李群与李代数作业

杨天骅

2020 年 5 月 25 日

目录

1 第一章第三节

1.1 题 1

$SO(2)$ 群有

$$O^T O = E \tag{1}$$

对于

$$O = e^L \tag{2}$$

这意味着

$$E = e^{L^T} e^L = (E + L^T + O(L^2))(E + L + O(L^2)) = E + L + L^T + O(L^2) \tag{3}$$

从而

$$L + L^T = 0 \tag{4}$$

即无穷小元素为二阶反对称矩阵。而二阶反对称矩阵空间只有一维。可选取一个基作为其生成元：

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{5}$$

1.2 题 2

同上讨论，矩阵形式的生成元应该是三阶反对称矩阵空间。这一空间的维数为 $3 \times (3-1)/2 = 3$，可选取一组基为：

$$L_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{6}$$

$$L_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{7}$$

$$L_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{8}$$

对于算符形式的生成元，我们对 $SO(3)$ 取这样的参数化：

$$\begin{aligned} A(\beta_1, \beta_2, \beta_3) &= A_1(\beta_1) A_2(\beta_2) A_3(\beta_3) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\beta_1 & \sin\beta_1 \\ 0 & -\sin\beta_1 & \cos\beta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\beta_2 & 0 & -\sin\beta_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\beta_2 & 0 & \cos\beta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\beta_3 & \sin\beta_3 & 0 \\ -\sin\beta_3 & \cos\beta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{9}$$

应该有

$$f(\beta, X) = XA(\beta_1, \beta_2, \beta_3) \tag{10}$$

那么我们得到

$$\begin{aligned} U^i_\sigma = \left(\frac{\partial f^i(\beta, X)}{\partial \beta_\sigma} \right)\Big|_{\beta=0} = \left(\frac{\partial (A_\sigma(\beta_\sigma)X)_i}{\partial \beta_\sigma} \right)\Big|_{\beta_\sigma=0} \\ = \left(\frac{\partial \left[A_\sigma(\beta_\sigma)\right]_{ji}}{\partial \beta_\sigma} \right)\Big|_{\beta_\sigma=0} X_j = (L_\sigma)_{ji} X_j \end{aligned} \tag{11}$$

其中 L_σ 是上面定义的矩阵形式生成元。

于是我们得到生成元：

$$\mathbb{X}_\sigma = U^i_\sigma \partial_i = (L_\sigma)_{ji} X_j \partial_i \tag{12}$$

具体地有

$$\mathbb{X}_1 = y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y} \tag{13}$$

$$\mathbb{X}_2 = z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z} \tag{14}$$

$$\mathbb{X}_3 = x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x} \tag{15}$$

可以看出与角动量算符的对应。

2 第一章第五节

2.1 题 1

课件中陈述的李氏第一定理的逆定理似乎不严谨。事实上，如果仅有课件中的那些条件，则

$$\varphi(\alpha, \beta) = \alpha \tag{16}$$

是一个合法的合成函数。但它不是一个局部李群的合成函数，因为任意非零元素不存在右逆元。

根据 Cohn 书中第二章的描述，局部李群这个概念正是用

2.2 题 2

幂零李代数一定可解 用归纳法证明 $g^{(i)} \subset g^{[i]}$。$i=0$ 时显然成立。如果 $i-1$ 时成立，那么应该有 $g^{(i)} = [g^{(i-1)}, g^{(i-1)}]$，而 $g^{(i-1)} \subset g, g^{(i-1)} \subset g^{[i-1]}$，从而 $[g^{(i-1)}, g^{(i-1)}] \subset [g, g^{[i-1]}] = g^{[i]}$，从而归纳假设对任意 i 成立。如果幂零，则存在一个 i 使得 $g^{[i]} = 0$，这也就意味着 $g^{(i)} = 0$，从而可解。

可解李代数不一定幂零 考虑课件中给出的李代数 $[X_1, X_2] = 0$,$[X_2, X_3] = -X_1$,$[X_3, X_1] = -X_2$。应该有 $g^{(1)} = \langle X_1, X_2 \rangle$，再由对易关系知 $g^{(2)} = 0$，从而可解。但是由对易关系应该有 $g^{[1]} = g^{[2]} = \langle X_1, X_2 \rangle$，那么应该有对于任意 $i \geq 1$,$g^{[i]} = \langle X_1, X_2 \rangle$，从而不幂零。

可解/幂零李代数的同态像也可解/幂零 记同态为 P，则应该有 $P([X,Y]) = [P(X), P(Y)]$。于是，$P(g^{(i)}) = P([g^{(i-1)}, g^{(i-1)}]) = [P(g^{(i-1)}, g^{(i-1)})]$，$P(g^{[i]}) = P([g, g^{[i-1]}]) = [P(g), P(g^{[i-1]})]$。于是归纳得到 $P(g^{(i)}) = P(g)^{(i)}$,$P(g^{[i]}) = P(g)^{[i]}$。从而，如果存在 i 使得 $g^{(i)} = 0$，则必有 $P(g)^{(i)} = P(0) = 0$，从而 g 可解意味着 $P(g)$ 可解。幂零类似。

可解/幂零李代数的子代数也可解/幂零 设有 $h \subset g$。归纳证明 $h^{(i)} \subset g^{(i)}$。$i = 0$ 时显然成立，如果 $i-1$ 时成立，则有 $h^{(i-1)} \subset g^{(i-1)}$，从而 $h^{(i)} = [h^{(i-1)}, h^{(i-1)}] \subset [g^{(i-1)}, g^{(i-1)}] = g^{(i)}$，从而归纳成立。这样，如果 g 可解，则存在 $g^{(i)} = 0$，于是 $h^{(i)} = 0$，从而 h 也可解。幂零类似。

2.3 题 3.1

对于幂零子代数，应该存在 i，使得 $g^{[i-1]} \neq 0$ 而 $g^{[i]} = 0$。这样，有 $[g, g^{[i-1]}] = g^{[i]} = 0$，于是 $g^{[i-1]}$ 是一个非平庸理想。

2.4 题 3.2

设原李代数为 g，其可解理想为 h。则存在一个 m，使得 $h^{(m)} = 0$，且存在一个 n，使得 $(g/h)^{(n)} = 0$。首先，由 $[\bar{A}, \bar{B}] = \overline{[A, B]}$，我们可以知道，$g^{(1)} = [g, g]$ 在 $\mod h$ 下一定属于 $(g/h)^{(1)}$ 中某一个同余类。类似归纳可以知道，$g^{(i)}$ 在 $\mod h$ 一定属于 $(g/h)^{(i)}$ 中的某个同余类。从而当 $i \geq n$ 时，$g^{(i)}$ 一定属于 0 的同余类，也就是包含于 h。于是，类似上面对可解遗传性的证明，有 $g^{(m+n)} \subset h^{(m)} = 0$。这就证明了 g 可解。

3 第一章第六节

3.1 题 1

如果一个矩阵 A 退化，即 $\det A = 0$，那么根据行列式等于本征值之积，知道其必定有零本征值。从而必定存在非零向量 $\mathbf{v}$，使得 $A\mathbf{v} = 0$。展开后这意味着 $\sum_j A_{ij} v_j = 0, \forall i$。如果记 A 的各列向量为 $\mathbf{a}_j$，即 $(\mathbf{a}_j)_i = A_{ij}$，那么上式意味着 $\sum_j v_j \mathbf{a}_j = 0$，而 $\mathbf{v}$ 不是零向量，这说明 A 的各列向量线性相关，这与 A 满秩矛盾。

3.2 题 2

取李代数 g 中的一个可解理想 R，使得其不是任何其它可解理想的子集。欲证 $\frac{g}{R}$ 是半单的。假设其有可交换理想 S。取自然映射 $\phi : g \to \frac{g}{R}$，并记 $\tilde{S} = \phi^{-1}(S)$。我们知道 $\ker \phi = R$，而显然 $R = \phi^{-1}(0) \subset \tilde{S}$。于是我们知道 $\phi|_{\tilde{S}}$ 是 $\tilde{S}$ 到 S 的核为 R 的满同态。由同态核定理，$\frac{\tilde{S}}{R} \cong S$。于是我们知道 $\tilde{S}$ 可解。由 R 的定义，知道 $\tilde{S} = R$，于是一定有 $S = \phi(R) = 0$。这就证明了 $\frac{g}{R}$ 是半单的。

于是 $g = R \oplus_s (g/R)$，其中 R 可解，$\frac{g}{R}$ 半单。

欲证这一分解的唯一性，只要说明 R 的唯一性即可。假设由另一个可解理想 N，容易知道 $R \subset R + N$，且由于 $[R, g] = 0$，必有 $[R, R + N] = 0$，即 R 也是 $R + N$ 的理想。从

而可以取 $R+N$ 对 R 的商代数 $\frac{R+N}{R}$。取自然映射 $\phi : R+N \to \frac{R+N}{R}$，那么由定义应该有 $\phi(N) = \frac{R+N}{R}$，也就是说 $\phi|_N : N \to \frac{R+N}{R}$ 是满同态。又易见其核为 $R \cap N$，于是由同态核定理有 $\frac{N}{R\cap N} \cong \frac{R+N}{R}$。而我们已知 N 可解，从而其在自然映射下的像 $\frac{N}{R\cap N}$ 也可解，于是知道 $\frac{R+N}{R}$ 也可解。R 可解。从而 $R+N$ 对其可解理想 R 的商代数也可解，即 $R+N$ 可解。由 R 的构造知道 $R+N=R$，从而 $N \subset R$。于是，如果 $N \neq R$，就意味着 N 是另一个可解理想的子集。这就说明了 R 是 g 中唯一一个不是其它可解理想子集的可解理想。

（证明参考了 Varadarajan 书。）

3.3 题 3

如果单纯李群 G 的李代数 g 有理想 h，那么 h 可以生成一个李群 H，且容易知道 H 是 G 的子群（因为 $e^h \subset e^g \subset G$。但 H 应该是 G 的不变子群，因为对于任何 G 中元素 e^g，应该有 $[g,h] \subset h$，那么根据 Baker-Hausdorff 公式：

$$e^g h e^{-g} = h + [g,h] + \frac{1}{2!}[g,[g,h]] + \cdots \subset h \tag{17}$$

于是

$$e^g e^h e^{-g} = \exp\left(e^g h e^{-g}\right) \subset H \tag{18}$$

从而 H 是 G 的不变子群，这与假设矛盾，从而 g 使单纯的。如果加上 h 是可交换的条件，那么容易证明构造出的 H 是阿贝尔的，类似地，就说明了半单纯李群的李代数是半单纯的。

如果有实李代数 g，可以唯一的构造出连通李群 $G = e^g$。如果 G 有不变子群 H，那么 H 的无穷小生成元应该可以被 G 的无穷小生成元表出，亦即 H 的李代数 h 应该是 g 的子代数。同时，因为 H 是不变子群，有 $aba^{-1} \in H, \forall b \in H, a \in G$，上式在 $b \to e$ 处展开得到 $aha^{-1} \in h \forall a \in G$，再利用无穷小生成元的对应关系得到 $[g,h]=0$，也就是说 h 是理想，矛盾，从而 G 是单纯的。如果 H 阿贝尔，那么构造出的 h 也就可交换，从而类似地知道半单纯李代数的李群是半单纯的。

3.4 题 4

$$g_{\lambda\mu} C^\lambda_{\rho k} - g_{\lambda\rho} C^\lambda_{\mu k} = (C^\lambda_{\rho k} X_\lambda, X_\mu) - (C^\lambda_{\mu k} X_\lambda, X_\rho) = ([X_\rho, X_k], X_\mu) - ([X_\mu, X_k], X_\rho) = 0 \tag{19}$$

4 第二章第一节

4.1 题 1

半单李代数的根可以用来确定整个李代数的结构。只要知道了所有的根，就可以取 Cartan-Weyl 基，那么各基向量之间的对易关系都可以用根系来确定。同时根也和表示的权有非常紧密的联系，可以帮助确定表示的权系，进而确定整个表示的具体形式。

当 $A = H_i$ 时，根向量给出的是各个不同根的同一 i 分量张出的向量，而根系中的每一个向量是同一根的不同分量张出的向量，二者在一定意义下成转置关系。

4.2 题 2

根据课件中的算法，可以递推出

$$|N_{\alpha,\mu+p\alpha-i\alpha}|^2=\sum_{j=1}^{i}(\alpha,\mu+(p+1)\alpha-j\alpha)=i(\mu,\alpha)+\frac{1}{2}i(2p+1-i)(\alpha,\alpha)\tag{20}$$

再利用

$$(\mu,\alpha)=\frac{1}{2}(q-p)(\alpha,\alpha)\tag{21}$$

得到

$$|N_{\alpha,\mu+p\alpha-i\alpha}|^2=\frac{1}{2}i(p+q+1-i)(\alpha,\alpha)\tag{22}$$

特别地，当 $i=p$ 时有

$$|N_{\alpha,\mu}|^2=\frac{1}{2}p(q+1)(\alpha,\alpha)\tag{23}$$

显然 $[E_\alpha,E_\beta]=-[E_\beta,E_\alpha]$，从而 $N_{\alpha\beta}=-N_{\beta\alpha}$。由厄米性 $N_{\alpha,\beta}=N_{-\alpha,\beta+\alpha}$。

又，记 $\gamma=-\alpha-\beta$，由雅可比不等式：

$$[E_\alpha,[E_\beta,E_\gamma]]+[E_\beta,[E_\gamma,E_\alpha]]+[E_\gamma,[E_\alpha,E_\beta]]=0\tag{24}$$

利用 $[E_\mu,E_{-\mu}]=\mu^iH_i$，上式展开得到：

$$N_{\beta,\gamma}\alpha^iH_i+N_{\gamma,\alpha}\beta^iH_i+N_{\alpha,\beta}\gamma^iH_i=0\tag{25}$$

各个 H_i 线性独立，而 $\gamma=-\alpha-\beta$，于是

$$(N_{\beta,\gamma}-N_{\alpha,\beta})\alpha^i+(N_{\gamma,\alpha}-N_{\alpha,\beta})\beta^i=0\tag{26}$$

α 和 β 亦线性独立，从而得到 $N_{\alpha,\beta}=N_{\gamma,\alpha}=N_{-\alpha-\beta,\alpha}$。

那么我们知道 $N_{\alpha,\beta}=N_{-\alpha,\beta+\alpha}=-N_{-(-\alpha)-(-\beta),-\alpha}=-N_{-\alpha,-\beta}$。

4.3 题 3

取 g_1 的 Cartan-Weyl 基 H_i,E_α 和 g_2 的 Cartan-Weyl 基 G_j,F_β。那么 $\{H_i,G_j,E_\alpha,F_\beta\}$ 应该构成 g 的一组基。由两李代数各自的李乘积关系和两子代数相互正交，知道 $\{H_i,G_j\}$ 是 g 的一个最大理想，从而是 Cartan 子代数。在这一组基下，各个基对应的根应该为 $E_\alpha\to(\alpha,0)\subset\Sigma_1$,$F_\beta\to(0,\beta)\subset\Sigma_2$。于是 $\Sigma=\Sigma_1\cup\Sigma_2$，且 $(\alpha,0)\cdot(0,\beta)=0$。

5 第二章第二节

5.1 题 1

这里验证九种李代数的根系确实满足根系的条件。即：

- 任意一个非零根 α 的负值 $-\alpha$ 也是根（这个太 trivial 了就略去了）。
- 任意两根满足 $\frac{2(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)}\in\mathbb{Z}$，或者等价地，两根夹角与其长度比有对应关系。

- 对于任意两个根 α 和 β，$\beta - 2\frac{(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)}\alpha$ 也是根。

注意到后两点对于 α 和 β 互为负值或相互正交的情况都是 trivial 的，从而只用讨论夹 $30°, 45°, 60°$ 度角的情况即可（以下称这些为 non-trivial 夹角，剩下的称 trivial 夹角）。同时，如果 α 和 β 满足这两个条件，那么容易验证 α 和 $-\beta$ 也满足，从而总可以不失一般性地选取正负号来简化讨论。

A_l 其非零根表述为

$$\{e_i - e_j | 1 \leq i \leq l+1, 1 \leq j \leq l = 1, i \neq j\} \tag{27}$$

对于任意两个非零根 $e_i - e_j$ 和 $e_k - e_l$，其可能情况有三种：（1）$\{i,j\} \cap \{k,l\} = \emptyset$，这时显然两者正交，无需验证；（2）$\{i,j\} = \{k,l\}$，此时两者或相等或差一个负号，也 trivial；（3）$\{i,j\} \cap \{k,l\}$ 有一个元素。这时需要验证。

此时不妨设是 $j = l$,$i \neq k$。那么我们应该有

$$2\frac{(e_i - e_j, e_k - e_j)}{(e_i - e_j, e_i - e_j)} = 1 \tag{28}$$

从而确实为整数。这对应两根夹 $60°$ 角且等长的情况。

反射后：

$$(e_k - e_j) - 2\frac{(e_i - e_j, e_k - e_j)}{(e_i - e_j, e_i - e_j)}(e_i - e_j) = (e_k - e_j) - (e_i - e_j) = e_k - e_i \tag{29}$$

确实为根。至此验证了这是根系。

B_l 其非零根表述为

$$\{\pm e_i \pm e_j | 1 \leq i < j \leq l\} \cup \{\pm e_i | 1 \leq i \leq l\} \tag{30}$$

对于 $\pm e_i$ 和 $\pm e_j$，显然或正交或平行，trivial。

对于 $\pm e_i \pm e_j$ 和 $\pm e_k \pm e_l$，可类似上面对 A_l 的讨论来进行，得到两根或正交、或平行、或夹 $60°/120°$ 角且等长，并且反射后仍是这一形式。

对于 $\pm e_i \pm e_j$ 和 e_k，易见如果 $k \notin \{i,j\}$ 则二者正交，无需验证。从而不妨设 $k = j$，且取第一个根正负号使得 e_j 前符号为正。这样有

$$2\frac{(\pm e_i + e_j, e_j)}{(e_j, e_j)} = 2 \tag{31}$$

$$2\frac{(\pm e_i + e_j, e_j)}{(\pm e_i + e_j, \pm e_i + e_j)} = 1 \tag{32}$$

从而两者夹 $45°$ 且长度比为 $\sqrt{2}$。反射后得到：

$$(\pm e_i + e_j) - 2\frac{(\pm e_i + e_j, e_j)}{(e_j, e_j)}e_j = \pm e_i - e_j \tag{33}$$

$$e_j - 2\frac{(\pm e_i + e_j, e_j)}{(\pm e_i + e_j, \pm e_i + e_j)}(\pm e_i + e_j) = \mp e_i \tag{34}$$

都仍然是根。

C_l 类似 B_l 情况。此时最后一部分改为：

$$2\frac{(\pm e_i+e_j,2e_j)}{(2e_j,2e_j)}=1 \tag{35}$$

$$2\frac{(\pm e_i+e_j,2e_j)}{(\pm e_i+e_j,\pm e_i+e_j)}=2 \tag{36}$$

$$(\pm e_i+e_j)-2\frac{(\pm e_i+e_j,2e_j)}{(2e_j,2e_j)}2e_j=\pm e_i-e_j \tag{37}$$

$$2e_j-2\frac{(\pm e_i+e_j,2e_j)}{(\pm e_i+e_j,\pm e_i+e_j)}(\pm e_i+e_j)=\mp 2e_i \tag{38}$$

D_l 事实上已经作为 B_l 的一部分验证了。

G_2 e_i-e_j 部分已经验证。

对于 e_i-e_j 和 $\pm(2e_k-e_l-e_m)$，如果 $\{i,j\}=\{l,m\}$，俺么易见两者正交。否则，不妨取 $i=k,j=l$，且正负号取正。

则有

$$(e_i-e_j,2e_i-e_j-e_m)=3 \tag{39}$$

$$(e_i-e_j,e_i-e_j)=2 \tag{40}$$

$$(2e_i-e_j-e_m,2e_i-e_j-e_m)=6 \tag{41}$$

从而对应着两根夹 30° 角且长度比为 $\sqrt{3}$ 的情况。反射后有：

$$e_i-e_j-2\frac{(e_i-e_j,2e_i-e_j-e_m)}{(2e_i-e_j-e_m,2e_i-e_j-e_m)}(2e_i-e_j-e_m)=e_m-e_i \tag{42}$$

$$2e_i-e_j-e_m-2\frac{(e_i-e_j,2e_i-e_j-e_m)}{(e_i-e_j,e_i-e_j)}(e_i-e_j)=2e_j-e_i-e_m \tag{43}$$

仍然为根。

对于剩下的情况，由对称性考虑，只要验证 $2e_i-e_j-e_k$ 与 $e_i-2e_j+e_k$ 即可。两者模方均为 6，内积：

$$(2e_i-e_j-e_k,e_i-2e_j+e_k)=3 \tag{44}$$

从而对应长度相等且夹 60° 角的情况。反射后有：

$$2e_i-e_j-e_k-2\frac{(2e_i-e_j-e_k,e_i-2e_j+e_k)}{(e_i-2e_j+e_k,e_i-2e_j+e_k)}(e_i-2e_j+e_k)=e_i+e_j-2e_k \tag{45}$$

确实为根。

F_4 B_4 部分已经验证。

对于

$$\frac{1}{2}(xe_1+ye_2+ze_3+we_4) \tag{46}$$

其中 $x,y,z,w=\pm 1$，考虑两个这样的根的内积：

$$\left(\frac{1}{2}(xe_1+ye_2+ze_3+we_4),\frac{1}{2}(ae_1+be_2+ce_3+de_4)\right)=\frac{1}{4}(ax+by+cz+dw) \tag{47}$$

其中每一项都为 1 或 -1，故最终结果为 $\pm 1,\pm\frac{1}{2},0$。取正负号使得内积为正。如果为 1 则两根相等，为 0 则正交，均平凡。考虑 $\frac{1}{2}$ 的情况。此时两根满足等长且夹 $60°$ 角。反射得到：

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(xe_1+ye_2+ze_3+we_4)-2\frac{\left(\frac{1}{2}(xe_1+ye_2+ze_3+we_4),\frac{1}{2}(ae_1+be_2+ce_3+de_4)\right)}{\left(\frac{1}{2}(ae_1+be_2+ce_3+de_4),\frac{1}{2}(ae_1+be_2+ce_3+de_4)\right)}\\ \times\frac{1}{2}(ae_1+be_2+ce_3+de_4)=\frac{1}{2}[(x-a)e_1+(y-b)e_2+(z-c)e_3+(w-d)e_4]\end{aligned} \tag{48}$$

注意到内积为 $\frac{1}{2}$ 意味着两根的四个分量中应该三个相等一个反号，那么最终结果中应该只有一项非零，且绝对值为 1，这在根系内。

对于 e_i 和 $\frac{1}{2}(x_1e_1+x_2e_2+x_3e_3+x_4e_4)$，有

$$\left(e_i,\frac{1}{2}(x_1e_1+x_2e_2+x_3e_3+x_4e_4)\right)=\frac{1}{2}x_i \tag{49}$$

故两者夹 $60°$ 角且等长。反射有：

$$\begin{aligned}e_i-2\frac{\left(e_i,\frac{1}{2}(x_1e_1+x_2e_2+x_3e_3+x_4e_4)\right)}{\left(\frac{1}{2}(x_1e_1+x_2e_2+x_3e_3+x_4e_4),\frac{1}{2}(x_1e_1+x_2e_2+x_3e_3+x_4e_4)\right)}\\ \times\frac{1}{2}(x_1e_1+x_2e_2+x_3e_3+x_4e_4)=-x_i\frac{1}{2}(x_1e_1+x_2e_2+x_3e_3+x_4e_4)+x_i^2e_i\end{aligned} \tag{50}$$

最后一项应该使得括号内 e_i 一项反号，从而仍在根系内；

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(x_1e_1+x_2e_2+x_3e_3+x_4e_4)-2\frac{\left(e_i,\frac{1}{2}(x_1e_1+x_2e_2+x_3e_3+x_4e_4)\right)}{(e_i,e_i)}e_i\\ =\frac{1}{2}(x_1e_1+x_2e_2+x_3e_3+x_4e_4-2x_ie_i)\end{aligned} \tag{51}$$

仍在根系内。

对于 $e_i\pm e_j$ 和 $\frac{1}{2}(x_1e_1+x_2e_2+x_3e_3+x_4e_4)$，有

$$\left(e_i\pm e_j,\frac{1}{2}(x_1e_1+x_2e_2+x_3e_3+x_4e_4)\right)=\frac{1}{2}(x_i\pm x_j) \tag{52}$$

内积为 0 或 ± 1，从而两者夹 $45°$ 且长度比为 $\sqrt{2}$。不妨设 $x_i\pm x_j=1$。反射有：

$$\begin{aligned}&e_i\pm e_j-2\frac{\left(e_i\pm e_j,\frac{1}{2}(x_1e_1+x_2e_2+x_3e_3+x_4e_4)\right)}{\left(\frac{1}{2}(x_1e_1+x_2e_2+x_3e_3+x_4e_4),\frac{1}{2}(x_1e_1+x_2e_2+x_3e_3+x_4e_4)\right)}\\ &\times\frac{1}{2}(x_1e_1+x_2e_2+x_3e_3+x_4e_4)=-\frac{1}{2}(x_1e_1+x_2e_2+x_3e_3+x_4e_4-2(x_i\pm x_j)e_i-2(x_j\mp x_i)e_j)\end{aligned} \tag{53}$$

其中最后一步利用了 $x_i\pm e_j=1$。可以看到这仍在根系内。

E_6 A_5 部分已经验证。A_5 部分与 $\pm\sqrt{2}e_7$ 正交。

考虑 $e_i - e_j$ 和 $\frac{1}{2}x_k e_k \pm \frac{e_7}{\sqrt{2}}$，已经用爱因斯坦求和约定对 k 求和。两者内积为 $\frac{1}{2}(x_i - x_j)$，从而为 0 或 1。不妨设 $x_i = 1, x_j = -1$。前者长度均为 $\sqrt{2}$，此时内积为 1，从而为等长且夹 $60°$ 角。反射有：

$$\left[\frac{1}{2}x_k e_k \pm \frac{e_7}{\sqrt{2}}\right] - (e_i - e_j) \tag{54}$$

从而 x_i 和 x_j 分别反号，前三项仍为三正三负，从而仍在根系内。

对于 $\frac{1}{2}x_k e_k \pm \frac{e_7}{\sqrt{2}}$ 和 $\sqrt{2}e_7$，容易看出内积为 ±1，从而同样为等长且夹 $60°$，反射为两者相减，容易看出等价于第一个根中的 e_7 项反号。

对于 $\frac{1}{2}x_k e_k + \frac{e_7}{\sqrt{2}}$ 和 $\frac{1}{2}y_k e_k \pm \frac{e_7}{\sqrt{2}}$，其内积为 $\frac{1}{4}x_k y_k \pm \frac{1}{2}$。$x_k y_k$ 的可能取值为 $\pm6, \pm2$（考虑两边的“三正”的重合数）。于是这一内积的可能取值为 $\pm2, \pm1, 0$。只有 ±1 是非平凡的，此时对应两根等长且夹 $60°$。不妨考虑内积为 1 情况。此时有两种可能，一是 $x_k y_k = 6, \pm = -$，二是 $x_k y_k = 2, \pm = +$。前者对应 $x_k = y_k$，从而两根反射即相减得到 $\sqrt{2}e_7$；后者对应 $x_k - y_k$ 得到一项正一项负、e_7 项消去，得到 $e_i - e_j$。均在根系内。

E_7 A_7 部分已经验证。A_7 和 $\frac{1}{2}x_k e_k$ 部分，类似上面的讨论，非平凡情况为等长夹 $60°$ 角，反射对应 x_k 中对应的 i, j 项反号。

对于 $\frac{1}{2}x_k e_k$ 和 $\frac{1}{2}y_k e_k$，x_k 和 y_k 中的“四正”重合数应该为 $4, 3, 2, 1, 0$，分别对应内积 $2, 1, 0, -1, -2$。非平凡情况为内积为 ±1，对应等长且夹 $60°$。不妨考虑内积为 1，即“四正“中只有一个不一样，则反射应该得到 $e_i - e_j$ 形式，i, j 分别是多出来的那个“正”和“负”。

E_8 D_8 部分已经验证。

对于 $e_i \pm e_j$ 和 $\frac{1}{2}x_k e_k$，其内积为 $\frac{1}{2}(x_i \pm x_j)$。非平凡情况对应于等长且夹 $60°$。不妨取 $x_i = 1, x_j = \pm1$。此时类似上面讨论知道，反射后得到

$$\frac{1}{2}(x_k e_k - (x_i \pm x_j)(e_i \pm e_j)) \tag{55}$$

则新的 e_i 前系数应该为 $\pm x_j = -1$，新的 e_j 前的系数应该为 $\mp x_i = \mp1$。从而正负数或者不变，或者变化 2，于是仍在根系内。

对于 $\frac{1}{2}x_k e_k$ 和 $\frac{1}{2}y_k e_k$，其内积为 $\frac{1}{4}x_k y_k$。如果其中一个是全正、一个是四正四负，显然正交。如果一个全正、一个六正二负，那么容易知道内积为 1，对应等长且夹 $60°$，反射等价于相减，最终应该得到那两个“负”之和，从而为 $e_i + e_j$ 形式。如果一个六正二负、一个四正四负，那么内积非零（不妨设为正）当且仅当“二负”在“四负”中。此时内积为 1。相减应该得到那“二负”，同样为 $e_i + e_j$ 形式。

5.2 题 2

$SU(2)$ 可以用来描述空间旋转对称性即角动量。其根图可以用来确定表示可能的权系，进而确定表示（即角动量态）只能是 $l =$ 半整数型。

例外李代数解决物理问题

6 第二章第四节

6.1 题 1

确定根系的方法如下。先写出其 Cartan 矩阵 A。对于某一个根 $\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2$，设

$$q_i=\max\{q|\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2-q\alpha_i\in\Sigma\}, i=1,2 \tag{56}$$

计算

$$p_i=q_i-A_{ij}k_j \tag{57}$$

若 $p_i>0$，则 $\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\alpha_i$ 也是根，反之则不是。由此可从一阶根逐阶向上递推。

A_4 其 Cartan 矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}2&-1&0&0\\-1&2&-1&0\\0&-1&2&-1\\0&0&-1&2\end{pmatrix} \tag{58}$$

构造如表 1，其中每一个中括号中，前一组数代表 λ，后一组数代表 q。

一阶	[(1,0,0,0),(2,0,0,0)],[(0,1,0,0),(0,2,0,0)],[(0,0,1,0),(0,0,2,0)],[(0,0,0,1),(0,0,0,2)]
二阶	[(1,1,0,0),(1,1,0,0)],[(0,1,1,0),(0,1,1,0)],[(0,0,1,1),(0,0,1,1)]
三阶	[(1,1,1,0),(1,0,1,0)],[(0,1,1,1),(0,1,0,1)]
四阶	[(1,1,1,1),(1,0,0,1)]

表 1: A_4 李代数的正根系构造

B_4 其 Cartan 矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}2&-1&0&0\\-1&2&-1&0\\0&-1&2&-1\\0&0&-2&2\end{pmatrix} \tag{59}$$

构造如表 2，其中每一个中括号中，前一组数代表 λ，后一组数代表 q。

一阶	[(1,0,0,0),(2,0,0,0)],[(0,1,0,0),(0,2,0,0)],[(0,0,1,0),(0,0,2,0)],[(0,0,0,1),(0,0,0,2)]
二阶	[(1,1,0,0),(1,1,0,0)],[(0,1,1,0),(0,1,1,0)],[(0,0,1,1),(0,0,1,1)]
三阶	[(1,1,1,0),(1,0,1,0)],[(0,1,1,1),(0,1,0,1)],[(0,0,1,2),(0,0,0,2)]
四阶	[(1,1,1,1),(1,0,0,1)],[(0,1,1,2),(0,1,0,2)]
五阶	[(1,1,1,2),(1,0,0,2)],[(0,1,2,2),(0,0,1,0)]
六阶	[(1,1,2,2),(1,0,1,0)]
七阶	[(1,2,2,2),(0,1,0,0)]

表 2: B_4 李代数的正根系构造

C_4 其 Cartan 矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \tag{60}$$

构造如表 3，其中每一个中括号中，前一组数代表 λ，后一组数代表 q。

一阶	[(1,0,0,0),(2,0,0,0)],[(0,1,0,0),(0,2,0,0)],[(0,0,1,0),(0,0,2,0)],[(0,0,0,1),(0,0,0,2)],
二阶	[(1,1,0,0),(1,1,0,0)],[(0,1,1,0),(0,1,1,0)],[(0,0,1,1),(0,0,1,1)],
三阶	[(1,1,1,0),(1,0,1,0)],[(0,1,1,1),(0,1,0,1)],[(0,0,2,1),(0,0,2,0)],
四阶	[(1,1,1,1),(1,0,0,1)],[(0,1,2,1),(0,1,1,0)],
五阶	[(1,1,2,1),(1,0,1,0)],[(0,2,2,1),(0,2,0,0)],
六阶	[(1,2,2,1),(1,1,0,0)],
七阶	[(2,2,2,1),(2,0,0,0)],

表 3: C_4 李代数的正根系构造

D_4 其 Cartan 矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \tag{61}$$

构造如表 4，其中每一个中括号中，前一组数代表 λ，后一组数代表 q。

一阶	[(1,0,0,0),(2,0,0,0)],[(0,1,0,0),(0,2,0,0)],[(0,0,1,0),(0,0,2,0)],[(0,0,0,1),(0,0,0,2)],
二阶	[(1,1,0,0),(1,1,0,0)],[(0,1,1,0),(0,1,1,0)],[(0,1,0,1),(0,1,0,1)],
三阶	[(1,1,1,0),(1,0,1,0)],[(1,1,0,1),(1,0,0,1)],[(0,1,1,1),(0,0,1,1)],
四阶	[(1,1,1,1),(1,0,1,1)],
五阶	[(1,2,1,1),(0,1,0,0)],

表 4: D_4 李代数的正根系构造

F_4 其 Cartan 矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \tag{62}$$

构造如表 5，其中每一个中括号中，前一组数代表 λ，后一组数代表 q。

一阶	[(1,0,0,0),(2,0,0,0)],[(0,1,0,0),(0,2,0,0)],[(0,0,1,0),(0,0,2,0)],[(0,0,0,1),(0,0,0,2)],
二阶	[(1,1,0,0),(1,1,0,0)],[(0,1,1,0),(0,1,1,0)],[(0,0,1,1),(0,0,1,1)],
三阶	[(1,1,1,0),(1,0,1,0)],[(0,1,2,0),(0,0,2,0)],[(0,1,1,1),(0,1,0,1)],
四阶	[(1,1,2,0),(1,0,2,0)],[(1,1,1,1),(1,0,0,1)],[(0,1,2,1),(0,0,1,1)],
五阶	[(1,2,2,0),(0,1,0,0)],[(1,1,2,1),(1,0,1,1)],[(0,1,2,2),(0,0,0,2)],
六阶	[(1,2,2,1),(0,1,0,1)],[(1,1,2,2),(1,0,0,2)],
七阶	[(1,2,3,1),(0,0,1,0)],[(1,2,2,2),(0,1,0,2)],
八阶	[(1,2,3,2),(0,0,1,1)],
九阶	[(1,2,4,2),(0,0,2,0)],
十阶	[(1,3,4,2),(0,1,0,0)],
十一阶	[(2,3,4,2),(1,0,0,0)],

表 5: F_4 李代数的正根系构造

6.2 题 2

对于 A_l，正根系应该为 $e_i - e_j, 1 \leq i < j \leq l+1$。那么，其中，$e_i$ 正地出现 $l+1-i$ 次，负地出现 $i-1$ 次。从而正根和之半应该等于

$$\begin{aligned}\delta = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{l+1}(l+2-2i)e_i = \sum_{i=1}^{l+1}\left(\frac{l}{2}+1-i\right)\left(\sum_{j=i}^{l}\alpha_j + e_{l+1}\right) \\ = \sum_{j=1}^{l}\sum_{i=1}^{j}\left(\frac{l}{2}+1-i\right)\alpha_j = \sum_{j=1}^{l}\frac{1}{2}(l+1-j)j\alpha_j \end{aligned}\tag{63}$$

对于 B_l，正根系应该为 $e_i \pm e_j, 1 \leq i < j \leq l$ 以及 $e_i, 1 \leq i \leq l$。于是，e_i 出现次数应该等于 1 加上 $e_i \pm e_j$ 这样项的个数，也就是 $1 + 2(l-i) = 2l+1-2i$。从而

$$\delta = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{l}(2l+1-2i)e_i = \sum_{i=1}^{l}\left(l+\frac{1}{2}-i\right)\sum_{j=i}^{l}\alpha_j = \sum_{j=1}^{l}j\left(l-\frac{j}{2}\right)\alpha_j \tag{64}$$

对于 C_l，正根系应该为 $e_i \pm e_j, 1 \leq i < j \leq l$ 以及 $2e_i, 1 \leq i \leq l$。于是，e_i 出现次数应该等于 2 加上 $e_i \pm e_j$ 这样项的个数，也就是 $2 + 2(l-i) = 2l+2-2i$。从而

$$\begin{aligned}\delta = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{l}(2l+2-2i)e_i = \sum_{i=1}^{l}(l+1-i)\left(\sum_{j=i}^{l-1}\alpha_j + \frac{1}{2}\alpha_l\right) \\ = \sum_{j=1}^{l-1}j\left(l-\frac{j-1}{2}\right)\alpha_j + \frac{l(l+1)}{4}\alpha_l\end{aligned}\tag{65}$$

对于 D_l，正根系应该为 $e_i \pm e_j, 1 \leq i < j \leq l$，从而直接有

$$\begin{aligned}\delta = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{l}(2l-2i)e_i = \sum_{i=1}^{l-1}(l-i)\left(\sum_{j=i}^{l-2}\alpha_j + \frac{1}{2}(\alpha_{l-1}+\alpha_l)\right) \\ = \sum_{j=1}^{l-2}j\left(l-\frac{j+1}{2}\right)\alpha_j + \frac{l(l-1)}{4}(\alpha_{l-1}+\alpha_l)\end{aligned}\tag{66}$$

7 第三章第一节

对于矩阵实现，我们理应验证全部的对易关系：

$$[H_i, H_j] = 0 \tag{67}$$

$$[H_i, E_\alpha] = \alpha_i E_\alpha \tag{68}$$

$$[E_\alpha, E_{-\alpha}] = \alpha^i H_i \tag{69}$$

$$[E_\alpha, E_\beta] = N_{\alpha\beta} E_{\alpha+\beta} \tag{70}$$

注意到给出的 H 已经是同时对角化的，从而(67)自动满足。(68)是需要验证的，且需要验证各个 α_i 构成的根向量确实满足对应根向量应该满足的条件。注意到(69)和(70)事实上是可以从(68)推出的（其中的待定系数取决于具体选择，从而没有“验证”一说）。从而事实上我们只需要验证(68)给出正确的根系结构。

7.1 题 1

A_l 矩阵实现为

$$H_j = \frac{1}{\sqrt{2j(j+1)}}(E_{11} + E_{22} + \cdots + E_{jj} - jE_{(j+1)(j+1)}) \tag{71}$$

$$E_{e_i - e_j} = E_{ij} \tag{72}$$

各个 H 已经被同时对角化，从而相互对易。

$$[H_k, E_{e_i-e_j}] = [(H_k)_i - (H_k)_j]E_{e_i-e_j} = E_{e_i-e_j} \times \begin{cases} 0 & j \le k \vee i \ge k+2 \\ \frac{1}{\sqrt{2k(k+1)}} & i < k+1 < j \\ \sqrt{\frac{k+1}{2k}} & j = k+1 \\ -\sqrt{\frac{k}{2(k+1)}} & i = k+1 \end{cases} \tag{73}$$

其中假设了 $i < j$。这给出 $e_i - e_j$ 对应的权向量：

$$(e_i - e_j)_k = (H_k)_i - (H_k)_j \tag{74}$$

如果定义

$$(v_i)_k = (H_k)_i \tag{75}$$

即

$$v_i = \left(\underbrace{0, \ldots, 0}_{\times i-2}, -\sqrt{\frac{i-1}{2i}}, \frac{1}{\sqrt{2i(i+1)}}, \frac{1}{\sqrt{2(i+1)(i+2)}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{2l(l+1)}}\right) \tag{76}$$

注意到有

$$(v_i, v_i) = \frac{i-1}{2i} + \sum_{j=i}^{l} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{l+1}\right) \tag{77}$$

$$(v_i, v_j) = -\sqrt{\frac{j-1}{2j}}\frac{1}{\sqrt{2j(j-1)}} + \sum_{k=j}^{l}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = -\frac{1}{2(l+1)} \tag{78}$$

即

$$(v_i, v_j) = \frac{1}{2}\left(\delta_{ij} - \frac{1}{l+1}\right) \tag{79}$$

从而有

$$\begin{aligned}(v_i - v_j, v_k - v_l) = \frac{1}{2}\left[\left(\delta_{ik} - \frac{1}{l+1}\right) + \left(\delta_{jl} - \frac{1}{l+1}\right) - \left(\delta_{il} - \frac{1}{l+1}\right) - \left(\delta_{jk} - \frac{1}{l+1}\right)\right] \\ = \frac{1}{2}(\delta_{ik} + \delta_{jl} - \delta_{il} - \delta_{jk})\end{aligned} \tag{80}$$

对比

$$(e_i - e_j, e_k - e_l) = \delta_{ik} + \delta_{jl} - \delta_{il} - \delta_{jk} \tag{81}$$

可以知道这确实给出正确的根系结构。

其它对易关系计算为：

$$[E_{e_i-e_j}, E_{e_k-e_l}] = [E_{ij}, E_{kl}] = \delta_{jk}E_{il} - \delta_{il}E_{kj} \tag{82}$$

于是有（以下出现的不同字母默认取不同的值）：

$$[E_{e_i-e_j}, E_{e_k-e_l}] = 0 \tag{83}$$

$$[E_{e_i-e_j}, E_{e_j-e_k}] = E_{e_i-e_k} \tag{84}$$

$$[E_{e_i-e_j}, E_{e_k-e_i}] = -E_{e_k-e_j} \tag{85}$$

$$[E_{e_i-e_j}, E_{e_j-e_i}] = E_{ii} - E_{jj} \tag{86}$$

注意到

$$\sqrt{2j(j+1)}H_j - \sqrt{2j(j-1)}H_{j-1} = -jE_{(j+1)(j+1)} + jE_{jj} \tag{87}$$

即

$$E_{(j+1)(j+1)} - E_{jj} = \sqrt{\frac{2(j-1)}{j}}H_{j-1} - \sqrt{\frac{2(j+1)}{j}}H_j \tag{88}$$

从而

$$\begin{aligned}E_{ii} - E_{jj} &= \sum_{k=j}^{i-1}\left[\sqrt{\frac{2(k-1)}{k}}H_{k-1} - \sqrt{\frac{2(k+1)}{k}}H_k\right] \\ &= \sqrt{\frac{2(j-1)}{j}}H_{j-1} - \sqrt{\frac{2i}{i-1}}H_{i-1} - \sum_{k=j}^{i-2}\sqrt{\frac{2}{k(k+1)}}H_k\end{aligned} \tag{89}$$

亦即

$$[E_{e_i-e_j}, E_{e_j-e_i}] = \sqrt{\frac{2(j-1)}{j}}H_{j-1} - \sqrt{\frac{2i}{i-1}}H_{i-1} - \sum_{k=j}^{i-2}\sqrt{\frac{2}{k(k+1)}}H_k, i > j \tag{90}$$

7.2 题 2

B_n 矩阵实现为：

$$H_j = iI_{2j(2j-1)} \tag{91}$$

$$E_{e_j \pm e_k} = \frac{1}{2}\left[i(I_{(2k-1)(2j-1)} \mp I_{(2k)(2j)}) - (I_{(2k-1)(2j)} \pm I_{(2k)(2j-1)})\right] \tag{92}$$

$$E_{-(e_j \pm e_k)} = \left(E_{e_j \pm e_k}\right)^\dagger = \frac{1}{2}\left[i(I_{(2k-1)(2j-1)} \mp I_{(2k)(2j)}) + (I_{(2k-1)(2j)} \pm I_{(2k)(2j-1)})\right] \tag{93}$$

上两式可以统一写为

$$E_{x_1 e_j + x_2 e_k} = \frac{1}{2}\left[i(I_{(2k-1)(2j-1)} - x_1 x_2 I_{(2k)(2j)}) - x_1 I_{(2k-1)(2j)} - x_2 I_{(2k)(2j-1)}\right] \tag{94}$$

其中 $x_1, x_2 = \pm 1$。另有

$$E_{\pm e_j} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[iI_{(2n+1)(2j)} \pm I_{(2n+1)(2j-1)}\right] \tag{95}$$

利用

$$[I_{ij}, I_{kl}] = \delta_{il} I_{jk} + \delta_{jk} I_{il} - \delta_{ik} I_{jl} - \delta_{jl} I_{ik} \tag{96}$$

可以得到

$$\begin{aligned}
[H_j, E_{x_1 e_k + x_2 e_l}] &= \left[iI_{2j(2j-1)}, \frac{1}{2}\left[i(I_{(2l-1)(2k-1)} - x_1 x_2 I_{(2l)(2k)}) - x_1 I_{(2l-1)(2k)} - x_2 I_{(2l)(2k-1)}\right]\right] \\
&= \frac{1}{2}\Big[\delta_{jk}\big(I_{(2j)(2l-1)} + x_1 x_2 I_{(2j-1)(2l)} - ix_1 I_{(2j-1)(2l-1)} + ix_2 I_{(2j)(2l)}\big) + \\
&\quad \delta_{jl}\big(-I_{(2j)(2k-1)} - x_1 x_2 I_{(2j-1)(2k)} - ix_1 I_{(2j)(2k)} + ix_2 I_{(2j-1)(2k-1)}\big)\Big] \\
&= (\delta_{jk} x_1 + \delta_{jl} x_2) E_{x_1 e_k + x_2 e_l}
\end{aligned} \tag{97}$$

$$\begin{aligned}
[H_j, E_{\pm e_k}] &= \left[iI_{2j(2j-1)}, \frac{1}{\sqrt{2}}\left[iI_{(2n+1)(2k)} \pm I_{(2n+1)(2k-1)}\right]\right] \\
&= \delta_{jk}\frac{1}{\sqrt{2}}(-I_{(2j-1)(2n+1)} \mp iI_{(2j)(2n+1)}) = \pm \delta_{jk} E_{\pm e_k}
\end{aligned} \tag{98}$$

这就是 B_n 的根系。

其它对易关系有：

$$\begin{aligned}
[E_{x_1 e_j}, E_{x_2 e_k}] &= \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left[iI_{(2n+1)(2j)} + x_1 I_{(2n+1)(2j-1)}\right], \frac{1}{\sqrt{2}}\left[iI_{(2n+1)(2k)} + x_2 I_{(2n+1)(2k-1)}\right]\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[I_{(2j)(2k)} - x_1 x_2 I_{(2j-1)(2k-1)} - ix_1 I_{(2j-1)2k} - ix_2 I_{(2j)(2k-1)}\right]
\end{aligned} \tag{99}$$

注意到可能出现的 δ_{jk} 项对应的矩阵为 $I_{(2n+1)(2n+1)} = 0$。比较容易得到

$$[E_{x_1 e_j}, E_{x_2 e_k}] = \begin{cases} -ix_1 x_2 E_{x_1 e_j + x_2 e_k} & j \neq k \\ \frac{1}{2}(x_1 - x_2) H_j & j = k \end{cases} \tag{100}$$

$$
\begin{aligned}
[E_{\pm e_j}, E_{x_1e_k+x_2e_l}] = \Big[& \frac{1}{\sqrt{2}}\left[iI_{(2n+1)(2j)} \pm I_{(2n+1)(2j-1)}\right] \\
& , \frac{1}{2}\left[i(I_{(2l-1)(2k-1)} - x_1x_2I_{(2l)(2k)}) - x_1I_{(2l-1)(2k)} - x_2I_{(2l)(2k-1)}\right]\Big] \\
= \frac{1}{2\sqrt{2}}\Big[& \delta_{jk}(-x_1x_2I_{(2n+1)2l} \pm x_2I_{(2n+1)(2l)} + ix_1I_{(2n+1)(2l-1)} \mp iI_{(2n+1)(2l-1)}) \\
& + \delta_{jl}(x_1x_2I_{(2n+1)(2k)} \mp x_1I_{(2n+1)(2k)} - ix_2I_{(2n+1)(2k-1)} \pm iI_{(2n+1)(2k-1)})\Big] \\
& = \frac{x_1 \mp 1}{2}\delta_{jk}ix_2E_{x_2e_l} - \frac{x_2 \mp 1}{2}\delta_{jl}ix_1E_{x_1e_k}
\end{aligned} \tag{101}
$$

也就是

$$[E_{-x_1e_k}, E_{x_1x_k+x_2e_l}] = ix_1x_2E_{x_2e_l} \tag{102}$$

$$[E_{-x_2e_l}, E_{x_1x_k+x_2e_l}] = ix_1x_2E_{x_2e_l} = -ix_1x_2E_{x_1e_k} \tag{103}$$

$$[E_{x_1e_k}, E_{x_1x_k+x_2e_l}] = [E_{x_2e_l}, E_{x_1x_k+x_2e_l}] = 0 \tag{104}$$

$$
\begin{aligned}
& [E_{x_1e_j+x_2e_k}, E_{x_3e_l+x_4e_m}] \\
& = \Big[\frac{1}{2}\left[i(I_{(2k-1)(2j-1)} - x_1x_2I_{(2k)(2j)}) - x_1I_{(2k-1)(2j)} - x_2I_{(2k)(2j-1)}\right] \\
& \quad , \frac{1}{2}\left[i(I_{(2m-1)(2l-1)} - x_3x_4I_{(2m)(2l)}) - x_3I_{(2m-1)(2l)} - x_4I_{(2m)(2l-1)}\right]\Big] \\
& = \frac{1}{4}\Big\{\delta_{jl}\Big[I_{(2k-1)(2m-1)} + x_1x_2x_3x_4I_{(2k)(2m)} - x_1x_3I_{(2k-1)(2m-1)} - x_2x_4I_{(2k)(2m)} \\
& \quad + i\big(x_4I_{(2k-1)(2m)} - x_1x_2x_3I_{(2k)(2m-1)} - x_1x_3x_4I_{(2k-1)(2m)} + x_2I_{(2k)(2m-1)}\big)\Big] \\
& \quad + \delta_{km}\Big[I_{(2j-1)(2l-1)} + x_1x_2x_3x_4I_{(2j)(2l)} - x_1x_3I_{(2j)(2l)} - x_2x_4I_{(2j-1)(2l-1)} \\
& \quad + i\big(x_3I_{(2j-1)(2l)} - x_1x_2x_4I_{(2j)(2l-1)} - x_2x_3x_4I_{(2j-1)(2l)} + x_1I_{(2j)(2l-1)}\big)\Big] \\
& \quad + \delta_{kl}\Big[-I_{(2j-1)(2m-1)} - x_1x_2x_3x_4I_{(2j)(2m)} + x_1x_4I_{(2j)(2m)} + x_2x_3I_{(2j-1)(2m-1)} \\
& \quad + i\big(-x_4I_{(2j-1)(2m)} + x_1x_2x_3I_{(2j)(2m-1)} + x_2x_3x_4I_{(2j-1)(2m)} - x_1I_{(2j)(2m-1)}\big)\Big] \\
& \quad + \delta_{jm}\Big[-I_{(2k-1)(2l-1)} - x_1x_2x_3x_4I_{(2k)(2l)} + x_1x_4I_{(2k-1)(2l-1)} + x_2x_3I_{(2k)(2l)} \\
& \quad + i\big(-x_3I_{(2k-1)(2l)} + x_1x_2x_4I_{(2k)(2l-1)} + x_1x_3x_4I_{(2k-1)(2l)} - x_2I_{(2k)(2l-1)}\big)\Big]\Big\} \\
& = \delta_{jl}\frac{1-x_1x_3}{2}(-i)E_{x_4e_m+x_2e_k} + \delta_{km}\frac{1-x_2x_4}{2}(-i)E_{x_3e_l+x_1e_j} + \\
& \quad \delta_{kl}\frac{1-x_2x_3}{2}iE_{x_4e_m+x_1e_j} + \delta_{jm}\frac{1-x_1x_4}{2}iE_{x_3e_l+x_2e_k}
\end{aligned} \tag{105}
$$

注意到形式上有

$$E_{x_1e_j+x_2e_j}=\frac{1}{2}\left[i(I_{(2j-1)(2j-1)}-x_1x_2I_{(2j)(2j)})-x_1I_{(2j-1)(2j)}-x_2I_{(2j)(2j-1)}\right]$$
$$=-i\frac{x_1-x_2}{2}H_j \quad (106)$$

$$E_{x_1e_j+x_2e_k}=-E_{x_2e_k+x_1e_j}, j>k \quad (107)$$

从而我们得到（不同字母取不同值）：

$$[E_{x_1e_j+x_2e_k},E_{-x_1e_j+x_4e_m}]=-iE_{x_4e_m+x_2e_k} \quad (108)$$

$$[E_{x_1e_j+x_2e_k},E_{x_3e_l-x_2e_k}]=-iE_{x_3e_l+x_1e_j} \quad (109)$$

$$[E_{x_1e_j+x_2e_k},E_{-x_2e_k+x_4e_m}]=iE_{x_4e_m+x_1e_j} \quad (110)$$

$$[E_{x_1e_j+x_2e_k},E_{x_3e_l-x_1e_j}]=iE_{x_3e_l+x_2e_k} \quad (111)$$

$$[E_{x_1e_j+x_2e_k},E_{-x_1e_j-x_2e_k}]=x_1H_j+x_2H_k \quad (112)$$

其余的对易子为零。

7.3 题 3

C_n 的矩阵实现为

$$H_j=E_{jj}-E_{(n+j)(n+j)} \quad (113)$$

$$E_{e_j+e_k}=E_{j(n+k)}+E_{k(n+j)} \quad (114)$$

$$E_{-e_j-e_k}=E_{(n+k)j}+E_{(n+j)k} \quad (115)$$

$$E_{e_j-e_k}=E_{(n+k)(n+j)}-E_{jk} \quad (116)$$

$$E_{2e_j}=\sqrt{2}E_{j(n+j)} \quad (117)$$

$$E_{-2e_j}=\sqrt{2}E_{(n+j)j} \quad (118)$$

注意到形式上有

$$H_j=-E_{e_j-e_j} \quad (119)$$

可以计算对易关系：

$$[H_j,E_{e_k+e_l}]=[E_{jj}-E_{(n+j)(n+j)},E_{k(n+l)}+E_{l(n+k)}]$$
$$=(\delta_{jk}+\delta jl)(E_{k(n+l)}+E_{l(n+k)})=(\delta_{jk}+\delta_{jl})E_{e_k+e_l} \quad (120)$$

$$[H_j,E_{e_k-e_l}]=[E_{jj}-E_{(n+j)(n+j)},E_{(n+l)(n+k)}-E_{kl}]$$
$$=(\delta_{jk}-\delta jl)(E_{(n+l)(n+k)}-E_{kl})=(\delta_{jk}-\delta_{jl})E_{e_k-e_l} \quad (121)$$

$$[H_j,E_{2e_k}]=[E_{jj}-E_{(n+j)(n+j)},\sqrt{2}E_{k(n+k)}]=2\sqrt{2}\delta_{jk}E_{k(n+k)}=2\delta_{jk}E_{2e_k} \quad (122)$$

注意到有

$$E_{-\alpha}=E_\alpha^T,H_j=H_j^T \tag{123}$$

从而

$$[H_j,E_{-\alpha}]=[H_j^T,E_\alpha^T]=-[H_j,E_\alpha]^T=-(\alpha_jE_\alpha)^T=-\alpha_jE_{-\alpha} \tag{124}$$

至此验证了这确实给出 C_n 的根系。

其它的对易关系：

$$[E_{e_j+e_k},E_{e_l+e_m}]=0 \tag{125}$$

$$[E_{-e_j-e_k},E_{-e_l-e_m}]=0 \tag{126}$$

$$\begin{aligned}[E_{e_j-e_k},E_{e_l-e_m}]&=\delta kl(E_{jm}-E_{(n+m)(n+j)})+\delta_{jm}(E_{(n+k)(n+l)}-E_{lk})\\&=\delta_{jm}E_{e_l-e_k}-\delta_{kl}e_j-e_m\end{aligned} \tag{127}$$

其中当 $j=m,k=l$ 同时成立时有

$$[E_{e_j-e_k},E_{e_k-e_j}]=E_{e_k-e_k}-E_{e_j-e_j}=H_j-H_k \tag{128}$$

$$\begin{aligned}[E_{e_j+e_k},E_{-e_l-e_m}]=\delta_{kl}(E_{jm}-E_{(n+m)(n+j)})+\delta_{jm}(E_{kl}-E_{(n+l)(n+k)})\\+\delta_{jl}(E_{km}-E_{(n+m)(n+k)})+\delta_{km}(E_{jl}-E_{(n+l)(n+j)})\\=-\delta_{kl}E_{e_j-e_m}-\delta_{jm}E_{e_k-e_l}-\delta_{jl}E_{e_k-e_m}-\delta_{km}E_{e_j-e_l}\end{aligned} \tag{129}$$

其中当 $j=l,k=m$ 或 $j=m,k=l$ 时有

$$[E_{e_j+e_k},E_{-e_j-e_k}]=H_j+H_k \tag{130}$$

$$\begin{aligned}[E_{e_j+e_k},E_{e_l-e_m}]&=\delta_{km}E_{j(n+l)}+\delta_{jm}E_{l(n+k)}+\delta_{jm}E_{k(n+l)}+\delta_{km}E_{l(n+j)}\\&=\delta_{km}E_{e_j+e_l}+\delta_{jm}E_{e_k+e_l}\end{aligned} \tag{131}$$

$$\begin{aligned}[E_{-e_j-e_k},E_{e_l-e_m}]&=-\delta_{kl}E_{(n+m)j}-\delta_{jl}E_{(n+k)m}-\delta_{jl}E_{(n+m)k}+\delta_{kl}E_{(n+j)m}\\&=-\delta_{kl}E_{-e_j-e_m}+\delta_{jl}E_{-e_k-e_m}\end{aligned} \tag{132}$$

$$[E_{2e_j},E_{2e_k}]=0 \tag{133}$$

$$[E_{-2e_j},E_{-2e_k}]=0 \tag{134}$$

$$[E_{2e_j},E_{-2e_k}]=2\delta_{jk}(E_{jk}-E_{(n+k)(n+j)})=2\delta_{jk}H_j \tag{135}$$

$$[E_{e_j+e_k},E_{2e_l}]=0 \tag{136}$$

$$[E_{-e_j-e_k},E_{-2e_l}]=0 \tag{137}$$

$$\begin{aligned}[E_{e_j+e_k},E_{-2e_l}]&=\sqrt{2}(\delta_{kl}E_{jl}-\delta_{jl}E_{(n+l)(n+k)}+\delta_{jl}E_{kl}-\delta_{kl}E_{(n+l)(n+j)})\\&=-\delta_{jl}\sqrt{2}E_{e_k-e_l}-\delta_{kl}\sqrt{2}E_{e_j-e_l}\end{aligned} \tag{138}$$

$$[E_{-e_j-e_k}, E_{2e_l}] = \sqrt{2}(\delta_{jl}E_{(n+k)(n+l)} - \delta_{kl}E_{lj} + \delta_{kl}E_{(n+j)(n+l)} - \delta_{jl}E_{lk}) = \delta_{jl}\sqrt{2}E_{e_l-e_k} + \delta_{kl}\sqrt{2}E_{e_l-e_j} \quad (139)$$

$$[E_{e_j-e_k}, E_{2e_l}] = \sqrt{2}\delta_{kl}(-E_{j(n+l)} - E_{l(n+j)}) = -\sqrt{2}\delta_{kl}E_{e_j+e_l} \quad (140)$$

$$[E_{e_j-e_k}, E_{-2e_l}] = \sqrt{2}\delta_{jl}(E_{(n+k)l} + E_{(n+l)k}) = \sqrt{2}\delta_{kjl}E_{-e_k-e_l} \quad (141)$$

7.4 题 4

已经作为题 2 的一部分完成。

8 第三章第二节

8.1 题 1

已知

$$e_{a_m} = \sqrt{\frac{2}{(a_m, a_m)}}E_{a_m} \quad (142)$$

对于两个素根

$$[e_{a_m}, e_{a_k}] = \frac{2}{|a_m||a_k|}[E_{a_m}, E_{a_k}] = \frac{2}{|a_m||a_k|}N_{a_m,a_k}E_{a_m+a_k} = \frac{\sqrt{2\left[|a_m|^2 + |a_k|^2 + 2(a_m, a_k)\right]}}{|a_m||a_k|}N_{a_m,a_k}e_{a_m+a_k} \quad (143)$$

注意到应该有

$$|N_{a_m,a_k}| = \sqrt{\frac{1}{2}p_m(q_m+1)(a_m, a_m)} = \sqrt{\frac{1}{2}p_k(q_k+1)(a_k, a_k)} \quad (144)$$

其中 p_m, q_m 为 a_k 的 a_m 根链的两向长度，p_k, q_k 为 a_m 的 a_k 根链的对应值。于是有

$$|N_{a_m,a_k}| = \sqrt{\frac{1}{2}|a_m||a_k|}\sqrt[4]{p_m(q_m+1)p_k(q_k+1)} \quad (145)$$

代入得到

$$[e_{a_m}, e_{a_k}] = \sqrt{\frac{|a_m|^2 + |a_k|^2 + 2(a_m, a_k)}{|a_m||a_k|}}\sqrt[4]{p_m(q_m+1)p_k(q_k+1)}e^{i\phi_{m,k}}e_{a_m+a_k} \quad (146)$$

其中

$$e^{i\phi_{m,k}} = \frac{N_{a_m,a_k}}{|N_{a_m,a_k}|} \quad (147)$$

9 第四章第四节

9.1 题 1

对于 A_l，有 $e_i = e_{l+1} + \sum_{j=i}^{l} \alpha_j$，从而

$$\sum_{i=1}^{l+1} m_i e_i = \sum_{i=1}^{l+1} \sum_{j=i}^{l} m_i \alpha_j + \sum_{i=1}^{l+1} m_i e_{l+1} = \sum_{j=1}^{l} \left(\sum_{i=1}^{j} m_i \right) \alpha_j \tag{148}$$

故

$$\Lambda_j = \sum_{i=1}^{j} m_i \tag{149}$$

且要求

$$\sum_{i=1}^{l+1} m_i = 0 \tag{150}$$

反推，有

$$m_i = \Lambda_i - \Lambda_{i-1} \tag{151}$$

其中形式上记 $\Lambda_0 = \Lambda_{l+1} = 0$。

对于 B_l，有 $e_i = \sum_{j=i}^{l} \alpha_j$，从而类似上面的推导得到

$$\Lambda_j = \sum_{i=1}^{j} m_i \tag{152}$$

$$m_i = \Lambda_i - \Lambda_{i-1} \tag{153}$$

对于 C_l，有 $e_i = \sum_{j=i}^{l-1} \alpha_j + \frac{1}{2}\alpha_l$，从而类似上面的推导得到

$$\Lambda_j = \frac{1}{1+\delta_{jl}} \sum_{i=1}^{j} m_i \tag{154}$$

$$m_i = (1+\delta_{il})\Lambda_i - \Lambda_{i-1} \tag{155}$$

对于 D_l，有

$$e_i = \begin{cases} \sum_{j=i}^{l-2} \alpha_j + \frac{1}{2}(\alpha_{l-1} + \alpha_l) & i \le l-1 \\ \frac{1}{2}(\alpha_l - \alpha_{l-1}) & i = l \end{cases} \tag{156}$$

于是有

$$\Lambda_j = \begin{cases} \sum_{i=1}^{j} m_i & j \le l-2 \\ \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{l-1} m_i - m_l \right) & j = l-1 \\ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{l} m_i & j = l \end{cases} \tag{157}$$

$$m_i = \begin{cases} \Lambda_i - \Lambda_{i-1} & i \le l-2 \\ \Lambda_l + \Lambda_{l-1} - \Lambda_{l-2} & i = l-1 \\ \Lambda_l - \Lambda_{l-1} & i = l \end{cases} \tag{158}$$

10 第五章第一节

10.1 题 1,2

10.2 题 3

$P_{\alpha,\zeta}(\xi)$ 为最大元小于等于 ζ 的 ξ 的 α 元划分的数量。

考察一个这样的划分。其最小元 ξ_α 应该至少为 1，至多为 $\left[\frac{\xi}{\alpha}\right]$。给定了 ξ_α 之后，令 $\eta_i = \xi_i - \xi_\alpha$，则 $\eta_1 \geq \eta_2 \geq \ldots \eta_{\alpha-1} \geq 0$，且 $\sum_{i=1}^{\alpha-1} \eta_i = \xi - \alpha\xi_\alpha$。从而各 η 构成 $\xi - \xi_\alpha$ 的一个划分，其最大元小于等于 $\zeta - \xi_\alpha$。注意由于某些 η 可能为零，所以应该把所有 1 到 $\alpha - 1$ 元的划分全部考虑进来，从而给定 $\xi_\alpha = k$ 之后的划分数为

$$\sum_{i=1}^{\alpha-1} P_{i,\zeta-k}(\xi - \alpha k) \tag{159}$$

再对所有可能的 k 取值求和：

$$P_{\alpha,\zeta}(\xi) = \sum_{k=1}^{\left[\frac{\xi}{\alpha}\right]} \sum_{i=1}^{\alpha-1} P_{i,\zeta-k}(\xi - \alpha k) \tag{160}$$

证毕。

10.3 题 4

由课件中公式，我们知道

$$\gamma_{\nu,L} = P_{\nu,2l}(\xi) + P_{\nu-1,2l}(\xi) - P_{\nu,2l}(\xi - 1) - P_{\nu-1,2l}(\xi - 1) \tag{161}$$

其中

$$\xi = \nu l - L \tag{162}$$

具体地，对于 $l = 2$，我们知道

$$\left[\frac{\nu l - L}{\nu}\right] = \begin{cases} 2 & , L = 0 \\ 1 & , 0 < L \leq \nu \\ 0 & , \nu < L \leq 2\nu \end{cases} \tag{163}$$

$$P_{\nu,4}(2\nu - L) = \sum_{i=1}^{\nu-1} P_{i,3}(\nu - L) = \sum_{i=1}^{\nu-L} P_{i,3}(\nu - L) \tag{164}$$

$$P_{\nu-1,4}(2\nu - L) = \sum_{i=1}^{\nu-2} P_{i,3}(\nu - L + 1) + P_{i,2}(2 - L) \tag{165}$$

同时注意到有

$$P_{i,1}(\xi) = \delta_{i\xi} \tag{166}$$

$$P_{i,2}(\xi) = \begin{cases} 1 & , i \leq \xi \leq 2i \\ 0 & , \text{others} \end{cases} \tag{167}$$

于是

$$P_{\alpha,3}(\xi)=\sum_{i=1}^{\alpha-1}P_{i,2}(\xi-\alpha)\Theta(\xi-\alpha)+\sum_{i=1}^{\alpha-1}P_{i,1}(\xi-2\alpha)\Theta(\xi-2\alpha) \tag{168}$$

其中 Θ 是 Heaviside 阶跃函数，其在 0 处的值视为 0。$P_{i,2}(\xi-\alpha)$ 等于 1，要求 $i\le\xi-\alpha\le 2i$，也就是 $\frac{\xi-\alpha}{2}\le i\le\xi-\alpha$，同时 $1\le i\le\alpha-1$。于是第一项的值等于

$$\begin{cases}\left[\frac{\xi-\alpha}{2}\right]+1 & ,\alpha<\xi\le 2\alpha-1\\ 2\alpha-\xi+\left[\frac{\xi-\alpha}{2}\right] & ,2\alpha\le\xi\le 3\alpha-1\end{cases} \tag{169}$$

第二项易见当

$$2\alpha+1\le\xi\le 3\alpha-1 \tag{170}$$

时为 1，否则为零。综上，我们有：

$$P_{\alpha,3}(\xi)=\begin{cases}0 & ,\xi\le\alpha\vee\xi>3\alpha\\ \left[\frac{\xi-\alpha}{2}\right]+1 & ,\alpha+1\le\xi\le 2\alpha-1\\ \left[\frac{\alpha}{2}\right] & ,\xi=2\alpha\\ 2\alpha+1-\xi+\left[\frac{\xi-\alpha}{2}\right] & ,2\alpha+1\le\xi\le 3\alpha-1\\ 1 & ,\xi=3\alpha\end{cases} \tag{171}$$