各李代数的结构

2020 年 4 月 17 日

目录

1 介绍

本文档对九种典型及例外李代数进行了：

- 验证其根系结构（W5 作业）
- 利用邓金图计算根系（W6 作业）
- 验证其矩阵实现的正确性（W7 作业）

其中验证根系结构是指，验证这一根系满足如下性质：

- 任意一个非零根 α 的负值 $-\alpha$ 也是根（这个太 trivial 了就略去了）。
- 任意两根满足 $\frac{2(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)} \in \mathbb{Z}$，或者等价地，两根夹角与其长度比有对应关系。
- 对于任意两个根 α 和 β，$\beta - 2\frac{(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)}\alpha$ 也是根。

注意到后两点对于 α 和 β 互为负值或相互正交的情况都是 trivial 的，从而只用讨论夹 $30°, 45°, 60°$ 度角的情况即可（以下称这些为 non-trivial 夹角，剩下的称 trivial 夹角）。同时，如果 α 和 β 满足这两个条件，那么容易验证 α 和 $-\beta$ 也满足，从而总可以不失一般性地选取正负号来简化讨论。

对于矩阵实现，我们理应验证全部的对易关系：

$$[H_i, H_j] = 0 \tag{1}$$

$$[H_i, E_\alpha] = \alpha_i E_\alpha \tag{2}$$

$$[E_\alpha, E_{-\alpha}] = \alpha^i H_i \tag{3}$$

$$[E_\alpha, E_\beta] = N_{\alpha\beta} E_{\alpha+\beta} \tag{4}$$

我们的验证过程中会常用到这一关系式：

$$[D, E_{ij}] = (D_{ii} - D_{jj}) E_{ij} \tag{5}$$

其中 D 是对角矩阵，E_{ij} 代表只有 (i, j) 元非零的矩阵。

我们讨论的矩阵实现中，H 都是显式地写为了同时对角化的形式，从而(1)自然满足。(2)可以直接验证，并在过程中求出 α_i。

注意到(2),(3),(4)三式右边都有待定系数。这些系数之间需要满足一些关系。首先，各 α_i 之间需要满足根向量间的关系，即它们应该是该李代数的根系在某一组正交基下的坐标，这一般是容易验证的。再者，雅可比行列式必须满足。经过简单的计算可以得知只有下列两种雅可比行列式是 non-trivial 的：

$$[E_\beta, [E_\alpha, E_{-\alpha}]] + \text{cyc.} = 0 \tag{6}$$

$$[E_\alpha, [E_\beta, E_\gamma]] + \text{cyc.} = 0 \tag{7}$$

$$[E_\alpha, [E_\beta, E_{-\alpha-\beta}]] + \text{cyc.} = 0 \tag{8}$$

分别给出：

$$N_{\alpha,\beta-\alpha} N_{-\alpha,\beta} + N_{-\alpha,\alpha+\beta} N_{\beta,\alpha} = (\alpha, \beta) \tag{9}$$

$$N_{\beta\gamma} N_{\alpha,\beta+\gamma} + N_{\gamma\alpha} N_{\beta,\gamma+\alpha} + N_{\alpha\beta} N_{\gamma,\alpha+\beta} = 0 \tag{10}$$

$$(N_{\beta,-\alpha-\beta} - N_{\alpha,\beta}) \alpha^i + (N_{-\alpha-\beta,\alpha} - N_{\alpha,\beta}) \beta^i = 0 \tag{11}$$

其中，如果令

$$n(\beta, \alpha) = N_{-\alpha,\beta} N_{\alpha,\beta-\alpha} \tag{12}$$

则(9)改写为

$$n(\beta+\alpha,\alpha)-n(\beta,\alpha)=-(\alpha,\beta) \tag{13}$$

假设 β 的 α 根系为 $\beta-q\alpha$ 至 $\beta+p\alpha$，对根链求和，可以求出 $\frac{2(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)}=q-p$，再利用这一结果可以得到

$$n(\beta,\alpha)=\frac{1}{2}q(p+1)(\alpha,\alpha) \tag{14}$$

(11)给出

$$N_{\alpha\beta}=N_{-\alpha-\beta,\alpha}=N_{\beta,-\alpha-\beta} \tag{15}$$

命题： 取素根系 π，只要令

2 A_l

2.1 根系结构验证

A_l 的根系结构为：

$$\{e_i-e_j|1\le i,j\le l+1, i\neq j\} \tag{16}$$

取两个 $\alpha=e_i-e_j$ 和 $\beta=e_k-e_l$。如果 i,j 和 k,l 是四个不同的数，那么显然两者正交。non-trivial 的情况只有当 i,j 中的一个和 k,l 中的一个相等时出现。不妨设 $i=k$，则两者内积为 1，而两者模方均为 2，故有 $\cos\theta=\frac{1}{2}$，与两者长度相等一致。此时有 $\frac{(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)}=\frac{1}{2}$，从而 $\beta-2\frac{(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)}\alpha-\beta-\alpha=e_j-e_l$，确实为根。

2.2 邓金图计算根系

其 Cartan 矩阵为 $A_{ij}=2\delta_{ij}-\delta_{i,j+1}-\delta_{i,j-1}$

一级根为素根 α_i，此时有对应的 $q_j=2\delta_{ij}$，而

$$p_j=q_j-A_{jl}k_l=q_j-A_{ji}=\delta_{i,j+1}+\delta_{i,j-1} \tag{17}$$

其中 k_l 指当前根在素根基下的展开系数，这里即为 δ_{li}，以下不再赘述。

从而二级根为 $\alpha_i+\alpha_{i+1}$，此时对应 $q_j=\delta_{ji}+\delta_{j,i+1}$，而

$$\begin{aligned}p_j&=q_j-A_{jl}k_l\\&=\delta_{ji}+\delta_{j,i+1}-(2\delta_{ji}-\delta_{j,i+1}-\delta_{j,i-1})-(2\delta_{j,i+1}-\delta_{j,i+2}-\delta_{ji})\\&=\delta_{j,i-1}+\delta_{j,i+2}\end{aligned} \tag{18}$$

从而三级根只能是二级根头尾加上一个，即 $\alpha_i+\alpha_{i+1}+\alpha_{i+2}$ 形式。

由此可作递归。假设 n 级根全都为 $a_i+a_{i+1}+\cdots+a_{i+n-1}$ 形式，则其对应的 $q_j=\delta_{j,i}+\delta_{j,i+n-1}$（只有去掉最边上的才能去完之后还是一串连着的形式），于是

$$\begin{aligned} p_j = q_j - A_{jl}k_l &= \delta_{j,i}+\delta_{j,i+n-1} - \sum_{m=i}^{i+n-1}(2\delta_{jm}-\delta_{j,m+1}-\delta_{j,m-1}) \\ &= \delta_{j,i}+\delta_{j,i+n-1} - (\delta_{j,i}-\delta_{j,i-1}+\delta_{j,i+n-1}-\delta_{j,i+n}) = \delta_{j,i-1}+\delta_{j,i+n} \end{aligned} \tag{19}$$

从而确实 $n+1$ 级根只能是 $\alpha_i+\alpha_{i+1}+\cdots+\alpha_{i+n}$。注意上述推导 p_j 中如果求和指标超出可取值范围，对应部分直接写成零即可，不影响结论。

从而递归成立。于是得知 A_l 的根系用素根表达为：

$$\left\{\sum_{m=i}^{j}\alpha_m \,\middle|\, 1\le i\le j\le l\right\} \tag{20}$$

2.3 矩阵实现的验证