# Lineārā programmēšana II

Tiks apskatīti lineārās programmēšanas uzdevumi un to atrisināšanas metodes. Lineārā programmēšana ir nozīmīga, jo daudzus reālās pasaules problēmas ir risināmas izmantojot lineāro programmēšanu un eksistē efektīvs algoritms, kurš atrisina jebkuru LP uzdevumu.

## Uzdevuma nostādne

Tiek meklēts maksimums funkcijai, ievērojot dotus ierobežojumus.
Vispārīgā veidā maksimizēšanas uzdevums tiek uzdots sekojoši:

$$\max\left(c_1x_1 + .. + c_nx_n\right)$$

ar nosacījumiem:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ \quad\quad\quad\quad\quad\quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leq b_1 \end{cases}$$

Piemēram:

$$\max(2x_1 + 3x_2)$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \leq 4 \\ x_1 + x_2 \leq 18 \\ x_2 \leq 10 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

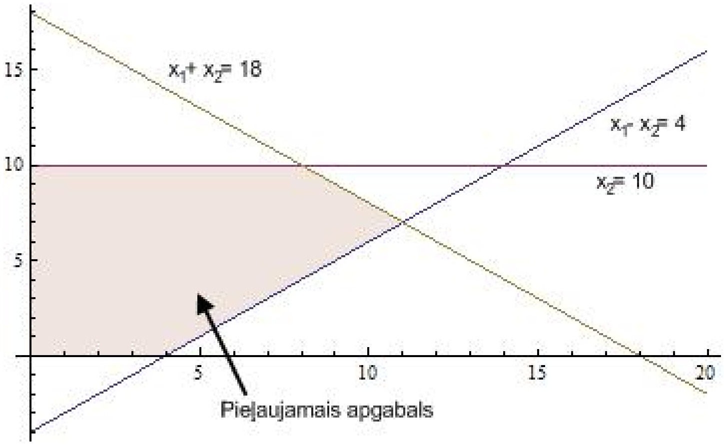
Jebkuru maksimizācijas uzdevumu var pārveidot par minimizācijas uzdevumu. Piemēram:

$$\max(2x_1 + 3x_2) = -\min(-2x_1 - 3x_2)$$

Turpmāk tiks apskatīts tikai maksimizēšanas uzdevums.

## Grafiskā reprezentācija

Lineārās programmēšanas uzdevumu var reprezentēt grafiski. Iepriekšējā piemērā doto uzdevumu var attēlot sekojoši:




No grafika viegli nolasīt uzdevuma atrisinājumu – tas ir punkts (8,10). Vairāku dimensiju gadījumā, var rasties grūtības uzkonstruēt attēlu.

Ērtības labad pieņemam, ka pieļaujamais apgabals ir galīgs. Pretējā gadījumā izteiksme var pieņemt patvaļīgi lielas vērtības. Strikti runājot, jāliek pārbaudes, ka apgabals ir galīgs.

No attēla var pamanīt divus nozīmīgus faktus:

### *Fakts 1*

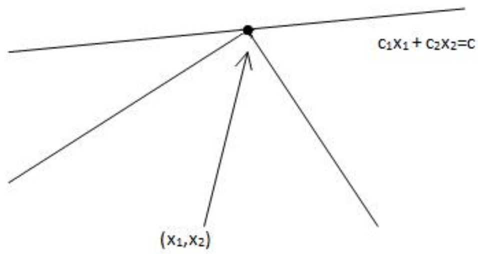
Mērķfunkcija savu maksimumu sasniedz pieļaujamā apgabala stūrī.

### *Fakts 2*

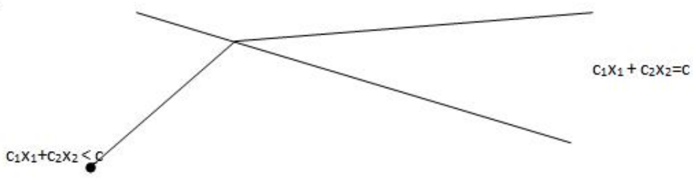
Ja kādā stūri $a_1x_1 + ... + a_nx_n$ nesasniedz maksimumu, tad vienā no blakus stūriem $a_1x_1 + ... + a_nx_n$ ir lielāka vērtība.

Divu dimensiju gadījumā par faktiem var pārliecināties, lietojot ģeometrisko interpretāciju. Piemēram, par 2. faktu. Apskatam divus gadījumus:

1)




2)




1. gadījumā iegūstam vienu no diviem rezultātiem

a) $c_1x_1+c_2x_2$ ✸ c visā pieļaujamajā apgabalā – stūris ir maksimums

b) $c_1x_1+c_2x_2 \geq c$ visā pieļaujamajā apgabalā – stūris ir minimums
2. gadījumā stūris nav nedz maksimums, nedz minimums un redzams, ka ir gan blakus stūris ar lielāku $c_1x_1+c_2x_2$ vērtību, gan blakus stūris ar mazāku vērtību.

## Simpleksmetode

Simpleksalgoritma pamatideja:

1. v - patvaļīgs stūris
2. kamēr v ir blakus stūris u, kurā $c_{11}x_1+...+c_nx_n$ lielāka, v=u.

Atkārtojam otro soli tik ilgi, kamēr nevar atrast blakus stūri, kurā mērķa funkcijai ir lielāka vērtība

Otrā fakta dēļ, ja tāda blakus stūra nav, tad mērķa funkcija sasniedz maksimālo vērtību visā pieļaujamajā apgabalā.

### Standartforma

Par uzdevuma standartformu sauc uzdevumu tādā formā, ka nosacījumi ir nevienādības formā $x_i \geq 0$ vai vienādības.
Piemēram, lai nosacījumu $x_1-2x_2$ ✹ 4 pārvērstu standartformā, ievieš papildus mainīgo $x_3 \geq 0$.
T.i.:

$x_1-2x_2$ ✹ 4 ◫ $x_1-2x_2+x_3=4$, $x_3 \geq 0$

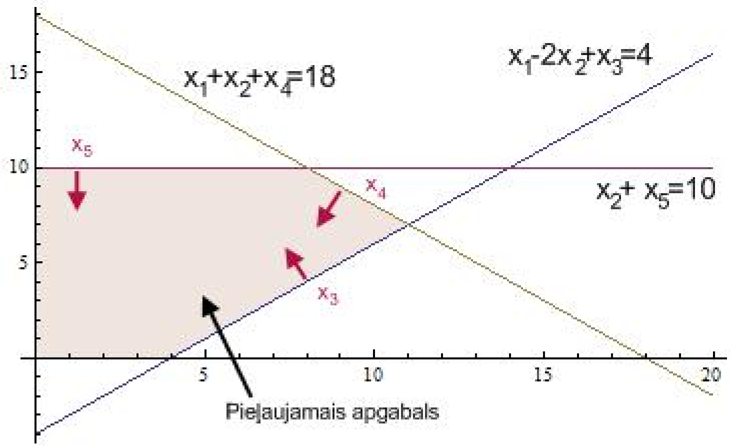
Tādā veidā var iegūt ekvivalentu uzdevumu, kurā vienīgās nevienādības ir formā $x_i \geq 0$.

Piemēram:

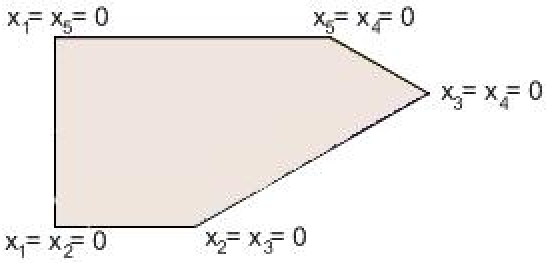
max $2x_1 + 3x_2$
$x_1-2x_2$ ✹ 4
$x_1+x_2$ ✹ 18
$x_2$✹10
$x_1,x_2 \geq 0$

Pārveidojot iegūst:

max $2x_1+3x_2$
$x_1-2x_2+x_3=4$
$x_1+x_2+x_4=18$
$x_2+x_5=10$
$x_1,x_2,x_3,...,x_5 \geq 0$




Stūris - punkts, kur krustojas 2 taisnes, kas atbilst nosacījumam = punkts, kurā divi no $x_1,...,x_n= 0$. No iepriekšējā piemēra.




Plaknes gadījumā stūri var aprakstīt, pasakot kuri divi mainīgie ir vienādi ar 0. Vairāku dimensiju gadījumā ir līdzīgi. Trīs dimensiju gadījumā stūris ir punkts, kurā 3 mainīgie ir 0.

Ja ir k dimensijas (max $a_1x_1+ ... + a_kx_k$) stūris ir punkts, kur sastopas k plaknes, t.i. k mainīgie ir vienādi ar 0.

## Simpleksalgoritms

Simpleksalgoritms tiks vispirms apskatīts ar piemēra palīdzību. Tiek apskatīts iepriekšējais piemērs:

$$\max 2x_1+3x_2$$
$$x_1-2x_2+x_3=4$$
$$x_1+x_2+x_4=18$$
$$x_2+x_5=10$$
$$x_1,x_2,x_3,\ldots,x_5 \geq 0$$

Simpleksalgoritma soļus ērti pierakstīt ar tabulas palīdzību. Sākotnējo tabulu sastāda tabulas rindiņās ierakstot uzdevuma ierobežojumus. Tabulas pēdējā rindiņa raksta funkciju, kuru maksimizēt.

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $b_i$ | Atbilstošā izteiksme |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | -2 | 1 | 0 | 0 | 4 | $x_1-2x_2+x3=4$ |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 18 | $x_1+x_2+x_4=18$ |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 10 | $x_2+x_5=10$ |
| 2 | 3 | 0 | 0 | 0 | | $\max (2x_1+3x_2)$ |
| brīvie mainīgie | | pamatmainīgie | | | | |

$x_i=0$ - brīvie mainīgie
$x_i \neq 0$ - pamatmainīgie

Tabula standartformā

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 0 | ... | 0 | $b_1$ |
| | 0 | 1 | ... | 0 | $b_2$ |
| | ... | ... | ... | .. | ... |
| | 0 | 0 | ... | 1 | $b_m$ |
| $y_1 \ldots y_k$ | 0 | 0 | ... | 0 | |
| $x_i=0$ | $x_i \neq 0$ | | | | |

Konkrētajā gadījumā tabula jau ir standartformā.

### *Simpleksalgoritma solis:*

Esam stūrī, kuru apraksta iepriekšējā tabula. Pārbauda, vai blakus stūrī vērtība nav lielāka

1. Atrod brīvo mainīgo, kuru palielinot pieaug mērķfunkcija
2. Palielina šo mainīgo. Bija 0, tagad pozitīvs. vienlaikus mainot pamatmainīgos tā, lai visi nosacījumi paliktu patiesi.
3. Ja kāds no pamatmainīgajiem = 0, apstājas.

Jāatrod mainīgais, kuru palielinot funkcijas vērtība pieaug. Der abi mainīgie. Piemēra labad, palielinām $x_2$.

Ja $x_2$ pieaug par d:
$x_1-2x_2+x_3$ samazinās par 2d. Pēc nosacījumiem izteiksmei jābūt vienādai ar 4. Lai to panāktu $x_3$ palielina par 2d.
$x_1+x_2+x_4$ pieaug par d. Lai saglabātu vienādību, $x_4$ samazina par d;
$x_2+x_5$ pieaug par d. Jāsamazina $x_5$ par d.

**Cik daudz var palielināt $x_2$ nepadarot citu mainīgo negatīvu?**
$x_3=4$, $x_4=18$, $x_5=10$.
Palielinot $x_2$:
$x_3= 4 + 2d$
$x_4=18 - d$
$x_5=10-d$.
Ja d = 10, tad $x_5 = 0$. Ja d > 10, $x_5 < 0$. Tātad maksimālais palielinājums ir 10.

Tādā gadījumā mēs būsim pārgājuši no stūra, kurā $x_1 = x_2 = 0$ uz stūri, kurā $x_1 = x_5 = 0$.

| $x_1$ | $x_5$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_2$ | $b_i$ | Atbilstošā izteiksme |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | 0 | -2 | 4 | $x_1-2x_2+x_3=4$ |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 18 | $x_1+x_2+x_4=18$ |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 10 | $x_2+x_5=10$ |
| 2 | 0 | 0 | 0 | 3 | | max $(2x_1+3x_2)$ |
| brīvie mainīgie | | pamatmainīgie | | | | |

Lai izdarītu nākamo soli, tabula jāpārveido par ekvivalentu tabulu standartformā:

1. Pareizina 3. rindu ar 2, pieskaita 1. rindai
2. Atņem 3. rindu no 2. rindas

1. rinda:
   $x_1-2x_2+x_3=4$
3. rinda
   $x_2+x_5=10$

Jaunā 1. rinda $(x_1+x_3-2x_2)+2(x_5+x_2)=4 + 2 \cdot 10$

| $x_1$ | $x_5$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_2$ | $b_i$ | Atbilstošā izteiksme |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 1 | 0 | 0 | 24 | $x_1+2x_5+x_3=24$ |
| 1 | -1 | 0 | 1 | 0 | 8 | $x_1-x_5+x_4=8$ |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 10 | $x_2 + x_5=10$ |
| 2 | 0 | 0 | 0 | 3 | | max $(2x_1+3x_2)$ |

Jātiek vaļā arī no nenulles koeficienta pēdējā rindā:

| $x_1$ | $x_5$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_2$ | $b_i$ | Atbilstošā izteiksme |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 1 | 0 | 0 | 24 | $x_1+2x_5+x_3=24$ |
| 1 | -1 | 0 | 1 | 0 | 8 | $x_1-x_5+x_4=8$ |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 10 | $x_2 + x_5=10$ |
| 2 | -3 | 0 | 0 | 0 | -30 | max $(2x_1-3x_2)$ |

Iegūta tabula standartformā. Tā kā palielinot $x_5$ mērķa funkcija samazinātos, atliek palielināt $x_1$.

$x_1=x_1+d$
$x_3=x_3-d$
$x_3=24-d$
$x_4=x_4-d$
$x_4=8-d$
Ja d=8, tad $x_4=0$.

| $x_4$ | $x_5$ | $x_3$ | $x_1$ | $x_2$ | $b_i$ | Atbilstošā izteiksme |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 2 | 1 | 1 | 0 | 24 | $x_1+2x_5+x_3=24$ |
| 1 | -1 | 0 | 1 | 0 | 8 | $x_1-x_5+x_4=8$ |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 10 | $x_2 + x_5=10$ |
| 0 | -3 | 0 | 2 | 0 | -30 | max $(2x_1-3x_2)$ |

Pārveidojam standartformā

| $x_4$ | $x_5$ | $x_3$ | $x_1$ | $x_2$ | $b_i$ | Atbilstošā izteiksme |
|---|---|---|---|---|---|---|
| -1 | 3 | 1 | 0 | 0 | 16 | $-x_4+3x_5+x_3=16$ |
| 1 | -1 | 0 | 1 | 0 | 8 | $x_1-x_5+x_4=8$ |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 10 | $x_2 + x_5=10$ |
| -2 | -1 | 0 | 0 | 0 | -46 | max $(-2x_4-x_5)$ |
| $x_i=0$ | | $x_i\neq0$ | | | | |

Brīvos mainīgos nevar palielināt tā, lai izteiksmes vērtība palielinātos. Sasniegts maksimums.