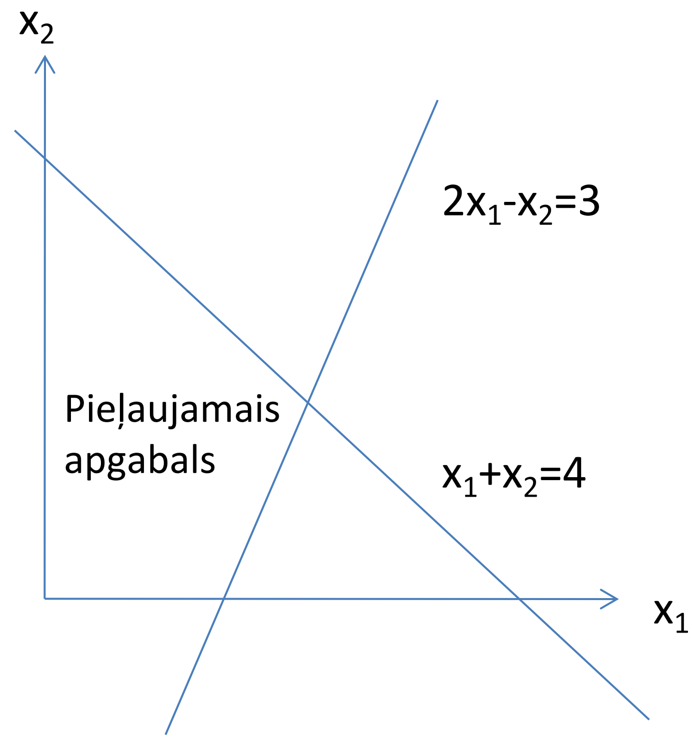
Lineārās programmas piemērs

- Maksimizēt - $\frac{x_1}{3} + x_2$
  pie nosacījumiem
  $2x_1 - x_2 \le 3$, $x_1 + x_2 \le 4$,
  $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$.



Sākumpunkts: $x_1=1$, $x_2=1$.

Standartforma

- Pārveido LP formā, kur ir tikai vienādības.
- Maksimizēt $-\frac{x_1}{3} + x_2$

  pie nosacījumiem

  $2x_1 - x_2 + x_3 = 3,$

  $x_1 + x_2 + x_4 = 4,$

  $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0.$

Sākumpunkts: $x_1=1$, $x_2=1$, $x_3=2$, $x_2=2$.

1. solis

- Koordinātu transformācija.
- $x_1=1+y_1$, $x_2=1+y_2$, $x_3=2+y_3$, $x_4=2+y_4$.
- $(1, 1, 2, 2) \to (0, 0, 0, 0)$.
- Jaunā programma:

  Maksimizēt $-\dfrac{y_1}{3}+y_2$ pie nosacījumiem

  - $2y_1-y_2 + y_3 = 0$,
  - $y_1+y_2 + y_4 = 0$,
  - $y_1 \geq -1$, $y_2 \geq -1$, $y_3 \geq -2$, $y_4 \geq -2$.

2. solis

- Koordinātu “saspiešana”.
- $y_1=z_1$, $y_2=2z_2$, $y_3=2z_3$, $y_4=2z_4$.
- Jaunā programma:

  Maksimizēt $-\frac{z_1}{3}+z_2$ pie nosacījumiem
  - $2z_1-z_2+2z_3=0$,
  - $z_1+z_2+2z_4=0$,
  - $z_1 \geq -1$, $z_2 \geq -1$, $z_3 \geq -1$, $z_4 \geq -1$.

Tekošais punkts – vienādā apkārtnē no visiem ierobežojumiem.

3. solis

Maksimizēt $-\frac{z_1}{3} + z_2$ pie nosacījumiem

- $2z_1 - z_2 + 2z_3 = 0$,
- $z_1 + z_2 + 2z_4 = 0$,
- $z_1 \geq -1$, $z_2 \geq -1$, $z_3 \geq -1$, $z_4 \geq -1$.

Sfēra, kas pieskaras visiem ierobežojumiem:

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 = 1$$

4. solis

- Teorēma Izteiksmes $a_1z_1+a_2z_2+\ldots$ maksimums uz sfēras $z_1^2 + z_2^2 + \ldots + z_n^2 = 1$

  tiek sasniegts virzienā

  $z_1=a_1$, $z_2=a_2$, ..., $z_n=a_n$.
- Izteiksme: $-\frac{z_1}{3} + z_2$
- Maksimums: $z_1=-1/3$, $z_2=1$, $z_3=0$, $z_4=0$.

5. solis

- Projicē $z_1=-1/3$, $z_2=1$, $z_3=0$, $z_4=0$ uz plakni, kur izpildās nosacījumi
  - $2z_1-z_2 + 2z_3 = 0$,
  - $z_1+z_2 + 2z_4 = 0$.
- Nosacījumi matricu formā:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Projekcijas formulas

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix}$$

- z – projicējamais vektors.

1. Atrod vektoru w, kuram $(B \cdot B^T)w = Bz$.

2. Ņem $p = z - B^T w$.

Piemērs

Jāatrisina: $(B \cdot B^T)w = Bz$.

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad B^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad B \cdot B^T = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}$$

$$Bz = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ -5/3 \end{pmatrix}$$

Jāatrisina: $\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 9 \end{pmatrix} w = \begin{pmatrix} 2/3 \\ -5/3 \end{pmatrix}$

Piemērs

Vajag: $\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 9 \end{pmatrix} w = \begin{pmatrix} 2/3 \\ -5/3 \end{pmatrix}$

$$6w_1 + w_2 = \frac{2}{3}$$

$$w_1 + 9w_2 = -\frac{5}{3}$$

Risinājums:

$$w_1 = \frac{23}{159}, w_2 = -\frac{32}{159}$$

Projekcija

- $p = z - B^T w$

$$p = \begin{pmatrix} -1/3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 23/159 \\ -32/159 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12/159 \\ 104/159 \\ -46/159 \\ 64/159 \end{pmatrix}$$

Virziens, kur mērķfunkcija pieaug visātrāk (ievērojot nosacījumus)

6. solis

- Taisne, kur mērķfunkcija pieaug visātrāk:
  - $z_1=-12\ t$;
  - $z_2=104\ t$;
  - $z_3=-46\ t$;
  - $z_4=64\ t$.
- Tā kā $z_3 \geq -1$, t maksimālā vērtība ir $t=1/46$.
- Ņem $t=0.96 \cdot (1/46)$.

7. solis

- Taisne, kur mērķfunkcija pieaug visātrāk:
  - $z_1 = -12 \dashv 0.96 \dashv (1/46)$;
  - $z_2 = 104 \dashv 0.96 \dashv (1/46)$;
  - $z_3 = -46 \dashv 0.96 \dashv (1/46)$;
  - $z_4 = 64 \dashv 0.96 \dashv (1/46)$.
- Sākotnējās koordinātēs:
  - $x_1=0.75$, $x_2=3.17$.

Rezultāts