李群和李代数及其应用

刘玉鑫

北京大学物理学院理论物理研究所

北京大学物理学院, 2020年春季学期

第0章　绪 论

一、作用与意义

1. 物理

研究物质的存在形式与结构(相互作用)、运动形式及其间的改变与转化的科学。

➔ 见物讲理，依理造物！

表述：定理、定律、守恒律、等。

2. 对称性

(1) 定义：操作（变换）下的不变性。

(2) Noether定理：每一个连续对称性都对应一个守恒量。

从而：Symmetry ⟷ Underlying Principle ➔ Phys.

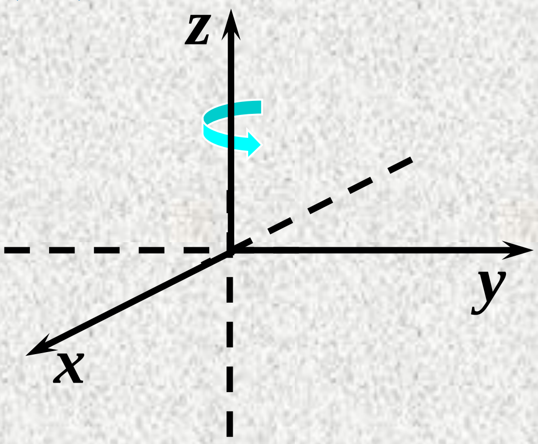
3. 实例

(1) 置换群 S_n

抽象地，1234……n 个数间交换顺序的规律的描述；　　并与点群对应；

具体地，多粒子系统的对称性。

(2) 平面转动群与空间转动群



平面转动群 $\hat{L}_z$，$\hat{L}_z|m\rangle = m|m\rangle$

绕任意一点或一轴转动

—空间转动群 $\hat{R}$ 或 $\hat{L}$，

基本原理层面上 $L=?\ \ m=?$

$\vec{L}_1+\vec{L}_2=\vec{L}$　　$SO(3)\otimes SO(3)\supset SO(3)$　　$\langle L_1M_1L_2M_2|LM\rangle=?$

Algebra　　　　Group　　　　Rep. Reduction, etc.

(3) Hadron

Hadron:	Baryon	Meson
	3-quark system	q-$\bar{q}$ system

D.O.F. of q: {spatial, spin, flavor, color, $\cdots$ }

$$\begin{array}{cccc} 3 & \frac{1}{2} & 2,3,4,5,6 & 3 \\ SO_O(3) \otimes & SU_S(2) \otimes & SU_F(n) \otimes & SU_C(3) \end{array}$$

	(l)	[1]	[1]	[1]
Baryon	(?)	[?]	[?]	$[1^3]$
Meson	(?)	[?]	[?]	$[1^3]$ or $[1\bar{1}]$

Multiquark systems ???

q-q interaction: most simple appr. $\frac{\lambda^a}{2} \cdot \frac{\lambda^b}{2} = ?$

pair ?

(4) Nucleus

Nucleus: Many-nucleon system

$$|\oplus j_i^N\rangle = |J\rangle = ?$$

even-even: $\frac{N}{2} = n$ pairs ➔ n bosons $|b_i^{+n}\rangle = |?\rangle$

odd-A : $\left|\frac{N}{2}\, pairs\right\rangle \left| nucleon \right\rangle = |n\ bosons\rangle |1\ fermion\rangle = |?\rangle$

odd-odd : $\frac{N}{2} = n$ pairs ➔ n bosons, $\tau = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$, $s = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$.

Fermion Level: $U(\sum_i (2j_i + 1)) \supset \cdots \supset SO(3)$

Boson Level: $U(\sum_i (2l_i + 1)) \supset \cdots \supset SO(3)$

Supersymmetry U(m/n) ,

Keys: Realization of the groups, Collective motion?

(5) **Molecule**

Many-atom system, Collective Motion.

(6) **Superconductivity, Superfluid,**

Many-particle system, Collective Motion.

(7) **Fundamental problem:**

Mass generation .

Groups are usually classified as $\begin{cases} Discrete \\ Continuous \end{cases}$,

Continuous one is just the Lie Group, whose generators form the Lie Algebra.

We then discuss here Lie Algebras & Lie Groups.

二、课程描述与主要内容提要

1. 课程描述

课程号：　00434028

新课号：　PHY-2-205

课程名称：群论 II　— 李群和李代数

开课学期：春季

学分：　3

先修课程：群论 I（PHY-2-202）

基本目的：

使得同学对于李群、李代数的基本结构以及物理中常用的李群、李代数的表示有所了解。适合物理学院纯粹物理型本科生以及理论物理专业研究生选修。

内容提要：

群论既是一门抽象数学又是在物理学中具有广泛应用的实用学科，本课程将结合理论的系统性和群论的实际应用，主要介绍群，特别是李群和李代数的基本理论。课程采用课堂讲授的方法进行，内容主要包括：李群、李代数的基本概念和表示，Poincare 群，经典李代数一般性质，经典李群、李代数的玻色子实现和费密子实现。

2. 教学内容及进程计划*

章 次	内 容	学时数
第一章	李群与李代数的基本概念	10
第二章	半单纯李代数及其根系	10
第三章	典型李代数的实现	6
第四章	李群和李代数的表示	8
第五章	李群和李代数的表示的约化	6
第六章	典型李代数在关于强作用研究中的应用	8
第七章	典型李代数在多粒子系统研究中的应用	8

*实际仅14周上课时间，因此按56学时做计划，争取更多。

3. 主要参考书目

1. 刘玉鑫，李群和李代数及其应用　（北京大学内部讲义）
2. 韩其智、孙洪洲，群论　(北京大学出版社，1987)
3. 孙洪洲、韩其智，李代数李超代数及在物理学中的应用　(北大社)
4. 马中琪，物理学中的群论 — 李代数篇　(科学社, 2015)
5. 高崇寿，群论及其在粒子物理学中的应用　（高教社, 1992）
6. 陶瑞宝，物理学中的群论　（高教社, 2011）
7. 项武义、等，李群讲义　（北大社, 1992）
8. A.O. Barut, R. Raczka，Theory of Group Representations and Applications　(PWN-Polish Sci. Pub.—Warszawa, ’80)
9. Jin-quan Chen, Group Representation Theory for Physicists (World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 1989)
10. H. Georgi, Lie Algebras in Particle Physics (Benjamin, ‘82)
11. M. Hamermesh, Group Theory & Its Application to ……
12. V.S. Varadarajan, Lie Groups, Lie Algebras, and ……
13. B.G. Wybourne, Classical Groups for Physicists, John ……

第一章 李群与李代数的基本概念

§1.1. 典型矩阵群

一、群的概念

群：对于一个集合G中的元素，定义一种运算(乘法)，如果这些元素满足：

(1) 如果 $a, b \in G$, 则 $ab \in G$;

(2) 如果 $a, b, c \in G$, 则 $(ab)c=a(bc)$;

(3) 存在左单位元 $e \in G$, $\forall a \in G$, 都有 $ea=a$;

(4) 存在左逆元, $\forall a \in G$, 存在 $a^{-1} \in G$, 使得 $a^{-1}a=e$;

这样的集合称为一个群。

上述条件(3)、(4)可以改写为：

存在单位元 $e \in G$, 和逆元 $a^{-1} \in G$, 使得

$$ea = a = ae\ ; \quad a^{-1}a = aa^{-1} = e.$$

一、群的概念（续）

上述条件(3)、(4)还可以改写为：

$\forall\ a, b\in G,$

一次方程 $xa = ay\in G$， 在G中都有唯一解 x, y .

例如： $a=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$,

虽然 $aa = a$, $ab = a$, $bb = b$, $ba = b$, 满足封闭性。

但是，x有解$x=a$, 或 b ; y有解$y=a$, 和 b； 或无解;

总之，无唯一解。所以，这样的$\{a, b\}$不构成群。

再如：转动矩阵$R_z=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$构成群(关于所有$\theta$)

考察 a, b, R的特点， $\det[a]=\det[b]=0$, $\det[R\}=1$;

推而广之知，任意阶的非奇异矩阵的集合构成群。

二、典型矩阵群及其分类

系统研究确实表明：任意阶的非奇异矩阵的集合构成群。

认真考察矩阵的特点，典型矩阵群可分为五类。

1. 一般复线性群 GL(n,C),

$$\{ A \mid A = n\times n \text{ 复矩阵, 且} \det[A] \neq 0 \} = \mathrm{GL}(n,C) .$$

其单位元为 $e = E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{n\times n}$,

逆元 $A^{-1} \rightarrow A^{-1}A = E_n$,

共 $2n^2$ 个群元 ($n\times n$ 个矩阵元, 每个矩阵元有实、虚部两个数).

特殊地, 一般实线性群 GL(n,R)

$$\mathrm{GL}(n,R) = \{A \mid A=n\times n \text{ 实矩阵, 且} \det[A] \neq 0 \} .$$

共有 n^2 有个群元。

二、典型矩阵群及其分类（续）

2. 特殊复线性群 SL(n,C),

前述一般复线性群仅将矩阵限定为非奇异矩阵,

即仅要求 $\{A \mid \det[A] \neq 0\}$,

但对 $\det[A]$ 的具体取值无要求。

保证非奇异矩阵的行列式为1的矩阵构成的群 称为特殊复线性群,

即 $SL(n,C) = \{B \mid B = n\times n$ 复矩阵, 且 $\det[B] = 1\}$,

共有 $2(n^2-1)$ 个独立群元。

更特殊地, **特殊实线性群 SL(n,R)**

$SL(n,R) = \{B \mid B = n\times n$ 实矩阵, 且 $\det[B] = 1\}$,

共有 (n^2-1) 有个独立群元。

3. 酉群与特殊酉群 U(n) & SU(n)

(1) 抽象表述

U(n) = $\{U|U\in GL(n,C)$, 且 $U^\dagger U = UU^\dagger = E_n \}$,

即所有 $n\times n$ 的幺正矩阵构成的群,

共有 n^2 个独立群元

（实虚部各有$(n^2-n)/2$个都为0的限制 和

n个模方和为1的限制）。

SU(n) = $\{U|U\in U(n)$, 且 $\det[U] = 1 \}$,

即 U(n) 群中行列式为1 的幺正矩阵构成的群,

共有 (n^2-1)个独立群元

（原 n^2 个限制基础上，再加上1个$\det[U]=1$ 的限制）。

二、典型矩阵群及其分类（续）

3. 酉群与特殊酉群 U(*n*) & SU(*n*)

(2) 具体意义

〈1〉直观意义

对n维矢量 X ($X^t = \{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$) 作线性变换，

记变换矩阵为 U，即有 $X \rightarrow X'=UX$，

因为 $U^\dagger U = UU^\dagger = E_n$，则

$(X', X') = (UX, UX) = (X, U^\dagger U X) = (X, E_n X) = (X, X)$，

由此知，U(*n*)群即所有保模($\sum_{i=1}^n x_i^* x_i =$ 不变量)变换的矩阵集合构成的群。

特殊地，如果对 $X^t = \{x_1, x_2, \cdots, x_p, y_1, y_2, \cdots, y_q\}$，

$\sum_{i=1}^p x_i^* x_i - \sum_{j=1}^q y_j^* y_j =$ 不变量，则 $U \in \mathrm{U}(p, q)$；

U(*p*, *q*) 称为赝酉群。

〈2〉另一种表述与度规矩阵

矢量内积的一般表述：$(X,Y)=g^{ij}x_i y_j$，

$\{g^{ij}\}=G$ 称为所考虑空间的度规矩阵。

对变换 $X \rightarrow X'=UX$,

如果有幺正对称性，则有 $X'^{\dagger}GX'=X^{\dagger}U^{\dagger}GUX=X^{\dagger}GX$,

即应有 $U^{\dagger}GU=G$.

对直角坐标空间，$g^{ij}=\delta^{ij}$，即G为对角矩阵。

如果G有号差，即 $G=G_{PU}=$

$$\begin{array}{cl}
\left(\begin{array}{cccccc|cccccc}
1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & & & & & & \\
0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & & & & & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & & & 0 & & \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & & & & & & \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & & & & & & \\
\hline
 & & & & & & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
 & & & & & & 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
 & & 0 & & & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
 & & & & & & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\
 & & & & & & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1
\end{array}\right) &
\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{c}\\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} p\text{ 行，}(p+q)\text{ 列} \\
\left.\begin{array}{c}\\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} q\text{ 行，}(p+q)\text{ 列}
\end{array}
\end{array},$$

则赝酉群即保证 $U^{\dagger}G_{PU}U=G_{PU}$ 的所有矩阵U的集合构成的群。

二、典型矩阵群及其分类（续）

4. 正交群与特殊正交群 $O(n)$ & $SO(n)$

(1) 抽象表述

$O(n) = \{O|O\in GL(n,C)$, 且 $O^tO = OO^t = E_n\}$,

即所有 $n\times n$ 的正交矩阵构成的群,

共有 $n(n-1)$ 个独立群元

（实虚部各有 $(n^2-n)/2$ 个都为0的限制 和

n 个实部为1虚部为0的限制）。

$SO(n) = \{O|O\in O(n)$, 且 $\det[O] = 1\}$,

即 $O(n)$ 群中行列式为1 的正交矩阵构成的群,

共有 (n^2-1) 个独立群元

（$\det[O]=1$ 不给出新的限制）。

若空间为实空间，则相应地有：实正交群 $O(n,R)$ （$(n^2-n)/2$ 个独立群元）和实特殊正交群 $SO(n,R)$.

4. 正交群与特殊正交群 O(n) & SO(n)

(2) 直观意义

对n维空间中的矢量 X ($X^t=\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$) 作线性变换，

记变换矩阵为 O， 即有 $X \rightarrow X'=OX$,

因为 $O^tO = OO^t = E_n$, 则

$(X', X') = (OX, OX)= (X, O^tO\, X)= (X, E_nX) =(X,X)$,

即保持 $\sum_{i=1}^{n} x_i'^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = Invariant$ 所有变换矩阵的集合构成的群为 O(n)群 (即所有正交矩阵的集合)。

特殊地，如果对 $X^t=\{x_1,x_2,\cdots,x_p,y_1,y_2,\cdots,y_q\}$,

$\sum_{i=1}^{p} x_i^2-\sum_{j=1}^{q} y_j^2=$ 不变量，则 $O \in$ O(p, q);

O(p, q) 称为赝正交群。

例如：闵科夫斯基空间的正交群为 O(3, 1) .

5. 斜交群 SP(2*n*)

对2n维空间中的矢量 X ($X^t=\{x_1,x_2,\cdots,x_n,x_{n+1},x_{n+2},\cdots,x_{2n}\}$)

和 Y ($y^t=\{y_1,y_2,\cdots,y_n,y_{n+1},y_{n+2},\cdots,y_{2n}\}$) 作线性变换，

记变换矩阵为 M ($2n\times 2n$维),

即有 $X \rightarrow X'=MX$, $Y \rightarrow Y'=MY$, 如果

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i' y_{n+i}' - y_i' x_{n+i}') = \sum_{i=1}^{n}(x_i y_{n+i} - y_i x_{n+i}) = Invariant,$$

则称 M 的集合形成的群为斜交群，亦称辛群，记为SP(2*n*),

其独立群元个数为 2*n*(2*n*+1).

（原本有 $2(2n)^2$个矩阵元， 而 $\sum_{i=1}^{n}(x_i' y_{n+i}' - y_i' x_{n+i}') =$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(M_{ij}x_j M_{(n+i)k}y_k - M_{ij}y_j M_{(n+i)k}x_k\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(x_j M_{ij}^t M_{(n+i)k}y_k - y_j M_{ij}^t M_{(n+i)k}x_k\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(x_j M_{ji} M_{(n+i)k}y_k - y_j M_{ji} M_{(n+i)k}x_k\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(x_j\, y_{n+j} - y_j\, x_{n+j}\right),$$

要求 $\sum_{i=1}^{n} M_{ji} M_{(n+i)k} = \delta_{k(n+j)}$，即有 $2\cdot\frac{2n(2n-1)}{2}$ 个为0的条件，

所以 独立群元数目为 $2\cdot 4n^2-(4n^2-2n)=2n(2n+1)$ 个）

(2) 具体意义

♠ “斜交”空间的度规与斜交群的另一种表述

前述二次型 $\sum_{i=1}^{n}(x_i y_{n+i} - y_i x_{n+i})$ 不变，

即要求基及其变换满足：

$$(e_\alpha, e_\beta) = -(e_\beta, e_\alpha) = \delta_{\beta(n+\alpha)},$$

$$(\text{对 } \beta \neq n \pm \alpha, \beta' \neq n \pm \alpha', (e_\alpha, e_\beta) = (e_{\alpha'}, e_{\beta'}) = 0)$$

即：度规矩阵为

$$G_{SP} = \begin{pmatrix} & \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{matrix} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & I_{n\times n} \\ -I_{n\times n} & \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

所以，斜交群即保持 $P^t G_{SP} P = G_{SP}$ 的矩阵 P 的集合。

♣ 小结

1. GL(n,R)、SL(n,C)、SL(n,R)、U(n)、SU(n)、O(n)、SO(n)、SP($2n$) 都是 GL(n,C) 的子群。

2. 对群GL(n,C) 的各子群分类的标准

(1) 行列式条件：det[A]=?　　(保“体积”子群)

(2) 度规条件：$A^{\dagger}GA = G, \cdots, G=?$　　(保度规子群)

3. 群元素与群参数

群元素：变换矩阵的矩阵元；　群参数：决定群元素的参数。

对 GL(n,C), 群参数的数目与群元素的数目相同；

对于子群，群参数数目 < 群元素数目；　(度规条件所致)

例如：SO(2)群有4个群元素，却只有1个群参数。

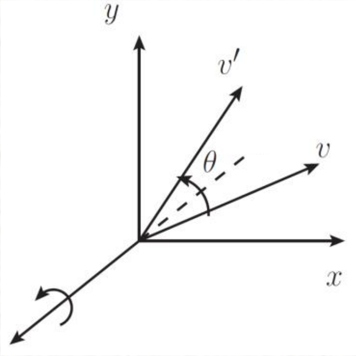
群参数取值区间决定群的紧致性：群参数区间 $\begin{cases} \text{有限} \rightarrow \text{紧致；} \\ \text{无限} \rightarrow \text{非紧致。} \end{cases}$

§ 1.2. 李群与李变换群

一、合成函数

回顾二维平面转动群 SO(2)，

$$R_z(\theta)=\begin{pmatrix}cos\theta & -sin\theta\\ sin\theta & cos\theta\end{pmatrix},$$



一个参数θ刻画了该群的性质，并且，

(1) 如果 $R(\theta')=R(\theta)$，则 $\theta'=\theta$;

(2) $v'=R(\theta)v$,

$R(\theta)$: 转动矩阵，　　　v被作用的空间矢量;

(3) 对 $R_1=R(\theta_1)$ ， $R_2=R(\theta_2)$,

$$R_1R_2=R_2R_1=R(\theta_1+\theta_2),$$

如果记 $R(\theta_1+\theta_2)=R(\theta)$,

则 $\theta=\theta_1+\theta_2$ 给出两不同角度转动的整体效果。

一、合成函数

一般地，对 $O_1(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1)$、$O_2(\alpha_2,\beta_2,\gamma_2)$，

$$O_1O_2 \neq O_2O_1 .$$

但仍可表示为 $O_1O_2 = O(\alpha,\beta,\gamma)$，

其中 $\alpha = \alpha(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1;\alpha_2,\beta_2,\gamma_2)$,

$\beta = \beta(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1;\alpha_2,\beta_2,\gamma_2)$,

$\gamma = \gamma(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1;\alpha_2,\beta_2,\gamma_2)$；

并且 $X' = OX = O(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1;\alpha_2,\beta_2,\gamma_3)X$. 推而广之，

对每一组(r个)实参数 $(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_i,\cdots,\alpha_r)$,

都对应群的一个元素，

例如：$\mathrm{A}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)$、$\mathrm{B}(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r)$,

并有 $\mathrm{C}(\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_r) = AB$.

其中 $\gamma = \varphi(\alpha,\beta)$ 称为 (α,β) 的合成函数。

一、合成函数

上述合成函数应满足的条件

对$A(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)B(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r)=C(\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_r)$，

其中 $\gamma=\varphi(\alpha,\beta)$ 称为 (α,β) 的合成函数，

(1) 单位元

取 $E=E(\alpha_1^0,\alpha_2^0,\cdots,\alpha_r^0)=E(0,0,\cdots,0)$，

$EA=A=AE$ 要求

$\varphi(0,\alpha)=\alpha=\varphi(\alpha,0)$，（各"分量"即：$\varphi_i(0,\alpha)=\alpha_i$）

(2) 逆元素

对 $A(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)$，存在 $A^{-1}=A(\overline{\alpha_1},\overline{\alpha_2},\cdots,\overline{\alpha_r})$，

为保证 $AA^{-1}=E=A^{-1}A$，必须 $\varphi(\alpha,\overline{\alpha})=0=\varphi(\overline{\alpha},\alpha)$.

(3) 结合律

$(AB)C=A(BC)$，要求 $\varphi(\varphi(\alpha,\beta),\gamma)=\varphi(\alpha,\varphi(\beta,\gamma))$.

二、李群与李变换群

前述讨论表明，• 当α很小时，α′ = -α；

• 当α、β都很小时，$\varphi(\alpha,\beta) = \alpha + \beta$;

即合成函数$\varphi(\alpha,\beta)$为连续可微函数。 一般地，

对由r个参数决定的连续变化的元素$A(\alpha)$，

如果合成函数$\varphi(\alpha,\beta)$是α和β的连续可微函数，

则称$A(\alpha)$的集合构成的群为李群。

已知，讨论群元素表述的操作时，除了操作A之外， 还有被操作对象（矢量）及荷载被操作矢量的空间；

若把$A(\alpha)$看作作用在某一空间V中的矢量X的算符(操作)，

它使得 $X \rightarrow X' = A(\alpha)X$，则称$A(\alpha)$构成的群为李群。

如果 $A(\alpha) \in V$，则称这样的群为李变换群。

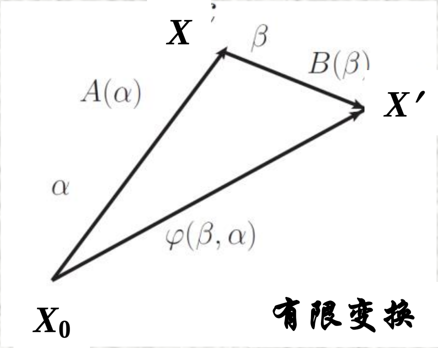
概言之，李群：参数自身空间；李变换群：被作用空间。

§ 1.3. 无穷小生成元

一、李变换群的无穷小生成元

已知：对 $X \in V$，一次操作使得 $X \rightarrow X' = A(\alpha)$，

对两次操作 A、B，如图：

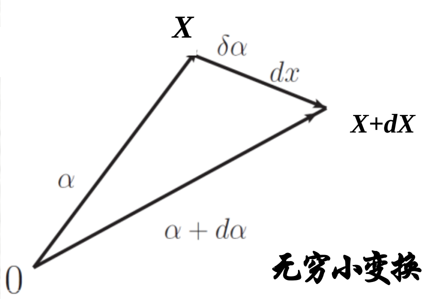


两步作用的效果与另一一步作用的效果相同，

即有 $C=AB$.

$$\mathrm{X} = A(\alpha)X_0 = f(\alpha, X_0) \ ,$$

对任一维 $X^i = f^i(\alpha^\mu, X_0^i)$；



$$X^i + dX^i = A(\delta\alpha)X^i = f^i(\delta\alpha, X^j)$$

$$= f^i\left(\alpha + \delta\alpha, X_0^j\right)$$

$$= f^i(\alpha, X_0) + \left(\frac{\partial f^i(\beta, X)}{\partial \beta^\sigma}\right)_{\beta=0} \delta\alpha^\sigma + \cdots$$

$$\cong X^i + U_\sigma^i(X)\delta\alpha^\sigma \ .$$

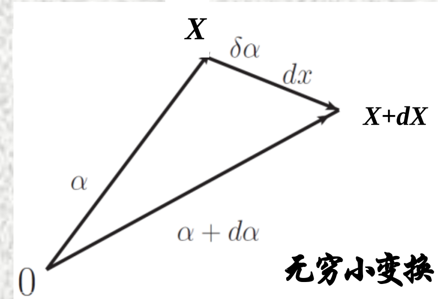
§ 1.3. 无穷小生成元

一、李变换群的无穷小生成元

即有：$dX^i = U^i_\sigma(X)\delta\alpha^\sigma$ ， $U^i_\sigma(X) = \left(\dfrac{\partial f^i(\beta,X)}{\partial\beta^\sigma}\right)_{\beta=0}$.

其中 $\sigma = 1,2,\cdots,r$ ，r 为参数空间维数；

$i = 1,2,\cdots,n$ ，n 为底空间维数。



总之，对底空间有 $dX^i = U^i_\sigma(X)\delta\alpha^\sigma$.

对参数空间则有

$$\alpha^\mu + d\alpha^\mu = \varphi^\mu(\delta\alpha,\alpha) = \varphi^\mu(0,\alpha) + \left(\frac{\partial\varphi^\mu(\beta,\alpha)}{\partial\beta^\sigma}\right)_{\beta=0}\delta\alpha^\sigma + \cdots$$
$$\cong \alpha^\mu + V^\mu_\sigma(\alpha)\delta\alpha^\sigma \ .$$

于是：$d\alpha^\mu = V^\mu_\sigma(\alpha)\delta\alpha^\sigma$，其中 $V^\mu_\sigma(\alpha) = \left(\dfrac{\partial\varphi^\mu(\beta,\alpha)}{\partial\beta^\sigma}\right)_{\beta=0}$.

如果 V^μ_σ 的逆存在$(r=n)$，即有 $V^\mu_\sigma(\alpha)^{-1} = \Lambda^\sigma_\mu(\alpha)$，

则有 $\delta\alpha^\sigma = \Lambda^\sigma_\mu(\alpha)\, d\alpha^\mu$.

一、李变换群的无穷小生成元

将$\delta\alpha^{\sigma}$的表达式代入dX^{i}的表达式 $dX^{i}=U^{i}_{\sigma}(X)\delta\alpha^{\sigma}$ ，

则有
$$dX^{i}=U^{i}_{\sigma}(X)V^{\mu}_{\sigma}(\alpha)^{-1}d\alpha^{\mu}$$
$$=U^{i}_{\sigma}(X)\Lambda^{\sigma}_{\mu}(\alpha)\,d\alpha^{\mu}\ .$$

$U^{i}_{\sigma}(X)\,V^{\mu}_{\sigma}(\alpha)^{-1}=U^{i}_{\sigma}(X)\Lambda^{\sigma}_{\mu}(\alpha)$ 为无穷小作用算子。

一般地，即有
$$dX=U(X)V^{-1}(\alpha)\,d\alpha=U(X)\Lambda(\alpha)d\alpha\,.$$

$U(X)V^{-1}(\alpha)=U(X)\Lambda(\alpha)$ 为无穷小算子：

它使得群参数的无穷小变化 $d\alpha$ 引起被作用空间中的矢量X有变化 $U(X)V^{-1}(\alpha)d\alpha$.

一、李变换群的无穷小生成元

♠ 对底空间（被作用的空间）中的函数 $F(X)$

对每一个变换 $g(\beta)\in G$，$X \xrightarrow{g(\beta)} X'$，

函数空间 $\{F(X)\}$ 中的任一个函数都有变换

$$F(X) \xrightarrow{g(\beta)} F(X') = F(f(\beta,X)),$$

其改变量为 $\delta F(X) = F(X') - F(X)$.

当 β 很小时，$\beta = \delta\alpha$ ，$\bar{\beta} = -\delta\alpha$ ，则

$$\delta F = F(X') - F(X) = F\left(f(\delta\alpha, X)\right) - F(f(0,X))$$

由复合函数求导规则得

$$\delta F = \left(\frac{\partial f^i(\beta,X)}{\partial \beta^\sigma}\right)_{\beta=0} \frac{\partial F}{\partial X^i}\ \delta\alpha^\sigma = \left[U^i_\sigma(X)\frac{\partial}{\partial X^i}\right] F(X)\ \delta\alpha^\sigma .$$

$$= \mathcal{X}_\sigma(X) F(X) \delta\alpha^\sigma .$$

§ 1.3. 无穷小生成元

一、李变换群的无穷小生成元

换言之

$$dF(x)=\frac{\partial F(X)}{\partial X^i}dX^i=\frac{\partial F(X)}{\partial X^i}\Lambda_\mu^\sigma(\alpha)U_\sigma^i(X)d\alpha^\mu$$
$$=\left[\Lambda_\mu^\sigma(\alpha)U_\sigma^i(X)\frac{\partial}{\partial X^i}\right]F(X)d\alpha^\mu .$$

这表明，无论是被作用空间中的矢量，还是矢量的函数，它们的改变量都可以表述为 $\mathbb{X}_\sigma(X)=U_\sigma^i(X)\frac{\partial}{\partial X^i}$ 对它们作用的结果，

所以，$\mathbb{X}_\sigma(X)=U_\sigma^i(X)\frac{\partial}{\partial X^i}$ **称为李变换群的无穷小生成元。**

注意：改有两类空间：群空间G，群参数空间，r维；

底空间V，群作用到的空间，n维。

李变换群讨论的被作用的空间中的变换的性质。

二、李群的无穷小生成元

李群：对自身作用的变换群。

即有 $T_\alpha \varphi = \varphi'$ ，　$\varphi' = f(\alpha, \varphi)$ ，

$$T_\alpha T_\xi = T_{\xi'}, \quad \xi' = \varphi(\alpha, \xi), \quad \xi + d\xi = \varphi(\delta\alpha, \xi),$$

对其μ分量，有

$$\xi^\mu + d\xi^\mu = \varphi^\mu(0, \boxtimes) + \left(\frac{\partial \varphi^\mu(\beta, \xi)}{\partial \beta^\sigma}\right)_{\beta=0} \delta\alpha^\sigma$$

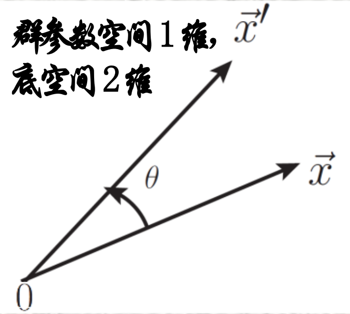
即 $d\xi^\mu = V^\mu_\sigma(\xi)\delta\alpha^\sigma$ ，　其中 $V^\mu_\sigma(\xi) = \left(\frac{\partial \varphi^\mu(\beta, \xi)}{\partial \beta^\sigma}\right)_{\beta=0}$.

对其函数(变换)，　$\Phi(\xi) \longrightarrow \Phi(\xi') = \Phi(\varphi(\delta\alpha, \xi))$ ，

$$d\Phi(\xi) = \Phi(\xi') - \Phi(\xi) = \frac{\partial \Phi(\xi)}{\partial \xi} d\xi = \delta\alpha^\sigma \left[V^\mu_\sigma(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi^\mu}\right] \Phi(\xi),$$

所以，　$\mathbb{X}_\sigma(\xi) = V^\mu_\sigma(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi^\mu}$　为李群的无穷小生成元。

例1. 平面转动群（SO(2)群）



对变换 $\overrightarrow{X} \to \overrightarrow{X'}$，如右图，$\overrightarrow{X'} = f(\theta, X)$，

并有合成函数的具体形式 $\varphi = \theta + \theta'$.

当 θ' 无穷小时，单位元附近（$\varphi = 0 + \delta\theta$）的变换为

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\delta\theta \\ \delta\theta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$ 即有 $$\begin{cases} x' = x - y\delta\theta \\ y' = y + x\delta\theta \end{cases},$$

于是，

$$U^i(X) = \left(\frac{\partial f^i(\beta, X)}{\partial \beta}\right)_{\beta=0} \quad \Rightarrow \quad U^1(X) = -y, \ U^2(X) = x.$$

$$V(\xi) = \left(\frac{\partial \varphi(\beta, \xi)}{\partial \beta}\right)_{\beta=0} \quad \Rightarrow \quad V(\theta) = 1, \Lambda(\theta) = V^{-1}(\theta) = 1.$$

因此，平面转动群的无穷小生成元为 $\Lambda U^i \frac{\partial}{\partial X^i} = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y} = i\hat{L}_z$，

此即定轴转动的角动量算符（差系数 i）。

李变换群的无穷小生成元即角动量算符的推广。

例2. 一维伸缩平移群的无穷小生成元

记一维伸缩平移变换算符为 $\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2\}$，

其中 $\alpha_1 \in \Re$ 为伸缩因子，$\alpha_2 \in \Re$ 为平移因子；

则 $X \xrightarrow{\alpha} X' = \alpha_1 X + \alpha_2$.

并有 $X' \xrightarrow{\beta} X'' = \beta_1 X' + \beta_2 = \beta_1\alpha_1 X + (\beta_1\alpha_2 + \beta_2)$，

若将X到 X'' 视为一步变换γ所致，

则变换参数间的关系（合成函数）为

$$\gamma_1 = \varphi_1(\beta, \alpha) = \beta_1\alpha_1 \text{，} \gamma_2 = \varphi_2(\beta, \alpha) = \beta_1\alpha_2 + \beta_2 .$$

显然，伸缩平移变换算符的单位算符和逆算符分别为

$$E = \alpha_0 = \{1, 0\} \text{，} \qquad \alpha^{-1} = \bar{\alpha} = \{\frac{1}{\alpha_1}, -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\} .$$

考虑无穷小变换，将变换后的结果 记为原始状态和变换的函数，

如果其解析，即有$\psi(X') = f(X,\alpha) = g(X(\alpha)) \in \mathcal{A}$;

则 $U_\sigma^i(X) = (\frac{\partial f^i(\beta,X)}{\partial \beta^\sigma})_{\alpha_0} = \left(\frac{\partial(\alpha_1 x+\alpha_2)}{\partial \alpha_1}, \frac{\partial(\alpha_1 x+\alpha_2)}{\partial \alpha_2}\right) = (X, 1)$，

亦即有，变换参数空间的无穷小变化引起被作用对象有无穷小变化，因此李变换群的无穷小生成元为

$$\chi = U_\sigma^i \frac{\partial}{\partial X^i} = \{X, 1\} \frac{\partial}{\partial X} = \{X \frac{\partial}{\partial X}, \frac{\partial}{\partial X}\} .$$

这表明，无穷小平移操作实际由空间梯度生成，

也就是与动量算符对应 $(\frac{\partial}{\partial X} = \frac{i}{\hbar}\hat{p}_X)$ 。

对有限平移$d = \int \delta X$, $\psi(x+d) = \lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{i\hat{p}_x}{\hbar}\delta X)^n \psi(X)$,

- 有限操作由指数函数实现！ $\psi(x) \Rightarrow \psi(x+d) = e^{\frac{i}{\hbar}\hat{p}_x d}\psi(x).$

由合成函数的表达式

$$\gamma_1=\varphi_1(\beta,\alpha)=\beta_1\alpha_1,\quad \gamma_2=\varphi_2(\beta,\alpha)=\beta_1\alpha_2+\beta_2,$$

得 $V_\sigma^\mu(\alpha)=(\frac{\partial\varphi^\mu(\beta,\alpha)}{\partial\beta^\sigma})_{\alpha_0}=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$，

亦即有，变换参数空间的无穷小变化引起变换操作有无穷小变化，

因此该李群的无穷小生成元为

$$\chi(\xi)=V_\sigma^\mu\frac{\partial}{\partial\xi^\mu{}_\alpha}=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\\ \frac{\partial}{\partial\alpha_2}\end{pmatrix},$$

即有：$\chi_1=\alpha_1\frac{\partial}{\partial\alpha_1}+\alpha_2\frac{\partial}{\partial\alpha_2}$，$\chi_2=\frac{\partial}{\partial\alpha_2}$，并有 $[\chi_1，\chi_2]=\chi_2$.

因为 $V(\gamma)=\begin{pmatrix}\gamma_1 & \gamma_2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$，上述无穷小生成元还可以由矩阵形式

（以参数空间为基的与单位元无限接近的变换元素）

表述为 $\chi_1=\frac{\partial\gamma}{\partial\gamma_1}|_{\alpha=0}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$，$\chi_2=\frac{\partial\gamma}{\partial\gamma_2}|_{\alpha=0}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.

♠ 小结

群的无穷小生成元有两种实现方式:

(1) 微商算子方式

(2) 矩阵方式

矩阵实现一定是线性实现,

微商算子实现不一定是线性实现,

例如李变换群的无穷小算子。

李群的线性实现(表示)本身即是用矩阵来体现群的性质;

李群的非线性实现则是用李变换群体现群的性质。

=============

习题: 1. 试给出SO(2)群的无穷小生成元的矩阵表述形式。

2. 试给出SO(3)群的无穷小生成元的两种表述形式。