# 李群和李代数及其应用

## 第二章 半单纯李代数及其根系

刘玉鑫

北京大学物理学院理论物理研究所

目 录



北京大学物理学院, 2020年春季学期

# 第二章 半单纯李代数及其根系

## § 2.1. 李代数的正则形式及其根的性质

### § 2.1.1 根向量

#### 一、根向量的定义

已知：对一个 $n$ 维李代数，记其基为 $\{\hat{X}_\rho | \rho = 1,2,\cdots,n\}$，

其间有关系 $[\hat{X}_\mu, \hat{X}_\nu] = C_{\mu\nu}^{\rho} \hat{X}_\rho$ .

基不唯一，同一个李代数的不同基之间可以相互变换：

例如： $\{\hat{X}_\mu | \mu = 1,2,\cdots,n\} \Rightarrow \{\hat{X}'_\nu | \nu = 1,2,\cdots,n\}$ ,

$$\hat{X}'_\mu = d_\mu^\nu \hat{X}_\nu ,$$

并且 $[\hat{X}'_{\alpha'}, \hat{X}'_{\beta'}] = C_{\alpha'\beta'}^{\gamma'} \hat{X}'_{\gamma'}$ ， 其中 $C_{\alpha'\beta'}^{\gamma'} = d_{\alpha'}^{\mu} d_{\beta'}^{\nu} C_{\mu\nu}^{\rho} d_{\gamma'}^{\rho^{-1}}$ .

$$\left( [\hat{X}'_{\alpha'}, \hat{X}'_{\beta'}] = [d_{\alpha'}^{\mu} \hat{X}_\mu, d_{\beta'}^{\nu} \hat{X}_\nu] = d_{\alpha'}^{\mu} d_{\beta'}^{\nu} C_{\mu\nu}^{\rho} \hat{X}_\rho = d_{\alpha'}^{\mu} d_{\beta'}^{\nu} C_{\mu\nu}^{\rho} d_{\gamma'}^{\rho^{-1}} \hat{X}_{\gamma'} \right)$$

§ 2.1.1 根向量

# 一、根向量的定义

设有 $A = a^{\mu}\hat{X}_{\mu}$，$V = v^{\nu}\hat{X}_{\nu}$， 且 $[A, V] = \rho V$，

即 $[a^{\mu}\hat{X}_{\mu}, v^{\nu}\hat{X}_{\nu}] = a^{\mu}v^{\nu}C^{\sigma}_{\mu\nu}\hat{X}_{\sigma} = \rho v^{\sigma}\hat{X}_{\sigma}$ .

移项、并消去公因子$\hat{X}_{\sigma}$，

得 $a^{\mu}v^{\nu}C^{\sigma}_{\mu\nu} - \rho v^{\sigma} = \left(a^{\mu}C^{\sigma}_{\mu\nu} - \rho\delta^{\sigma}_{\nu}\right)v^{\nu} = 0$ .

为使不变子代数V确实存在，则必有

$$\det\left(a^{\mu}C^{\sigma}_{\mu\nu} - \rho\delta^{\sigma}_{\nu}\right) = 0 \ .$$

该久期方程的解（本征方程$[A, V] = \rho V$的本征值）$\rho$

即称为该李代数的根。

如果李代数（A）是n维李代数，

则此n次方程最多有n个根，

这些根组成的n维向量称为该李代数的根向量。

## 二、李代数的秩

前述 $n$ 次方程的 $n$ 个根中，可能有一些是简并的。

Cartan 指出：

如果选择 $A$ 的基，

使得前述久期方程的非简并根的数目达到极大，

则对于半单纯李代数，只有 $\rho=0$ 的根是简并的。

如果 $\rho=0$ 的根是 $l$ 重简并的，

则称 $l$ 为该半单纯李代数的秩。

例：对 su(2)，$n=3$，有一个 0 根、2 个非零根，

从而 su(2) 是 1 秩李代数。

对 su(3)，$n=8$，有2个 0 根、6 个非零根，

从而 su(3) 是 2 秩李代数。

## 三、李代数的正则形式

已知：$l$ 秩的 $n$ 维半单李代数（$det(g) \neq 0$）的根向量中，

有 $l$ 个零根，$(n-l)$ 个不相重的非零根，

记对应零根的本征向量为 $\{H_i | i = 1,2,\cdots,l\}$，由原方程知

$$[A,\ H_i] = 0\ , \qquad (i = 1,2,\cdots,l)\ .$$

记对应非零根的本征向量为 $\{E_\alpha | \alpha = 1,2,\cdots,n-l\}$，由原方程知

$$[A,\ E_\alpha] = aE_\alpha\ , \qquad (\alpha = 1,2,\cdots,n-l)\ .$$

这表明，$A$ 有与 $\{H_i\}$ 互补的 $(n-l)$ 维的子空间 $\{E_\alpha\}$。

并且有 $[H_i,\ H_j] = 0$，

即零根对应的本征向量实际是 $A$ 的一个可交换子代数，

从而有 $A = \lambda^i H_i$ .

满足这种关系的半单李代数的表述形式称为半单李代数的正则形式。

## § 2.1.2 根向量的一般性质

### 一、对应非零根的本征向量与对应零根的本征向量间的关系

如果 $E_\alpha$ 是对应非零本征值 $a$ 的一个本征向量，则有 $l$ 个本征向量 $[H_i, E_\alpha]$ 都属于此本征值，并且这些本征向量都正比于 $E_\alpha$ .

证明：由雅可比关系

$$[A, [H_i, E_\alpha]] + [H_i, [E_\alpha, A]] + [E_\alpha, [A, H_i]] = 0 \ ,$$

即 $$[A, [H_i, E_\alpha]] = [H_i, [A, E_\alpha]] + \left[[A, H_i], E_\alpha\right] ,$$

知，在正则形式下，即 $[A, H_i] = 0$、$[A, E_\alpha] = aE_\alpha$ 情况下，

$$[A, [H_i, E_\alpha]] = [H_i, aE_\alpha] + [0, E_\alpha] = a[H_i, E_\alpha].$$

即：如果 $E_\alpha$ 是对应本征值 $a$ 的一个本征向量，

则 $[H_i, E_\alpha]$ 也是对应本征值 $a$ 的一个本征向量。

依假设，$A$ 的对应本征值 $a$ 的本征向量为 $E_\alpha$，且 $a$ 为单根，

则必有 $[H_i, E_\alpha] = a_i E_\alpha$ ， $i = 1, 2, \cdots, l$ .

即： $[H_i, E_\alpha]$ 必与 $E_\alpha$ 成比例，比例系数可记为 $a_i$.

# 二、根向量系的存在性

前述讨论表明：$E_\alpha$ 是 $H_i$ 的本征值为 $a_i$ 的本征向量，$[H_i, E_\alpha] = a_i E_\alpha$，

与李乘积 $[H_i, E_\alpha] = C_{i\alpha}^{\beta} E_\beta$ 比较，　　得 $C_{i\alpha}^{\beta} = a_i \delta_\alpha^\beta$ .

再将 $A = \lambda^i H_i$ 和 $[H_i, E_\alpha] = a_i E_\alpha$ 代入 $[A, [H_i, E_\alpha]]$，

得 $[A, [H_i, E_\alpha]] = [\lambda^j H_j, a_i E_\alpha] = \lambda^j a_i [H_j, E_\alpha]$ ，

考虑 $[H_i, E_\alpha] = a_i E_\alpha$ 和 $[A, [H_i, E_\alpha]] = a[H_i, E_\alpha]$，

得 $$a a_i E_\alpha = \lambda^j a_i a_j E_\alpha ,$$

从而有 $$a = \lambda^i a_i , \qquad (i = 1, 2, \cdots; l) .$$

总之，$\{H_i | i = 1, 2, \cdots, l\}$ 构成李代数 $A$ 的一个 $l$ 维子空间，

由之可展开 $A$ 的零根的本征向量，

该子空间通常称为李代数的嘉当子代数。

(实际是可交换子代数，但非理想，

$\because [E_\alpha, H_i] = -[H_i, E_\alpha] = -a_i E_\alpha \neq 0.$)

§ 2.1.2 根向量的一般性质

## 二、根向量系的存在性

由 $\alpha=\lambda^i\alpha_i$ 知，

$\alpha_i$ 可以看作 $l$ 维空间中向量 $\alpha$ 的协变分量，

是将 $H_i$ 映入数域 $\{\lambda_i\}$ 的线性映射。

因此，这一 $l$ 维空间实际是嘉当子代数的对偶空间 $h^*$，

常称之为根空间，

$\alpha$ 则称为根向量，或简称根。

而根的全体（包括 零根和非零根）称为根系，

常记为 $\Sigma$ .

总之，一个 $l$ 秩的 $n$ 维李代数一定存在根向量系。

## 三、非零根的本征向量间的关系

如果 $E_\alpha$、$E_\beta$ 是李代数 g 的元素 $A$ 的本征向量，则其李乘积 $[E_\alpha, E_\beta]$ 也是其本征向量，相应的本征值为它们的本征值之和。

证明：依假设，可记 $[A, E_\alpha] = a E_\alpha$，$[A, E_\beta] = b E_\beta$，由雅可比关系

$$[A, [E_\alpha, E_\beta]] + [E_\alpha, [E_\beta, A]] + [E_\beta, [A, E_\alpha]] = 0,$$ 知

$$[A, [E_\alpha, E_\beta]] = [E_\alpha, [A, E_\beta]] + [[A, E_\alpha], E_\beta]$$

$$= [E_\alpha, bE_\beta] + [aE_\alpha, E_\beta]$$

$$= (a+b)[E_\alpha, E_\beta].$$

此即原命题。

[定理得证]

## 三、非零根的本征向量间的关系

由上述定理知：(1) 对 $\beta=-\alpha,\ b=-a$，有

$$[A,[E_\alpha,E_{-\alpha}]]=\big(a+(-a)\big)[E_\alpha,E_{-\alpha}]=0.$$

与 $[\mathrm{A},H_i]=0$ 比较知， $[E_\alpha,E_{-\alpha}]\in\{H_i\}$，

即有 $[E_\alpha,E_{-\alpha}]=C^i_{\alpha\,-\alpha}H_i$ .

(2) 如果 $a+b$ 不是根，即 $A$ 没有本征值 $a+b$，

则 $\left[E_\alpha,E_\beta\right]=0$ .

(3) 如果 $a+b$ 是根，则 $A$ 有对应非零本征值 $a+b$ 的本征矢，

由半单李代数的非零根都是单根知 $\left[E_\alpha,E_\beta\right]=C^{\alpha+\beta}_{\alpha\beta}E_{\alpha+\beta}\neq 0$，

即 $C^{\alpha+\beta}_{\alpha\beta}\neq 0$，记之为 $N_{\alpha\beta}$，则有 $\left[E_\alpha,E_\beta\right]=N_{\alpha\beta}E_{\alpha+\beta}$ .

即有：(1) $C^{\beta}_{i\,\alpha}=a_i\delta^{\beta}_{\alpha}$； (2) $C^{i}_{\alpha\,-\alpha}\neq 0$， or $C^{i}_{\alpha\,\beta}=C^{i}_{\alpha\,-\alpha}\delta^{-\alpha}_{\beta}$；

(3) $C^{\alpha+\beta}_{\alpha\beta}=N_{\alpha\beta}\neq 0\,(a+b$是根$)$，or $C^{\gamma}_{\alpha\beta}=N_{\alpha\beta}\delta^{\gamma}_{\alpha+\beta}$，

即 $C^{\sigma}_{\mu\nu}\neq 0$，当且仅当 $\sigma=\mu+\nu$ 是根。

§ 2.1.2 根向量的一般性质

四、互逆根的存在性及其间的关系

[定理] 如果 $\alpha$ 是半单李代数 g 的一个根，

则 $-\alpha$ 也必是该李代数的一个根。

证明：∵ 对半单李代数，$g_{\sigma\rho}=C_{\sigma\alpha}^{\beta}C_{\rho\beta}^{\alpha}$，其中$C_{\sigma\alpha}^{\beta}$ 是群的结构常数，

对 $n$ 维李代数,$\sigma,\rho\in[1,n]$ 可分为对应零根部分和非零根部分，

分别以 $i$、$j$；$\tau$、$\mu$ 标记，

则 $$g_{\sigma\rho}=C_{\sigma\alpha}^{\beta}C_{\rho\beta}^{\alpha}=C_{\sigma i}^{\beta}C_{\rho\beta}^{i}+C_{\sigma\tau}^{\beta}C_{\rho\beta}^{\tau}$$

$$=-C_{i\sigma}^{\beta}C_{\rho\beta}^{i}+C_{\sigma\tau}^{\beta}\delta_{\tau\,-\sigma}C_{\rho\beta}^{\tau}+\sum_{\tau\neq-\sigma}C_{\sigma\tau}^{\beta}C_{\rho\beta}^{\tau}$$

$$=-\alpha_i\delta_{\sigma}^{\beta}C_{\rho\beta}^{i}+C_{\sigma\,-\sigma}^{\beta}C_{\rho\beta}^{-\sigma}+\sum_{\tau\neq-\sigma}N_{\sigma\tau}\delta_{\sigma+\tau}^{\beta}C_{\rho\beta}^{\tau}$$

$$=-\alpha_i C_{\rho\sigma}^{i}+C_{\sigma\,-\sigma}^{i}C_{\rho i}^{-\sigma}+N_{\sigma\tau}C_{\rho\,(\sigma+\tau)}^{\tau}\ .$$

如果 $\rho\neq-\sigma$，$C_{\rho\sigma}^{i}=C_{\rho\,-\rho}^{i}\delta_{\sigma}^{-\rho}=0$，$C_{\rho i}^{-\sigma}=-C_{i\rho}^{-\sigma}=-\alpha_i\delta_{\rho}^{-\sigma}=0$，

$$C_{\rho\,(\sigma+\tau)}^{\tau}=N_{\rho(\sigma+\tau)}\delta_{\rho+\sigma+\tau}^{\tau}=0\ ,$$

所以，当且仅当 $\rho=-\sigma$，$g_{\sigma\rho}\neq0$ .

## 四、互逆根的存在性及其间的关系

即：Killing度规的指标中一个取为对应非零根的指标时，另一个指标必须为对应大小与前述根绝对值相等的“负”根的指标，否则全为零。

这表明，如果半单李代数 g 有一个非零根 $a$，则它一定还有一个非零根 $-a$.

此即原命题。 [定理得证]

推论1：前述讨论（$[A,E_\alpha]=aE_\alpha,\ A=\lambda^i H_i,\ [H_i,E_\alpha]=a_i E_\alpha,\ [H_i,E_\alpha]=C_{i\alpha}^{\beta}E_\beta$）

表明，$C_{i\alpha}^{\beta}=a_i\delta_\alpha^\beta$；$a=\lambda^i a_i,\ i=1,2,\cdots,l$，即$a$有协变分量。

取 $g_{\alpha-\alpha}=1, C_{\alpha-\alpha}^{i}=g^{ij}C_{j\alpha-\alpha}=g^{ij}g_{-\alpha k}C_{j\alpha}^{k}=g^{ij}g_{-\alpha k}a_j\delta_{\alpha k}$

$=g^{ij}g_{-\alpha\alpha}a_j=g^{ij}a_j=a^i$. 即$a$有逆变分量。

总之，$l$ 秩半单李代数的根向量有协变和逆变两种形式，根 $a$ 的协变形式常标记为 $\lambda^i a_i$，逆变形式常标记为 $\lambda_i a^i$.

应用：$(a,b)=g^{ij}a_i b_j \Rightarrow a^i b_j$，or $a_i b^j$.

§ 2.1.2 根向量的一般性质

四、互逆根的存在性及其间的关系

推论2：$H_i$ 和 $E_\alpha$ 等的意义

$[H_i, E_\alpha] = a_i E_\alpha$ 表明， $E_\alpha$是 $H_i$的本征向量，

由此知，$H_i$ 不仅是李代数g的相应于零根的本征向量($[A, H_i] = 0$)，

还具有算符的功能和性质。

为表述简洁，下面我们采用量子力学中的Dirac 符号标记本征态。

假设 $H_i$ 另有本征向量$\{|\mu\rangle\}$，即有 $H_i|\mu\rangle = \mu_i|\mu\rangle$，

由 $[H_i, E_\alpha] = a_i E_\alpha$ 知；

$$H_i E_\alpha |\mu\rangle = (a_i E_\alpha + E_\alpha H_i)|\mu\rangle = (a_i E_\alpha + E_\alpha \mu_i)|\mu\rangle$$

$$= (\mu_i + a_i)E_\alpha|\mu\rangle .$$

与 $H_i|\mu\rangle = \mu_i|\mu\rangle$ 比较知，

如果$|\mu\rangle$ 是 $H_i$ 的本征值为 $\mu_i$ 的本征向量，

则 $E_\alpha|\mu\rangle$ 也是$H_i$ 的本征向量，相应的本征值为$\mu_i + a_i$，

即有 $E_\alpha|\mu\rangle \propto |\mu + \alpha\rangle$.

§ 2.1.2 根向量的一般性质

## 四、互逆根的存在性及其间的关系

推论2: $H_i$ 和 $E_\alpha$ 等的意义

上式（$E_\alpha|\mu\rangle \propto |\mu+\alpha\rangle$）表明，

$E_\alpha\ (\alpha = 1,2,\cdots,\frac{n-l}{2})$ 实际为升算符。

类似地， $E_{-\alpha}\ (\alpha = 1,2,\cdots,\frac{n-l}{2})$ 为降算符。

即有 $E_{\pm\alpha}|\mu\rangle = N_{\pm\alpha,\mu}|\mu\pm\alpha\rangle$ ，

其中 $N_{\pm\alpha,\mu}$ 为（待定的）归一化系数。

并且，由 $E_{-\alpha}$ 的作用效果知，$E_{-\alpha}$ 与 $E_\alpha$ 及其作用的态互为对偶，

具体地，由 $E_{-\alpha}|\mu+\alpha\rangle = N_{-\alpha,(\mu+\alpha)}|\mu\rangle$，而 $|\mu+\alpha\rangle = \frac{1}{N_{\alpha,\mu}}E_\alpha|\mu\rangle$ ，

知： $N_{-\alpha,(\mu+\alpha)}|\mu\rangle = \frac{1}{N_{\alpha,\mu}}E_{-\alpha}E_\alpha|\mu\rangle$ ，

所以 $E_{-\alpha}E_\alpha \in K$ ，进而有 $N_{-\alpha,(\mu+\alpha)} = N^*_{\alpha,\mu}$ .

# 五、不相同不互逆根之间的关系

采用量子力学中的表述形式，计算 $[E_\alpha, E_{-\alpha}]$ 的期望值。

先考虑 $[E_\alpha, E_{-\alpha}] = C^i_{\alpha\,-\alpha} H_i = \alpha^i H_i$，我们有

$$\langle\mu|[E_\alpha, E_{-\alpha}]|\mu\rangle = \langle\mu|\alpha^i H_i|\mu\rangle = \alpha^i \mu_i = (\alpha,\ \mu)\,.$$

对 $[E_\alpha, E_{-\alpha}]$ 按定义展开，得

$$\langle\mu|[E_\alpha, E_{-\alpha}]|\mu\rangle = \langle\mu|E_\alpha E_{-\alpha} - E_{-\alpha} E_\alpha|\mu\rangle$$

$$= \langle\mu|E_\alpha|\mu-\alpha\rangle\langle\mu-\alpha|E_{-\alpha}|\mu\rangle - \langle\mu|E_{-\alpha}|\mu+\alpha\rangle\langle\mu+\alpha|E_\alpha|\mu\rangle$$

$$= N_{\alpha,(\mu-\alpha)} N_{-\alpha,\mu} - N_{-\alpha,(\mu+\alpha)} N_{\alpha,\mu}\,.$$

由定义和 $E_\alpha$、$E_{-\alpha}$ 互为对偶的性质，知

$$N_{-\alpha,\mu} = \langle\mu-\alpha|E_{-\alpha}|\mu\rangle = \langle\mu|E_\alpha|\mu-\alpha\rangle^* = N^*_{\alpha,(\mu-\alpha)}\,,$$

$$N_{-\alpha,(\mu+\alpha)} = \langle\mu|E_{-\alpha}|\mu+\alpha\rangle = \langle\mu+\alpha|E_\alpha|\mu\rangle^* = N^*_{\alpha,\mu}\,,$$

代入前式，得

$$\langle\mu|[E_\alpha, E_{-\alpha}]|\mu\rangle = N_{\alpha,(\mu-\alpha)} N_{-\alpha,\mu} - N_{-\alpha,(\mu+\alpha)} N_{\alpha,\mu} = |N_{\alpha,(\mu-\alpha)}|^2 - |N_{\alpha,\mu}|^2\,.$$

# 五、不相同不互逆根之间的关系

比较采用不同方案计算得到的 $\langle\mu|[E_\alpha, E_{-\alpha}]|\mu\rangle$ 的值，得

$$|N_{\alpha,(\mu-\alpha)}|^2 - |N_{\alpha,\mu}|^2 = (\alpha, \mu).$$

此方程给出升降算符 $E_{\pm\alpha}$ 的归一化系数的递推关系，与 $N_{-\alpha,\mu} = N^*_{\alpha,(\mu-\alpha)}$、$N_{-\alpha,(\mu+\alpha)} = N^*_{\alpha,\mu}$ 联合，即可确定这些系数。

考虑升降算符的实际意义知， $a = \lambda^i a_i$ 为g的非零根，$\lambda^i(\mu_i + a_i)$ 也是g的非零根，即 $\lambda^i\mu_i = b$ 为g的另一个非零根，

由此知，李代数g的非零根可以一般地表述为 $c = b + \xi a$.

那么，对有限维李代数，∃ 自然数 $p$、$q$，

➔ $E_\alpha {E_\alpha}^p|\mu\rangle = E_\alpha|\mu + pa\rangle = N_{\alpha,(\mu+pa)}|\mu + (p+1)a\rangle = 0$,

$E_{-\alpha}{E_{-\alpha}}^q|\mu\rangle = E_{-\alpha}|\mu - qa\rangle = N_{-\alpha,(\mu-qa)}|\mu - (q+1)a\rangle = 0$,

即不存在 $|\mu + (p+1)a\rangle$ 和 $|\mu - (q+1)a\rangle$，

亦即有 $N_{\alpha,(\mu+pa)} = N_{-\alpha,(\mu-qa)} \equiv 0$.

## § 2.1.2 根向量的一般性质

### 五、不相同不互递根之间的关系

显然， $p = p(\mu,\ a)$ ， $q = q(\mu, a)$ .

对各种可能的 $p$、$q$ 都写出其递推关系，则有

$$|N_{\alpha,(\mu+p\alpha)-\alpha}|^2 - |N_{\alpha,(\mu+p\alpha)}|^2 = |N_{\alpha,(\mu+p\alpha)-\alpha}|^2 - 0 = \big(a,\ (\mu + pa)\big),$$

$$|N_{\alpha,(\mu+(p-1)\alpha)-\alpha}|^2 - |N_{\alpha,(\mu+(p-1)\alpha)}|^2 = \big(a,\ (\mu + (p-1)a)\big),$$

$$|N_{\alpha,(\mu+(p-3)\alpha)}|^2 - |N_{\alpha,(\mu+(p-2)\alpha)}|^2 = \big(a,\ (\mu + (p-2)a)\big),$$

…… ……

$$|N_{\alpha,\mu}|^2 - |N_{\alpha,(\mu+\alpha)}|^2 = \big(a,\ (\mu + a)\big),$$

$$|N_{\alpha,(\mu-\alpha)}|^2 - |N_{\alpha,\mu}|^2 = (a,\ \mu),$$

$$|N_{\alpha,(\mu-2\alpha)}|^2 - |N_{\alpha,(\mu-\alpha)}|^2 = \big(a,\ (\mu - a)\big),$$

…… ……

$$|N_{\alpha,(\mu-q\alpha)}|^2 - |N_{\alpha,(\mu-(q-1)\alpha)}|^2 = \big(a,\ (\mu - (q-1)a)\big),$$

$$|N_{\alpha,(\mu-(q+1)\alpha)}|^2 - |N_{\alpha,(\mu-q\alpha)}|^2 = 0 - |N_{\alpha,(\mu-q\alpha)}|^2 = \big(a,\ (\mu - qa)\big).$$

§ 2.1.2 根向量的一般性质

五、不相同不互逆根之间的关系

上述诸式相加，得

$$0=(p+q+1)(\alpha,\ \mu)+(-q-(q-1)+\cdots+(p-1)+p)(\alpha,\ \alpha)$$

$$=(p+q+1)(\alpha,\ \mu)+\frac{(p+q+1)(p-q)}{2}(\alpha,\ \alpha)$$

$$=(p+q+1)((\alpha,\ \mu)+\frac{p-q}{2}(\alpha,\ \alpha))$$

由此知 $\dfrac{2(\alpha,\mu)}{(\alpha,\alpha)}\equiv q-p$ .

因为 $p$、$q$ 为自然数，则 $q-p=$ 整数，

所以 $\dfrac{2(\alpha,\mu)}{(\alpha,\alpha)}=$ 整数 .

对半单纯李代数 g 的任意非零根 $\alpha$，$(\alpha,\ \alpha)\neq 0$,

否则 $g_{\alpha\beta}=0$, $\det(g)=0$,

李代数 g 不是半单李代数。

五、不相同不互逆根之间的关系

所以，对于半单纯李代数 g 的任意两个相异根 a、b，都有

$$2\frac{(a,b)}{(a,a)}=q-p=m\ (\text{整数})\ ,$$

$$2\frac{(b,a)}{(b,b)}=q'-p'=m'=(\text{整数})\ .$$

并且

$$\frac{(a,b)^2}{a^2b^2}=\frac{mm'}{4}\quad ,$$

$$\frac{(b,b)}{(a,a)}=\frac{b^2}{a^2}=\frac{m}{m'}\quad .$$

§ 2.1.2 根向量的一般性质

五、不相同不互逆根之间的关系

并有 关于半单纯李代数 的不相同根之间关系的定理：

如果 $a$ 、$b$ 是半单李代数 $g$ 的两个不同的根， 则 $2\frac{(a,b)}{(a,a)}$ 为整数， 并且 $b-2\frac{(a,b)}{(a,a)}a$ 也是一个根。

证明：对前半部分，前述讨论已给出证明。

对后半部分，依假设，并考虑上半部分的结论，则知

$$b-2\frac{(a,b)}{(a,a)}a=b-(q-p)a=b+(p-q)a.$$

前述讨论知，包含$b$的关于$a$的根系列为

$$b-qa,\ b-(q-1)a,\cdots,\ b-a,\ b,\ b+a,\ \cdots,\ b+pa.$$

因为 $p\geq 0,\ q\geq 0$，则 $p-q\in[-q,\ p]$，

所以 $b+(p-q)a$ 属于包含$b$的关于$a$的根系列，

故 $b-2\frac{(a,b)}{(a,a)}a$ 也是一个根。

## 六、成比例的根的个数

**定理：** 如果 $\alpha$ 是半单李代数 $g$ 的根，则 $k\alpha$ 中只有三个是根，并且它们是 $\alpha, 0, -\alpha$.

证明：由正则形式下李代数的非零根的李乘积 $[E_\alpha, E_\beta] = N_{\alpha\beta}E_{\alpha+\beta}$ 知，

$$[E_\alpha, E_\alpha] = N_{\alpha\alpha}E_{2\alpha}.$$

而直接按李乘积的定义，进行展开计算，得

$$[E_\alpha, E_\alpha] = E_\alpha E_\alpha - E_\alpha E_\alpha = 0.$$

即有 $N_{\alpha\alpha} = 0$，所以 $2\alpha$ 不是根。

又，对任意 $k > 1$，根系列 $k\alpha$ 都是包含 $2\alpha$ 的一个根系列。

由于 $2\alpha$ 不是根，则包含它的根系列都不是根。

同理，对 $k < -1$，$k\alpha$ 都不是根。

所以，只有 $|k| < 1$ 的根系列 $k\alpha$ 才是李代数的根，

即 $k\alpha$ 中只有三个是根，并且它们是 $\alpha, 0, -\alpha$.

§ 2.1.2 根向量的一般性质

# 七、不成比例的根的个数

**定理：** 如果 $a$、$b$ 都是半单李代数 $g$ 的根，则包含 $b$ 的关于 $a$ 的根系列最多只有四个根， 即根系列

$$b-2\frac{(a,b)}{(a,a)}a$$ 中， $\frac{2(a,b)}{(a,a)}$ 最多只能是 $0, \pm1, \pm2, \pm3$ 中四个相邻的数。

**证明：** 定理表述即：在包含 $b$ 的关于 $a$ 的根系列中， $\left|\frac{2(a,b)}{(a,a)}\right| \not> 3.$

假设 $\frac{2(a,b)}{(a,a)}$ 不受 $\left|\frac{2(a,b)}{(a,a)}\right| \ngeq 3$ 的限制，

由 $\frac{2(a,b)}{(a,a)}=m$（整数）， $\frac{2(b,a)}{(b,b)}=m'$（整数）， $4\frac{(a,b)^2}{a^2b^2}=mm'$（整数），

而 $(a,\ b)=ab\cos\theta$，其中 $\theta$ 为根 $a$ 与 $b$ 之间的夹角，知

$$4\frac{(a,b)^2}{a^2b^2}=4\frac{a^2b^2\cos^2\theta}{a^2b^2}=4\cos^2\theta=mm'\geq 0.$$

# 七、不成比例的根的个数的定理的证明（续）

如果 $\left|\dfrac{2(a,b)}{(a,a)}\right| = |m| \not< 3$，

即 $m$ 和 $m'$ 不受仅取 $0, \pm1, \pm2, \pm3$ 中的值的限制，

例如，取 $m=4$、$m'=1$，

由 $\dfrac{2(a,b)}{(a,a)} = m$，和 $\dfrac{2(b,a)}{(b,b)} = m'$，知 $\dfrac{(b,b)}{(a,a)} = \dfrac{m}{m'} = 4$，

于是 $(b,b) = 4(a,a)$， $b = 2a$，

与前述定理矛盾。

所以，$\left|\dfrac{2(a,b)}{(a,a)}\right| = |m| \not< 3$ 的假设不成立，即在包含 $b$ 的关于 $a$

的根系列 $b - 2\dfrac{(a,b)}{(a,a)}a$ 中的 $\dfrac{2(a,b)}{(a,a)} = m = q - p$，必有 $|q-p| \le 3.$

另一方面，因为包含 $b$ 的关于 $a$ 的根系列为

$$b-qa,\ b-(q-1)a, \cdots,\ b-a, b,\ b+a, \cdots, b+pa,$$

即根的升降最多只能“迈”$(p+q)$ 步，

## 七、不成比例的根的个数的定理的证明（续）

例如，对根 $b+pa$，向左最多只能走 $(p+q)$ 步到达 $b-qa$ 为止，而不能向右走，并且 $p+q\leq 3$,

即上述根系列最长可以是 $b,\ b+a,\ b+2a,\ b+3a$；

或 $b-a,\ b,\ b+a,\ b+2a$；或 $b-2a,\ b-a,\ b,\ b+a$；

或 $b-3a,\ b-2a,\ b-a,\ b$ .

（仍用反证）假设上述根系列不受 $p+q\leq 3$ 的限制，

例如，有根系列 $b-2a,\ b-a,\ b,\ b+a,\ b+2a$，

因为 $b+2a-b=2a$ 不是根, $b+2a+b=2(b+a)$ 也不是根，

则包含 $b+2a$ 的关于 $b$ 的根系列 $[b-2a-q'b,\ b-2a+p'b]$ 中，$p'=q'=0$；

于是有，
$$\frac{2(b,\ b+2a)}{(b,b)}+\frac{2(b,\ b-2a)}{(b,b)}=(q-p)+(q'-p')=0\ .$$

另一方面，直接计算知
$$\frac{2(b,\ b+2a)}{(b,b)}+\frac{2(b,\ b-2a)}{(b,b)}=\frac{2(b,\ b)}{(b,b)}+\frac{2(b,\ 2a)}{(b,b)}+\frac{2(b,\ b)}{(b,b)}-\frac{2(b,\ 2a)}{(b,b)}=4\ .$$

# 七、不成比例的根的个数的定理的证明（续）

显然，两种方案计算 $\frac{2(b,\ b+2a)}{(b,b)}+\frac{2(b,\ b-2a)}{(b,b)}$，得到的结果存在矛盾，

所以，存在前述的长度超过4的根系列的假设不成立！

总之，根系列 $b-(q-p)a$ 的长度必须满足

$p+q\le 3$，$|q-p|\le 3$，的条件。

具体即有，$p+q\le 3$，$q-p=3$， $\Rightarrow q=3,\ p=0;$

$q-p=2,\Rightarrow q=2,\ p=0;$

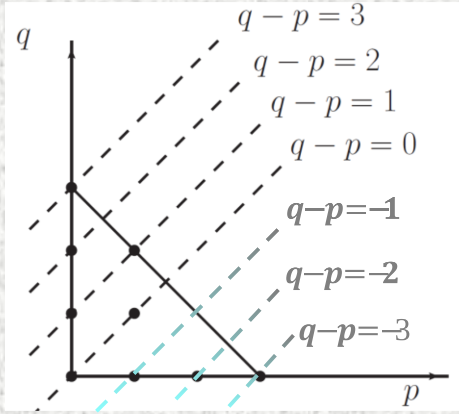
$q-p=1,\Rightarrow q=2,\ p=1;\ q=1,\ p=0;$

$q-p=0,\Rightarrow q=1,\ p=1;\ q=0,\ p=0;$

$q-p=-1,\Rightarrow q=0,\ p=1;\ q=1,\ p=2;$

$q-p=-2,\Rightarrow q=0,\ p=2;$

$q-p=-3,\Rightarrow q=0,\ p=3.$




如右图示。

## §2.1.3 正则形式下的度规张量与嘉当-外尔基

### 一、度规张量

已知：半单李代数 g 有零根和非零根，并且Cartan 指出，

通过适当选取基，可以使零根的数目达到最少，

而非零根都是不相重的，

并且相重的零根的数目$l$称为该李代数的秩。

一般情况下，代数的度规张量由相应的群的结构常数确定为

$$g_{\mu\nu} = C^{\rho}_{\mu\sigma} C^{\sigma}_{\nu\rho}.$$

记与零根、非零根相应的本征向量分别为$\{H_i\}$、$\{E_\alpha\}$，

在正则形式下，有

$$[A,\ H_i] = 0\ ;\quad [A,\ E_\alpha] = aE_\alpha\ ;\quad [H_i,\ E_\alpha] = a_i E_\alpha\ ,$$

另一方面，按原始李乘积标记，$[H_i,\ E_\alpha] = C^{\beta}_{i\alpha} E_\beta$ ，

比较知 $C^{\beta}_{i\alpha} = a_i \delta^{\beta}_{\alpha}$ .

§ 2.1.3 正则形式下的度规张量与嘉当-外尔基

# 一、度规张量

并且还有， $[E_\alpha, E_{-\alpha}] = C^i_{\alpha\beta} H_i$ ， $C^i_{\alpha\beta} = C^i_{\alpha\,-\alpha}\delta^{-\alpha}_{\beta}$ ；

$$[E_\alpha, E_\beta] = C^\gamma_{\alpha\beta} E_\gamma \,, \qquad C^\gamma_{\alpha\beta} = N_{\alpha\beta}\delta^\gamma_{\alpha+\beta} \,.$$

由此知，对 $g_{\mu\nu}$ 中的各结构常数，有

$$C^\rho_{\mu\sigma} \neq 0 \,, \rightarrow \rho = \mu + \sigma \,; \qquad C^\sigma_{\nu\rho} \neq 0 \,, \rightarrow \sigma = \nu + \rho \,.$$

并且，度规张量 $g_{\mu\nu}$ 可以分解为与零根相关部分和与非零根相关部分，即有

$$g_{\mu\nu} = g_{i\nu} \oplus g_{\sigma\rho} = C^\beta_{i\alpha} C^\alpha_{\nu\beta} \oplus C^\beta_{\sigma\alpha} C^\alpha_{\rho\beta} \,.$$

与零根相关部分，

$$g_{i\nu} = C^\beta_{i\alpha} C^\alpha_{\nu\beta} = a_i \delta^\beta_\alpha C^\alpha_{\nu\beta} = a_i C^\alpha_{\nu\alpha} \,.$$

由 $C^\beta_{i\alpha} = a_i \delta^\beta_\alpha$ 知， $C^\alpha_{\nu\alpha} \neq 0$，要求 $\nu = j$ .

即有 $g_{ij} \neq 0$， $g_{i\nu} = 0$ .

§ 2.1.3 正则形式下的度规张量与嘉当-外尔基

# 一、度规张量

与非零根相关部分，

$$
\begin{aligned}
g_{\sigma\rho} &= C_{\sigma\alpha}^{\beta} C_{\rho\beta}^{\alpha} = C_{\sigma i}^{\beta} C_{\rho\beta}^{i} \oplus C_{\sigma\tau}^{\beta} C_{\rho\beta}^{\tau} \\
&= -C_{i\sigma}^{\beta} C_{\rho\beta}^{i} \oplus C_{\sigma\tau}^{\beta} \delta_{\tau(-\sigma)} C_{\rho\beta}^{\tau} \oplus \sum_{\tau\neq-\sigma} C_{\sigma\tau}^{\beta} C_{\rho\beta}^{\tau} \\
&= -a_i \delta_{\sigma}^{\beta} C_{\rho\beta}^{i} \oplus C_{\sigma\ -\sigma}^{\beta} C_{\rho\beta}^{-\sigma} \oplus \sum_{\tau\neq-\sigma} N_{\sigma\tau} \delta_{\sigma+\tau}^{\beta} C_{\rho\beta}^{\tau} \\
&= -a_i C_{\rho\sigma}^{i} \oplus C_{\sigma\ -\sigma}^{i} C_{\rho i}^{-\sigma} \oplus N_{\sigma\tau} C_{\rho\,(\sigma+\tau)}^{\tau}
\end{aligned}
$$

因为只有当 $\rho = -\sigma$ 时，

$$
C_{\rho\sigma}^{i} = C_{\rho\ -\rho}^{i} \neq 0\,, \quad C_{\rho i}^{-\sigma} = -C_{i\rho}^{-\sigma} = -a_i \delta_{\rho}^{-\sigma} \neq 0\,,
$$

$$
C_{\rho\,(\sigma+\tau)}^{\tau} = N_{\rho\,(\sigma+\tau)} \delta_{\rho+\sigma+\tau}^{\tau} = N_{\rho\,(\sigma+\tau)} \delta_{\rho\ -\sigma} \neq 0\ ,
$$

所以，当且仅当 $\rho = -\sigma$， $g_{\sigma\rho} \neq 0$ .

# § 2.1.3 正则形式下的度规张量与嘉当-外尔基

## 一、度规张量

总之，正则形式下，$l$ 秩的 $n$ 维半单纯李代数 $\mathfrak{g}$ 的度规张量 $g_{\mu\nu}$ 可以表述为

$l\times l$ 矩阵

$$g_{\mu\nu}=\begin{pmatrix} g_{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \begin{matrix} 0 & \times \\ \times & 0 \end{matrix} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \begin{matrix} 0 & \times \\ \times & 0 \end{matrix} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \begin{matrix} 0 & \times \\ \times & 0 \end{matrix} \end{pmatrix}.$$

$\frac{n-l}{2}$ 个反对角矩阵元不为 0 的分块矩阵

其它矩阵元都为 0.

## § 2.1.3 正则形式下的度规张量与嘉当-外尔基

# 一、度规张量

特殊地，取 $E_\alpha$ 的归一化因子，使得 $g_{\sigma\,-\sigma}=1$，则有

$l\times l$ 矩阵

$$g_{\mu\nu}=\begin{pmatrix} g_{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \begin{matrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{matrix} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \begin{matrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{matrix} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \begin{matrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{matrix} \end{pmatrix}.$$

$\frac{n-l}{2}$ 个反对角矩阵元为 1 的分块矩阵

其它矩阵元都为 0.

上式常称为半单李代数的度规张量的标准形式(标准基林型)。对之做伸缩即可得到其它形式。例如：$E_\alpha\to E'_\alpha=\xi E_\alpha$，

$$[H_i,\,E_\alpha]=a_iE_\alpha\Longrightarrow[H'_i,\,E'_\alpha]=[\xi H_i,\,\xi E_\alpha]=\xi^2\,[H_i,\,E_\alpha]=a'_iE'_\alpha\,,$$

$$[A,\,E_\alpha]=aE_\alpha\Longrightarrow[A,\,E'_\alpha]=[A,\,\xi E_\alpha]=\xi\,[A,\,E_\alpha]=\xi aE_\alpha=aE'_\alpha\,,$$

$$[E_\alpha,\,E_{-\alpha}]=C^i_{\alpha(-\alpha)}H_i\Longrightarrow[E'_\alpha,\,E'_{-\alpha}]=\left[\xi E_\alpha,\,\tfrac{1}{\xi}E_{-\alpha}\right]=[E_\alpha,\,E_{-\alpha}]\,.$$

# 二、嘉当-外尔基

$n$维$l$秩半单李代数$g$有零根和非零根，其对应的本征向量分别为$\{H_i|i=1,2,\cdots,l\}$、$\{E_\alpha\}$，其Cartan 标准型满足

$[H_i, H_j]=0$ ，　　　　$(C_{ij}^k=0$; 构成嘉当子代数$)$;

$[H_i, E_\alpha]=a_iE_\alpha$ ，　　　　$(C_{i\alpha}^\beta=a_i\delta_\alpha^\beta)$ ;

$[E_\alpha, E_{-\alpha}]=a_iH_i=(a, H)$ ，　　$(C_{\alpha\beta}^i=C_{\alpha-\alpha}^i\delta_\beta^{-\alpha})$;

$\left[E_\alpha, E_\beta\right]=C_{\alpha\beta}^\gamma E_\gamma=N_{\alpha\beta}\delta_{\alpha+\beta}^\gamma E_\gamma$ ，

$N_{\alpha\beta}$的数值由 $\left|N_{\alpha\beta}\right|^2=\frac{p(q+1)}{2}(a, a)$

(其中$p$、$q$为满足$p+q\leq 3$、$|q-p|\leq 3$的自然数) 确定，

$N_{\alpha\beta}$的相位满足$N_{\alpha\beta}=-N_{\beta\alpha}=-N_{-\alpha\,-\beta}$，

并有度规张量$g_{\alpha\,-\alpha}=1$.

这样的一组基$\{H_1,H_2,\cdots,H_l;E_\alpha,E_{-\alpha},\cdots,E_\gamma,E_{-\gamma}\}$称为李代数$g$的嘉当-外尔基。

§ 2.1.3 正则形式下的度规张量与嘉当-外尔基

## 二、嘉当-外尔基

附注：(1) 嘉当子代数 h 构成 g 的一个对易子代数，并且是 g 的最大对易子代数。

但由于 $[E_\alpha, H_i] = -[H_i, E_\alpha] = -\alpha_i E_\alpha \neq 0 \notin \{H_i\}$，

因此 h 不是不变子代数，既不是 g 的理想。

(2) 对半单李代数 $g = g_1 \oplus g_2$，如果 $g_1$ 和 $g_2$ 也是半单或单李代数，

g、$g_1$、$g_2$ 的嘉当子代数分别为 h、$h_1$、$h_2$，相应的根系分别为

$\Sigma$、$\Sigma_1$、$\Sigma_2$， 则 $h = h_1 \oplus h_2$，$\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$，并且 $\Sigma_1$ 与 $\Sigma_2$ 正交。

================

**习题：**

1. 讨论半单李代数的根的实际意义，以及根向量和根系的缘由和异同。

2. 证明：对于半单李代数的非零根相应的 $E_{\pm\alpha}|\mu\rangle = N_{\pm\alpha,\mu}|\mu \pm \alpha\rangle$

中的归一化系数，其数值由 $|N_{\alpha\beta}|^2 = \frac{p(q+1)}{2}(\alpha, \alpha)$

(其中 $p$、$q$ 为满足 $p+q \leq 3$、$|q-p| \leq 3$ 的自然数) 确定，

$N_{\alpha\beta}$ 的相位满足 $N_{\alpha\beta} = -N_{\beta\alpha} = -N_{-\alpha\,-\beta}$ .

3. 证明上述附注 (2) .