Заключение от n к $n+1$: в силу теорем 111, 107 и 172, имеем

$$(fg)^{(n+1)} = ((fg)^{(n)})' =$$

$$= \left(\sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} f^{(n-\nu)} g^{(\nu)}\right)' = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} (f^{(n-\nu)} g^{(\nu)})' =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} (f^{(n-\nu+1)} g^{(\nu)} + f^{(n-\nu)} g^{(\nu+1)}) =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} f^{(n-\nu+1)} g^{(\nu)} + \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} f^{(n-\nu)} g^{(\nu+1)} =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} f^{(n-\nu+1)} g^{(\nu)} + \sum_{\nu=1}^{n+1} \binom{n}{\nu-1} f^{(n-\nu+1)} g^{(\nu)} =$$

$$= f^{(n+1)} g^{(0)} + \sum_{\nu=1}^{n} \left(\binom{n}{\nu} + \binom{n}{\nu-1}\right) f^{(n+1-\nu)} g^{(\nu)} + f^{(0)} g^{(n+1)}$$

(последняя $\sum$ в случае $n = 0$ означает 0)

$$= \sum_{\nu=0}^{n+1} \binom{n+1}{\nu} f^{(n+1-\nu)} g^{(\nu)}.$$

Пример.

$$(fg)''' = f'''g + 3f''g' + 3f'g'' + fg''',$$

если f''' и g''' существуют.

Теорема 174.

$$(f(cx))^{(n)} = c^n f^{(n)}(cx),$$

если правая часть имеет смысл.

Доказательство. Для $n = 0$ — ясно. Заключение от n к $n+1$: по теореме 101,

$$(f^{(n)}(cx))' = cf^{(n+1)}(cx),$$

следовательно,

$$c^{n+1} f^{(n+1)}(cx) = c^n (f^{(n)}(cx))' = (c^n f^{(n)}(cx))' =$$
$$= ((f(cx))^{(n)})' = (f(cx))^{(n+1)},$$

Теорема 175.

$$(f(x+c))^{(n)} = f^{(n)}(x+c),$$

если правая часть имеет смысл.

Доказательство. Для $n=0$ — ясно. Заключение от n к $n+1$: по теореме 101,

$$f^{(n+1)}(x+c) = (f^{(n)}(x+c))' = ((f(x+c))^{(n)})' = \\ = (f(x+c))^{(n+1)}.$$

Теорема 176. *Пусть $h>0$. Пусть $f^{(n-1)}(x)$ непрерывна при $0 \leqslant x \leqslant h$ и $f^{(n)}(x)$ существует при $0 < x < h$. Положим*

$$\Phi = f(h) - \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{f^{\nu}(0)}{\nu!} h^{\nu}$$

(число, не зависящее от x). Тогда существует x такое, что

$$0 < x < h, \quad \Phi = \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x).$$

Доказательство. Положим

$$g(x) = f(x) - \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{f^{(\nu)}(0)}{\nu!} x^{\nu} - \Phi \frac{x^n}{h^n}. \tag{1}$$

Тогда, по теоремам 167 и 170, для целых m с $0 \leqslant m < n$ и всех x с $0 \leqslant x \leqslant h$ имеем

$$g^{(m)}(x) = f^{(m)}(x) - \sum_{\nu=m}^{n-1} \frac{f^{(v)}(0)}{\nu!} \binom{\nu}{m} m!\, x^{\nu-m} - \frac{\Phi}{h^n} \binom{n}{m} m! x^{n-m} =$$

$$= f^{(m)}(x) - \sum_{\nu=m}^{n-1} \frac{f^{(\nu)}(0)}{(\nu-m)!} x^{\nu-m} - \Phi \frac{n!}{(n-m)!} \frac{x^{n-m}}{h^n}. \tag{2}$$

При $m = n-1$ равенство (2) сводится к

$$g^{(n-1)}(x) = f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(0) - \Phi \frac{n!}{h_n} x$$

и для $0 < x < h$ дает дальше

$$g^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) - \Phi \frac{n!}{h^n}. \tag{3}$$