TD R3.08 Probabilités
Intégration

Exercice 1

Préambule : fonction arctan
La fonction arctan est la fonction réciproque de la fonction *tan* définie sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

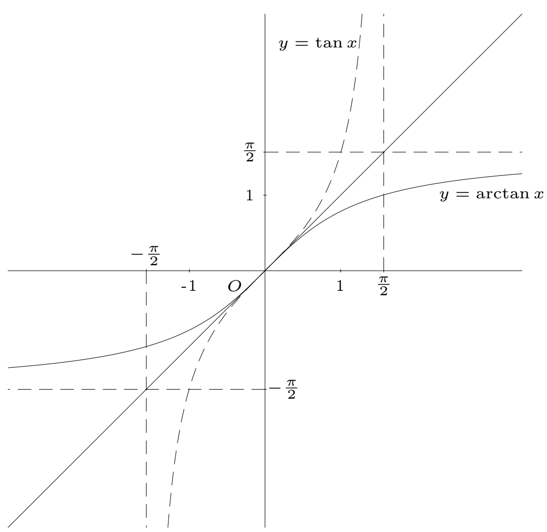
- *arctan* est définie sur $\mathbb{R}$.
- $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ arctan tan $x = x$
- $\forall x \in \mathbb{R}$ tan arctan $x = x$

Parité
arctan est impaire : $\forall x \in \mathbb{R}$ $-x \in \mathbb{R}$ et $\arctan(-x) = -\arctan x$.

Limites
$\lim\limits_{x\to-\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$

Dérivée
$\forall x \in \mathbb{R}$ $\arctan' x = \dfrac{1}{1+x^2}$

Représentation graphique



Angles remarquables

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan\theta$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	/

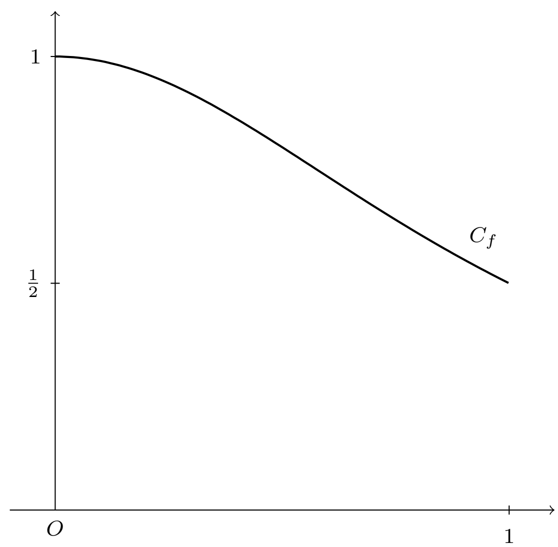
On en déduit $\arctan 0 = 0$, $\arctan \dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{\pi}{6}$, $\arctan 1 = \dfrac{\pi}{4}$, $\arctan \sqrt{3} = \dfrac{\pi}{3}$.

Sommes de Riemann

On note f la fonction définie sur $[0,1]$ par $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

Pour $n \geq 1$, on pose $s_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{i}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{1+\left(\frac{i}{n}\right)^2}$ et $s'_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\left(\frac{i}{n}\right)^2}$.

1. Calculer et interpréter graphiquement s_1, s_2, s_3, ainsi que s'_1, s'_2 et s'_3.
   Indication



2. On note f la fonction définie sur $[0,1]$ par $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.
   Montrer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} s'_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx$.
   Indication
   Soit une subdivision $\sigma = \{x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ d'un intervalle $[a,b]$: $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$, $x_i - x_{i-1} = \dfrac{b-a}{n}$ et $(x'_1, x'_2, \cdots, x'_n)$ une suite de réels tels que $x'_i \in [x_{i-1}, x_i]$ $(1 \leq i \leq n)$.
   En notant f une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x'_i) = \int_a^b f(x)\,dx$.
   Méthodes de calcul
   (a) $x'_i = x_{i-1} = a + (i-1)\dfrac{b-a}{n}$ $(1 \leq i \leq n)$: méthode des rectangles à gauche.
   (b) $x'_i = x_i = a + i\dfrac{b-a}{n}$ $(1 \leq i \leq n)$: méthode des rectangles à droite.
3. Préciser $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx$.
4. Interpréter graphiquement.
5. Donner un encadrement de π en remarquant que $\forall n \geq 1$ $s'_n \leq \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx \leq s_n$.

6. Application numérique : $n = 3$; $n = 20$; $n = 100$; $n = 1000$.
   Indication
   $4s'_3 = \dfrac{544}{195} \approx 2,7897...$; $4s_3 = \dfrac{674}{195} \approx 3,4564...$
   $4s'_{20} \approx 3,0911...$; $4s_{20} \approx 3,1911...$
   $4s'_{100} \approx 3,1315...$; $4s_{100} \approx 3,1515...$
   $4s'_{1000} \approx 3,1405...$; $4s_{1000} \approx 3,1425...$

Exercice 2

Calcul d'intégrales

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^1 (x^2 - x + 1)\, dx$
2. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx$
3. $\displaystyle\int_0^1 e^{2x}\, dx$
4. $\displaystyle\int_0^1 2xe^{x^2}\, dx$

   Indication : on pourra calculer $\left(e^{x^2}\right)'$.

Exercice 3

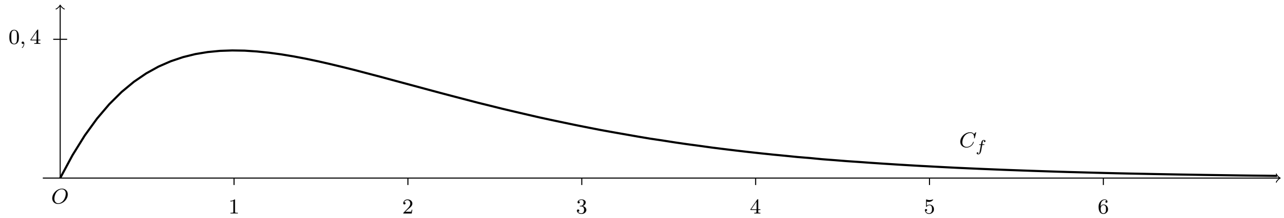
Intégrale généralisée

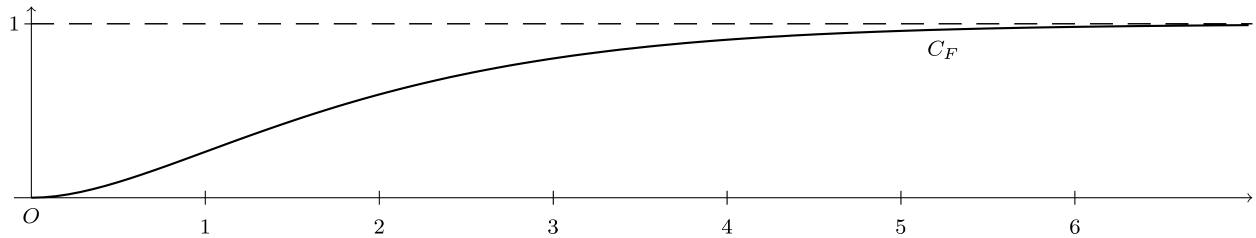
On note F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = -xe^{-x} - e^{-x} + 1$ et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{-x}$.

1. Calculer $F'(x)$.
2. En déduire que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
3. x est un réel quelconque. Préciser $\displaystyle\int_0^x te^{-t}\, dt$.
4. En déduire la nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{-x}\, dx$.

   Indication : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} xe^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0$.
5. Interpréter graphiquement.

Indication





Probabilité conditionnelle

Exercice 4

Pour dépister une maladie, on applique un test. Si le patient est effectivement atteint, le test donne un résultat positif dans 99 pour cent des cas. Mais il se peut aussi que le résultat du test soit positif alors que le consultant est en bonne santé, et ceci se produit dans 2 pour cent des cas.

1. Sachant qu'en moyenne un consultant sur mille est atteint de la maladie à dépister, calculer la probabilité pour qu'un consultant soit atteint sachant que son test a été positif.
2. Que penser du résultat ? Comment l'améliorer ?

Variables aléatoires

Exercice 5

Variable aléatoire

Préciser la loi de probabilité, la fonction de répartition, les représentations graphiques de celles-ci, l'espérance, la variance et l'écart-type de la variable aléatoire X dans les cas suivants.

1. X suit la loi uniforme sur $\{1, 2, 3\}$: $X \sim \mathcal{U}\left(\frac{1}{3}\right)$,
2. X suit la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{2}{5}$: $X \sim \mathcal{B}\left(1, \frac{2}{5}\right)$,
3. X suit la loi binomiale de paramètres $n = 3$ et $p = \frac{1}{4}$: $X \sim \mathcal{B}\left(3, \frac{1}{4}\right)$,
4. X suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda = 1$: $X \sim \mathcal{P}(1)$.

Exercice 6

Loi binomiale

L'expérience montre que 20 % des personnes qui réservent une table dans un restaurant ne donnent pas suite.
Un restaurant possède 50 tables. Il accepte 53 réservations. Quelle est la probabilité pour que cela ne se passe pas bien ?
Indications

1. On pourra utiliser une table des probabilités de la loi binomiale.
2. Si $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ avec $p > 0,5$, on peut utiliser
   (a) $P(X \leq i) = 1 - P(X' \leq n - i - 1)$ avec $X' \sim \mathcal{B}(n, 1 - p)$,
   (b) $P(X \geq i) = P(X' \leq n - i)$ avec $X' \sim \mathcal{B}(n, 1 - p)$.

Exercice 7

Loi de Poisson

Le centre de Sapeurs Pompiers d'une commune reçoit en moyenne 2,5 appels par heure. En cas d'appel, l'intervention prend une heure. On suppose que le nombre d'appels par heure suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 2,5$.

1. Quelle est la probabilité que, en une heure donnée, 0 appel, 1 appel, 2 appels, 3 appels, 4 appels, 5 appels, au moins 6 appels soient acheminés au centre. On présentera les résultats dans un tableau.
2. Le centre possède trois camions et peut donc répondre à trois appels au plus par heure. Quelle est la probabilité que, en une heure,
   (a) exactement 1 appel reste sans réponse ?
   (b) au moins 1 appel reste sans réponse ?

Exercice 8

Loi conjointe

On lance deux fois un dé tétraédrique parfait numéroté de 1 à 4. X est le premier numéro lu sur la base, Y le deuxième et M le plus petit des deux.

1. Construire la loi conjointe de X et Y, en précisant les lois marginales de X et de Y :

$X \backslash Y$	1	2	3	4	$P(X = i)$
1					
2					
3					
4					
$P(Y = j)$					

2. Faire de même pour le couple (X, M).
3. En déduire la loi de probabilité et la fonction de répartition de M.
   Représenter graphiquement.
4. X et Y sont-elles indépendantes ? Même question pour X et M.
5. Calculer $E(X)$, $E(Y)$ et $E(M)$, puis $V(X)$, $V(Y)$ et $V(M)$.
6. Préciser les lois de probabilité de $Z_1 = X + Y$ et de $Z_2 = X + M$.
7. Calculer $E(Z_1)$ et $E(Z_2)$, puis $V(Z_1)$ et $V(Z_2)$.

Exercice 9

Loi uniforme

On propose à une personne de couper en deux un ruban de 10 cm de long. La variable aléatoire X précisant l'endroit de la découpe suit la loi uniforme sur $[0,\,10]$: $X \sim \mathcal{U}_{[0,\,10]}$.
Préciser

1. la densité de probabilité $f(x)$ et sa représentation graphique,
2. la fonction de répartition $F(x) = P(X \leq x)$ et sa représentation graphique,
3. la probabilité que la découpe se fasse à moins de 3 cm de l'extrémité gauche et l'interprétation graphique,
4. la probabilité que la découpe se fasse en un point situé à plus de 4 cm et à moins de 5 cm de l'extrémité gauche et l'interprétation graphique,
5. la probabilité que la découpe se fasse en un point situé à au moins 6 cm de l'extrémité gauche et l'interprétation graphique,
6. le point de découpe à partir de l'extrémité gauche correspondant à une probabilité d'au moins 0,95 et l'interprétation graphique.
7. $E(X)$, $V(X)$ et σ_X.
   Indication : $E(X) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\, dx$ et $V(X) = E\left((X - E(X))^2\right) = E\left(X^2\right) - E\left(X\right)^2$ si elles existent.

Exercice 10

Loi exponentielle

La variable aléatoire X précisant le temps d'attente en minutes d'un taxi suit la loi exponentielle de paramètre $a = 1$: $X \sim \mathcal{E}(1)$.
Préciser

1. la densité de probabilité $f(x)$ et sa représentation graphique,
2. la fonction de répartition $F(x) = P(X \leq x)$ et sa représentation graphique,
3. la probabilité qu'un taxi arrive au bout de 1 minute au plus et l'interprétation graphique,
4. la probabilité qu'un taxi arrive après un temps d'attente compris entre 1 et 5 minutes et l'interprétation graphique,
5. la probabilité qu'un taxi arrive après un temps d'attente compris entre 0,5 et 1,5 minutes et l'interprétation graphique,
6. le temps d'attente correspondant à une probabilité d'au moins 0,95 et l'interprétation graphique.
7. $E(X)$, $V(X)$ et σ_X.
   Indication : si $X \sim \mathcal{E}(a)$ alors $E(X) = \dfrac{1}{a}$ et $V(X) = \dfrac{1}{a^2}$.

Exercice 11

Loi normale

La compagnie *Envol* affrête un avion de 300 places. La probabilité qu'une personne ayant réservé pour ce vol se présente à l'embarquement est $p = 0,92$.

1. Si la compagnie accepte $n = 310$ réservations, quelle est la probabilité qu'au moins 301 passagers se présentent à l'embarquement ?
   Indication : en notant X_i la variable aléatoire précisant la présence ($X_i = 1$) ou l'absence ($X_i = 0$) du i-ème passager ($1 \leq i \leq n$), on peut supposer les X_i indépendantes et $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \mathcal{B}(n, p)$.
   On pose $q = 1 - p$. Comme $n \geq 30$ et $np \geq 5$, $nq \geq 5$, on peut alors utiliser l'approximation $S_n \sim \mathcal{N}(np, \sqrt{npq})$ et calculer $P(S_{310} \geq 300,5)$ (correction de continuité de Yates).
2. Combien la compagnie peut-elle vendre de places pour que la probabilité de devoir refuser l'embarquement à au moins un voyageur soit inférieure à 1 % ?

Exercice 12

Approximation d'une loi binomiale

Une ligne de transmission entre émetteur et récepteur transporte des pages de texte, chaque page étant représentée par 100 000 bits (caractères, informations de transmission et de contrôle). La probabilité qu'un bit soit erroné est estimée à $0,000\,1$ et on admet que les erreurs sont indépendantes les unes des autres.
Soit X la variable aléatoire associant à chaque page transportée le nombre d'erreurs lors de la transmission de la page.

1. (a) Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire X ?
   (b) Donner la moyenne et l'écart-type de X.
2. **Approximation par une loi de Poisson**
   (a) Vérifier que la loi peut être approchée par une loi de Poisson.
   Indication : l'approximation de la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ par la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ avec $\lambda = np$ est envisageable pour n assez grand ($n \geq 30$), $p \leq 0,1$ et $np \leq 10$.
   (b) Déterminer le paramètre de cette loi.
   (c) Dans ces conditions, déterminer la probabilité qu'une page comporte au plus 15 erreurs.
3. **Approximation par une loi normale**
   On décide d'approcher la loi de la variable aléatoire discrète X par une loi normale. On note Y une variable aléatoire suivant cette loi $\mathcal{N}(m, \sigma)$.
   (a) Vérifier que la loi peut être approchée par une loi normale.
   Indication : d'après le théorème central limite, l'approximation de la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ par la loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma)$ avec $m = np$ et $\sigma^2 = np(1-p)$ est envisageable pour n assez grand ($n \geq 30$), $np \geq 5$ et $n(1 - p) \geq 5$.

(b) Préciser les paramètres de cette loi.

(c) En utilisant cette approximation, déterminer la probabilité qu'une page comporte au plus 15 erreurs, c'est-à-dire $P(-0,5 \leq Y \leq 15,5)$ (correction de continuité de Yates).

4. Comparer les résultats.

Loi	binomiale	de Poisson	normale
$P(X \leq 15)$	0,9513		

Exercices supplémentaires

Exercice 13

Intégrale généralisée
On pose $f(x) = \arctan(x+1)$.

1. Calculer $f'(x)$.
2. y est un réel quelconque. Calculer $\displaystyle\int_{-1}^{y} \frac{1}{1+(x+1)^2}\,dx$.
3. En déduire la nature de $\displaystyle\int_{-1}^{+\infty} \frac{1}{1+(x+1)^2}\,dx$.
4. Interpréter graphiquement.

Exercice 14

Trois machines A, B, C fabriquent respectivement 30 pour cent, 45 pour cent et 25 pour cent d'une production de pièces.

1. Quelle est la probabilité pour qu'une pièce ait été fabriquée par la machine A, par B, par C ?
2. Quelle est la probabilité pour qu'une pièce de la production ait été fabriquée par la machine A ou la machine B.

Exercice 15

Que penser du raisonnement suivant ?
En lançant deux fois la même pièce de monnaie, j'obtiendrai trois issues : Pile-Pile, Pile-Face et Face-Face. J'ai donc une chance sur trois d'obtenir deux côtés différents.

Exercice 16

On jette simultanément deux dés non pipés.
Quelle est la probabilité que le total des numéros amenés soit

1. égal à trois ?
2. supérieur ou égal à 7 ?
3. strictement inférieur à 7 ?

Exercice 17

Indépendance

On lance un dé parfait à six faces et on note le numéro lu sur sa face supérieure.
On considère les événements A="le nombre est inférieur ou égal à 3", B="le nombre est un multiple de 3", C="le nombre est un multiple de 2".

1. Calculer $P(A)$, $P(B)$ et $P(C)$.
2. Est-ce que A et B sont indépendants ?
3. Est-ce que A et C sont indépendants ?
4. Est-ce que A, B et C sont indépendants ?

Exercice 18

Un groupe de cent étudiants répond à un questionnaire qui donne les informations suivantes :
- 60 pour cent des étudiants pratiquent le ski,
- 50 pour cent des étudiants pratiquent la natation,
- $2/3$ des skieurs pratiquent la natation.

On choisit un étudiant au hasard dans ce groupe.

1. Quelle est la probabilité que l'étudiant pratique le ski ?
2. Quelle est la probabilité que l'étudiant pratique la natation ?
3. L'étudiant choisi pratique le ski. Quelle est la probabilité que cet étudiant pratique la natation ?
4. Quelle est la probabilité que l'étudiant pratique le ski et la natation ?
5. L'étudiant choisi pratique la natation. Quelle est la probabilité que cet étudiant pratique le ski ?

Exercice 19

Une étude nationale sur les ménages a montré que le taux d'écoute d'une certaine émission télévisée était de 30 pour cent pour les femmes et de 50 pour cent pour les hommes. Elle a montré par ailleurs que si la femme suivait cette émission, la proportion des maris la suivant en même temps passait à 60 pour cent. On tire un couple au hasard. Quelle est la probabilité que

1. les deux conjoints suivent l'émission ?
2. au moins l'un des deux suive l'émission ?
3. aucun des deux ne suive l'émission ?

4. si le mari la suit, la femme la suive ?
5. si le mari ne la suit pas, la femme la suive ?

Exercice 20

Intervalle de fluctuation

Une petite ville des États-Unis, Woburn, a connu 9 cas de leucémie parmi les 5 969 garçons de moins de 15 ans sur la période 1969-1979. La fréquence des leucémies pour cette tranche d'âge aux États-Unis est égale à 0,00052.
Source : Massachussetts Department of Public Health.
Les autorités concluent qu'il n'y a rien d'étrange dans cette ville. Qu'en penser ?
Pour pouvoir répondre à la question, on suppose que dans la population des garçons de moins de 15 ans de Woburn la fréquence des leucémies est égale à $p = 0,00052$. Le nombre X de garçons de moins de 15 ans de Woburn atteints de leucémie suit alors la loi hypergéométrique $\mathcal{H}(N,n,p) : \forall i \in X(\Omega)$, $P\left(X = i\right) = \dfrac{C_{N_1}^{i} C_{N_2}^{n-i}}{C_N^n}$ avec $N_1 = Np$ et $N_2 = N - N_1$ ($N_1 = 10\,400$; $N = 20\,000\,000$; $p = \dfrac{N_1}{N} = 0,00052$; $n = 5\,969$). On pose $i_W = 9$.

1. Préciser l'expression, puis la valeur de $P\left(X = i_W\right)$.
   Indication : on peut utiliser la table ci-dessous.
2. Vérifier qu'on peut approcher loi hypergéométrique $\mathcal{H}(N,n,p)$ avec $p = \dfrac{N_1}{N}$, par la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$.
   Indication : l'approximation est satisfaisante si $\dfrac{n}{N} < 0,05$.
3. Préciser l'expression, puis la valeur de $P\left(X = i_W\right)$.
   Indication : on peut utiliser la table ci-dessous.
4. Intervalle de fluctuation
   (a) Déterminer l'intervalle de fluctuation $[\![n_1, n_2]\!]$ au seuil de risque $\alpha = 0,05$ (ou de niveau $1-\alpha$) qui est le plus petit intervalle $[\![n_1, n_2]\!]$ tel que $P\left(X < n_1\right) \leq \dfrac{\alpha}{2}$ et $P\left(X > n_2\right) \leq \dfrac{\alpha}{2}$.
   Remarque : on a alors $P\left(n_1 \leq X \leq n_2\right) \geq 1 - \alpha$.
   Indication : utiliser la loi binomiale et la table ci-dessous.
   (b) Que constate-t-on ? Est-ce que $i_W \in [\![n_1, n_2]\!]$?
   (c) Calculer $P\left(n_1 \leq X \leq n_2\right)$.
   (d) Préciser $P\left(X \geq i_W\right)$. Interpréter le résultat.
   (e) On peut aussi envisager un intervalle de fluctuation unilatéral au seuil de risque $\alpha = 0,05$: le plus petit intervalle $[\![0, n_2']\!]$ tel que $P\left(X > n_2'\right) \leq \alpha$.
   Préciser n_2' et $[\![0, n_2']\!]$. Est-ce que $i_W \in [\![0, n_2']\!]$?
5. Vérifier qu'on peut aussi approcher la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ par une loi de Poisson $\mathcal{P}\left(\lambda\right)$ dont on précisera λ et l'expression de $P\left(X = i\right)$ $(i \geq 0)$.

Indication : l'approximation est satisfaisante si $n \geq 30$; $p \leq 0,1$; $np \leq 10$; i petit devant n (événements rares).

6. Comparer les différentes valeurs de $P(X \geq i_W)$ suivant la loi utilisée.

Loi	hypergéométrique	binomiale	de Poisson
$P(X \geq i_W)$			

k	Loi hypergéométrique $\mathcal{H}(N,n,p)$		Loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$		Loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$	
	$P(X=i)$	$P(X \leq i)$	$P(X=i)$	$P(X \leq i)$	$P(X=i)$	$P(X \leq i)$
0	0.04482	0.04482	0.04484	0.04484	0.04487	0.04487
1	0.13922	0.18404	0.13925	0.18408	0.13929	0.18416
2	0.21619	0.40023	0.21618	0.40026	0.21616	0.40032
3	0.22374	0.62396	0.22370	0.62397	0.22365	0.62397
4	0.17362	0.79758	0.17359	0.79756	0.17354	0.79752
5	0.10775	0.90533	0.10774	0.90530	0.10773	0.90525
6	0.05571	0.96105	0.05572	0.96102	0.05573	0.96098
7	0.02469	0.98573	0.02469	0.98572	0.02471	0.98569
8	0.00957	0.99530	0.00958	0.99529	0.00959	0.99528
9	0.00330	0.99859	0.00330	0.99859	0.00331	0.99859
10	0.00102	0.99962	0.00102	0.99961	0.00103	0.99961
11	0.00029	0.99990	0.00029	0.99990	0.00029	0.99990
12	0.00007	0.99998	0.00007	0.99998	0.00007	0.99998
13	0.00002	1,00000	0.00002	1,00000	0.00002	1,00000