

Lineārā programmēšana I

1. Optimizācijas uzdevumu veidi

Optimizācijas uzdevumos mūsu mērķis ir maksimizēt (vai minimizēt) noteiktu funkciju (piemēram, peļņu vai izmaksas) pie kaut kādiem dotiem nosacījumiem.

Optimizācija bez nosacījumiem: Minimizēt $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Optimizācija ar nosacījumiem: Minimizēt $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ pie nosacījumiem

$$c_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \preceq 0, \dots, c_k(x_1, x_2, \dots, x_n) \preceq 0, \\ d_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \dots, d_l(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0.$$

Ja ievieš nosacījumus attiecībā uz funkciju f , tad iegūst šādus optimizācijas uzdevumu paveidus:

Kvadrātiskā programmēšana: Minimizēt $\sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^n b_i x_i$ pie nosacījumiem

$$c_{11} x_1 + c_{12} x_1 + \dots + c_{1n} x_n \leq d_1,$$

...

$$c_{m1} x_1 + c_{m2} x_1 + \dots + c_{mn} x_n \leq d_m,$$

Šajā gadījumā minimizējamā funkcija ir kvadrātiska, bet nosacījumi ir lineāri.

Lineārā programmēšana: Minimizēt $\sum_{i=1}^n b_i x_i$ pie nosacījumiem

$$c_{11} x_1 + c_{12} x_2 + \dots + c_{1n} x_n \leq d_1,$$

...

$$c_{m1} x_1 + c_{m2} x_2 + \dots + c_{mn} x_n \leq d_m,$$

Piezīme: vārds „programmēšana” šeit tiek lietots nozīmē „plānošana”. Šī vārda „programmēšana” nozīme optimizācijas nozarē tiek lietota jau kopš 1920.-jiem gadiem un ir senāka par programmēšanu mūsdienu izpratnē.

Lineārā programmēšana veselos skaitļos (angliski Integer Linear Programming jeb vienkārši Integer Programming): tas pats, kas lineārā programmēšana, tikai klāt nāk nosacījums, ka x_1, x_2, \dots, x_n visiem jābūt veseliem skaitļiem.

Piemērs: Mums ir produkti 1, ..., n ar cenām p_1, \dots, p_n . Ir k uzturvielu tipi un vienā dienā cilvēkam vajadzīgs c_i daudzums i-tās uzturvielas. Atrast lētāko produktu kombināciju, kas nodrošina pietiekami daudz katras uzturvielas.

Risinājums: Ar x_i apzīmējam i-tā produkta daudzumu, ko mēs iegādāsimies. Tad mums ir jāminimizē kopējās izmaksas

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n$$

pie nosacījumiem

$$\begin{aligned}
& x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0, \\
& a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n \geq c_1, \\
& \dots, \\
& a_{k1} x_1 + a_{k2} x_2 + \dots + a_{kn} x_n \geq c_k,
\end{aligned}$$

kur a_{ij} apzīmē i -tās uzturvielas daudzumu produktā j .

Ja produktu daudzumi ir mērāmi veselos skaitļos (piemēram, veselā skaitā 11 paku), tad iegūstam lineāro programmēšanu veselos skaitļos. Ja dažiem mainīgajiem jābūt veseliem skaitļiem, bet citi drīkst būt patvaļīgi reāli skaitļi, tad tā ir jauktā veselo skaitļu programmēšana (mixed integer programming).

Veseli vai reāli skaitļi? Ar lineārajām programmām veselos skaitļos var aprakstīt daudz plašāku uzdevumu klāstu, bet tām nav zināms algoritms, kas ātri (polinomiālā laikā) atrisina patvaļīgu veselo skaitļu programmu. Toties lineārām programmām reālos skaitļos šādi algoritmi ir. Tāpēc šajā kursā mēs tālāk apskatīsim tikai lineāras programmas, kuru mainīgie ir reāli skaitļi.