李群和李代数及其应用

第二章 半单纯李代数及其根系

刘玉鑫

北京大学物理学院理论物理研究所

目 录

北京大学物理学院, 2020年春季学期

§ 2.3.3 邓金图

一、邓金图的概念

1. 邓金图

对正则形式下的素根系 $\{\alpha_i\}=\pi$，

记：$\dfrac{2(\alpha_i,\alpha_j)}{(\alpha_i,\alpha_i)}\le 0=0,-1,-2,\cdots,-m$，　$\dfrac{2(\alpha_j,\alpha_i)}{(\alpha_j,\alpha_j)}\le 0=0,-1,-2,\cdots,-m'$，

α_i 与 α_j 间的夹角 θ_{ij} 满足　$\cos^2\theta_{ij}=\dfrac{(\alpha_i,\alpha_j)^2}{\alpha_i^2\,\alpha_j^2}=\dfrac{1}{4}mm'$，

α_i 与 α_j 的长度间有关系　$m\alpha_i^2=m'\alpha_j^2$，　即 $\dfrac{\alpha_i^2}{\alpha_j^2}=\dfrac{m'}{m}$；

约定　$|\alpha_i|\le|\alpha_j|$，　则 $m'\le m$.

具体有：$\theta_{ij}=90°$，则 $mm'=0$，两根长度间无确定关系；

$\theta_{ij}=120°$，则 $mm'=1$，$\alpha_i^2/\alpha_j^2=1$，$m=m'=1$；

$\theta_{ij}=135°$，则 $mm'=2$，$\alpha_i^2/\alpha_j^2=1/2$，$m=2$，$m'=1$;

$\theta_{ij}=150°$，则 $mm'=3$，$\alpha_i^2/\alpha_j^2=1/3$，$m=3$，$m'=1$.

§ 2.3.3 邓金图

一、邓金图的定义

1. 邓金图

根据上述特征所做的满足下述规则的根系的图示称为邓金图。

(1) 用圆圈代表素根，并以是否实心区分其长度，具体的，

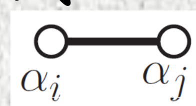
以 ○ 代表长根，以 ● 代表短根;

(2) 由不同数目的线表征相邻素根间的夹角，具体即:

〈1〉 正交根之间不连线，　即：对 $\theta_{ij}=90^\circ$，图示为 

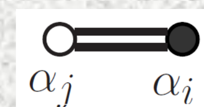
;

〈2〉 成 120° 角的两根间连一条线，

即：对 $\theta_{ij}=120^\circ$，图示为 

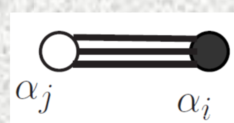
;

〈3〉 成 135° 角的两根间连两条线，

即：对 $\theta_{ij}=135^\circ$，图示为 

;

〈4〉 成 150° 角的两根间连三条线，

即：对 $\theta_{ij}=150^\circ$，图示为 

;

一般地，连线条数 $t_{ij}=4\cos^2\theta_{ij}$.

§ 2.3.3 邓金图

一、邓金图的定义

1. 邓金图

上述讨论 ==➔ 可以用素根系对李代数进行分类。

记单位向量为 $u_i = \frac{\alpha_i}{|\alpha_i|}$，它(们)满足所有(初等)几何学原理，

例如：〈1〉正定性，

$$\forall \quad X = x^i u_i \text{，} (X,\ X) \geq 0 \text{，}$$

并且，当且仅当 $X = 0$ 时等号成立 .

〈2〉广义勾股定理：

对任意单位向量 X° 和数 $l' \leq l$，

$$\sum_{i=1}^{l'} (X^\circ, u^i)^2 = \sum_{i=1}^{l'} \cos^2\theta_i \leq 1 .$$

〈3〉Schwarz Inequality：

对任意两根间的夹角 θ_{XY}，$|\cos\theta_{XY}| = \frac{|(X,Y)|}{|X|\,|Y|} \leq 1 .$

2. 角图

仅考虑素根间夹角、不明确考虑其间长度关系的邓金图称为角图。

二、邓金图的性质及可能的邓金图

1. 当且仅当代数是单的，π 图才是连通的。

证明：假设根系 $\{\alpha\}$ 与根系 $\{\beta\}$ 不连通，

由邓金图的定义知，

$\{\alpha\}$ 与 $\{\beta\}$ 正交，

即 $\{\alpha\}$ 与 $\{\beta\}$ 对易。

也就是说，$\{\alpha\}$ 和 $\{\beta\}$ 各自构成不变子代数，

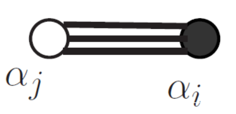
这与单李代数的定义不一致，

于是，该李代数不是单的。

这一结论与已知条件不一致。

总之：**当且仅当代数是单的，π 图才是连通的。**

[证毕]

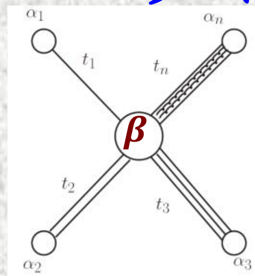
2. 含有三条线的邓金图只有 

.

由定义知，此性质成立。

二、邓金图的性质及可能的邓金图

3. 以一个素根为顶点，能够外连的线数不能大于3.

即，对图示的邓金图 

，$t_1+t_2+\cdots+t_n\le 3$.

证明：如图，设 β 和 $\{\alpha\}$ 构成半单李代数的素根系，

其中 $\{\alpha\}=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$，

则该李代数是 $(n+1)$ 秩的。

再选取与 $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$ 都彼此独立的素根，记之为 $\{\alpha_0\}$，

则任一正根 γ 都可以表述为 $\gamma=\sum_{i=0}^{n}\gamma^i\alpha_i$，

由广义勾股定理知，$\cos^2\theta_0+\sum_{i=1}^{n}\cos^2\theta_i=1$.

于是有 $\sum_{i=1}^{n}\cos^2\theta_i=1-\cos^2\theta_0<1$.

所以与 β 相连的线数 $K=\sum_{i=1}^{n}t_i=4\sum_{i=1}^{n}\cos^2\theta_i<4$.

即：角图中任何一个根都不可能有三条以上的线与之相连。[证毕]

二、邓金图的性质及可能的邓金图

4. 角图必须是树形的，不可能包含闭路。

证明：记 $\{\alpha_i | i=1,2,\cdots,l\}=\pi$，假设它们在角图中形成回路，

再记 $\alpha_{l+1}=\alpha_1$，$|\alpha_i|=(\alpha_i,\ \alpha_i)^{1/2}$，因这些根相继连接，

则 $(\alpha_i,\ \alpha_{i+1})\neq 0$，$i=1,2,\cdots,l$；

$$\left(\alpha_i,\ \alpha_j\right)=0,\ i,\ j=1,2,\cdots,l,\ |i-j|\neq 1 .$$

于是
$$\left(\sum_{i=1}^{l}\frac{\alpha_i}{|\alpha_i|},\ \sum_{j=1}^{l}\frac{\alpha_j}{|\alpha_j|}\right)=\sum_{i=1}^{l}\frac{(\alpha_i,\alpha_i)}{|\alpha_i|^2}+2\sum_{i=1}^{l}\frac{(\alpha_i,\alpha_{i+1})}{|\alpha_i|\cdot|\alpha_{i+1}|}$$
$$=l+2\sum_{i=1}^{l}\cos\theta_{i(i+1)} .$$

由一般原理知 $\cos\theta_{i(i+1)}=-1/2,\ -\sqrt{2}/2,\ -\sqrt{3}/2$，

那么，$l+2\sum_{i=1}^{l}\cos\theta_{i(i+1)}\leq l+2\cdot(-{}^{1}/_{2})l=0$.

这显然与正定性矛盾。

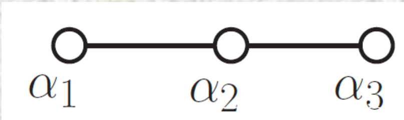
因正定性是基本原理，则只能是“形成回路”的假设不成立。

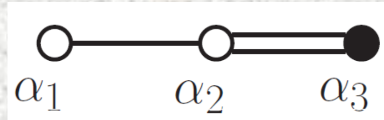
所以，角图必须是树形的，不可能形成闭路。

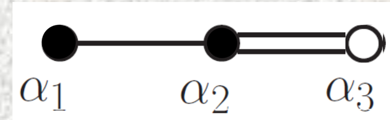
[证毕]

二、邓金图的性质及可能的邓金图

5. 三个素根构成的 π 图系只有

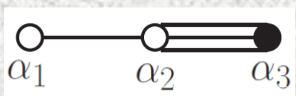


，或


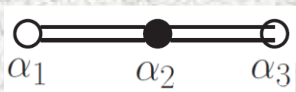
，


.

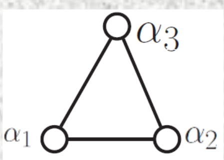
前述要求 ==➔

不可能存在


，因为 α_2 外连有 4 条线;

不可能存在


，因为 α_2 也外连有 4 条线;

也不可能存在


，因为形成了回路 α_1-α_2-α_3-α_1 .

况且，由一个素根向外连接的线既不多于 3 条，

也不形成回路的三种情况下，

对应第一种情况，$\theta_{12}+\theta_{23}+\theta_{31}=120^\circ+120^\circ+90^\circ=330^\circ$;

对应第二和第三种情况，$\theta_{12}+\theta_{23}+\theta_{31}=120^\circ+135^\circ+90^\circ=345^\circ$;

都满足 $\leq 360^\circ$ 设的条件。

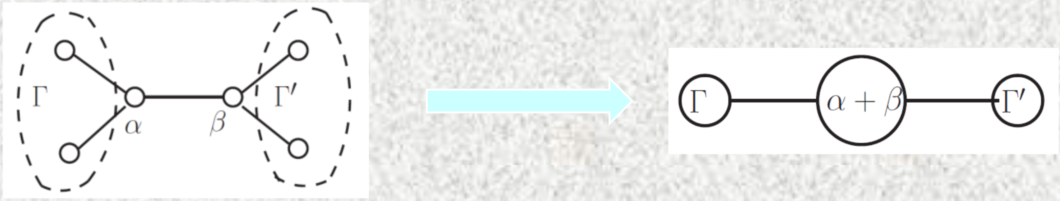
[证毕]

§ 2.3.3 邓金图

二、邓金图的性质及可能的邓金图

6. 如果一个 π 系包含有两个单线联系的顶点（素根），则把两条单线缩并成一条双线、两个顶点缩并成一个顶点，形成的根系仍是 π 系。

例如：



证明：如图，取素根 $\gamma\in\Gamma$，

因其与 α 相连，与 β 不相连，

则 $(\gamma,\beta)=0$，$(\gamma,\alpha)\neq 0$，$(\gamma,(\alpha+\beta))=(\gamma,\alpha)<0$.

同理，对 $\gamma'\in\Gamma'$，

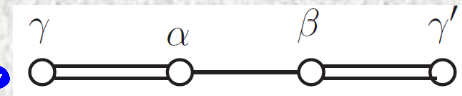
$(\gamma',\alpha)=0$，$(\gamma',\beta)\neq 0$，$(\gamma',(\alpha+\beta))=(\gamma',\beta)<0$.

即将 α 与 β 之间的单线缩并掉，并将 α 和 β 缩并成一个顶点，形成的根系仍然是一个 π 系。

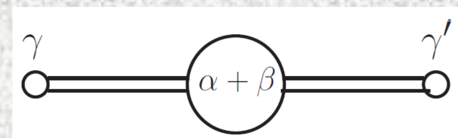
[证毕]

二、邓金图的性质及可能的邓金图

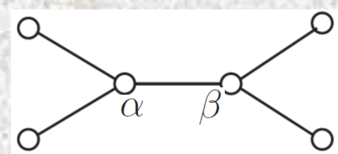
6. 如果一个π 系包含有两个单线联系的顶点（素根），则把两条单线所并成一条双线、两个顶点缩并成一个顶点，形成的根系仍是π 系。

推论：(1) 不可能存在形如 

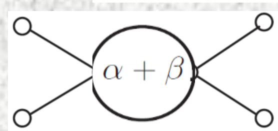
的角图，

因其缩并后为 

.

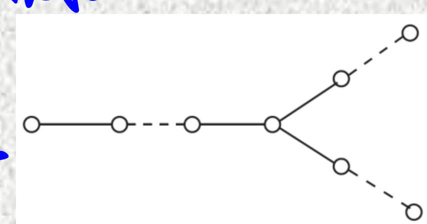
(2) 不可能存在形如 

的角图，

因其可缩并为 

.

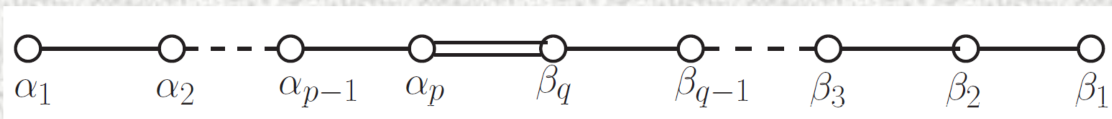
即：角图中不可能有两个或更多个分岔，也不可能既有分岔又有双线。

(3) π 系允许的有分岔的图只能是  .

二、邓金图的性质及可能的邓金图

7. 角图中双线两侧的单线的长度只有两种，
其一是一侧任意可能长，另一侧无单线；
其二是两侧各仅有一条单线。

证明：记角图中双线两侧的素根分别为 α_i、β_j，

即有 

，

再记相应于 α_i、β_j 的单位向量分别为 $u_i=\dfrac{\alpha_i}{|\alpha_i|}$， $v_j=\dfrac{\beta_j}{|\beta_j|}$，

分别以 $\{u_i\}$、$\{v_j\}$ 为基构造向量 $u=\sum_{i=1}^{p} i u_i$， $v=\sum_{j=1}^{q} j v_j$，

则 $u^2=(\sum_{i=1}^{p} i u_i, \sum_{i'=1}^{p} i' u_{i'})=\sum_{i,i'=1}^{p} i\, i'(u_i, u_{i'})$

考虑 $(u_i, u_i)=1$，$(u_i, u_{i'})=-\frac{1}{2}\delta_{i'(i\pm1)}$，

则 $u^2=\sum_{i=1}^{p} i^2-\frac{1}{2}\left(\sum_{i=2}^{p}(i-1)i+\sum_{i=1}^{p-1} i(i+1)\right)$

§ 2.3.3 邓金图

二、邓金图的性质及可能的邓金图

7. 角图中双线两侧的单线的长度只有两种，其一是一侧任意可能长，另一侧无单线；其二是两侧各仅有一条单线。

证明(续)：即有 $u^2=\sum_{i=1}^{p} i^2-\sum_{i=1}^{p-1}\left(i^2+i\right)=p^2-\sum_{i=1}^{p-1} i$

$$=p^2-\frac{1}{2}p(p-1)=\frac{1}{2}\,p(p+1)\ .$$

同理， $v^2=\dfrac{1}{2}\,q(q+1)$.

由于不相连的素根都正交，双线相连的两素根成 135° 夹角，

则 $u\cdot v=(u,v)=\left(\sum_{i=1}^{p} iu_i,\ \sum_{j=1}^{q} jv_j\right)=pq\left(u_p,v_q\right)=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}pq$.

由 Schwarz 不等式知 $(u,\ v)^2\le u^2v^2$ ，

于是有 $\dfrac{1}{2}p^2q^2<\dfrac{1}{4}pq(p+1)(q+1)$ ，

亦即有 $pq<\dfrac{1}{2}(p+1)(q+1)$.

也就是 $\left(1+\dfrac{1}{p}\right)\left(1+\dfrac{1}{q}\right)>2$.

§ 2.3.3 邓金图

二、邓金图的性质及可能的邓金图

7. 角图中双线两侧的单线的长度只有两种，其一是一侧任意可能长，另一侧无单线；其二是两侧各仅有一条单线。

证明 (续)：设 $p \geq q$，　则 $\frac{1}{p} \leq \frac{1}{q}$ ，

那么，　$2 < (1+\frac{1}{p})(1+\frac{1}{q}) \leq (1+\frac{1}{q})^2$ ，

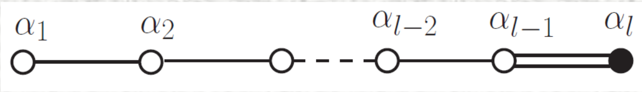
即有，　$\sqrt{2}-1 < \frac{1}{q}$.

$\therefore \quad q < \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}+1$.

由此知　$q=1$，or　$q=2$.

对　$q=1$，原不等式化为　$(1+\frac{1}{p})\cdot 2 > 2$ ，

从而有　$\frac{1}{p} > 0$ ，　即 p 可以取任意可能的自然数。

也就是有 

或 

.

§ 2.3.3 邓金图

二、邓金图的性质及可能的邓金图

7. 角图中双线两侧的单线的长度只有两种，其一是一侧任意可能长，另一侧无单线；其二是两侧各仅有一条单线。

证明(续): 对 $q=2$，原不等式化为 $(1+\frac{1}{p})\cdot\frac{3}{2}>2$，

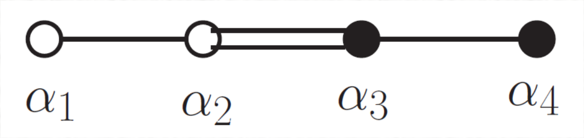
即要求 $1+\frac{1}{p}>\frac{4}{3}$，

也就是 $\frac{1}{p}>\frac{1}{3}$.

再考虑原假设 $p\geq q$，则有 $2\leq p<3$，

从而仅有 $p=2$.

这就是说，仅有“双线两侧各有一条单线”的邓金图，

即有 

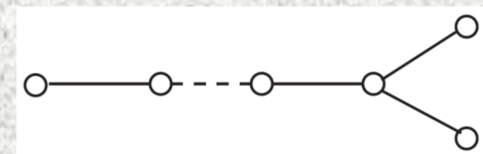
.

[证毕]

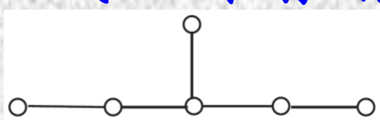
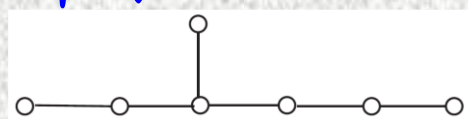
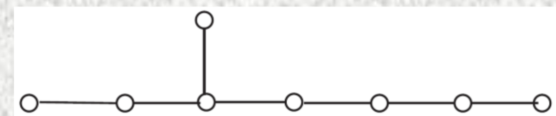
二、邓金图的性质及可能的邓金图

8. 可能包含分岔的角图仅有五种情况:

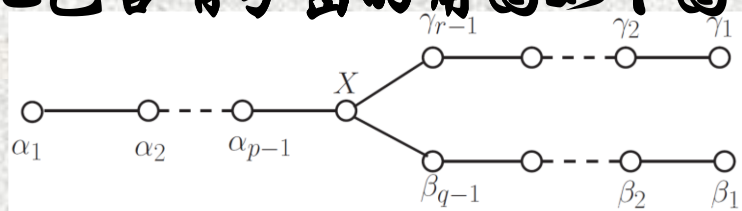
(1) 根本没有分岔，即有  ;

(2) 分岔的单线长度仅为 1，即有  ;

(3) 与一条单线相连的根一侧有 2 个根，另一侧有 2 个、3个 或 4 个素根，即有

 ,  ,  .

证明: 记包含有分岔的角图如下图示



，　需要确定 $p=?\ q=?\ r=?$

再记相应的单位向量分别为 $u_i=\dfrac{\alpha_i}{|\alpha_i|}$，　$v_j=\dfrac{\beta_j}{|\beta_j|}$，　$w_k=\dfrac{\gamma_k}{|\gamma_k|}$，

并构造向量 $u=\sum_{i=1}^{p-1} iu_i$，　$v=\sum_{j=1}^{q-1} jv_j$，　$w=\sum_{k=1}^{r-1} kw_k$，

§ 2.3.3 邓金图

二、邓金图的性质及可能的邓金图

8. 可能包含分岔的角图仅有五种情况：(1) 根本没有分岔；(2) 分岔的单线长度仅为 1；(3) 与一条单线相连的根一侧有 2 个根，另一侧有 2、3、4 个素根。

证明(续)：具体计算得

$$u^2=\frac{1}{2}p(p-1)\ ,\ v^2=\frac{1}{2}\ q(q-1)\ ,\quad w^2=\frac{1}{2}r(r-1)\ .$$

由于不相连的素根都正交，因此 $(u,v)=(v,\ w)=(w,u)=0$.

对于处于分岔顶点的独立于u、v、w的素根 X（单位长度），

由于单线联系的两素根间的夹角为120°，该夹角的余弦为$-1/2$，

则 $(X,\ u)=\left(X,\ (p-1)u_{p-1}\right)=(p-1)\left(X,\ u_{p-1}\right)=\frac{1}{2}(1-p)$,

$$(X,\ v)=\frac{1}{2}(1-q),\quad (X,\ w)=\frac{1}{2}(1-r),$$

于是 $\cos^2\theta_1=\frac{(X,u)^2}{(X,X)(u,u)}=\frac{\frac{1}{4}(1-p)^2}{1\cdot\frac{1}{2}p(p-1)}=\frac{1}{2}\frac{p-1}{p}=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{p})$,

$$\cos^2\theta_2=\frac{(X,v)^2}{(X,X)(v,v)}=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{q})\ ,\ \cos^2\theta_3=\frac{(X,w)^2}{(X,X)(w,w)}=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{r})\ ,$$

§ 2.3.3 邓金图

二、邓金图的性质及可能的邓金图

8. 可能包含分岔的角图仅有五种情况：(1) 根本没有分岔；(2) 分岔的单线长度仅为 1；(3) 与一条单线相连的根一侧有 2 个根，另一侧有 2、3、4 个素根。

证明 (续)：由广义勾股定理知

$$\cos^2\theta_1+\cos^2\theta_2+\cos^2\theta_3<1,$$

于是有 $$\frac{1}{2}\left(3-\frac{1}{p}-\frac{1}{q}-\frac{1}{r}\right)<1.$$

即 $$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}>1\ .$$

假设 $p\geq q\geq r$， 则 $\dfrac{1}{p}\leq\dfrac{1}{q}\leq\dfrac{1}{r}$，

于是原不等式可改写为 $$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}\leq\frac{3}{r}>1\ .$$

所以 $r<3$，

即仅有 $r=1$， 和 $r=2$.

二、邓金图的性质及可能的邓金图

8. 角图中双线两侧的单线的长度只有两种，其一是一侧任意可能长，另一侧无单线；其二是两侧各仅有一条单线。

证明(续)：对 $r=1$，原不等式即 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+1>1$，

亦即，$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}>0$，从而，$p$、$q$ 可取任意自然数。

由于$r=1$表明不存在γ 对应的分支，即实际无分岔。

于是有邓金图 ，对应 A_l .

对 $r=2$，原不等式即 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{2}>1$，

亦即有 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}>\frac{1}{2}$.

考虑原始假设$p\geq q$，则有 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\leq\frac{2}{q}$ ，

从而有 $\frac{2}{q}>\frac{1}{2}$，

于是有 $q<4$.

§ 2.3.3 邓金图

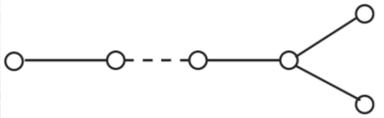
二、邓金图的性质及可能的邓金图

8. 角图中双线两侧的单线的长度只有两种，其一是一侧任意可能长，另一侧无单线；其二是两侧各仅有一条单线。

证明(续): 再考虑 $q \geq r = 2$，则有 $q = 2, 3$.

对 $q = 2$, 原不等式具体化为 $\frac{1}{p} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} > 1$，即 $\frac{1}{p} > 0$.

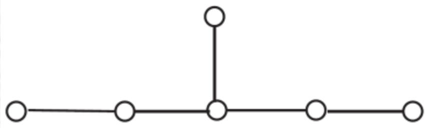
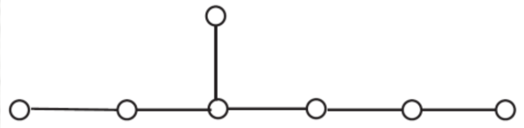
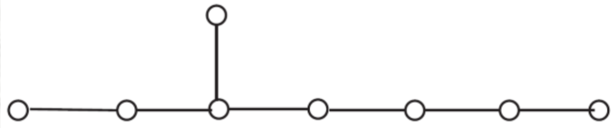
从而 p 取任意自然数。

因为$q = r = 2$对应有长度为1的分岔, 于是有  . (D_l)

对 $q = 3$, 原不等式具体化为 $\frac{1}{p} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} > 1$，即有 $\frac{1}{p} > \frac{1}{6}$.

于是有 $p = 3, 4, 5$.

此即: 与长度为1的单线相连的素根一侧有长度为2 的单线相连的根链，另一侧有长度分别为2、或3、或4的素根链，

即有 , , .

(E_6) (E_7) (E_8)

[证毕]

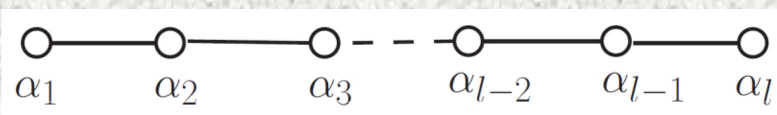
§ 2.3.3 邓金图

二、邓金图的性质及可能的邓金图

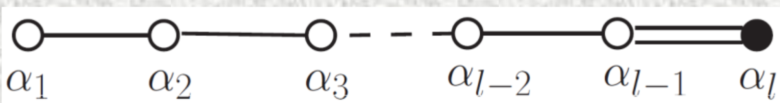
小结:

根 --- 正根 --- 素根：线性独立、完备、$2\frac{(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)}=-q<0$.

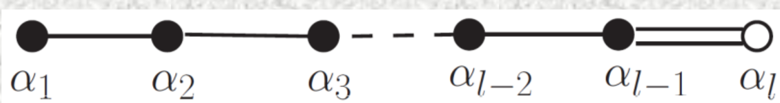
=➔ 独立，不可再分，夹角仅三种 =➔ π 系，邓金图 ➔

A_l : 

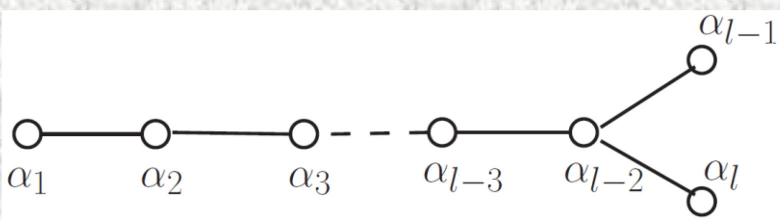
;

B_l : 

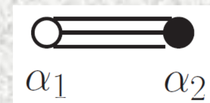
;

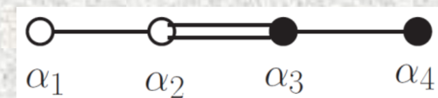
C_l : 

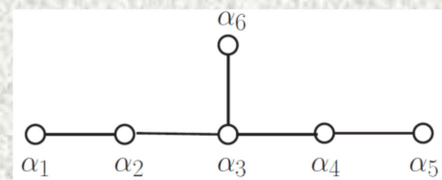
;

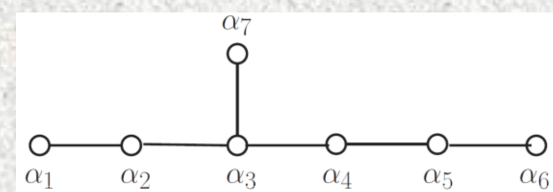
D_l : 

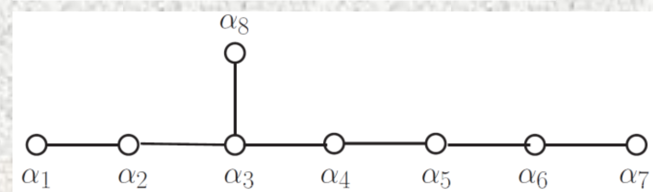
;

G_2 : 

F_4 : 

E_6 : 

E_7 : 

E_8 : 

§ 2.4 根的确定

已知：直角坐标系中确定根很复杂，且不直观。

于是，对根分类，$\Longrightarrow$ $\Sigma = 0 + \Sigma^{+} + \Sigma^{-}$，

相应根的数目 $n \quad l \quad \frac{n-l}{2} \quad \frac{n-l}{2}$

$\pi \in \Sigma^{+}$： l 维，

线性独立，完备，

$$2\frac{(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)} = -q < 0 \text{ (夹角三个值)。}$$

$\Longrightarrow$ 邓金图。

可由 π 系的邓金图出发确定根(系).

§ 2.4 根的确定

§ 2.4.1 Cartan 矩阵

一、定义

对 l 秩半单李代数，$\{\alpha_i | i = 1,2,\cdots,l\} = \pi$，

$$\frac{2(\alpha_i,\alpha_j)}{(\alpha_i,\alpha_i)} = -p = m, \quad \frac{2(\alpha_j,\alpha_i)}{(\alpha_j,\alpha_j)} = -p' = m'; \quad \rightarrow \text{邓金图。}$$

邓金图 → π 系中各根的长度关系、及之间的夹角 θ_{ij}，

$$\cos^2\theta_{ij} = \frac{(\alpha_i,\alpha_j)^2}{\alpha_i^2\alpha_j^2} = \frac{1}{4}mm', \quad \frac{\alpha_i^2}{\alpha_j^2} = \frac{m'}{m}.$$

约定一个长度关系，如 $|\alpha_i| < |\alpha_j|$，可准确确定 m 和 m'.

上述回顾表明，对 l 秩半单李代数，$\{\alpha_i | i = 1,2,\cdots,l\} = \pi$，

$\dfrac{(\alpha_i,\alpha_j)}{(\alpha_i,\alpha_i)}$ (=半整数)，或 $\dfrac{2(\alpha_i,\alpha_j)}{(\alpha_i,\alpha_i)}$ (=整数) 具有决定性作用!

以 $2\dfrac{(\alpha_i,\alpha_j)}{(\alpha_i,\alpha_i)} = A_{ij}$ 为矩阵元构成的矩阵称为嘉当矩阵。

§2.4 根的确定

二、半单李代数的Cartan矩阵

1. A_l 李代数的Cartan矩阵

(1) A_2 李代数的Cartan矩阵

由其邓金图 

知:

$$\cos\theta_{12}=\cos 120^\circ=-\frac{1}{2}，\ \cos^2\theta_{12}=\frac{mm'}{4}=\frac{1}{4}，\Rightarrow\ mm'=1;$$

再考虑 $$\frac{|\alpha_1|}{|\alpha_2|}=\frac{(\alpha_1,\alpha_1)^{1/2}}{(\alpha_2,\alpha_2)^{1/2}}=(\frac{m'}{m})^{1/2}=1，\ \Rightarrow\ m=m'=-1.$$

总之,

$$2\frac{(\alpha_1,\alpha_1)}{(\alpha_1,\alpha_1)}=2，\qquad 2\frac{(\alpha_2,\alpha_2)}{(\alpha_2,\alpha_2)}=2，$$

$$2\frac{(\alpha_1,\alpha_2)}{(\alpha_1,\alpha_1)}=-1，\qquad 2\frac{(\alpha_2,\alpha_1)}{(\alpha_2,\alpha_2)}=-1，$$

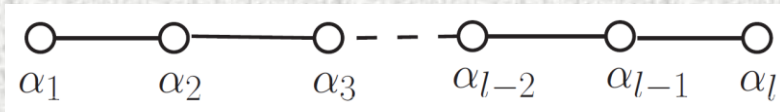
于是, A_2 李代数的Cartan矩阵 $A_{A_2}=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}.$

§ 2.4 根的确定

二、半单李代数的Cartan矩阵

1. A_l 李代数的 Cartan 矩阵

(2) A_l 李代数的 Cartan 矩阵

由其邓金图 

知:

$$\cos\theta_{ij} = \cos 120^\circ \delta_{i(j\pm1)} = -\frac{1}{2}\delta_{i(j\pm1)}, \quad \cos^2\theta_{ij} = \frac{mm'}{4}\delta_{i(j\pm1)} = \frac{1}{4}\delta_{i(j\pm1)},$$

再考虑 $\dfrac{|\alpha_i|}{|\alpha_j|} = \dfrac{(\alpha_i,\alpha_i)^{1/2}}{(\alpha_j,\alpha_j)^{1/2}} = \left(\dfrac{m'}{m}\right)^{1/2} = 1$, $\quad \Rightarrow\ m = m' = -1.$

总之,

$$2\frac{(\alpha_i,\alpha_i)}{(\alpha_i,\alpha_i)} = 2, \quad 2\frac{(\alpha_i,\ \alpha_j)}{(\alpha_i,\ \alpha_i)} = 2\frac{|\alpha_j|\cos\theta_{ij}}{|\alpha_i|} = 2\cdot 1\cdot\left(-\frac{1}{2}\delta_{i(j\pm1)}\right) = -\delta_{i(j\pm1)},$$

于是,A_l 李代数的 Cartan 矩阵为

$$A_{A_l} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$(l\times l)$三对角矩阵。

§ 2.4 根的确定

二、半单李代数的Cartan 矩阵

2. B_l 李代数的 Cartan 矩阵

(1) B_2 李代数的 Cartan 矩阵

由其邓金图 

知:

$$\cos\theta_{12}=\cos 135^\circ=-\frac{\sqrt{2}}{2}\,,\quad \cos^2\theta_{12}=\frac{mm'}{4}=\frac{2}{4}\,,\ \Rightarrow\ mm'=2\,;$$

再考虑 $\dfrac{|\alpha_1|}{|\alpha_2|}=\dfrac{(\alpha_1,\alpha_1)^{1/2}}{(\alpha_2,\alpha_2)^{1/2}}=\left(\dfrac{m'}{m}\right)^{1/2}=\sqrt{2}\,,\Rightarrow\ m=-1,\ m'=-2.$

总之,

$$2\frac{(\alpha_1,\alpha_1)}{(\alpha_1,\alpha_1)}=2\,,\qquad\qquad 2\frac{(\alpha_2,\alpha_2)}{(\alpha_2,\alpha_2)}=2\,,$$

$$2\frac{(\alpha_1,\alpha_2)}{(\alpha_1,\alpha_1)}=2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-1\,,\qquad 2\frac{(\alpha_2,\alpha_1)}{(\alpha_2,\alpha_2)}=2\cdot\sqrt{2}\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-2\,,$$

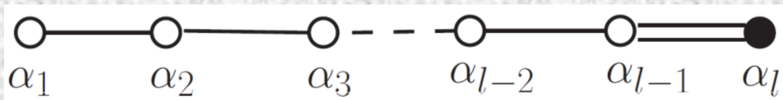
于是，B_2 李代数的 Cartan 矩阵 $A_{B_2}=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -2 & 2\end{pmatrix}.$

§ 2.4 根的确定

二、半单李代数的Cartan 矩阵

2. B_l 李代数的 Cartan 矩阵

(2) B_l 李代数的 Cartan 矩阵

由其邓金图 

知:

对 $i, j = 1, 2, \cdots, (l-2), (l-1)$,

$$\cos\theta_{ij} = \cos 120^\circ \delta_{i(j\pm 1)} = -\frac{1}{2}\delta_{i(j\pm 1)}, \quad \cos^2\theta_{ij} = \frac{mm'}{4}\delta_{i(j\pm 1)} = \frac{1}{4}\delta_{i(j\pm 1)},$$

再考虑 $\dfrac{|\alpha_i|}{|\alpha_j|} = \dfrac{(\alpha_i,\alpha_i)^{1/2}}{(\alpha_j,\alpha_j)^{1/2}} = (\dfrac{m'}{m})^{1/2} = 1, \quad \Rightarrow \ m = m' = -1.$

总之, $2\dfrac{(\alpha_i,\alpha_i)}{(\alpha_i,\alpha_i)} = 2,$

$$2\frac{(\alpha_i,\alpha_j)}{(\alpha_i,\alpha_i)} = 2\frac{|\alpha_j|\cos\theta_{ij}}{|\alpha_i|} = 2\cdot 1\cdot(-\frac{1}{2}\delta_{i(j\pm 1)}) = -\delta_{i(j\pm 1)},$$

$$2\frac{(\alpha_j,\alpha_i)}{(\alpha_j,\alpha_j)} = 2\frac{|\alpha_i|\cos\theta_{ji}}{|\alpha_j|} = 2\cdot 1\cdot(-\frac{1}{2}\delta_{j(i\pm 1)}) = -\delta_{j(i\pm 1)},$$

§ 2.4 根的确定

二、半单李代数的Cartan 矩阵

2. B_l 李代数的Cartan 矩阵

(2) B_l 李代数的 Cartan 矩阵

对 $i=l-1,\ j=l$,

$$\cos\theta_{ij}=\cos 135^\circ=-\frac{\sqrt{2}}{2},\quad \cos^2\theta_{ij}=\frac{mm'}{4}=\frac{2}{4},$$

$$\frac{|\alpha_{l-1}|}{|\alpha_l|}=\frac{(\alpha_{l-1},\alpha_{l-1})^{1/2}}{(\alpha_l,\alpha_l)^{1/2}}=\left(\frac{m'}{m}\right)^{1/2}=\sqrt{2},\ \Rightarrow\ m=-1,\ m'=-2.$$

总之，$2\frac{(\alpha_l,\alpha_l)}{(\alpha_l,\alpha_l)}=2$，$2\frac{(\alpha_{l-1},\alpha_l)}{(\alpha_{l-1},\alpha_{l-1})}=2\frac{|\alpha_l|\cos\theta_{ij}}{|\alpha_{l-1}|}=2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-1,$

$$2\frac{(\alpha_l,\alpha_{l-1})}{(\alpha_l,\alpha_l)}=2\frac{|\alpha_{l-1}|\cos\theta_{ij}}{|\alpha_l|}=2\cdot\frac{\sqrt{2}}{1}\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-2,$$

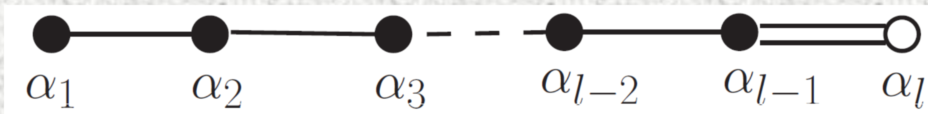
于是，B_l 李代数的 Cartan 矩阵为

$$A_{B_l}=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

$(l\times l)$三对角矩阵。

二、半单李代数的Cartan 矩阵

3. C_l 李代数的 Cartan 矩阵

由其邓金图 

知:

对 $i, j = 1, 2, \cdots, (l-2), (l-1)$,

$$\cos\theta_{ij} = \cos 120^\circ \delta_{i(j\pm1)} = -\frac{1}{2}\delta_{i(j\pm1)}, \qquad \cos^2\theta_{ij} = \frac{mm'}{4}\delta_{i(j\pm1)} = \frac{1}{4}\delta_{i(j\pm1)},$$

再考虑 $\dfrac{|\alpha_i|}{|\alpha_j|} = \dfrac{(\alpha_i,\alpha_i)^{1/2}}{(\alpha_j,\alpha_j)^{1/2}} = \left(\dfrac{m'}{m}\right)^{1/2} = 1, \quad \Rightarrow \; m = m' = -1.$

总之,

$$2\frac{(\alpha_i,\alpha_i)}{(\alpha_i,\alpha_i)} = 2,$$

$$2\frac{(\alpha_i,\alpha_j)}{(\alpha_i,\alpha_i)} = 2\frac{|\alpha_j|\cos\theta_{ij}}{|\alpha_i|} = 2\cdot 1\cdot\left(-\frac{1}{2}\delta_{i(j\pm1)}\right) = -\delta_{i(j\pm1)},$$

$$2\frac{(\alpha_j,\alpha_i)}{(\alpha_j,\alpha_j)} = 2\frac{|\alpha_i|\cos\theta_{ji}}{|\alpha_j|} = 2\cdot 1\cdot\left(-\frac{1}{2}\delta_{j(i\pm1)}\right) = -\delta_{j(i\pm1)},$$

§ 2.4 根的确定

二、半单李代数的Cartan 矩阵

3. C_l 李代数的Cartan 矩阵

对 $i=l-1,\ j=l$,

$$\cos\theta_{ij}=\cos 135^\circ=-\frac{\sqrt{2}}{2},\quad \cos^2\theta_{ij}=\frac{mm'}{4}=\frac{2}{4},$$

$$\frac{|\alpha_{l-1}|}{|\alpha_l|}=\frac{(\alpha_{l-1},\alpha_{l-1})^{1/2}}{(\alpha_l,\alpha_l)^{1/2}}=\left(\frac{m'}{m}\right)^{1/2}=\frac{1}{\sqrt{2}},\ \Rightarrow\ m=-2,\ m'=-1.$$

总之，$2\frac{(\alpha_l,\alpha_l)}{(\alpha_l,\alpha_l)}=2$，$2\frac{(\alpha_{l-1},\alpha_l)}{(\alpha_{l-1},\alpha_{l-1})}=2\frac{|\alpha_l|\cos\theta_{ij}}{|\alpha_{l-1}|}=2\cdot\frac{\sqrt{2}}{1}\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-2$,

$$2\frac{(\alpha_l,\alpha_{l-1})}{(\alpha_l,\alpha_l)}=2\frac{|\alpha_{l-1}|\cos\theta_{ij}}{|\alpha_l|}=2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-1,$$

于是，C_l李代数的 Cartan 矩阵为

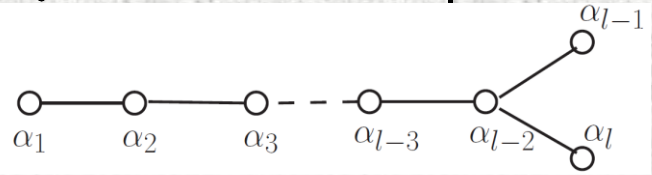
$$A_{C_l}=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$(l\times l)$三对角矩阵。

§ 2.4 根的确定

二、半单李代数的Cartan 矩阵

4. D_l 李代数的 Cartan 矩阵

由其邓金图 

知:

对 $i, j = 1, 2, \cdots, (l-3), (l-2)$,

$$\cos\theta_{ij} = \cos 120^\circ \delta_{i(j\pm1)} = -\frac{1}{2}\delta_{i(j\pm1)}, \quad \cos^2\theta_{ij} = \frac{mm'}{4}\delta_{i(j\pm1)} = \frac{1}{4}\delta_{i(j\pm1)},$$

再考虑 $\dfrac{|\alpha_i|}{|\alpha_j|} = \dfrac{(\alpha_i,\alpha_i)^{1/2}}{(\alpha_j,\alpha_j)^{1/2}} = (\dfrac{m'}{m})^{1/2} = 1, \quad \Rightarrow \; m = m' = -1.$

总之,

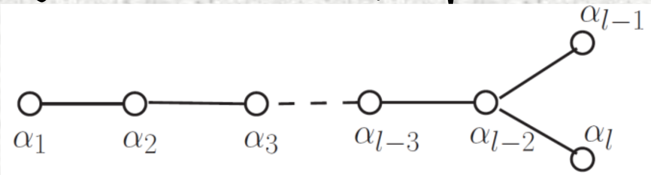
$$2\frac{(\alpha_i,\alpha_i)}{(\alpha_i,\alpha_i)} = 2,$$

$$2\frac{(\alpha_i,\alpha_j)}{(\alpha_i,\alpha_i)} = 2\frac{|\alpha_j|\cos\theta_{ij}}{|\alpha_i|} = 2\cdot1\cdot(-\frac{1}{2}\delta_{i(j\pm1)}) = -\delta_{i(j\pm1)},$$

$$2\frac{(\alpha_j,\alpha_i)}{(\alpha_j,\alpha_j)} = 2\frac{|\alpha_i|\cos\theta_{ji}}{|\alpha_j|} = 2\cdot1\cdot(-\frac{1}{2}\delta_{j(i\pm1)}) = -\delta_{j(i\pm1)},$$

二、半单李代数的Cartan 矩阵

4. D_l 李代数的 Cartan 矩阵

由其邓金图 

知:

对 $i=l-2,\ j=l-1,$

$$\cos\theta_{ij}=\cos 120^\circ=-\frac{1}{2},\quad \cos^2\theta_{ij}=\frac{mm'}{4}=\frac{1}{4},\quad \frac{|\alpha_i|}{|\alpha_j|}=\left(\frac{m'}{m}\right)^{1/2}=1,$$

$$2\frac{(\alpha_i,\alpha_i)}{(\alpha_i,\alpha_i)}=2,\quad 2\frac{(\alpha_i,\alpha_j)}{(\alpha_i,\alpha_i)}=2\frac{|\alpha_j|\cos\theta_{ij}}{|\alpha_i|}=2\cdot 1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-1,$$

$$2\frac{(\alpha_j,\alpha_i)}{(\alpha_j,\alpha_j)}=2\frac{|\alpha_i|\cos\theta_{ji}}{|\alpha_j|}=2\cdot 1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-1,$$

对 $i=l-2,\ j=l,$

因为邓金图与 $i=l-2,\ j=l-1$ 的完全相同,

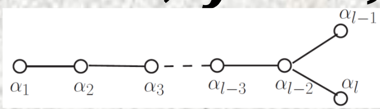
所以矩阵元也完全相同。

§ 2.4 根的确定

二、半单李代数的Cartan 矩阵

4. D_l 李代数的Cartan 矩阵

对 $i=l-1,\ j=l$ ，

由图 

知，二者不相连，

即有 $\theta_{(l-1)l}=90°$，$\cos\theta_{(l-1)l}=\cos 90°=0$，

因此，$2\dfrac{(\alpha_i,\alpha_i)}{(\alpha_i,\alpha_i)}=2$，

$$2\frac{(\alpha_i,\alpha_j)}{(\alpha_i,\alpha_i)}=2\frac{|\alpha_j|\cos\theta_{ij}}{|\alpha_i|}=2\cdot 1\cdot 0=0,$$

$$2\frac{(\alpha_j,\alpha_i)}{(\alpha_j,\alpha_j)}=2\frac{|\alpha_i|\cos\theta_{ij}}{|\alpha_j|}=2\cdot 1\cdot 0=0,$$

于是，D_l 李代数的 Cartan 矩阵为

$$A_{D_l}=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$(l\times l)$五对角矩阵。

§ 2.4 根的确定

二、半单李代数的Cartan 矩阵

5. G_2 李代数的 Cartan 矩阵

由其邓金图 

知:

$$\cos\theta_{12} = \cos 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}\,, \quad \cos^2\theta_{12} = \frac{m m'}{4} = \frac{3}{4}\,, \Rightarrow\ m m' = 3\,;$$

再考虑 $\dfrac{|\alpha_1|}{|\alpha_2|} = \dfrac{(\alpha_1,\alpha_1)^{1/2}}{(\alpha_2,\alpha_2)^{1/2}} = (\dfrac{m'}{m})^{1/2} = \sqrt{3}\,, \Rightarrow\ m = -1,\ m' = -3\,.$

总之,

$$2\frac{(\alpha_1,\alpha_1)}{(\alpha_1,\alpha_1)} = 2\,, \qquad 2\frac{(\alpha_2,\alpha_2)}{(\alpha_2,\alpha_2)} = 2\,,$$

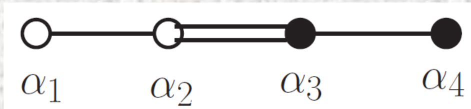
$$2\frac{(\alpha_1,\alpha_2)}{(\alpha_1,\alpha_1)} = 2\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot(-\frac{\sqrt{3}}{2}) = -1\,, \qquad 2\frac{(\alpha_2,\alpha_1)}{(\alpha_2,\alpha_2)} = 2\cdot\sqrt{3}\cdot(-\frac{\sqrt{3}}{2}) = -3\,,$$

于是, G_2 李代数的 Cartan 矩阵 $A_{G_2} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$

§ 2.4 根的确定

二、半单李代数的Cartan 矩阵

6. F_4 李代数的 Cartan 矩阵

由其邓金图 

知:

$$\cos\theta_{12}=\cos120^\circ=-\frac{1}{2}\,,\quad \cos^2\theta_{12}=\frac{mm'}{4}=\frac{1}{4}\,,\quad \Rightarrow\ mm'=1\,;$$

$$\frac{|\alpha_1|}{|\alpha_2|}=\frac{(\alpha_1,\alpha_1)^{1/2}}{(\alpha_2,\alpha_2)^{1/2}}=\left(\frac{m'}{m}\right)^{1/2}=1\,,\qquad \Rightarrow\ m=m'=-1.$$

于是,

$$2\frac{(\alpha_1,\alpha_1)}{(\alpha_1,\alpha_1)}=2\,,\qquad 2\frac{(\alpha_2,\alpha_2)}{(\alpha_2,\alpha_2)}=2\,,$$

$$2\frac{(\alpha_1,\alpha_2)}{(\alpha_1,\alpha_1)}=2\cdot1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-1\,,\qquad 2\frac{(\alpha_2,\alpha_1)}{(\alpha_2,\alpha_2)}=2\cdot1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-1\,;$$

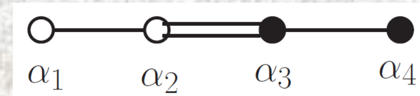
并且, $\cos\theta_{13}=\cos90^\circ=0\,,\quad 2\frac{(\alpha_1,\alpha_3)}{(\alpha_1,\alpha_1)}=0\,,\qquad 2\frac{(\alpha_3,\alpha_1)}{(\alpha_3,\alpha_3)}=0\,;$

$$\cos\theta_{14}=\cos90^\circ=0\,,\quad 2\frac{(\alpha_1,\alpha_4)}{(\alpha_1,\alpha_1)}=0\,,\qquad 2\frac{(\alpha_4,\alpha_1)}{(\alpha_4,\alpha_4)}=0\,;$$

§ 2.4 根的确定

二、半单李代数的Cartan 矩阵

6. F_4 李代数的 Cartan 矩阵



$$\cos\theta_{23}=\cos 135^\circ=-\frac{\sqrt{2}}{2}\,,\quad \cos^2\theta_{23}=\frac{mm'}{4}=\frac{2}{4}\,,\quad \frac{|\alpha_2|}{|\alpha_3|}=(\frac{m'}{m})^{1/2}=\sqrt{2}\,,$$

$$2\frac{(\alpha_2,\alpha_3)}{(\alpha_2,\alpha_2)}=2\frac{|\alpha_3|\cos\theta_{23}}{|\alpha_2|}=2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-1,\quad 2\frac{(\alpha_3,\alpha_2)}{(\alpha_3,\alpha_3)}=-2\,,$$

$$\cos\theta_{24}=\cos 90^\circ=0\,,\quad 2\frac{(\alpha_2,\alpha_4)}{(\alpha_2,\alpha_2)}=2\frac{|\alpha_4|\cos\theta_{24}}{|\alpha_2|}=0,\quad 2\frac{(\alpha_4,\alpha_2)}{(\alpha_4,\alpha_4)}=0\,,$$

$$\cos\theta_{34}=\cos 120^\circ=-\frac{1}{2}\,,\quad \cos^2\theta_{34}=\frac{mm'}{4}=\frac{1}{4}\,,\quad \frac{|\alpha_3|}{|\alpha_4|}=(\frac{m'}{m})^{1/2}=1\,,$$

$$2\frac{(\alpha_3,\alpha_3)}{(\alpha_3,\alpha_3)}=2\frac{(\alpha_4,\alpha_4)}{(\alpha_4,\alpha_4)}=2,\qquad 2\frac{(\alpha_3,\alpha_4)}{(\alpha_3,\alpha_3)}=-1,\qquad 2\frac{(\alpha_4,\alpha_3)}{(\alpha_4,\alpha_4)}=-1\,,$$

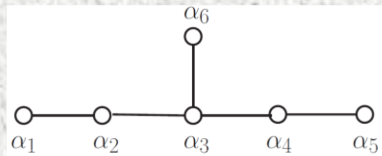
于是，F_4 李代数的 Cartan 矩阵为

$$A_{F_4}=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0 & 0\\ -1 & 2 & -1 & 0\\ 0 & -2 & 2 & -1\\ 0 & 0 & -1 & 2\end{pmatrix}.$$

§ 2.4 根的确定

二、半单李代数的Cartan 矩阵

7. E_6 李代数的 Cartan 矩阵

由其邓金图 

知：相邻素根间夹角为 120°，

于是 $A_{11} = A_{22} = A_{33} = A_{44} = A_{55} = A_{66} = 2\dfrac{(\alpha_i,\alpha_i)}{(\alpha_i,\alpha_i)} = 2$，

$A_{12} = 2\dfrac{(\alpha_1,\alpha_2)}{(\alpha_1,\alpha_1)} = 2\cdot 1\cdot(-\dfrac{1}{2}) = -1$， $A_{21} = 2\dfrac{(\alpha_2,\alpha_1)}{(\alpha_2,\alpha_2)} = -1$，

$A_{23} = A_{32} = A_{34} = A_{43} = A_{36} = A_{63} = A_{45} = A_{54} = -1$；

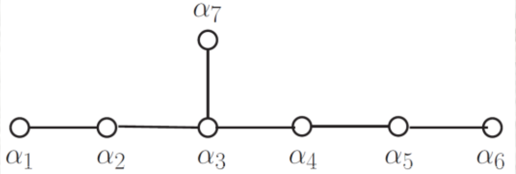
由不相邻的素根间夹角为 90°，不相邻根对应的矩阵元都为 0.

所以，E_6 李代数的 Cartan 矩阵为 $A_{E_6} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

§ 2.4 根的确定

二、半单李代数的Cartan 矩阵

8. E_7 李代数的 Cartan 矩阵

由其邓金图 

知:

$$A_{11}=A_{22}=A_{33}=A_{44}=A_{55}=A_{66}=A_{77}=2\frac{(\alpha_i,\alpha_i)}{(\alpha_i,\alpha_i)}=2,$$

$$A_{12}=A_{21}=A_{23}=A_{32}=A_{34}=A_{43}=A_{37}=A_{73}=A_{45}=A_{54}=A_{56}=A_{65}=-1;$$

不相邻根对应的矩阵元都为 0, 即 $A_{13}=A_{31}=A_{14}=A_{41}=A_{15}=A_{51}$

$$=A_{16}=A_{61}=A_{17}=A_{71}=A_{24}=A_{42}=A_{25}=A_{52}=A_{26}=A_{62}=A_{27}=A_{72}$$

$$=A_{35}=A_{53}=A_{36}=A_{63}=A_{46}=A_{64}=A_{47}=A_{74}=A_{57}=A_{75}=A_{67}=A_{76}=0;$$

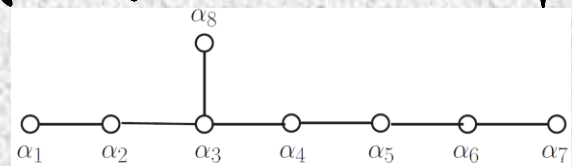
所以, E_7 李代数的 Cartan 矩阵为

$$A_{E_7}=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

§ 2.4.1 Cartan矩阵

二、半单李代数的Cartan 矩阵

9. E_8 李代数的 Cartan 矩阵

由其邓金图 

知:

$$A_{11}=A_{22}=A_{33}=A_{44}=A_{55}=A_{66}=A_{77}=A_{88}=2\frac{(\alpha_i,\alpha_i)}{(\alpha_i,\alpha_i)}=2\,,$$

$$A_{12}=A_{21}=A_{23}=A_{32}=A_{34}=A_{43}=A_{38}=A_{83}=A_{45}=A_{54}=A_{56}=A_{65}=A_{67}=A_{76}=-1\,;$$

不相邻根对应的矩阵元都为 0，即 $A_{13}=A_{31}=A_{14}=A_{41}=A_{15}=A_{51}$
$=A_{16}=A_{61}=A_{17}=A_{71}=A_{18}=A_{81}=A_{24}=A_{42}=A_{25}=A_{52}=A_{26}=A_{62}$
$=A_{27}=A_{72}=A_{28}=A_{82}=A_{35}=A_{53}=A_{36}=A_{63}=A_{37}=A_{73}=\cdots=0;$

所以，E_8 李代数的 Cartan 矩阵为

$$A_{E_8}=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

§2.4.2 半单纯李代数的根系

一、确定方案

由根的结构知，n 维 l 秩半单纯李代数的根系为：

$$\Sigma = 0 + \Sigma^{+} + \Sigma^{-},$$

相应根的数目	n	l	$\frac{n-l}{2}$	$\frac{n-l}{2}$

前述讨论表明：若已知 $\{\alpha_i | i=1,2,\cdots,l\} = \pi \in \Sigma^{+}$，

即 已知所有一级正根（素根），

则其它正根 a 都可以由素根叠加得到，即有，

$$a = \sum_{i=1}^{l} k^i \alpha_i, \quad (k^i > 0, K = \sum_{i=1}^{l} k^i \text{称为该根的级次})。$$

如果已知 g 的 K 级正根 a，则 $K+1$ 级正根 b 可以表述为

$$b = a + \alpha_j, \quad \text{其中} \ \alpha_j \in \pi .$$

如果 b 确实是根，由定义知，它是 $K+1$ 级正根 。

§ 2.4.2 半单纯李代数的根系

一、确定方案

由于已知所有 K 级及其以下的正根，即已知线性组合

$$a,\ a-\alpha_j,\ a-2\alpha_j,\ \cdots,$$

中哪些是根、哪些不是根，因此在包含 a 的关于 α_j 的根链：

$$a-q_j\alpha_j,\ a-(q_j-1)\alpha_j,\ a-\alpha_j,\ a,\ a+\alpha_j,\cdots,\ a+p_j\alpha_j,$$

中的 q_j 是已知的，相应于 $K=1,\ q_j=0$.

那么，由根的性质 $\dfrac{2(a,\alpha_j)}{(\alpha_j,\alpha_j)}=q-p=m$ (整数)，

知，$p_j=q_j-2\dfrac{(a,\alpha_j)}{(\alpha_j,\alpha_j)}$.

将 $a=\sum_{i=1}^{l}k^i\alpha_i$ 代入，则得

$$p_j=q_j-2\frac{\left(\sum_{i=1}^{l}k^i\alpha_i,\alpha_j\right)}{(\alpha_j,\alpha_j)}=q_j-2\frac{\sum_{i=1}^{l}k^i(\alpha_i,\alpha_j)}{(\alpha_j,\alpha_j)}=q_j-\sum_{i=1}^{l}A_{ji}k^i\ .$$

§ 2.4.2 半单纯李代数的根系

一、确定方案

其中 $A_{ji}=\frac{2(\alpha_j,\alpha_i)}{(\alpha_j,\alpha_j)}$ 为 Cartan 矩阵的矩阵元。

这表明，p_j 可以由 Cartan 矩阵确定。

显然，如果 $p_j\geq 1$，则 $a+\alpha_j$ 是 $(K+1)$ 级正根；

如果 $p_j<1$，则 $a+\alpha_j$ 不是根。

这样，我们即可确定 n 维 l 秩半单李代数的所有正根。

进而可以确定所有的根。

具体方案小结如下。

§ 2.4.2 半单纯李代数的根系

一、确定方案

♠ 确定 n 维 l 秩半单李代数的所有根的方案如下：

先确定由素根 $\{\alpha_j | j=1,2,\cdots,l\}$ 简单叠加的 K 级正根

$$a=\sum_{i=1}^{l} k^i\alpha_i \quad (K=\sum_{i=1}^{l} k^i),$$

和包含 a 的关于 α_j 已的根链

$$a-q_j\alpha_j,\ a-(q_j-1)\alpha_j,\ a-\alpha_j,\ a,\ a+\alpha_j,\cdots,\ a+p_j\alpha_j,$$

中的 q_j；

然后由嘉当矩阵确定 $p_j=q_j-\sum_{i=1}^{l} A_{ji}k^i$；

再根据"如果 $p_j\geq 1$，则 $a+\alpha_j$ 是 $(K+1)$ 级正根;

如果 $p_j<1$，则 $a+\alpha_j$ 不是根"

的判据确定 $a+\alpha_j$ 维是否是根;

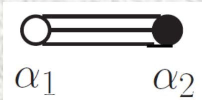
再然后逐级递推求出所有正根。

最后，对求得所有正根再都乘以 -1，得到所有负根。

从而确定完整的根系。

§ 2.4.2 半单纯李代数的根系

二、实例：G_2的所有根

由邓金图 

知，

G_2 李代数的一级正根（素根）为 α_1 和 α_2，

嘉当矩阵为 $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$.

- 由于$\alpha_2-\alpha_1$ 不是根，

  则包含 α_2 的关于素根 α_1 的根链仅为 α_2，

  即有 $q_1=0$，$k^1=0$，$k^2=1$，

  于是 $p_1=q_1-\sum_{i=1}^{2}A_{1i}k^i=0-2\cdot 0-(-1)\cdot 1=1.$

  $\because\ p_1=1\geq 1$，

  $\therefore\ \alpha_2+\alpha_1$ 是根(二级正根).

  同理，由 $\alpha_1-\alpha_2$ 不是根知，包含 α_1 的关于 α_2的根链中，

  $q_2=0$，$k^1=1$，$k^2=0$，

  于是 $p_2=q_2-\sum_{i=1}^{2}A_{2i}k^i=0-(-3)\cdot 1-2\cdot 0=3.$

§ 2.4.2 半单纯李代数的根系

二、实例：G_2的所有根

$\because\ p_2 = 3 > 1$,

$\therefore\ \alpha_1 + \alpha_2$ 是根(二级正根).

综上，有二级正根 $a = \alpha_1 + \alpha_2$.

- 考虑包含二级正根 $a = \alpha_1 + \alpha_2$ 的关于 α_1 的根链，

$\because\ a - \alpha_1 = \alpha_2$ 是根，即有 $q_1 = 1$，$k^1 = 1$，$k^2 = 1$,

$\therefore\ p_1 = q_1 - \sum_{i=1}^{2} A_{1i} k^i = 1 - 2\cdot 1 - (-1)\cdot 1 = 0.$

$\because\ p_1 = 0 \ngeq 1$,　　$\therefore\ a + \alpha_1 = 2\alpha_1 + \alpha_2$ 不是根.

同理，由 $a - \alpha_2 = \alpha_1$ 是根知，包含 a 的关于 α_2 的根链中，

$q_2 = 1$，$k^1 = 1$，$k^2 = 1$,

于是 $p_2 = q_2 - \sum_{i=1}^{2} A_{2i} k^i = 1 - (-3)\cdot 1 - 2\cdot 1 = 2.$

$\because\ p_2 = 2 > 1$,

$\therefore\ b = a + \alpha_2 = \alpha_1 + 2\alpha_2$ 是根.

综上，有三级正根 $b = \alpha_1 + 2\alpha_2$.

§ 2.4.2 半单纯李代数的根系

二、实例：G_2的所有根

- 考虑包含三级正根 $b=\alpha_1+2\alpha_2$ 的关于 α_1 的根链，

$\because\ b-\alpha_1=(\alpha_1+2\alpha_2)-\alpha_1=2\alpha_2$ 不是根，

即有 $q_1=0$，$k^1=1$，$k^2=2$，

$\therefore\ p_1=q_1-\sum_{i=1}^{2}A_{1i}k^i=0-2\cdot 1-(-1)\cdot 2=0.$

$\because\ p_1=0\not\geq 1$，

$\therefore\ b+\alpha_1=(\alpha_1+2\alpha_2)+\alpha_1=2(\alpha_1+\alpha_2)$ 不是根.

考虑包含三级正根 $b=\alpha_1+2\alpha_2$ 的关于 α_2 的根链，

$\because\ b-\alpha_2=(\alpha_1+2\alpha_2)-\alpha_2=\alpha_1+\alpha_2=a$ 是根，

$b-2\alpha_2=(\alpha_1+2\alpha_2)-2\alpha_2=\alpha_1$ 是根，

$b-3\alpha_2=\alpha_1-\alpha_2$ 不是根，则有 $q_2=2$，$k^1=1$，$k^2=2$，

于是 $p_2=q_2-\sum_{i=1}^{2}A_{2i}k^i=2-(-3)\cdot 1-2\cdot 2=1.$

$\because\ p_2=1\geq 1$，

$\therefore\ c=b+\alpha_2=\alpha_1+3\alpha_2$ 是根.

综上，有四级正根 $c=\alpha_1+3\alpha_2$.

§ 2.4.2 半单纯李代数的根系

二、实例：G_2的所有根

- 考虑包含四级正根 $c=\alpha_1+3\alpha_2$ 的关于 α_1 的根链，

$\because\ c-\alpha_1=(\alpha_1+3\alpha_2)-\alpha_1=3\alpha_2$ 不是根，

即有 $q_1=0$，$k^1=1$，$k^2=3$，

$\therefore\ p_1=q_1-\sum_{i=1}^{2}A_{1i}k^i=0-2\cdot 1-(-1)\cdot 3=1.$

$\because\ p_1=1$， $\therefore\ c+\alpha_1=(\alpha_1+3\alpha_2)+\alpha_1=2\alpha_1+3\alpha_2$ 是根.

考虑包含四级正根 $c=\alpha_1+3\alpha_2$ 的关于 α_2 的根链，

$\because\ c-\alpha_2=(\alpha_1+3\alpha_2)-\alpha_2=\alpha_1+2\alpha_2=b$ 是根，

$c-2\alpha_2=(\alpha_1+3\alpha_2)-2\alpha_2=\alpha_1+\alpha_2=a$ 是根，

$c-3\alpha_2=(\alpha_1+3\alpha_2)-3\alpha_2=\alpha_1$ 是根，

$c-4\alpha_2=(\alpha_1+3\alpha_2)-4\alpha_2=\alpha_1-\alpha_2$ 不是根，

则有 $q_2=3$，$k^1=1$，$k^2=3$，

于是 $p_2=q_2-\sum_{i=1}^{2}A_{2i}k^i=3-(-3)\cdot 1-2\cdot 3=0.$

$\because\ p_2=0\ngeq 1$， $\therefore\ c+\alpha_2=\alpha_1+4\alpha_2$ 不是根.

综上，有五级正根 $d=2\alpha_1+3\alpha_2$.

§ 2.4.2 半单纯李代数的根系

二、实例：G_2的所有根

- 考虑包含五级正根 $d=2\alpha_1+3\alpha_2$ 的关于 α_1 的根链，

$\because\ d-\alpha_1=(2\alpha_1+3\alpha_2)-\alpha_1=\alpha_1+3\alpha_2=c$ 是根，

$d-2\alpha_1=(2\alpha_1+3\alpha_2)-2\alpha_1=3\alpha_2$ 不是根，

即有 $q_1=1$，$k^1=2$，$k^2=3$，

$\therefore\ p_1=q_1-\sum_{i=1}^{2}A_{1i}k^i=1-2\cdot2-(-1)\cdot3=0.$

$\because\ p_1=0\ngeq 1$，

$\therefore\ d+\alpha_1=3(\alpha_1+\alpha_2)$ 不是根.

考虑包含五级正根 $d=2\alpha_1+3\alpha_2$ 的关于 α_2 的根链，

$\because\ d-\alpha_2=(2\alpha_1+3\alpha_2)-\alpha_2=2(\alpha_1+\alpha_2)$ 不是根，

则有 $q_2=0$，$k^1=2$，$k^2=3$，

于是 $p_2=q_2-\sum_{i=1}^{2}A_{2i}k^i=0-(-3)\cdot2-2\cdot3=0.$

$\because\ p_2=0\ngeq 1$，

$\therefore\ d+\alpha_2=2\alpha_1+4\alpha_2$ 不是根.

综上，不存在六级正根，进而不存在更高级次的正根。

§ 2.4.2 半单纯李代数的根系

二、实例：G_2的所有非零根

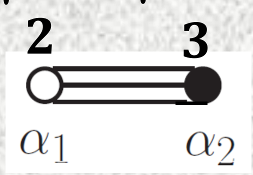
- 总结起来，得到 G_2的所有根为：

$$\pm\alpha_1,\ \pm\alpha_2,\ \pm(\alpha_1+\alpha_2),\ \pm(\alpha_1+2\alpha_2),\ \pm(\alpha_1+3\alpha_2),\ \pm(2\alpha_1+3\alpha_2).$$

即共有 12 个非零根，最高级次是 5.

通常称最高级次的根为最高根。

为表征最高根，常在邓金图上标出最高根包含的各素根的级次。

例如，对 G_2 有： .

====================

习题：

1. 试确定 A_4 、B_4 、C_4 、D_4 、F_4 的根系。

2. 试通过推导计算，给出 A_l 、B_l 、C_l 和 D_l 李代数的正根和之半。