# Kļūdu korekcija III

## <u>Rīda – Solomona kodi</u>

*Ļauj labot lielu daudzumu kļūdu.*
*Ziņojums pirms un pēc kodēšanas būs skaitļu virkne.*

1. Reprezentējam datus ar skaitļu virkni, sadalām grupās pa k skaitļiem.
2. $a_1, a_2, \ldots a_n$ - viena grupa

   $\downarrow$

   $f(x) = a_1x^{k-1} + a_2x^{k-2} + \ldots + a_{k-1}x + a_k$

   $\downarrow$

   $f(0), f(1), \ldots f(s-1)$

**Algebras pamatteorēma:**

1.variants:

Ja ir 2 polinomi: $f(x)$, $g(x)$ ar pakāpi $\leq k$.
$f(x) \neq g(x)$,
tad ir $\leq k$ vērtības x, kurām $f(x) = g(x)$

2.variants:

Ja $h(x)$ – polinoms ar pakāpi $\leq k$ un $h(x) \neq 0$,
tad ir $\leq k$ vērtības x, kurām $h(x)=0$

Abi teorēmas varianti seko viens no otra:
1.variants → 2.variants: $f(x) = h(x)$, $g(x)=0$, tad 1. variants pārvēršas par 2.variantu.
2.variants → 1.variants: $h(x) = f(x) – g(x)$. Ja $f(x) = g(x)$, tad $h(x) = 0$ un x ir polinoma h sakne.

Ja mums ir 2 ziņojumi $a_1,a_2, \ldots , a_k$ $b_1, b_2, \ldots ,b_k$ , tad

$$f(x) = a_1x^{k-1} + a_2x^{k-2} +\ldots+ a_{k-1}x + a_k$$
$$g(x) = b_1x^{k-1} + b_2x^{k-2} +\ldots+ b_{k-1}x + b_k$$

un katram no šiem polinomiem pakāpe ir $\leq k-1$:

$$f(x) \neq g(x);$$
$$\deg f(x) \leq k-1;$$
$$\deg g(x) \leq k-1.$$

Pēc algebras pamatteorēmas seko, ka $f(x)$ un $g(x)$ sakrīt ne vairāk kā k-1 vietās, tātad viņi atšķiras pārējās $s - (k - 1)$ vietās.

Iepriekšējās lekcijās secinājām, ka:

Ja divi kodētie ziņojumi atšķiras vismaz $2c+1$ vietās, tad kods spēj labot jebkuras c kļūdas.

Izrēķinām c:

$$s – ( k – 1 ) \geq 2c + 1$$
$$s – k \geq 2c$$
$$c \leq ( s - k) / 2$$

**Tātad Rīda – Solomona kods spēj labot $\leq ( s - k) / 2$ kļūdu skaitu.**
Ja $s = 2k$, tad sanāk, ka varam labot $k / 2$ kļūdas, jo $c \leq ( 2k - k) / 2 \rightarrow c \leq k / 2$
Praktiski tas nozīmē to, ka, ja ¼ no ziņojuma ir kļūdaina, tad būs iespējams atgūt sākotnējo tekstu.

*Vingrinājumi:*

1. Cik kļūdas varam labot, ja $k = 4$ $s=9$ ?
   $c \leq (s - k) / 2$
   $c \leq (9 - 4) / 2$
   $c \leq 2{,}5$ tātad varēs labot 2 kļūdas.
2. Kāpēc nevaram labot 3 kļūdas?
   Lai labotu 3 kļūdas ziņojumam ir jāatšķiras $2c+1$ vietās ($2 * 3 + 1 =$ **7 vietās**), bet pēc algebras pamatteorēmas seko, ka $f(x)$ un $g(x)$ sakrīt ne vairāk kā $k$-1 vietās un atšķiras $s - (k - 1)$ vietās:
   $k - 1 = 3$
   $s - (k - 1) = 6$
   Ir iegūta pretruna, jo, ja mēģinātu labot 3 kļūdas, tad vairs nebūtu iespējams viennozīmīgi atkodēt.

*Piem.*

$f(x) = x(x - 1)(x - 2) = x^3 - 3x^2 + 2x + 0$
$g(x) = 2x(x - 1)(x - 2) = 2x^3 - 6x^2 + 4x + 0$
Sākotnējās skaitļu virknes: (1; -3; 2; 0) un (2; -6; 4; 0)
$f(0) = 0 = g(0)$
$f(1) = 0 = g(1)$
$f(2) = 0 = g(2)$
Ja ir ziņojums 0, 0, 0, f(3), f(4), f(5), g(6), g(7), g(8), tad nav iespējams pateikt, vai sākotnējais ziņojums ir bijis 0, 0, 0, f(3), f(4), f(5), f(6), f(7), f(8) , un kļūdas ir bjušas 7., 8. un 9. pārraidītajā skaitlī, vai arī sākotnējais ziņojums ir bijis
0, 0, 0, g(3), g(4), g(5), g(6), g(7), g(8) un kļūdas ir bijušas 4., 5. un 6. pārraidītajā skaitlī.
Tas nozīmē, ka novērtējums ir optimāls.