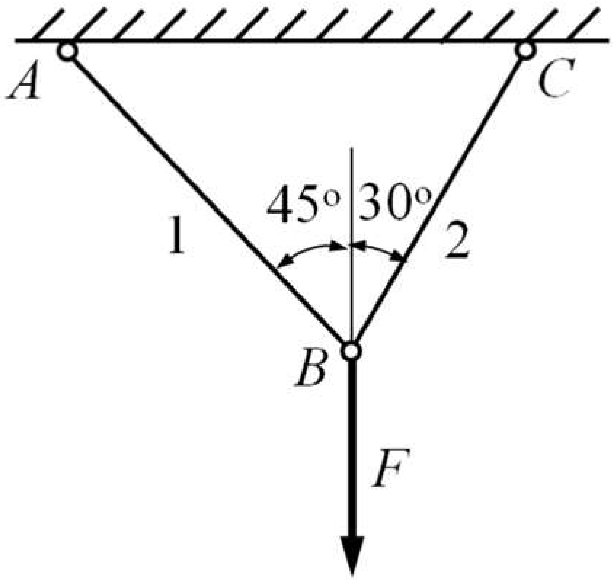
材料力学部分作业讲解

主讲人：吴昌聚

浙江大学 航空航天学院

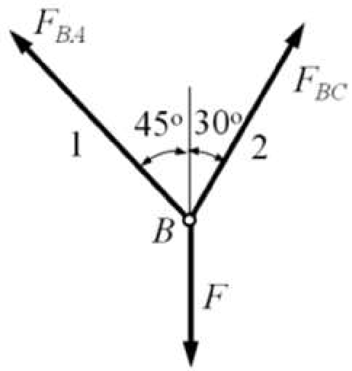
6.5 图示桁架，杆 1 的横截面均为圆形，直径 $d = 30\,\mathrm{mm}$，杆 2 的横截面为正方形，边长 $b = 20\,\mathrm{mm}$，两杆材料相同，许用应力 $[\sigma] = 200\,\mathrm{MPa}$。在该桁架节点 B 处承受铅直方向的载荷 $F = 100\,\mathrm{kN}$ 作用，试校核桁架的强度。



题 6.5

解：

（1）对节点 A 受力分析，求出 AB 和 AC 两杆所受的力；



（2）列平衡方程

$$\sum F_x = 0 \qquad -F_{BA}\sin 45^0 + F_{BC}\sin 30^0 = 0$$

$$\sum F_y = 0 \qquad F_{BA}\cos 45^0 + F_{BC}\cos 30^0 - F = 0$$

解得：$F_{BA} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}F = 51.8kN \qquad F_{BC} = \dfrac{2}{\sqrt{3}+1}F = 73.2kN$

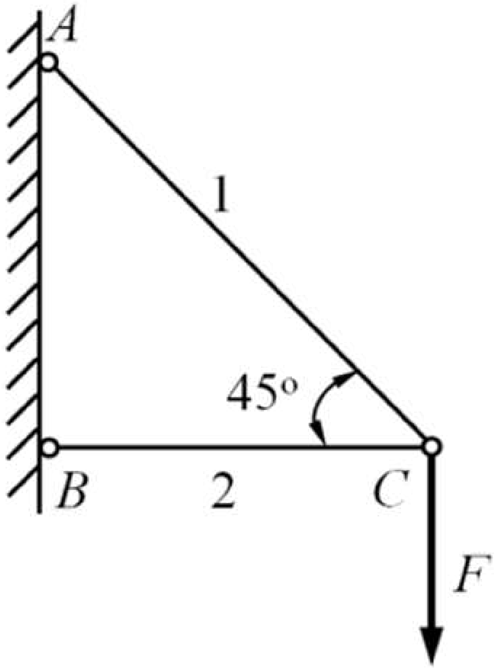
（3）分别对两杆进行强度计算；

$$\sigma_{BA} = \frac{F_{BA}}{A_1} = \frac{51.8\times10^3}{3.14\times0.015^2} = 73.3\,\text{MPa} < [\sigma]$$

$$\sigma_{BC} = \frac{F_{BC}}{A_2} = \frac{73.2\times10^3}{0.02\times0.02} = 183\,\text{MPa} < [\sigma]$$

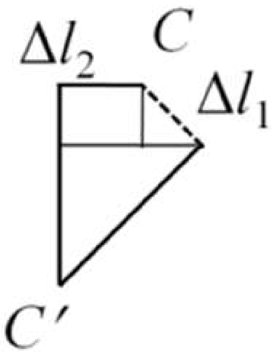
所以桁架的强度足够。

6.7 题 6.4 图示桁架结构，杆 1 和杆 2 为同一材料，$E = 200\,\text{GPa}$，横截面积为 $A_1 = 100\,\text{mm}^2$，$A_2 = 150\,\text{mm}^2$，杆 2 长度 $l = 1\,\text{m}$，$F = 100\,\text{kN}$。计算节点 C 的水平与铅直位移。



解：

变形情况示意图如下图所示。



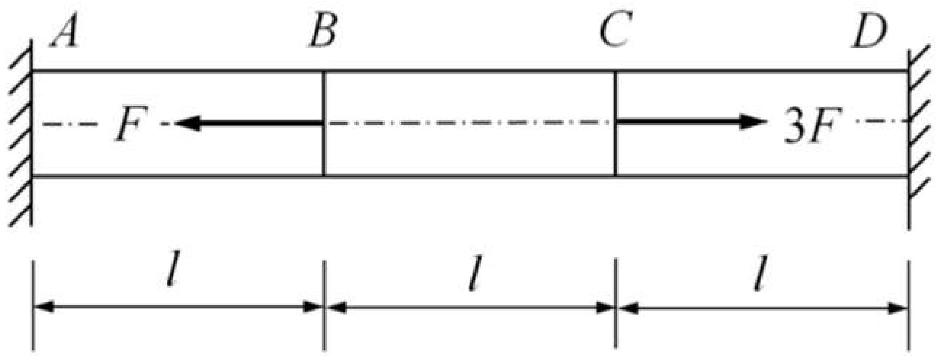
$F_{N1}=\sqrt{2}F$， $F_{N2}=F$

$$\Delta_{Cx}=\Delta l_2=\frac{F_{N2}l_2}{EA_2}=\frac{100\times10^3\times1}{200\times10^9\times150\times10^{-6}}=3.33\,\text{mm}$$

$$\Delta_{Cy}=\Delta l_1\cos45^\circ+\Delta l_1\sin45^\circ+\Delta l_2=\sqrt{2}\frac{F_{N1}l_1}{EA_1}+\frac{F_{N2}l_2}{EA_2}=\sqrt{2}\frac{\sqrt{2}\times100\times10^3\times\sqrt{2}}{200\times10^9\times100\times10^{-6}}+3.33=17.47\,\text{mm}$$

综上，C 点水平位移 $\Delta_{Cx}=3.33\,\text{mm}$，$C$ 点铅直位移 $\Delta_{Cy}=17.47\,\text{mm}$。

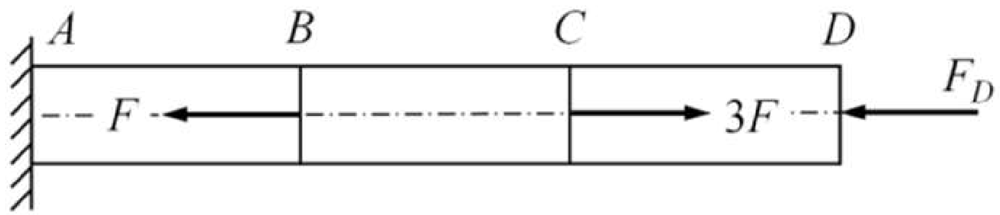
6.8 图示两端固定等截面直杆，横截面的面积为 A，承受轴向载荷 F 作用。计算杆内横截面上的最大拉应力与最大压应力。



题 6.8 图

解：

这是静不定问题，将 D 端的约束去掉，用 F_D 来代替约束对杆件的作用。



变形协调方程为总变形量为 0，即：

$$-\frac{Fl}{EA}+\frac{3F\cdot 2l}{EA}-\frac{F_D\cdot 3l}{EA}=0$$

解得：$F_D=\frac{5}{3}F$

AB 段： $F_{N1}+F+\frac{5}{3}F-3F=0$， $F_{N1}=\frac{1}{3}F$

BC 段： $F_{N2}+\frac{5}{3}F-3F=0$， $F_{N2}=\frac{4}{3}F$

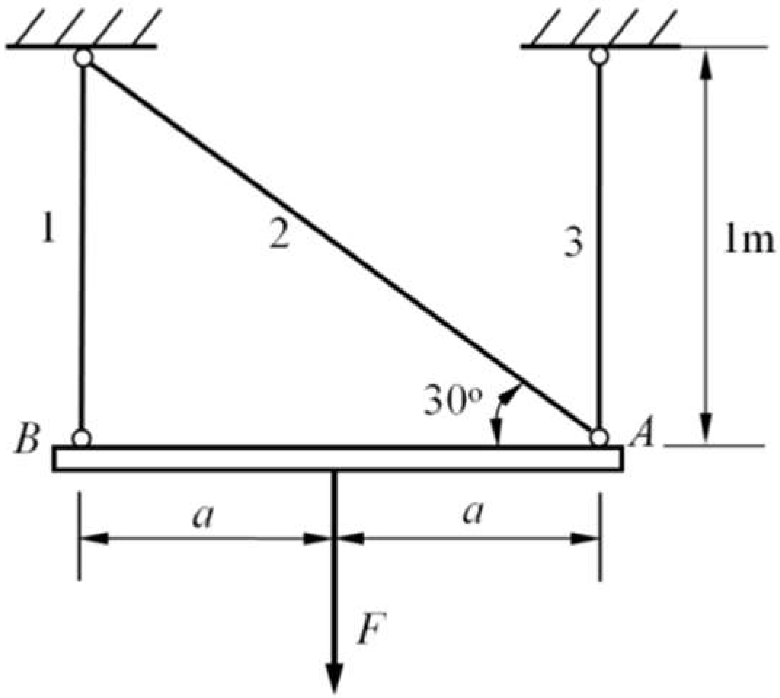
CD 段： $F_{N3}+F_D=0$， $F_{N3}=-\frac{5}{3}F$

所以，最大拉应力为 $\sigma_{t\max}=\frac{4F}{3A}$，发生在 BC 段；与最大压应力为 $\sigma_{c\max}=-\frac{5F}{3A}$，发生在 CD 段。

6.10 结构受力如图 6.10 所示，各杆的材料和横截面积均相同，面积 $A=200\,\text{mm}^2$，材料的弹性模量 $E=200\,\text{GPa}$，屈服极限 $\sigma_s=280\,\text{MPa}$，强度极限 $\sigma_b=460\,\text{MPa}$。当 $F=50\,\text{kN}$。求：

（1）1、2、3 杆中的线应变分别为多少？

（2）节点 B 的水平位移、竖直位移、总位移分别为多少？

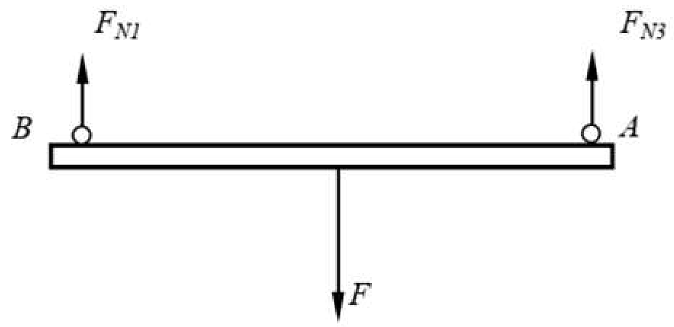


解：

（1）计算 3 根杆的内力

对 A 点进行受力分析，$\sum F_A = 0$，得 $F_{N2} = 0$，可知杆 2 不受力。

对杆 AB 进行静力分析，由平衡条件，得：



$$\sum M_A = 0，\ -2F_{N1} + F = 0$$

又由于，力 F 在杆 AB 上间，则：$F_{N1} = F_{N3} = \dfrac{F}{2}$

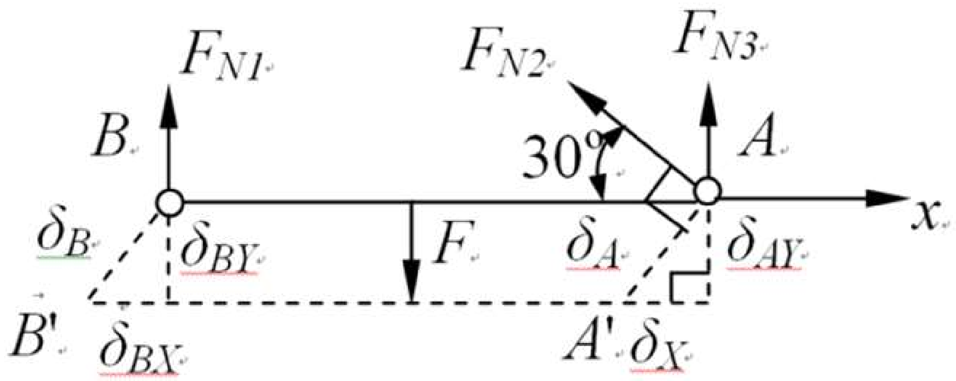
应用胡克定律，分别计算杆 1、2、3 的应变 ε_1、ε_2、ε_3，则：

$$\varepsilon_1 = \frac{F_{N1}}{EA} = \frac{25\times10^3}{200\times10^9\times200\times10^{-6}} = 6.25\times10^{-4}$$

$$\varepsilon_2 = 0$$

$$\varepsilon_3 = \frac{F_{N3}}{EA} = \frac{25\times10^3}{200\times10^9\times200\times10^{-6}} = 6.25\times10^{-4}$$

（2）变形协调分析如下图所示，



由于，杆 *AB* 为刚性杆，受力后不变形，且 *A* 与 *B* 受力相同伸长相同，由几何关系，节点 *B* 的垂直位移为：

$$\delta_{BY}=l_3\varepsilon_3=6.25\times10^{-4}\ \mathrm{m}$$

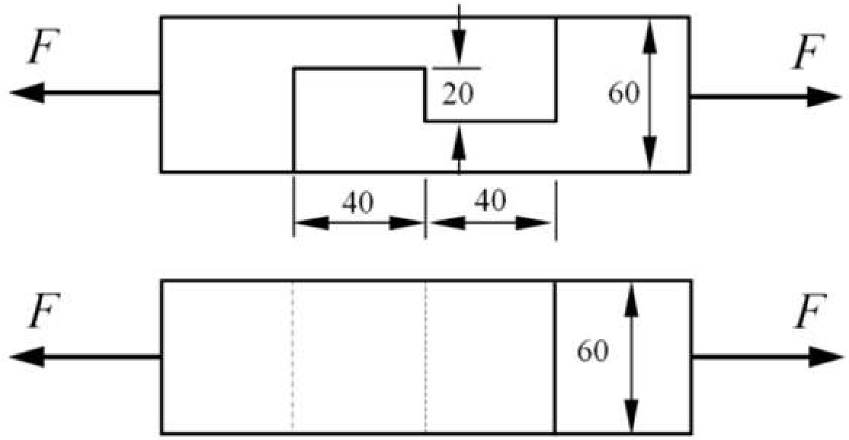
则节点 *B* 的水平位移为：

$$\delta_{BX}=\delta_{AX}=\frac{1}{\sqrt{3}}\delta_{BY}=3.61\times10^{-4}\ \mathrm{m}$$

节点 *B* 的总位移：

$$\delta_B=\sqrt{\delta_{BX}^2+\delta_{BY}^2}=7.22\times10^{-4}\ \mathrm{m}$$

6.11 图示木榫接头，已知$F=20\,\mathrm{kN}$，已知木的许用挤压应力$[\sigma_{bs}]=10\,\mathrm{MPa}$，许用切应力$[\tau]=6\,\mathrm{MPa}$。校核求接头的强度。



解：（1）剪切强度校核

$$\tau=\frac{F_Q}{A_s}=\frac{20\times10^3}{40\times60\times10^{-6}}=8.34\,\mathrm{MPa}>[\tau]$$

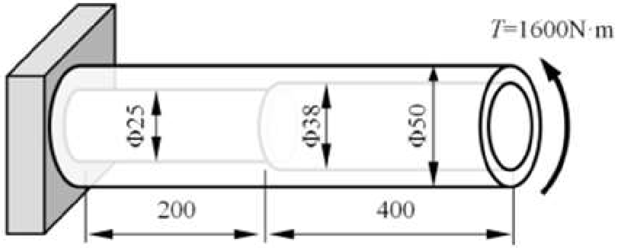
剪切强度有问题。

（2）挤压强度校核

$$\sigma_{bs}=\frac{F_b}{A_b}=\frac{20\times10^3}{20\times60\times10^{-6}}=16.66\,\mathrm{MPa}>[\sigma_{bs}]$$

挤压强度有问题。

7.3 钢制传动轴长 $l=600\,\text{mm}$，外径 $D=50\,\text{mm}$，内部孔径分别为 $d_1=25\,\text{mm}$ 和 $d_2=38\,\text{mm}$。分析此轴的最大切应力。



解：

传动轴的横截面扭矩为：$T=1600\,\text{N}\cdot\text{m}$

利用空心圆轴的抗扭截面系数，可求得两段圆轴的抗扭截面系数分别为：

$$W_{p1}=\frac{\pi D^3}{16}\left(1-\alpha^4\right)=\frac{\pi\times0.05^3}{16}\left[1-\left(\frac{25}{50}\right)^4\right]=2.30\times10^{-5}\,\text{m}^3$$

$$W_{p2}=\frac{\pi D^3}{16}\left(1-\alpha^4\right)=\frac{\pi\times0.05^3}{16}\left[1-\left(\frac{38}{50}\right)^4\right]=1.63\times10^{-5}\,\text{m}^3$$

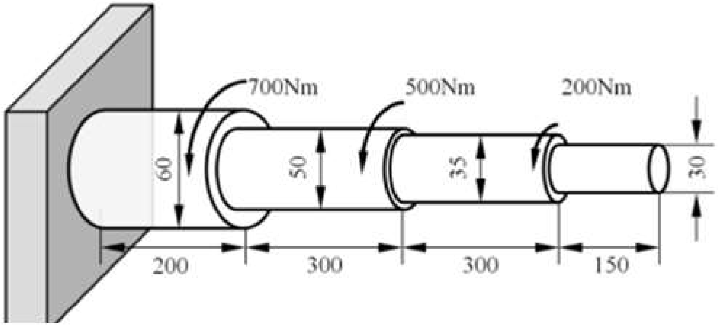
每段的最大切应力分别为：

$$\tau_{\max1}=\frac{T}{W_{p1}}=\frac{1600\,\text{N}\cdot\text{m}}{2.30\times10^{-5}\,\text{m}^3}=69.6\text{MPa}$$

$$\tau_{\max2}=\frac{T}{W_{p2}}=\frac{1600\,\text{N}\cdot\text{m}}{1.63\times10^{-5}\,\text{m}^3}=98.16\text{MPa}$$

因此，此轴的最大切应力为 $\tau_{\max}=98.16\text{MPa}$。

7.4 如图所示实心阶梯轴，已知材料切变模量 G=70GPa。计算此轴的最大切应力，并分析右端的最大扭转角度。



解：

利用截面法和静力学平衡条件，可求得该阶梯轴从左至右每段的扭矩分别为：

$$T_1 = 1400\text{N}\cdot\text{m}，\quad T_2 = 700\text{N}\cdot\text{m}，\quad T_3 = 200\text{N}\cdot\text{m}，\quad T_4 = 0$$

从左至右每段圆轴的抗扭截面系数分别为：

$$W_{p1} = \frac{\pi D_1^3}{16} = \frac{\pi \times 0.06^3}{16} = 4.24\times10^{-5}\text{m}^3$$

$$W_{p2} = \frac{\pi D_2^3}{16} = \frac{\pi \times 0.05^3}{16} = 2.45\times10^{-5}\text{m}^3$$

$$W_{p3} = \frac{\pi D_3^3}{16} = \frac{\pi \times 0.035^3}{16} = 8.41\times10^{-6}\text{m}^3$$

$$W_{p4} = \frac{\pi D_4^3}{16} = \frac{\pi \times 0.03^3}{16} = 5.30\times10^{-6}\text{m}^3$$

因而从左至右每段圆轴的截面最大切应力分别为：

$$\tau_{\max 1}=\frac{T_1}{W_{p1}}=\frac{1400\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}}{4.24\times10^{-5}\mathrm{m}^3}=33.0\mathrm{MPa}$$

$$\tau_{\max 2}=\frac{T_2}{W_{p2}}=\frac{700\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}}{2.45\times10^{-5}\mathrm{m}^3}=28.6\mathrm{MPa}$$

$$\tau_{\max 3}=\frac{T_3}{W_{p3}}=\frac{200\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}}{8.41\times10^{-6}\mathrm{m}^3}=23.8\mathrm{MPa}$$

$$\tau_{\max 4}=\frac{T_4}{W_{p4}}=0$$

因而此轴的最大切应力为 33.0Mpa。

根据实心圆轴的极惯性矩公式计算每段圆轴的极惯性矩大小为：

$$I_{p1}=\frac{\pi D_1^4}{32}=\frac{\pi\times0.06^4}{32}=1.27\times10^{-6}\mathrm{m}^4$$

$$I_{p2}=\frac{\pi D_2^4}{32}=\frac{\pi\times0.05^4}{32}=6.13\times10^{-7}\mathrm{m}^4$$

$$I_{p3}=\frac{\pi D_3^4}{32}=\frac{\pi\times0.035^4}{32}=1.47\times10^{-7}\mathrm{m}^4$$

$$I_{p4}=\frac{\pi D_4^4}{32}=\frac{\pi\times0.03^4}{32}=7.95\times10^{-8}\mathrm{m}^4$$

根据等直圆轴的扭转角计算公式，从左至右每一段的扭转角大小为：

$$\varphi_1=\frac{T_1 l_1}{GI_{p1}}=\frac{1400\times0.2}{70\times10^9\times1.27\times10^{-6}}rad=0.18^\circ$$

$$\varphi_2 = \frac{T_2 l_2}{GI_{p2}} = \frac{700 \times 0.3}{70 \times 10^9 \times 6.13 \times 10^{-7}} rad = 0.28^\circ$$

$$\varphi_3 = \frac{T_3 l_3}{GI_{p3}} = \frac{200 \times 0.3}{70 \times 10^9 \times 1.47 \times 10^{-7}} rad = 0.33^\circ$$

$$\varphi_4 = \frac{T_4 l_4}{GI_{p4}} = 0$$

最大扭转角度为： $\varphi=\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3+\varphi_4 = 0.79^\circ$

综上，最大切应力为 $\tau_{\max} = 33.0\mathrm{MPa}$，最大扭转角度为 $\varphi = 0.79^\circ$。

7.6 空心圆轴外径 $D=350\text{mm}$，传递的功率为 P=7MW，额定转速 $n=120\text{r}/\text{min}$，圆轴许用扭转角度为 $[\theta]=1(^\circ)/\text{m}$，许用切应力 $[\tau]$=125MPa，切变模量 G=70GPa。确定圆轴的最小壁厚。

解：

利用功率、转速与扭力偶矩之间的关系，计算得到空心圆轴受到的扭力偶矩大小为：

$$T=9549\times\frac{P}{n}=9549\times\frac{7\times10^3}{120}=5.57\times10^5\,\text{N}\cdot\text{m}$$

空心圆轴的截面极惯性矩和抗扭截面系数分别为：

$$I_p=\frac{\pi}{32}\left(D^4-d^4\right)$$

$$W_p=\frac{\pi D^3}{16}\left(1-\alpha^4\right)$$

根据刚度条件，许用扭转角度应该小于许用值：

$$\theta_{\max}=\frac{T}{GI_p}\leq[\theta]=1\left(^{\circ}\right)/\mathrm{m}$$

代入极惯性矩 I_p，计算得到最小壁厚大小为：

$$\delta_{\min,1}=15.5\mathrm{mm}$$

再由强度条件计算最小厚度值：危险点位于外表面，相应的强度条件为：

$$\tau_{\max}=\frac{M}{W_p}\leq[\tau]=125\mathrm{MPa}$$

代入抗扭截面系数 W_p，得到最小壁厚为：

$$\delta_{\min,2}=30.0\mathrm{mm}$$

综上，最小壁厚大小为 30.0mm。

7.9 一圆轴传递的外力偶矩M=1000 N·m，许用切应力$[\tau]$=50MPa，许用扭转角$[\theta]$=0.25$\left(^{\circ}\right)$/m。已知材料切变模量G=80GPa，泊松比为μ=0.3。求：（1）圆轴为实心，确定其直径；（2）圆轴为空心，内外径比值为α=0.8，确定内径和外径；（3）比较两种方案的重量比。

解：

（1）实心轴

对于实心轴，抗扭截面系数为

$$W_p = \frac{\pi D^3}{16}$$

横截面极惯性矩为：

$$I_p = \frac{\pi D^4}{32}$$

由强度条件可得：

$$\tau_{\max}=\frac{T}{W_p}=\frac{16T}{\pi D^3}\leq[\tau]=50\text{MPa}$$

可得：

$$D\geq 46.7\text{mm}$$

按刚度条件：

$$\theta_{\max}=\frac{T}{GI_p}=\frac{32T}{G\pi D^4}\leq[\theta]=0.25\left(^\circ\right)/\text{m}$$

可得：

$$D\geq 73.5\text{mm}$$

所以，实心轴的最小直径为 73.5mm.

（2）空心轴

对于空心轴：

$$\alpha = \frac{D_i}{D_o} = 0.8$$

抗扭截面系数为：

$$W_p = \frac{\pi D^3}{16}\left(1-\alpha^4\right)$$

横截面极惯性矩为：

$$W_p = \frac{\pi D^4}{32}\left(1-\alpha^4\right)$$

由强度条件可得：

$$\tau_{\max} = \frac{T}{W_p} \le [\tau] = 50\text{MPa}$$

可得：

$$D_o \ge 55.7\text{mm}$$

按刚度条件：

$$\theta = \frac{T}{GI_p} \le [\theta] = 0.25\left(^{\circ}\right)/\text{m}$$

可得：

$$D_o \ge 83.9\text{mm}$$

所以，空心轴的最小直径为 83.9mm，内径为 67.08mm.

（3）重量比

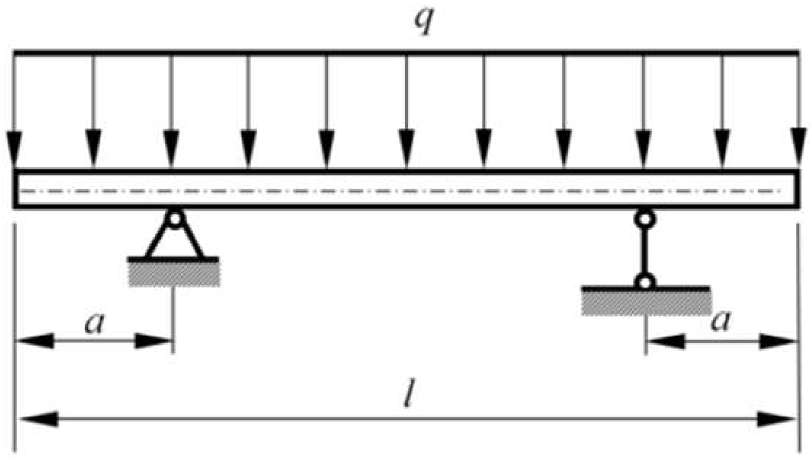
实心轴与空心轴材质相同，因此重量比等于横截面积的比值：

$$\frac{A_k}{A_s}=\frac{\pi\left(D_o^2-D_i^2\right)/4}{\pi D^2/4}=\frac{D_o^2\left(1-\alpha^2\right)}{D^2}=\frac{83.9^2\left(1-0.8^2\right)}{73.5^2}=0.469$$

可见，在相同的强度和刚度条件下，空心轴重量约为实心轴的 46.9%。

综上，（1）实心轴最小直径为 73.5mm；（2）$D_i \geq 67.1\text{mm}$，空心轴最小外径为 83.9mm，对应内径为 67.1mm；（3）46.9%。

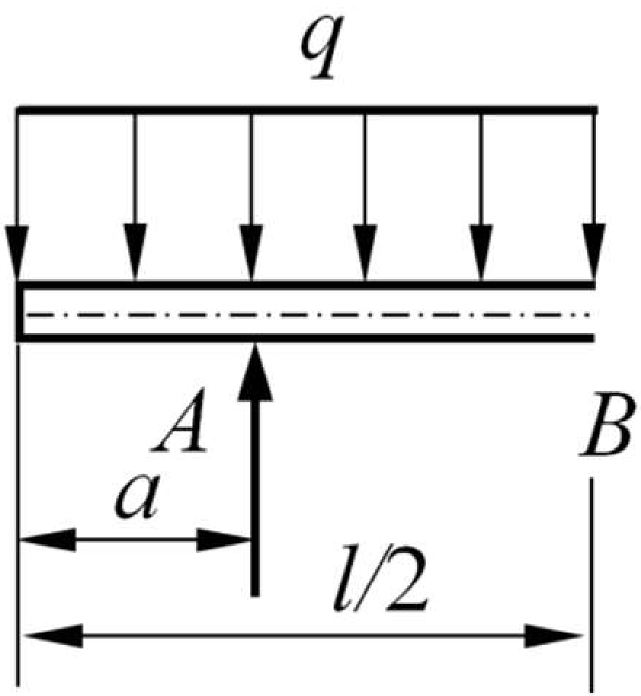
8.6 如图所示外伸梁，承受集度为 q 的均布载荷作用。当 a 为何值时梁内的最大弯矩之值最小？



题 8.6

解：

当最大正弯矩和最大负弯矩相等时，整条梁的最大弯矩最小。



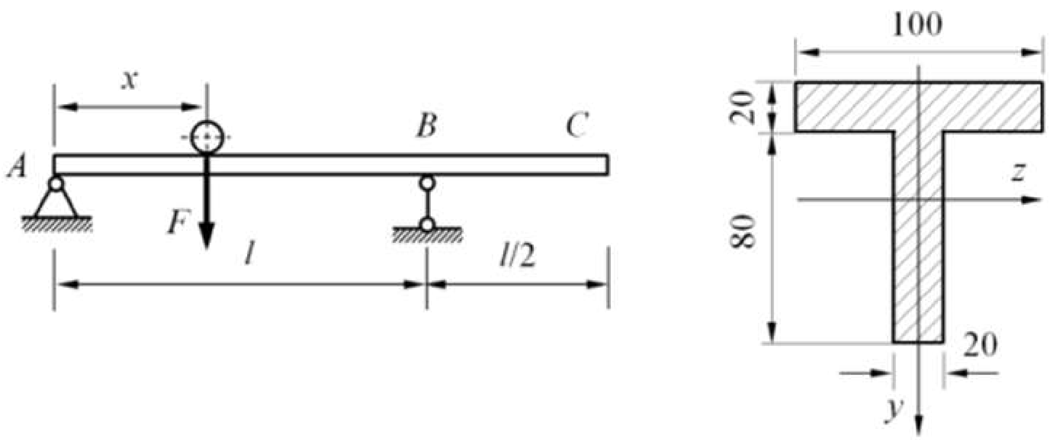
如上图所示，最大负弯矩出现在 A 点，最大正弯矩出现在 B 点。

$$M_A = qa \times \frac{1}{2} a = \frac{1}{2} qa^2$$

$$M_B = \frac{1}{2} ql \times \frac{1}{2}(l - 2a) - \frac{1}{2} ql \times \frac{1}{4} l$$

当 $M_A = M_B$ 时， $a = 0.207l$。

9.4 如图所示T型截面铸铁梁，载荷F可沿梁AC从截面A水平移动到截面C，已知许用拉应力$[\sigma_t]=40\text{MPa}$，许用压应力$[\sigma_c]=150\text{MPa}$，$l=1.5\text{m}$。确定载荷F的许用值。



解：

截面形心轴坐标 y_c=32.2mm

惯性矩： $I_z = 3.14\times10^6\,\text{mm}^4$

当 F 在 AB 之间移动时，最大弯矩发生在 AB 中间点，此时 $M_{\max1}=FL/4$，此时截面下边缘受拉，上边缘受压，则有：

$$\frac{M_{\max1}}{I_z}(100-y_c)=\frac{Fl}{4I_z}(100-y_c)\le[\sigma_t],$$

$$F\le\frac{4I_z[\sigma_t]}{(100-y_c)\ l}=\frac{4\times3.14\times10^6\times40}{(100-32.2)\times1500}=4940\text{N}=4.94\text{kN}$$

解得： $[F]\le 4.94\text{kN}$

$$\frac{M_{\max1}}{I_z}y_c=\frac{F_2l}{4I_z}y_c\le[\sigma_c]$$

$$F\le\frac{4I_z[\sigma_c]}{y_cl}=\frac{4\times3.14\times10^6\times150}{32.2\times1500}=39006.2\text{N}=39\text{kN}$$

解得： $[F]\le 39\text{kN}$

当 F 在 BC 之间移动时，最大弯矩发生在 B 点，此时 $M_{\max2}=FL/2$，此时截面上边缘受拉，下边缘受压，则有：

$$\frac{M_{\max 2}}{I_z}(100-y_c) = \frac{Fl}{2I_z}(100-y_c) \le [\sigma_c],$$

$$F \le \frac{2I_z[\sigma_c]}{(100-y_c)\ l} = \frac{2\times3.14\times10^6\times150}{(100-32.2)\times1500} = 9262.5\text{N} = 9.263\text{kN}$$

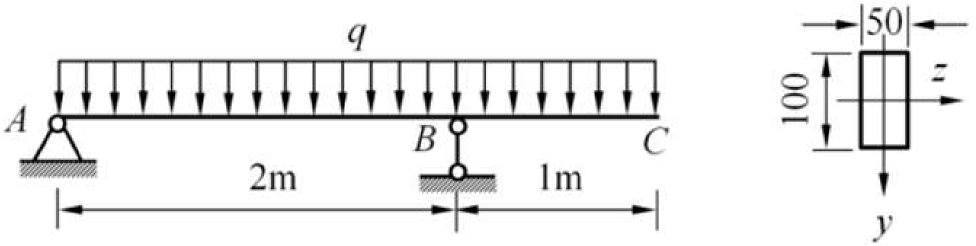
解得：$[F] \le 9.263\text{kN}$

$$\frac{M_{\max 2}}{I_z}y_c = \frac{Fl}{2I_z}y_c \le [\sigma_t]$$

$$F_3 \le \frac{2I_z[\sigma_t]}{y_c l} = \frac{2\times3.14\times10^6\times40}{32.2\times1500} = 5200.8\text{N} = 5.2\text{kN}$$

解得：$[F] \le 5.2\text{kN}$。比较上述计算结果，取最小值，则许可载荷 $[F]$=4.94kN

9.5 一矩形截面木梁，其截面尺寸及载荷如图所示，已知 $q=2\text{kN/m}$，$[\sigma]=15\text{MPa}$，$[\tau]=2\text{MPa}$。校核梁的正应力和切应力强度。



解：

（1）计算支座反力

$F_A+F_B=6\text{kN}$

$F_A=1.5\text{kN}$，$F_B=4.5\text{kN}$

（2）计算梁的最大弯矩及最大剪力

最大弯矩在 B 处，$M_{B,\max}=1\text{kN}\cdot\text{m}$

最大剪力在 B 截面左边，$F_{s,\max}=2.5\text{kN}$

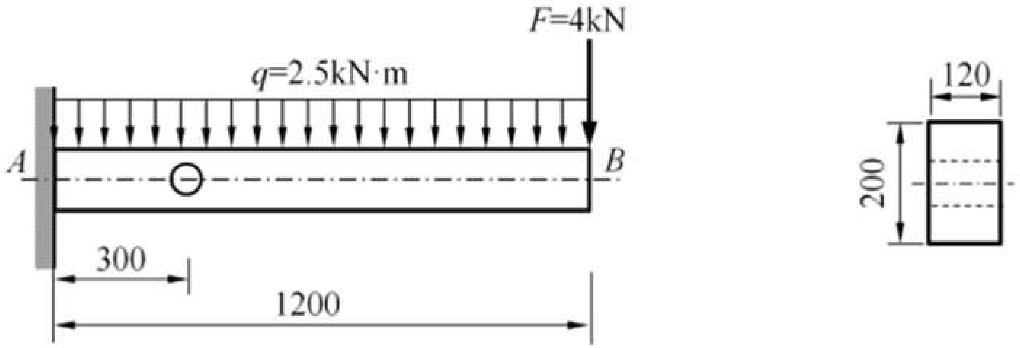
（3）计算应力

$$\sigma_{\max}=\frac{M_{\text{B,max}}}{W_z}=\frac{1\times10^6\text{N}\cdot\text{mm}}{\dfrac{50\text{mm}\times100^2\text{mm}^2}{6}}=12\text{MPa}<[\sigma]$$

$$\tau_{\max}=\frac{3}{2}\cdot\frac{F_{s,\max}}{bh}=\frac{3\times2.5\times10^3\text{N}}{2\times50\text{mm}\times100\text{mm}}=0.75\text{MPa}<[\tau]$$

满足强度要求。

9.7 如图所示木梁，受均布载荷和集中力作用，材料许用正应力$[\sigma]$=10MPa。在上面钻一直径为 d 的孔，允许的最大孔径是多少？



解：

打孔处弯矩：$M = 4\times10^3\times0.9+\frac{1}{2}\times2.5\times10^3\times0.9^2 = 4612.5\text{N}\cdot\text{m}$

抗弯截面系数：$I_z = \frac{1}{12}(120\times200^3-120\times d^3)$

$$\sigma = \frac{M}{I_z}\cdot\frac{h}{2}\le[\sigma]$$

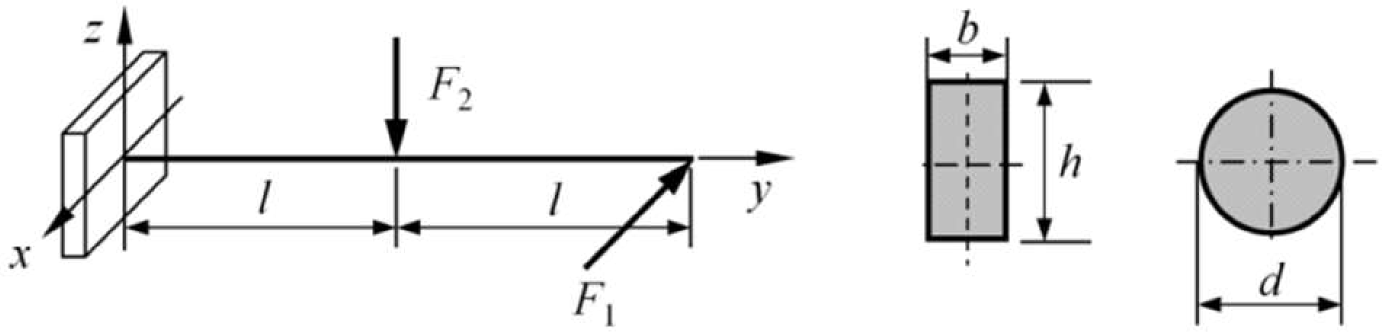
因此有：$d\le\sqrt[3]{200^3-\frac{Mh}{20[\sigma]}}=\sqrt[3]{200^3-\frac{4612.5\times10^3\times100}{20\times10}}=150.2\text{mm}$

得到允许的最大孔径为$[d]=150.2\text{mm}$

9.9 图示悬臂梁，承受载荷 F_1=800N， F_2=1.6kN 作用，l=1m，许用应力 $[\sigma]$=160MPa。分别在下列两种情况下确定截面尺寸。

（1）截面为矩形，$h=2b$；

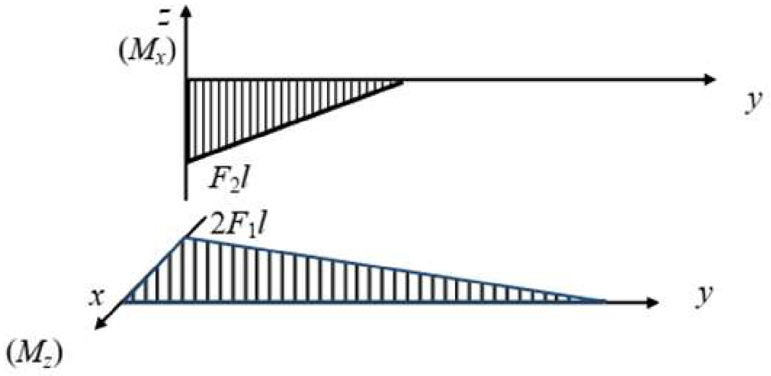
（2）截面为圆形。



题 9.9

解：

（1）画弯矩图



固定端截面为危险截面

（2）当横截面为矩形时，依据弯曲正应力强度条件：

$$\sigma_{\max}=\frac{M_x}{W_x}+\frac{M_z}{W_z}=\frac{F_2\cdot l}{\frac{b\cdot h^2}{6}}+\frac{2F_1\cdot l}{\frac{h\cdot b^2}{6}}=\frac{1600\times 1}{\frac{2^2b^3}{6}}+\frac{800\times 2\times 1}{\frac{2b^3}{6}}\le[\sigma]=160\text{ MPa}$$

解得：$b=35.57\text{ mm}\quad h=71.14\text{mm}$

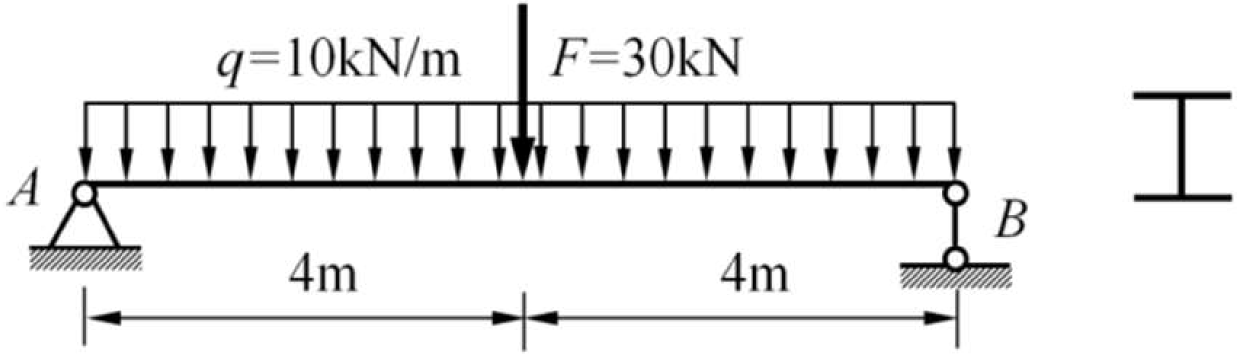
（3）当横截面为圆形时，依据弯曲正应力强度条件

$$\sigma_{\max}=\frac{M_{\max}}{W}=\frac{\sqrt{M_x^{\ 2}+M_z^{\ 2}}}{W}=\frac{\sqrt{(F_2\cdot l)^2+(2F_1\cdot l)^2}}{\frac{\pi\cdot d^3}{32}}$$

$$=\frac{\sqrt{(1600\times 1)^2+(800\times 2)^2}}{\frac{\pi\cdot d^3}{32}}\le[\sigma]=160\text{ MPa}$$

解得：$d=52.43\text{ mm}$

9.13 如图所示，一简支梁受集中力和均布载荷作用。已知材料的许用正应力 $[\sigma]=170\text{MPa}$，许用切应力 $[\tau]=100\text{MPa}$。选择工字钢的型号。

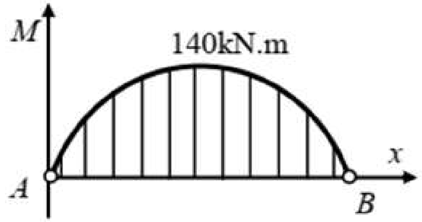


题 9.13

解：

（1）画弯矩图，得到最大弯矩 Mc：

$$Mc=-\frac{1}{2}\times q\times 4^2+F_A\times 4=-\frac{1}{2}\times 10\times 16+55\times 4=140\text{kN}\cdot\text{m}$$



（2）由强度计算公式，得到型钢抗弯截面系数 W_z

$$\frac{M_c}{W_z}\le[\sigma]，\quad W_z\ge\frac{M_c}{[\sigma]}=\frac{140\times10^3\,\text{N}\cdot\text{m}}{170\times10^6\,\text{Pa}}=0.000824\text{m}^3=8.24\times10^2\text{cm}^3$$

查表得：No.36a 工字型钢。

（3）校核切应力：

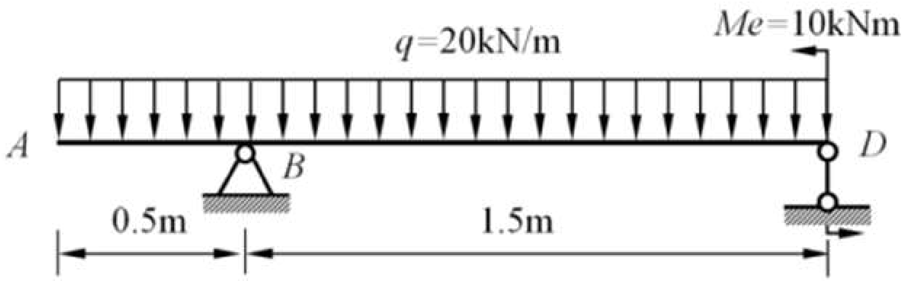
查表得 No.36a 工字型钢的惯性矩与静矩比值：$I_x:S_x=30.7\text{cm}$

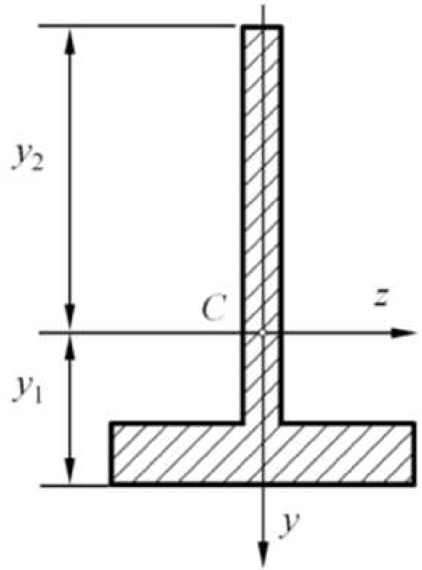
并由计算得到最大剪力 $F_{S,\max}$=55kN

$$\tau=\frac{F_{s,\max}}{b\times\frac{I_z}{S_z}}=\frac{55\times10^3\,\text{N}}{10\text{mm}\times307\text{mm}}=17.92\text{MPa}<[\tau]$$

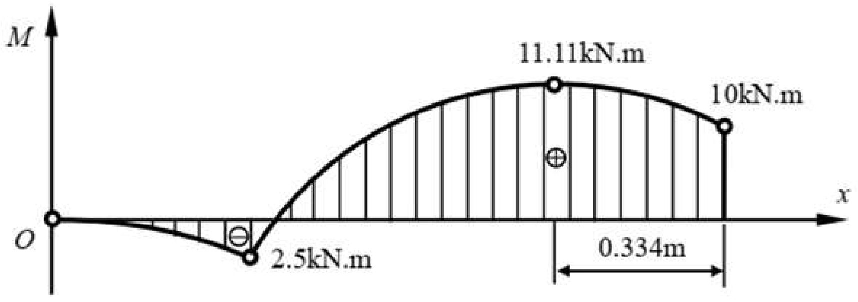
因为 $W_z\ge824\text{cm}^3$，选取 No.36a 工字型钢，同时 τ=17.92MPa $<[\tau]$，满足切应力强度条件。

9.14 图示铸铁梁，受均布载荷 q 和外力偶 Me 作用，截面形心离底边距离 $y_1=0.05\text{m}$，离顶边距离 $y_2=0.1\text{m}$，材料的许用拉应力 $[\sigma_t]$=40MPa、许用压应力 $[\sigma_c]$=145MPa，梁的截面惯性矩 I_z=$14.51\times10^{-6}\text{m}^4$。校核梁的强度。

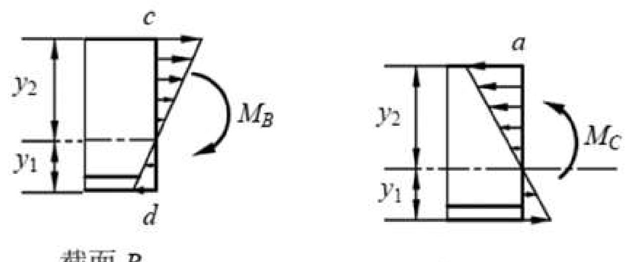




题 9.14



(b)



(c) (d)

解：

（1）画弯矩图，确定危险截面：

分析计算梁受力，可得到支座 B、D 处支座反力分别为 $F_B=33.33\text{kN}$、$F_D=6.67\text{kN}$。画出梁弯矩图，从图中可发现，最大正弯矩在 BD 段，距离 D 端 0.334m 处，即图中 C 截面，且 $M_C=11.11\text{kN}\cdot\text{m}$，最大负弯矩在支座 B 处，$M_B=2.5\text{kN}\cdot\text{m}$，因此 B、C 为危险截面。

（2）确定危险截面上危险点：

因$|M_C|>|M_B|$、$|y_2|>|y_1|$,故$|\sigma_a|>|\sigma_d|$。所以，截面 B、C 上的 a、b、c 为危险点。

（3）强度校核：

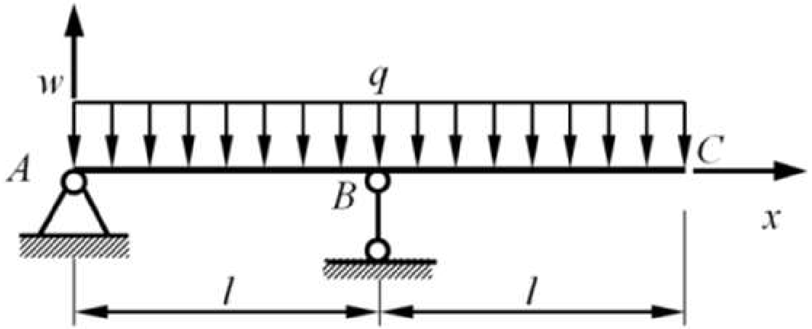
$$\sigma_a=\frac{M_C y_2}{I_z}=\frac{(11.11\times10^3\,\mathrm{N\cdot m})\times(0.10\mathrm{m})}{14.51\times10^{-6}\,\mathrm{m}^4}=76.57\mathrm{MPa}<[\sigma_c]$$

$$\sigma_b=\frac{M_C y_1}{I_z}=\frac{(11.11\times10^3\,\mathrm{N\cdot m})\times(0.05\mathrm{m})}{14.51\times10^{-6}\,\mathrm{m}^4}=38.28\mathrm{MPa}<[\sigma_t]$$

$$\sigma_c=\frac{M_B y_2}{I_z}=\frac{(2.5\times10^3\,\mathrm{N\cdot m})\times(0.10\mathrm{m})}{14.51\times10^{-6}\,\mathrm{m}^4}=17.23\mathrm{MPa}<[\sigma_t]$$

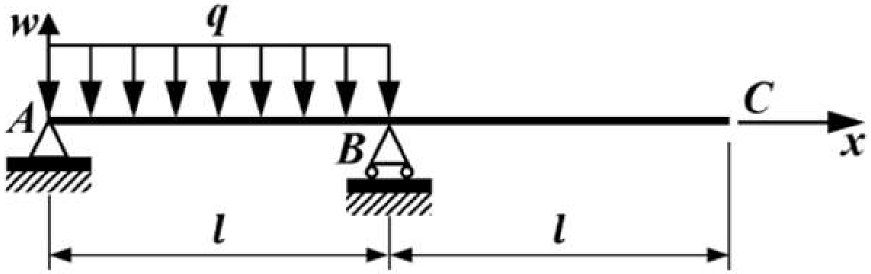
可见，该梁的强度符合要求。

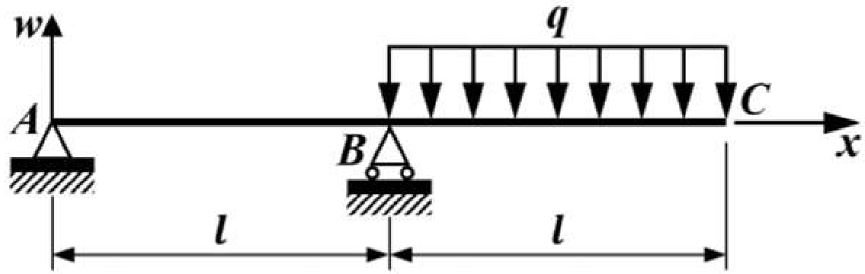
10.3 图示外伸梁，弯曲刚度为 EI，受均布载荷 q。用叠加法确定自由端 C 截面的挠度 w_C 和转角 θ_C。



解：

可以将均布载荷 q 从铰支座 B 处分成两部分，外伸梁的变形是这两部分均布载荷的叠加。





（1）首先考虑 AB 段简支梁上作用均布载荷 q 的作用，BC 段不作用任何力，则 B 处的转角为：

$$\theta_{B1}=\frac{ql^3}{24EI}$$

则 C 端的转角和挠度为

$$\theta_{C1}=\theta_{B1}=\frac{ql^3}{24EI}，\quad w_{C1}=l\cdot\theta_{B1}=\frac{ql^4}{24EI}$$

（2）再考虑 BC 段均布载荷 q 的作用，先把 AB 段视为刚性，则 BC 段可视为受均布载荷的悬臂梁，C 处转角和挠度为：

$$\theta_{C2}=-\frac{ql^3}{6EI}，\quad w_{C2}=-\frac{ql^4}{8EI}$$

再把BC段作用的均布载荷q简化到B，则在B处作用集中外力偶$M_e=-\dfrac{ql^2}{2}$（顺时针），集中力$F=ql$。此时，BC段视为刚性，AB段可视为受集中外力偶M_e和集中力F作用，集中力F作用对C处的转角和挠度不产生影响，则由M_e产生的B转角为：

$$\theta_{B3}=-\frac{M_e l}{3EI}=-\frac{ql^3}{6EI}$$

则C端的转角和挠度为

$$\theta_{C3}=\theta_{B3}=-\frac{ql^3}{6EI}，\quad w_{C3}=l\cdot\theta_{B3}=-\frac{ql^4}{6EI}$$

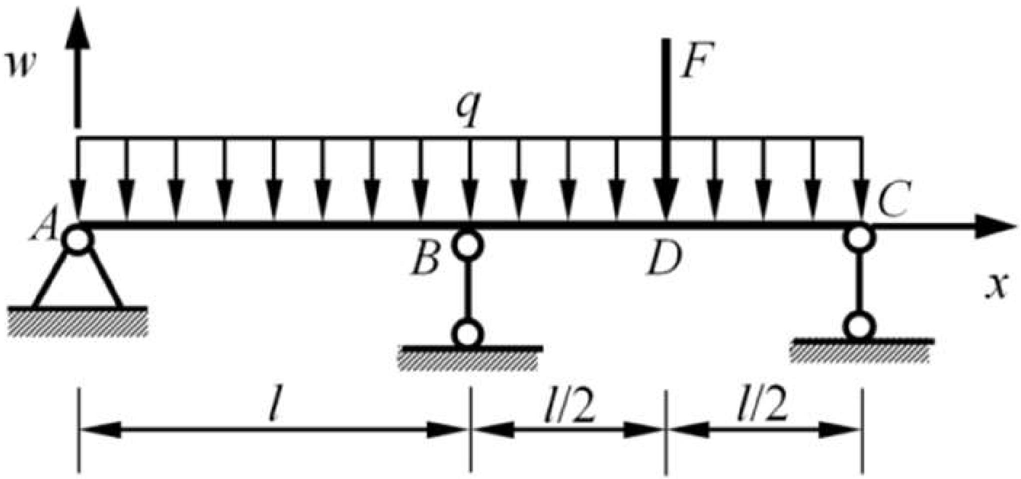
由叠加原理得自由端C截面的挠度w_C和转角θ_C

$$w_C=w_{C1}+w_{C2}+w_{C3}=\frac{ql^4}{24EI}-\frac{ql^4}{8EI}-\frac{ql^4}{6EI}=-\frac{ql^4}{4EI}\ （向下）$$

$$\theta_C=\theta_{C1}+\theta_{C2}+\theta_{C3}=\frac{ql^3}{24EI}-\frac{ql^3}{6EI}-\frac{ql^3}{6EI}=-\frac{7ql^3}{24EI}\ （顺时针）$$

综上，$w_C=-\dfrac{ql^4}{4EI}$（向下）；$\theta_C=-\dfrac{7ql^3}{24EI}$（顺时针）

10.7 图示梁 A 处为固定铰支座，B、C 为滑动铰支座。均布载荷 $q=10\,\mathrm{kN/m}$，集中力 $F=10\,\mathrm{kN}$，梁跨度 $l=2\,\mathrm{m}$，梁圆截面的直径 $d=100\,\mathrm{mm}$，许用应力 $[\sigma]=100\,\mathrm{MPa}$。试校核该梁的强度。



解：

一次静不定，解除 B 处简支约束，代之以未知约束力 F_B，系统为 F、F_B 与 q 作用下的静定简支梁。由叠加法得 B 处挠度为

$$w_B = w_{BF} + w_{BFy} + w_{Bq} = -\frac{11Fl^3}{96EI} + \frac{F_B l^3}{6EI} - \frac{5ql^4}{24EI}$$

上式代入变形协同条件：$w_B = 0$

得 B 支反力：$F_B = \frac{11F}{16} + \frac{5ql}{4} = 31875N$

由平衡方程得 A、C 支反力：

$$F_A = -\frac{3F}{32} + \frac{3ql}{8} = 6562.5N，\quad F_C = \frac{13F}{32} + \frac{3ql}{8} = 11562.5N$$

弯矩方程、剪力方程：

AB 段 $\left(0 \le x \le l\right)$：

$$M_1 = F_A x - qx\frac{x}{2} = -\frac{3F}{32}x + \frac{3ql}{8}x - \frac{q}{2}x^2$$

$$F_{S1} = F_A - qx$$

BD 段 $\left(l \le x \le \frac{3}{2}l\right)$：

$$M_2 = F_A x - qx\frac{x}{2} + F_B(x-l) = \frac{19}{32}Fx + \frac{13}{8}qlx - \frac{q}{2}x^2 - \frac{11}{16}Fl - \frac{20}{16}ql^2$$

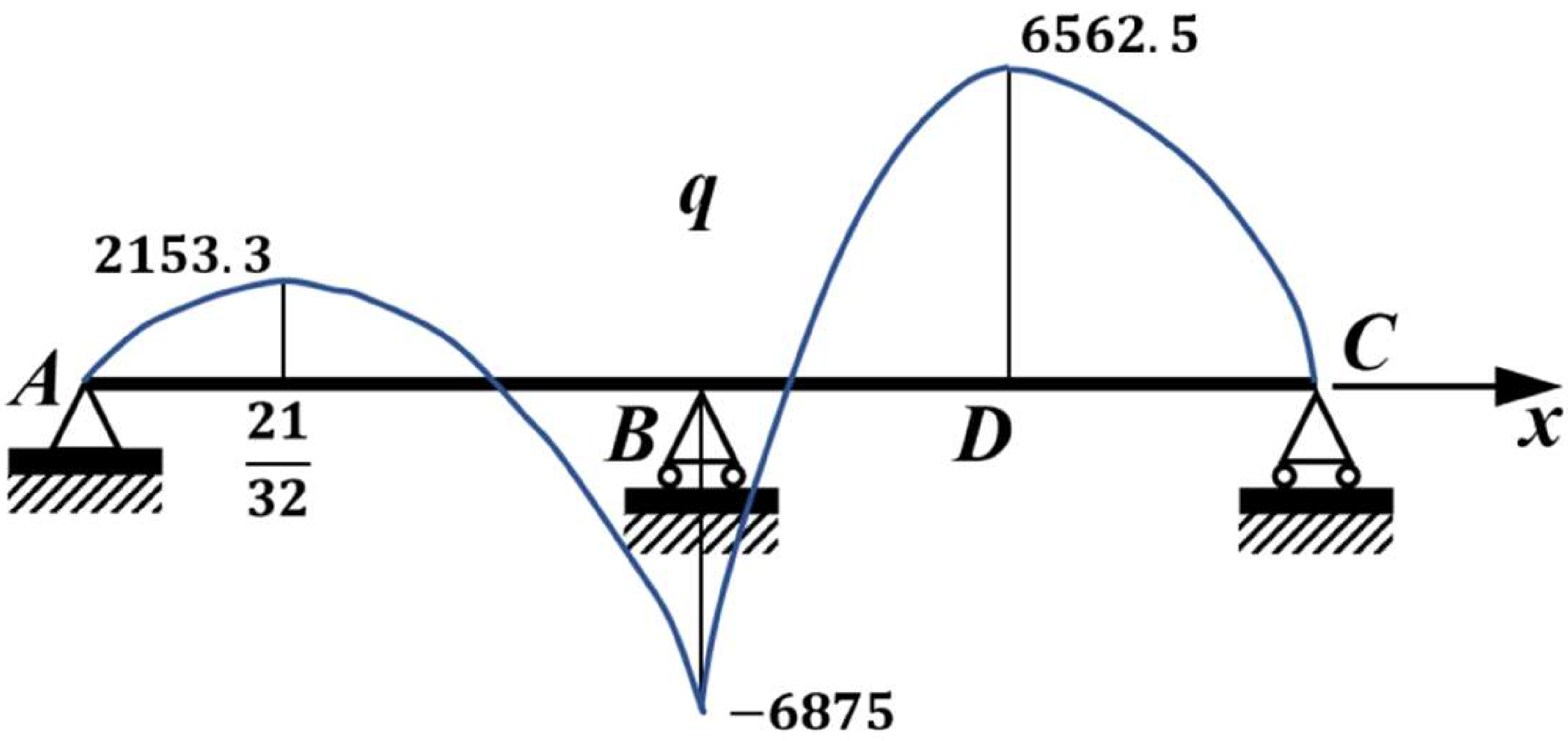
$$F_{S2} = F_A - qx + F_B$$

DC 段 $\left(\frac{3}{2}l \le x \le 2l\right)$：

$$M_3 = F_A x - qx\frac{x}{2} + F_B(x-l) - F\left(x - \frac{3}{2}l\right) = -\frac{13}{32}Fx + \frac{13}{8}qlx - \frac{q}{2}x^2 + \frac{13}{16}Fl - \frac{20}{16}ql^2$$

$$F_{S3} = F_A - qx + F_B - F$$

弯矩图：

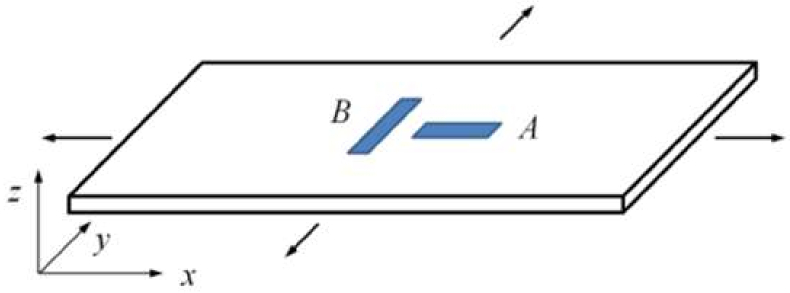


最大弯矩 $M_{\max}$ =6875N 出现在 B 截面，该截面上最大应力：

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z} = \frac{32M_{\max}}{\pi d^3} = 70.03\,\text{MPa} < [\sigma]$$

符合强度要求。

11.4 如图所示，钢制平板受两个方向的拉力作用，两个应变片（A、B）测得的应变分别为$\varepsilon_A=-100\times10^{-6}$，$\varepsilon_B=-200\times10^{-6}$，已知钢的弹性模量$E=210\,\text{GPa}$，泊松比为$\mu$=0.3。分析$x$和$y$方向的主应力。



题 11.4

解：

由题意知平板六个表面都是主平面，且：

$$\varepsilon_1=\frac{1}{E}\left[\sigma_1-\mu\left(\sigma_2+\sigma_3\right)\right]=-100\times10^{-6}$$

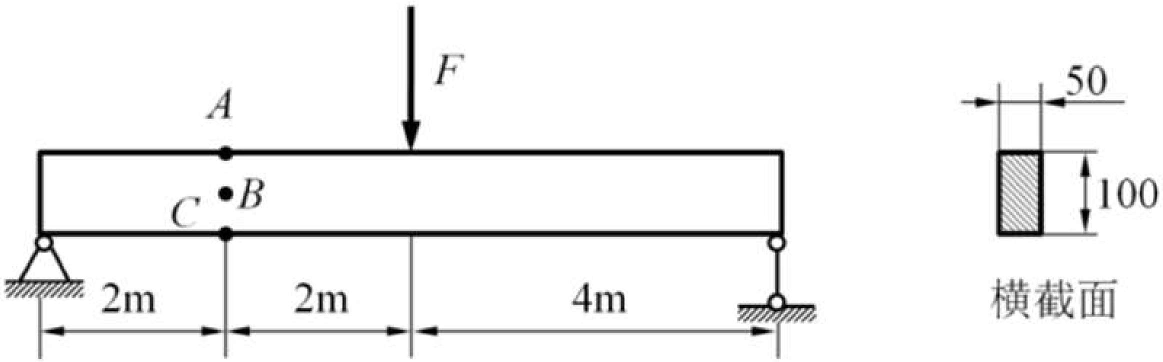
$$\varepsilon_2=\frac{1}{E}\left[\sigma_2-\mu\left(\sigma_1+\sigma_3\right)\right]=-200\times10^{-6}$$

$$\varepsilon_3=0$$

将E=210GPa，μ=0.3代入上式求解可得x与y方向的主应力分别为：

$\sigma_A=-36.9\text{MPa}$，$\sigma_B=-53\text{MPa}$。

11.5 如图所示，A、B、C 分别为简支梁截面上的三个点，试画出 A、B、C 三点的应力状态，并画出主应力微体。已知集中力 $F=10\text{kN}$ 。



题 11.5

简支梁横截面惯性矩为：$I_z=\dfrac{bh^3}{12}=\dfrac{0.05\times0.1^3}{12}=4.17\times10^{-6}\text{m}^4$

固支端反力大小为：$F_1=F_2=5\text{kN}$

点 A，B，C 所在截面的弯矩和剪力分别为：

$$M = 5 \times 10^3 \times 2 = 1 \times 10^4 \,\mathrm{N \cdot m}$$

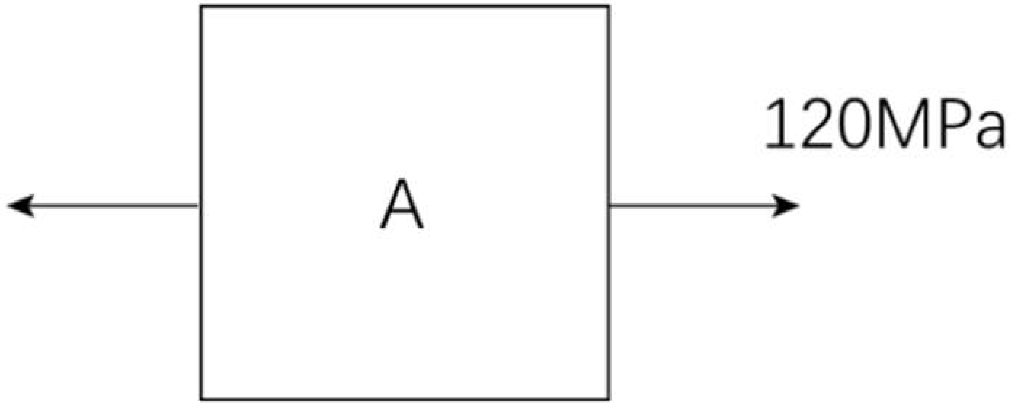
$$F_s = 5 \times 10^3 \,\mathrm{N}$$

点 A 的正应力与切应力分别为：

$$\sigma_A = \frac{M y_A}{I_z} = \frac{1 \times 10^4 \times 0.05}{4.17 \times 10^{-6}} = 120\mathrm{MPa}$$

$$\tau_A = 0$$

因而 A 点的应力状态如下图所示：



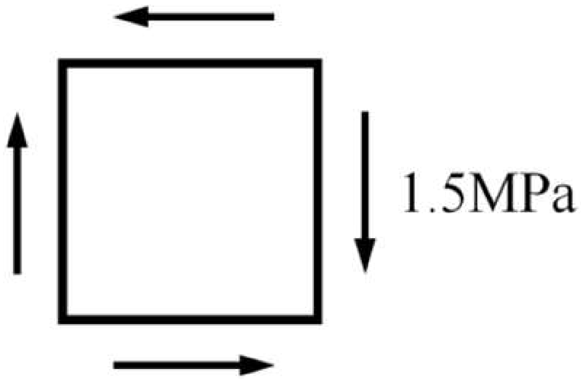
也是 A 点的主应力微体。

点 B 的正应力与切应力分别为：

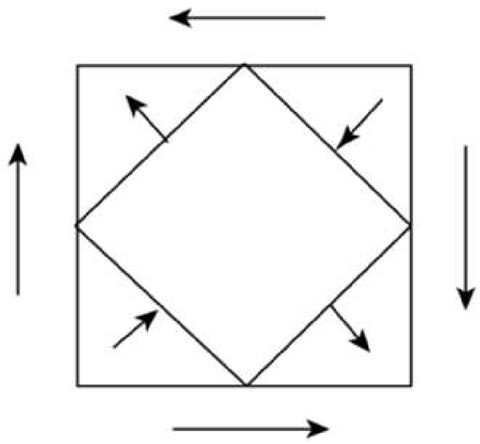
$$\sigma_B = \frac{My_B}{I_z} = 0$$

$$\tau_B = \frac{3F_s}{2bh}\left(1 - \frac{4y_B^2}{h^2}\right) = \frac{3\times5\times10^3}{2\times0.05\times0.1}(1-0) = 1.5\text{MPa}$$

因而 B 点的应力状态如下图所示：



主应力微体如下图所示：

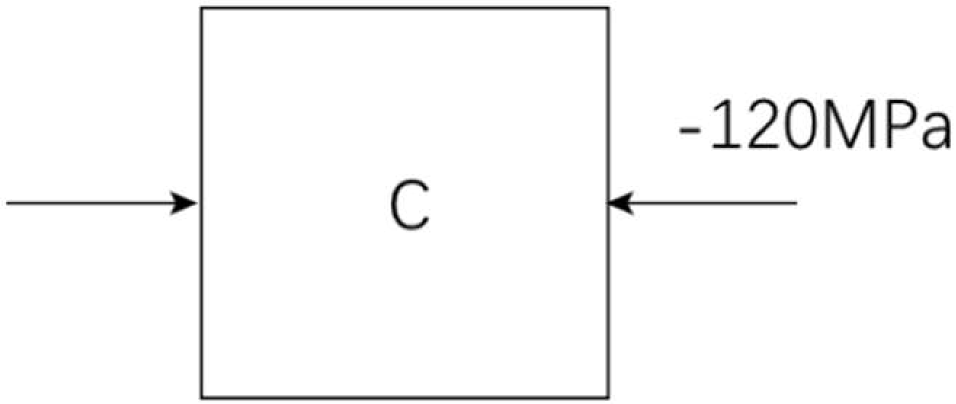


点 C 的正应力与切应力分别为：

$$\sigma_C = \frac{My_C}{I_z} = \frac{1\times10^4\times(-0.05)}{4.17\times10^{-6}} = -120\text{MPa}$$

$$\tau_C = 0$$

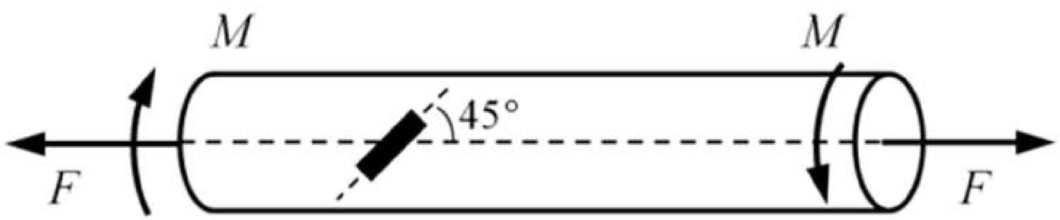
因而 C 点的应力状态如下图所示：



也为 C 点的主应力微体。

综上，A 点，$\sigma_A = -120\text{MPa}$；$B$ 点，$\sigma_B = 0$，$\tau_B = 1.5\text{MPa}$；C 点，$\sigma_C = 120\text{MPa}$。

11.6 如图所示直径 $d = 100\,\mathrm{mm}$ 的圆轴受轴向力 $F = 700\,\mathrm{kN}$ 与力偶 $M = 6\,\mathrm{kN \cdot m}$ 的作用。已知弹性模量 $E = 200\,\mathrm{GPa}$，泊松比 μ=0.3。试求：（1）圆轴表面点的应力状态图；（2）圆轴表面点图示方向（45°）的正应变。



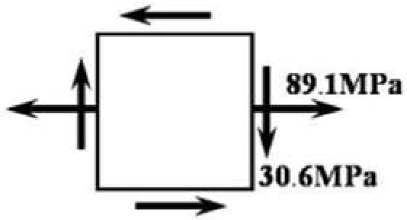
题 11.6

解：（1）点在横截面上正应力、切应力

$$\sigma = \frac{F_{\mathrm{N}}}{A} = \frac{4\times 700\times 10^{3}}{\pi\times 0.1^{2}} = 89.1\mathrm{MPa}$$

$$\tau = \frac{T}{W_{\mathrm{P}}} = \frac{16\times 6\times 10^{3}}{\pi\times 0.1^{3}} = 30.6\mathrm{MPa}$$

点的应力状态图如图：



（2）由应力状态图可知

σ_x=89.1MPa，σ_y=0，τ_x=30.6MPa

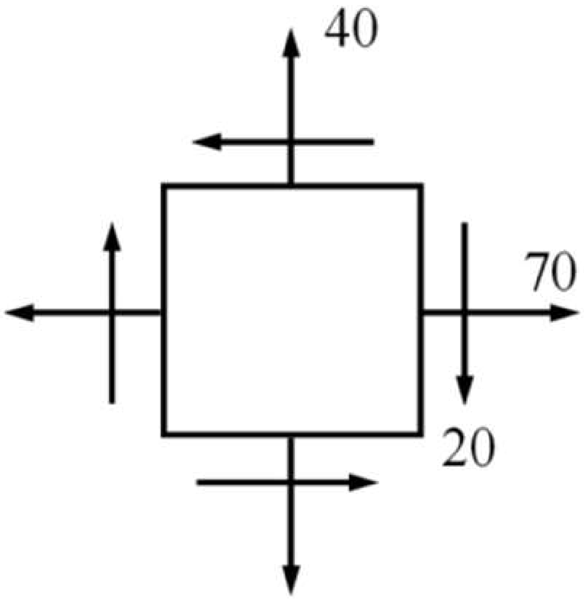
$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos 2\alpha - \tau_x \sin 2\alpha$$

所以，$\sigma_{45^\circ} = 13.95\mathrm{MPa}$　　$\sigma_{-45} = 75.15\mathrm{M}$

由广义胡克定律可得：

$$\varepsilon_{45^\circ} = \frac{1}{E}\left(\sigma_{45^\circ} - \mu\sigma_{-45^\circ}\right) = \frac{1}{200\times 10^{9}}\times(13.95-0.3\times 75.15)\times 10^{6} = -4.2975\times 10^{-5}$$

12.2 铸铁构件中某点危险状态时的应力状态如图所示，已知铸铁泊松比 $\mu=0.3$，拉伸强度极限 $\sigma_b = 120\,\mathrm{MPa}$。分别用最大拉应力和最大拉应变理论确定该构件的安全因素。



题 12.2

解：

$$\left.\begin{matrix}\sigma_{\max}\\ \sigma_{\min}\end{matrix}\right\}=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_x^2}=\frac{70+40}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{70-40}{2}\right)^2+20^2}=\begin{cases}80\\30\end{cases}$$

$\sigma_1=80\,\mathrm{MPa}$， $\sigma_2=30\,\mathrm{MPa}$， $\sigma_3=0$

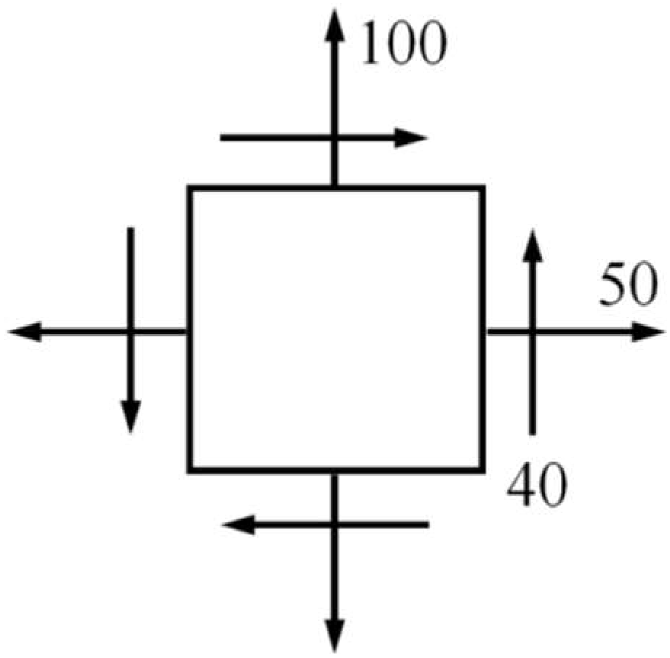
（1）最大拉应力理论（第一强度理论）

$$\sigma_1\le\frac{\sigma_b}{n},\quad n\le\frac{\sigma_b}{\sigma_1}=\frac{120}{80}=1.5$$

（2）最大拉应变理论（第二强度理论）

$$\sigma_1-\mu(\sigma_2+\sigma_3)\le\frac{\sigma_b}{n},\quad n\le\frac{\sigma_b}{\sigma_1-\mu(\sigma_2+\sigma_3)}=\frac{120}{80-0.3\times30}=1.69$$

12.3 某钢制构件危险点的应力状态如下图所示，已知钢的屈服极限 $\sigma_s = 300\,\text{MPa}$。分别用最大切应力理论和最大畸变能密度理论确定此构件的安全因素。



题 12.3

解：

$$\left.\begin{matrix}\sigma_{\max}\\ \sigma_{\min}\end{matrix}\right\}=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_x^2}=\frac{50+100}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{50-100}{2}\right)^2+(-40)^2}=\begin{cases}122.2\\ 27.8\end{cases}$$

$\sigma_1=122.2\,\text{MPa}$，$\sigma_2=27.8\,\text{MPa}$，$\sigma_3=0$

（1）最大切应力理论（第三强度理论）

$$\sigma_1-\sigma_3\le\frac{\sigma_s}{n},\quad n\le\frac{\sigma_s}{\sigma_1-\sigma_3}=\frac{300}{122.2}=2.45$$

（2）最大畸变能密度理论（第四强度理论）

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2}\le\frac{\sigma_s}{n}$$

$$n\le\frac{\sigma_s}{\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2}}=\frac{1.414\times300}{\sqrt{(122.2-27.8)^2+122.2^2+27.8^2}}=2.70$$

12.4 构件危险点处于平面应力状态，应力为$\sigma_x = 260\,\text{MPa}$， $\sigma_y = -150\,\text{MPa}$， $\tau_x = 100\,\text{MPa}$。要使安全因素不小于 2.5，按最大切应力理论计算所选材料的最小屈服强度。

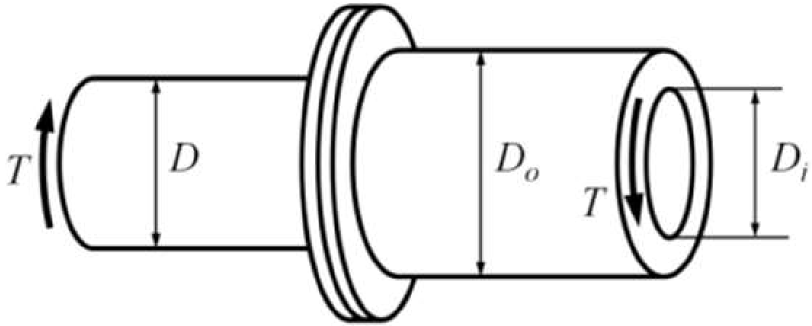
解：

$$\left.\begin{matrix}\sigma_{\max}\\ \sigma_{\min}\end{matrix}\right\} = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_x^2} = \frac{260-150}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{260+150}{2}\right)^2+100^2} = \begin{cases}283.1\\ -173.1\end{cases}$$

$\sigma_1 = 283.1$， $\sigma_2 = 0$， $\sigma_3 = -173.1$

$\sigma_1 - \sigma_3 \le \dfrac{\sigma_s}{n}$， $\sigma_s \ge n(\sigma_1 - \sigma_3) = 2.5 \times (283.1 + 173.1) = 1140.5\,\text{MPa}$

12.5 如图所示，钢制实心圆轴和空心圆轴通过法兰盘连接。实心轴段的直径 $D=50\,\text{mm}$，空心部分外径 $D_o=80\,\text{mm}$，内径 $D_i=60\,\text{mm}$，材料的许用应力 $[\sigma]$=150 MPa，忽略法兰连接的强度问题。根据最大畸变能密度理论确定此轴可传递的最大扭矩。



题 12.5

解：

$\sigma_1=\tau$， $\sigma_2=0$， $\sigma_3=-\tau$

$$\sigma_{r4}=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2}=\sqrt{3}\tau=\sqrt{3}\frac{T}{W_p}\le[\sigma]$$

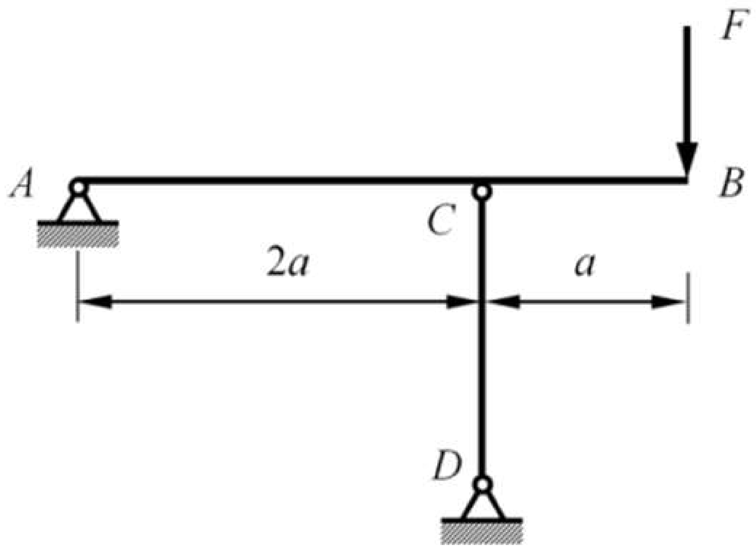
$$T\le\frac{W_p}{\sqrt{3}}[\sigma]$$

实心段： $T\le\frac{1}{\sqrt{3}}\times\frac{\pi\times\left(50\times10^{-3}\right)^3}{16}\times150\times10^6=2.12\,\mathrm{kNm}$

空心段： $T\le\frac{1}{\sqrt{3}}\times\frac{\pi\times\left(80\times10^{-3}\right)^3\times\left(1-\left(\frac{60}{80}\right)^4\right)}{16}\times150\times10^6=5.949\,\mathrm{kNm}$

综上，$[T]=2.12\,\mathrm{kNm}$

13.1 如图所示，AB 为刚性梁，低碳钢支撑杆 CD 直径 $d=50\text{mm}$，长度 $a=1.5\text{m}$，弹性模量 $E=200\text{GPa}$，比例极限 $\sigma_{\text{p}}=200\text{MPa}$。计算失稳时的载荷 F。



题 13.1