Documents autorisés : cours, TD, notes manuscrites. Barème indicatif (sur 30) : 12 + 4 + 5 + 4 + 5 Durée : 1h 30.

## Exercice 1

On note $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \dfrac{1}{2+e^x}$.

1. Variations
   (a) Préciser le tableau des variations
      i. de $f$,
      ii. de $f'$.
   (b) En déduire $\forall x \in \mathbb{R}_+ \ |f'(x)| \leq \dfrac{1}{8}$.
2. Calcul approché
   (a) On calcule $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ par la méthode des rectangles à gauche.
      i. Préciser la nature de la valeur approchée (par défaut, par excès, ni l'une ni l'autre).
      ii. À partir de quel entier $n$, est-on assuré d'avoir $\left|\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt - \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f\left(a+i\frac{b-a}{n}\right)\right| \leq 10^{-p}$ $(p \in \mathbb{N}^*)$ ?
      iii. Application numérique : $p = 3$. Préciser l'entier évoqué dans la question précédente.
   (b) On calcule $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ par la méthode des rectangles à droite.
      i. Préciser la nature de la valeur approchée (par défaut, par excès, ni l'une ni l'autre).
      ii. À partir de quel entier $n$, est-on assuré d'avoir $\left|\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt - \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(a+i\frac{b-a}{n}\right)\right| \leq 10^{-p}$ $(p \in \mathbb{N}^*)$ ?
      iii. Application numérique : $p = 3$. Préciser l'entier évoqué dans la question précédente.
3. Intégration
   (a) Calculer $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{2+e^y}\,dy$ en posant $t = e^y$.
   (b) En déduire $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{2+e^y}\,dy$.
   (c) Quelle est la nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{2+e^y}\,dy$ ?
   (d) Si $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{2+e^y}\,dy$ est convergente, préciser sa valeur.

*Indications :*

- $f'(x) = -\dfrac{e^x}{(2+e^x)^2}$ et $f''(x) = \dfrac{e^x\,(e^x-2)}{(2+e^x)^3}$.

- On pose $\Delta_{Rg}(f,n) = \displaystyle\int_a^b f(t)\,dt - \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right)$
  et $\Delta_{Rd}(f,n) = \displaystyle\int_a^b f(t)\,dt - \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right)$.
  Si $f$ est dérivable à dérivée bornée sur $[a,b]$ alors $\exists M_r\ \forall t \in [a,b]\ |f'(t)| \leq M_r$ et
  $\boxed{|\Delta_{Rg}(f,n)| \leq \dfrac{M_r(b-a)^2}{n}}$ et $\boxed{|\Delta_{Rd}(f,n)| \leq \dfrac{M_r(b-a)^2}{n}}$ (méthode d'ordre 1).
- $\forall t \in [1, +\infty[\ \ \dfrac{1}{t(t+2)} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{t+2}\right)$

## Exercice 2

La distribution des âges dans un groupe est donnée par :

| Âge | Fréquence |
|---|---|
| [20,25[ | 0,15 |
| [25,30[ | 0,18 |
| [30,35[ | 0,38 |
| [35,40[ | 0,21 |
| [40,45[ | 0,08 |

1. Calculer l'âge moyen du groupe en années et mois.
2. À quelle classe appartient l'âge médian ?
3. Préciser la fonction de répartition $F(x)$ sur cette classe.
4. En déduire l'âge médian en années et mois.

## Exercice 3

Une enquête porte sur la consommation de margarine aux États-Unis (en livres) et le taux de divorce dans le Maine (États-Unis ; Source : tylervigen.com) :

| Année | 2 000 | 2 001 | 2 002 | 2 003 | 2 004 | 2 005 | 2 006 | 2 007 | 2 008 | 2 009 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Taux de divorce (‰) X | 5 | 4.7 | 4.6 | 4.4 | 4.3 | 4.1 | 4.2 | 4.2 | 4.2 | 4.1 |
| Consommation de margarine (en livres) Y | 8.2 | 7 | 6.5 | 5.3 | 5.2 | 4 | 4.6 | 4.5 | 4.2 | 3.7 |

1. Construire le nuage de points ($X$ en abscisses : 1 cm pour 0,1 ; $Y$ en ordonnées : 1 cm pour 0,5).
2. **Ajustement**
   (a) Ajuster $Y$ en $X$ selon la méthode des moindres carrés. Préciser la formule obtenue : $Y = aX + b$.
   (b) Tracer la droite d'équation $y = ax + b$ sur le graphique précédent.
   (c) Étudier la qualité de l'ajustement.
   (d) Calculer également la moyenne des résidus $m = \dfrac{1}{10}\displaystyle\sum_{i=1}^{10}(y_i - (ax_i + b))^2 = \sigma_Y^2\left(1 - r^2\right)$.

**Exercice 4**

Une alarme anti-intrusion se déclenche
- dans 99% des cas à l'occasion d'un cambriolage,
- dans 3% des cas sans raison.

Lors d'une journée d'absence, la probabilité qu'il y ait un cambriolage est $p = 0,02$.

1. Lors d'une journée d'absence,
   (a) l'alarme se déclenche. Quelle est la probabilité que ce soit pour rien ?
   (b) l'alarme ne se déclenche pas. Quelle est la probabilité d'être cambriolé ?
2. On note $X$ la variable aléatoire qui donne le nombre de cambriolages dans une période de $n = 10$ journées d'absence.
   (a) On suppose $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ (loi binomiale). Calculer $P(X = 0)$.
   (b) On suppose $X \sim \mathcal{P}(np)$ (loi de Poisson). Calculer $P(X = 0)$.

Les résultats seront donnés avec trois chiffres significatifs.

**Exercice 5**

Un comité d'entreprise d'une société parisienne souhaite organiser un week-end en province. Une enquête est faite auprès des 1 200 employés de cette entreprise afin de connaître leur choix en matière de moyen de transport. Les seuls moyens de transport proposés sont le train, l'avion ou l'autocar.

Les résultats de l'enquête auprès des salariés de l'entreprise sont donnés dans le tableau suivant :

| | Train | Avion | Autocar | Total |
|---|---|---|---|---|
| Femme | 468 | 196 | 56 | 720 |
| Homme | 150 | 266 | 64 | 480 |
| Total | 618 | 462 | 120 | 1 200 |

On interroge au hasard un employé de l'entreprise (on suppose que tous les salariés ont la même chance d'être interrogés).

On note : $F$ l'événement *l'employé est une femme*, $T$ l'événement *l'employé choisit le train.*

1. Calculer les probabilités $P(F)$ et $P(T)$.
2. Déterminer la probabilité que l'employé ne prenne pas le train.
3. Calculer $P(F \cap T)$.
4. Les événements $F$ et $T$ sont-ils indépendants ? Expliquer.
5. L'employé interrogé au hasard ne choisit pas le train. Calculer la probabilité que cet employé soit une femme.

Les résultats seront donnés avec trois chiffres significatifs.