e_i \pm e_j,\ i, j = 1, 2, \cdots, l.$

这些非零根的数目为：$4 \cdot C_l^2 = 4 \cdot \frac{l!}{(l-2)!\,2!} = 2l(l-1).$

再考虑它有 l 个零根，

则其根的总数为 $l(2l-1) = \frac{1}{2} 2l(2l-1)$,

与典型矩阵群 $SO(n=2l)$ 对应的李代数的维数(根的数目)相同，

(从而它对应 $so(2l)$ 李代数)，常记之为 D_l 李代数。

§ 2.2.2 典型半单李代数的根图

二、三秩及高秩半单李代数的根图

2. $\cos^2\varphi = \dfrac{mm'}{4} = \dfrac{1}{4}$ 情况

(1) 对 $l = 3$

$\because\ mm' = 1$，$m = m' = 1$，

则两相邻非零根a、b间夹角 $\varphi = 60^\circ$，长度相同（$a^2 = b^2$）.

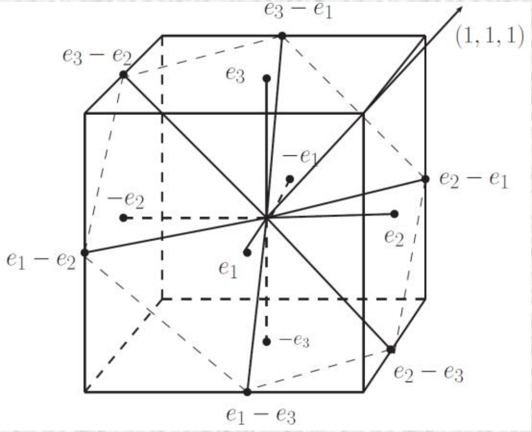
对 $\varphi = 60^\circ$、 $l = 2$ 情况下的根可在三维正交归一基下表述为

$$a = e_i - e_j,\ b = e_i - e_k,\ i, j, k = 1,2,3,$$ 外推，

知，$\varphi = 60^\circ$、 $l = 3$ 情况下的根可在四维正交归一基下表述为

$$a = e_i - e_j,\ b = e_i - e_k,\ i, j, k = 1,2,3,4.$$

即这些非零根分布在四维空间中的三维“超平面”上，其一部分可图示如右。



它共有 15 个根（12个非零、3个零），

则非零根为：$\pm e_1 \pm e_2$，$\pm e_2 \pm e_3$，$\pm e_3 \pm e_1$.

$\because\ 15 = 4^2 - 1$，则它与$su(4)$李代数的维数相同。

与 $\varphi = 90^\circ$，$l = 3$ 情况比较知，$so(6) \cong su(4)$.

§ 2.2.2 典型半单李代数的根图

二、三秩及高秩半单李代数的根图

2. $\cos^2\varphi = \dfrac{mm'}{4} = \dfrac{1}{4}$ 情况

(2) 对 $l > 3$

$\because\ mm' = 1,\ m = m' = 1$,

则两相邻非零根 a、b 间夹角 $\varphi = 60^\circ$，长度相同（$|a|^2 = |b|^2$）.

推广 $l = 3$ 情况知，

其非零根可以表述为： $e_i - e_j,\ i, j = 1, 2, \cdots, l, l+1$,

对应 $(l+1)$ 维空间中发自原点的长度相同、互成 $\dfrac{n\pi}{3}$ 夹角的射线的端点。

这些非零根的数目为： $2\cdot C_{l+1}^{2} = 2\cdot\dfrac{(l+1)!}{(l-1)!2!} = l(l+1)$,

再考虑它有 l 个零根，

则知，其根的总数为 $l(l+1)+l = (l+1)^2-1$,

与典型矩阵群 $SU(n=l+1)$ 对应的李代数的维数(群的阶数)相同，

从而它对应 $su(l+1)$ 李代数，常记之为 A_l 李代数。

§ 2.2.2 典型半单李代数的根图

二、三秩及高秩半单李代数的根图

3. $\cos^2\varphi = \dfrac{mm'}{4} = \dfrac{1}{2}$ 情况

(1) 对 $l = 3$

由 $\cos^2\varphi = \frac{1}{2} = (\frac{1}{\sqrt{2}})^2$ 知，两相邻根 a、b 之间夹角 $\varphi = 45°$，

又 $\because mm' = 2$ 有解 $m = 2$、$m' = 1$，和 $m = 1$、$m' = 2$，

由 $\dfrac{2(a,b)}{(a,a)} = m$ 和 $\dfrac{2(b,a)}{(b,b)} = m'$ 则知，$\dfrac{|a|^2}{|b|^2} = 2$、或 $1/2$，

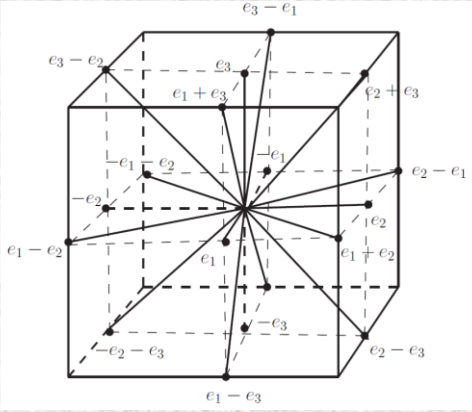
即 相邻根的长度有 $\sqrt{2}$ 倍的关系。

从而，在三维正交（归一）基下有两种表述。

〈1〉 取 $a = \pm e_i$，$b = \pm e_i \pm e_j$，$i, j = 1,2,3$.

显然，$\cos^2\varphi = \dfrac{(\pm e_i, \pm e_i \pm e_j)^2}{(\pm e_i, \pm e_i)\,(\pm e_i \pm e_j, \pm e_i \pm e_j)} = \dfrac{1^2}{1\cdot 2} = \dfrac{1}{2}$，

$$\frac{(a,a)^{1/2}}{(b,b)^{1/2}} = \frac{(\pm e_i, \pm e_i)^{1/2}}{(\pm e_i \pm e_j, \pm e_i \pm e_j)^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$



非零根的根图可图示如右(分布在三个坐标平面上)。

§ 2.2.2 典型半单李代数的根图

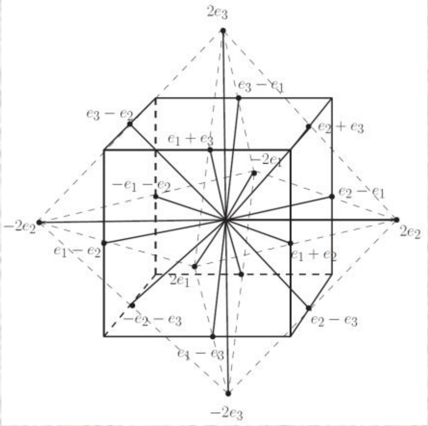
二、三秩及高秩半单李代数的根图

3. $\cos^2\varphi = \frac{mm'}{4} = \frac{1}{2}$ 情况

(1) 对 $l = 3$

其非零根在三维正交（归一）空间中有两种表述。

⟨2⟩ 取 $a = \pm 2e_i$，$b = \pm e_i \pm e_j$，$i, j = 1,2,3$.



显然, $\cos^2\varphi = \frac{(\pm 2e_i, \pm e_i \pm e_j)^2}{(\pm 2e_i, \pm 2e_i)(\pm e_i \pm e_j, \pm e_i \pm e_j)} = \frac{2^2}{4\cdot 2} = \frac{1}{2}$,

$$\frac{(a,a)^{1/2}}{(b,b)^{1/2}} = \frac{(\pm 2e_i, \pm 2e_i)^{1/2}}{(\pm e_i \pm e_j, \pm e_i \pm e_j)^{1/2}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

非零根的根图可图示如右 (分布在三个坐标平面上)。

两种方案下，a 都有 6 个值，b 都有12 个值（$4\cdot 3 = 4C_3^2$），

即共有 18 个非零根。

再考虑它有 3 个零根，则其根的总数为 21.

由 $21 = 3\cdot(2\cdot 3 + 1)$ 知, 该李代数的根的数目与典型矩阵群 $SO(7)$ 和 $SP(6)$ 对应的李代数的维数相同，常分别称之为 B_3、C_3 李代数。

§ 2.2.2 典型半单李代数的根图

二、三秩及高秩半单李代数的根图

3. $\cos^2\varphi=\frac{mm'}{4}=\frac{1}{2}$ 情况

(2) 对 $l>3$

$\because\ mm'=2$, $\Rightarrow$ $m=2$、$m'=1$，和 $m=1$、$m'=2$，

$\therefore$ 两相邻非零根 a、b 间夹角 $\varphi=45^{\circ}$，长度有相差 $\sqrt{2}$ 倍的关系。

推广 $l=3$ 情况知，其非零根可以表述为：

$$a=\pm e_i,\ b=\pm e_i\pm e_j,\ i,j=1,2,\cdots,l;$$

或 $$a=\pm 2e_i,\ b=\pm e_i\pm e_j,\ i,j=1,2,\cdots,l.$$

这些非零根的数目为：$2l+4C_l^2=2l+4\cdot\frac{l!}{(l-2)!\,2!}=2l^2$,

再考虑它有 l 个零根，

则知，其根的总数为 $2l^2+l=l(2l+1)$.

这两种李代数常分别称为 B_l 李代数、C_l 李代数。

由于其维数 $l(2l+1)=\frac{1}{2}(2l+1)(2l+1-1)$、$=\frac{1}{2}2l(2l+1))$，

则可推测它们分别对应 $so(2l+1)$ 李代数、$sp(2l)$ 李代数。

§ 2.2.2 典型半单李代数的根图

二、三秩及高秩半单李代数的根图

4. $\cos^2\varphi=\dfrac{mm'}{4}=\dfrac{3}{4}$ 情况

(1) 对 $l=3$

由 $\cos^2\varphi=\dfrac{3}{4}=(\dfrac{\sqrt{3}}{2})^2$ 知，两相邻根 a、b 之间夹角 $\varphi=30°$，

又 $\because\ mm'=3$ 有解 $m=3$、$m'=1$，和 $m=1$、$m'=3$，

由 $\dfrac{2(a,b)}{(a,a)}=m$ 和 $\dfrac{2(b,a)}{(b,b)}=m'$ 则知，$\dfrac{a^2}{b^2}=3$、或 $1/3$，

即相邻根的长度有 $\sqrt{3}$ 倍的关系。

在三维正交（归一）基下，记之为

$$a=a^1e_1+a^2e_2+a^3e_3,\qquad b=b^1e_1+b^2e_2+b^3e_3,$$

假设 $\dfrac{|a|^2}{|b|^2}=\dfrac{1}{3}$，则应有，$\cos^2\varphi=\dfrac{(a^1b^1+a^2b^2+a^3b^3)^2}{\left({a^1}^2+{a^2}^2+{a^3}^2\right)({b^1}^2+{b^2}^2+{b^3}^2)}=\dfrac{3}{4}$，

$$\frac{2\,(a^1b^1+a^2b^2+a^3b^3)}{\left({a^1}^2+{a^2}^2+{a^3}^2\right)}=3\,,\qquad \frac{2(a^1b^1+a^2b^2+a^3b^3)}{({b^1}^2+{b^2}^2+{b^3}^2)}=1\,.$$

§ 2.2.2 典型半单李代数的根图

二、三秩及高秩半单李代数的根图

4. $\cos^2\varphi=\frac{mm'}{4}=\frac{3}{4}$ 情况

(1) 对 $l=3$

解之得：$a^i=1,\ a^j=-1,\ \ i,\ j=1,2,3,\ \ i\neq j\,;$

$$b^i=\pm 2,\ b^j=b^k=\mp 1,\ \ i,\ j,k=1,2,3,\ \ i\neq j\,.$$

即有 $a=e_i-e_j,\qquad b=\pm 2e_i\mp e_j\mp e_k\,,$

它们各有6个值，即共有12个非零根。

考察其特征知，这些根即前述的 G_2 的非零根。

(2) 对 $l>3$

记之为 $a=a^1e_1+a^2e_2+\cdots+a^le_l,\ \ b=b^1e_1+b^2e_2+\cdots+b^le_l\,,$

假设 $\frac{a^2}{b^2}=\frac{1}{3}$，则应有 $\cos^2\varphi=\frac{(a^1b^1+a^2b^2+\cdots+a^lb^l)^2}{\left({a^1}^2+{a^2}^2+\cdots+{a^3}^2\right)({b^1}^2+{b^2}^2+\cdots+{b^3}^2)}=\frac{3}{4}\,,$

$$\frac{2\,(a^1b^1+a^2b^2+\cdots+a^lb^l)}{\left({a^1}^2+{a^2}^2+\cdots+{a^l}^2\right)}=3\,,\qquad \frac{2\,(a^1b^1+a^2b^2+\cdots+a^3b^3)}{({b^1}^2+{b^2}^2+\cdots+{b^l}^2)}=1\,.$$

计算知，该方程组无解。即无满足条件的非零根，从而无相应的李代数。

§ 2.2.3 例外李代数及其根图

前述的半单李代数的根仅有2种长度，

典型矩阵群对应的李代数的所有根最多仅有2个分量，

例外的是：$\cos^2\varphi=\frac{3}{4}$ 情况下有包含3个分量的根，但它们可由2个分量的投影表征，并称这样的李代数为G_2李代数。

多于3个分量的根的存在性自然成为需要认真讨论的课题。

一、$l=4$ 情况

以 $\{a\}=\{\pm e_i\pm e_j|i,j\in[1,4],i\neq j\}$ 为基础

（B_4、C_4、D_4都有$4C_l^2=2l(l-1)=24$个这样的非零根），

记包含 4 个分量的根为 $b=b^1e_1+b^2e_2+b^3e_3+b^4e_4$,

则 $b^2=b^{1^2}+b^{2^2}+b^{3^2}+b^{4^2}$.

$\because\ a=\pm e_i\pm e_j$，$a^2=(a,\ a)=2$, $(a,\ b)=\pm b^i\pm b^j$,

则 $$\cos\varphi=\frac{(a,b)}{((a,a)(b,b))^{1/2}}=\frac{\pm b^i\pm b^j}{\sqrt{2}|b|}.$$

§ 2.2.3 例外李代数及其根图

一、$l=4$ 情况

对 $\cos\varphi=\frac{\pm b^i\pm b^j}{\sqrt{2}|b|}=0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}$ 四种情况，可能的解为

(1) $b_1=\pm e_i$，$(i\in[1,4])$; $\rightarrow$ 8 个非零根;

(2) $b_2=\frac{1}{2}(\pm e_1\pm e_2\pm e_3\pm e_4)$; $\rightarrow$ 16 个非零根;

(3) $b_3=\pm 2e_i$，$(i\in[1,4])$; $\rightarrow$ 8 个非零根;

(4) $b_4=\pm e_1\pm e_2\pm e_3\pm e_4$; $\rightarrow$ 16 个非零根;

即有两种长度（$|b_1|=|b_2|=1$，$|b_3|=|b_4|=2$）的非零根各24个;

考虑与$\{a\}$对应的24 个非零根，和4个零根 $\Longrightarrow$ 共52 个根; 。

按长度比分两种情况：$\{a;b_1,b_2\}$ $(\frac{|a|}{|b|}=\sqrt{2})$; $\{a;b_3,b_4\}$ $(\frac{|a|}{|b|}=\frac{1}{\sqrt{2}})$;

常称该李代数为 F_4 李代数。

它有子代数$\{a,b_1;0\}$（$so(9)$、B_4）、$\{a,b_3;0\}$（$sp(8)$、C_4）.

二、$l>4$ 情况

1. 以 A_l 的非零根 $\{a\}=\{e_i-e_j|i,j\in[1,l+1],i\neq j\}$ 为基础

（共 $2C_{l+1}^2=l(l+1)$ 个长度为 $\sqrt{2}$ 的非零根）

设有 $b=b^1e_1+b^2e_2+\cdots+b^ke_k$，

则 $b^2={b^1}^2+{b^2}^2+\cdots+{b^k}^2$，$(a, b)=b^i-b^j$，

从而 $\cos\varphi=\dfrac{(a,b)}{((a,a)(b,b))^{1/2}}=\dfrac{b^i-b^j}{\sqrt{2}|b|}$.

对 上式 $=0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}$ 四种情况，可能的解为

(1) $l=5$ 情况下

$$b=\begin{cases}\frac{1}{2}(\pm e_1\pm e_2\pm e_3\pm e_4\pm e_5\pm e_6)\pm\frac{e_7}{\sqrt{2}}, \\ \qquad\qquad\text{(前 6 项中，3 项取正号、3项取负号)} \\ \pm\sqrt{2}e_7, \\ 0 .\end{cases}$$

二、$l>4$ 情况

相应地， $\cos\varphi=\begin{cases}0, & \text{多分量的投影符号相同，或仅 1 个分量；}\\ \frac{1}{2}, & \text{多分量的投影符号不同。}\end{cases}$

$\{b\}$ 共有 $2\cdot C_6^3+2=2\cdot\frac{6!}{(6-3)!\,3!}+2=42$ 个非零根(等长, $\sqrt{2}$)；

考虑 A_5 有30 个非零根， $\Longrightarrow$ 该李代数共有72 个非零根；

再考虑 A_5 有5 个零根、b 有1 个0 值，

$\Longrightarrow$ 该李代数共有78 个根。

这一以 A_5 为基础的李代数称为E_6 李代数。

它有子代数 $A_5\oplus A_1$.

（$A_1=\{0,\pm\sqrt{2}e_7\}$ ）.

§ 2.2.3 例外李代数及其根图

二、$l > 4$ 情况

1. 以 A_l 的非零根 $\{a\} = \{e_i - e_j | i, j \in [1, l+1], i \neq j\}$ 为基础

（共 $2C_{l=1}^2 = l(l+1)$ 个长度为 $\sqrt{2}$ 的非零根）

(2) $l = 7$ 情况下

$$b = \frac{1}{2}(\pm e_1 \pm e_2 \pm e_3 \pm e_4 \pm e_5 \pm e_6 \pm e_7 \pm e_8),$$

(其中，4 项取正号、4项取负号).

相应地， $\cos\varphi = \begin{cases} 0, & \text{与}\{a\}\text{的分量相同的坐标值的符号相同；} \\ \frac{1}{2}, & \text{与}\{a\}\text{的分量相同的坐标值的符号不相同。} \end{cases}$

$\{b\}$ 共有 $C_8^4 = \frac{8!}{(8-4)!4!} = 70$ 个非零根 (长度都为 $\sqrt{2}$);

考虑 A_7 有56 个非零根， $\Longrightarrow$ 该李代数共有126 个非零根;

再考虑 A_7 有7 个零根， $\Longrightarrow$ 该李代数共有133 个根。

这一以 A_7 为基础的李代数称为E_7 李代数。 它有子代数 A_7.

§ 2.2.3 例外李代数及其根图

二、$l>4$ 情况

2. 以 D_l 的非零根 $\{a\}=\{\pm e_i \pm e_j | i,j\in[1,l], i\neq j\}$ 为基础

（共 $4C_l^2=2l(l-1)$ 个长度为 $\sqrt{2}$ 的非零根）

设有 $b=b^1e_1+b^2e_2+\cdots+b^ke_k$,

则 $b^2=b^{1^2}+b^{2^2}+\cdots+b^{k^2}$，$(a, b)=\pm b^i\pm b^j$,

从而 $$\cos\varphi=\frac{(a,b)}{((a,a)(b,b))^{1/2}}=\frac{\pm b^i\pm b^j}{\sqrt{2}|b|}.$$

对 上式 $=0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}$ 四种情况，可能的解仅为

在 $l=8$ 情况下，$k=8$,

即有 $$b=\frac{1}{2}(\pm e_1\pm e_2\pm e_3\pm e_4\pm e_5\pm e_6\pm e_7\pm e_8),$$

(其中，偶数个取正号、偶数个取负号).

相应地，$$\cos\varphi=\begin{cases}0, & \pm b^i\pm b^j=0;\\ \frac{1}{2}, & \pm b^i\pm b^j=1;\end{cases}$$

§ 2.2.3 例外李代数及其根图

二、$l>4$ 情况

2. 以 D_l 的非零根$\{a\}=\{\pm e_i\pm e_j|i,j\in[1,l],i\neq j\}$ 为基础

（共 $2C_l^2=2l(l-1)$ 个长度为$\sqrt{2}$的非零根）

$\{b\}$共有 $C_8^2+C_8^4+C_8^6+2=\frac{8!}{(8-2)!2!}+\frac{8!}{(8-4)!4!}+\frac{8!}{(8-6)!6!}+2=128$

个非零根 (长度都为 $\sqrt{2}$);

考虑 D_8 有112 个非零根， $\Longrightarrow$ 该李代数共有240 个非零根;

再考虑 D_8 有8 个零根， $\Longrightarrow$ 该李代数共有248 个根。

这一以 D_8 为基础的李代数称为E_8 李代数。

它有子代数 D_8.

§2.2.4 半单李代数的分类

一、分类

关于根系的讨论表明：在正交归一基下，李代数 g 可分为两类，

一类的根最多只有 2 种长度、2个投影分量；

另一类的根具有 2 个以上（3、4、7、8、8）的分量。

据此，称前一类为典型李代数、后一类为例外李代数。

根据非零根的长度关系及相邻者之间的夹角，

典型李代数分为 A_l、B_l、C_l 和 D_l 4 种，

例外李代数分为 G_2、F_4、E_6、E_7 和 E_8 5 种。

二、各种类半单李代数的根的特征小结

1. A_l 李代数

有 $(l+1)^2-1$ 根（l 个零根和 $l(l+1)$ 个非零根），

非零根可表述为 $e_i - e_j \ (i, j = 1,2,\cdots,l,(l+1),\ i \neq j)$，

分布在 $(l+1)$ 维空间的 l 维超平面上，长度相同，相邻者夹角 $\frac{\pi}{3}$.

对应的群 $SU(l+1)$，也常称之为 $su(l+1)$ 单李代数。

§ 2.2.4 半单李代数的分类

二、各种类半单李代数的根的特征小结

2. B_l 李代数

有 $l(2l+1)$ 根，其中（l 个零根和 $2l^2$ 个非零根），

非零根分布在 l 维空间中，相邻根之间夹角 $\frac{\pi}{4}$，长度有 $\sqrt{2}$ 倍关系，

可表述为 $\pm e_i, \pm e_i \pm e_j \ (i, j = 1,2,\cdots,l, \ i \neq j)$.

对应的群 $SO(2l+1)$，也常称之为 $so(2l+1)$ 李代数。

3. C_l 李代数

有 $2l^2$ 个非零根，分布在 l 维空间中，相邻根之间夹角 $\frac{\pi}{4}$，

长度有 $\sqrt{2}$ 倍关系，可以表述为 $\pm 2e_i, \pm e_i \pm e_j \ (i, j = 1,2,\cdots,l, \ i \neq j)$.

对应的群 $SP(2l)$，也常称之为 $sp(2l)$ 李代数。

4. D_l 李代数

有 $2l(l-1)$ 个非零根，分布在 l 维空间中，相邻根之间夹角 $\frac{\pi}{2}$，

长度间无固定关系. 取之等长，则可表述为 $\pm e_i \pm e_j \ (i, j = 1,2,\cdots,l, \ i \neq j)$,

对应的群 $SO(2l)$，也常称之为 $so(2l)$ 李代数。

二、各种类半单李代数的根的特征小结

5. G_2 李代数

有 2 个零根；12 个非零根，在 3 维直角坐标空间中可表述为：

$$e_i - e_j,\ \pm 2e_i \mp e_j \mp e_k\ \ (i, j, k = 1, 2, 3, i \neq j \neq k);$$

也可在 2 维空间中表述为 David 星的形式（相邻根之间夹角 $\frac{\pi}{6}$，长度有 $\sqrt{3}$ 倍关系）.

对应的群称为 G_2 群。

6. F_4 李代数（以 B_4 为基础的李代数）

有 52 个根，其中 4 个为零根，48 个为非零根。非零根可表述为

$$\pm e_i,\ \pm e_i \pm e_j\ \ (i, j = 1,2,3,4),\ \frac{1}{2}(\pm e_1 \pm e_2 \pm e_3 \pm e_4).$$

相邻非零根之间夹角 $\frac{\pi}{4}$，长度有 $\sqrt{2}$ 倍关系。

对应的群称为 F_4 群。

§ 2.2.4 半单李代数的分类

二、各种类半单李代数的根的特征小结

7. E_6 李代数 （以 A_5 为基础的李代数）

有 78 个根，其中 6 个为零根，72 个为非零根。非零根可表述为

$$e_i - e_j,\ (i,\ j = 1,\ 2,\ \cdots, 6);\quad \pm\sqrt{2}e_7;$$

$$\frac{1}{2}(\pm e_1 \pm e_2 \pm e_3 \pm e_4 \pm e_5 \pm e_6) \pm \frac{e_7}{\sqrt{2}},$$

(前 6 项中，3 项取正号、3项取负号).

它们长度相同 $(\sqrt{2})$, 相邻根之间夹角 $\frac{\pi}{2}$ 或 $\frac{\pi}{3}$.

它有子代数 $A_5 \oplus A_1$.　　　　对应的群称为 E_6 群。

8. E_7 李代数（以 A_7 为基础的李代数）

有 133 个根，其中 7个为零根，126个为非零根。非零根可表述为

$$e_i - e_j,\ (i,\ j = 1,\ 2,\ \cdots, 8);\ \frac{1}{2}(\pm e_1 \pm e_2 \pm \cdots \pm e_8),$$ 4项取正、4项取负.

它们长度相同 $(\sqrt{2})$, 相邻根之间夹角 $\frac{\pi}{2}$ 或 $\frac{\pi}{3}$.

它有子代数 A_7.　　　　对应的群称为 E_7 群。

§ 2.2.4 半单李代数的分类

二、各种类半单李代数的根的特征小结

9. E_8 李代数 （以 D_8 为基础的李代数）

有 248 个根，其中 8 个为零根，240 个为非零根。非零根可表述为

$\pm e_i \pm e_j$, $(i, j = 1, 2, \cdots, 8$; 共112个);

$\frac{1}{2}(\pm e_1 \pm e_2 \pm \cdots \pm e_8)$，(其中，偶数项取正、偶数项取负).

它们长度相同 $(\sqrt{2})$, 相邻根之间夹角 $\frac{\pi}{2}$ 或 $\frac{\pi}{3}$.

它有子代数 D_8 .

对应的群称为 E_8 群。

=======================

习题:

1. 试在正交归一基下具体计算给出 l 秩典型李代数和例外李代数的根图，说明其基本特征。
2. 举一个典型李代数和一个例外李代数描述（解决）实际物理问题的例子，并说明根图在其研究过程中的作用。

§ 2.3 素根系和邓金图

前述方案中，根向量空间是欧氏空间，对3秩以上的李代数，是高维的，难以处理；应该简化。

李代数的具体表述的出发点是其正则形式，简化应该源自：

$$[H_i,\ H_j] = 0\ ,$$
$$[H_i,\ E_\alpha] = \alpha_i E_\alpha\ ,$$
$$[E_\alpha,\ E_{-\alpha}] = \alpha^i H_i\ ,$$
$$[E_\alpha,\ E_\beta] = N_{\alpha\beta} E_{\alpha+\beta}\ .$$

n 维 l 秩半单李代数的非零根为

$$\alpha_i = \sum_{j=1}^{l} \alpha_i^j e_j\ , \qquad i = 1,2,\cdots,l\ .$$

邓金（Dynkin）选用基矢，使得 e_j 为根系中的一个，以使描述简化。

§ 2.3.1 正根和素根的概念

一、正根的概念

在正交（归一）基下，根都表述为

$$a = a^j e_j \ ,$$

即将根表述为一组坐标 $(a^1, a^2, \cdots, a^l)$.

如果一个根的第一个非零坐标为正数，则称该根为正根;

如果一个根的第一个非零坐标为负数，则称该根为负根;

如果一个根的所有坐标都为零，则称该根为零根。

即：根 $a = a^j e_j \ (j = 1, 2, \cdots, l)$ 为正的，

如果 $a^1 = a^2 = \cdots = a^k = 0, \ a^{k+1} > 0$;

根 $a = a^j e_j \ (j = 1, 2, \cdots, l)$ 为负的，

如果 $a^1 = a^2 = \cdots = a^k = 0, \ a^{k+1} < 0$;

根为零根，如果 $a^1 = a^2 = \cdots = a^k = \cdots = a^l = 0$.

§ 2.3.1 正根和素根的概念

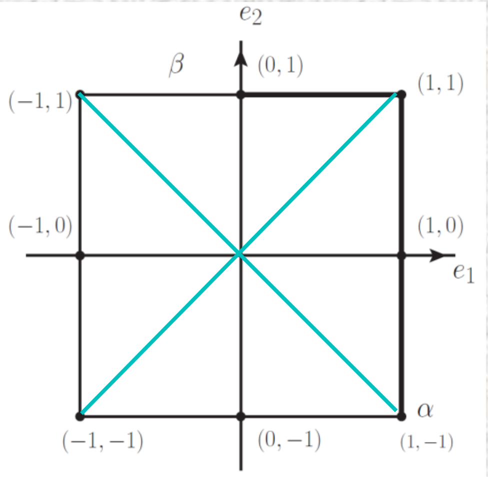
一、正根

记这样的根系为 Σ 系，则 Σ 可表述为

$$\Sigma = 0 + \Sigma^{+} + \Sigma^{-},$$

相应根的数目 n $\quad l \quad \frac{n-l}{2} \quad \frac{n-l}{2}$

例如，B_2 李代数，其根图如下。



在直角坐标基 e_1-e_2 下，

其 10 个根为 $(0,\ 0), (0,\ 0)$ ；

$(1,\ 0), (0,\ 1),\ (1,\ 1), (1,\ -1)$ ；

$(-1,\ 0), (0,\ -1),\ (-1,\ 1), (-1,\ -1)$.

其中 $(1,\ 0), (0,\ 1),\ (1,\ 1), (1,\ -1)$ 为正根；

$(-1,\ 0), (0,\ -1),\ (-1,\ 1), (-1,\ -1)$ 为负根。

并且 $\sum_{\alpha\in\Sigma^+} \alpha = (3,\ 1)$.

通常记 $\frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Sigma^+} \alpha = \delta$.

二、素根

不能表述为其它正根的和的正根称为素根。

例如，B_2 李代数的根图（如右）中

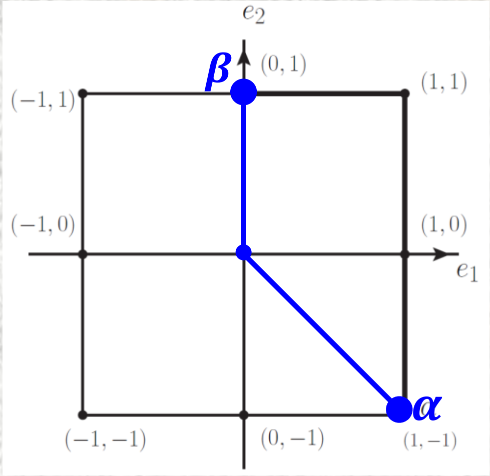
标记为 α、β 的根

（坐标分别为 $(1,\ -1),(0,\ 1)$）即为素根。

另两个正根可以由这两个素根的叠加给出，

例如：$(1,\ 0)=(1,\ -1)+(0,\ 1)=\alpha+\beta,$

$(1,\ 1)=(1,\ -1)+(0,\ 2)=\alpha+2\beta\,.$



所有素根的集合称为 π 系。

显然，(1) $\pi\in\Sigma^{+}$;

(2) 基的选取不同，素根的具体形式不同;

(3) 即使在同一组基下，素根的取法也可以不同。

§ 2.3.2 素根及正根的性质

一、两素根之间的夹角一定为钝角

定理：如果 α、β 是素根，则 $\beta-\alpha$ 不是根。

证明：设 $\beta-\alpha$ 是根，

如果 $\beta-\alpha>0$，则 $\beta=\alpha+(\beta-\alpha)$，即 β 不是素根；

与已知条件矛盾。

如果 $\beta-\alpha<0$，则 $\alpha=\beta-(\beta-\alpha)$，即 α 不是素根；

也与已知条件矛盾。

所以，如果 α、β 是素根，则 $\beta-\alpha$ 不是根。 [证毕]

上述定理表明，在根系列 $\beta+\gamma\alpha$ (其中 $\gamma\in[-q,\ p]$) 中，$q\equiv 0$.

由此知，

$$\frac{2(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)}=q-p=-p<0\ .$$

即：素根 α、β 间的夹角 $\theta_{\alpha\beta}$ 满足 $\cos\theta_{\alpha\beta}<0$，

也就是说，$\theta_{\alpha\beta}\in(\frac{\pi}{2},\ \pi)$.

所以，两素根间的夹角必为钝角。

二、素根都是线性无关的

证明：设 $\{\alpha_i | i=1,2,\cdots,l\}=\pi$，

由前述性质知，$\forall i \neq j = 1,2,\cdots,l$，$(\alpha_i,\ \alpha_j)<0$.

再假设这些素根不线性独立，

例如 α_l 为其它各素根的线性组合，即 $\alpha_l=\sum_{i=1}^{l-1} c^i \alpha_i$，

由前述定理“两素根之差不为根”知，$c^i \geq 0$.

那么，$$(\alpha_l,\ \alpha_l)=(\sum_{i=1}^{l-1} c^i \alpha_i, \alpha_l)=\sum_{i=1}^{l-1} c^i(\alpha_i,\ \alpha_l)<0.$$

另一方面，由线性空间的一般性质 知

$$(\alpha_l,\ \alpha_l)=|\alpha_l|^2>0.$$

两种方法计算得到相互矛盾的结果。

由此知，$\alpha_l=\sum_{i=1}^{l-1} c^i \alpha_i$ 的假设不成立。

即：所有素根都是线性独立的。

[证毕]

三、素根系$\{\alpha_i | i = 1,2,\cdots,l\}$是$\Sigma^+$中的完备基

由上述性质二知，素根系是 Σ^+ 的最大线性无关组，即为 完备基。

四、所有正根都可以表示为素根的线性叠加

即：若 $\{\alpha_i | i = 1,2,\cdots,l\} = \pi$，

$\forall \beta \in \Sigma^+$，

$\beta = \sum_i k^i \alpha_i$，　　并且，$k^i$ 都是非负整数。

证明：如果 β 为素根，　则 $\beta = \alpha_i,\ i \in [1,\ l]$，　即 $k^i = 1$.

如果 β 不为素根，依定义和“两素根之差不为根”知，

$$\beta = \alpha' + \alpha'' = \sum_i k^i \alpha_i,$$

其中 $k^i \geq 0$.

[证毕]

进一步，任何一个根都可以写成素根的代数和，

即有　$\psi = \sum_i k^i \alpha_i$.

§ 2.3.2 素根及正根的性质

五、对 $\alpha \in \pi$, $\beta \in \Sigma^+$，如果 $\gamma \in \Sigma^+$，但 $\gamma \notin \pi$，

则 $\gamma = \beta + \alpha$.

证明: $\because$ $\{\alpha_i\} = \pi$ 构成完备系，并且 $(\alpha_i, \alpha_j) < 0$,

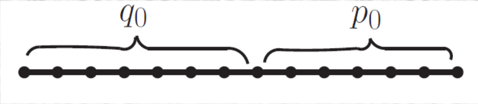
$\forall\ \gamma \in \Sigma^+$, $\quad \gamma = \sum_i k^i \alpha_i$,

则 至少存在一个素根 α_0 ，其与 $\gamma \in \Sigma^+$ 的夹角小于 $\pi/2$,

即: $(\gamma, \alpha_0) > 0$,

也就是 $\dfrac{2(\gamma, \alpha_0)}{(\alpha_0, \alpha_0)} = q_0 - p_0 > 0$,

于是有 $q_0 > p_0 \geq 0$, 即有右图示的根系列.



那么, $q_{0,\,min} = 1$.

由此知，存在包含γ的根系列，使得 $\beta = \gamma - \alpha_0$是一个正根，

也就是 $\gamma = \beta + \alpha_0$.

否则 $-\beta = \alpha_0 - \gamma > 0$, 从而 $\alpha_0 = \gamma - \beta$.（素为正之和）

这与定义不一致。所以一定有 $\beta \in \Sigma^+$.

[证毕]

§ 2.3.2 素根及正根的性质

那么，对 $\gamma=\sum_i k^i\alpha_i$，定义 $K=\sum_i k^i$，并称之为该根的级次，

则根的级次 K 是递次变化的，即 $K=1,\ 2,\ 3,\cdots$.

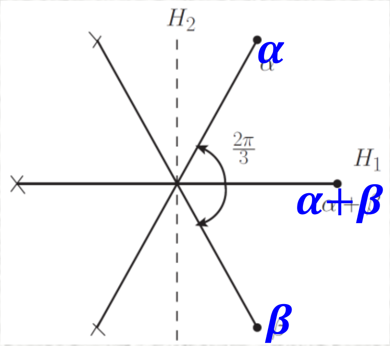
例1. $A_2\,(su(3))$ 李代数

建立图示的坐标系 H_1–H_2 （Cartan子代数），

则有素根 (一级正根): $\alpha=(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$, $\beta=(\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2})$,

二级正根则为 $\alpha+\beta=(1,0)$.

并有 $\delta=\frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Sigma^+}\alpha=(1,\ 0)$.



例2. $D_2\,(so(4))$ 李代数

根系图如右，

则有一级正根 (素根): $\alpha=(1,-1)$, $\beta=(0,\ 1)$;

二级正根则为: $\alpha+\beta=(1,0)$;

三级正根则为: $\alpha+2\beta=(1,1)$.

并有 $\delta=\frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Sigma^+}\alpha=\frac{1}{2}(3,\ 1)$.