李群和李代数及其应用

刘玉鑫

北京大学物理学院理论物理研究所

北京大学物理学院，2020年春季学期

§ 1.4. 李群的基本性质

§ 1.4.1. 合成函数的性质

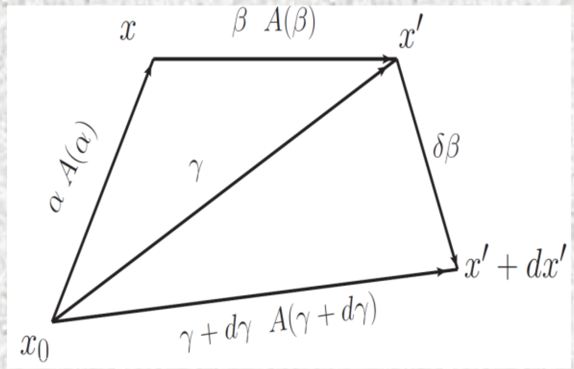
李氏定理一： 设 $\gamma^\mu = \varphi^\mu(\beta, \alpha)$ 是李群的合成函数，

$$V^\mu_\sigma(\alpha) = \left(\frac{\partial\varphi^\mu(\beta,\alpha)}{\partial\beta^\sigma}\right)_{\beta=0}, \quad \Lambda^\sigma_\nu(\alpha)V^\mu_\sigma(\alpha) = \delta^\mu_\nu,$$

则 $\dfrac{\partial\gamma^\mu}{\partial\beta^\nu} = V^\mu_\sigma(\alpha)\,\Lambda^\sigma_\nu(\beta)$.

证明： 由合成函数的定义知，$\gamma + d\gamma = \varphi(\beta + \delta\beta, \alpha)$，如图.

由李群的合成函数的性质知，



$$\gamma^\mu + d\gamma^\mu = \varphi^\mu(0,\gamma) + \left(\frac{\partial\varphi^\mu(\beta,\gamma)}{\partial\beta^\sigma}\right)_{\beta=0}\delta\beta^\sigma$$

$$= \varphi^\mu(0,\gamma) + V^\mu_\sigma(\gamma)_{\beta=0}\,\delta\beta^\sigma$$

$$= \gamma^\mu + V^\mu_\sigma(\alpha)\delta\beta^\sigma ,$$

由此知 $d\gamma^\mu = V^\mu_\sigma(\alpha)\delta\beta^\sigma$ ，

§ 1.4. 李群的基本性质
§ 1.4.1. 合成函数的性质

同理 $\beta + d\beta = \varphi(\delta\beta, \beta)$,

$$\beta^{\nu} + d\beta^{\nu} = \varphi^{\nu}(0,\beta) + \left(\frac{\partial\varphi^{\nu}(\eta,\beta)}{\partial\eta^{\sigma}}\right)_{\eta=0}\delta\eta^{\sigma} = \beta^{\nu} + V^{\nu}_{\sigma}(\beta)\delta\beta^{\sigma} .$$

由此知 $\mathrm{d}\beta^{\nu} = V^{\nu}_{\sigma}(\beta)\delta\beta^{\sigma}$.

由已知条件知 $\Lambda^{\sigma}_{\nu}(\beta)V^{\mu}_{\sigma}(\beta) = \delta^{\mu}_{\nu}$,

于是有 $\delta\beta^{\sigma} = {V^{\nu}_{\sigma}}^{-1}(\beta)\, d\beta^{\nu} = \Lambda^{\sigma}_{\nu}(\beta)d\beta^{\nu}$.

代入 $d\gamma$ 的表达式,

得 $d\gamma^{\mu} = V^{\mu}_{\sigma}(\alpha)\delta\beta^{\sigma} = V^{\mu}_{\sigma}(\alpha)\Lambda^{\sigma}_{\nu}(\beta)d\beta^{\nu}$.

所以

$$\frac{\partial\gamma^{\mu}}{\partial\beta^{\nu}} = V^{\mu}_{\sigma}(\alpha)\Lambda^{\sigma}_{\nu}(\beta) .$$

定理得证。

§ 1.4. 李群的基本性质

§ 1.4.1. 合成函数的性质

李氏第一定理的逆定理一：

设 α^ν 和 β^ν $(\nu=1,2,\cdots,r)$ 都为 r 个变量，

$\gamma^\mu=\varphi^\mu(\alpha,\beta)$ $(\mu=1,2,\cdots,r)$ 和

$X^i=f^i(\alpha,X_0)$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 都是 α^ν 和 β^ν 函数，

并且在 $\alpha=0,\beta=0$ 附近解析，

记 $U_\mu^i(X)=\left(\dfrac{\partial f^i(\beta,X)}{\partial\beta^\mu}\right)_{\beta=0}$， $V_\lambda^\mu(\alpha)=\left(\dfrac{\partial\varphi^\mu(\beta,\alpha)}{\partial\beta^\lambda}\right)_{\beta=0}$，

并有 $\Lambda_\mu^\rho(\alpha)V_\rho^\nu(\alpha)=\delta_\mu^\nu$，

则 (1) 函数 φ^μ 是一个无穷小生成元为 $V_\mu^\nu(\alpha)\dfrac{\partial}{\partial\alpha^\nu}$ 的局部李群的合成函数；.

(2) 函数 $f^i(\beta,\alpha)$ 是局部李变换群的合成函数。

请自证！

§ 1.4. 李群的基本性质

§ 1.4.2. 无穷小生成元的性质及李群与李代数的关系(初论)

一、无穷小生成元之间的关系（李群的代数结构）

李氏定理二：李（变换）群的无穷小生成元之间有关系：

$$[\chi_\sigma,\ \chi_\rho] = C^\mu_{\sigma\rho}\chi_\mu\ ,$$

其中$C^\mu_{\sigma\rho}$是李群的结构常数(由群参数决定的常数)。

证明：(1)底空间中的矢量随群参数的变化率

已知：对底空间，$X = A(\alpha)X_0$， $X^i = f^i(\alpha^\mu, X_0)$；

$$X^i + dX^i = f^i(\delta\alpha, X) = f^i(\alpha, X_0) + \left(\frac{\partial f^i(\alpha,X)}{\partial\alpha^\sigma}\right)_{\alpha=0}\delta\alpha^\sigma + \cdots,$$

即有：$dX^i = U^i_\sigma(X)\delta\alpha^\sigma$,

其中 $U^i_\sigma(X) = \left(\frac{\partial f^i(\alpha,X)}{\partial\alpha^\sigma}\right)_{\alpha=0}$.

§ 1.4.2. 无穷小生成元的性质及李群与李代数的关系(初论)

一、无穷小生成元之间的关系（李群的代数结构）

对参数空间

$$\alpha^\mu + d\alpha^\mu = \varphi^\mu(\delta\alpha,\alpha) = \varphi^\mu(0,\alpha) + \left(\frac{\partial\varphi^\mu(\beta,\alpha)}{\partial\beta^\sigma}\right)_{\beta=0}\delta\alpha^\sigma + \cdots$$

$$\cong \alpha^\mu + V^\mu_\sigma(\alpha)\delta\alpha^\sigma \;.$$

于是: $d\alpha^\mu = V^\mu_\sigma(\alpha)\delta\alpha^\sigma$，其中$V^\mu_\sigma(\alpha) = \left(\frac{\partial\varphi^\mu(\beta,\alpha)}{\partial\beta^\sigma}\right)_{\beta=0}$.

如果 V^μ_σ的逆存在， 即有 $V^\mu_\sigma(\alpha)^{-1} = \Lambda^\sigma_\mu(\alpha)$,

则有 $\delta\alpha^\sigma = \Lambda^\sigma_\mu(\alpha)\, d\alpha^\mu$.

于是有

$$dX^i = U^i_\sigma(X)V^\mu_\sigma(\alpha)^{-1}d\alpha^\mu$$

$$= U^i_\sigma(X)\Lambda^\sigma_\mu(\alpha)\, d\alpha^\mu \;.$$

所以有

$$\frac{\partial X^i}{\partial\alpha^\mu} = U^i_\sigma(X)\Lambda^\sigma_\mu(\alpha) \,.$$

§ 1.4.2. 无穷小生成元的性质及李群与李代数的关系(初论)

一、无穷小生成元之间的关系（李群的代数结构）

证明：(2) 无穷小生成元之间的关系

由定义 $\chi_\sigma(X) = U_\sigma^i(X)\frac{\partial}{\partial X^i}$， $\chi_\rho(X) = U_\rho^j(X)\frac{\partial}{\partial X^j}$，

知， $\chi_\sigma\chi_\rho = U_\sigma^i(X)\frac{\partial}{\partial X^i}\left(U_\rho^j(X)\frac{\partial}{\partial X^j}\right)$

$$= U_\sigma^i\left(\frac{\partial U_\rho^j}{\partial X^i}\right)\frac{\partial}{\partial X^j} + U_\sigma^i U_\rho^j\frac{\partial^2}{\partial X^i\partial X^j},$$

则 $[\chi_\sigma, \chi_\rho] = \chi_\sigma\chi_\rho - \chi_\rho\chi_\sigma$

$$= \left(U_\sigma^i\left(\frac{\partial U_\rho^j}{\partial X^i}\right) - U_\rho^i\left(\frac{\partial U_\sigma^j}{\partial X^i}\right)\right)\frac{\partial}{\partial X^j}.$$

另一方面，由 $\frac{\partial X^i}{\partial \alpha^\sigma} = \Lambda_\sigma^\mu(\alpha)U_\mu^i(X)$ 知，

$$\frac{\partial}{\partial \alpha^\rho}\frac{\partial X^i}{\partial \alpha^\sigma} = \frac{\partial}{\partial \alpha^\rho}\left(\Lambda_\sigma^\mu(\alpha)U_\mu^i(X)\right) = \frac{\partial \Lambda_\sigma^\mu(\alpha)}{\partial \alpha^\rho}U_\mu^i(X) + \Lambda_\sigma^\mu(\alpha)\frac{\partial U_\mu^i(X)}{\partial \alpha^\rho}.$$

§ 1.4.2. 无穷小生成元的性质及李群与李代数的关系(初论)

一、无穷小生成元之间的关系（李群的代数结构）

证明：(2) 无穷小生成元之间的关系

那么，由定义 $\dfrac{\partial^2 X^i}{\partial\alpha^\rho\partial\alpha^\sigma}-\dfrac{\partial^2 X^i}{\partial\alpha^\sigma\partial\alpha^\rho}=0$ 知，

$$0=\left(\frac{\partial\Lambda_\sigma^\mu(\alpha)}{\partial\alpha^\rho}-\frac{\partial\Lambda_\rho^\mu(\alpha)}{\partial\alpha^\sigma}\right)U_\mu^i(X)+\left(\Lambda_\sigma^\mu(\alpha)\frac{\partial}{\partial\alpha^\rho}-\Lambda_\rho^\mu(\alpha)\frac{\partial}{\partial\alpha^\sigma}\right)U_\mu^i(X)$$

考虑U为α的复合函数，知

$$0=\left(\frac{\partial\Lambda_\sigma^\mu(\alpha)}{\partial\alpha^\rho}-\frac{\partial\Lambda_\rho^\mu(\alpha)}{\partial\alpha^\sigma}\right)U_\mu^i(X)+\left(\Lambda_\sigma^\mu(\alpha)\frac{\partial X^\nu}{\partial\alpha^\rho}\frac{\partial}{\partial X^\nu}-\Lambda_\rho^\mu(\alpha)\frac{\partial X^\nu}{\partial\alpha^\sigma}\frac{\partial}{\partial X^\nu}\right)U_\mu^i(X)$$

将 $\dfrac{\partial X^\nu}{\partial\alpha^\rho}=\Lambda_\rho^\mu(\alpha)U_\mu^\nu(X)$ 代入上式，得，

$$0=\left(\frac{\partial\Lambda_\sigma^\mu(\alpha)}{\partial\alpha^\rho}-\frac{\partial\Lambda_\rho^\mu(\alpha)}{\partial\alpha^\sigma}\right)U_\mu^i(X)+\left(\Lambda_\sigma^\mu\Lambda_\rho^\zeta U_\zeta^\nu-\Lambda_\rho^\mu\Lambda_\sigma^\zeta U_\zeta^\nu\right)\frac{\partial}{\partial X^\nu}U_\mu^i(X)$$

交换后一项中的求和指标μ、ζ，并提取公因子 $\Lambda_\sigma^\mu\Lambda_\rho^\zeta$ 得

§ 1.4.2. 无穷小生成元的性质及李群与李代数的关系(初论)

一、无穷小生成元之间的关系（李群的代数结构）

证明：(2) 无穷小生成元之间的关系

$$0=\left(\frac{\partial\Lambda^{\mu}_{\sigma}(\alpha)}{\partial\alpha^{\rho}}-\frac{\partial\Lambda^{\mu}_{\rho}(\alpha)}{\partial\alpha^{\sigma}}\right)U^{i}_{\mu}(X)+\Lambda^{\mu}_{\sigma}\Lambda^{\zeta}_{\rho}\left(U^{\nu}_{\zeta}\frac{\partial U^{i}_{\mu}(X)}{\partial X^{\nu}}-U^{\nu}_{\mu}\frac{\partial U^{i}_{\zeta}(X)}{\partial X^{\nu}}\right).$$

移项，并考虑 $\Lambda^{\mu}_{\sigma}(\alpha)=V^{\sigma}_{\mu}(\alpha)^{-1}$，得

$$-V^{\rho}_{\zeta}(\alpha)V^{\sigma}_{\mu}(\alpha)\left(\frac{\partial\Lambda^{\eta}_{\sigma}(\alpha)}{\partial\alpha^{\rho}}-\frac{\partial\Lambda^{\eta}_{\rho}(\alpha)}{\partial\alpha^{\sigma}}\right)U^{i}_{\eta}(X)=\left(U^{\nu}_{\zeta}\frac{\partial U^{i}_{\mu}(X)}{\partial X^{\nu}}-U^{\nu}_{\mu}\frac{\partial U^{i}_{\zeta}(X)}{\partial X^{\nu}}\right).$$

于是，原对易子 $=\left(U^{\nu}_{\zeta}\frac{\partial U^{i}_{\mu}(X)}{\partial X^{\nu}}-U^{\nu}_{\mu}\frac{\partial U^{i}_{\zeta}(X)}{\partial X^{\nu}}\right)\frac{\partial}{\partial X^{i}}$

$$=-V^{\rho}_{\zeta}(\alpha)V^{\sigma}_{\mu}(\alpha)\left(\frac{\partial\Lambda^{\eta}_{\sigma}(\alpha)}{\partial\alpha^{\rho}}-\frac{\partial\Lambda^{\eta}_{\rho}(\alpha)}{\partial\alpha^{\sigma}}\right)U^{i}_{\eta}(X)\frac{\partial}{\partial X^{i}}.$$

考虑无穷小生成元的定义知，上式表明

$$\left[\chi_{\zeta},\ \chi_{\mu}\right]=V^{\rho}_{\zeta}(\alpha)V^{\sigma}_{\mu}(\alpha)\left(\frac{\partial\Lambda^{\nu}_{\rho}(\alpha)}{\partial\alpha^{\sigma}}-\frac{\partial\Lambda^{\nu}_{\sigma}(\alpha)}{\partial\alpha^{\rho}}\right)\chi_{\nu}.$$

§ 1.4.2. 无穷小生成元的性质及李群与李代数的关系(初论)

一、无穷小生成元之间的关系（李群的代数结构）

证明：(2) 无穷小生成元之间的关系

由于 $\chi_\mu(X) = U_\mu^i(X)\dfrac{\partial}{\partial X^i}$ 是X的函数，

$$V_\zeta^\rho(\alpha)V_\mu^\sigma(\alpha)\left(\frac{\partial\Lambda_\rho^\nu(\alpha)}{\partial\alpha^\sigma} - \frac{\partial\Lambda_\sigma^\nu(\alpha)}{\partial\alpha^\rho}\right)$$ 是 α 的函数，

并有下指标 ζ、μ 和上指标 ν，于是可记为 $C_{\zeta\mu}^\nu(\alpha)$.

显然，相对于 χ_μ ，$C_{\zeta\mu}^\nu(\alpha)$ 是仅由群参数α决定的常数。

总之 $[\chi_\sigma, \chi_\rho] = C_{\sigma\rho}^\mu \chi_\mu$,

其中 $C_{\sigma\rho}^\mu$ 为常数。

这表明，无穷小生成元的对易子等于无穷小生成元的线性叠加。叠加系数$C_{\sigma\rho}^\mu$ 给出了生成元之间的关系，也就是决定了李群的结构，因此称之为李群的结构常数。

§ 1.4.2. 无穷小生成元的性质及李群与李代数的关系(初论)

一、无穷小生成元之间的关系（李群的代数结构）

证明：(2) 无穷小生成元之间的关系

李氏定理三：李群的结构常数对下标是反对称的，并且满足 Jacobi 恒等式；即有：

$$c_{\mu\nu}^{\eta} = -c_{\nu\mu}^{\eta}, \qquad c_{\mu\nu}^{\eta}c_{\eta\rho}^{\kappa} + c_{\nu\rho}^{\eta}c_{\eta\mu}^{\kappa} + c_{\rho\mu}^{\eta}c_{\eta\nu}^{\kappa} = 0.$$

证明：(1) 由李氏第二定理知 $[\chi_\mu, \chi_\nu] = c_{\mu\nu}^{\eta}\chi_\eta$，$[\chi_\nu, \chi_\mu] = c_{\nu\mu}^{\eta}\chi_\eta$；

由对易子的定义知 $[\chi_\mu, \chi_\nu] = -[\chi_\nu, \chi_\mu]$，

所以 有 $c_{\mu\nu}^{\eta} = -c_{\nu\mu}^{\eta}$.

(2) 由对易子的定义知 $[[\chi_\mu,\chi_\nu],\chi_\rho] + [[\chi_\nu,\chi_\rho],\chi_\mu] + [[\chi_\rho,\chi_\mu],\chi_\nu] = 0$，

即有 $[c_{\mu\nu}^{\eta}\chi_\eta,\chi_\rho] + [c_{\nu\rho}^{\eta}\chi_\eta,\chi_\mu] + [c_{\rho\mu}^{\eta}\chi_\eta,\chi_\nu] = 0$，

于是有 $c_{\mu\nu}^{\eta}c_{\eta\rho}^{\kappa}\chi_\kappa + c_{\nu\rho}^{\eta}c_{\eta\mu}^{\kappa}\chi_\kappa + c_{\rho\mu}^{\eta}c_{\eta\nu}^{\kappa}\chi_\kappa = 0$，

消去公因子 χ_κ 即得：$c_{\mu\nu}^{\eta}c_{\eta\rho}^{\kappa} + c_{\nu\rho}^{\eta}c_{\eta\mu}^{\kappa} + c_{\rho\mu}^{\eta}c_{\eta\nu}^{\kappa} = 0$.

二、李代数的引入及李代数与李群的关系

1. 李代数的定义

记 g 是数域K上的 n 维矢量空间，对于 $X, Y \in g$，

它们的李乘积 $[X, Y] \in g$，且满足关系

(1) **双线性：** 即对 $a, b \in K$, $X, Y \in g$,

$$[aX + bY,\ Z] = a[X,\ Z] + b[Y, Z]\ ,$$
$$[Z,\ aX + bY] = a[Z,\ X] + b[Z,\ Y]\ ;$$

(2) **反对称性：** $[X, Y] = -[Y, X]$;

(3) **幂零性：** $[X, X] = 0$;

(实际与反对称性不独立)

(4) **雅可比性：** 即对 $X, Y, Z \in g$， 有:

$$[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0\ ;$$

则称该矢量空间 g 为一个李代数 。

§ 1.4.2. 无穷小生成元的性质及李群与李代数的关系(初论)

二、李代数的引入及李代数与李群的关系

2. 对李代数的操作及李代数间的关系

(1) 同态、同态映射与同态核

对两个李代数 $\mathfrak{g}_1$、$\mathfrak{g}_2$，其间有对应关系使得 $\mathfrak{g}_1$中的每一个元素X 都对应 $\mathfrak{g}_2$中的元素 X'，并且使 $\mathfrak{g}_1$中的 $aX+bY$ 对应 $\mathfrak{g}_2$中的$aX'+bY'$，$[X,Y]$对应 $[X',Y']$，则称李代数 $\mathfrak{g}_1$与 $\mathfrak{g}_2$ 同态（homomorphism）。

上述对应关系，或者说映射，称为同态映射。

记 P 是 $\mathfrak{g}_1$到 $\mathfrak{g}_2$ 的一个同态映射，$\mathfrak{g}_1$中映射到 $\mathfrak{g}_2$ 中的 0 元素的全体称为映射 P 的同态核，

即 $\{X|X\in\mathfrak{g}_1, PX=0\in\mathfrak{g}_2\}$.

§ 1.4.2. 无穷小生成元的性质及李群与李代数的关系(初论)

二、李代数的引入及李代数与李群的关系

2. 对李代数的操作及李代数间的关系

(2) 同构、同构映射

如果前述映射（对应关系）是一一对应的，则称之为同构（isomorphism）。较数学地表述，即有：

记 $\mathfrak{g}_1$ 和 $\mathfrak{g}_2$ 是两个李代数，如果存在一个从 $\mathfrak{g}_1$ 到 $\mathfrak{g}_2$ 的映射P 满足

$\langle 1\rangle$ P是一对一映射，并且对 $a,b\in\mathbb{C}$, $X,Y\in\mathfrak{g}_1$,

$$\mathrm{P}X, \mathrm{P}Y \in\mathfrak{g}_2\ ;$$

$$\mathrm{P}(aX+bY) = a\,\mathrm{P}X + b\,\mathrm{P}Y \in \mathfrak{g}_2;$$

$\langle 2\rangle$ $\mathrm{P}([X, Y]) = [\mathrm{P}X, \mathrm{P}Y];$

则称李代数 $\mathfrak{g}_1$ 与 $\mathfrak{g}_2$ 同构，记为 $\mathfrak{g}_1 \cong \mathfrak{g}_2$ ；

相应的映射 P 称为同构映射。

§ 1.4.2. 无穷小生成元的性质及李群与李代数的关系(初论)

二、李代数的引入及李代数与李群的关系

3. 李群与李代数间的关系

李氏定理，尤其是第二、第三定理，

给出了李群的无穷小生成元之间的关系及其乘法规则，

也就是定义了李乘积。

与李代数的定义比较知，李群 G 的无穷小生成元的

集合 $\{\chi_\rho\}$ 构成一个李代数。

所以，**一个李群唯一决定一个实李代数。**

该对应关系称为李群的线性化。

由李群的定义（除了通常的群的条件外，合成函数连续可微）知，

李群与一个微分流形对应。

又由李群的无穷小生成元的定义和无穷小生成元的集合构成

李代数知，**李代数为李群对应的微分流形的切空间。**

§ 1.4.2. 无穷小生成元的性质及李群与李代数的关系(初论)

二、李代数的引入及李代数与李群的关系

4. 李代数与李群间的关系

即 李氏第二、第三定理的逆定理，它们表述如下。

李氏第二定理的逆定理：

设$\chi_\mu = U_\mu^\nu(X)\dfrac{\partial}{\partial x^\nu}$ $(\mu,\nu = 1,2,\cdots,n)$是定义在R^n上的开子集中的无穷小变换，$\{\chi_\mu\}$构成一个 n 维李代数 g，既满足对易关系 $[\chi_\mu, \chi_\nu] = C_{\mu\nu}^\rho \chi_\rho$，则存在一个 n 维局部李群 G，以 $\{\chi_\mu\}$ 为其无穷小生成元，以 g 为其李代数，并且除一个局部解析同构外，该局部李群是唯一的。

李氏第三定理的逆定理：

设 g 是实数域上的 n 维抽象，则存在一个 n 维局部李群 G，其李代数与 g 同构，并且在局部解析同构意义下，该局部李群是唯一的。

三、李群间关系与李代数间的关系的对应

前述 → 李群的元素由其无穷小生成元表征，

无穷小生成元反映单位元邻域内群的性质，

无穷小生成元之间的关系 (即由结构常数表征的乘法规则) 构成反映李群性质的李代数。

所以，一个李群唯一决定一个李代数。

进而，如果两个李群的结构常数相同，则相应的李代数同构；

即：两李代数同构，当且仅当其各自对应的李群同构。

如果两李代数同构，即李群的无穷小生成元同构，

则相应的李群局部同构，但不一定整体同构。

因此，讨论李群的（表示等）性质通常先由讨论李代数的（表示等）性质入手。

§1.4.3. 李群的连通性与覆盖性

一、连通性与（通用）覆盖群的概念

1. 连通性

已知：群元素由群参数决定，群参数与群元素一一对应；

单位元对应群参数都为 0 ；

群参数连续变化时，群元素也连续变化。

(1) 连通的定义

如果群的任意元素都能连续地变到单位元素，则称该群是连通的，或具有连通性。

或者说，如果一个群的任何元素对应的群参数都能连续地经过参数的允许区间变化到零，则称该群是连通的。

如果前述的允许区间仅有一个，则称之为单连通的。

例如：O(3) 群是非连通的, SO(3)群是连通的, 但非单连通。

推广，SO(n,C)不是单连通的， O(n,C) 是非连通的。

§ 1.4.3. 李群的连通性与覆盖性

一、连通性与（通用）覆盖群的概念

(2) 连通性的判据

〈1〉群参数是否连续变化到 0；

〈2〉群参数与群元素是否一一对应;

〈3〉群参数允许取值区间和集合是否唯一（连续）。

单连通的充要条件:

所有群参数都是连续参数,

其取值都在实数域上的一个连续区间内。

如果任何一个群参数是离散的,

或者虽然连续，但其可取值分布于多个分立区间内,

则该群就不是单连通的。

例如： SO(3)群是连通的, 但非单连通。

推广，SO(n,C)不是单连通的， O(n,C) 是非连通的。

一、连通性与（通用）覆盖群的概念

(3) 连通性的定量表征

群 G 中凡能够连续地互相变到的元素的集合称为该群的一个叶。

那么，叶可以作为定量表征群的连通性的特征量。

叶数的确定：如果群 G 由 m 个参数描述，其中第 i 个群参数的可取值由 l_i 个分离区间组成（对分立型群参数，每一个分立值记为一个分离区间），则群 G 的叶数为 $\prod_{i=1}^{m} l_i$.

单连通群即叶数为1的群。

那么，单连通群的充要条件可以表述为

$$l_i \equiv 1 \qquad (i = 1,2,\cdots,m) .$$

§ 1.4.3. 李群的连通性与覆盖性

一、连通性与（通用）覆盖群的概念

2. (通用) 覆盖群

(1) 子群

⟨1⟩ 定义：记 H 是群 G 的一个子集，若对于与群 G 同样的乘法运算，H 也构成一个群，则称 H 为 G 的一个子群，记为 $H \subset G$.

⟨2⟩ 充要条件：群G的非空子集H是群G的子群的充要条件为：

如果 $h_\alpha, h_\beta \in H$，则 $h_\alpha h_\beta \in H$;

如果 $h_\alpha \in H$，则 $h_\alpha^{-1} \in H$.

⟨3⟩ 分类：子群分为平庸子群（或显然子群）、固有子群。

平庸子群，或称显然子群，即单位元素或其自身。

$$\text{固有子群}\begin{cases} \text{不变子群:} & H \subset G, h_\alpha \in H, g \in G, g h_\alpha g^{-1} \in H. \\ \text{共轭子群:} & H \subset G,\ K \in G,\ K = gHg^{-1}. \end{cases}$$

§ 1.4.3. 李群的连通性与覆盖性

一、连通性与（通用）覆盖群的概念

2. (通用) 覆盖群

(2) 陪集

记 H 是群 G 的子群，$H=\{h_\alpha\}$，对 $g\in G$, 但 $g\notin H$ ，

$gH=\{gh_\alpha|h_\alpha\in H\}$ 称为子群 H 的左陪集，

$Hg=\{h_\alpha g|h_\alpha\in H\}$ 称为子群 H 的右陪集。

(3) 商群

记群 G 的不变子群 H 生成的陪集串为 H, g_1H, g_2H, $\cdots$, g_iH, $\cdots$，把其中每一个陪集看做一个新的元素, 并由两个陪集中的元素相乘得另一个陪集中的元素，即有 $H\to f_0$, $g_1H\to f_1$, $g_2H\to f_2,\cdots$, $g_iH\to f_i,\cdots$, 和乘法规则 $g_ih_\alpha g_jh_\beta=g_mh_\gamma \to f_if_j=f_k$, 称这样得到的群 $\{f_0, f_1, f_2,\cdots,f_i,\cdots\}$ 称为不变子群 H 的商群，记为 G/H .

§ 1.4.3. 李群的连通性与覆盖性

一、连通性与（通用）覆盖群的概念

2. (通用) 覆盖群

(4) 中心

对 $D=\{d_\mu\}$, $g\in G$, 如果 $gd_\mu g^{-1}=d_\mu$，即D是G的一个不变子群，并且D的元素与G的元素可以交换，则称D为G的一个中心。

(5)（通用）覆盖群

记SG 是一个单连通群，其商群$G_i=SG/D_i$ $(i=1,2,\cdots,r)$ 都是复连通的，则称SG 为G_i 的通用覆盖群。

也就是说，如果一个单连通群的中心的商群都是复连通的，则称该单连通群为这些商群的通用覆盖群。

二、李群的连通性与覆盖性

定理一：设 SG 是一个单连通群，如果 SG 到道路连通李群 G 的局部同态映射为 f'，则可以把局部同态 f' 扩充为 SG 到 G 的(整体)同态 f，并且在 SG 的单位元素邻域内，$f = f'$.

定理二：设 $\mathfrak{g}$ 是有限维实李代数，则存在一个单连通李群 SG 以 $\mathfrak{g}$ 为其李代数，并且这样的 SG 在同构意义上是唯一的。

定理三：设 G 为李群，$\mathfrak{g}$ 是其李代数，如果 $X \in \mathfrak{g}$，则指数映射 $X \to exp(X)$ 在 0 点的一个邻域内是解析的和可逆的。

定理四：设 G 为李群，$\mathfrak{g}$ 是其李代数，对于任一 $X \in \mathfrak{g}$，都有 G 的一个以 X 为无穷小生成元的单参数子群 H 存在，并且 H 的群元可以表示为 $exp(\lambda X)$，其中 λ 为实参数。

二、李群的连通性与覆盖性

关于定理四的近似分析：

对群元素$g(\alpha)$，如果α很小，则可对之在单位元附近展开，即有

$$g(\alpha)=g(0)+\left(\frac{\partial g(\alpha)}{\partial\alpha^i}\right)_{\alpha^i=0}\delta\alpha^i+\frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 g(\alpha)}{\partial{\alpha^i}^2}\right)_{\alpha^i=0}\left(\delta\alpha^i\right)^2+\cdots$$

$$=g(0)+\chi_i\,\alpha^i+\frac{1}{2!}\,{\chi_i}^2(\alpha^i)^2+\cdots\;=e^{\chi_i\alpha^i}.$$

其中 χ_i 为李群的无穷小生成元。

对有限大小的群参数β，记其群元素为$g(\beta)$，取足够大的正整数n，则有 $\beta^i=\frac{\beta}{n}\rightarrow 0$, $g(\beta^i)=g\left(\frac{\beta}{n}\right)=g(0)+\frac{\beta}{n}\chi_i+\cdots$,

于是 $g(\beta)=g(\alpha_n)\cdots g(\alpha_2)\,g(\alpha_1)=\left(g(0)+\beta^i\chi_i\right)^n$，

因为$g(0)=E$，$\beta^i\chi_i$ 总对易，则

$$上式=\sum_{j=0}^{n}C_n^j\,(\beta^i\chi_i)^j\cong\sum_{j=0}^{n}\frac{1}{j!}(\beta\chi_i)^j\;=e^{\chi_i\beta}.$$

并可通过定义 $\pi_k=-i\chi_k$ (其中i为虚数单位)厄密化。

§ 1.4.3. 李群的连通性与覆盖性

二、李群的连通性与覆盖性

关于定理四的近似分析：

因为对每一个 $\beta^i = \frac{\beta}{n}$，$g(\beta^i)$ 都是一个群元素，

相应的群 $\{g(\beta^i)\}$ 构成由 $e^{\chi_i \beta^i}$ 构成的群的一个中心，

因此，这样指数化后的SG实际是一个通用覆盖群。

例如：对 $e^{i\vec{\theta}\cdot\frac{\vec{\sigma}}{2}} = E_2 \cos\frac{\theta}{2} + i\left(\vec{\sigma}\cdot\vec{\theta}\right)\sin\frac{\theta}{2}$，其中 $\vec{\sigma}$ 为泡利矩阵。

记 $\chi_i = \frac{\sigma_i}{2}$，因为 $[\chi_i, \chi_j] = \varepsilon_{ijk}\chi_k$，$\{\chi_i\}$ 构成一su(2) 李代数，

与之对应的群可以是SO(3)，也可以是SU(2)．

因为对应于 $\theta = 0$, $e^{i\vec{\theta}\cdot\frac{\vec{\sigma}}{2}} = E_2$;对应于 $\theta = 2\pi$, $e^{i\vec{\theta}\cdot\frac{\vec{\sigma}}{2}} = E_2$;

即su(2) 李代数有中心 $D^{(1)} = E_2$，和 $D^{(2)} = D = (E_2, -E_2)$．

从而 $G^{(1)} = SU(2)/D_1 = SU(2)$，$G^{(2)} = SU(2)/D_2 = SO(3)$.

所以，由 $e^{i\vec{\theta}\cdot\frac{\vec{\sigma}}{2}}$ 决定的SU(2)群是一个通用覆盖群(周期为4π)。

三、直积群及其连通性

1. 直积群的定义

记 G_1 和 G_2 是 G 的两个子群, $G_1=\{R_1,R_2,\cdots,R_{n_1}\}$, $G_2=\{S_1,S_2,\cdots,S_{n_2}\}$,

如果 (1) 除单位元外，R_i 与 S_j 都不相同(G_1 和 G_2 无公共元素);

(2) G_1 的元素与 G_2 的元素对易，$R_iS_\alpha=S_\alpha R_i$;

(3) G 的元素都是形如 R_iS_α 的集合(共 $n=n_1n_2$ 个);

则称 G 为 G_1 与 G_2 的直积群，记为 $G=G_1\otimes G_2$.

2. 直积群的连通性

如果 $G=G_1\otimes G_2$, G_2 不是单连通的，则一般来说，

G 不可能是单连通的。

§1.5. 李代数的一些基本概念

§1.5.1 李代数与子李代数

一、李代数（复习）

记 $\mathfrak{g}$ 是数域K上的一个 n 维矢量空间，对于 $X, Y \in \mathfrak{g}$，它们的李乘积 $[X, Y] \in \mathfrak{g}$，且满足关系

(1) 双线性性：即对 $a, b \in K$, $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$,

$$[aX + bY,\ Z] = a[X,\ Z] + b[Y, Z]\ ,$$
$$[Z,\ aX + bY] = a[Z,\ X] + b[Z,\ Y]\ ;$$

(2) 反对称性： $[X,\ Y] = -[Y,\ X]\ ;$

(3) 雅可比性：即对 $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$，有：

$$\big[[X,\ Y],\ Z\big] + \big[[Y,\ Z],\ X\big] + \big[[Z,\ X], Y\big] = 0\ ;$$

则称该矢量空间 $\mathfrak{g}$ 为一个李代数。

§ 1.5. 李代数的一些基本概念

§ 1.5.1 李代数与子李代数

二、子李代数

- 记李代数g的一个子集为h，对 $X, Y \in$ h，在 g 的李乘积运算下，如果 $[X, Y] \in$ h，则称h为g的一个子李代数。
- 零元素和其自身g为g的子代数，称之为g的平庸子代数。
- 通常所说的子代数为除平庸子代数之外(非平庸)子代数。

三、不变子代数与中心

1. 不变子代数

- 如果对于g的子空间h，$\forall X \in g$, $Y \in$ h, $[X, Y] \in$ h，则称h为g的一个不变子代数，也称为理想子代数，简称理想。

与不变子群的概念完全相同！

♠ 如果h_1、h_2分别为g的不变子代数，则$[h_1, h_2]$也必是g的不变子代数，并且$[h_1, h_2] \subset h_1 \cap h_2$.

(各自分别不变，乘积也不变，则乘积必在其公共区域)

§ 1.5. 李代数的一些基本概念

§ 1.5.1 李代数与子李代数

三、不变子代数与中心

2. 可交换理想

- 如果李代数g有子空间h，$\forall X, Y \in$ h，$[X, Y] \in$ h;

  $\forall X \in$ h, $Y \notin$ h，$[X, Y] \equiv 0$;

  则称子代数h为李代数g的一个可交换理想。

- 对应群的中心的概念!

3. 中心

- 李代数g的最大可交换理想h_{max}称为李代数g的中心。
- 李代数的中心的概念比李群的中心的概念广。

四、李代数的直和与半直和

1. 李代数的直和

- 如果李代数$\mathfrak{g}$的两个不变子代数$\mathfrak{g}_1$和$\mathfrak{g}_2$ 满足

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \cup \mathfrak{g}_2, \quad 而 \quad \mathfrak{g}_1 \cap \mathfrak{g}_2 = 0$$

则称 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$ 为$\mathfrak{g}_1$与$\mathfrak{g}_2$的**直和**。

- 性质：$[\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2] = 0$.

- 如果两个群G_1、G_2有上述特性，则称之为直积，记为$G = G_1 \otimes G_2$.

2. 半直和

- 如果 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \cup \mathfrak{g}_2$，$\mathfrak{g}_1 \cap \mathfrak{g}_2 = 0$, $[\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_1] \in \mathfrak{g}_1$, $[\mathfrak{g}_2, \mathfrak{g}_2] \in \mathfrak{g}_2$, $[\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2] \in \mathfrak{g}_1$,（即$\mathfrak{g}_1$是$\mathfrak{g}$的理想，而$\mathfrak{g}_2$仅是$\mathfrak{g}$的子代数、但不是理想）则称$\mathfrak{g}$为$\mathfrak{g}_1$与$\mathfrak{g}_2$的**半直和**，记为$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus_S \mathfrak{g}_2$.

五、同余类和商代数

1. 同余类

记 h 是李代数 g 的理想，对 $X \in$ g，$\bar{X} = X + $ h 称为 X 的 modh 同余类。　　（与子群的陪集对应）

2. 商代数

- 商空间

李代数g中所有modh 同余类的集合组成的空间称为h 的商空间，记为g/h.

- 商代数

对 g/h 中的 X、Y，如果 $[\bar{X}, \bar{Y}] = \overline{[X, Y]}$，

即李乘积保证g/h 为 g 的子李代数，

则称 g/h 为 g 对 h 的商代数。

六、可解李代数与幂零李代数

1. 可解李代数

对李代数 g，记 $g^{(0)}=g$,

$g^{(1)}=[g^{(0)}, g^{(0)}]$ 称为 $g^{(0)}$ 的导出代数,

$g^{(2)}=[g^{(1)}, g^{(1)}]$ 称为 $g^{(1)}$ 的导出代数,

以此类推,

有李代数 g 的子代数链

$$g^{(0)} \supset g^{(1)} \supset g^{(2)} \supset \cdots,$$

如果存在自然数 k, 使得 $g^{(k)}=\{0\}$，则称 g 为可解李代数，或称 李代数 g 是可解的。

例如：两维平移转动群对应的李代数是可解的，并且 k=2, 因为 $[X_1, X_2]=0$，$[X_2, X_3]=-X_1$，$[X_3, X_1]=-X_2$.

六、可解李代数与幂零李代数

2.幂零李代数

对李代数 g，记 $g^{[0]}=g$,

$g^{[1]}=[g, g^{[0]}]$ 称为 g 的导出代数,

$g^{[2]}=[g, g^{[1]}]$ 称为 $g^{[1]}$ 的导出代数,

以此类推,

李代数 g 有降中心链

$$g^{[0]}\supset g^{[1]}\supset g^{[2]}\supset \cdots,$$

如果存在自然数 k, 使得 $g^{[k]}=\{0\}$，则称 g 为幂零李代数，或称 李代数 g 是幂零的。

例如：两维平移转动群对应的李代数是非幂零的。

§1.5. 李代数的一些基本概念

§1.5.1 李代数与子李代数

六、可解李代数与幂零李代数

3. 可解与幂零的关系

由定义知，对于 $i \geq 2$，$\mathfrak{g}^{(i)}$ 仅是 $\mathfrak{g}^{[i]}$ 的子集，

于是有：幂零李代数一定可解；

可解李代数不一定幂零；　　（如前例）

幂零李代数的同态相也是幂零的；

可解李代数的同态相也是可解的；

幂零李代数的子代数是幂零的；

可解李代数的子代数是可解的。

===============

习题：1. 证明李氏三定理的逆定理。

2. 证明上述可解李代数和幂零李代数的性质。

3. 证明：(1) 幂零李代数至少包含一个非平庸理想；

(2) 如果一个李代数包含一个可解理想，其对应的商代数也可解，则该李代数可解。