李群和李代数及其应用

刘玉鑫

北京大学物理学院理论物理研究所

北京大学物理学院，2020年春季学期第三周

§ 1.5.2 李代数的基与基林度规

一、李代数的基

1. 定义：李代数的最大线性无关组称为李代数的基。

例如：$\hat{\chi}_\sigma\,(\sigma=1,2,\cdots,r)\in V$, 因为 $\left[\hat{\chi}_\alpha,\hat{\chi}_\beta\right]=C_{\alpha\beta}^{\gamma}\hat{\chi}_\gamma\in V\neq\{0\}$;

则可称该 r 维空间为一个李代数的基。

2. 基的选取与不同选取间的关系

由定义知，r 维李代数的基的取法可以有多种；

并且，不同取法的基可以互相变换。

例如：对 $\{\hat{\chi}_\sigma\}$，有 $\widetilde{\hat{\chi}}_\sigma=S_\sigma^\rho\hat{\chi}_\rho$，并且其中的变换 S_σ^ρ 有逆，

$\because\ [\widetilde{\hat{\chi}}_\alpha,\widetilde{\hat{\chi}}_\beta]=\left[S_\alpha^\sigma\hat{\chi}_\sigma,S_\beta^\rho\hat{\chi}_\rho\right]=S_\alpha^\sigma S_\beta^\rho\,[\hat{\chi}_\sigma,\hat{\chi}_\rho]=S_\alpha^\sigma S_\beta^\rho C_{\sigma\rho}^{\tau}\hat{\chi}_\tau=S_\alpha^\sigma S_\beta^\rho C_{\sigma\rho}^{\tau}S_\gamma^{\tau^{-1}}\widetilde{\hat{\chi}}_\gamma$,

即有 $[\widetilde{\hat{\chi}}_\alpha,\widetilde{\hat{\chi}}_\beta]=\widetilde{C}_{\alpha\beta}^{\gamma}\widetilde{\hat{\chi}}_\gamma$.　所以 $\{\tilde{\hat{\chi}}\}$ 与 $\{\hat{\chi}\}$ 都可以为基。

如果 $[\hat{\chi}_\alpha,\hat{\chi}_\beta]\rightarrow[\widetilde{\hat{\chi}}_\alpha,\widetilde{\hat{\chi}}_\beta]$ 唯一，则 $\{\tilde{\hat{\chi}}\}$ 与 $\{\hat{\chi}\}$ 在同构意义上等价。

条件：$\widetilde{C}_{\alpha\beta}^{\gamma}=S_\alpha^\sigma S_\beta^\rho C_{\sigma\rho}^{\tau}S_\gamma^{\tau^{-1}}=C_{\alpha\beta}^{\gamma}$,　即 $S_\alpha^\sigma S_\beta^\rho C_{\sigma\rho}^{\tau}=C_{\alpha\beta}^{\gamma}S_\gamma^{\tau}$.

§ 1.5. 李代数的一些基本概念

§ 1.5.2 李代数的基与基林度规

二、李代数的自伴算子

1.定义:

对 $\chi_\sigma \in g$， $\chi_\rho \in g$， $\sigma,\rho = 1,2,\cdots,n,$

如果 $\mathrm{ad}(\chi_\sigma)\chi_\rho = [\chi_\sigma, \chi_\rho] = C_{\sigma\rho}^{\tau}\chi_\tau \in g$,

则称 $\mathrm{ad}(\chi_\sigma)$ 为 χ_σ 的自伴算子，或内导子。

定义式表明, $\mathrm{ad}(\chi)$ 是 $n\times n$ 的矩阵, 上式中 ρ、τ 分别为行、列指标。

2.性质

对 χ 的内导子， $[\mathrm{ad}(\chi_\sigma), ad(\chi_\rho)] = ad([\chi_\sigma, \chi_\rho])$.

证明：依定义，对任意 Y；

$$[\mathrm{ad}(\chi_\sigma), ad(\chi_\rho)]Y = \mathrm{ad}(\chi_\sigma)\, ad(\chi_\rho)Y - \mathrm{ad}(\chi_\rho)\, ad(\chi_\sigma)Y$$

$$= [\chi_\sigma,[\chi_\rho,Y]] - [\chi_\rho,[\chi_\sigma,Y]] = [[\chi_\sigma,\chi_\rho],Y] = ad([\chi_\sigma,\chi_\rho])Y$$

$\because Y$ 任意， $\therefore [\mathrm{ad}(\chi_\sigma), ad(\chi_\rho)] = ad([\chi_\sigma, \chi_\rho])$.

三、李代数的内积与基林度规

1. 李代数的内积

(1) 定义：

对李代数 g 中的两个矢量 X、Y，$(X,Y)=Tr(ad(X)ad(Y))$

称为这两个矢量的标量积，也称为内积。

(2) 性质：

⟨1⟩ 对称性：$(X,\ Y)=(Y,\ X)$.

⟨2⟩ 双线性性：$\forall X,Y,Z\in g$，$\alpha,\beta\in K$,

$$(\alpha X+\beta Y,\ Z)=\alpha(X,\ Z)+\beta(Y,\ Z)\ .$$

⟨3⟩ $([X,Y],\ Z)+(Y,\ [X,\ Z])=0$,

或 $(ad(X)Y,\ Z)+(Y,\ ad(X)Z)=0$.

证明：由定义可直接得⟨1⟩、⟨2⟩，关于⟨3⟩，证明如下。

依定义：$(ad(X)Y,\ Z)=([X,Y],Z)=Tr(ad([X,Y])ad(Z))$

$$=Tr([ad(X),\ ad(Y)]ad(Z))$$

§ 1.5. 李代数的一些基本概念

§ 1.5.2 李代数的基与基林度规

三、李代数的内积与基林度规

● 李代数的内积的性质⟨3⟩ 的证明(续)

$$= Tr(ad(X)ad(Y)ad(Z)) - Tr(ad(Y)ad(X)ad(Z));$$

$$(Y,\ ad(X)Z) = (Y,\ [X,\ Z]) = Tr(ad(Y)ad([X,\ Z]))$$

$$= Tr(ad(Y)[ad(X),\ ad(Z)])$$

$$= Tr(ad(Y)ad(X)ad(Z)) - \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}(Y)\mathrm{ad}(Z)\mathrm{ad}(X)).$$

上述两式直接相加得

$$(ad(X)Y,\ Z) + (Y,\ ad(X)Z)$$

$$= Tr(ad(X)ad(Y)ad(Z)) - Tr(ad(Y)ad(Z)ad(X))$$

由矩阵乘积的迹的性质 $Tr(ABC) = Tr(BCA)$ 知

$$Tr(ad(X)ad(Y)ad(Z)) = Tr(ad(Y)ad(Z)ad(X)),$$

所以 $(ad(X)Y,\ Z) + (Y,\ ad(X)Z) = 0,$

即 $([X,\ Y],\ Z) + (Y,\ [X,\ Z]) = 0$.

该性质表明：$(ad(X)Y,\ Z) = -(Y,\ ad(X)Z) = -(ad(X)Z,\ Y).$

§ 1.5. 2 李代数的基与基林度规

三、李代数的内积与基林度规

2. 李代数的基林度规

(1) 定义:

对 n 维李代数 g，如果其基的两分量之间有关系

$$(\hat{\chi}_\sigma,\hat{\chi}_\rho)=Tr\left(ad(\hat{\chi}_\sigma)ad(\hat{\chi}_\rho)\right)=g_{\sigma\rho}\,,\quad (\sigma,\rho=1,2,\cdots,n)$$

其中 $g_{\sigma\rho}$ 称为李代数 g 的基林度规，常简称基林型。

(2) 确定（与结构常数的关系）：

如果 $[\hat{\chi}_\sigma,\hat{\chi}_\rho]=C^\tau_{\sigma\rho}\hat{\chi}_\tau$，即李代数 g 的结构常数为 $C^\tau_{\sigma\rho}$，

则 $g_{\sigma\rho}=C^\nu_{\sigma\mu}C^\mu_{\rho\nu}$.

证明：记 $\{\hat{\chi}_\sigma\}$ $(\sigma=1,2,\cdots,n)$ 为 n 维李代数 g 的一组基，

则两矢量 X,Y 可以分别表示为 $X=\alpha^\sigma\hat{\chi}_\sigma$, $Y=\beta^\rho\hat{\chi}_\rho$.

X 与 Y 的内积为

$$(X,\ Y)=\left(\alpha^\sigma\hat{\chi}_\sigma,\ \beta^\rho\,\hat{\chi}_\rho\right)=\alpha^\sigma\beta^\rho\left(\hat{\chi}_\sigma,\ \hat{\chi}_\rho\right)=\alpha^\sigma\beta^\rho g_{\sigma\rho}\ .$$

§ 1.5. 2 李代数的基与基林度规

三.2. 李代数的基林度规

(2) 与结构常数的关系的证明（续）

根据内导子的定义，

$$\mathrm{ad}(X)Y=[X,\ Y]=\left[\alpha^{\sigma}\hat{\chi}_{\sigma},\ \beta^{\rho}\hat{\chi}_{\rho}\right]=\alpha^{\sigma}\beta^{\rho}\left[\hat{\chi}_{\sigma},\hat{\chi}_{\rho}\right]=\alpha^{\sigma}\beta^{\rho}C_{\sigma\rho}^{\tau}\hat{\chi}_{\tau},$$

由此知 $(ad(X))_{\rho}^{\tau}=\alpha^{\sigma}C_{\sigma\rho}^{\tau}.$

于是 $(X,\ Y)=Tr\big(ad(X)ad(Y)\big)=Tr\big((ad(X))_{\mu}^{\nu}(ad(Y))_{\nu}^{\tau}\big)$

$$=\alpha^{\sigma}C_{\sigma\mu}^{\nu}\beta^{\rho}C_{\rho\nu}^{\mu}=\alpha^{\sigma}\beta^{\rho}C_{\sigma\mu}^{\nu}C_{\rho\nu}^{\mu}.$$

与原始定义下的表述（$(X,\ Y)=\alpha^{\sigma}\beta^{\rho}g_{\sigma\rho}$）比较，

即知 $g_{\sigma\rho}=C_{\sigma\mu}^{\nu}C_{\rho\nu}^{\mu}.$

这样的度规称为嘉当-基林度规（Cartan-Killing Metric），也称为嘉当-基林度规矩阵，常简称为基林度规、或基林型。

例：SU(2)，$\because\ \left[X_{\sigma},\ X_{\rho}\right]=C_{\sigma\rho}^{\tau}X_{\tau}=\varepsilon_{\sigma\rho\tau}X_{\tau},$

$$\therefore\ g_{\sigma\rho}=C_{\sigma\mu}^{\nu}C_{\rho\nu}^{\mu}=\varepsilon_{\sigma\mu\nu}\varepsilon_{\rho\nu\mu}=-2\delta_{\sigma\rho}.$$

§ 1.5. 2 李代数的基与基林度规

三.2. 李代数的基林度规

(3) 基林度规的性质

基林度规 $g_{\sigma\rho}$ 是对称张量。

由 $g_{\sigma\rho} = C^{\nu}_{\sigma\mu} C^{\mu}_{\rho\nu}$,

其中 $C^{\nu}_{\sigma\mu}$、$C^{\mu}_{\rho\nu}$ 是李代数的结构常数(反对称张量), 易知李代数的基林度规显然是对称张量。

四、李代数的正交补空间及其性质

1. 定义

$$N^{\perp} = \{X \in g | (X, Y) = 0, \forall Y \in N\}.$$

即: 对于李代数 g 的一个子空间 N,

如果 $\forall Y \in N, X \in g$, $(X, Y) \equiv 0$,

则这样的 X 的集合形成的空间称为 N 的正交补空间,

常记为 $N^{\perp}$.

§ 1.5. 2 李代数的基与基林度规

四、李代数的正交补空间及其性质

2. 性质（李代数的理想的性质）

李代数的一个理想的正交补空间也是一个理想。

证明：假设李代数 $\mathfrak{g}$ 有非平庸理想 N，其正交补空间为 $N^{\perp}$，

那么，$\forall\ X \in N^{\perp}, Y \in N, Z \in \mathfrak{g}$，由李代数的内积的性质$\langle 3 \rangle$

知 $$(ad(Z)X,\ Y) = -(X,\ ad(Z)Y)\,.$$

$\because\ Y \in N, Z \in \mathfrak{g}$，

由理想的定义 则知 $ad(Z)Y = [Z,\ Y] \in N.$

另一方面，由正交补空间的定义知 $(X,\ ad(Z)Y) = 0$，

于是 $$(ad(Z)X,\ Y) = 0\,.$$

$\because\ X \in N^{\perp}, Y \in N, Z \in \mathfrak{g}$，则上式表明：$ad(Z)X \in N^{\perp}$.

从而，这样的集合$\{X\}$是一个不变子空间，即一个不变子代数。

所以，李代数的一个理想的正交补空间也是它的一个理想，

并且是可交换理想。

§1.5.3 李代数的单纯性

一、定义

1. 单纯李代数

如果李代数g除了 g 本身和由 0 矢量构成的理想 {0}外，不具有任何其它理想，则称g是单纯李代数，简称为单李代数。

例如：一维李代数是单李代数

维数大于 1 的交换李代数都不是单李代数。

2. 半单纯李代数

如果李代数g除了理想{0}外，不再包含任何其它可交换理想，则称g是半单纯李代数，简称为半单李代数。

亦即 可能包含有不可交换理想的李代数称为半单纯李代数。

例如：前已提及、以后将具体讨论的 sl(n,C)、u(n,C)、o(n,C)、sp(n,C) 数都是半单纯李代数。

§ 1.5.3 李代数的单纯性

二、半单纯李代数的判据

定理:

李代数g是半单纯的，当且仅当其基林型是非退化的。

证明: (1) 充分性: 只要李代数g的基林型不退化，即 det[g]≠0,

则其一定不包含可交换理想。

或者说，只要g包含一个可交换理想，则一定有 det[g]=0.

$\because$ 对李代数g $\{X_\mu | \mu = 1,2,\cdots,n\}$ 中的任意元素，总有

$$[X_\sigma, X_\rho] = C^\tau_{\sigma\rho} X_\tau ,$$

记g的不变子代数为 $\{X_{\underline{\rho}}\}$,

则有 $[X_\sigma, X_{\underline{\rho}}] = C^{\underline{\tau}}_{\sigma\underline{\rho}} X_{\underline{\tau}}$, $\quad g_{\sigma\underline{\rho}} = C^{\underline{\nu}}_{\sigma\underline{\mu}} C^{\underline{\mu}}_{\underline{\rho}\underline{\nu}}$,

其中有下划线 _ 者属于同一个不变子代数（理想）。

§ 1.5.3 李代数的单纯性

二、半单纯李代数的判据的证明（续）

对于可交换理想，由定义知 $C^{\underline{\nu}}_{\sigma\underline{\mu}} = 0$.

于是， $g_{\sigma\underline{\rho}} = C^{\underline{\nu}}_{\sigma\underline{\mu}} C^{\underline{\mu}}_{\underline{\rho}\underline{\nu}} = 0$ ，

即：如果李代数 g 包含有一个可交换理想，

则其基林度规矩阵至少有一行（或一列）元素全为 0，

那么，一定有 $\det[g] = 0$.

这表明，只要李代数 g 包含一个可交换理想，

即不是半单的，

则一定有 $\det[g] = 0$.

此即原命题的逆否命题。

由逆否命题知，原命题成立。

§ 1.5.3 李代数的单纯性

二、半单纯李代数的判据的证明（续）

(2) 必要性：如果李代数 g 不包含任何非平庸可交换理想，

则一定有 $\det[g] \neq 0$.

依定义，g 是半单的，即 g 不包含任何非平庸可交换理想，

也就是，不存在 $\left[X_\sigma, X_\rho\right] = C_{\sigma\rho}^{\tau} X_\tau = 0$,

从而所有 $C_{\sigma\rho}^{\tau}$ 都不等于 0 .

并且，不存在正交补空间，

否则存在非平庸可交换理想，与定义不一致。

所以，其基林度规矩阵 $\{g_{\sigma\rho}\}$ 是满秩的，

因此，一定有 $\det[g] \neq 0$.

此即原命题。

[原命题得证]

§ 1.5.3 李代数的单纯性

三、半单李代数与单李代数的关系

(Cartan) 定理：一个半单李代数总可以唯一地分解为若干对正交单李代数的直和。

证明：设N是李代数 g 的一个非零理想，其正交补空间为$N^{\perp}$，由定义和李代数的内积的性质及其理想的性质（一个李代数的理想的正交补空间也是一个理想）知，$N^{\perp}$ 也是一个理想，

$$(\forall X\in N^{\perp}, Y\in N, Z\in g, (ad(Z)X, Y) = -(X, ad(Z)Y) = 0.)$$

于是，$N\cap N^{\perp}$ 也是g的一个理想 。

由正交补空间的定义，知

$$\forall X'\in N\cap N^{\perp}, Y'\in N\cap N^{\perp}, \quad (X', Y') = 0 \ .$$

从而，$\forall Z\in g$，$(ad(Z)X', Y') = -(X', ad(Z)Y') = 0,$

$$(ad(X')Y', Z) = -(Y', ad(X')Z) = 0 \, .$$

§ 1.5.3 李代数的单纯性

三、半单李代数与单李代数关系的 (Cartan) 定理的证明（续）

所以，$[X',Y']=0$，　　即 $N\cap N^{\perp}$ 为可解理想；

$[Z,X']=[Z,Y']=0$，即 $N\cap N^{\perp}$ 为可交换理想。

依半单李代数的定义，$N\cap N^{\perp}=0.$

所以 $N\cup N^{\perp}$ 充满李代数 g，　即 $N\oplus N^{\perp}$ 是完备的。

这就是说，一个半单李代数总可以唯一地分解为一对正交单李代数的直和。

如果 N 或 $N^{\perp}$ 依然半单，

则可继续分解下去，直到 g 的任何一个子代数都不包含非平庸的理想，即分解到单纯李代数的直和，

从而有　$g=N_1\oplus N_2\oplus N_3\oplus N_4\oplus\cdots\oplus N_m$，

其中　$(N_i,N_j)=0,[N_i,N_j]=0$，$i,j=1,2,\cdots,m$.

§ 1.5.3 李代数的单纯性

三、半单李代数与单李代数关系的 (Cartan) 定理的证明（续）

前述分解的维数核对

记李代数 $\mathfrak{g}$ 的维数为 $\dim\mathfrak{g} = n$,

其包含的理想$\mathfrak{N}$的维数为 $\dim\mathfrak{N} = m$,

则有 $0 < \dim\mathfrak{N} = m < \dim\mathfrak{g} = n.$

再记$\mathfrak{N}$的基为 $\{x_1, x_2, \cdots, x_m\}$，对 $Y \in \mathfrak{g}, Y \notin \mathfrak{N}$,

有方程组 $\sum_j^m (x_j, x_i)\lambda_j + (Y, x_i)\lambda_{m+1} = 0$，$(i = 1, 2, \cdots, m)$；

此乃一有 m+1 个未知数、但仅有m个方程的线性方程组,

它一定有非零解 $\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m, \lambda_{m+1}\}$.

令 $Z = \sum_{j=1}^m \lambda_j x_j + \lambda_{m+1} Y$, 则 $Z \in \mathfrak{N}^{\perp}$.

如果 $\lambda_{m+1} = 0$，则 $Z \in \mathfrak{N} \cap \mathfrak{N}^{\perp} = \{0\}$.

三、半单李代数与单李代数关系的 (Cartan) 定理的证明（续）

前述分解的维数核对

于是 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_m=0$.

与前述有非零解矛盾，所以一定有 $\lambda_{m+1}\neq 0$.

于是有 $Y=\frac{1}{\lambda_{m+1}}Z-\frac{1}{\lambda_{m+1}}\sum_{j=1}^{m}\lambda_j x_j\in N^{\perp}+N$.

这表明， $g=N^{\perp}+N$.

由于 $N\cap N^{\perp}=\{0\}$,

所以 $g=N^{\perp}\oplus N$.

即前述分解充满李代数 g.

§ 1.5.3 李代数的单纯性

三、半单李代数与单李代数关系的 (Cartan) 定理的证明（续）

分解的唯一性

假设 g 有另一种分解 $M_1 \oplus M_2 \oplus M_3 \oplus M_4 \oplus \cdots \oplus M_k$，

其中 M_i 是不包含在 N_j 中的非平庸的理想，

则 $[M_i, N_j] \subset M_i \cap N_j$，

依假设，$M_i \cap N_j = \{0\}$，从而 $[M_i, N_j] = 0$.

由于 g 是半单李代数，即 M_i 所属的中心为 $\{0\}$，

这表明，非平庸的 M_i 实际不存在。

所以，上述分解 $g = N_1 \oplus N_2 \oplus N_3 \oplus N_4 \oplus \cdots \oplus N_m$，

其中 $(N_i, N_j) = 0, [N_i, N_j] = 0$，$i, j = 1, 2, \cdots, m$，

是唯一的。

§ 1.5.3 李代数的单纯性

四、李代数的分解

(Levi-Malcev)定理：

任何一个李代数都可以分解为可解李代数与半单李代数的半直和，

即有 $g = r \oplus_S S$.

证明：略。

由上述两定理知，

任何一个李代数最终都可以表示为若干单李代数的（半）直和。

因此，我们只需要重点讨论单李代数和半单李代数

（即，典型李代数和例外李代数）。

§1.5.4 李群的单纯性及分解

一、定义

1. 单纯李群：如果李群g没有非平庸的不变子群，

   则称之为单纯的，简称为单的。

2. 半单纯李群：如果李群g没有非平庸的不变阿贝尔子群，

   则称之为半单纯的，简称半单的。

二、李群的单纯性与李代数的单纯性之间的关系

单纯李群的李代数是单纯的，

半单纯李群的李代数是半单纯的，

实单纯李代数对应的连通李群是单纯的，

实半单纯李代数对应的连通李群是半单纯的。

三、李群的分解

任何一个李群都可以分解为一系列半单纯李群的直积。

例如：$u(3)=u(1)\oplus su(3) \rightarrow U(3) = U(1)\otimes SU(3)$.

§1.6. Casimir算子

一、定义

一般地，一个群的n 阶Casimir 算子可以由其生成元和结构常数定义为：

$$C_n = C^{\beta_2}_{\alpha_1\beta_1} C^{\beta_3}_{\alpha_2\beta_2} C^{\beta_4}_{\alpha_3\beta_3} \cdots C^{\beta_1}_{\alpha_n\beta_n} X^{\alpha_1} X^{\alpha_2} \cdots X^{\alpha_n} ,$$

其中 $X^{\sigma} = g^{\sigma\rho} X_{\rho}$ ，

X_{ρ} 为群的生成元，

$g^{\sigma\rho}$ 为反基林度规，其与基林度规 $g_{\sigma\rho}$的关系为

$$g^{\sigma\rho} g_{\rho\mu} = \delta^{\sigma}_{\mu} .$$

最常用的是二阶Casimir算子（考虑两体相互作用）

$$C_2 = g^{\sigma\rho} X_{\sigma} X_{\rho} .$$

考虑三体关联时，常用到三阶Casimir算子

$$C_3 = C^{\nu}_{\alpha\mu} C^{\lambda}_{\beta\nu} C^{\mu}_{\gamma\lambda} X^{\alpha} X^{\beta} X^{\gamma} .$$

§1.6. Casimir算子

二、性质

群的 Casimir 算子是群的不变量。

即：对任意 $X_k \in G$ 和群的n阶Casimir 算子C_n，

$$[C_n, X_k] = 0 = [X_k, C_n].$$

证明：以二阶Casimir 算子为例证明如下。

依定义，$[C_2, X_k] = g^{\sigma\rho}[X_\sigma X_\rho, X_k]$

$$= g^{\sigma\rho}\{X_\sigma[X_\rho, X_k]] + [[X_\sigma, X_k]X_\rho\}$$

$$= g^{\sigma\rho}C_{\rho k}^{\lambda}X_\sigma X_\lambda + g^{\sigma\rho}C_{\sigma k}^{\lambda}X_\lambda X_\rho,$$

把上式后一项中的求和指标σ、ρ互换，并考虑度规的对称性，

得：$[C_2, X_k] = g^{\sigma\rho}C_{\rho k}^{\lambda}\{X_\sigma X_\lambda + X_\lambda X_\sigma\}$.

二、Casimir 算子的性质的证明（续）

定义 $C_{\rho k\mu}=C_{\rho k}^{\lambda}g_{\lambda\mu}$，

由结构常数的反对称性和基林度规的对称性知，

$C_{\rho k\mu}$是（关于前两个指标对换的）反对称矩阵。

又因为 $C_{\rho k\mu}=C_{\rho k}^{\lambda}g_{\lambda\mu}=g_{\lambda\rho}C_{\mu k}^{\lambda}$，

则 $g^{\sigma\rho}C_{\rho k}^{\lambda}+g^{\lambda\rho}C_{\rho k}^{\sigma}=g^{\sigma\rho}g^{\lambda\mu}C_{\mu k\rho}+g^{\lambda\rho}g^{\sigma\mu}C_{\mu k\rho}$，

将后一项中的求和指标μ、ρ互换，则

$$g^{\sigma\rho}C_{\rho k}^{\lambda}+g^{\lambda\rho}C_{\rho k}^{\sigma}=g^{\sigma\rho}g^{\lambda\mu}C_{\mu k\rho}+g^{\lambda\mu}g^{\sigma\rho}C_{\rho k\mu}$$

$$=g^{\lambda\mu}g^{\sigma\rho}(C_{\mu k\rho}+C_{\rho k\mu}).$$

依定义 $C_{\mu k\rho}+C_{\rho k\mu}=C_{\mu k}^{\lambda}g_{\lambda\rho}+C_{\rho k}^{\lambda}g_{\lambda\mu}$

$$=C_{\mu k}^{\lambda}C_{\lambda\alpha}^{\beta}C_{\rho\beta}^{\alpha}+C_{\rho k}^{\lambda}C_{\lambda\alpha}^{\beta}C_{\mu\beta}^{\alpha},$$

二、Casimir 算子的性质的证明（续）

考虑结构常数的雅可比关系，则有

$$C_{\mu k\rho}+C_{\rho k\mu}=(-C^{\lambda}_{k\alpha}C^{\beta}_{\lambda\mu}-C^{\lambda}_{\alpha\mu}C^{\beta}_{\lambda k})C^{\alpha}_{\rho\beta}+(-C^{\lambda}_{k\alpha}C^{\beta}_{\lambda\rho}-C^{\lambda}_{\alpha\rho}C^{\beta}_{\lambda k})C^{\alpha}_{\mu\beta}$$

$$=C^{\lambda}_{\alpha k}C^{\beta}_{\lambda\mu}C^{\alpha}_{\rho\beta}-C^{\lambda}_{\alpha\mu}C^{\beta}_{\lambda k}C^{\alpha}_{\rho\beta}+C^{\lambda}_{\alpha k}C^{\beta}_{\lambda\rho}C^{\alpha}_{\mu\beta}-C^{\lambda}_{\alpha\rho}C^{\beta}_{\lambda k}C^{\alpha}_{\mu\beta}$$

把第二项、第四项中的求和指标α、β、λ轮换，则得

$$\text{上式}=C^{\lambda}_{\alpha k}C^{\beta}_{\lambda\mu}C^{\alpha}_{\rho\beta}-C^{\alpha}_{\beta\mu}C^{\lambda}_{\alpha k}C^{\beta}_{\rho\lambda}+C^{\lambda}_{\alpha k}C^{\beta}_{\lambda\rho}C^{\alpha}_{\mu\beta}-C^{\alpha}_{\beta\rho}C^{\lambda}_{\alpha k}C^{\beta}_{\mu\lambda}\ .$$

考察各相同上指标因子的下指标的顺序、并移项，得

$$\text{上式}=(C^{\lambda}_{\alpha k}C^{\beta}_{\lambda\mu}C^{\alpha}_{\rho\beta}-C^{\alpha}_{\beta\rho}C^{\lambda}_{\alpha k}C^{\beta}_{\mu\lambda})-(C^{\alpha}_{\beta\mu}C^{\lambda}_{\alpha k}C^{\beta}_{\rho\lambda}-C^{\lambda}_{\alpha k}C^{\beta}_{\lambda\rho}C^{\alpha}_{\mu\beta})$$

$$=0-0,$$

所以 $C_{\mu k\rho}+C_{\rho k\mu}=0$,

即 $C_{\rho k\mu}$ 关于前后两个指标对换也是反对称的。

从而， $g^{\sigma\rho}C^{\lambda}_{\rho k}+g^{\lambda\rho}C^{\sigma}_{\rho k}=g^{\lambda\mu}g^{\sigma\rho}(C_{\mu k\rho}+C_{\rho k\mu})=0\ .$

二、Casimir 算子的性质的证明（续）

这表明，$g^{\sigma\rho}C^{\lambda}_{\rho k}$是关于上指标σ、λ的反对称张量。

总之，$$[C_2,X_k]=g^{\sigma\rho}C^{\lambda}_{\rho k}\left(X_\sigma X_\lambda+X_\lambda X_\sigma\right)$$

的前半部分因子$g^{\sigma\rho}C^{\lambda}_{\rho k}$是关于求和指标σ、λ的反对称张量，

后半部分因子$\left(X_\sigma X_\lambda+X_\lambda X_\sigma\right)$是关于求和指标σ、λ的对称张量，

求和结果为 0 .

所以，$[C_2,\ X_k]=0$，

即二阶Casimir算子在群变换下是不变量，

从而是守恒量。 如：角动量守恒！

同理可证，对任意阶Casimir算子C_n，都有 $[C_n,\ X_k]=0$，

即李群的任意阶Casimir 算子都是群的不变量。

习 题

1. 试证明，如果一个矩阵是满秩的，则它是非退化的。

2. 试证明Levi-Malcev 定理：任何一个李代数都可以分解为可解李代数与半单李代数的半直和。

3. 试证明李群的单纯性与李代数的单纯性之间的关系。

4. 对群的结构常数 $C_{\rho k}^{\lambda}$ 和基林度规 $g_{\lambda\mu}$，定义 $C_{\rho k\mu}=C_{\rho k}^{\lambda}g_{\lambda\mu}$，试证明 $C_{\rho k\mu}=g_{\lambda\rho}C_{\mu k}^{\lambda}$.