

OMB Finale MINI 2004, Question 1

Le code d'un cadenas est un nombre à quatre chiffres (de 0 à 9, le nombre pouvant commencer par 0). Mathieu a oublié le code mais il se rappelle que ce nombre est inférieur à 2004 et que ses quatre chiffres sont tous différents. Combien de codes doit-il essayer pour être certain que le cadenas s'ouvre?

Réponse: 1008

Notons notre nombre à quatre chiffres $abcd$.

Vu les données, a ne peut que être 0, 1 ou 2.

On peut d'emblée exclure 2, car 2000, 2001, 2002 et 2003 ne remplissent pas les conditions: 0 est répété 2 fois.

Si a vaut 0,

on a 9 choix pour b (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9),

8 choix pour c (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 sans le chiffre choisi pour b) et

7 choix pour d (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 sans les chiffres choisis pour b et c).

il y a alors $9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$ arrangements possibles.

De même, si le premier chiffre vaut 1, on a 504 arrangements possibles.

En tout, il y a alors $504 + 504 = 1008$ arrangements possibles.

Pour aller plus loin

Comme précédemment, on veut retrouver le nombre de d'arrangements possibles lorsque $a = 0$

Cette fois-ci utilisons une formule.

Le nombre d'arrangements possibles si $a = 0$ se calcule par

$$\frac{9!}{(9-3)!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 504$$

En effet, le nombre d'arrangements possibles de k objets appartenant à un même ensemble A contenant n objets peut être calculé par

$$\frac{n!}{(n-k)!}$$