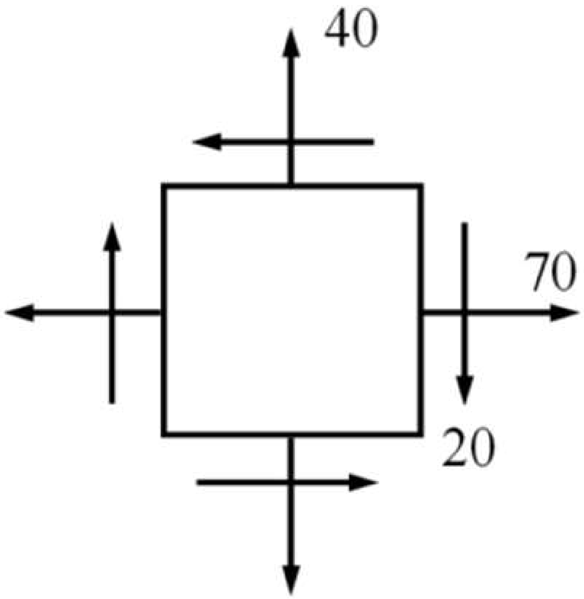
12.2 铸铁构件中某点危险状态时的应力状态如图所示，已知铸铁泊松比 $\mu=0.3$，拉伸强度极限 $\sigma_b=120\,\mathrm{MPa}$。分别用最大拉应力和最大拉应变理论确定该构件的安全因素。



题 12.2

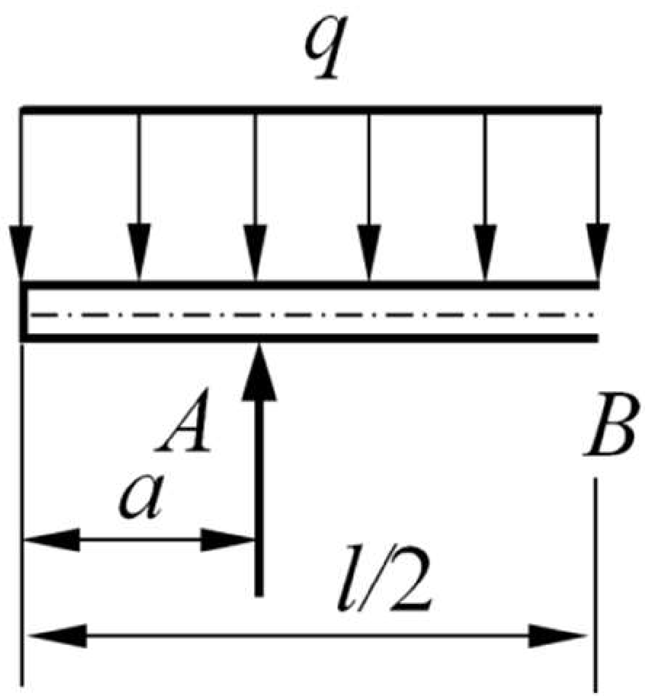
$$\varphi_2=\frac{T_2 l_2}{GI_{p2}}=\frac{700\times0.3}{70\times10^9\times6.13\times10^{-7}}rad=0.28^\circ$$

$$\varphi_3=\frac{T_3 l_3}{GI_{p3}}=\frac{200\times0.3}{70\times10^9\times1.47\times10^{-7}}rad=0.33^\circ$$

$$\varphi_4=\frac{T_4 l_4}{GI_{p4}}=0$$

最大扭转角度为： $\varphi=\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3+\varphi_4=0.79^\circ$

综上，最大切应力为 $\tau_{\max}=33.0\mathrm{MPa}$，最大扭转角度为 $\varphi=0.79^\circ$。

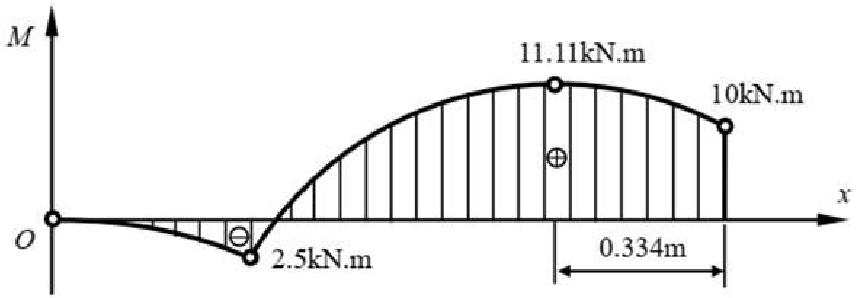


如上图所示，最大负弯矩出现在 A 点，最大正弯矩出现在 B 点。

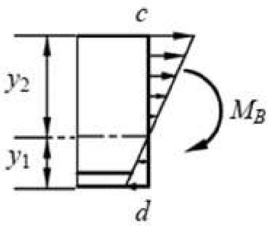
$$M_A = qa\times\frac{1}{2}a = \frac{1}{2}qa^2$$

$$M_B = \frac{1}{2}ql\times\frac{1}{2}(l-2a) - \frac{1}{2}ql\times\frac{1}{4}l$$

当 $M_A = M_B$ 时， $a = 0.207l$ 。

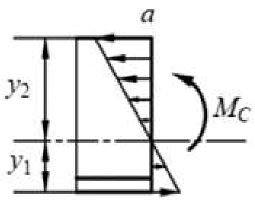


(b)



截面 B

(c)



截面 C

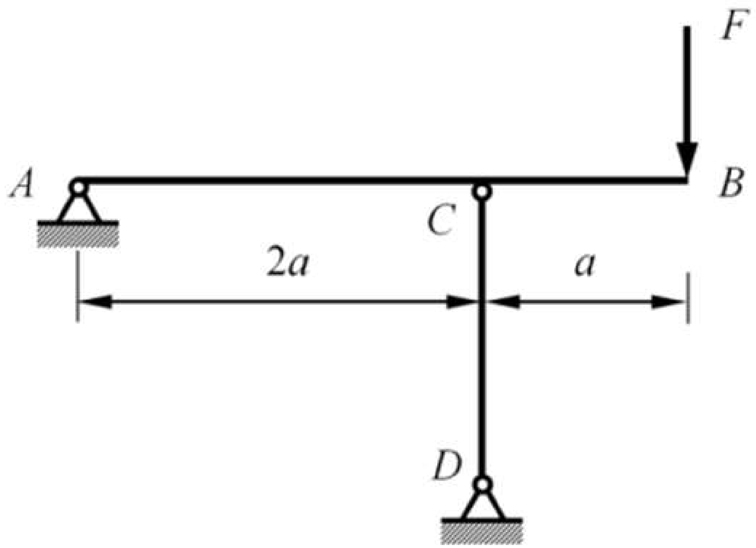
(d)

解：

（1）画弯矩图，确定危险截面：

分析计算梁受力，可得到支座 B、D 处支座反力分别为 $F_B = 33.33\text{kN}$、$F_D = 6.67\text{kN}$。画出梁弯矩图，从图中可发现，最大正弯矩在 BD 段，距离 D 端 0.334m 处，即图中 C 截面，且 $M_C = 11.11\text{kN}\cdot\text{m}$，最大负弯矩在支座 B 处，$M_B = 2.5\text{kN}\cdot\text{m}$，因此 B、C 为危险截面。

13.1 如图所示，AB 为刚性梁，低碳钢支撑杆 CD 直径 $d = 50\text{mm}$，长度 $a = 1.5\text{m}$，弹性模量 $E = 200\text{GPa}$，比例极限 $\sigma_{\text{p}} = 200\text{MPa}$。计算失稳时的载荷 F。



题 13.1

解：

AB 为刚性梁，根据静力平衡，对 A 点取矩 $\sum M_A = 0$，求得 CD 杆的轴力为：

$$F_N = \frac{3}{2}F$$

CD 杆两端铰支，$\mu=1$

惯性半径：$i=\sqrt{\frac{I}{A}} = \frac{d}{4}$

柔度：$\lambda=\frac{\mu l}{i}=\frac{4l}{d}=120$

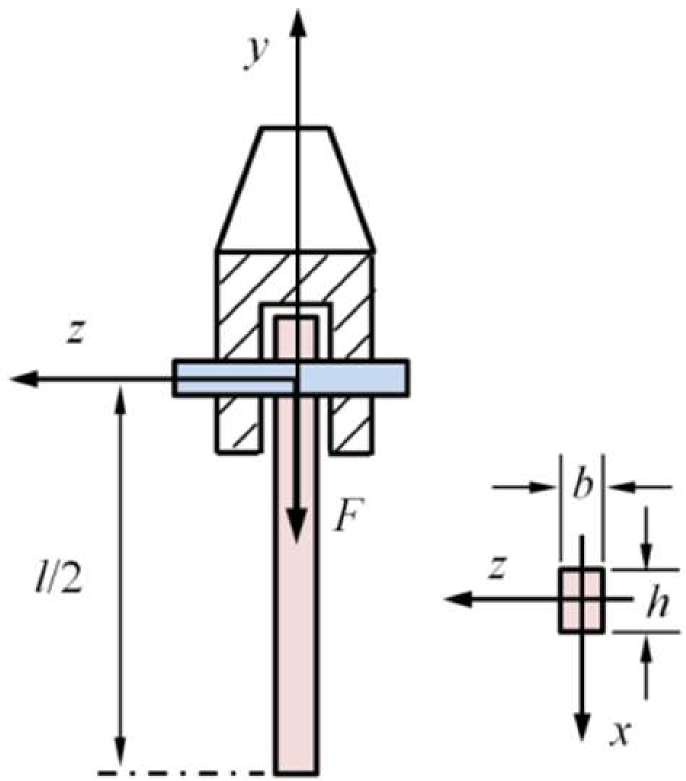
$$\lambda_p=\pi\sqrt{\frac{E}{\sigma_p}}=100$$

$\lambda > \lambda_p$，CD 杆为大柔度杆。用欧拉公式求得：

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2} = \frac{\pi^2 \times 200\times10^9 \times \frac{\pi}{64}\times\left(50\times10^{-3}\right)^4}{1.5^2} = 268.74\text{kN}$$

所以，$F = \frac{2}{3}F_{cr} = 179.16\text{kN}$

13.3 图示矩形截面木杆，两端约束相同，$b=0.2\text{m}$，$h=0.3\text{m}$，$l=10\text{m}$。已知载荷 $F=120\text{kN}$，弹性模量 $E=10\text{GPa}$，比例极限 $\sigma_{\text{p}}=20\text{MPa}$，$n_{\text{st}}=3.5$。校核杆的稳定性。



题 13.3

解：

$$\lambda_p=\pi\sqrt{\frac{E}{\sigma_s}}=70.25$$

（1）z 方向（xy 平面内），两端铰支， μ=1

$$i_z=\sqrt{\frac{\frac{bh^3}{12}}{bh}}=\frac{h}{\sqrt{12}}，\quad \lambda_z=\frac{\mu l}{i_z}=115.47>\lambda_p，属于大柔度杆$$

（2）x 方向（yz 平面内），两端固定， μ=0.5

$$i_x=\sqrt{\frac{\frac{hb^3}{12}}{bh}}=\frac{b}{\sqrt{12}}，\quad \lambda_x=\frac{\mu l}{i_x}=86.6>\lambda_p，属于大柔度杆$$

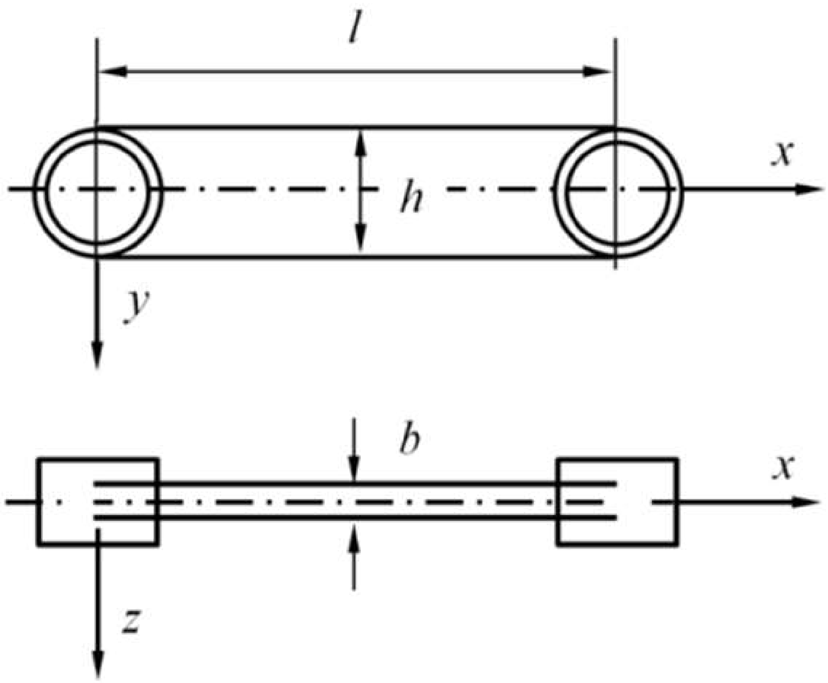
$\lambda_z>\lambda_x$，在 xy 平面内最有可能失稳。

$$F_{cr}=\frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2}=\frac{\pi^2 E\times\frac{bh^3}{12}}{l^2}=444.13\text{kN}$$

$n=\dfrac{F_{cr}}{F}=3.7>n_{st}$，安全。

13.4 图示压杆，横截面为 $b \times h$ 的矩形。从稳定性方面考虑，确定 h/b 的最佳值。

当压杆在 xz 平面内失稳时，可取 $\mu_y = 0.5$。



题 13.4

解：

（1）在 x–z 平面内弯曲时的柔度；

$$i_y=\sqrt{\frac{I_y}{A}}=\sqrt{\frac{\frac{1}{12}hb^3}{hb}}=\frac{b}{\sqrt{12}} \qquad \lambda_y=\frac{\mu_y l}{i_y}=\frac{0.5\times l}{\frac{b}{\sqrt{12}}}=0.5\sqrt{12}\,\frac{l}{b}$$

（2）在 x–y 平面内弯曲时的柔度；

$$i_z=\sqrt{\frac{I_z}{A}}=\sqrt{\frac{\frac{1}{12}bh^3}{hb}}=\frac{h}{\sqrt{12}} \qquad \lambda_z=\frac{\mu_z l}{i_z}=\frac{1\times l}{\frac{h}{\sqrt{12}}}=\sqrt{12}\,\frac{l}{h}$$

（3）考虑两个平面内弯曲的等稳定性；

$$\lambda_z=\lambda_y$$

$$0.5\sqrt{12}\,\frac{l}{b}=\sqrt{12}\,\frac{l}{h}$$

所以，$h/b=2$

13.6 长$l=6\text{m}$的 20a 号工字型低碳钢直杆，在温度为$T_1=30^\circ\text{C}$时两端固定安装，此时杆不受力。若已知材料的线膨胀系数为$5\times10^{-6}/^\circ\text{C}$，$E=200\text{GPa}$，$\sigma_p=200\text{MPa}$。求温度升至$T_2=80^\circ\text{C}$时，工作安全因素$n$为多大？

（提示：查附录中型钢表可知，20a 号工字钢截面积$A=35.6\text{cm}^2$，$I_y=158\text{cm}^4$，$W_y=31.5\text{cm}^3$；$I_z=2370\text{cm}^4$，$W_z=237\text{cm}^3$）

解：

若两端自由，升温后，变形量$\Delta l=\alpha_l\Delta Tl=0.15\text{m}$

两端固定，工字杆受压缩，根据$\Delta l=\dfrac{F_N l}{EA}$，$F_N=\dfrac{EA\Delta l}{l}$=178kN

稳定性校核：

（1）y方向，μ=0.5，$F_{cr}=\dfrac{\pi^2EI_y}{(\mu l)^2}=346.5\text{kN}$，$n_y=\dfrac{F_{cr}}{F_N}=1.94>n_{st}$

（2）z方向，μ=0.5，$F_{cr}=\dfrac{\pi^2EI_z}{(\mu l)^2}=5198\text{kN}$，$n_z=\dfrac{F_{cr}}{F_N}=29.2>n_{st}$

答：n_{st}=1.94