Documents autorisés : cours, TD, notes manuscrites, calculatrice. Barème indicatif : 7 + 2 + 4 + 2 + 3 + 2 Durée : 1h 30.

Exercice 1

Calcul intégral
On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = xe^{-x}$.

1. Variations et représentation graphique
   (a) Calculer $f'(x)$ sur $\mathbb{R}_+$.
   (b) Préciser le tableau des variations de f.
   (c) Représenter graphiquement f en précisant l'allure locale en 0, 1 et $+\infty$ (graphique $\mathcal{G}$).
2. Nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} te^{-t}\,dt$
   (a) Soit $x \in [0, +\infty[$. Calculer $F(x) = \displaystyle\int_0^x te^{-t}\,dt$.
   Indication : utiliser une intégration par parties.
   (b) Préciser $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$.
   (c) En déduire la nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} te^{-t}\,dt$ et sa valeur si l'intégrale est convergente.
3. Variable aléatoire
   (a) Montrer que la fonction f définie par $f(x) = xe^{-x}$ sur $\mathbb{R}_+$ et $f(x) = 0$ sur $\mathbb{R}_-^*$ est une densité de probabilité.
   (b) On note X une variable aléatoire telle que $P(X \leq x) = \displaystyle\int_0^x te^{-t}\,dt$ $(x \geq 0)$.
      i. Calculer $P(1 \leq X \leq 2)$.
      Le résultat sera donné avec trois chiffres significatifs.
      ii. Interpréter graphiquement en reprenant le graphique $\mathcal{G}$.

Indications : $e^{-1} \approx 0,3679$; $e^{-2} \approx 0,1353$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$.

Exercice 2

Probabilité conditionnelle
80 % des habitants d'un pays ont été vaccinés contre une certaine maladie $\mathcal{M}$.
10 % des personnes vaccinées, ainsi que 60 % des personnes non-vaccinées ont contracté la maladie.
Calculer la probabilité pour qu'un habitant pris au hasard

1. ait contracté la maladie.
2. ait été vacciné sachant qu'il a contracté la maladie.

Exercice 3

Variable aléatoire

La compagnie *Envol* affrête un avion de 300 places. La probabilité qu'une personne ayant réservé pour ce vol ne se présente pas à l'embarquement est $q = 0,08$.

1. Si la compagnie accepte $n = 310$ réservations, quelle est la probabilité qu'au moins 301 passagers se présentent à l'embarquement ?
   Indication : En notant X_i la variable aléatoire précisant la présence ($X_i = 1$) ou l'absence ($X_i = 0$) du i-ème passager ($1 \leq i \leq n$), on peut supposer les X_i indépendantes et $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \mathcal{B}(n, p)$ avec $p = 1 - q$. Comme $n \geq 30$ et $np \geq 5$, $nq \geq 5$, on peut alors utiliser l'approximation $S_n \sim \mathcal{N}(np, \sqrt{npq})$ et calculer $P(S_{310} \geq 300,5)$.
2. Combien la compagnie peut-elle vendre de places pour que la probabilité de devoir refuser l'embarquement à au moins un voyageur soit inférieure à 1 % ?

Exercice 4

Intervalle de confiance

On observe la *longueur des oreilles* X de $n = 10$ lièvres vosgiens (en cm) pris au hasard :

33,7 ; 33,8 ; 34,3 ; 34,0 ; 33,9 ; 33,9 ; 34,4 ; 34,0 ; 33,8 ; 34,1

X suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$, μ et σ étant inconnus.
Construire un intervalle de confiance de σ au niveau de confiance 95 %.
Indication : En notant X_i la variable aléatoire relevant la *longueur des oreilles* du lièvre i, on peut supposer $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$ et les X_i indépendantes. On a alors $\frac{n-1}{\sigma^2} S^2 \sim \chi^2_{n-1}$ avec $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \overline{X}\right)^2$ et $\overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$.

Exercice 5

Test d'hypothèse

Le *poids net* X d'une boîte de conserve de champignons d'une marque donnée (en grammes) suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ (μ et σ inconnus).
Une association de consommateurs prélève au hasard $n = 10$ boîtes :

399,3 ; 407,6 ; 398,0 ; 400,7 ; 404,3 ; 393,6 ; 396,7 ; 399,2 ; 398,0 ; 399,2.

L'étiquette des boîtes indique un *poids net* de $\mu_0 = 400$ grammes.
On veut tester l'hypothèse nulle $H_0 : \mu = \mu_0$, contre l'hypothèse alternative $H_1 : \mu < \mu_0$ au niveau 1 %.
En notant X_i le *poids net* d'une boîte donnée i, on peut supposer que $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$ et les X_i indépendantes.
Sous l'hypothèse nulle $H_0 : \mu = \mu_0$, $T = \frac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim \mathcal{T}_{n-1}$, la loi de Student à $n - 1$ degrés de

liberté, avec $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ et $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2$.

1. Calculer $\overline{x}$ et s.
2. Préciser le nombre t vérifiant $P\left(T \leq t\right) = 0,99$ avec $T \sim \mathcal{T}_{n-1}$.
3. En déduire $P\left(T \leq -t\right)$, puis la région de rejet $\mathcal{R} = \left[0, \mu_0 - t\frac{s}{\sqrt{n}}\right]$.
4. Est-ce que $\overline{x} \in \mathcal{R}$?
5. En déduire la décision. Expliquer.
6. Préciser un encadrement de la p-value $P_c\left(\overline{x}\right) = P_{H_0}\left(\overline{X} \leq \overline{x}\right)$.

Exercice 6

Test d'indépendance

Un échantillon aléatoire de $n = 200$ jeunes de 18 à 25 ans est interrogé sur la pratique de la natation (régulière, occasionnelle, aucune) et le statut (étudiant ou non) :

Statut \Pratique	régulière n_{i1}	occasionnelle n_{i2}	aucune n_{i3}
étudiant n_{1j}	30	68	22
non-étudiant n_{2j}	10	42	28

En utilisant un test du χ^2 d'indépendance de niveau $\alpha = 0,05$, on souhaite savoir si la pratique de la natation est indépendante du statut (hypothèse nulle H_0) ou non (hypothèse alternative H_1).

1. Calculer $d = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3}\frac{\left(n_{ij} - nq_{ij}\right)^2}{nq_{ij}}$ avec $q_{ij} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{2} n_{ij} \times \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{3} n_{ij}$.
2. Préciser le nombre δ vérifiant $P\left(D \leq \delta\right) = 0,95$ avec $D \sim \chi^2_{(2-1)\times(3-1)}$.
3. Faire le test du χ^2 en expliquant la décision.
4. Donner un encadrement de la p-value $P_c\left(d\right) = P_{H_0}\left(D \geq d\right)$.
   En déduire le degré de signification du test (test *significatif*, *très significatif*, *hautement significatif*).