Documents autorisés : cours, TD, notes manuscrites. Barème indicatif (sur 30) : 5 + 11 + 4 + 3 + 7. Durée : 1h 30.

On joue à pile (noté 1) ou face (noté 0) à n reprise(s) (pièce parfaite) et on compte le nombre k de blocs formés par le même chiffre ($1 \leq k \leq n$).

Exemples

- $\boxed{n = 5}$
  00000 : $\boxed{00000}$
  Il y a 1 bloc.
- $\boxed{n = 10}$
  0010001101 : $\boxed{00}$ $\boxed{1}$ $\boxed{000}$ $\boxed{11}$ $\boxed{0}$ $\boxed{1}$
  Il y a $k = 6$ blocs.
- $\boxed{n = 12}$
  111100000111 : $\boxed{1111}$ $\boxed{00000}$ $\boxed{111}$
  Il y a $k = 3$ blocs.

I) On effectue 100 000 séries de n lancers et on compte le nombre de blocs dans chacune des séries, ainsi que le nombre moyen m de blocs obtenus.
On reproduit cette expérience pour différentes valeurs de n et on obtient le tableau suivant :

N	5	10	15	20	25
M	2,99947	5,49740	8,00773	10,50988	12,99620

1. Représenter graphiquement le nuage de points (N en abscisses, M en ordonnées).

2. Préciser $\overline{n}$, $\overline{m}$, σ_N^2, σ_M^2 et σ_{NM}.

3. Ajuster M en N selon la méthode des moindres carrés et préciser la formule obtenue :

$$M = aN + b \tag{1}$$

4. Etudier la qualité de l'ajustement en précisant r^2.

5. En utilisant la formule obtenue, donner une estimation de m pour $n = 30$.

II) On note X_n la variable aléatoire qui compte le nombre de blocs au cours de n pile ou face.
On souhaite déterminer la loi de probabilité de X_n, ainsi que $E(X_n)$.

1. Préciser les nombres de manières B_n^k d'obtenir k blocs dans une série de n lancers ($1 \leq k \leq n$) pour les différentes valeurs de n proposées (reproduire et compléter le tableau) :

$n \backslash k$	1	2	3	4
1				
2				
3				
4				

2. On pose $n = 3$.

a) En déduire la loi de probabilité de X_3, ainsi que $E(X_3)$ et $V(X_3)$ (reproduire et compléter le tableau) :

x_i	1	2	3
$P(X_3 = x_i)$			

$E(X_3)$	
$V(X_3)$	

b) Comparer à la moyenne estimée par la formule (1) ci-dessus en prenant $n = 3$.

c) Représenter graphiquement la loi de probabilité.

3. Reprendre les questions pour $n = 4$.

III) On note M_3 le nombre maximal de 1 dans les blocs obtenus lors de 3 pile ou face.

1. Préciser la loi conjointe du couple (X_3, M_3).
On présentera les résultats dans un tableau :

$X_3 \backslash M_3$	0	1	2	3
1				
2				
3				

2. Préciser la loi de probabilité de M_3 (reproduire et compléter le tableau suivant).

M_3	0	1	2	3
$P(M_3 = x_i)$				

IV) On démontre que dans le cas général, la loi de probabilité de X_n est définie par

$$P(X_n = i) = \frac{C_{n-1}^{i-1}}{2^{n-1}} = \frac{\binom{n-1}{i-1}}{2^{n-1}} \ (1 \leq i \leq n) \tag{2}$$

Préciser $E(X_n)$ et $V(X_n)$.

Indication : en posant $f(x) = x(1+x)^{n-1}$, on pourra remarquer que $E(X) = \dfrac{f'(1)}{2^{n-1}}$, puis en posant $g(x) = xf'(x)$ que $E(X^2) = \dfrac{g'(1)}{2^{n-1}}$ car $f(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} C_{n-1}^{i-1} x^i$.

Démonstration de (2) *:* nombre manières de placer $i-1$ séparations parmi $n-1$ emplacements pour créer i blocs multiplié par deux (cas 0 et cas 1) divisé par 2^n (nombre de suites de 0 et de 1).

V) On joue à pile (noté 1) ou face (noté 0) à 10 reprise(s) (pièce parfaite). La probabilité d'obtenir exactement 5 blocs est $p = \dfrac{C_9^4}{2^9} = \dfrac{\binom{9}{4}}{2^9}$. On procède à $n = 100$ séries de 10 pile ou face et on note X la variable aléatoire qui compte le nombre de séries qui comportent exactement 5 blocs.

1. Préciser

a) la loi de probabilité de X,

b) $\mu = E(X)$,

c) $\sigma = \sigma_X$,

d) $P(X = 0)$,

e) $P(X = 1)$.

Indication : $p \approx 0,246094$

2. Pour calculer $P(10 \leq X \leq 30)$ et $P(X \geq 35)$ on utilise $X' \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$.
Préciser

a) $P(10 \leq X \leq 30) \approx P(9,5 \leq X' \leq 30,5)$,

b) $P(X \geq 35) \approx P(X' \geq 34,5)$.