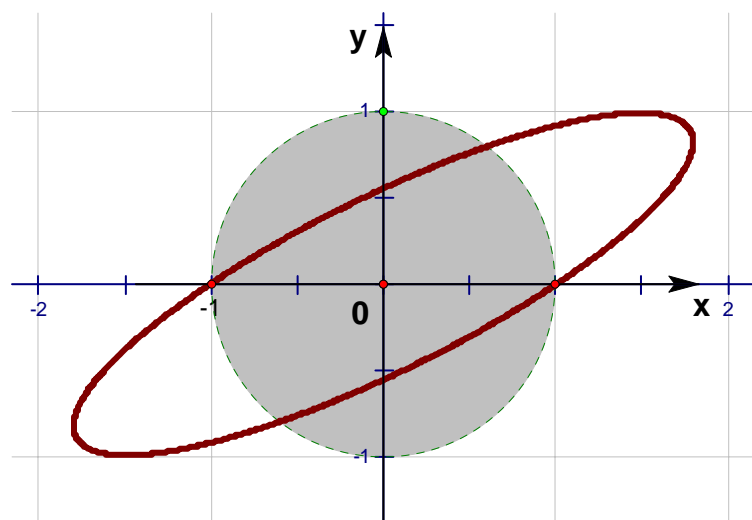

---图解线性代数---

线性代数的几何意义 之 (2)

任广千 胡翠芳 编著



2010.04.25

几何意义名言录

没有任何东西比几何图形更容易印入脑际了，因此用这种方式来表达事物是非常有意义的。 -----笛卡尔

算术符号是文字化的图形，而几何图形则是图像化的公式；没有一个数学家能缺少这些图像化的公式。 -----希尔伯特

“如果代数与几何各自分开展发展，那它的进步十分缓慢，而且应用范围也很有限，但若两者互相结合而共同发展，则就会相互加强，并以快速的步伐向着完善化的方向猛进。”

-----拉格朗日

不会几何学就不会正确的思考，而不会正确思考的人不过是行尸走肉。 -----柏拉图

无论是从事数学教学或研究，我是喜欢直观的。学习一条数学定理及其证明，只有当我能把定理的直观含义和证明的直观思路弄明白了，我才认为真正懂了。 -----中国当代数学家徐利治

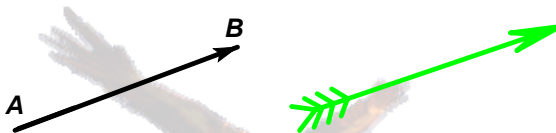
第二章 向量的基本几何意义

向量的概念始终贯穿当代科学的主要内容中，也始终贯穿线性代数的主要内容中，所以我们不妨回顾回顾这个概念的几何意义，以期更清晰地理解线性代数的几何本质。

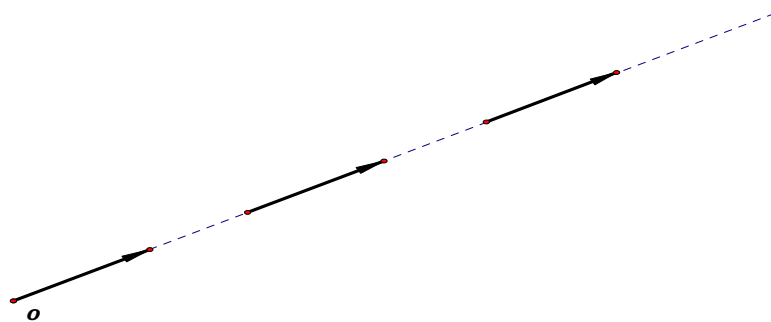
2.1 向量概念的几何意义

自由向量的概念

向量 (Vector) 和标量的概念是发明四元数的爱尔兰数学家 W. R. 哈密顿给出的。向量是一个既有大小又有方向的量，这个量本身就是个几何的概念。我们常常把它与标量（只有大小的量）相区别。抓住向量的大小和方向这两个特征，一般用一个有向线段来表示一个向量（显然，向量本身就是一个几何图形），记为 \overrightarrow{AB} 或者 α 。如下图：

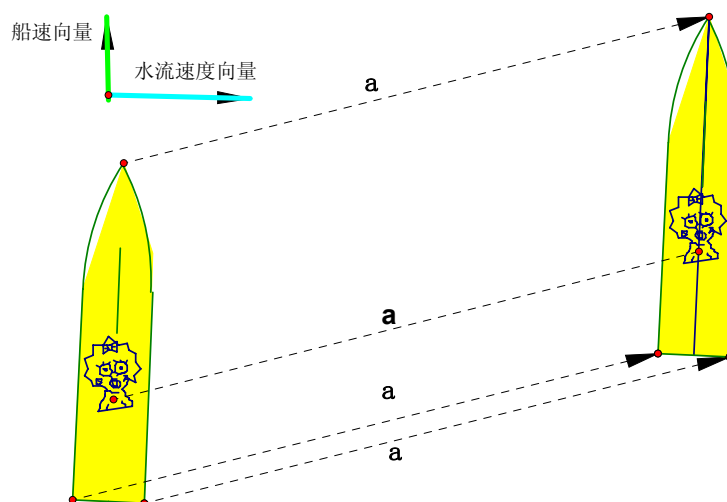


在物理学中，也把向量叫矢量，矢就是箭，向量如一根箭一样有头部和尾部，箭在空间自由的飞行中箭杆的长度不会变，这一点与向量相同；但箭在重力的作用下会改变方向，但一个确定的向量不允许改变方向，一个向量改变了方向就变成了另外一个向量了。所以向量的“飞行”称为平移，这种在一条直线上平移的向量称为自由向量（物理学中常称为滑动向量）。



沿着直线飞行的箭簇在每一时刻所表示的无数向量归属于同一个向量，这些无数的向量实际上是平行的向量。另外还有不在一条直线上的平行而相等的向量，如下的例子：

考察一个刚体的平行移动。当刚体从一个位置平行移动到另一个位置时（比如说这个刚体是麦吉小姐过河坐的小船，小船从河流的一边驶向对岸），刚体上各质点在同一时间段内有相同的位移，各点所画出的位移向量 \mathbf{a} 有相同的大小和方向，他们每一个都反映了刚体位移的情况，因此刚体的平移运动可以用这些向量中的任一个来表示。基于这样的原因，凡是两个向量大小相等、方向相同的，我们就说这两个向量是相等的。因此，一个向量在保持长度和方向不变的条件下可以自由平移。如有必要，也可以将几个向量平移到同一个出发点或者坐标原点。



从上面的例子，我们感悟到自由向量为何可以是自由的。实际上，就是因为向量没有确定的位置，它们不依赖于任何坐标系而存在。因此从逻辑上看，无数的向量可能有相同的表述，所有的这些向量都互相平行，相等，并具有相同的量值和方向。

向量的数学表示

向量的数学表示一般是用小写的黑体字母 \mathbf{a} 、 \mathbf{b} 、 \mathbf{c} 等表示。当手写时因为黑体的粗笔画书写不方便，因此常在字母上面加上箭头来与其它字母区别，如 \vec{a} 、 \vec{b} 、 \vec{c} 。

以上的表示不便计算，如何对向量象数字一样进行运算呢？

因为在数学学科中，向量被处理为自由向量，为了与解析技术所用的坐标联系起来，我们把空间中所有的向量的尾部都拉到坐标原点，这样 N 维点空间可以与 N 维向量空间建立一一对应关系： N 维点空间中点 $(0, 0, 0 \dots 0)$ 取作原点，那么每一个点都可以让一个向量和它对应，这个向量就是从坐标原点出发到这个点为止的向量。

注：

向量被看作线性空间或向量空间中的一个元素。但向量与点不同，向量表示的是两点之间的位移而不是空间中的物理位置；向量还可以确定方向，而一个点就不能。

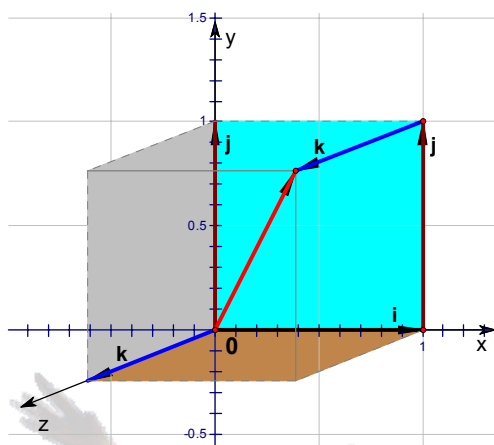
其实，一旦我们确定好一个坐标系，一个向量就与一个点相对应，而点用所谓坐标的有序数组表示的，因此我们就也可以把向量用有序数组表示。有了有序数组就可以运算了。使用有序数组或者解析式表述的向量是把以原点为起点的向量末端的坐标值表示，并把坐标值用圆括号括起来，如 $\mathbf{v} = (x, y, z)$ 。在这里这个有序数组 (x, y, z) 称之为向量。

在二维平面上，由原点引出的向量用两个有序实数表示；在三维空间中，由三个有序数表示三维向量。那么 n 维向量就可以由以上二维和三维向量的定义推广得到。虽然 n 维向量的几何意义难以想象，但其现实意义我们还是可以把握的。比如，在三维空间中，我们只要知道一个球的球心位置和半径的大小就可以确定这个球面。把球心坐标和半径值写成有序数组，我们就得到了一个四维向量。

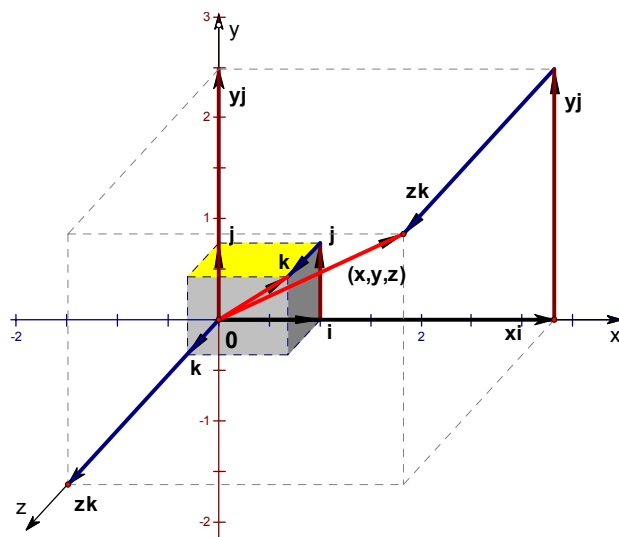
一个向量可以被分解为三个单位坐标向量的线性表示（实际上这个概念很重要，在今后的向量的运算和矩阵运算理解中起着关键作用）。例如向量 $(1, 1, 1)$ 分解如下：

$$(1, 1, 1) = (1, 0, 0) + (0, 1, 0) + (0, 0, 1) = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$$

如下图，把单位坐标向量 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ 分别首尾连接相加，就得到了 $(1, 1, 1)$ 的图像。



那么，任意一个向量 $\mathbf{v} = (x, y, z)$ 就可以表示为 $\mathbf{v} = (x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ ，即单位坐标向量的线性表示。显然，分别对单位坐标向量进行缩放 x, y, z 倍然后相加，就得到了这个向量 (x, y, z) 的图像。和上图相似，我们就可以得到了如下的任意一个向量的分解图像。

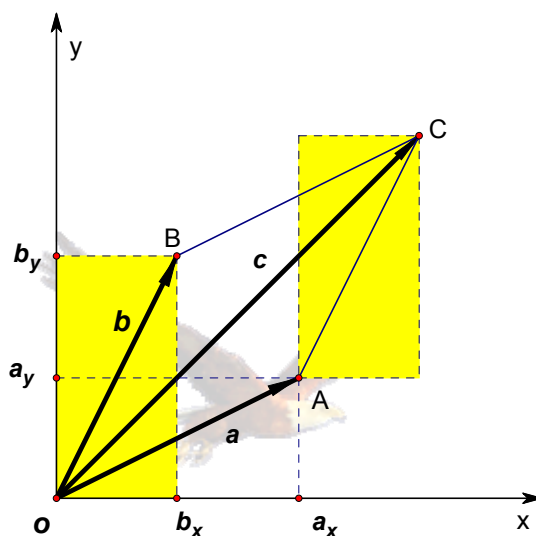


向量的运算有加法、减法和乘法，乘法有三种，但没有除法。下面我们分别介绍这些运算的细节。

2.2 向量的加法的几何及物理意义

设两个向量 \mathbf{a} 和 \mathbf{b} ，它们的二维分量解析式为 $\mathbf{a} = (a_x, a_y)$ ， $\mathbf{b} = (b_x, b_y)$ ；三维分量的解析表达式为 $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$ ， $\mathbf{b} = (b_x, b_y, b_z)$ 。则我们定义这两个向量的加法为 $\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_x + b_x, a_y + b_y)$ ，或者 $\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z)$ 。向量加法的定义看起来很简单，就是两个向量的各分量分别对应相加形成了和向量的分量。

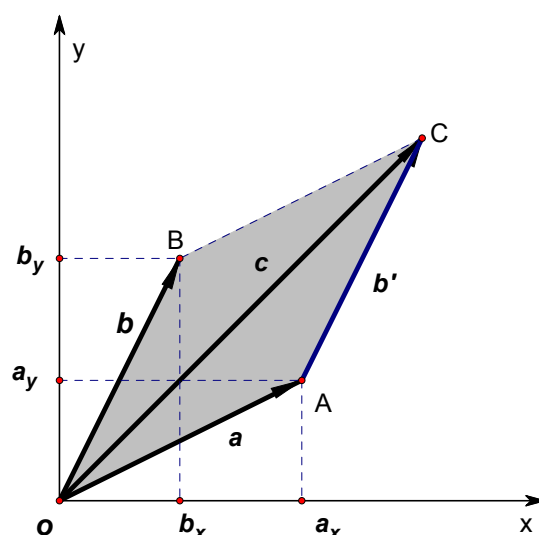
那么 $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ 的几何意义是什么呢？请看下面二维向量的图解。



这个图形可以这样解读，表示向量 \mathbf{b} 的分量的矩形被放到表示向量 \mathbf{a} 的分量的矩形上面， \mathbf{a} 向量矩形的尾端 \mathbf{A} 连接上 \mathbf{b} 向量分量矩形的头端 \mathbf{B} 。叠加后矩形的顶端 \mathbf{C} 就是和向量的尾端。

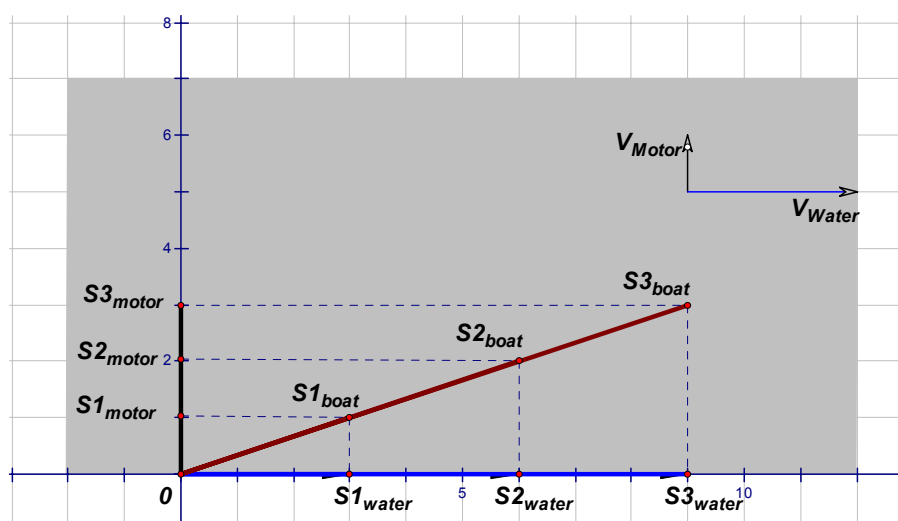
连接 \mathbf{BC} ， \mathbf{AC} 后，就是平行四边形的法则的几何解释。

当然，如果把向量 \mathbf{b} 平移（平行移动）到 \mathbf{AC} 的位置，与向量 \mathbf{a} 的尾部相接，就是三角形的法则。

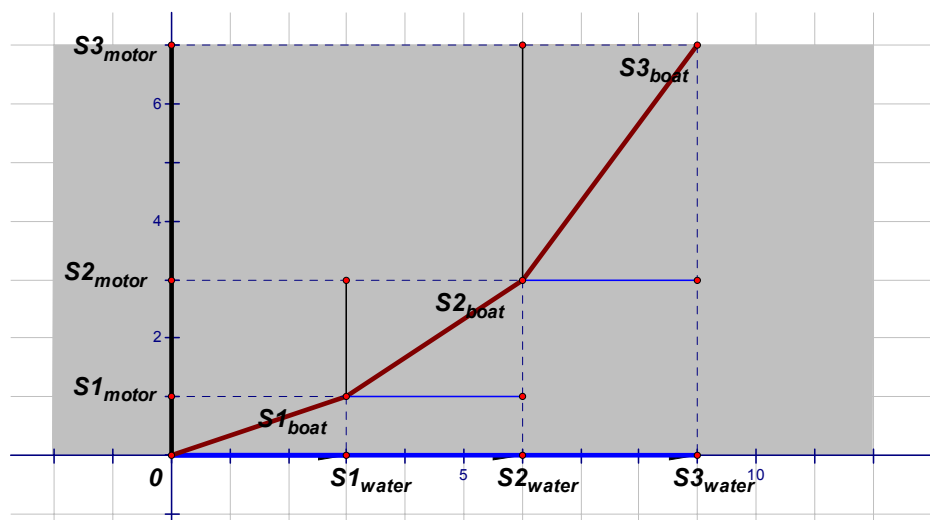


向量的所谓三角形或平行四边形法则不是人们凭空想当然的数学规定，而是从物理世界中抽象出来的向量运算法则。比如我们前面提到的船只过河的例子，船头指向的方向是船的马力驱动得到的位移为 S_{Motor} （不考虑水流影响），水流的方向是水的冲击力对船造成的位移 S_{Water} （不考虑船的马力影响），那么，实际情况是船的真正位移 S_{Boat} 是一条斜线，这条斜线就是 S_{Motor} 和 S_{Water} 的合成。它们的合成关系就是平行四边形的关系。

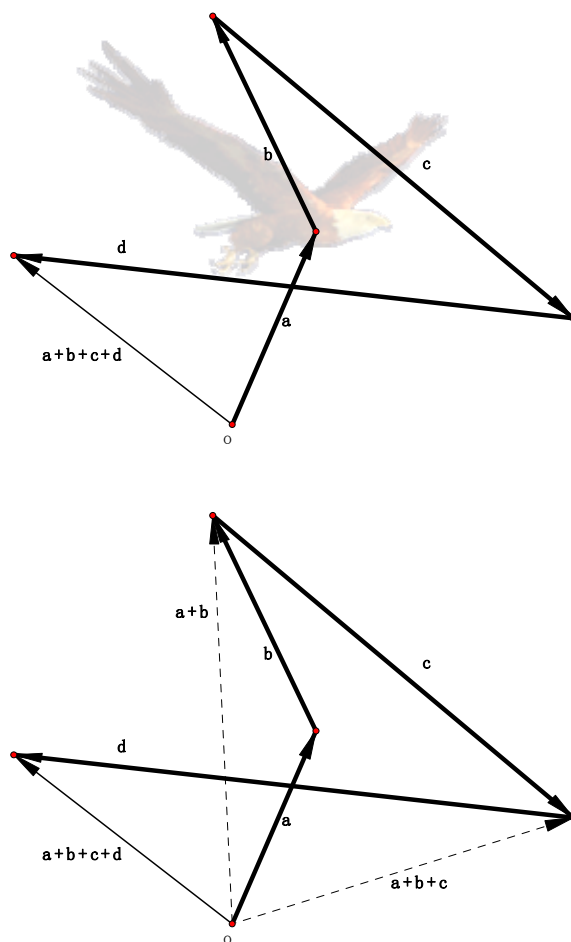
如果水的流速和船的马力不变，其中三个时刻（任意）的位移的合成图图下：



如如果水的流速不变，但在第二时刻和第三时刻船的马力逐步变大，那么三个时刻（任意）的位移的合成图图下：



两个向量的加法叫做三角形法或者平行四边形法，那么多个向量的加法同样也满足这些法则，并可以由三角形法则得到多个向量的多边形法则。下边我们画出多个向量的加法和减法的图例。

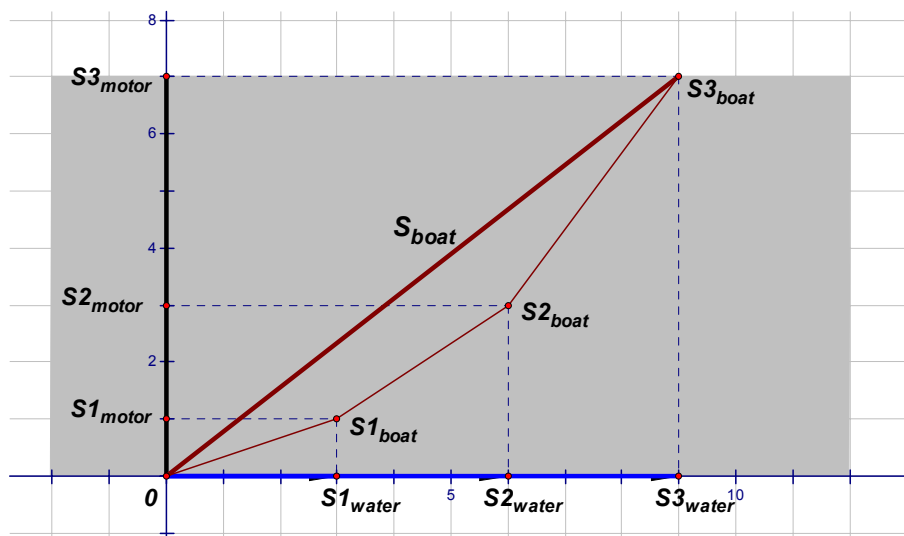


上图左是把 \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} , \mathbf{d} 四个向量按照三角形法则相加的图例，在图中，我们把 \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} , \mathbf{d} 四个向量依次首尾相接，直到画完所有向量，最后只是把第一个向量的尾部 \mathbf{o} 指向最后一个向量的首部 \mathbf{P} 画出的向量就是 4 个向量的和。这个画法可以称作多向量的多边形加法法则。

多边形法则很容易从三角形法则推导出来，上图右中虚线向量即是应用三角形的向量法则画出

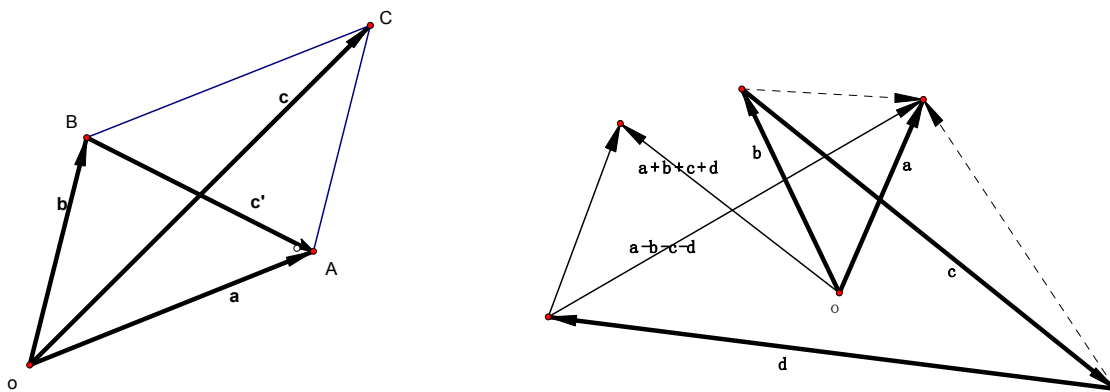
了中间向量逐次相加的结果，最后推出了左图的多边形法则。

多变形法则体现在船只过河的例子就是把船的每时刻的位移进行合成，就得到如下图所示：



多向量加法的数学本质，实际上是这些向量在坐标轴上（以 0 点为坐标原点的坐标系）的投影（或坐标分量）的合成（相加或相减）后的结果。向量的更高一级的运算如点积、叉积的定义也是这个数学本质的体现。

关于减法，实际上是加法的特殊形式，是加法的逆运算。向量减法，我们可以用定义加法的方式定义减法，例如定义 $\mathbf{c} = \mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b})$ ，只要把被减向量 \mathbf{b} 反向后再与向量 \mathbf{a} 相加即可。实际上在平行四边形法则中，和向量和差向量构成平行四边形的两个对角线。



三维向量的加法。

2.3 向量的内积的几何和物理意义

向量的内积的几何解释

向量的内积也叫数量积、标积、点积（点积的名称来自于内积的计算符号 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ ）等，都是一个意思，就是内积的结果是个数量或者标量。内积的定义有两个，下面我们把它们列举出来并探讨一下它们的关系。

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = ab \cos \theta \dots\dots\dots 1$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \dots\dots\dots 2$$

公式 1 是说，向量 \mathbf{a} 和 \mathbf{b} 的长度之积再乘以它们之间的夹角的余弦；

公式 2 的意思是向量 \mathbf{a} 和 \mathbf{b} 的坐标分量分别对应乘积的和。

定义内积有很多好处，除了物理上的直接应用外，至少我们可以应用这个定义（公式 2）去计算一个向量的长度（在已知它的坐标时）。比如我们求向量 \mathbf{a} 的长度：

$$a = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} = \sqrt{a_x a_x + a_y a_y + a_z a_z} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}。$$

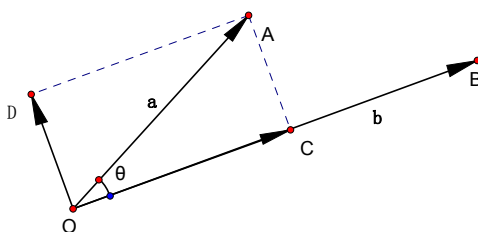
这两个公式有关系吗？当然有：

假设我们选一个这样的坐标系，x 轴沿向量 \mathbf{a} 的方向，那么 $a_x = a$ ， $a_y = a_z = 0$ ，则公式

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = ab_x，$$

ab_x 就是 \mathbf{a} 的长度乘以 \mathbf{b} 在 \mathbf{a} 方向上的分量，这个分量就是 \mathbf{b} 在 \mathbf{a} 上的投影，因此公式

$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = ab \cos \theta$ 得证（如果它对一个坐标系成立，则对所有的坐标系都成立）。

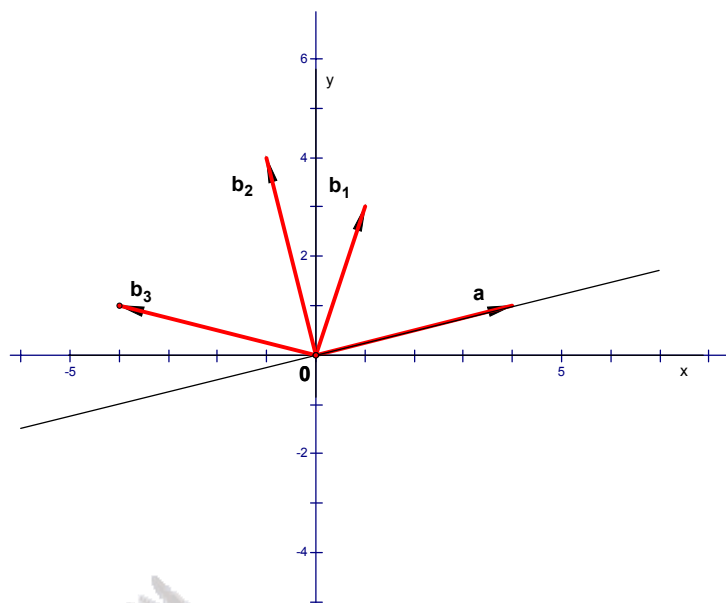


因此，向量内积的几何解释就是一个向量在另一个向量上的投影的积，也就是同方向的积。

特别的，如果一个向量如 \mathbf{a} 是某个坐标轴的单位坐标向量，那么，两个向量的内积 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ 就是向量 \mathbf{b} 在此坐标轴上的坐标值。这个结论非常重要，这是傅立叶分析的理论基础。

另外，对两个向量内积的投影的几何意义可以得到其他的几何解释，这些解释在应用上就显得比较直观。比如，从内积数值上我们可以看出两个向量的在方向上的接近程度。当内积值为正值时，两个向量大致指向相同的方向（方向夹角小于 90 度）；当内积值为负值时，两个向量大致指向相反

的方向（方向角大于 90 度）；当内积值为 0 时，两个向量互相垂直（这个性质经常在向量几何中作为判断直线与直线是否垂直）。笼统说来，内积值越大，两个向量的在方向上的就越接近，内积值越小，两个向量的在方向上的就越相反。



上图中，向量 a 与向量 b_1 方向相近，内积为正； a 与 b_2 方向垂直，内积为 0； a 与 b_3 方向大致相反，内积为负。

向量的内积的物理解释

向量内积的物理应用或者说物理意义很多，生活中我们也需要内积计算。比如我上周购买的食物价格向量是 $P = (\text{蔬菜 } 2 \text{ 元/斤}, \text{大米 } 1.5 \text{ 元/斤}, \text{猪肉 } 5 \text{ 元/斤}, \text{啤酒 } 3 \text{ 元/瓶})$ ，消耗的数量向量为 $d = (3.5 \text{ 斤}, 5 \text{ 斤}, 2 \text{ 斤}, 3 \text{ 瓶})$ ；那么我上周的饮食消费就是向量 P 和 d 的内积：

$$p \cdot d = (2, 1.5, 5, 3) \cdot (3.5, 5, 2, 3) = 7 + 7.5 + 10 + 9 = 33.5 \text{ 元}。$$

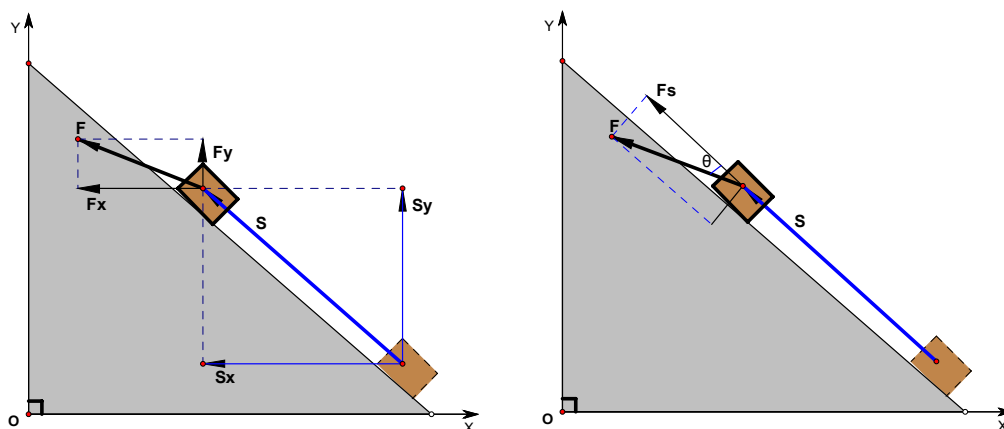
另外内积的一个经典例子就是当一个物体从某处被拉到另一处的所做的功，下面我们把这个做功的图画出来来印证以上内积两大公式的一致性。

我们假设是在一个斜坡上用力 F 斜上拉一个物体，位移为 S （没有重力的情况下）。那么这个力 F 所作的功为（分量的分解见图左）：

$$W = F_x S_x + F_y S_y$$

另外，我们也可以把力 F 沿着 S 的方向和垂直 S 的方向（按照图右所示）进行分解，那么这个力 F 所作的功又可表示为

$$W = F_s S = FS \cos \theta$$

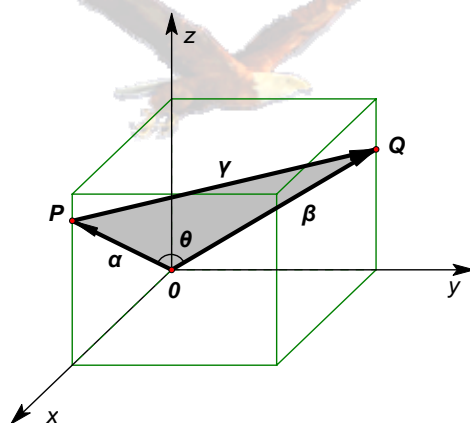


由此，我们从物理原理上印证了内积两大公式的一致性。

向量的内积两个定义的关系的数学推导

下面我们对内积的定义进行推导来帮助大家确信这种关系：

设 O, P, Q 为空间的三点，令 $\alpha = \overrightarrow{OP}$, $\beta = \overrightarrow{OQ}$, $\gamma = \overrightarrow{PQ}$, α, β 夹角为 θ ，如图。



内积概念直观图

由余弦定理知， $|\gamma|^2 = |\alpha|^2 + |\beta|^2 - 2|\alpha||\beta|\cos\theta$ (1)

再设

$$\alpha = (x_1, y_1, z_1)$$

$$\beta = (x_2, y_2, z_2)$$

$$\gamma = (x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2)$$

代入上(1)式得：

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 - 2|\alpha||\beta|\cos\theta$$

$$\text{即 } x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = |\alpha||\beta|\cos\theta \dots\dots (2)$$

这样，对向量 α, β 就有唯一确定的实数 $|\alpha||\beta|\cos\theta$ 与之对应。即得到以 α, β 为自变量的二元函数，记作 (α, β) ，称作 α, β 的内积。

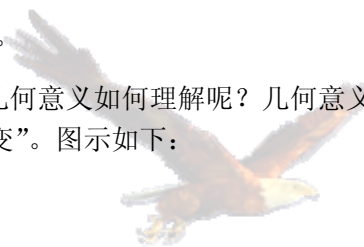
向量的内积与正交变换

定理 1 设 σ 是 V (欧式空间) 的一个变换。若对任意向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V$ ，都有

$$|\sigma(\mathbf{a}) + \sigma(\mathbf{b})| = |\mathbf{a} + \mathbf{b}|$$

则 σ 是 V 的一个正交变换。

这个定理我们不证明，其几何意义如何理解呢？几何意义是“保持以 V 中任意两个向量为邻边的平行四边形的对角线之长不变”。图示如下：



定理 2 设 σ 是 V 的一个变换。如果 σ 既是保长度变换又是保夹角变换，那么 σ 必为正交变换。。证明如下：

设 $\xi, \eta \in V$ ，当 $\xi \neq 0 \neq \eta$ 时，由

$$|\sigma(\xi)| = |\xi|, |\sigma(\eta)| = |\eta|,$$

$$\frac{\langle \sigma(\xi), \sigma(\eta) \rangle}{|\sigma(\xi)||\sigma(\eta)|} = \frac{\langle \xi, \eta \rangle}{|\xi||\eta|},$$

得

$$\langle \sigma(\xi), \sigma(\eta) \rangle = \langle \xi, \eta \rangle$$

即保持了变换的内积不变，因而是线性的，或正交变换。

如果 V 的一个变换 σ 既是保长度变换又是保夹角变换(即 σ 保持 V 中任二非零向量间的夹角不变)，那么 σ 就应该保对角线长，从而 σ 是一个正交变换，以上证明事实正是这样。

正交 (orthogonal) 是直观概念中垂直的推广。作为一个形容词，只有在一个确定的内积空间中才有意义。若内积空间中两向量的内积为 0，则称它们是正交的。如果能够定义向量间的夹角，则正交可以直观地理解为垂直。物理中：运动的独立性，也可以用正交来解释。

2.4 向量的外积的几何和物理意义

叉积的定义及其几何解释

向量的外积 (Cross product) 也译作叉积 (同点积类似，此名称也来自于外积的计算符号 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$)，因为叉积会产生新的一维，两个向量确定了一个二维的平面，叉积又会产生垂直于这个平面的向量，因此外积的概念只能应用于 3 维和三维以上的向量空间。

叉积的定义也有两个，下面我们列举出来并探讨一下它们的关系。

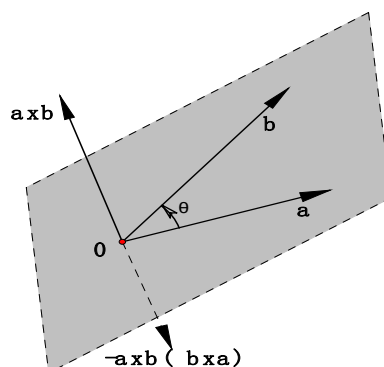
设三维空间中的两个向量为 $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$ ， $\mathbf{b} = (b_x, b_y, b_z)$ ，则

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_y b_z - a_z b_y, a_z b_x - a_x b_z, a_x b_y - a_y b_x) \dots\dots\dots 1$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = ab \sin \theta \mathbf{N} \quad (\text{其中 } \mathbf{N} \text{ 是垂直于 } \mathbf{a} \text{ 和 } \mathbf{b} \text{ 展成的平面的单位向量}) \dots\dots\dots 2$$

公式 1 是用向量的三维坐标值表述的解析式。这个公式表面含义是叉积 \mathbf{c} 的 x 轴的分量是 $a_y b_z - a_z b_y$ ， y 轴的分量是 $a_z b_x - a_x b_z$ ， z 轴的分量是 $a_x b_y - a_y b_x$ 。显然，叉积 \mathbf{c} 的 x 方向的分量是向量 \mathbf{a} 和 \mathbf{b} 在 yoz 平面上的分量计算出来；类似的， \mathbf{c} 的 y 方向的分量是向量 \mathbf{a} 和 \mathbf{b} 在 xoz 平面上的分量计算出来， \mathbf{c} 的 z 方向的分量是向量 \mathbf{a} 和 \mathbf{b} 在 xoy 平面上的分量计算出来的。实际上，叉积的这三个分向量分别又是三个叉积向量。为什么是这样的呢？后面的物理意义解析会告诉你原因。

公式 2 是叉积几何意义的定义式。 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ 为一个新生成的向量，这个向量垂直于 \mathbf{a} 和 \mathbf{b} 展成的平面 (图中的虚线平行四边形，由线段 $0\mathbf{a}$ 和 $0\mathbf{b}$ 所确定的平面)；同样向量 $\mathbf{b} \times \mathbf{a}$ 也垂直这个平面，但方向与 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ 所指的方向相反，即 $\mathbf{b} \times \mathbf{a} = -\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ 。



我们可以用右手法则来帮助记忆这个定义，右手的大拇指指向向量 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ 的方向，则弯曲的四指则指向向量 \mathbf{a} 和 \mathbf{b} 叉乘的顺序：从向量 \mathbf{a} 沿着 \mathbf{a} 和 \mathbf{b} 间较小夹角转向向量 \mathbf{b} 。反过来，如果已知两个向量进行叉乘，那么用右手法则则可以知道这两个向量叉乘出来的向量的方向。

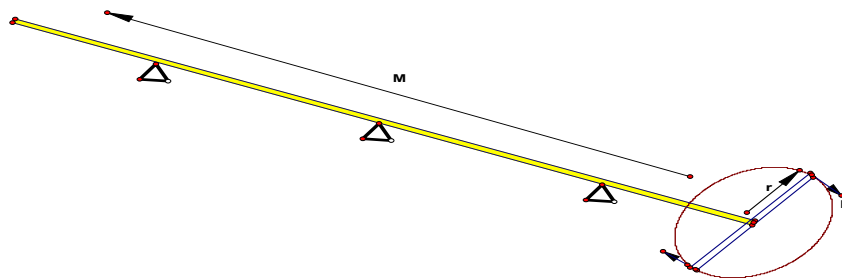
叉积的物理意义

叉乘的定义看起来有点怪，大家可能感觉到，叉积向量好像不是太真实似的，特别是方向定义的显然是人为的。实际上叉积这种向量与前面介绍的向量确实不同，所以在物理学中又被称为赝向量或轴向量。

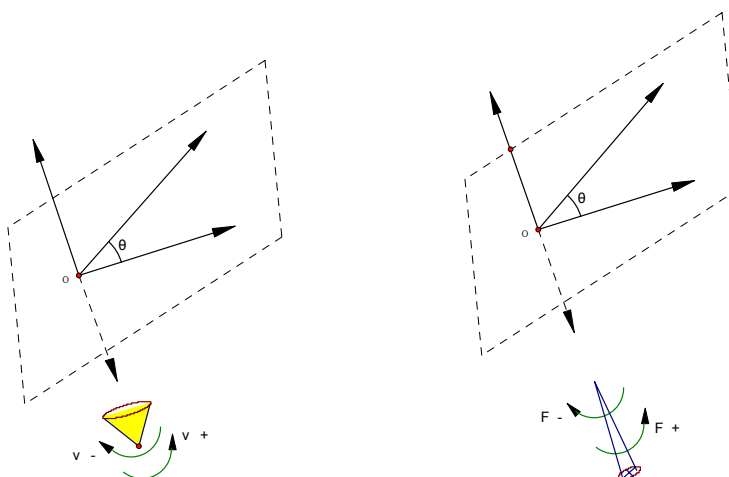
但这个定义也是从物理应用方面得来的。举一个例子：知道陀螺的原理吗？高速旋转的陀螺会定向。陀螺所定义的方向就是矢径向量 \vec{r} 和线速度 \vec{v} 叉乘结果角速度 $\vec{\omega}$ 方向。类似的一个例子是螺钉，螺钉只要左右向旋转即可在螺孔中前进或者后退。用螺丝刀把这棵螺钉按照 $F+$ 的方向右旋，那么旋转时的扭力向量 \vec{F} 和矢径向量 \vec{r} 这两个叉乘的结果即是力矩 \vec{M} 的方向，这棵螺钉就会沿着力矩 \vec{M} 在螺母孔内前进，反方向就会改变叉积的方向进而退出螺孔（右螺旋螺钉）。也就是力矩或叉乘向量的方向就是螺钉的螺旋前进的方向，这个方向垂直于螺丝刀口和扭力的方向，也就是垂直于被叉积的两个向量的方向。

力矩就是向量的叉积。还有点疑惧？好，弄个夸张一点的。我们把螺钉的原理稍微改变一下：假如有一个 100 米长的细钢棒（好长），钢棒架在几个支架上，钢棒一端装有摇臂，当有人用摇臂扭转钢棒时，这个扭转的力（就是力矩）会沿着这个长长的钢棒一直延伸到钢棒的尾端，并且整个钢棒上都有扭转的力存在，无论我们碰触钢棒的任何部位都会感知到这个力矩的存在。这个扭转的力是多大呢？如果摇动的人用力越大，摇臂越长，这个力矩就会越大，我们就越难用手抓停它。

呵呵，力矩沿着 100 米长的、与摇臂和摇动的力垂直的方向，无处不在！



力矩的方向



另外一个例子就是我们经常骑的自行车，车子静止的时候我们在车上会摔下来，一旦骑行起来车子就会平稳而不会左右倾倒，这也是叉积的功劳（与陀螺的原理相同）。

下面我们看一看叉积解析式的物理意义的分解。同样，我们也举扭矩的例子。这里我们再次把叉积解析公式重新列在这里：

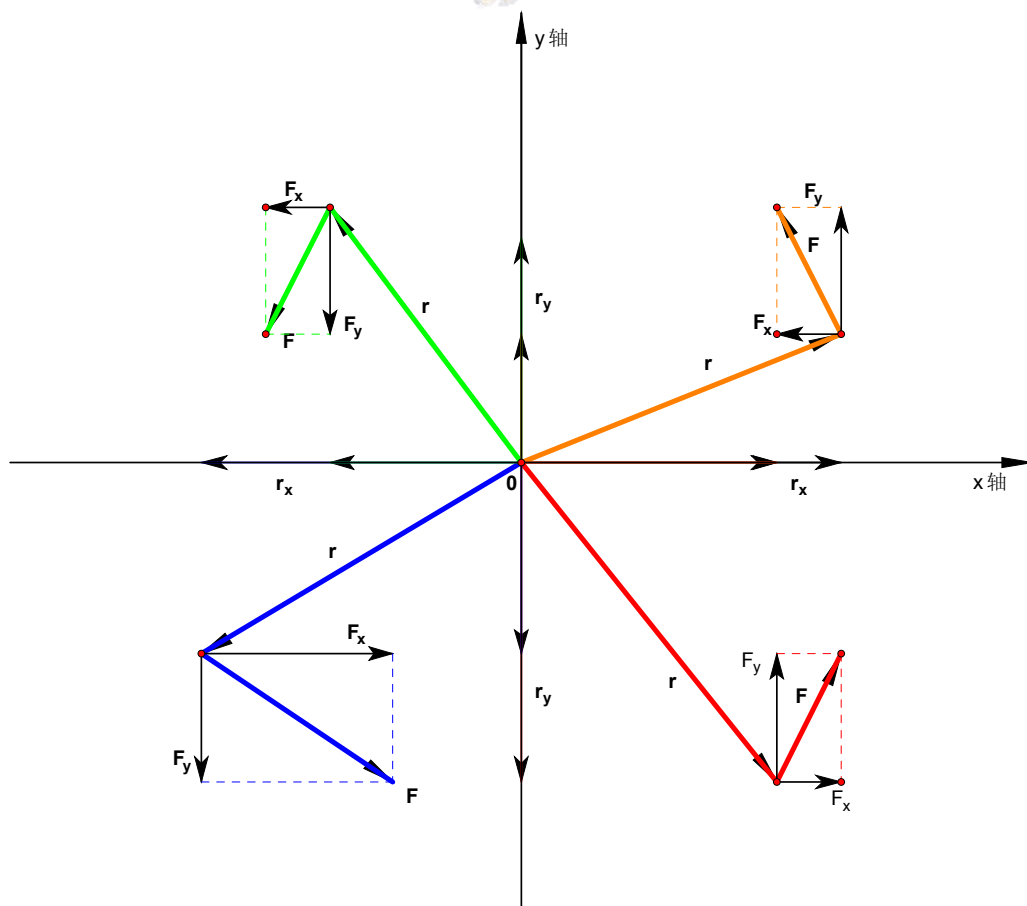
$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_y b_z - a_z b_y, a_z b_x - a_x b_z, a_x b_y - a_y b_x)$$

前边讲过，一个向量可以分解为沿着 x、y、z 轴的分向量，或者讲一个三维向量可以看作是三个分别与坐标轴同向向量之和。即：

$$\mathbf{v} = (x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

在这里我们同样可以认为 $(a_y b_z - a_z b_y)\mathbf{i}$ 是 x 方向的向量， $(a_z b_x - a_x b_z)\mathbf{j}$ 是 y 方向的向量， $(a_x b_y - a_y b_x)\mathbf{k}$ 是 z 方向的向量。

前面讲叉积的这三个分向量分别又是三个叉积，从何讲起？下面我们以叉积的 z 轴分量的 $(a_x b_y - a_y b_x)\mathbf{k}$ 来比对物理上力矩的概念。假设，我们的书面为 xOy 平面，z 轴垂直书面并指向我们，以这个三维坐标系的原点 O 为转轴，在力 \mathbf{F} 的作用下逆时针转动，转轴向量为 \mathbf{r} 。 $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$ 的方向指向我们。下面来看看这个图解：



图中在 xOy 坐标系的四个象限都画出了力矩的例子，并且把叉乘的两个向量 \mathbf{r} 和 \mathbf{F} 都进行了分解。 \mathbf{F} 分解为 \mathbf{F}_x 和 \mathbf{F}_y ， \mathbf{r} 也分解 \mathbf{r}_x 和 \mathbf{r}_y 。分解后我们同样对分解的分向量 \mathbf{r}_x 、 \mathbf{r}_y 、 \mathbf{F}_x 和 \mathbf{F}_y 进行求力矩的叉积 $\mathbf{M} = \mathbf{r}_x \times \mathbf{F}_y + \mathbf{r}_y \times \mathbf{F}_x$ （其它的分向量因为方向相同或者相反： $\mathbf{r}_x \times \mathbf{F}_x = \mathbf{r}_y \times \mathbf{F}_y = \mathbf{0}$ ，因此忽略不写了）。在初中我们就知道力矩等于力乘以力臂，力臂与扭力垂直。因此，我们分别得出第一象限的力矩是 $\mathbf{M}_1 = \mathbf{r}_x \times \mathbf{F}_y + \mathbf{r}_y \times \mathbf{F}_x = xF_y\mathbf{k} + y(-F_x)\mathbf{k} = (xF_y - yF_x)\mathbf{k}$ 。这里， \mathbf{k} 是指向 z 坐标方向的单位向量。

类似地，其它三个象限的力矩分别是：

$$\mathbf{M}_2 = \mathbf{r}_x \times \mathbf{F}_y + \mathbf{r}_y \times \mathbf{F}_x = (-x)(-F_y)\mathbf{k} + y(-F_x)\mathbf{k} = (xF_y - yF_x)\mathbf{k}$$

$$\mathbf{M}_3 = \mathbf{r}_x \times \mathbf{F}_y + \mathbf{r}_y \times \mathbf{F}_x = (-x)(-F_y)\mathbf{k} + (-y)F_x\mathbf{k} = (xF_y - yF_x)\mathbf{k}$$

$$\mathbf{M}_4 = \mathbf{r}_x \times \mathbf{F}_y + \mathbf{r}_y \times \mathbf{F}_x = xF_y\mathbf{k} + (-y)F_x\mathbf{k} = (xF_y - yF_x)\mathbf{k}$$

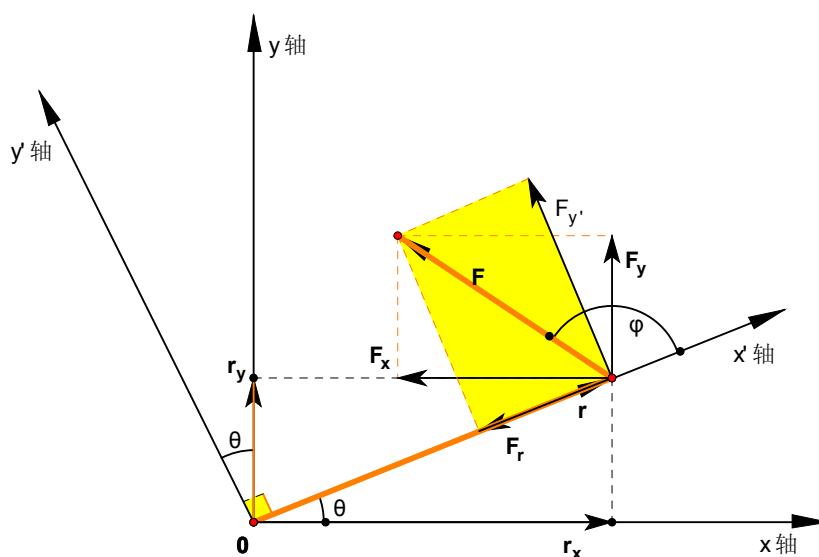
我们看，四个象限的力矩表达式相同，都是 $(xF_y - yF_x)\mathbf{k}$ ！

在这个向量 $(xF_y - yF_x)\mathbf{k}$ 中， (x, y) 是矢径向量 \mathbf{r} 的坐标， (F_x, F_y) 是扭力向量 \mathbf{F} 的坐标；在 xOy 的平面上，向量 \mathbf{r} 和向量 \mathbf{F} 的叉积的大小等于 $xF_y - yF_x$ ，方向 \mathbf{k} 指向 z 轴方向。

显然，我们把向量 \mathbf{r} 和向量 \mathbf{F} 改写成通用向量 \mathbf{a} 和 \mathbf{b} ，这个结果就变成了 $(a_x b_y - a_y b_x)\mathbf{k}$ 。

当然，我们同样可以推论出 x 轴、 y 轴方向的叉积表达式如前所述。

实际上，我们把坐标系重新选择或者把坐标系右旋一个 θ 角度，可以得到叉积定义的另一个公式 $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = ab \sin \theta \mathbf{n}$ 。



如图所示，两个向量 \mathbf{r} 和 \mathbf{F} 在 xoy 坐标系中 \mathbf{F} 分解为 \mathbf{F}_x 和 \mathbf{F}_y ， \mathbf{r} 也分解 \mathbf{r}_x 和 \mathbf{r}_y ，如果把 xoy 坐标轴右旋一个 θ 角，变为 $x'Oy'$ 坐标系，刚好使 x' 轴与向量 \mathbf{r} 重合。

显然，在新的坐标系下， \mathbf{r} 不必分解分量了； \mathbf{F} 只需在 $x'y'$ 分解为 $\mathbf{F}_{x'}$ 和 $\mathbf{F}_{y'}$ ，则新坐标系下的叉积（ z 方向的力矩 \mathbf{M} ）

$$\mathbf{M}_z = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{r} \times (\mathbf{F}_{x'} + \mathbf{F}_{y'}) = \mathbf{r} \times \mathbf{F}_{x'} + \mathbf{r} \times \mathbf{F}_{y'} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}_{y'}$$

又因为 x' 轴与 \mathbf{r} 重合，且 \mathbf{F} 与 \mathbf{r} 的夹角为 ϕ ，因此上式继续等于：

$$\mathbf{M}_z = \mathbf{r} \times \mathbf{F}_{y'} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}_r = -rF \cos(\pi - \phi) \mathbf{k} = rF \sin(\phi) \mathbf{k}$$

如果我们把向量 \mathbf{r} 和 \mathbf{F} 改写成通用向量 \mathbf{a} 和 \mathbf{b} ，且不是强调在 xyz 三维坐标下，那么 z 向的单位向量 \mathbf{K} 可以写成与叉乘的两个向量垂直且满足右手系的 \mathbf{N} 。至此得到叉乘的第二个公式： $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = ab \sin \theta \mathbf{N}$ 。

2.5 向量混合运算的几何意义

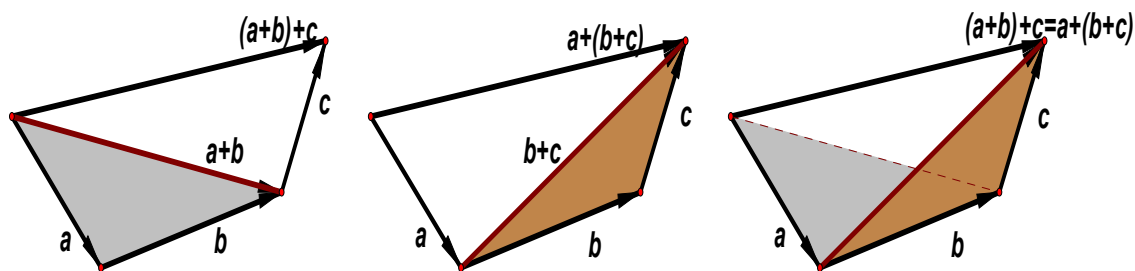
我们所讨论的向量的混合运算包括向量加法和乘法的混合运算，仔细的研究一些混合运算的几何意义有助于理解向量的几何本质。

向量加法的结合律的几何解释

三个向量加法的结合律为

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$$

其图解是显然的，第一幅图给出了 $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c}$ 的加法图解，第二幅图给出了 $\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$ 的图解，第三幅图把两者叠放在一起，显示了两个加法有相同的结果。图形如下：

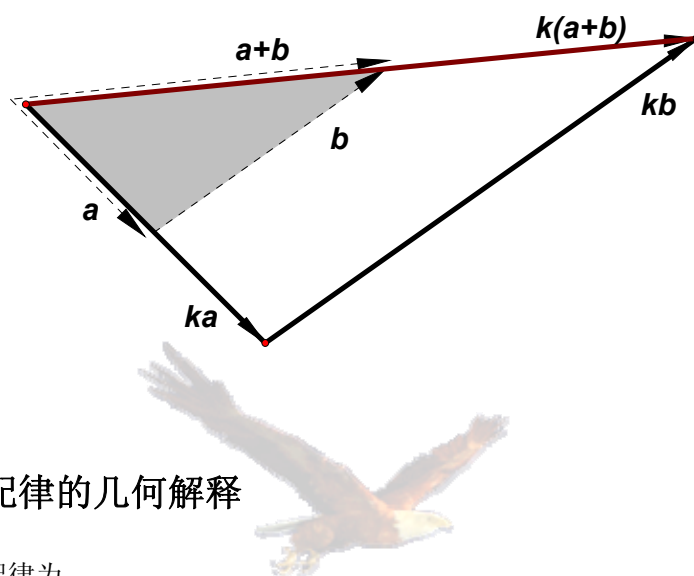


向量数乘的分配律的几何解释

数乘两个向量和的分配率为

$$k(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = k\mathbf{a} + k\mathbf{b}$$

其图解是显然的，图中设数量 k 大于 1， $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ 的加法三角形和 $k\mathbf{a} + k\mathbf{b}$ 的加法三角形是两个相似三角形，因而得到图形如下：

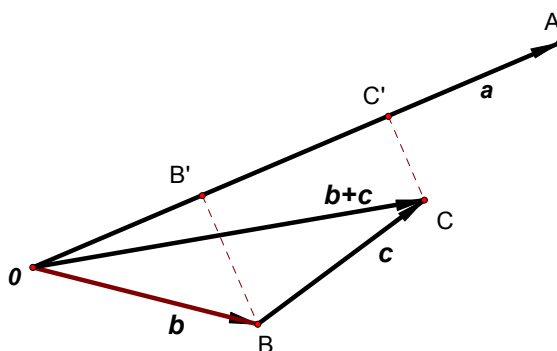


向量点积的分配律的几何解释

向量点积的分配律为

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$$

如下图， OB' 为向量 \mathbf{b} 在向量 \mathbf{a} 上的投影， $B'C'$ 为向量 \mathbf{c} 在向量 \mathbf{a} 上的投影， OC' 为向量 $\mathbf{b} + \mathbf{c}$ 在向量 \mathbf{a} 上的投影。



由图有：

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = OA \cdot OB', \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = OA \cdot B'C'$$

于是得：

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = OA \cdot OB' + OA \cdot B'C' = OA \cdot (OB' + B'C') = OA \cdot OC'$$

而又有 $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = OA \cdot OC'$ ，因此有分配律成立。

向量叉积的分配律的几何解释 1

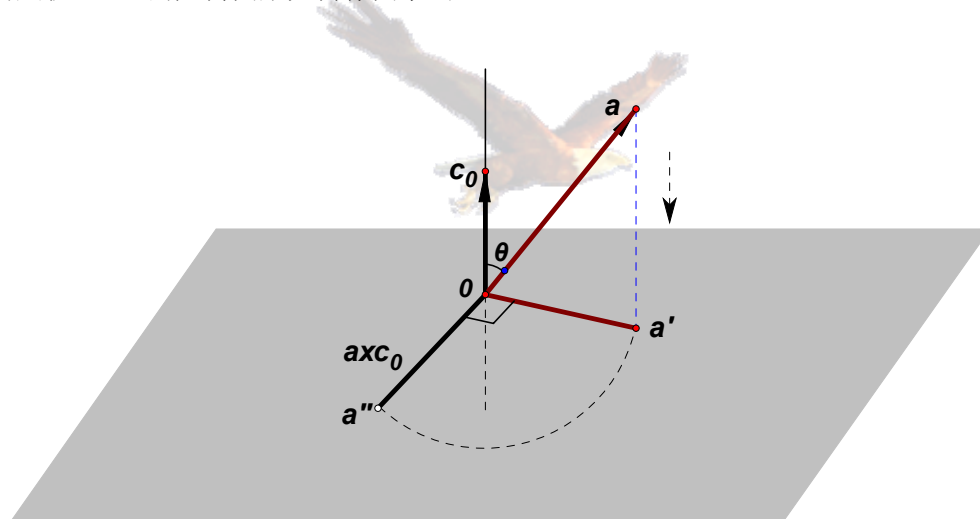
向量的分配律表述如下的等式：

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}$$

对于理解这个分配律的几何解释，我们可以有两个图解的解释。

先说一个较熟悉的几何解释。

在详述几何解释之前，我们先介绍一个引理的几何意义。就是对于单位向量 \mathbf{c}^0 ，其与另一个向量 \mathbf{a} 的叉积 $\mathbf{a} \times \mathbf{c}^0$ 的几何图形如何作图求出。



如上图所示，先过向量单位向量 \mathbf{c}^0 的起始 O 点构造一个垂直于它的平面，然后把向量 \mathbf{a} 投影到这个平面上得到向量 \mathbf{a}' ，接着把这个向量 \mathbf{a}' 在平面上绕 O 点顺时针旋转 $\pi/2$ 角度。容易知道，旋转后的向量 \mathbf{a}'' 同时垂直于 \mathbf{a} 和 \mathbf{c}^0 。下面我们将说明 \mathbf{a}'' 恰好等于 $\mathbf{a} \times \mathbf{c}^0$ 。

因为 \mathbf{a} 和 \mathbf{c}^0 的叉积向量的长度有

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{c}^0| = |\mathbf{a}| |\mathbf{c}^0| \sin \theta = |\mathbf{a}| \sin \theta = |\mathbf{a}''|$$

也就是说，任意一个向量 \mathbf{a} 和单位向量 \mathbf{c}^0 叉积的长度 $|\mathbf{a} \times \mathbf{c}^0|$ 等于向量 \mathbf{a} 向平面（垂直于 \mathbf{c}^0 ）

的投影向量长度 $|\mathbf{a}'|$ 。而 $|\mathbf{a}''|$ 又是 $|\mathbf{a}'|$ 旋转得到的。因此 $|\mathbf{a}''|=|\mathbf{a}'|$ 。

另外，前面我们说了 \mathbf{a}'' 同时垂直于 \mathbf{a} 和 \mathbf{c}^0 ，综合得知 $\mathbf{a}''=\mathbf{a}\times\mathbf{c}^0$ 。

引理说完了。下面开始说正体了。

这里三个向量 \mathbf{a} 、 \mathbf{b} 和 $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ ，那么这三个向量分别与单位向量 \mathbf{c}^0 叉积的向量图形可以模仿上述的过程得到。如下图所示我们得到了三个叉积向量 $\mathbf{a}''=\mathbf{a}\times\mathbf{c}^0$ 、 $\mathbf{b}''=\mathbf{b}\times\mathbf{c}^0$ 和 $(\mathbf{a}+\mathbf{b})''=(\mathbf{a}+\mathbf{b})\times\mathbf{c}^0$ 。

另外，请注意，三个向量因为有相加的关系，构成了一个平行四边形。这个平行四边形在投影下不会改变其边的平行或连接的关系。因此投影后的三个向量 \mathbf{a}' 、 \mathbf{b}' 和 $(\mathbf{a}+\mathbf{b})'$ 在平面上仍然构成一个新的平行四边形。因此符合平行四边形法则的加法规律，故有 $\mathbf{a}'+\mathbf{b}'=(\mathbf{a}+\mathbf{b})'$ 。

接着来，呵呵。投影平行四边形整体顺时针旋转 90° 后仍然是个平行四边形，因此三个向量 \mathbf{a}'' 、 \mathbf{b}'' 和 $(\mathbf{a}+\mathbf{b})''$ 仍然符合平行四边形法则，因此有 $\mathbf{a}''+\mathbf{b}''=(\mathbf{a}+\mathbf{b})''$ 。

把 $\mathbf{a}''=\mathbf{a}\times\mathbf{c}^0$ ， $\mathbf{b}''=\mathbf{b}\times\mathbf{c}^0$ ， $(\mathbf{a}+\mathbf{b})''=(\mathbf{a}+\mathbf{b})\times\mathbf{c}^0$ 代到上述等式，得：

$$\mathbf{a}\times\mathbf{c}^0+\mathbf{b}\times\mathbf{c}^0=(\mathbf{a}+\mathbf{b})\times\mathbf{c}^0$$

好，到此问题基本解决。追后临门一脚是，把单位向量 \mathbf{c}^0 伸缩为一般的向量 $\mathbf{c}=|\mathbf{c}|\mathbf{c}^0$ 。即对等式两边同乘以一个常数 $|\mathbf{c}|$ ，得

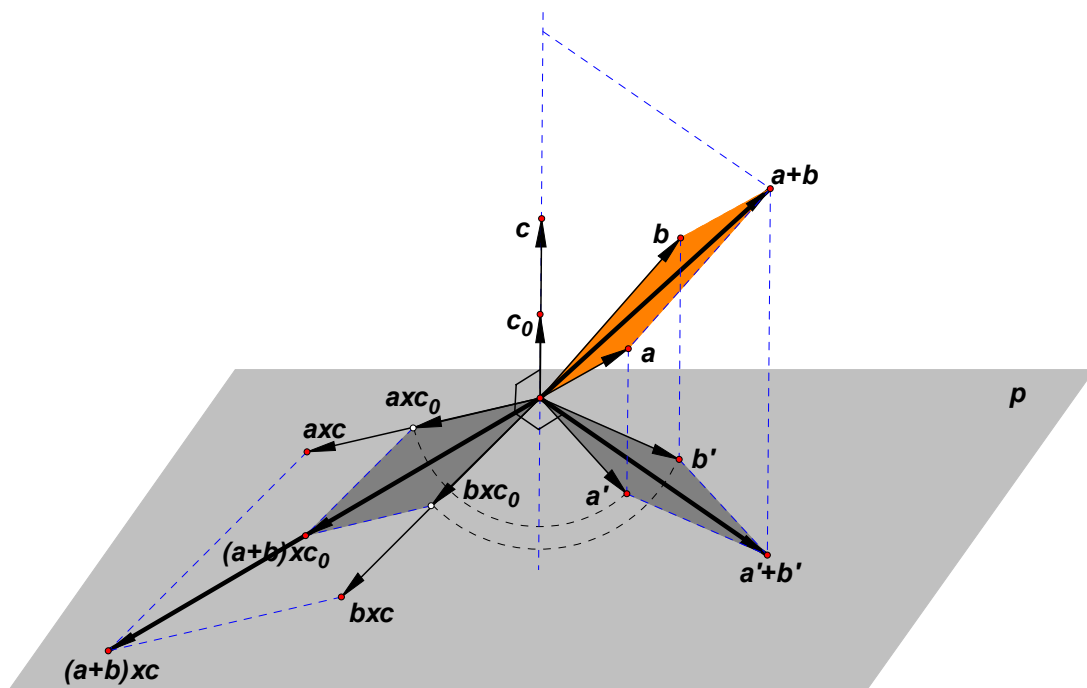
$$\mathbf{a}\times\mathbf{c}^0|\mathbf{c}|+\mathbf{b}\times\mathbf{c}^0|\mathbf{c}|=(\mathbf{a}+\mathbf{b})\times\mathbf{c}^0|\mathbf{c}|$$

即

$$\mathbf{a}\times\mathbf{c}+\mathbf{b}\times\mathbf{c}=(\mathbf{a}+\mathbf{b})\times\mathbf{c}$$

倒换等式两边的项即结论：

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})\times\mathbf{c}=\mathbf{a}\times\mathbf{c}+\mathbf{b}\times\mathbf{c}$$



总结一下：

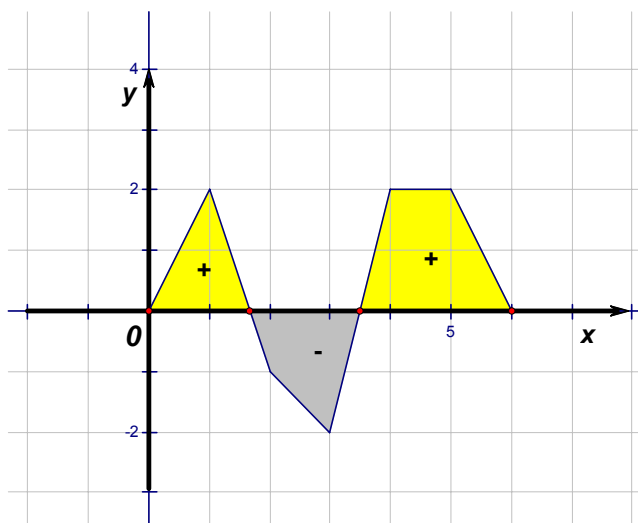
上述过程表述为向量的“一投一转，再加一伸”。

向量叉积的分配律的几何解释 2

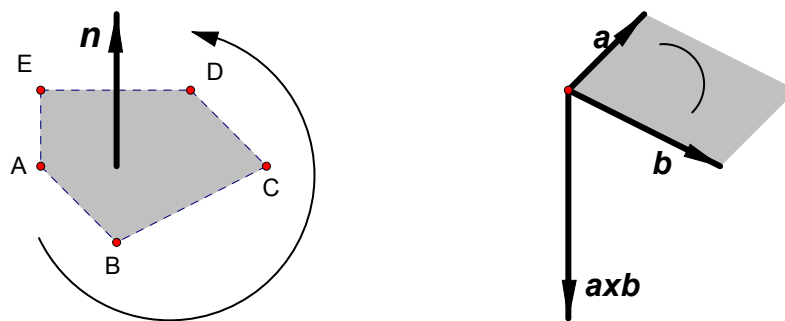
“一投一转，再加一伸”，叉积分配率整得忒麻烦？再来一个简单点的几何解释。

这个简洁的叉积分配图解需要有方向的面积的概念。我们首先介绍一下有向面积。

有方向线段被用来作为向量的图形。那么面积也是有方向的。在微积分对 x - y 平面上的曲线与 x 坐标轴围成的面积积分中， x 坐标轴上方的面积积分值为正，轴下方的面积积分值为负。这实际上也是面积有方向的表现。

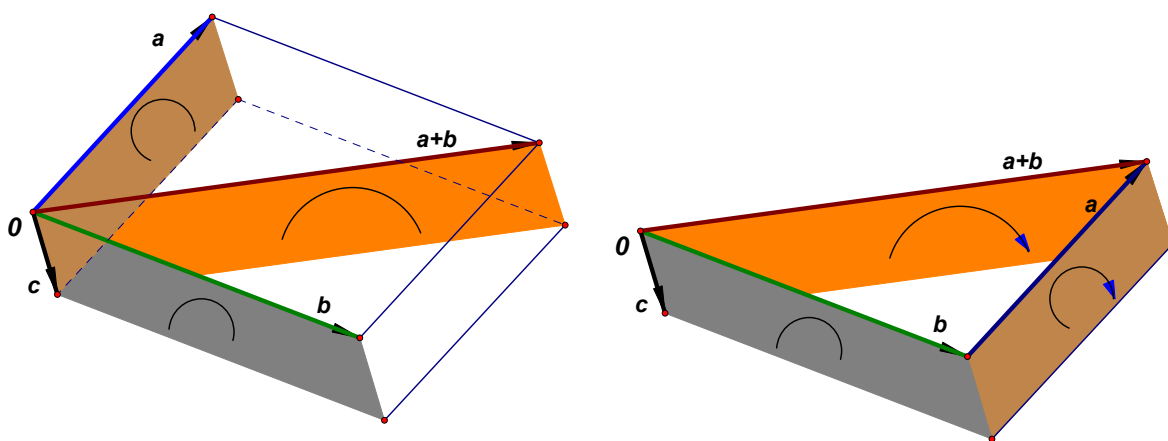


一个有边界的平面（如图左），它的大小由它的面积决定，它的方向由它在空间的法线的方向来确定，因此有向面积也可以用向量的办法来完全刻画：向量的方向就是法线的方向，向量的长度正比于它的面积。按照右手规则，如果面积周线的回转方向是 $ABCDE$ ，那么法线的正向，也就是代表这面积的方向就是向上的。根据这种说法，我们可以这样说，向量不但可以表示一个有方向的线段，而且也可以表示一个有方向的面积。反过来讲，一个有向线段（一定长度的箭头）被用来作为向量的几何图形（这是几乎所有数学书的做法），而一个有方向的面积也可以表示一个向量。为了方便，我们可以称前者为线向量，称后者为面向量。

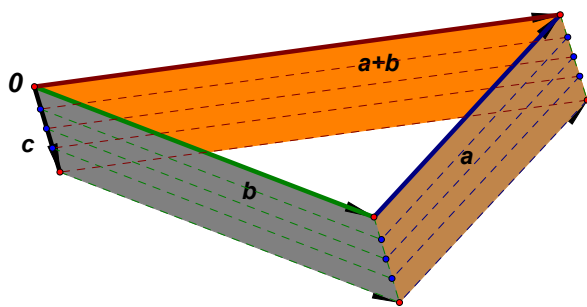


向量 \mathbf{a} 和 \mathbf{b} 的叉积就是一个有向面积的例子（如图右），以向量 \mathbf{a} 和 \mathbf{b} 为边的平行四边形的有向面积是用 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ 来表示的，因为所有向量都被处理成线向量，因此 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ 也被刻画成有向线段的图形，这个有向线段垂直于被代表的面，线段长度等于 \mathbf{a} 和 \mathbf{b} 构成的平行四边形的面积。在这里，线向量和面向量混叠在一起。下面的叙述中，我们割掉了线向量这条小尾巴，只留下了面向量-----一个具有旋转方向的平行四边形面。

前面讲过，两个线向量 \mathbf{a} 和 \mathbf{b} 相加得到一个线向量 $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ ，这个过程满足平行四边形法则和三角形法则。那么，线向量 \mathbf{a} 和 \mathbf{b} 分别和第三个线向量 \mathbf{c} 叉积依次得到了两个面向量 $\mathbf{a} \times \mathbf{c}$ 和 $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$ 。实际上，面向量的加法运算同样满足平行四边形法则和三角形法则。向量叉积的分配律 $\mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c} = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$ 的图示如下图所示。



面向量的加法法则的证明可以从封闭面的和向量为零着手。我们这里不再证明了。实际上，我们有更形象的图证来理解这个法则。比如对于三角形法则（右图），我们可以想象有向量 \mathbf{c} 的长度那么多的线向量 $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ 的三角形叠加在一起形成面向量，叠加的方向沿着向量 \mathbf{c} 的方向进行，如下图。



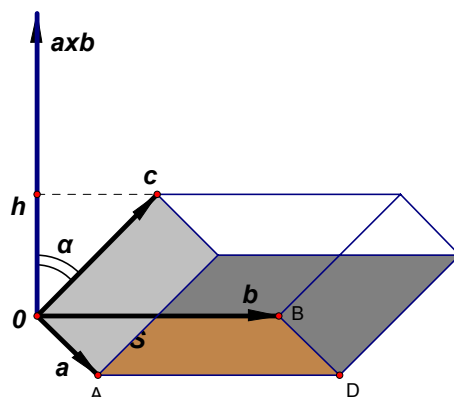
向量的混合积的几何解释

三个向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ ，如果先作两向量 \mathbf{a}, \mathbf{b} 的点积 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ ，因为它是数量，所以再与第三个向量 \mathbf{c} 相乘的结果 $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$ 表述一个新向量，它是向量 \mathbf{c} 的伸缩，与向量 \mathbf{c} 平行。

如果先作两向量 \mathbf{a}, \mathbf{b} 的叉积 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ ，这个所得的向量与第三个向量 \mathbf{c} 再作点积 $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$ 或者叉积 $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$ ，前者表示数量叫做三向量的混合积或三重数积；后者表示向量，叫做三重矢积。下面我们仅对向量的混合积的几何意义进行讨论。

三向量的混合积有关系 $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a} = (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b}$ ，且其中 $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| |\mathbf{c}| \cos \alpha$ ， $(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{b} \times \mathbf{c}| |\mathbf{a}| \cos \beta$ ， $(\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{c} \times \mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \gamma$ 。混合积是这样的一个数，他的绝对值表示以向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 为棱的平行六面体的体积。如果向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 以顺序组成右手系，那么积的符号是正的；如果组成左手系，积就是负的。

我们知道，向量积 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ 是一个向量，它的模在数值上等于以向量 \mathbf{a}, \mathbf{b} 为边的平行四边形 $OADB$ 的平面，它的方向垂直于这个平行四边形的平面，且当向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 以顺序组成右手系时，即向量 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ 与向量 \mathbf{c} 是朝着此平面的同一侧（如图）；且当向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 以顺序组成左手系时，即向量 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ 与向量 \mathbf{c} 是朝着此平面的另一侧。所以若向量 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ 与向量 \mathbf{c} 之间的夹角为 α ，则当向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 以顺序组成右手系时，夹角 α 为锐角；当向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 以顺序组成左手系时，夹角 α 为钝角。



又因为 $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| |\mathbf{c}| \cos \alpha$ ，则有当向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 组成右手系时， $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$ 为正值；当向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 组成左手系时， $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$ 为负值。

因此，以向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 为棱的平行六面体的底（平行四边形 $OADB$ ）的面积 S 在数值上等于 $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$ ，它的高 h 等于向量 \mathbf{c} 在向量 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ 上的投影，即 $h = |\mathbf{c}| \cos \alpha$ ，所以平行六面体的体积等于

$$V = Sh = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| |\mathbf{c}| \cos \alpha。$$

2.6 向量的积和张量之间的关系

从前面的看来，向量的内积定义和外积定义确有意义，但对于我们玩惯实数乘法且还没有得到高等数学训练的人来说，还是有点拿捏不住。为什么不能像两个多项式的乘法一样定义两个向量的乘法呢？

完全可以这样相乘。

二维向量的内积、外积和张量

先看二维空间中的两个向量 $\mathbf{a} = (a_x, a_y)$ ， $\mathbf{b} = (b_x, b_y)$ 把它们改写成带有 x, y 坐标轴的单位向量的形式，就是 $\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j}$ ， $\mathbf{b} = b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j}$ ，我们对向量 \mathbf{a} 和 \mathbf{b} 就象普通的多项式乘法分配律一样展开运算，得到如下：

$$\mathbf{ab} = (a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j})(b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j}) = \underline{a_x b_x \mathbf{ii}} + \underline{a_y b_y \mathbf{jj}} + \underline{(a_x b_y \mathbf{ij} + a_y b_x \mathbf{ji})}$$

这里有个关键的问题，就是如何定义坐标轴的单位向量 \mathbf{i}, \mathbf{j} 之间的运算？我们发现，不同的规

定，就会得到不同的结论：

- 当定义 \mathbf{i}, \mathbf{j} 之间的运算为内积运算时，即 $\mathbf{ii} = \mathbf{jj} = 1, \mathbf{ij} = \mathbf{ji} = 0$ 时上式化简为：

$$\mathbf{ab} = \underline{a_x b_x + a_y b_y} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$$

这正是向量 \mathbf{a} 和 \mathbf{b} 作内积运算的定义式。

- 当定义 \mathbf{i}, \mathbf{j} 之间的运算为外积运算时，即 $\mathbf{ii} = \mathbf{jj} = 0, \mathbf{ij} = -\mathbf{ji} = \mathbf{k}$ 时上式化简为：

$$\mathbf{ab} = a_x b_y \mathbf{ij} + a_y b_x \mathbf{ji} = (a_x b_y - a_y b_x) \mathbf{k} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$$

这正是向量 \mathbf{a} 和 \mathbf{b} 作外积运算的定义式，在二维向量空间外又生成了一个第三维向量。

- 当定义 \mathbf{i}, \mathbf{j} 之间的运算只是作为一个顺序的记号时，即 $\mathbf{ij} = 1, \mathbf{ii} = \mathbf{jj} = 0, \mathbf{ji} = -1$ 时上式化简为：

$$\mathbf{ab} = a_x b_y \mathbf{ij} + a_y b_x \mathbf{ji} = a_x b_y - a_y b_x = \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{vmatrix}$$

这正是向量 \mathbf{a} 和 \mathbf{b} 作行向量构成的方阵的行列式的运算的定义式。

- 当定义 $\mathbf{i} = 1, \mathbf{j} = \sqrt{-1}$ ，与复数进行对应时，上式化简为：

$$\mathbf{ab} = \underline{a_x b_x - a_y b_y} + \underline{(a_x b_y + a_y b_x) \mathbf{j}}$$

这正是复数 \mathbf{a} 和 \mathbf{b} 作乘法运算的定义式。

总结一下：

本等式 $\mathbf{ab} = (a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j})(b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j}) = \underline{a_x b_x \mathbf{ii} + a_y b_y \mathbf{jj}} + \underline{(a_x b_y \mathbf{ij} + a_y b_x \mathbf{ji})}$ 的第一部分包含了向量 \mathbf{a} 和 \mathbf{b} 内积的结果，第二部分包含了向量 \mathbf{a} 和 \mathbf{b} 外积的结果或者是行列式的结果，即：

$$\mathbf{ab} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) + (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$$

从这个结论看来，向量的内积运算、外积运算覆盖了二维向量及其复数的所有乘积模式的结果。

实际上，象上述的多项式一样的向量乘法叫做向量的直积，向量的直积是向量之间最简单的一种乘法运算，其结果是张量（向量是一阶张量的一种），所以也叫做向量（矢量）的张量积，俗称并矢。

因此，采用较高等一点的说法就是，向量的张量积包含了向量的内积和外积的结果。

三维向量的内积、外积和张量

再看看三维空间中的两个向量为 $\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k}$, 同样, 我们对向量 \mathbf{a} 和 \mathbf{b} 同样展开直积运算, 得到如下的张量:

$$\begin{aligned} \mathbf{ab} &= (a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k})(b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k}) \\ &= \underline{a_x b_x \mathbf{ii} + a_y b_y \mathbf{jj} + a_z b_z \mathbf{kk}} + \underline{(a_x b_y \mathbf{ij} + a_y b_x \mathbf{ji}) + (a_x b_z \mathbf{ik} + a_z b_x \mathbf{ki}) + (a_y b_z \mathbf{jk} + a_z b_y \mathbf{kj})} \end{aligned}$$

有点复杂, 有没有看出点规律?

与二维向量处理的方式类似, 我们定义坐标轴的单位向量 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ 之间的不同运算, 得到了以下不同的结论:

- 当定义 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ 之间的运算为内积运算时, 即 $\mathbf{ii} = \mathbf{jj} = \mathbf{kk} = 1$, $\mathbf{ij} = \mathbf{ji} = \mathbf{ik} = \mathbf{ki} = \mathbf{jk} = \mathbf{kj} = 0$ 时上式化简为:

$$\mathbf{ab} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$$

这正是向量 \mathbf{a} 和 \mathbf{b} 作内积运算的定义式。

- 当定义 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ 之间的运算为外积运算时, 即 $\mathbf{ii} = \mathbf{jj} = \mathbf{kk} = 0$, $\mathbf{ij} = -\mathbf{ji} = \mathbf{k}$, $\mathbf{jk} = -\mathbf{kj} = \mathbf{i}$, $\mathbf{ki} = -\mathbf{ik} = \mathbf{j}$ 时上式化简为:

$$\begin{aligned} \mathbf{ab} &= (a_x b_y \mathbf{ij} + a_y b_x \mathbf{ji}) + (a_x b_z \mathbf{ik} + a_z b_x \mathbf{ki}) + (a_y b_z \mathbf{jk} + a_z b_y \mathbf{kj}) \\ &= (a_x b_y - a_y b_x) \mathbf{k} + (a_z b_x - a_x b_z) \mathbf{j} + (a_y b_z - a_z b_y) \mathbf{i} \\ &= \mathbf{a} \times \mathbf{b} \end{aligned}$$

这正是向量 \mathbf{a} 和 \mathbf{b} 作外积运算的定义式, 在三维向量空间内又生成了第三个同维向量。

总结一下:

本等式,

$$\begin{aligned} \mathbf{ab} &= (a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k})(b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k}) \\ &= \underline{a_x b_x \mathbf{ii} + a_y b_y \mathbf{jj} + a_z b_z \mathbf{kk}} + \underline{(a_x b_y \mathbf{ij} + a_y b_x \mathbf{ji}) + (a_x b_z \mathbf{ik} + a_z b_x \mathbf{ki}) + (a_y b_z \mathbf{jk} + a_z b_y \mathbf{kj})} \end{aligned}$$

其第一部分包含了向量 \mathbf{a} 和 \mathbf{b} 内积的结果, 第二部分包含了向量 \mathbf{a} 和 \mathbf{b} 外积的结果或者是行列式的结果, 即:

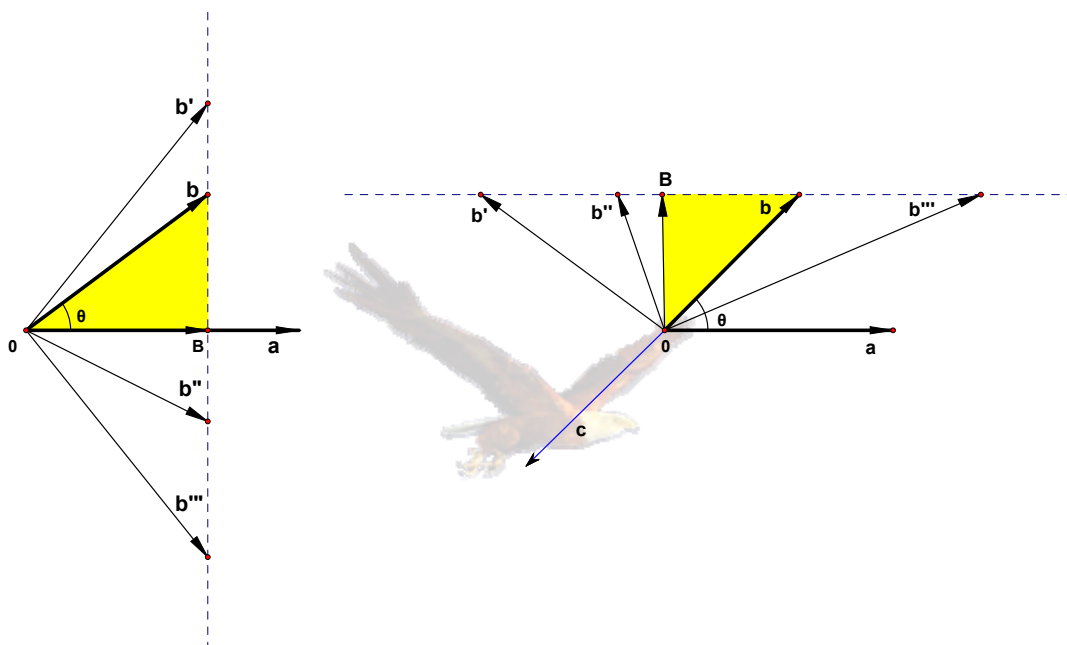
$$\mathbf{ab} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) + (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$$

从这个结论看来，向量的内积运算、外积运算覆盖了两个三维向量的所有乘积模式的结果，或者说，向量的张量积包含了向量的内积和外积的结果。

2.7 向量有没有除法？

向量的乘法有两种：点积和叉积。一般讲除法是乘法的逆运算。那么向量的除法是点积的除法呢还是叉积的除法？看来比较麻烦，所以大家较少谈论向量的除法。这里我们看看如何麻烦的？先约定一下符号：两个向量 \mathbf{a} 和 \mathbf{b} ，分别有 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = c$ 和 $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{c}$ ；已知 \mathbf{a} 和乘积，如何求 \mathbf{b} 。

能不能得到向量 \mathbf{b} ，请看下图。



左图中，我们根据点积的公式 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = ab \cos \theta$ ，立刻得到：

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}' = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}'' = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}''' \dots = c$$

无数个向量 $\mathbf{b}, \mathbf{b}', \mathbf{b}'', \mathbf{b}''' \dots$ 皆能得到同样的点积值。这个意思是说，点积没有除法。

再看右图，我们根据叉积的公式 $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = ab \sin \theta \mathbf{N}$ ，立刻得到：

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}' = \mathbf{a} \times \mathbf{b}'' = \mathbf{a} \times \mathbf{b}''' \dots = \mathbf{c}$$

无数个向量 $\mathbf{b}, \mathbf{b}', \mathbf{b}'', \mathbf{b}''' \dots$ 同样皆能得到同样的叉积值。这个意思是说，叉积也没有除法。

结果真让人失望！

莫急，如果我们把点积和叉积联立解方程组，倒可以解出除法的表达式出来。解方程：

$$\begin{cases} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = c \\ \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{c} \end{cases}$$

对于 $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{c}$ ，两边左叉乘 \mathbf{a} ，并用二重向量叉积公式 $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$ 得

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) - \mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} \cdot \mathbf{a})$$

把方程组的两个等式带入，即得 $\mathbf{a} \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} - \mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} \cdot \mathbf{a})$ ，整理得到

$$\mathbf{b} = \frac{\mathbf{c} \mathbf{a} - \mathbf{a} \times \mathbf{c}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}$$

这就是向量的除法。

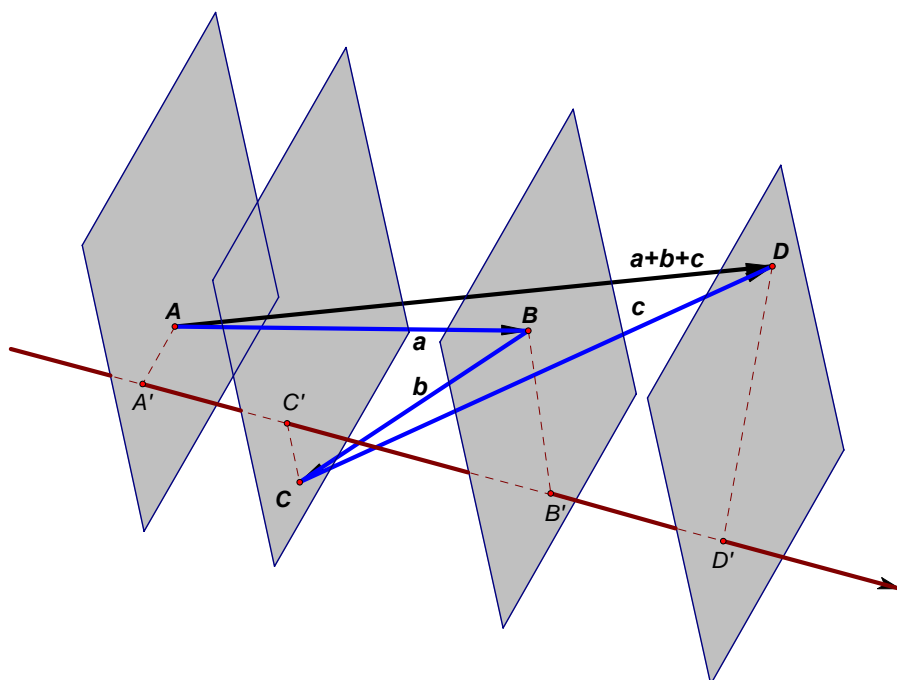
2.8 向量的投影和的几何解释

多个向量在任意轴上的投影和

向量的加法的推广之一就是：

多个或有限个向量的和在任意轴上投影等于各个向量在同一轴上投影的和。

下面我们给出其几何图形的图解。



图中，向量 \mathbf{a} \mathbf{b} \mathbf{c} 及其和向量 $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$ 的图形分别是：

$\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$ ， $\mathbf{b} = \overrightarrow{BC}$ ， $\mathbf{c} = \overrightarrow{CD}$ ， $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \overrightarrow{AD}$ ，各向量的端点 A、B、C、D 在轴上的投影分别是 A' 、 B' 、 C' 、 D' 。

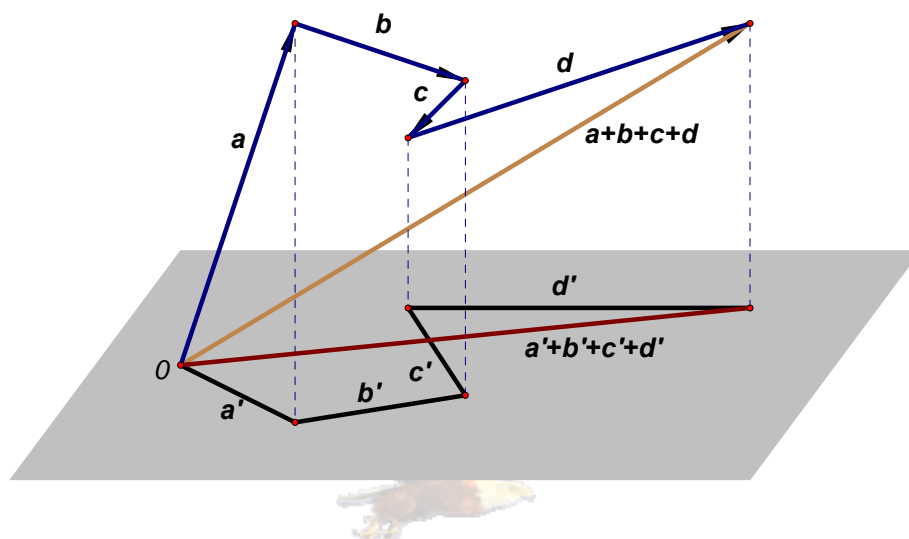
图示是显然的， $A'B' + B'C' + C'D' = A'D'$ ，命题得解。

多个向量在任意平面上的投影和

向量的加法的推广之二就是：

多个或有限个向量的和在任意平面上投影等于各个向量在同一平面上投影的和。

下面我们给出其几何图形的图解。



与向量在轴上的投影类似。结论在图解中一目了然。这个结论是由投影变换的性质所决定。

2.9 变向量的几何意义

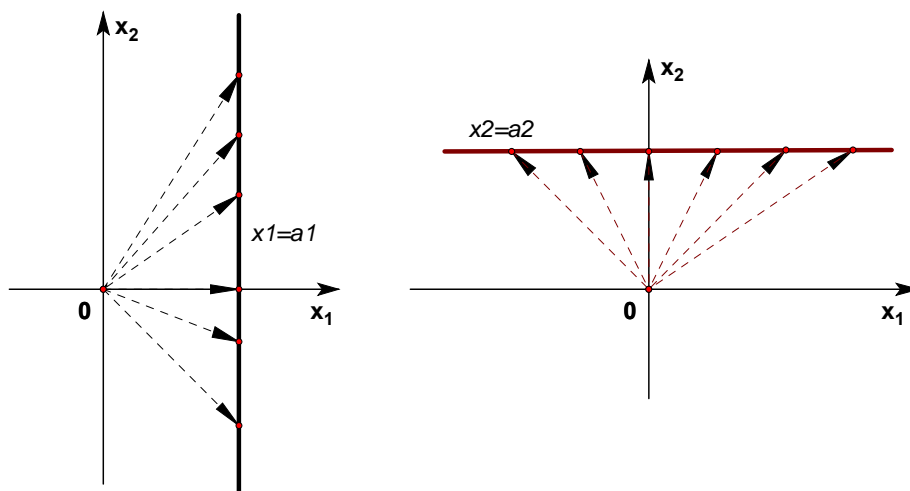
对于用数组 (a_1, a_2, \dots, a_n) 表示的向量 \mathbf{a} ，如果数组中的元素部分或者全部是变量，那么这个变向量在 n 维坐标系下表示的几何图形是什么呢？

二维变向量的几何图形

在二维平面上，二维向量的两个分量全部为可变的未知量，记为 (x_1, x_2) ，那么变向量 (x_1, x_2) 可以表示平面上任意一个向量（无数个）。如果 x_1, x_2 取遍整个实数范围，则可以涵盖了整个向量平面，因此 (x_1, x_2) 的几何图形表示为一个平面。

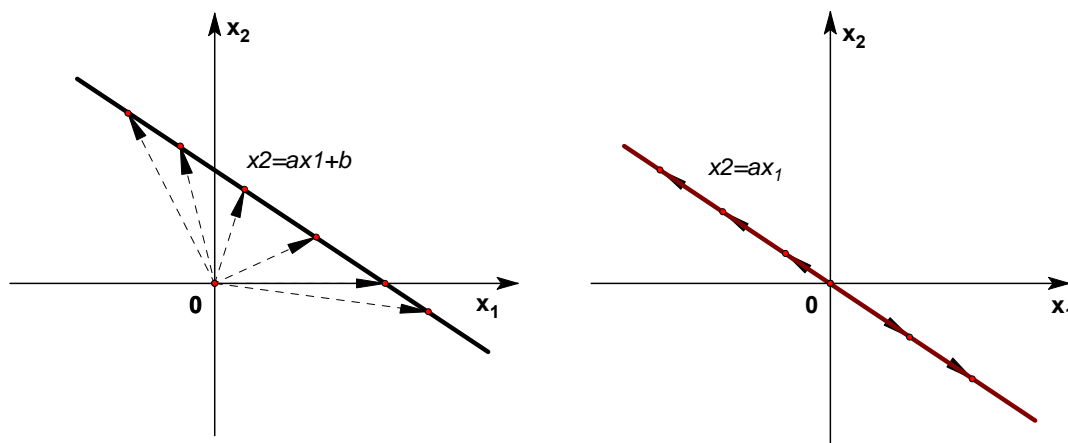
如果我们固定 (x_1, x_2) 一个分量，如 (a_1, x_2) ，其中 a_1 表示某一确定的实数， x_2 表示为确定的变元。那么变向量 (a_1, x_2) 表示的是无数个向量，这些向量的末端全部在直线 $x_1 = a_1$ 上（如图2.X）。

类似的，变向量 (x_1, a_2) 表示的是直线 $x_2 = a_2$ ，无数个向量的末端全部在直线 $x_2 = a_2$ 上。

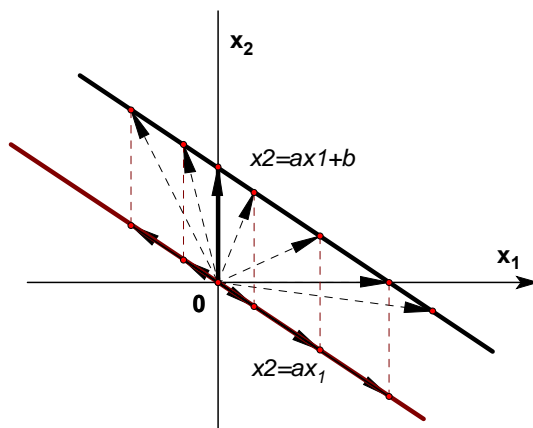


进一步，如果向量的分量之间有线性关系的话，比如 $x_2 = ax_1 + b$ ，向量可以表示为 $(x_1, ax_1 + b)$ 的形式。那么变向量 $(x_1, ax_1 + b)$ 就可以表示一个直线，所有向量的末端在直线 $x_2 = ax_1 + b$ 上。

当然，如果 $b = 0$ ，即 (x_1, ax_1) 就表示为一条过原点的直线，这时候所有的向量的始端和末端都处于直线上。



方程 $x_2 = ax_1 + b$ 和 $x_2 = ax_1$ 是平行线， b 是 x_2 轴上的截距。我们用变向量来表示这对平行线的关系就是 $(x_1, ax_1 + b) = (x_1, ax_1) + (0, b)$ 。用向量的观点解释就是，变向量 $(x_1, ax_1 + b)$ 是变向量 (x_1, ax_1) 及常向量 $(0, b)$ 的和。从图形上解释就是直线 $(x_1, ax_1 + b)$ 是由过原点的直线 (x_1, ax_1) 沿向量 $(0, b)$ 平移 b 得到的。其几何图性给出如下：



三维变向量的几何图形

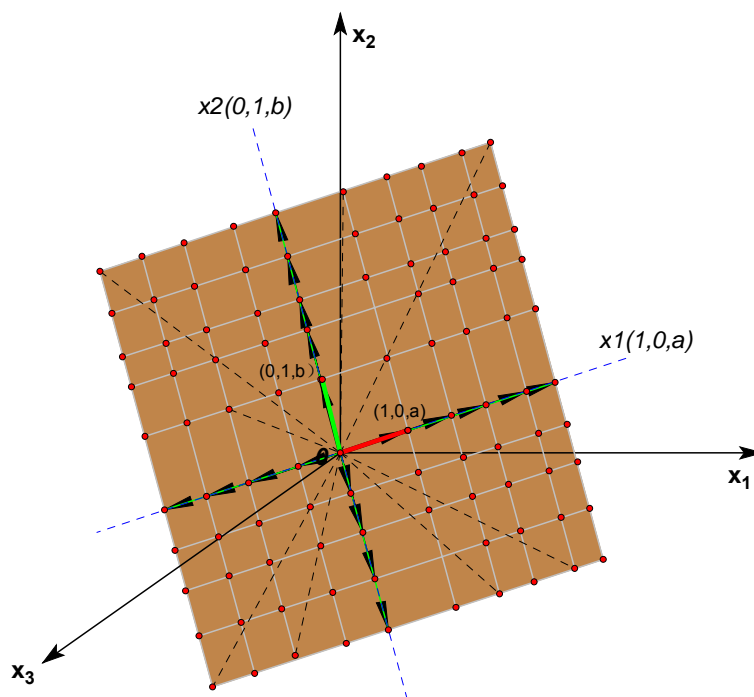
与二维变向量相类似， (x_1, x_2, x_3) 有三个不定变元，表示三维向量空间中的任意一个向量，代表了整个三维空间。

变向量 (a_1, x_2, x_3) 、 (x_1, a_2, x_3) 和 (x_1, x_2, a_3) 各有两个不定变元，分别表示了平面 $x_1 = a_1$ ， $x_2 = a_2$ 和 $x_3 = a_3$ 。每个变向量中任意一个向量的末端都在这个变向量所表示的平面上。这些平面分别垂直于一个坐标轴。

变向量 (a_1, a_2, x_3) 、 (a_1, x_2, a_3) 和 (x_1, a_2, a_3) 各有一个不定变元，分别表示了三根直线上。这些直线分别平行于一个坐标轴。

变向量 $(x_1, x_2, ax_1 + bx_2)$ 有两个独立变元 x_1, x_2 ，第三个变元 x_3 与 x_1, x_2 有线性关系： $x_3 = ax_1 + bx_2$ 。为了方面看到这个变向量的几何图形，我们对它进行向量分解：

$$(x_1, x_2, ax_1 + bx_2) = (x_1, 0, ax_1) + (0, x_2, bx_2) = x_1(1, 0, a) + x_2(0, 1, b)$$



在 x_1, x_2 独立地取遍所有不同的实数时, $x_1(1,0,a) + x_2(0,1,b)$ 所形成的无数个向量覆盖了一个平面。实际上, 在后面的章节中, 这个平面是一个向量空间, 一个被常向量 $(1,0,a)$ 和 $(0,1,b)$ 所张成的向量平面空间, 记为 $\text{Span}\{(1,0,a), (0,1,b)\}$ 。因此, 我们可以有这样的一个等价式:

$$(x_1, x_2, ax_1 + bx_2) \cong \text{Span}\{(1,0,a), (0,1,b)\}$$

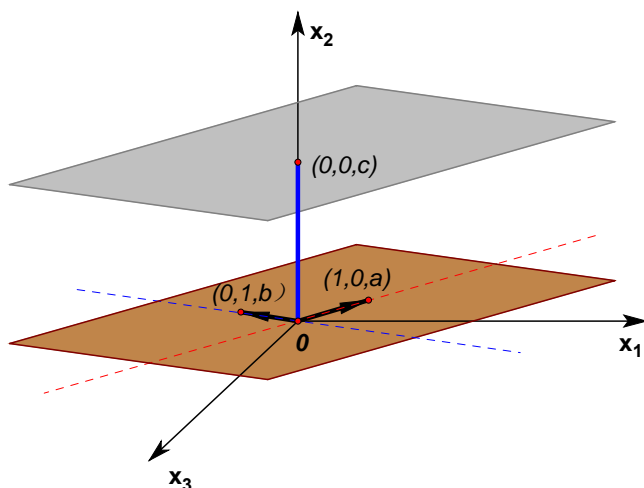
类似的, 变向量 $(x_1, x_2, ax_1 + bx_2 + c)$ 也有两个独立变元 x_1, x_2 , 第三个变元 x_3 与 x_1, x_2 有线性关系: $x_3 = ax_1 + bx_2 + c$ 。同样, 我们也对它进行向量分解:

$$(x_1, x_2, ax_1 + bx_2 + c) = (x_1, 0, ax_1) + (0, x_2, bx_2) + (0, 0, c) = x_1(1,0,a) + x_2(0,1,b) + (0,0,c)$$

同变向量 $(x_1, x_2, ax_1 + bx_2)$ 比较起来, 变向量 $(x_1, x_2, ax_1 + bx_2 + c)$ 与它的关系可以表示为:

$$(x_1, x_2, ax_1 + bx_2 + c) = (x_1, x_2, ax_1 + bx_2) + (0, 0, c)$$

两个变向量差了一个常向量。因此变向量 $(x_1, x_2, ax_1 + bx_2 + c)$ 的几何图形是 $(x_1, x_2, ax_1 + bx_2)$ 的图形加了一个常向量 $(0,0,c)$ 。得到的新图形仍然是个平面, 只是沿着向量 $(0,0,c)$ 的方向平移了长度为 c 的距离。



：一个变向量是和一个解析方程或方程组相对应的，因此变向量和方程一样能表示一个几何图形。实际上，变向量也叫向量函数。

变向量的应用

变向量简化了线性方程或方程组，但这种简化与线性方程组的向量方程或者矩阵方程对线性方程的简化又有不同。下面我们看看如何用变向量的概念去解线性方程组。

对于二阶线性方程组 $\begin{cases} x_2 = a_1 x_1 + b_1 \\ x_2 = a_2 x_1 + b_2 \end{cases}$ 可以用变向量的交 $(x_1, a_1 x_1 + b_1) \cap (x_1, a_2 x_1 + b_2)$ 来等价表

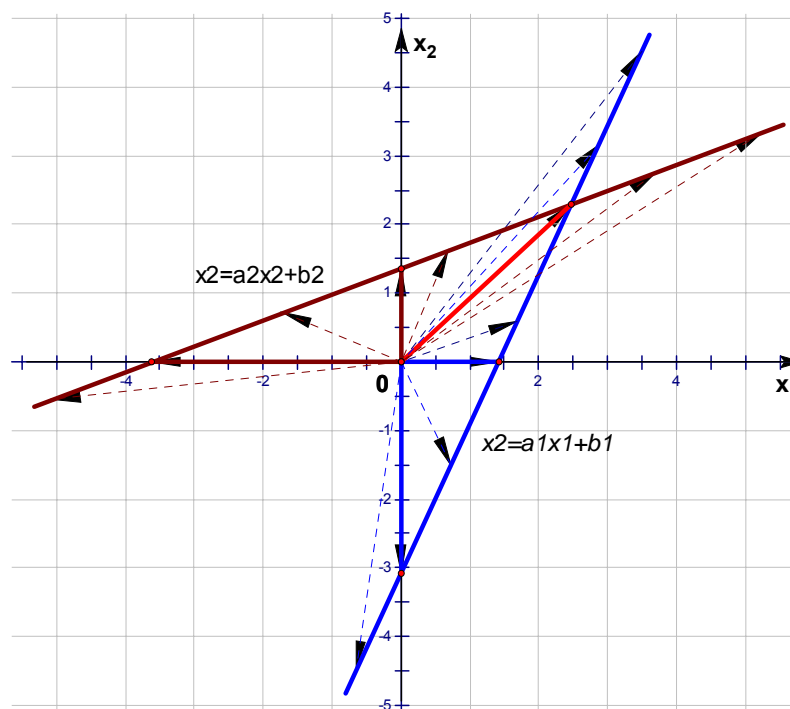
示。可以想象，两个变向量相同的向量就是他们的交集。如果两个向量相同，那么向量的夹角就会为零，根据行列式的几何意义知道，两个夹角为零的向量构成的平行四边形为零，即行列式为零。因此得到：

$$\begin{vmatrix} x_1, a_1 x_1 + b_1 \\ x_1, a_2 x_1 + b_2 \end{vmatrix} = 0$$

化简整理得到 $x_1 = 0$ 或者 $x_1 = \frac{b_1 - b_2}{a_2 - a_1}$ 。进而得到向量对 $(0, b_1), (0, b_2)$ 和

$\left(\frac{b_1 - b_2}{a_2 - a_1}, \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2 - a_1} \right)$ 及其自身。

实际上，应用行列式可以求出所有的相关向量。如上式得到了两对线性相关的向量。其中一对向量重合，即得到了线性方程组的解 $\left(\frac{b_1 - b_2}{a_2 - a_1}, \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2 - a_1} \right)$ 。



从图中我们看到，还有一对线性相关的向量没有求出来。但如果对线性方程组的变向量以 x_2 为自变量时就可以得到这对相关量。

2.10 向量的“社会”关系

在这一节中，我们简要的探讨一下向量与主要几个数学概念或领域的联系，以期更好的理解向量。

向量和矢量

向量就是矢量。

Vector，物理界叫“矢量”，数学界叫“向量”。其实是一回事。在历史上，数学界曾把vector定名为“矢量”，而物理界曾把它定名为“向量”。后来，可能是为了尊重对方，却对换了一下，数学用向量，物理用矢量。矢量、向量的分歧，因为各自学科发展繁多，学科有分支，术语有派生，统一起来没那么容易，因此分歧一直维持到今。事实上，台湾物理界至今用的是还“向量”。

英文vector的中文译名是“向量”。顾名思义，就是指“既有方向又有大小的量”。可以说译得十分贴切。不过，中国在清末引进vector概念时，物理学家称之为“矢量”，至今两种译名并存。究其原因，早年的向量，只是物理学专门用来表示力和速度等物理量的工具，并不为数学家所重视。因为物理学用得更多，矢量的译名自然流行。向量进入数学领域之后，渐渐有取代“矢量”之势。

向量与数

复数为“媒”，撑起“向量空间”一片天史载，古希腊的亚里士多德(公元前384—公元前322)已经知道两个力的合成，可以用平行四边形的法则得到。但是，集古希腊数学大成的《几何原本》，

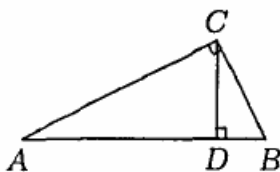
没有讨论向量。以后的一千多年中，经过文艺复兴时期，牛顿创立微积分之后的17、18世纪，向量的知识没有什么变化。伽利略(1564—1642)清楚地叙述了“平行四边形法则”，仅此而已。这点向量知识，形不成多少有意义的问题，发展不成一个独立的学科，因而数学家没有把向量当作一回事。进入19世纪，事情开始发生变化。“复数”充当了催化剂。丹麦的魏塞尔(1745—1818)，瑞士的阿·瓦里士(1768—1822)发现了复数的几何表示，德国高斯(1777—1855)建立了复平面的概念，从而使向量与复数建立起一一对应。这不但为虚数的现实化提供了可能，也为向量的发展开辟了道路。向量表示为 \vec{x} 有序的实数 (a, b) ，是一个重大的进步。当时的数学家想到，实数可看作一维向量，复数可看作二维向量，那么一定还有“三维数”、“四维数”，乃至“ n 维数”。令人失望的是，哈密发现，要形成有加减乘除四则运算的数系，只能是四元数，而且不得不放弃乘法的交换律。最后发现的八元数，连结合律也维持不了。除此而外，其他维数的向量，根本无法定义四则运算，谈不上构成数系。^[1]德国数学家格拉斯曼1844年引入了 n 维向量的概念。令人深思的是， n 维向量既然不能成为有四则运算的数系，那么它的结构是什么呢？这是19世纪抽象代数思想的发展的自然思考。研究表明， n 维向量全体，可以定义加法和减法，此外还有单个的“数”可以和向量相乘。这就是向量空间(线性空间)的来源。此外，两个向量可以有“内积”和“外积”，但是它们都没有逆运算，即没有除法。这是一个不同于“数系”的崭新的数学结构。果然，在向量空间的舞台上，产生了具有深远影响的数学成就。

尽管实平面 R^2 中的元素和复平面 C 是一一对应的(见图)，并且加法也相同，但逻辑上两者是不同的，在 R^2 上，我们仅仅能对一个向量作标量乘法(向量的内积不能作为向量乘法，因为内积得到一个数，而不是向量，它不属于 R^2)，然而在 C 上，我们可以对任意两个复数相乘并得到第三个复数。

向量和几何(向量几何)

使“点”可以运算平面几何一向以综合法的演绎为主，以后引入坐标系，发展为坐标几何，即解析几何。数与形互相结合，使得几何学别开生面。如前所述，坐标表示的“点”，依然不能运算。有了向量之后，情况发生了改变。几何学家项武义认为“向量几何在本质上是坐标几何的返璞归真。”即向量几何揭示了坐标几何的本质，是坐标几何的向前发展。向量几何使用“向量的数量积”，使之成为超越坐标几何的有力工具。两条直线的夹角，当然也可以从两直线方程的系数求得。但是，在向量几何里，它可以用两直线的方向向量的数量积加以表示。本来很费事的夹角问题，通过一次运算就解决了。利用向量，许多几何命题迎刃而解。至于利用向量讨论直线与直线的垂直与平行，空间线面、面面之间的位置关系，比起综合方法需要“个别处理”的技巧，它是一个“一揽子”解决的手段，显得十分轻松。

以下是初中的教学事例：勾股定理的证明(事先准备知识：由一个角的两边的任何一点向另一边作投影，其压缩的比值相同)。



如图，已知CD是Rt△ABC斜边AB上的高。在∠A中， $AC = \alpha AB$ ， $AD = \alpha AC$ ，因此 $AD = \alpha^2 AB$ 。

在∠B中， $BC = \beta AB$ ， $BD = \beta BC$ ，因此 $BD = \beta^2 AB$ 。

由于 $AB = AD + BD = \alpha^2 AB + \beta^2 AB = (\alpha^2 + \beta^2)AB$ ，因此 $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ 。

所以， $AC^2 + BC^2 = \alpha^2 AB^2 + \beta^2 AB^2 = (\alpha^2 + \beta^2)AB^2 = AB^2$ 。

这里，将线段的投影，三角的余弦，以及未来的向量分解和数量积等知识都拧在一起，并用来证明勾股定理，在数学思想上更简约、更紧密了。总之，向量和几何的融合，已是不可阻挡的潮流。

向量和三角：

把三角看作向量的“投影”以来，三角学的处理引人注目。数学科普作家张景中院士认为数学课程中，三角至关重要。三角是联系几何与代数的一座桥梁，数形结合的一份经典，沟通初等数学和高等数学的一条通道。函数、向量、坐标、复数等许多重要的数学知识与三角有关，大量的实际问题的解决要用到三角知识。

在现行的课程中，三角函数是作为直角三角形的两边的比值引进的。这样的定义，依赖于有关相似三角形的知识，而且只能定义锐角的三角函数。其实，三角函数的定义，无非是给三角函数提供一个几何模型。张景中建议用面积方法建立三角学。首先采用新的角度认识正弦。定义：把边长为1，有一个角为A的菱形面积记作 $\sin A$ 。于是，容易得到平行四边形的面积公式

$$S_{\text{平行四边形}} = AB \cdot AD \cdot \sin A,$$

取其一半，得到三角形面积公式：

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}ac \sin B = \frac{1}{2}ab \sin C$$

正弦可以看做将边长为1的正方形“压扁”为菱形时面积所打的折扣。折扣，是小学生就明白的数学常识。现在，如果我们把折扣观念用到向量的分解上，余弦和正弦就是向量OA在两个坐标轴上的投影在长度上所打的折扣。

将向量a和b的数量积定为

$$ab = |a||b|\cos \alpha$$

这样也自然地把三角和向量联系起来了：单位圆上的半径向量OA，其在x轴和y轴上的投影长度，就是余弦和正弦。于是，任意角的三角函数的符号变化就显得一清二楚，正弦、余弦函数的图象也很容易画出。

特别是，由向量的数量积(坐标定义)，导出余弦的差角公式简直是举手之劳，一步到位，简单极了。如图2所示，利用数量积可得

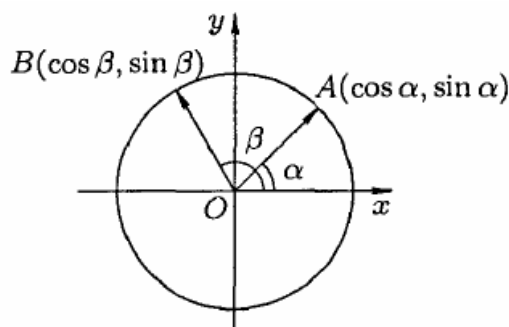


图2

$$\cos(\beta - \alpha) = \frac{\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta}{\underbrace{|OA|}_{=1} \underbrace{|OB|}_{=1}}$$

$$\text{因 } \underbrace{|OA|}_{=1} = \underbrace{|OB|}_{=1} = 1$$

因此:

$$\cos(\beta - \alpha) = \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

向量非常直观，几何意义很明显。即使是数量积，也非常直观。到商场购物，71，种物品的价格向量 $P(p_1, p_2, \dots, p_n)$ 和你购物的数量向量 $B(b_1, b_2, \dots, b_n)$ 的数量积就是你的付款数：

$$A = P \cdot B = p_1 b_1 + p_2 b_2 + \dots + p_n b_n$$

所谓向量的数量积，其实就在我们身边。最后，采用数量积的坐标定义，能否得出数量积的运算律，特别是分配律？经过严格论证，完全可以非常简单地得到，而且也不会出现循环论证。

向量与解析几何

向量在今天越来越受人重视，为何呢？说来简单，无非是向量“能算”。

在中学，解析几何课程主要研究平面上一些点、线的几何位置和几何性质，所涉及的点、直线、曲线均共面，它们都落在坐标系所在的平面内。在大学，解析几何课程所讨论的主要是空间图形，所涉及的点、线、面的位置关系复杂。教科书从空间向量与坐标入手，主要以向量为工具，研究空间中的一些几何图形及性质，不论从知识上还是从思维上，都是对中学内容的加深和提高。由于平面上的几何图形比较直观，点、线之间的关系比较简单，主要以坐标为工具进行研究；而空间上的几何图形，大多比较复杂，构成图形的点、线、面及其之间的位置关系较复杂，仅用坐标工具远远不能达到研究问题的最佳境界，只有使用向量这一工具，才能比较好而深刻地探讨空间图形问题。实际上向量综合了图形（直线段或者说方向）和数字（向量终点用一组数表示）两种几何分析方法使然。

无论是直线、平面方程的讨论，还是空间曲面、曲线的参数方程以及通过方程去讨论图形，到处都需要向量的参与。它就像木匠的尺子、石匠的凿子，在整个学科的展开中处处需要，向量工具灵活、好用。它有时是三角形的边，三角形的边的关系，经过向量的参与就变成简单的和的关系。它有时又是一个方向，用它可以决定直线的方向、平面的倾斜度，而一族直线、一族平面之间的关系有时通过两个小小的向量之间的关系就可以解决了。在讨论空间曲线、空间曲面的方程时，复杂、多变的轨迹问题，又变成了有公共起点的变向量问题，寻找到变向量的变化规律后，问题就迎刃而解了。因此说，向量思想是解析几何学的灵魂，要学好《解析几何》这一课程就必须掌握向量的作用，并要牢牢把握好向量这一有效工具。

向量与线性代数

“向量”上台，“线性数学”大放异彩“线性”，是20世纪数学中使用十分广泛的词汇。无论是英文还是俄文，我们常说的“一次方程”和“二次函数”，原本都是“线性方程(Linear Equation)”和“线性函数(Linear Function)”。在大学里，则流行“线性”。“线性代数”、“线性变换”、“线性常微分方程”、“线性偏微分方程”、“线性规划”、“线性算子”、“线性泛函”、“线性控制系统”、“拟线性”、“准线性”等等。为什么以向量为基本对象的“线性数学”会流行呢？

实际上，相对于“非线性数学”来说，线性数学比较简单。微积分学的基本思想是“以直代曲”，局部地以切线代替曲线。于是，在某种条件下，微分方程就可以近似地变成“线性代数方程组”。20世纪有了电子计算机，无论未知数的个数 n 有多大，都可以设法计算。于是，把以 n 维向量为对象的线性方程组搞清了，许多复杂的数学问题也就有解了(至少是近似的)。工程中十分有效的有限元方法，其基础就是求解线性方程组。总之，在 n 维向量空间基础上生成的线性代数，成了许多数学问题得以解决的必备工具。计算机技术的推动，使得各种各样的“线性数学”成熟起来。

矩阵是线性代数中的主要研究对象，矩阵是“函数”概念的推广，矩阵描述向量之间的变换。如果说，函数是“数”与“数”之间的对应关系，那么矩阵则是向量与向量之间的对应(线性对应关系)，可以看作“函数”概念的推广。矩阵作为一种新型的数学表示工具，已经或者正在成为现代公民的常识。

矩阵应用虽然十分广泛，但是在数学上最亲近的原型还是线性方程组的求解。从高斯消去法看矩阵的变化，自然是必不可少的。然而，给人的印象是“杀鸡用牛刀”，数学上缺乏非矩阵不可的那种探究动力。于是，将二阶线性方程组用向量作两种不同的考察，数学上的新意顿出，令人深思。

一种是常规的，即写成 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$ 形式。解方程就是找矩阵 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 一个逆矩阵，恰将向量 (m, n) 变为 (x, y) 。另一个角度就是写成 $x(a, c) + y(b, d) = (m, n)$ 。解方程就是设法将 (m, n) 表示成 (a, c) 和 (b, d) 的线性组合。这样就很自然地引出了行列式。

以下章节待续。。。