Documents autorisés : cours, TD, notes manuscrites, calculatrice. Barème indicatif : 4+3+4+3+6 Durée : 1h 30.

Les résultats sont présentés avec trois chiffres significatifs, sauf indication particulière.

Exercice 1

Changement de variable et intégrale généralisée

On note f la fonction définie et continue par morceaux par $f(x) = \dfrac{2e^x}{(1+e^x)^2}$ sur $[0, +\infty[$ et $f(x) = 0$ sinon.

1. Soit $x \geq 0$. Calculer $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{2e^y}{(1+e^y)^2}\, dy$ en posant $t = e^y$.

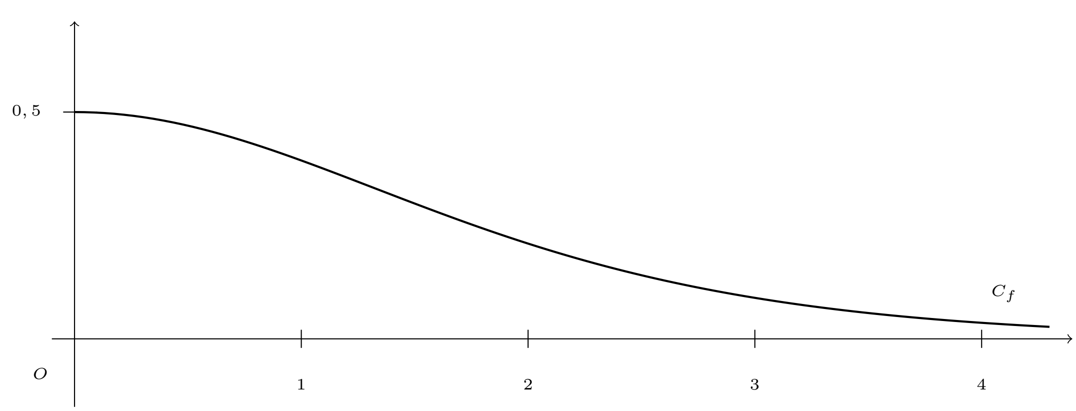
   Indication : $\left(\dfrac{1}{1+t}\right)' = -\dfrac{1}{(1+t)^2}$.

2. En déduire $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{2e^x}{(1+e^x)^2}\, dx$.

   Indication : préciser $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_0^x \frac{2e^y}{(1+e^y)^2}\, dy$, si cette limite existe.

3. Montrer que f est une densité de probabilité.
   Indication : comme f est positive et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, on pourra vérifier $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 1$.

4. On note X une variable aléatoire de densité de probabilité f. La fonction de répartition F de X est donc définie par $F(x) = P(X \leq x) = \displaystyle\int_0^x \frac{2e^y}{(1+e^y)^2}\, dy$ pour $x \geq 0$ et $F(x) = 0$ sinon.
   (a) Calculer $P(1 \leq X \leq 3)$, puis interpréter graphiquement en utilisant la représentation graphique de f (annexe à rendre).
   (b) Calculer $P(X \geq 2)$, puis interpréter graphiquement en utilisant la représentation graphique de f (annexe à rendre).



Exercice 2

Loi conjointe
On suppose que X et Y sont des variables aléatoires indépendantes ayant pour lois de probabilités respectives :

x_i	1	2
$P(X = x_i)$	0,4	0,6

y_j	3	4	5
$P(Y = y_j)$	0,2	0,3	0,5

1. Déterminer la loi de probabilité conjointe de X et Y. Reproduire et compléter le tableau suivant.

$X\backslash Y$	3	4	5	$P(X = x_i)$
1				
2				
$P(Y = y_j)$				

2. Quelle est la probabilité que X et Y soient impairs ?
3. Calculer $E(XY)$.

Exercice 3

Intervalle de fluctuation et loi binomiale
Un responsable d'auto-école affirme que pour l'année 2019, la probabilité d'être reçu à l'examen est égale à 0,60. Ayant des doutes sur cette affirmation, une association d'automobilistes décide d'interroger 25 candidats à l'examen parmi ceux de 2019. Il s'avère que 9 d'entre eux ont effectivement obtenu le permis de conduire.
Est-ce qu'on doit remettre en question l'affirmation du responsable d'auto-école ?

Pour répondre à la question, on va déterminer l'intervalle de fluctuation au seuil de risque α (ou de niveau $1-\alpha$) du nombre de personnes reçues par une détermination directe. On prendra $\alpha = 0,05$.
On note X_i $(1 \leq i \leq 25)$ la variable aléatoire prenant la valeur 1 pour une personne reçue et la valeur 0 pour une personne non reçue. On suppose $X_i \sim \mathcal{B}(1;\, 0,60)$ et que les X_i sont indépendantes $(1 \leq i \leq 25)$.
On pose $X = \displaystyle\sum_{i=1}^{25} X_i$ (nombre de personnes reçues).
X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(25;\, 0,60)$: $X \sim \mathcal{B}(25;\, 0,60)$.

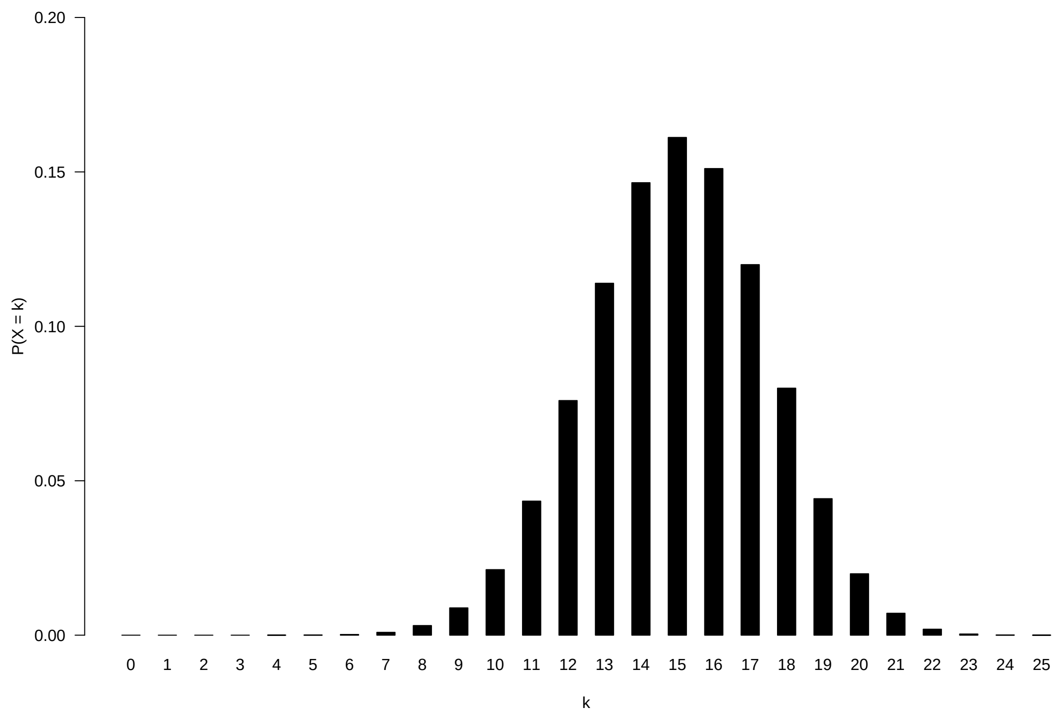
1. Déterminer l'intervalle de fluctuation $[\![n_1, n_2]\!]$ au seuil de risque $\alpha = 0,05$ (ou de niveau $1-\alpha$) qui est le plus petit intervalle $[\![n_1, n_2]\!]$ tel que $P(X < n_1) \leq \dfrac{\alpha}{2}$ et $P(X > n_2) \leq \dfrac{\alpha}{2}$.
   Indication :
   n_1 est l'entier vérifiant $P(X \leq n_1 - 1) \leq \dfrac{\alpha}{2}$ et $P(X \leq n_1) > \dfrac{\alpha}{2}$,
   n_2 est l'entier vérifiant $P(X \leq n_2 - 1) < 1 - \dfrac{\alpha}{2}$ et $P(X \leq n_2) \geq 1 - \dfrac{\alpha}{2}$.
   On pourra utiliser la table donnée en annexe.

2. Est-ce que $9 \in [\![n_1, n_2]\!]$?
3. Est-ce qu'on doit remettre en question l'affirmation du responsable d'auto-école ?
4. Préciser
   (a) $P(X < n_1)$
   (b) $P(n_1 \leq X \leq n_2)$
   (c) $P(X > n_2)$

   Reproduire et compléter le tableau suivant.

$P(X < n_1)$	
$P(n_1 \leq X \leq n_2)$	
$P(X > n_2)$	

Loi de probabilité de $\mathcal{B}(25; 0,60)$



Exercice 4

Intervalle de confiance et loi de Student

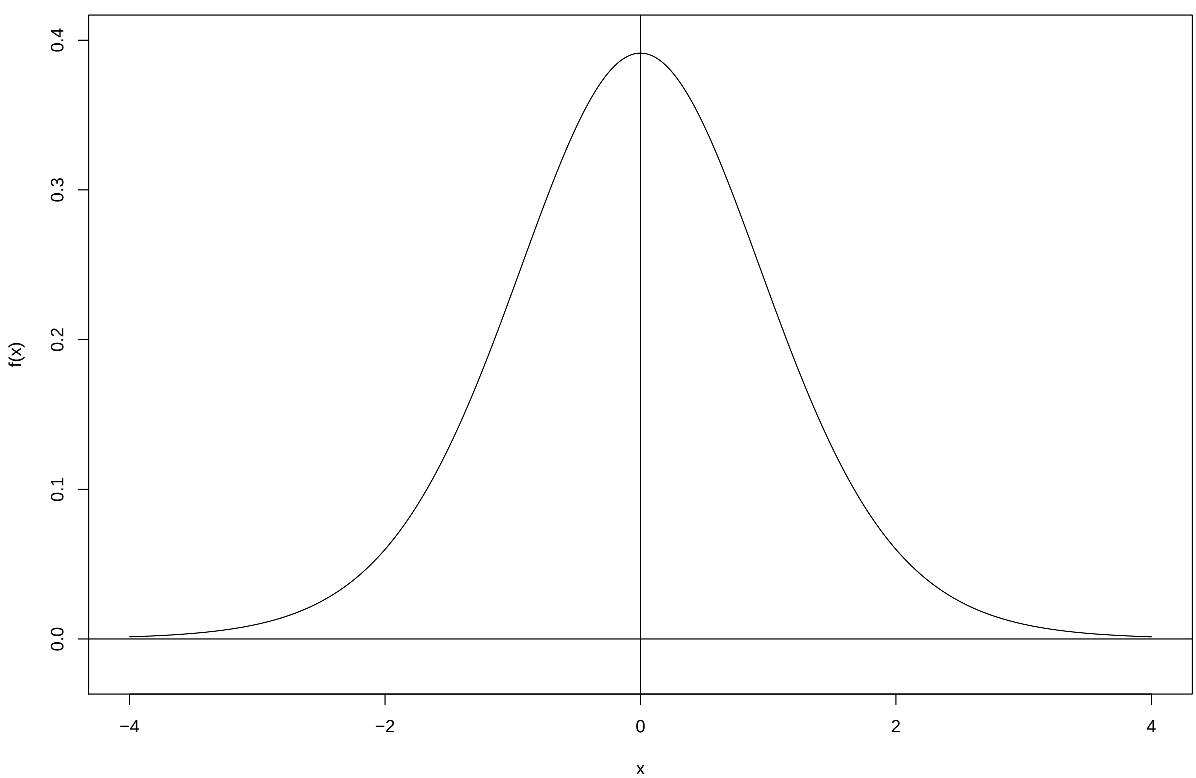
Un échantillon aléatoire de $n = 14$ véhicules est soumis à un contrôle de vitesse. On mesure les vitesses suivantes en km/h : 71, 78, 58, 83, 74, 64, 86, 56, 66, 55, 64, 65, 73, 87.
Soit X_i la vitesse du i-ème véhicule $(1 \leq i \leq 14)$.
On suppose les X_i indépendantes et de loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$, μ et σ étant inconnus.
Les estimateurs des paramètres la moyenne μ et la variance σ^2 sont respectivement

$\overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$ et $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \overline{X}\right)^2$ avec $n = 14$.
On obtient une moyenne empirique de $\overline{x} = 70,0$ km/h et une variance empirique de $s^2 = 114,0$ $(\text{km/h})^2$.
Donner un intervalle de confiance I pour la moyenne des vitesses μ de niveau de confiance 95 %. Expliquer.

Indications :

1. $\frac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim \mathcal{T}_{n-1}$, loi de Student à $n - 1 = 13$ degrés de liberté.
2. L'intervalle de confiance pour la moyenne des vitesses μ de niveau de confiance $1-\alpha = 0,95$ est défini par $P\left(\left|\frac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}}\right| \leq t_{n-1;1-\alpha/2}\right) = 1 - \alpha$.

Densité de probabilité f d'une variable suivant la loi de Student à 13 degrés de liberté $\mathcal{T}_{13}$



Exercice 5

Partie I *Générateur de nombres aléatoires*

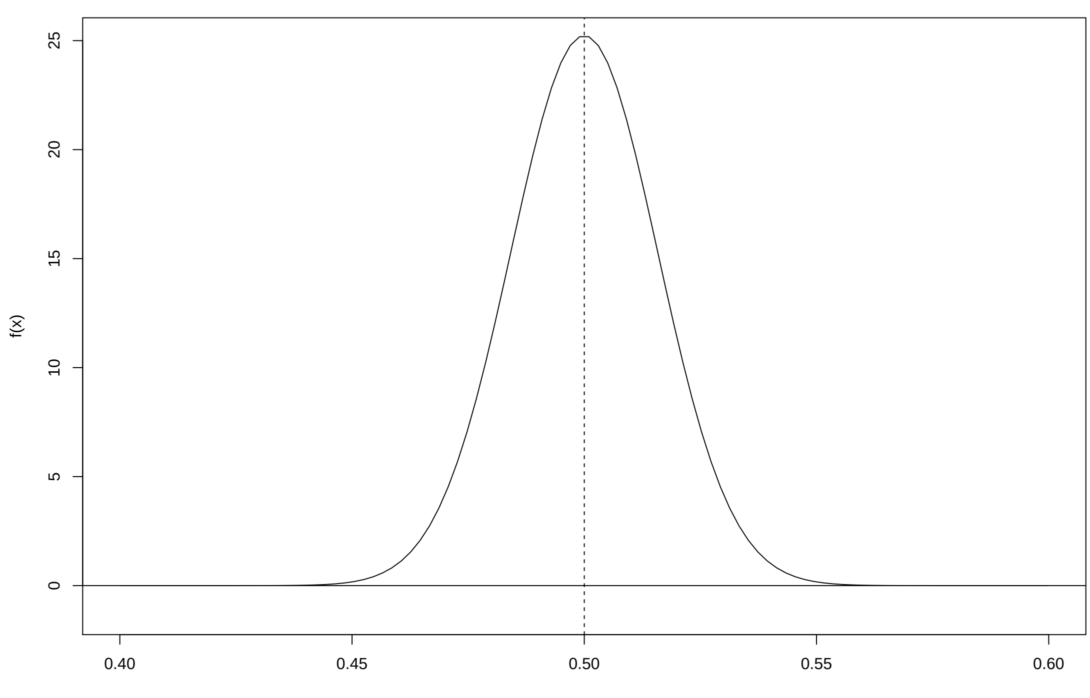
Un générateur de nombres aléatoires fournit des suites de n bits de valeur 0 ou 1. On souhaite vérifier que ces nombres apparaissent dans les mêmes proportions.
On note X_i la valeur du ième bit : $X_i \in \{0, 1\}$ $(1 \leq i \leq n)$ et π la proportion de 1 donnée par le générateur (proportion inconnue).
$X_i \sim \mathcal{B}(1, \pi)$ (loi de Bernoulli) : $P(X_i = 1) = \pi$ et $P(X_i = 0) = 1 - \pi$.

On pose $\overline{X} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$ (proportion de 1 dans la suite de n bits obtenue).
On suppose $n \geq 30$, $n\pi \geq 5$ et $n(1-\pi) \geq 5$.
On peut alors utiliser une approximation par une loi normale :
$\dfrac{\overline{X} - \pi}{\sqrt{\pi(1-\pi)/n}} \sim \mathcal{N}(0, 1)$.
On veut tester l'hypothèse nulle $H_0 : \pi = 0,5$ contre l'hypothèse alternative $H_1 : \pi \neq 0,5$ au niveau $\alpha = 5$ %.

Application numérique : $n = 1\,000$ bits parmi lesquels on a $n_1 = 508$ bits de valeur 1 et $n_0 = 492$ bits de valeur 0.

1. On a $n \geq 30$. Vérifier que sous H_0 : $n\pi \geq 5$ et $n(1-\pi) \geq 5$.
2. Préciser la région de rejet $\mathfrak{R}$ du test au niveau $\alpha = 5$ %.
   Indication :
   La région de rejet $\mathcal{R}$ est définie par $P_{H_0}\left(\left|\dfrac{\overline{X} - \pi}{\sqrt{\pi(1-\pi)/n}}\right| \geq u_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha$, c'est-à-dire par $\left|\dfrac{\overline{X} - \pi}{\sqrt{\pi(1-\pi)/n}}\right| \geq u_{1-\frac{\alpha}{2}}$, et donc $\dfrac{\overline{X} - \pi}{\sqrt{\pi(1-\pi)/n}} \leq -u_{1-\frac{\alpha}{2}}$ ou $\dfrac{\overline{X} - \pi}{\sqrt{\pi(1-\pi)/n}} \geq u_{1-\frac{\alpha}{2}}$.
3. Quelle est la proportion $\overline{x}$ de 1 dans la suite ?
4. Est-ce que $\overline{x} \in \mathfrak{R}$?
5. Est-ce qu'on rejette l'hypothèse nulle $H_0 : \pi = 0,5$ au niveau 5 % ?

Densité de probabilité f d'une variable suivant la loi normale $\mathcal{N}\left(\pi,\ \sqrt{\pi(1-\pi)/n}\right)$



Partie II ***Test d'indépendance***

On s'intéresse à présent à l'indépendance des valeurs successives X_k et X_{k+1} $(1 \leq k \leq n-1)$.
En utilisant un test du χ^2 d'indépendance, on teste alors H_0 : *il y a indépendance entre les valeurs* X_k *et* X_{k+1} $(1 \leq k \leq n-1)$ contre H_1 : *il n'y a pas indépendance entre les valeurs* X_k *et* X_{k+1} $(1 \leq k \leq n-1)$ au niveau $\alpha = 5$ %.
Pour la suite observée, on obtient

$X_k \setminus X_{k+1}$	$0 : n_{i1}$	$1 : n_{i2}$	Total $\sum_{j=1}^{2} n_{ij}$
$0 : n_{1j}$	233	259	492
$1 : n_{2j}$	258	249	507
Total $\sum_{i=1}^{2} n_{ij}$	491	508	$n-1=999$

1. Calculer les effectifs théoriques attendus :

   $$(n-1)q_{ij} = (n-1)\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{2} n_{ij} \times \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{2} n_{ij} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{2} n_{ij} \times \sum_{j=1}^{2} n_{ij}.$$

   Indication : Calcul de $(n-1)q_{11}$

   $$(n-1)q_{11} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{2} n_{i1} \times \sum_{j=1}^{2} n_{1j} = \frac{491 \times 492}{999} \approx 241,81.$$

   Reproduire et compléter le tableau suivant.

$X_k \setminus X_{k+1}$	$0 : (n-1)q_{i1}$	$1 : (n-1)q_{i2}$	Total
$0 : (n-1)q_{1j}$	241,81		492
$1 : (n-1)q_{2j}$			507
Total	491	508	999

2. Vérifier :
   (a) $n-1 \geq 30$,
   (b) pour tout i $(1 \leq i \leq 2)$, tout j $(1 \leq j \leq 2)$, $(n-1)q_{ij} \geq 5$.

3. Calculer la réalisation d de D : $d = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} \frac{(n_{ij}-(n-1)q_{ij})^2}{(n-1)q_{ij}}$.

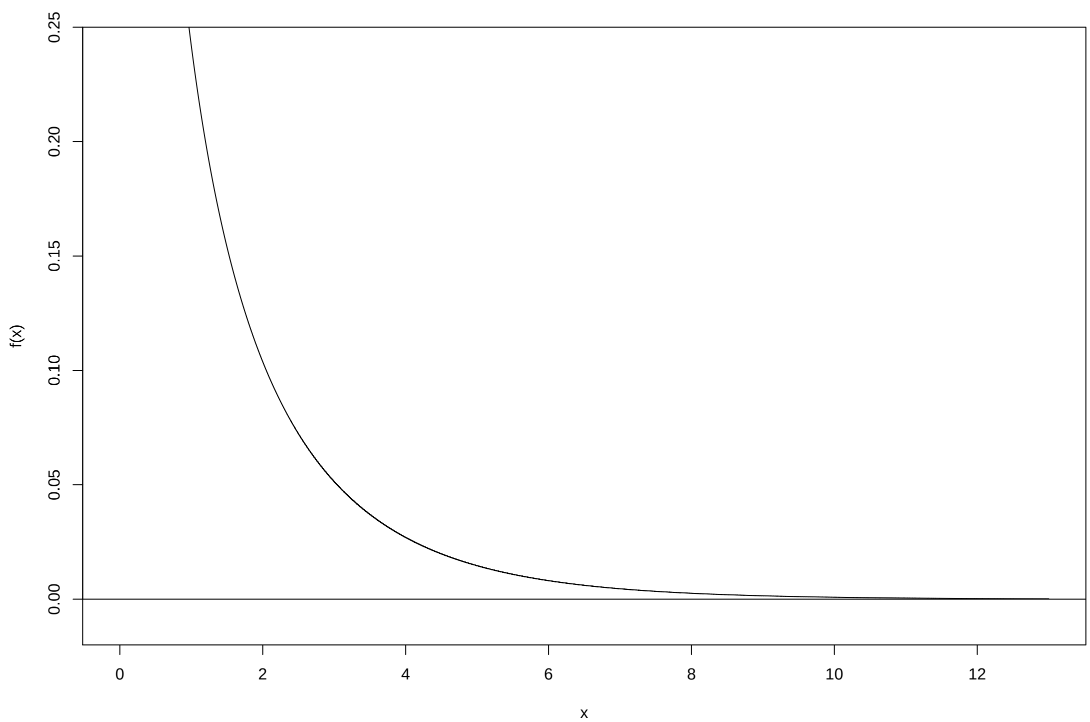
   Indication :
   On peut d'abord placer dans un même tableau les effectifs observés n_{ij} et les effectifs théoriques attendus $(n-1)q_{ij}$:

$X_k \setminus X_{k+1}$	0	1	Total
0	233/241,81	259/.......	492
1	258/.......	249/.......	507
Total	491	508	999

puis calculer $d = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} \frac{(n_{ij}-(n-1)q_{ij})^2}{(n-1)q_{ij}} = \frac{(233-241,81)^2}{241,81} + ...$

4. Préciser le nombre δ vérifiant $P(D \leq \delta) = 0,95$ avec $D \sim \chi^2_{(2-1)\times(2-1)}$.
   Indication : utiliser une table de probabilités.
5. En déduire la région de rejet au niveau 5 %.
   Indication : la région de rejet est $\mathcal{R} = [\delta, +\infty[$.
6. Faire le test du χ^2 au niveau 5 % en expliquant la décision.
7. Donner un encadrement de la p-value $P_c(d) = P_{H_0}(D \geq d)$.
   Indication : utiliser une table de probabilités.
8. Si le test est significatif, quel est le degré de signification du test (test *significatif*, *très significatif*, *hautement significatif*) ?
9. En utilisant ce dernier résultat, quelle est la décision au niveau 1 % ?

Densité de probabilité f d'une variable suivant la loi du χ^2 à 1 degré de liberté χ^2_1



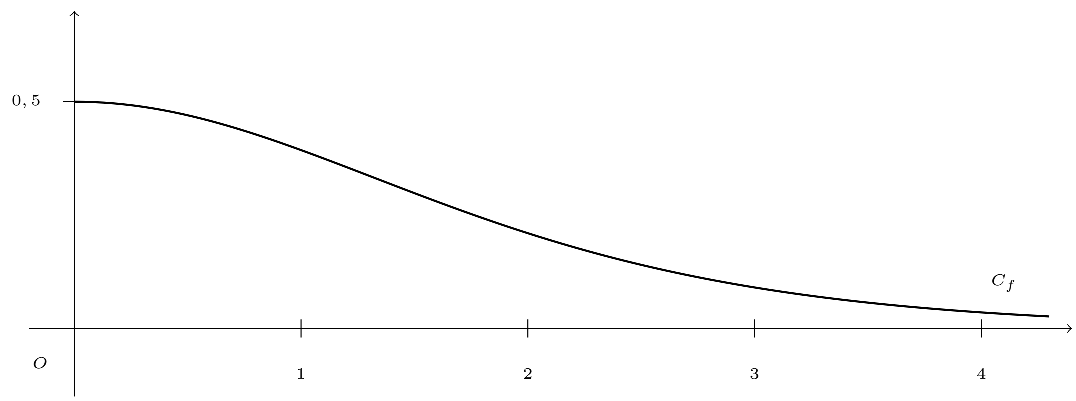
Annexe : Loi binomiale $\mathcal{B}(n,\, p)$

$$F(i) = P(X \leq i) = \sum_{k=0}^{i} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=0}^{i} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) p^k (1-p)^{n-k} \ \mathbf{(n = 25\,;\ p = 0,60)}$$

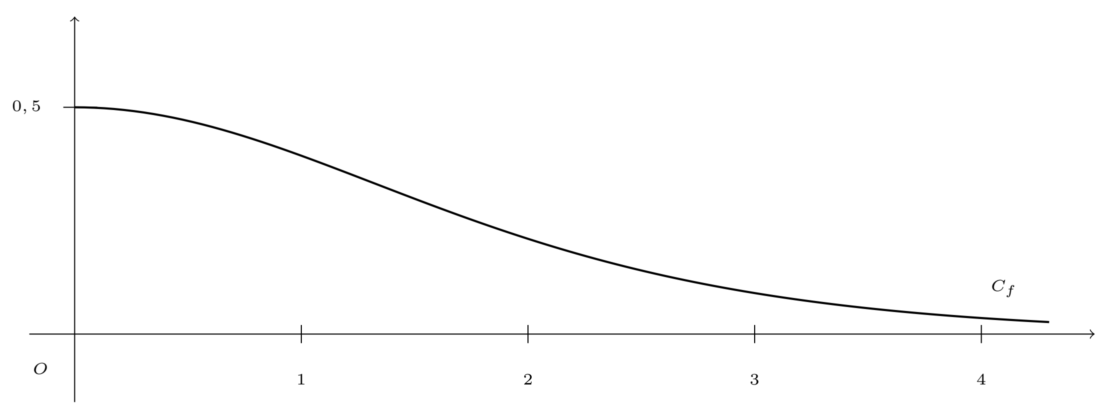
i	$P(X \leq i)$
0	0,0000
1	0,0000
2	0,0000
3	0,0000
4	0,0000
5	0,0001
6	0,0003
7	0,0012
8	0,0043
9	0,0132
10	0,0344
11	0,0778
12	0,1538
13	0,2677
14	0,4142
15	0,5754
16	0,7265
17	0,8464
18	0,9264
19	0,9706
20	0,9905
21	0,9976
22	0,9996
23	0,9999
24	1,0000
25	1,0000

Annexe à rendre

Question 4. (a)



Question 4. (b)



Nom : _______________________