R3.08 Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Plan

Loi des grands nombres

Annexe : intervalle de fluctuation

R3.08

Variable aléatoire 2

François Morellet 40 000 carrés

Ce sont coups du hasard, dont on n'est point garant.

Molière

Loi des grands nombres

Inégalité de Markov

Loi des grands nombres

Inégalité de Markov

Soit X une variable aléatoire positive et a un réel strictement positif.

Loi des grands nombres

Inégalité de Markov

Soit X une variable aléatoire positive et a un réel strictement positif.

$$P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}$$

Loi des grands nombres

R3.08 Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Plan

Loi des grands nombres

Annexe : intervalle de fluctuation

Inégalité de Markov

Soit X une variable aléatoire positive et a un réel strictement positif.

$$P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}$$

Démonstration (cas discret fini)

Loi des grands nombres

Inégalité de Markov

Soit X une variable aléatoire positive et a un réel strictement positif.

$$P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}$$

Démonstration (cas discret fini)

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i)$$

Loi des grands nombres

Inégalité de Markov

Soit X une variable aléatoire positive et a un réel strictement positif.

$$P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}$$

Démonstration (cas discret fini)

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i) = \sum_{x_i < a} x_i P(X = x_i) + \sum_{x_i \geq a} x_i P(X = x_i)$$

Loi des grands nombres

Inégalité de Markov

Soit X une variable aléatoire positive et a un réel strictement positif.

$$P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}$$

Démonstration (cas discret fini)

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i) = \sum_{x_i < a} x_i P(X = x_i) + \sum_{x_i \geq a} x_i P(X = x_i)$$

$$\geq \sum_{x_i \geq a} x_i P(X = x_i)$$

Loi des grands nombres

Inégalité de Markov

Soit X une variable aléatoire positive et a un réel strictement positif.

$$P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}$$

Démonstration (cas discret fini)

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i) = \sum_{x_i < a} x_i P(X = x_i) + \sum_{x_i \geq a} x_i P(X = x_i)$$

$$\geq \sum_{x_i \geq a} x_i P(X = x_i) \geq \sum_{x_i \geq a} a P(X = x_i)$$

Loi des grands nombres

Inégalité de Markov

Soit X une variable aléatoire positive et a un réel strictement positif.

$$P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}$$

Démonstration (cas discret fini)

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i) = \sum_{x_i < a} x_i P(X = x_i) + \sum_{x_i \geq a} x_i P(X = x_i)$$

$$\geq \sum_{x_i \geq a} x_i P(X = x_i) \geq \sum_{x_i \geq a} a P(X = x_i) = a \sum_{x_i \geq a} P(X = x_i)$$

Loi des grands nombres

Inégalité de Markov

Soit X une variable aléatoire positive et a un réel strictement positif.

$$P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}$$

Démonstration (cas discret fini)

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i) = \sum_{x_i < a} x_i P(X = x_i) + \sum_{x_i \geq a} x_i P(X = x_i)$$

$$\geq \sum_{x_i \geq a} x_i P(X = x_i) \geq \sum_{x_i \geq a} a P(X = x_i) = a \sum_{x_i \geq a} P(X = x_i) = aP(X \geq a)$$

Loi des grands nombres

Inégalité de Markov

Soit X une variable aléatoire positive et a un réel strictement positif.

$$P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}$$

Démonstration (cas discret fini)

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i) = \sum_{x_i < a} x_i P(X = x_i) + \sum_{x_i \geq a} x_i P(X = x_i)$$

$$\geq \sum_{x_i \geq a} x_i P(X = x_i) \geq \sum_{x_i \geq a} a P(X = x_i) = a \sum_{x_i \geq a} P(X = x_i) = aP(X \geq a)$$

Andreï Andreïevitch Markov (1856-1922) : mathématicien russe.

Loi des grands nombres

Exemple

Loi des grands nombres

Exemple

Le nombre d'absents à un cours est une variable aléatoire d'espérance 2.

Loi des grands nombres

R3.08 Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Plan

Loi des grands nombres

Annexe : intervalle de fluctuation

Exemple

Le nombre d'absents à un cours est une variable aléatoire d'espérance 2.
La probabilité qu'il y ait trois absents au moins lors du prochain cours vérifie :

Loi des grands nombres

Exemple

Le nombre d'absents à un cours est une variable aléatoire d'espérance 2. La probabilité qu'il y ait trois absents au moins lors du prochain cours vérifie : $P(X \geq 3) \leq \dfrac{2}{3}$.

Loi des grands nombres

Inégalité de Bienaymé-Tchebycheff

Loi des grands nombres

Inégalité de Bienaymé-Tchebycheff

Soit X une variable aléatoire et a un réel strictement positif.

Loi des grands nombres

Inégalité de Bienaymé-Tchebycheff

Soit X une variable aléatoire et a un réel strictement positif.

$$P(|X - E(X)| \geq a) \leq \frac{V(X)}{a^2}$$

Loi des grands nombres

Inégalité de Bienaymé-Tchebycheff

Soit X une variable aléatoire et a un réel strictement positif.

$$P(|X - E(X)| \geq a) \leq \frac{V(X)}{a^2}$$

Démonstration (cas discret fini)

Loi des grands nombres

Inégalité de Bienaymé-Tchebycheff

Soit X une variable aléatoire et a un réel strictement positif.

$$P(|X - E(X)| \geq a) \leq \frac{V(X)}{a^2}$$

Démonstration (cas discret fini)

Dans l'inégalité de Markov, on remplace X par $(X - E(X))^2$ et a par a^2.

Loi des grands nombres

R3.08 Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Plan

Loi des grands nombres

Annexe : intervalle de fluctuation

Inégalité de Bienaymé-Tchebycheff

Soit X une variable aléatoire et a un réel strictement positif.

$$P(|X - E(X)| \geq a) \leq \frac{V(X)}{a^2}$$

Démonstration (cas discret fini)

Dans l'inégalité de Markov, on remplace X par $(X - E(X))^2$ et a par a^2.

On obtient : $P((X - E(X))^2 \geq a^2) \leq \dfrac{E((X - E(X))^2)}{a^2}$ soit

Loi des grands nombres

Inégalité de Bienaymé-Tchebycheff

Soit X une variable aléatoire et a un réel strictement positif.

$$P(|X - E(X)| \geq a) \leq \frac{V(X)}{a^2}$$

Démonstration (cas discret fini)

Dans l'inégalité de Markov, on remplace X par $(X - E(X))^2$ et a par a^2.

On obtient : $P((X - E(X))^2 \geq a^2) \leq \dfrac{E((X - E(X))^2)}{a^2}$ soit

$P(|X - E(X)| \geq a) \leq \dfrac{V(X)}{a^2}$.

Loi des grands nombres

Inégalité de Bienaymé-Tchebycheff

Soit X une variable aléatoire et a un réel strictement positif.

$$P(|X - E(X)| \geq a) \leq \frac{V(X)}{a^2}$$

Démonstration (cas discret fini)

Dans l'inégalité de Markov, on remplace X par $(X - E(X))^2$ et a par a^2.

On obtient : $P((X - E(X))^2 \geq a^2) \leq \dfrac{E((X - E(X))^2)}{a^2}$ soit

$P(|X - E(X)| \geq a) \leq \dfrac{V(X)}{a^2}$.

Pafnouti Lvovitch Tchebychev (1821-1894) : mathématicien russe.

Loi des grands nombres

R3.08 Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Plan

Loi des grands nombres

Annexe : intervalle de fluctuation

Inégalité de Bienaymé-Tchebycheff

Soit X une variable aléatoire et a un réel strictement positif.

$$P(|X - E(X)| \geq a) \leq \frac{V(X)}{a^2}$$

Démonstration (cas discret fini)

Dans l'inégalité de Markov, on remplace X par $(X - E(X))^2$ et a par a^2.

On obtient : $P((X - E(X))^2 \geq a^2) \leq \dfrac{E((X - E(X))^2)}{a^2}$ soit

$P(|X - E(X)| \geq a) \leq \dfrac{V(X)}{a^2}$.

Pafnouti Lvovitch Tchebychev (1821-1894) : mathématicien russe.

Irénée-Jules Bienaymé (1796-1878) : mathématicien français.

Loi des grands nombres

Exemple

Loi des grands nombres

Exemple

Le nombre d'absents à un cours est une variable aléatoire d'espérance 2. La variance est de 1.

Loi des grands nombres

Exemple

Le nombre d'absents à un cours est une variable aléatoire d'espérance 2.
La variance est de 1.
En écrivant : $P(|X-2| \geq 2) \leq \frac{1}{2^2}$, la probabilité qu'il y ait entre un et trois absents lors du prochain cours vérifie :

Loi des grands nombres

Exemple

Le nombre d'absents à un cours est une variable aléatoire d'espérance 2.
La variance est de 1.
En écrivant : $P(|X-2| \geq 2) \leq \dfrac{1}{2^2}$, la probabilité qu'il y ait entre un et trois absents lors du prochain cours vérifie :
$P\,(1 \leq X \leq 3)$

Loi des grands nombres

Exemple

Le nombre d'absents à un cours est une variable aléatoire d'espérance 2. La variance est de 1.

En écrivant : $P(|X-2| \geq 2) \leq \dfrac{1}{2^2}$, la probabilité qu'il y ait entre un et trois absents lors du prochain cours vérifie :

$P\,(1 \leq X \leq 3) = P(-1 \leq X-2 \leq 1)$

Loi des grands nombres

Exemple

Le nombre d'absents à un cours est une variable aléatoire d'espérance 2. La variance est de 1.

En écrivant : $P(|X-2| \geq 2) \leq \dfrac{1}{2^2}$, la probabilité qu'il y ait entre un et trois absents lors du prochain cours vérifie :

$P\,(1 \leq X \leq 3) = P(-1 \leq X-2 \leq 1) = P(|X-2| \leq 1)$

Loi des grands nombres

Exemple

Le nombre d'absents à un cours est une variable aléatoire d'espérance 2.
La variance est de 1.
En écrivant : $P(|X-2| \geq 2) \leq \dfrac{1}{2^2}$, la probabilité qu'il y ait entre un et trois absents lors du prochain cours vérifie :
$P\,(1 \leq X \leq 3) = P(-1 \leq X-2 \leq 1) = P(|X-2| \leq 1)$
$= 1 - P(|X-2| \geq 2) \geq 1 - \dfrac{1}{2^2}$

Loi des grands nombres

Exemple

Le nombre d'absents à un cours est une variable aléatoire d'espérance 2. La variance est de 1.

En écrivant : $P(|X-2| \geq 2) \leq \dfrac{1}{2^2}$, la probabilité qu'il y ait entre un et trois absents lors du prochain cours vérifie :

$$P\left(1 \leq X \leq 3\right) = P(-1 \leq X - 2 \leq 1) = P(|X-2| \leq 1)$$
$$= 1 - P(|X-2| \geq 2) \geq 1 - \frac{1}{2^2} = \frac{3}{4}.$$

Loi des grands nombres

Loi faible des grands nombres

Loi des grands nombres

Loi faible des grands nombres

Soit X_1, X_2, ..., X_n n variables aléatoires indépendantes relatives à une suite de n expériences aléatoires identiques.

Loi des grands nombres

Loi faible des grands nombres

Soit X_1, X_2, ..., X_n n variables aléatoires indépendantes relatives à une suite de n expériences aléatoires identiques. L'espérance commune est notée m et l'écart-type σ. Alors

Loi des grands nombres

Loi faible des grands nombres

Soit X_1, X_2, ..., X_n n variables aléatoires indépendantes relatives à une suite de n expériences aléatoires identiques. L'espérance commune est notée m et l'écart-type σ. Alors

$$P\left(\left|\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}-m\right|\geq\epsilon\right)\leq\frac{\sigma^2}{n\epsilon^2}$$

Loi des grands nombres

R3.08 Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Plan

Loi des grands nombres

Annexe : intervalle de fluctuation

Loi faible des grands nombres

Soit X_1, X_2, ..., X_n n variables aléatoires indépendantes relatives à une suite de n expériences aléatoires identiques. L'espérance commune est notée m et l'écart-type σ. Alors

$$P\left(\left|\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}-m\right|\geq\epsilon\right)\leq\frac{\sigma^2}{n\epsilon^2}$$

On en déduit

$$\lim_{n\to+\infty}P\left(\left|\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}-m\right|\geq\epsilon\right)=0$$

Loi des grands nombres

Démonstration

Loi des grands nombres

R3.08 Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Plan

Loi des grands nombres

Annexe : intervalle de fluctuation

Démonstration

Dans l'inégalité de Bienaymé-Tchebycheff, on remplace X par $\dfrac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$ et a par ϵ.

Loi des grands nombres

R3.08 Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Plan

Loi des grands nombres

Annexe : intervalle de fluctuation

Démonstration

Dans l'inégalité de Bienaymé-Tchebycheff, on remplace X par $\dfrac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$ et a par ϵ.

Par ailleurs,

Loi des grands nombres

Démonstration

Dans l'inégalité de Bienaymé-Tchebycheff, on remplace X par $\dfrac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$ et a par ϵ.

Par ailleurs,

$$E\left(\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}\right) = \frac{1}{n}\left(E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_n)\right)$$

Loi des grands nombres

Démonstration

Dans l'inégalité de Bienaymé-Tchebycheff, on remplace X par $\dfrac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$ et a par ϵ.

Par ailleurs,

$$E\left(\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}\right) = \frac{1}{n}\left(E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_n)\right)$$

$= \dfrac{1}{n}.n.m = m$ et

Loi des grands nombres

Démonstration

Dans l'inégalité de Bienaymé-Tchebycheff, on remplace X par $\dfrac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$ et a par ϵ.

Par ailleurs,

$$E\left(\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}\right) = \frac{1}{n}\left(E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_n)\right)$$

$$= \frac{1}{n}.n.m = m \text{ et}$$

$$V\left(\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2}\left(V(X_1) + V(X_2) + \cdots + V(X_n)\right)$$

Loi des grands nombres

Démonstration

Dans l'inégalité de Bienaymé-Tchebycheff, on remplace X par $\dfrac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}$ et a par ϵ.

Par ailleurs,

$$E\left(\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}\right)=\frac{1}{n}\left(E(X_1)+E(X_2)+\cdots+E(X_n)\right)$$

$$=\frac{1}{n}.n.m=m \text{ et}$$

$$V\left(\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}\right)=\frac{1}{n^2}\left(V(X_1)+V(X_2)+\cdots+V(X_n)\right)$$

$$=\frac{1}{n^2}.n.\sigma^2=\frac{\sigma^2}{n}.$$

Loi des grands nombres

Exemple

Loi des grands nombres

Exemple

On lance n fois une pièce parfaite dont les faces sont numérotées 0 et 1. On note X_i le numéro relevé au i-ème lancer.

Loi des grands nombres

R3.08 Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Plan

Loi des grands nombres

Annexe : intervalle de fluctuation

Exemple

On lance n fois une pièce parfaite dont les faces sont numérotées 0 et 1.
On note X_i le numéro relevé au i-ème lancer.
$X_i \sim \mathcal{B}(1, \dfrac{1}{2})$.

Loi des grands nombres

Exemple

On lance n fois une pièce parfaite dont les faces sont numérotées 0 et 1.
On note X_i le numéro relevé au i-ème lancer.
$X_i \sim \mathcal{B}(1, \frac{1}{2})$.
$E(X_i) = \frac{1}{2}$, $V(X_i) = \frac{1}{2}.(1 - \frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$

Loi des grands nombres

R3.08 Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Plan

Loi des grands nombres

Annexe : intervalle de fluctuation

Exemple

On lance n fois une pièce parfaite dont les faces sont numérotées 0 et 1.
On note X_i le numéro relevé au i-ème lancer.
$X_i \sim \mathcal{B}(1, \frac{1}{2})$.
$E(X_i) = \frac{1}{2}$, $V(X_i) = \frac{1}{2}.(1 - \frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$
On obtient alors

Loi des grands nombres

Exemple

On lance n fois une pièce parfaite dont les faces sont numérotées 0 et 1.
On note X_i le numéro relevé au i-ème lancer.
$X_i \sim \mathcal{B}(1, \frac{1}{2})$.
$E(X_i) = \frac{1}{2}$, $V(X_i) = \frac{1}{2}.(1 - \frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$
On obtient alors

$$P\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} - \frac{1}{2}\right| \geq \epsilon\right) \leq \frac{1}{4n\epsilon^2}$$

Loi des grands nombres

Application

Loi des grands nombres

Application

On se demande à partir de quelle valeur de n on a

Loi des grands nombres

Application

On se demande à partir de quelle valeur de n on a

$$P\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} - \frac{1}{2}\right| \geq 0,01\right) \leq 0,05$$

Loi des grands nombres

Application

On se demande à partir de quelle valeur de n on a

$$P\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} - \frac{1}{2}\right| \geq 0,01\right) \leq 0,05$$

Il suffit de prendre n tel que $\dfrac{1}{4n.0,01^2} \leq 0,05$,

Loi des grands nombres

Application

On se demande à partir de quelle valeur de n on a

$$P\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} - \frac{1}{2}\right| \geq 0,01\right) \leq 0,05$$

Il suffit de prendre n tel que $\dfrac{1}{4n.0,01^2} \leq 0,05$,

c'est-à-dire $n \geq \dfrac{1}{4.0,05.0,01^2} = 50\,000$.

Loi des grands nombres

Application

On se demande à partir de quelle valeur de n on a

$$P\left(\left|\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}-\frac{1}{2}\right|\geq 0,01\right)\leq 0,05$$

Il suffit de prendre n tel que $\dfrac{1}{4n.0,01^2}\leq 0,05$,

c'est-à-dire $n\geq \dfrac{1}{4.0,05.0,01^2}=50\,000$.

On dit que la fréquence d'apparition de 1 s'écarte de sa probabilité $\dfrac{1}{2}$ d'au plus 1 % au seuil de risque de 5 %.

Loi des grands nombres

Théorème central limite

Loi des grands nombres

Théorème central limite

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi de moyenne m et d'écart-type σ.

Loi des grands nombres

Théorème central limite

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi de moyenne m et d'écart-type σ.
La loi de la variable aléatoire $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ converge vers la loi normale de moyenne nm et d'écart-type $\sqrt{n}\sigma$

Loi des grands nombres

Théorème central limite

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi de moyenne m et d'écart-type σ.
La loi de la variable aléatoire $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ converge vers la loi normale de moyenne nm et d'écart-type $\sqrt{n}\sigma$

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(\frac{S_n - nm}{\sqrt{n}\sigma} \leq a\right) = \int_{-\infty}^{a} \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dt$$

Loi des grands nombres

Autre formulation

Loi des grands nombres

R3.08 Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Plan

Loi des grands nombres

Annexe : intervalle de fluctuation

Autre formulation

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi de moyenne m et d'écart-type σ.

Loi des grands nombres

Autre formulation

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi de moyenne m et d'écart-type σ.

La loi de la variable aléatoire $\overline{X_n} = \dfrac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$

Loi des grands nombres

Autre formulation

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi de moyenne m et d'écart-type σ.

La loi de la variable aléatoire $\overline{X_n} = \dfrac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$ converge vers la loi normale de moyenne m et d'écart-type $\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$:

Loi des grands nombres

Autre formulation

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi de moyenne m et d'écart-type σ.

La loi de la variable aléatoire $\overline{X_n} = \dfrac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$ converge vers la loi normale de moyenne m et d'écart-type $\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$:

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(\frac{\overline{X_n} - m}{\sigma/\sqrt{n}} \leq a\right) = \int_{-\infty}^{a} \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dt$$

Loi des grands nombres

Autre formulation

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi de moyenne m et d'écart-type σ.

La loi de la variable aléatoire $\overline{X_n} = \dfrac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$ converge vers la loi normale de moyenne m et d'écart-type $\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$:

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(\frac{\overline{X_n} - m}{\sigma/\sqrt{n}} \leq a\right) = \int_{-\infty}^{a} \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dt$$

Dans la pratique, on peut utiliser l'approximation qui en résulte pour $n \geq 30$.

Loi des grands nombres

Exemple 1

Loi des grands nombres

Exemple 1

Dans un IUT, le temps moyen de vérification du dossier d'un étudiant en vue de son inscription est de 2 minutes avec un écart-type de 1 minute.

Loi des grands nombres

Exemple 1

Dans un IUT, le temps moyen de vérification du dossier d'un étudiant en vue de son inscription est de 2 minutes avec un écart-type de 1 minute. On s'intéresse à la probabilité que 100 étudiants puissent être contrôlés en 3 heures.

Loi des grands nombres

Exemple 1

Dans un IUT, le temps moyen de vérification du dossier d'un étudiant en vue de son inscription est de 2 minutes avec un écart-type de 1 minute.
On s'intéresse à la probabilité que 100 étudiants puissent être contrôlés en 3 heures.
Soit X_i la durée de vérification d'une donnée.

Loi des grands nombres

Exemple 1

Dans un IUT, le temps moyen de vérification du dossier d'un étudiant en vue de son inscription est de 2 minutes avec un écart-type de 1 minute.
On s'intéresse à la probabilité que 100 étudiants puissent être contrôlés en 3 heures.
Soit X_i la durée de vérification d'une donnée.
$E(X_i) = 2,\ V(X_i) = 1.$

Loi des grands nombres

Exemple 1

Dans un IUT, le temps moyen de vérification du dossier d'un étudiant en vue de son inscription est de 2 minutes avec un écart-type de 1 minute.
On s'intéresse à la probabilité que 100 étudiants puissent être contrôlés en 3 heures.
Soit X_i la durée de vérification d'une donnée.
$E(X_i) = 2,\ V(X_i) = 1.$
La loi de la variable aléatoire $S_{100} = X_1 + X_2 + \cdots + X_{100}$ est approchée par la loi normale de moyenne $100.2 = 200$ et d'écart-type $\sqrt{100}.1 = 10$:

Loi des grands nombres

Exemple 1

Dans un IUT, le temps moyen de vérification du dossier d'un étudiant en vue de son inscription est de 2 minutes avec un écart-type de 1 minute.
On s'intéresse à la probabilité que 100 étudiants puissent être contrôlés en 3 heures.
Soit X_i la durée de vérification d'une donnée.
$E(X_i) = 2, \ V(X_i) = 1$.
La loi de la variable aléatoire $S_{100} = X_1 + X_2 + \cdots + X_{100}$ est approchée par la loi normale de moyenne $100.2 = 200$ et d'écart-type $\sqrt{100.1} = 10$:

$P\left(S_{100} \leq 180\right)$

Loi des grands nombres

Exemple 1

Dans un IUT, le temps moyen de vérification du dossier d'un étudiant en vue de son inscription est de 2 minutes avec un écart-type de 1 minute.
On s'intéresse à la probabilité que 100 étudiants puissent être contrôlés en 3 heures.
Soit X_i la durée de vérification d'une donnée.
$E(X_i) = 2, \ V(X_i) = 1.$
La loi de la variable aléatoire $S_{100} = X_1 + X_2 + \cdots + X_{100}$ est approchée par la loi normale de moyenne $100.2 = 200$ et d'écart-type $\sqrt{100.1} = 10$:

$$P\left(S_{100} \leq 180\right) = P\left(\frac{S_{100} - 200}{10} \leq \frac{180 - 200}{10}\right)$$

Loi des grands nombres

Exemple 1

Dans un IUT, le temps moyen de vérification du dossier d'un étudiant en vue de son inscription est de 2 minutes avec un écart-type de 1 minute.
On s'intéresse à la probabilité que 100 étudiants puissent être contrôlés en 3 heures.
Soit X_i la durée de vérification d'une donnée.
$E(X_i) = 2,\ V(X_i) = 1.$
La loi de la variable aléatoire $S_{100} = X_1 + X_2 + \cdots + X_{100}$ est approchée par la loi normale de moyenne $100.2 = 200$ et d'écart-type $\sqrt{100.1} = 10$:

$$P\left(S_{100} \leq 180\right) = P\left(\frac{S_{100} - 200}{10} \leq \frac{180 - 200}{10}\right) = P\left(T \leq -2\right)$$

Loi des grands nombres

Exemple 1

Dans un IUT, le temps moyen de vérification du dossier d'un étudiant en vue de son inscription est de 2 minutes avec un écart-type de 1 minute.
On s'intéresse à la probabilité que 100 étudiants puissent être contrôlés en 3 heures.
Soit X_i la durée de vérification d'une donnée.
$E(X_i) = 2,\ V(X_i) = 1.$
La loi de la variable aléatoire $S_{100} = X_1 + X_2 + \cdots + X_{100}$ est approchée par la loi normale de moyenne $100.2 = 200$ et d'écart-type $\sqrt{100.1} = 10$:

$$P\left(S_{100} \leq 180\right) = P\left(\frac{S_{100} - 200}{10} \leq \frac{180 - 200}{10}\right) = P\left(T \leq -2\right)$$

$$= F(-2) = 1 - F(2)$$

Loi des grands nombres

Exemple 1

Dans un IUT, le temps moyen de vérification du dossier d'un étudiant en vue de son inscription est de 2 minutes avec un écart-type de 1 minute.
On s'intéresse à la probabilité que 100 étudiants puissent être contrôlés en 3 heures.
Soit X_i la durée de vérification d'une donnée.
$E(X_i) = 2,\ V(X_i) = 1.$
La loi de la variable aléatoire $S_{100} = X_1 + X_2 + \cdots + X_{100}$ est approchée par la loi normale de moyenne $100.2 = 200$ et d'écart-type $\sqrt{100.1} = 10$:

$$P\left(S_{100} \leq 180\right) = P\left(\frac{S_{100} - 200}{10} \leq \frac{180 - 200}{10}\right) = P\left(T \leq -2\right)$$

$$= F(-2) = 1 - F(2) \approx 1 - 0,9772$$

Loi des grands nombres

Exemple 1

Dans un IUT, le temps moyen de vérification du dossier d'un étudiant en vue de son inscription est de 2 minutes avec un écart-type de 1 minute.
On s'intéresse à la probabilité que 100 étudiants puissent être contrôlés en 3 heures.
Soit X_i la durée de vérification d'une donnée.
$E(X_i) = 2,\ V(X_i) = 1.$
La loi de la variable aléatoire $S_{100} = X_1 + X_2 + \cdots + X_{100}$ est approchée par la loi normale de moyenne $100.2 = 200$ et d'écart-type $\sqrt{100.1} = 10$:

$$P(S_{100} \leq 180) = P\left(\frac{S_{100} - 200}{10} \leq \frac{180 - 200}{10}\right) = P(T \leq -2)$$
$$= F(-2) = 1 - F(2) \approx 1 - 0,9772 \approx 0,0228$$

Loi des grands nombres

R3.08 Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Plan

Loi des grands nombres

Annexe : intervalle de fluctuation

Exemple 1

Dans un IUT, le temps moyen de vérification du dossier d'un étudiant en vue de son inscription est de 2 minutes avec un écart-type de 1 minute. On s'intéresse à la probabilité que 100 étudiants puissent être contrôlés en 3 heures.
Soit X_i la durée de vérification d'une donnée.
$E(X_i) = 2,\ V(X_i) = 1.$
La loi de la variable aléatoire $S_{100} = X_1 + X_2 + \cdots + X_{100}$ est approchée par la loi normale de moyenne $100.2 = 200$ et d'écart-type $\sqrt{100.1} = 10$:

$$P\left(S_{100} \leq 180\right) = P\left(\frac{S_{100} - 200}{10} \leq \frac{180 - 200}{10}\right) = P\left(T \leq -2\right)$$

$$= F(-2) = 1 - F(2) \approx 1 - 0,9772 \approx 0,0228 \ (T \sim \mathcal{N}(0,1))$$

Loi des grands nombres

Exemple 2

Loi des grands nombres

Exemple 2

Le volume d'un tube de dentifrice suit la loi normale de moyenne 75 ml et d'écart-type 1 ml.

Loi des grands nombres

Exemple 2

Le volume d'un tube de dentifrice suit la loi normale de moyenne 75 ml et d'écart-type 1 ml.
On teste le contenu de 50 tubes.

Loi des grands nombres

Exemple 2

Le volume d'un tube de dentifrice suit la loi normale de moyenne 75 ml et d'écart-type 1 ml.
On teste le contenu de 50 tubes.
On s'intéresse à la probabilité que le volume soit compris entre 74,5 et 75,5 ml, d'au moins 75 ml, d'au plus 74 ml.

Loi des grands nombres

Exemple 2

Le volume d'un tube de dentifrice suit la loi normale de moyenne 75 ml et d'écart-type 1 ml.
On teste le contenu de 50 tubes.
On s'intéresse à la probabilité que le volume soit compris entre 74,5 et 75,5 ml, d'au moins 75 ml, d'au plus 74 ml.
Soit X_i le volume du contenu du i-ème tube :
$E(X_i) = 75,\ V(X_i) = 1.$

Loi des grands nombres

Exemple 2

Le volume d'un tube de dentifrice suit la loi normale de moyenne 75 ml et d'écart-type 1 ml.
On teste le contenu de 50 tubes.
On s'intéresse à la probabilité que le volume soit compris entre 74,5 et 75,5 ml, d'au moins 75 ml, d'au plus 74 ml.
Soit X_i le volume du contenu du i-ème tube :
$E(X_i) = 75,\ V(X_i) = 1.$

$$\overline{X_{50}} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_{50}}{50}$$

Loi des grands nombres

Exemple 2

Le volume d'un tube de dentifrice suit la loi normale de moyenne 75 ml et d'écart-type 1 ml.
On teste le contenu de 50 tubes.
On s'intéresse à la probabilité que le volume soit compris entre 74,5 et 75,5 ml, d'au moins 75 ml, d'au plus 74 ml.
Soit X_i le volume du contenu du i-ème tube :
$E(X_i) = 75,\ V(X_i) = 1.$

$$\overline{X_{50}} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_{50}}{50} = \frac{S_{50}}{50} \sim \mathcal{N}(75, \frac{1}{\sqrt{50}})$$

Loi des grands nombres

Exemple 2

Le volume d'un tube de dentifrice suit la loi normale de moyenne 75 ml et d'écart-type 1 ml.
On teste le contenu de 50 tubes.
On s'intéresse à la probabilité que le volume soit compris entre 74,5 et 75,5 ml, d'au moins 75 ml, d'au plus 74 ml.
Soit X_i le volume du contenu du i-ème tube :
$E(X_i) = 75,\ V(X_i) = 1.$

$$\overline{X_{50}} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_{50}}{50} = \frac{S_{50}}{50} \sim \mathcal{N}(75, \frac{1}{\sqrt{50}})$$

$$P\left(74,5 \leq \overline{X_{50}} \leq 75,5\right)$$

Loi des grands nombres

Exemple 2

Le volume d'un tube de dentifrice suit la loi normale de moyenne 75 ml et d'écart-type 1 ml.
On teste le contenu de 50 tubes.
On s'intéresse à la probabilité que le volume soit compris entre 74,5 et 75,5 ml, d'au moins 75 ml, d'au plus 74 ml.
Soit X_i le volume du contenu du i-ème tube :
$E(X_i) = 75,\ V(X_i) = 1.$

$$\overline{X_{50}} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_{50}}{50} = \frac{S_{50}}{50} \sim \mathcal{N}(75, \frac{1}{\sqrt{50}})$$

$$P\left(74,5 \leq \overline{X_{50}} \leq 75,5\right) = P\left(\frac{74,5-75}{1/\sqrt{50}} \leq \frac{\overline{X_{50}}-75}{1/\sqrt{50}} \leq \frac{75,5-75}{1/\sqrt{50}}\right)$$

Loi des grands nombres

Exemple 2

Le volume d'un tube de dentifrice suit la loi normale de moyenne 75 ml et d'écart-type 1 ml.
On teste le contenu de 50 tubes.
On s'intéresse à la probabilité que le volume soit compris entre 74,5 et 75,5 ml, d'au moins 75 ml, d'au plus 74 ml.
Soit X_i le volume du contenu du i-ème tube :
$E(X_i) = 75,\ V(X_i) = 1.$

$$\overline{X_{50}} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_{50}}{50} = \frac{S_{50}}{50} \sim \mathcal{N}(75, \frac{1}{\sqrt{50}})$$

$$P\left(74,5 \leq \overline{X_{50}} \leq 75,5\right) = P\left(\frac{74,5-75}{1/\sqrt{50}} \leq \frac{\overline{X_{50}}-75}{1/\sqrt{50}} \leq \frac{75,5-75}{1/\sqrt{50}}\right)$$

$$= P\left(-0,5.\sqrt{50} \leq \frac{\overline{X_{50}}-75}{1/\sqrt{50}} \leq 0,5.\sqrt{50}\right)$$

Loi des grands nombres

Exemple 2

Le volume d'un tube de dentifrice suit la loi normale de moyenne 75 ml et d'écart-type 1 ml.
On teste le contenu de 50 tubes.
On s'intéresse à la probabilité que le volume soit compris entre 74,5 et 75,5 ml, d'au moins 75 ml, d'au plus 74 ml.
Soit X_i le volume du contenu du i-ème tube :
$E(X_i) = 75,\ V(X_i) = 1.$

$$\overline{X_{50}} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_{50}}{50} = \frac{S_{50}}{50} \sim \mathcal{N}(75, \frac{1}{\sqrt{50}})$$

$$P\left(74,5 \leq \overline{X_{50}} \leq 75,5\right) = P\left(\frac{74,5-75}{1/\sqrt{50}} \leq \frac{\overline{X_{50}}-75}{1/\sqrt{50}} \leq \frac{75,5-75}{1/\sqrt{50}}\right)$$

$$= P\left(-0,5.\sqrt{50} \leq \frac{\overline{X_{50}}-75}{1/\sqrt{50}} \leq 0,5.\sqrt{50}\right)$$

$$= P\left(-0,5.\sqrt{50} \leq T \leq 0,5.\sqrt{50}\right)$$

Loi des grands nombres

Exemple 2

Le volume d'un tube de dentifrice suit la loi normale de moyenne 75 ml et d'écart-type 1 ml.
On teste le contenu de 50 tubes.
On s'intéresse à la probabilité que le volume soit compris entre 74,5 et 75,5 ml, d'au moins 75 ml, d'au plus 74 ml.
Soit X_i le volume du contenu du i-ème tube :
$E(X_i) = 75,\ V(X_i) = 1.$

$$\overline{X_{50}} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_{50}}{50} = \frac{S_{50}}{50} \sim \mathcal{N}(75, \frac{1}{\sqrt{50}})$$

$$P\left(74,5 \leq \overline{X_{50}} \leq 75,5\right) = P\left(\frac{74,5-75}{1/\sqrt{50}} \leq \frac{\overline{X_{50}}-75}{1/\sqrt{50}} \leq \frac{75,5-75}{1/\sqrt{50}}\right)$$

$$= P\left(-0,5.\sqrt{50} \leq \frac{\overline{X_{50}}-75}{1/\sqrt{50}} \leq 0,5.\sqrt{50}\right)$$

$$= P\left(-0,5.\sqrt{50} \leq T \leq 0,5.\sqrt{50}\right)$$

$$= 2F\left(0,5.\sqrt{50}\right) - 1$$

Loi des grands nombres

Exemple 2

Le volume d'un tube de dentifrice suit la loi normale de moyenne 75 ml et d'écart-type 1 ml.
On teste le contenu de 50 tubes.
On s'intéresse à la probabilité que le volume soit compris entre 74,5 et 75,5 ml, d'au moins 75 ml, d'au plus 74 ml.
Soit X_i le volume du contenu du i-ème tube :
$E(X_i) = 75,\ V(X_i) = 1.$

$$\overline{X_{50}} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_{50}}{50} = \frac{S_{50}}{50} \sim \mathcal{N}(75, \frac{1}{\sqrt{50}})$$

$$P\left(74,5 \leq \overline{X_{50}} \leq 75,5\right) = P\left(\frac{74,5-75}{1/\sqrt{50}} \leq \frac{\overline{X_{50}}-75}{1/\sqrt{50}} \leq \frac{75,5-75}{1/\sqrt{50}}\right)$$

$$= P\left(-0,5.\sqrt{50} \leq \frac{\overline{X_{50}}-75}{1/\sqrt{50}} \leq 0,5.\sqrt{50}\right)$$

$$= P\left(-0,5.\sqrt{50} \leq T \leq 0,5.\sqrt{50}\right)$$

$$= 2F\left(0,5.\sqrt{50}\right) - 1 = 2F\left(3,54\right) - 1$$

Loi des grands nombres

Exemple 2

Le volume d'un tube de dentifrice suit la loi normale de moyenne 75 ml et d'écart-type 1 ml.
On teste le contenu de 50 tubes.
On s'intéresse à la probabilité que le volume soit compris entre 74,5 et 75,5 ml, d'au moins 75 ml, d'au plus 74 ml.
Soit X_i le volume du contenu du i-ème tube :
$E(X_i) = 75,\ V(X_i) = 1.$

$$\overline{X_{50}} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_{50}}{50} = \frac{S_{50}}{50} \sim \mathcal{N}(75, \frac{1}{\sqrt{50}})$$

$$P\left(74,5 \leq \overline{X_{50}} \leq 75,5\right) = P\left(\frac{74,5-75}{1/\sqrt{50}} \leq \frac{\overline{X_{50}}-75}{1/\sqrt{50}} \leq \frac{75,5-75}{1/\sqrt{50}}\right)$$

$$= P\left(-0,5.\sqrt{50} \leq \frac{\overline{X_{50}}-75}{1/\sqrt{50}} \leq 0,5.\sqrt{50}\right)$$

$$= P\left(-0,5.\sqrt{50} \leq T \leq 0,5.\sqrt{50}\right)$$

$$= 2F\left(0,5.\sqrt{50}\right) - 1 = 2F\left(3,54\right) - 1 \approx 2.0,9998 - 1 = 0,9996$$

Loi des grands nombres

Exemple 2

Loi des grands nombres

Exemple 2

$P\left(\overline{X_{50}} \geq 75\right)$

Loi des grands nombres

Exemple 2

$$P\left(\overline{X_{50}} \geq 75\right) = 1 - P\left(\overline{X_{50}} \leq 75\right)$$

Loi des grands nombres

Exemple 2

$$P\left(\overline{X_{50}} \geq 75\right) = 1 - P\left(\overline{X_{50}} \leq 75\right) = 1 - P\left(\frac{\overline{X_{50}} - 75}{1/\sqrt{50}} \leq \frac{75-75}{1/\sqrt{50}}\right)$$

Loi des grands nombres

Exemple 2

$$P\left(\overline{X_{50}} \geq 75\right) = 1 - P\left(\overline{X_{50}} \leq 75\right) = 1 - P\left(\frac{\overline{X_{50}} - 75}{1/\sqrt{50}} \leq \frac{75-75}{1/\sqrt{50}}\right)$$

$$= 1 - P(T \leq 0) =$$

Loi des grands nombres

Exemple 2

$$P\left(\overline{X_{50}} \geq 75\right) = 1 - P\left(\overline{X_{50}} \leq 75\right) = 1 - P\left(\frac{\overline{X_{50}} - 75}{1/\sqrt{50}} \leq \frac{75 - 75}{1/\sqrt{50}}\right)$$

$$= 1 - P(T \leq 0) = 0,5.$$

Loi des grands nombres

Exemple 2

$$P\left(\overline{X_{50}} \geq 75\right) = 1 - P\left(\overline{X_{50}} \leq 75\right) = 1 - P\left(\frac{\overline{X_{50}} - 75}{1/\sqrt{50}} \leq \frac{75-75}{1/\sqrt{50}}\right)$$

$$= 1 - P(T \leq 0) = 0,5.$$

$$P\left(\overline{X_{50}} \leq 74\right)$$

Loi des grands nombres

R3.08 Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Plan

Loi des grands nombres

Annexe : intervalle de fluctuation

Exemple 2

$$P\left(\overline{X_{50}} \geq 75\right) = 1 - P\left(\overline{X_{50}} \leq 75\right) = 1 - P\left(\frac{\overline{X_{50}} - 75}{1/\sqrt{50}} \leq \frac{75 - 75}{1/\sqrt{50}}\right)$$

$$= 1 - P(T \leq 0) = 0,5.$$

$$P\left(\overline{X_{50}} \leq 74\right) = P\left(\frac{\overline{X_{50}} - 75}{1/\sqrt{50}} \leq \frac{74 - 75}{1/\sqrt{50}}\right)$$

Loi des grands nombres

Exemple 2

$$P\left(\overline{X_{50}} \geq 75\right) = 1 - P\left(\overline{X_{50}} \leq 75\right) = 1 - P\left(\frac{\overline{X_{50}} - 75}{1/\sqrt{50}} \leq \frac{75 - 75}{1/\sqrt{50}}\right)$$

$$= 1 - P(T \leq 0) = 0,5.$$

$$P\left(\overline{X_{50}} \leq 74\right) = P\left(\frac{\overline{X_{50}} - 75}{1/\sqrt{50}} \leq \frac{74 - 75}{1/\sqrt{50}}\right) = P(T \leq -\sqrt{50})$$

$(T \sim \mathcal{N}(0, 1))$

Loi des grands nombres

Exemple 2

$P\left(\overline{X_{50}} \geq 75\right) = 1 - P\left(\overline{X_{50}} \leq 75\right) = 1 - P\left(\frac{\overline{X_{50}} - 75}{1/\sqrt{50}} \leq \frac{75 - 75}{1/\sqrt{50}}\right)$
$= 1 - P(T \leq 0) = 0,5.$

$P\left(\overline{X_{50}} \leq 74\right) = P\left(\frac{\overline{X_{50}} - 75}{1/\sqrt{50}} \leq \frac{74 - 75}{1/\sqrt{50}}\right) = P(T \leq -\sqrt{50})$
$(T \sim \mathcal{N}(0, 1))$
$= P(T \leq -7,07)$

Loi des grands nombres

Exemple 2

$$P\left(\overline{X_{50}} \geq 75\right) = 1 - P\left(\overline{X_{50}} \leq 75\right) = 1 - P\left(\frac{\overline{X_{50}} - 75}{1/\sqrt{50}} \leq \frac{75-75}{1/\sqrt{50}}\right)$$

$= 1 - P(T \leq 0) = 0,5.$

$$P\left(\overline{X_{50}} \leq 74\right) = P\left(\frac{\overline{X_{50}} - 75}{1/\sqrt{50}} \leq \frac{74-75}{1/\sqrt{50}}\right) = P(T \leq -\sqrt{50})$$

$(T \sim \mathcal{N}(0, 1))$

$= P(T \leq -7,07) \approx 0.$

Approximation d'une loi par une autre

Approximation d'une loi binomiale par une loi normale : événements non rares

Approximation d'une loi par une autre

Approximation d'une loi binomiale par une loi normale : événements non rares

Pour n assez grand ($n \geq 30$), $np \geq 5$ et $nq \geq 5$,

Approximation d'une loi par une autre

Approximation d'une loi binomiale par une loi normale : événements non rares

Pour n assez grand ($n \geq 30$), $np \geq 5$ et $nq \geq 5$, $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ de loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$, $X_i \sim \mathcal{B}(1,p)$ indépendantes,

Approximation d'une loi par une autre

Approximation d'une loi binomiale par une loi normale : événements non rares

Pour n assez grand ($n \geq 30$), $np \geq 5$ et $nq \geq 5$, $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ de loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$, $X_i \sim \mathcal{B}(1, p)$ indépendantes, suit approximativement la loi normale $\mathcal{N}(np, \sqrt{npq})$.

Approximation d'une loi par une autre

Approximation d'une loi binomiale par une loi normale : événements non rares

Pour n assez grand ($n \geq 30$), $np \geq 5$ et $nq \geq 5$, $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ de loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$, $X_i \sim \mathcal{B}(1, p)$ indépendantes, suit approximativement la loi normale $\mathcal{N}(np, \sqrt{npq})$.

Exemple

Approximation d'une loi par une autre

Approximation d'une loi binomiale par une loi normale : événements non rares

Pour n assez grand ($n \geq 30$), $np \geq 5$ et $nq \geq 5$, $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ de loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$, $X_i \sim \mathcal{B}(1, p)$ indépendantes, suit approximativement la loi normale $\mathcal{N}(np, \sqrt{npq})$.

Exemple

$\mathcal{B}(50; 0,2)$ approchée par $\mathcal{N}(10, \sqrt{8})$

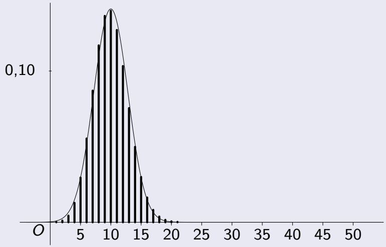
Approximation d'une loi par une autre

Approximation d'une loi binomiale par une loi normale : événements non rares

Pour n assez grand ($n \geq 30$), $np \geq 5$ et $nq \geq 5$, $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ de loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$, $X_i \sim \mathcal{B}(1, p)$ indépendantes, suit approximativement la loi normale $\mathcal{N}(np, \sqrt{npq})$.

Exemple

$\mathcal{B}(50; 0,2)$ approchée par $\mathcal{N}(10, \sqrt{8})$



Approximation d'une loi par une autre

Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson : événements rares

Approximation d'une loi par une autre

Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson : événements rares

Pour n assez grand ($n \geq 30$), $p \leq 0,1$ et $np \leq 10$

Approximation d'une loi par une autre

Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson : événements rares

Pour n assez grand ($n \geq 30$), $p \leq 0,1$ et $np \leq 10$ une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$

Approximation d'une loi par une autre

Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson : événements rares

Pour n assez grand ($n \geq 30$), $p \leq 0,1$ et $np \leq 10$ une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ suit approximativement la loi de Poisson $\mathcal{P}(np)$.

Approximation d'une loi par une autre

Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson : événements rares

Pour n assez grand ($n \geq 30$), $p \leq 0,1$ et $np \leq 10$ une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ suit approximativement la loi de Poisson $\mathcal{P}(np)$.

$$C_n^i p^i q^{n-i} \approx e^{-np} \frac{(np)^i}{i!}$$

Approximation d'une loi par une autre

R3.08 Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Plan

Loi des grands nombres

Annexe : intervalle de fluctuation

Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson : événements rares

Pour n assez grand ($n \geq 30$), $p \leq 0,1$ et $np \leq 10$ une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ suit approximativement la loi de Poisson $\mathcal{P}(np)$.

$$C_n^i p^i q^{n-i} \approx e^{-np} \frac{(np)^i}{i!}$$

Exemple

Approximation d'une loi par une autre

Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson : événements rares

Pour n assez grand ($n \geq 30$), $p \leq 0,1$ et $np \leq 10$ une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ suit approximativement la loi de Poisson $\mathcal{P}(np)$.

$$C_n^i p^i q^{n-i} \approx e^{-np} \frac{(np)^i}{i!}$$

Exemple

$\mathcal{B}(50,\ 0,05)$ approchée par $\mathcal{P}(2,5)$

Approximation d'une loi par une autre

Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson : exemple

Approximation d'une loi par une autre

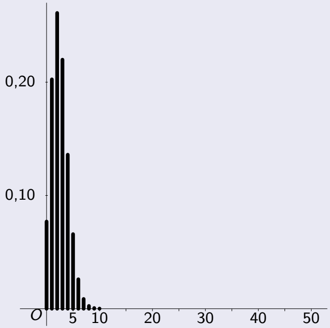
Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson : exemple

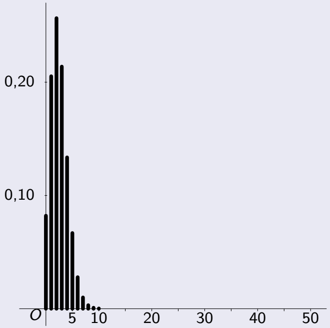
$\mathcal{B}(50;\, 0,05)$ approchée par $\mathcal{P}(2,5)$

Approximation d'une loi par une autre

Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson : exemple

$\mathcal{B}(50;\ 0,05)$ approchée par $\mathcal{P}(2,5)$





Approximation d'une loi par une autre

Approximation d'une loi de Poisson par une loi normale

Approximation d'une loi par une autre

Approximation d'une loi de Poisson par une loi normale

Pour $\lambda \geq 10$, une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ suit approximativement la loi normale $\mathcal{N}(\lambda, \sqrt{\lambda})$.

Approximation d'une loi par une autre

Approximation d'une loi de Poisson par une loi normale

Pour $\lambda \geq 10$, une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ suit approximativement la loi normale $\mathcal{N}(\lambda, \sqrt{\lambda})$.

Exemple

Approximation d'une loi par une autre

R3.08 Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Plan

Loi des grands nombres

Annexe : intervalle de fluctuation

Approximation d'une loi de Poisson par une loi normale

Pour $\lambda \geq 10$, une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ suit approximativement la loi normale $\mathcal{N}(\lambda, \sqrt{\lambda})$.

Exemple

$\mathcal{P}(20)$ approchée par $\mathcal{N}(20, \sqrt{20})$

Approximation d'une loi par une autre

R3.08 Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Plan

Loi des grands nombres

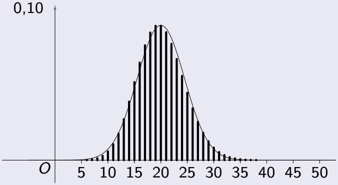
Annexe : intervalle de fluctuation

Approximation d'une loi de Poisson par une loi normale

Pour $\lambda \geq 10$, une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ suit approximativement la loi normale $\mathcal{N}(\lambda, \sqrt{\lambda})$.

Exemple

$\mathcal{P}(20)$ approchée par $\mathcal{N}(20, \sqrt{20})$



Approximation d'une loi par une autre

Approximation d'une loi binomiale par une loi normale : correction de continuité de Yates

Approximation d'une loi par une autre

Approximation d'une loi binomiale par une loi normale : correction de continuité de Yates

Soit $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ et k un entier.

Approximation d'une loi par une autre

R3.08 Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Plan

Loi des grands nombres

Annexe : intervalle de fluctuation

Approximation d'une loi binomiale par une loi normale : correction de continuité de Yates

Soit $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ et k un entier.
La correction de continuité de Yates consiste à écrire
$P(X = k) = P(k - 0,5 \leq X \leq k + 0,5)$.

Approximation d'une loi par une autre

Approximation d'une loi binomiale par une loi normale : correction de continuité de Yates

Soit $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ et k un entier.
La correction de continuité de Yates consiste à écrire
$P(X = k) = P(k - 0,5 \leq X \leq k + 0,5)$.

Frank Yates (né à Manchester en 1902, décédé en 1994) : mathématicien britannique

Approximation d'une loi par une autre

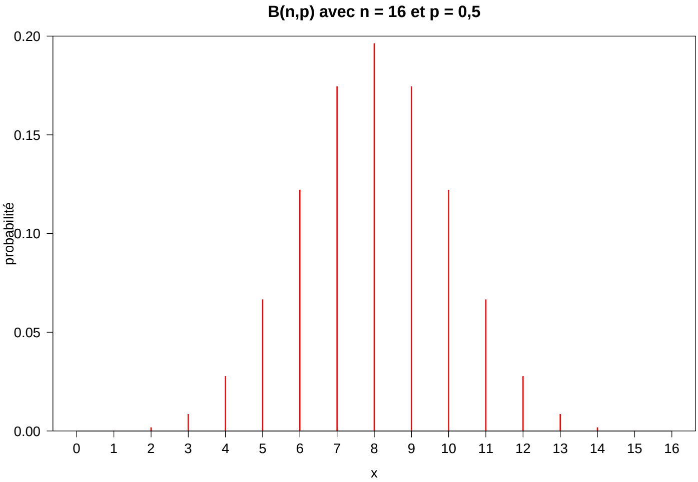
R3.08 Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

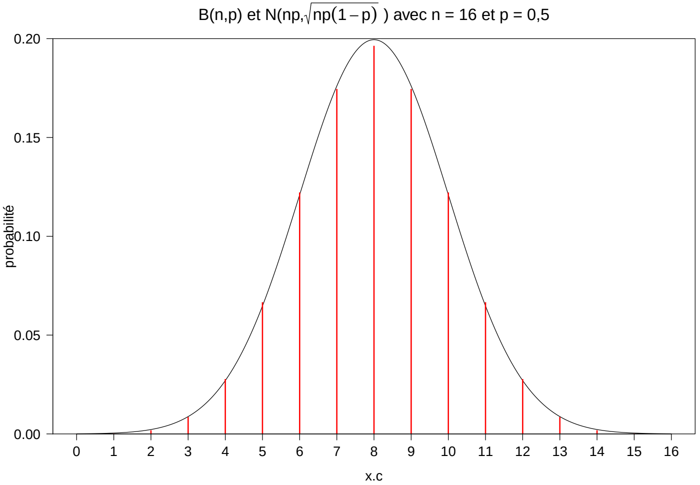
Plan

Loi des grands nombres

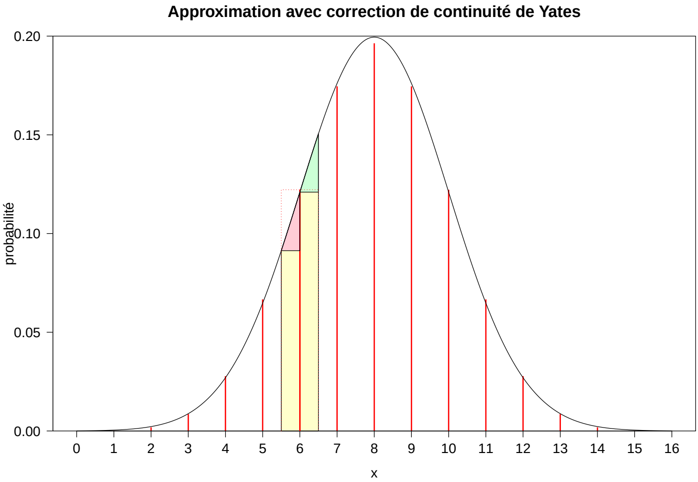
Annexe : intervalle de fluctuation



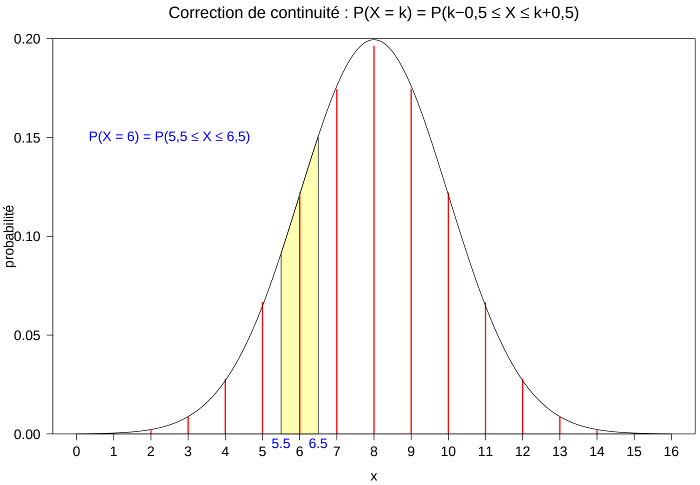
Approximation d'une loi par une autre



Approximation d'une loi par une autre



Approximation d'une loi par une autre



Approximation d'une loi par une autre

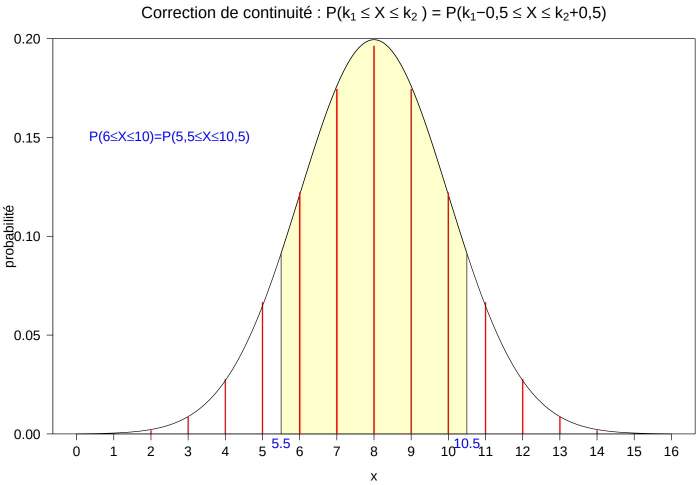
R3.08 Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

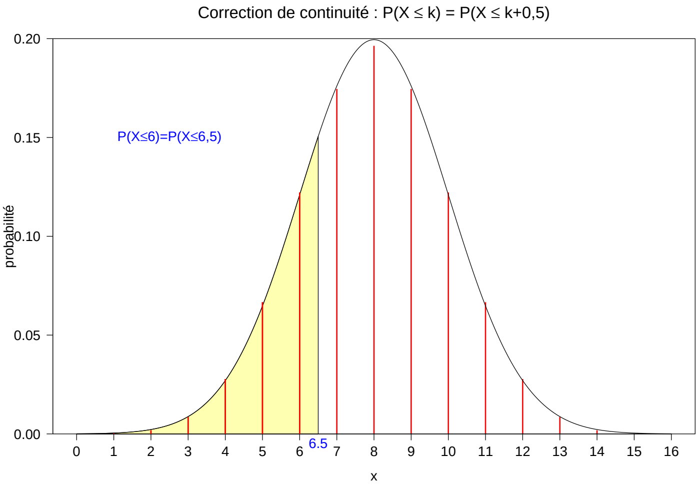
Plan

Loi des grands nombres

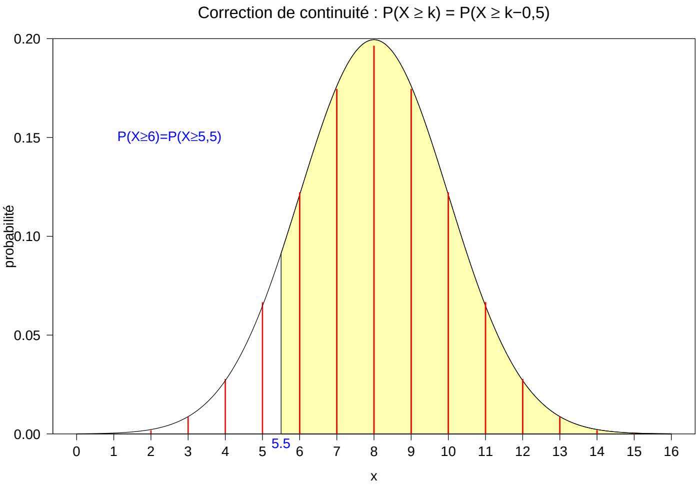
Annexe : intervalle de fluctuation



Approximation d'une loi par une autre



Approximation d'une loi par une autre



Approximation d'une loi par une autre

Approximation d'une loi binomiale par une loi normale : correction de continuité de Yates

Approximation d'une loi par une autre

Approximation d'une loi binomiale par une loi normale : correction de continuité de Yates

Exemple : $X \sim \mathcal{B}(16; 0,5)$

Approximation d'une loi par une autre

Approximation d'une loi binomiale par une loi normale : correction de continuité de Yates

Exemple : $X \sim \mathcal{B}(16; 0,5)$
$P(X = 6) = P(6 - 0,5 \leq X \leq 6 + 0,5) = P(5,5 \leq X \leq 6,5)$

Approximation d'une loi par une autre

Approximation d'une loi binomiale par une loi normale : correction de continuité de Yates

Exemple : $X \sim \mathcal{B}(16;\ 0,5)$
$P(X=6) = P(6-0,5 \leq X \leq 6+0,5) = P(5,5 \leq X \leq 6,5)$
En posant $X' \sim \mathcal{N}\left(16 \times 0,5;\ \sqrt{16 \times 0,5 \times 0,5}\right) = \mathcal{N}(8;\ 2)$:

Approximation d'une loi par une autre

Approximation d'une loi binomiale par une loi normale : correction de continuité de Yates

Exemple : $X \sim \mathcal{B}(16;\ 0,5)$

$P(X = 6) = P(6 - 0,5 \leq X \leq 6 + 0,5) = P(5,5 \leq X \leq 6,5)$

En posant $X' \sim \mathcal{N}\left(16 \times 0,5;\ \sqrt{16 \times 0,5 \times 0,5}\right) = \mathcal{N}(8;\ 2)$:

$$P(5,5 \leq X' \leq 6,5) = P\left(\frac{5,5-8}{2} \leq \frac{X'-8}{2} \leq \frac{6,5-8}{2}\right)$$

Approximation d'une loi par une autre

R3.08 Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Plan

Loi des grands nombres

Annexe : intervalle de fluctuation

Approximation d'une loi binomiale par une loi normale : correction de continuité de Yates

Exemple : $X \sim \mathcal{B}(16;\ 0,5)$

$P(X = 6) = P(6 - 0,5 \leq X \leq 6 + 0,5) = P(5,5 \leq X \leq 6,5)$

En posant $X' \sim \mathcal{N}\left(16 \times 0,5;\ \sqrt{16 \times 0,5 \times 0,5}\right) = \mathcal{N}(8;\ 2)$:

$$P(5,5 \leq X' \leq 6,5) = P\left(\frac{5,5-8}{2} \leq \frac{X'-8}{2} \leq \frac{6,5-8}{2}\right)$$

$$P(5,5 \leq X' \leq 6,5) = P(-1,25 \leq T \leq -0,75)\ (T \sim \mathcal{N}(0,\ 1))$$

Approximation d'une loi par une autre

Approximation d'une loi binomiale par une loi normale : correction de continuité de Yates

Exemple : $X \sim \mathcal{B}(16;\ 0,5)$

$P(X = 6) = P(6 - 0,5 \leq X \leq 6 + 0,5) = P(5,5 \leq X \leq 6,5)$

En posant $X' \sim \mathcal{N}\left(16 \times 0,5;\ \sqrt{16 \times 0,5 \times 0,5}\right) = \mathcal{N}(8;\ 2)$:

$$P(5,5 \leq X' \leq 6,5) = P\left(\frac{5,5-8}{2} \leq \frac{X'-8}{2} \leq \frac{6,5-8}{2}\right)$$

$P(5,5 \leq X' \leq 6,5) = P(-1,25 \leq T \leq -0,75)$ $(T \sim \mathcal{N}(0,\ 1))$

$P(5,5 \leq X' \leq 6,5) \approx 0,1210$ alors que $P(X = 6) \approx 0,1221$

Approximation d'une loi par une autre

Approximation d'une loi binomiale par une loi normale : correction de continuité de Yates

Exemple : $X \sim \mathcal{B}(16;\ 0,5)$

$P(X = 6) = P(6 - 0,5 \leq X \leq 6 + 0,5) = P(5,5 \leq X \leq 6,5)$

En posant $X' \sim \mathcal{N}\left(16 \times 0,5;\ \sqrt{16 \times 0,5 \times 0,5}\right) = \mathcal{N}(8;\ 2)$:

$$P(5,5 \leq X' \leq 6,5) = P\left(\frac{5,5-8}{2} \leq \frac{X'-8}{2} \leq \frac{6,5-8}{2}\right)$$

$P(5,5 \leq X' \leq 6,5) = P(-1,25 \leq T \leq -0,75)$ $(T \sim \mathcal{N}(0,\ 1))$

$P(5,5 \leq X' \leq 6,5) \approx 0,1210$ alors que $P(X = 6) \approx 0,1221$

De même, $P(6 \leq X \leq 10) \approx 0,7899$

Approximation d'une loi par une autre

Approximation d'une loi binomiale par une loi normale : correction de continuité de Yates

Exemple : $X \sim \mathcal{B}(16;\ 0,5)$

$P(X = 6) = P(6 - 0,5 \leq X \leq 6 + 0,5) = P(5,5 \leq X \leq 6,5)$

En posant $X' \sim \mathcal{N}\left(16 \times 0,5;\ \sqrt{16 \times 0,5 \times 0,5}\right) = \mathcal{N}(8;\ 2)$:

$$P(5,5 \leq X' \leq 6,5) = P\left(\frac{5,5-8}{2} \leq \frac{X'-8}{2} \leq \frac{6,5-8}{2}\right)$$

$P(5,5 \leq X' \leq 6,5) = P(-1,25 \leq T \leq -0,75)$ $(T \sim \mathcal{N}(0,\ 1))$

$P(5,5 \leq X' \leq 6,5) \approx 0,1210$ alors que $P(X = 6) \approx 0,1221$

De même, $P(6 \leq X \leq 10) \approx 0,7899$

Par l'approximation : $P(5,5 \leq X' \leq 10,5) \approx 0,7887$.

Approximation d'une loi par une autre

Approximation d'une loi binomiale par une loi normale : correction de continuité de Yates

Exemple : $X \sim \mathcal{B}(16;\, 0,5)$
$P(X=6) = P(6-0,5 \leq X \leq 6+0,5) = P(5,5 \leq X \leq 6,5)$
En posant $X' \sim \mathcal{N}\left(16 \times 0,5;\, \sqrt{16 \times 0,5 \times 0,5}\right) = \mathcal{N}(8;\, 2)$:

$$P(5,5 \leq X' \leq 6,5) = P\left(\frac{5,5-8}{2} \leq \frac{X'-8}{2} \leq \frac{6,5-8}{2}\right)$$

$P(5,5 \leq X' \leq 6,5) = P(-1,25 \leq T \leq -0,75)$ $(T \sim \mathcal{N}(0,\,1))$
$P(5,5 \leq X' \leq 6,5) \approx 0,1210$ alors que $P(X=6) \approx 0,1221$
De même, $P(6 \leq X \leq 10) \approx 0,7899$
Par l'approximation : $P(5,5 \leq X' \leq 10,5) \approx 0,7887$.
Approximation d'autant meilleure que n est grand $(n \geq 30)$, $np \geq 5$ et $n(1-p) \geq 5$.

Intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une proportion

Intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une proportion

Exemple : on lance à n reprises une pièce de monnaie et on note X_i $(1 \leq i \leq n)$ la variable aléatoire prenant la valeur 1 pour Pile, 0 pour Face.

Intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une proportion

Exemple : on lance à n reprises une pièce de monnaie et on note X_i $(1 \leq i \leq n)$ la variable aléatoire prenant la valeur 1 pour Pile, 0 pour Face. $X_i \sim \mathcal{B}(1, p)$. Les X_i sont indépendantes.

Intervalle de fluctuation

R3.08 Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Plan

Loi des grands nombres

Annexe : intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une proportion

Exemple : on lance à n reprises une pièce de monnaie et on note X_i $(1 \leq i \leq n)$ la variable aléatoire prenant la valeur 1 pour Pile, 0 pour Face. $X_i \sim \mathcal{B}(1, p)$. Les X_i sont indépendantes.

On note $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ (nombre de piles) et $\overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$ (fréquence de piles).

Intervalle de fluctuation

R3.08 Probabilités
Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Plan

Loi des grands nombres

Annexe : intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une proportion

Exemple : on lance à n reprises une pièce de monnaie et on note X_i $(1 \leq i \leq n)$ la variable aléatoire prenant la valeur 1 pour Pile, 0 pour Face. $X_i \sim \mathcal{B}(1, p)$. Les X_i sont indépendantes.

On note $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ (nombre de piles) et $\overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$ (fréquence de piles).

$X \sim \mathcal{B}(n, p)$.

Intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une proportion

Exemple : on lance à n reprises une pièce de monnaie et on note X_i ($1 \leq i \leq n$) la variable aléatoire prenant la valeur 1 pour Pile, 0 pour Face. $X_i \sim \mathcal{B}(1, p)$. Les X_i sont indépendantes.

On note $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ (nombre de piles) et $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ (fréquence de piles).

$X \sim \mathcal{B}(n, p)$.

On note $\alpha \in [0, 1]$ (seuil de risque).

Intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une proportion

Exemple : on lance à n reprises une pièce de monnaie et on note X_i ($1 \leq i \leq n$) la variable aléatoire prenant la valeur 1 pour Pile, 0 pour Face. $X_i \sim \mathcal{B}(1, p)$. Les X_i sont indépendantes.

On note $X = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$ (nombre de piles) et $\overline{X} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$ (fréquence de piles).

$X \sim \mathcal{B}(n, p)$.

On note $\alpha \in [0, 1]$ (seuil de risque).

Le plus petit intervalle (au sens de l'inclusion) $[\![n_1, n_2]\!]$ tel que $P(X < n_1) \leq \dfrac{\alpha}{2}$ et $P(X > n_2) \leq \dfrac{\alpha}{2}$ est appelé intervalle de fluctuation de X de niveau $1 - \alpha$ ou au seuil de risque α.

Intervalle de fluctuation

R3.08 Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Plan

Loi des grands nombres

Annexe : intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une proportion

Exemple : on lance à n reprises une pièce de monnaie et on note X_i $(1 \leq i \leq n)$ la variable aléatoire prenant la valeur 1 pour Pile, 0 pour Face. $X_i \sim \mathcal{B}(1, p)$. Les X_i sont indépendantes.

On note $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ (nombre de piles) et $\overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$ (fréquence de piles).

$X \sim \mathcal{B}(n, p)$.

On note $\alpha \in [0, 1]$ (seuil de risque).

Le plus petit intervalle (au sens de l'inclusion) $[\![n_1, n_2]\!]$ tel que $P(X < n_1) \leq \frac{\alpha}{2}$ et $P(X > n_2) \leq \frac{\alpha}{2}$ est appelé intervalle de fluctuation de X de niveau $1 - \alpha$ ou au seuil de risque α.

On a alors $P(n_1 \leq X \leq n_2) \geq 1 - \alpha$.

Intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une proportion

Exemple : on lance à n reprises une pièce de monnaie et on note X_i $(1 \leq i \leq n)$ la variable aléatoire prenant la valeur 1 pour Pile, 0 pour Face. $X_i \sim \mathcal{B}(1, p)$. Les X_i sont indépendantes.

On note $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ (nombre de piles) et $\overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$ (fréquence de piles).

$X \sim \mathcal{B}(n, p)$.

On note $\alpha \in [0, 1]$ (seuil de risque).

Le plus petit intervalle (au sens de l'inclusion) $[\![n_1, n_2]\!]$ tel que $P(X < n_1) \leq \frac{\alpha}{2}$ et $P(X > n_2) \leq \frac{\alpha}{2}$ est appelé intervalle de fluctuation de X de niveau $1 - \alpha$ ou au seuil de risque α.

On a alors $P(n_1 \leq X \leq n_2) \geq 1 - \alpha$.

$\left[\frac{n_1}{n}, \frac{n_2}{n} \right]$ est l'intervalle de fluctuation associé de $\overline{X}$ de niveau $1 - \alpha$ ou au seuil de risque α.

Intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une proportion

Exemple : on lance à n reprises une pièce de monnaie et on note X_i $(1 \leq i \leq n)$ la variable aléatoire prenant la valeur 1 pour Pile, 0 pour Face. $X_i \sim \mathcal{B}(1, p)$. Les X_i sont indépendantes.

On note $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ (nombre de piles) et $\overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$ (fréquence de piles).

$X \sim \mathcal{B}(n, p)$.

On note $\alpha \in [0, 1]$ (seuil de risque).

Le plus petit intervalle (au sens de l'inclusion) $[\![n_1, n_2]\!]$ tel que $P(X < n_1) \leq \frac{\alpha}{2}$ et $P(X > n_2) \leq \frac{\alpha}{2}$ est appelé intervalle de fluctuation de X de niveau $1 - \alpha$ ou au seuil de risque α.

On a alors $P(n_1 \leq X \leq n_2) \geq 1 - \alpha$.

$\left[\frac{n_1}{n}, \frac{n_2}{n}\right]$ est l'intervalle de fluctuation associé de $\overline{X}$ de niveau $1 - \alpha$ ou au seuil de risque α.

On vérifie $P\left(\frac{n_1}{n} \leq \overline{X} \leq \frac{n_2}{n}\right) \geq 1 - \alpha$.

Intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une proportion

Intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une proportion

En prenant $F(i) = P\left(X \leq i\right)$ (fonction de répartition, $0 \leq i \leq n$),

Intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une proportion

En prenant $F(i) = P(X \leq i)$ (fonction de répartition, $0 \leq i \leq n$), n_1 et n_2 sont les entiers définis par :

Intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une proportion

En prenant $F(i) = P(X \leq i)$ (fonction de répartition, $0 \leq i \leq n$), n_1 et n_2 sont les entiers définis par :

1. $F(n_1 - 1) \leq \dfrac{\alpha}{2}$ et $F(n_1) > \dfrac{\alpha}{2}$,

Intervalle de fluctuation

R3.08 Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Plan

Loi des grands nombres

Annexe : intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une proportion

En prenant $F(i) = P(X \leq i)$ (fonction de répartition, $0 \leq i \leq n$), n_1 et n_2 sont les entiers définis par :

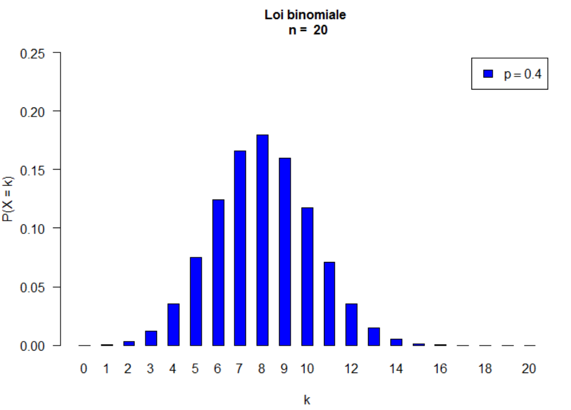
1. $F(n_1 - 1) \leq \dfrac{\alpha}{2}$ et $F(n_1) > \dfrac{\alpha}{2}$,
2. $F(n_2 - 1) < 1 - \dfrac{\alpha}{2}$ et $F(n_2) \geq 1 - \dfrac{\alpha}{2}$.

Intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une proportion

Intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une proportion



Intervalle de fluctuation

R3.08 Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Plan

Loi des grands nombres

Annexe : intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une proportion

Intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une proportion

Exemple : $X \sim \mathcal{B}(20;\ 0,4)$, $\alpha = 0,05$.

Intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une proportion

Exemple : $X \sim \mathcal{B}(20;\ 0,4)$, $\alpha = 0,05$. $\dfrac{\alpha}{2} = 0,025$.

Intervalle de fluctuation

R3.08 Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Plan

Loi des grands nombres

Annexe : intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une proportion

Exemple : $X \sim \mathcal{B}(20;\ 0,4)$, $\alpha = 0,05$. $\dfrac{\alpha}{2} = 0,025$.

$F(3) = P(X \leq 3) = 0,016 \leq 0,025$

Intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une proportion

Exemple : $X \sim \mathcal{B}(20;\ 0,4)$, $\alpha = 0,05$. $\dfrac{\alpha}{2} = 0,025$.

$F(3) = P(X \leq 3) = 0,016 \leq 0,025$

$F(4) = P(X \leq 4) = 0,051 > 0,025$

Intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une proportion

Exemple : $X \sim \mathcal{B}(20;\ 0,4)$, $\alpha = 0,05$. $\dfrac{\alpha}{2} = 0,025$.

$F(3) = P(X \leq 3) = 0,016 \leq 0,025$

$F(4) = P(X \leq 4) = 0,051 > 0,025$

$n_1 = 4$

Intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une proportion

Exemple : $X \sim \mathcal{B}(20;\ 0,4)$, $\alpha = 0,05$. $\dfrac{\alpha}{2} = 0,025$.

$F(3) = P(X \leq 3) = 0,016 \leq 0,025$

$F(4) = P(X \leq 4) = 0,051 > 0,025$

$n_1 = 4$

$1 - \dfrac{\alpha}{2} = 0,975$

Intervalle de fluctuation

R3.08 Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Plan

Loi des grands nombres

Annexe : intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une proportion

Exemple : $X \sim \mathcal{B}(20;\ 0,4)$, $\alpha = 0,05$. $\dfrac{\alpha}{2} = 0,025$.

$F(3) = P(X \leq 3) = 0,016 \leq 0,025$

$F(4) = P(X \leq 4) = 0,051 > 0,025$

$n_1 = 4$

$1 - \dfrac{\alpha}{2} = 0,975$

$F(11) = P(X \leq 11) = 0,943 < 0,975$

Intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une proportion

Exemple : $X \sim \mathcal{B}(20;\ 0,4)$, $\alpha = 0,05$. $\dfrac{\alpha}{2} = 0,025$.

$F(3) = P(X \leq 3) = 0,016 \leq 0,025$

$F(4) = P(X \leq 4) = 0,051 > 0,025$

$n_1 = 4$

$1 - \dfrac{\alpha}{2} = 0,975$

$F(11) = P(X \leq 11) = 0,943 < 0,975$

$F(12) = P(X \leq 12) = 0,979 \geq 0,975$

Intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une proportion

Exemple : $X \sim \mathcal{B}(20; 0,4)$, $\alpha = 0,05$. $\dfrac{\alpha}{2} = 0,025$.

$F(3) = P(X \leq 3) = 0,016 \leq 0,025$

$F(4) = P(X \leq 4) = 0,051 > 0,025$

$n_1 = 4$

$1 - \dfrac{\alpha}{2} = 0,975$

$F(11) = P(X \leq 11) = 0,943 < 0,975$

$F(12) = P(X \leq 12) = 0,979 \geq 0,975$

$n_2 = 12$

Intervalle de fluctuation

R3.08 Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Plan

Loi des grands nombres

Annexe : intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une proportion

Exemple : $X \sim \mathcal{B}(20;\ 0,4)$, $\alpha = 0,05$. $\dfrac{\alpha}{2} = 0,025$.

$F(3) = P(X \leq 3) = 0,016 \leq 0,025$

$F(4) = P(X \leq 4) = 0,051 > 0,025$

$n_1 = 4$

$1 - \dfrac{\alpha}{2} = 0,975$

$F(11) = P(X \leq 11) = 0,943 < 0,975$

$F(12) = P(X \leq 12) = 0,979 \geq 0,975$

$n_2 = 12$

Intervalle de fluctuation de X de niveau 0,95 (ou 95 %) ou au seuil de risque 0,05 (ou 5 %) : $[\![4, 12]\!]$

Intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une proportion

Exemple : $X \sim \mathcal{B}(20;\, 0,4)$, $\alpha = 0,05$. $\dfrac{\alpha}{2} = 0,025$.

$F(3) = P(X \leq 3) = 0,016 \leq 0,025$

$F(4) = P(X \leq 4) = 0,051 > 0,025$

$n_1 = 4$

$1 - \dfrac{\alpha}{2} = 0,975$

$F(11) = P(X \leq 11) = 0,943 < 0,975$

$F(12) = P(X \leq 12) = 0,979 \geq 0,975$

$n_2 = 12$

Intervalle de fluctuation de X de niveau 0,95 (ou 95 %) ou au seuil de risque 0,05 (ou 5 %) : $[\![4, 12]\!]$

Intervalle de fluctuation de $\overline{X}$ de niveau 0,95 (ou 95 %) ou au seuil de risque 0,05 (ou 5 %) : $[0,2\,;\, 0,6]$.

Intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une proportion

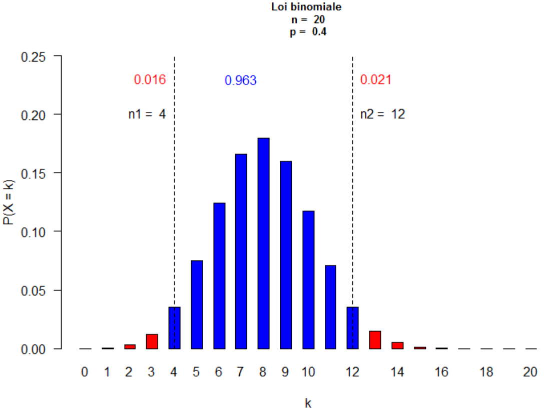
Exemple : $X \sim \mathcal{B}(20;\ 0,4)$, $\alpha = 0,05$. $\dfrac{\alpha}{2} = 0,025$.
$F(3) = P(X \leq 3) = 0,016 \leq 0,025$
$F(4) = P(X \leq 4) = 0,051 > 0,025$
$n_1 = 4$
$1 - \dfrac{\alpha}{2} = 0,975$
$F(11) = P(X \leq 11) = 0,943 < 0,975$
$F(12) = P(X \leq 12) = 0,979 \geq 0,975$
$n_2 = 12$
Intervalle de fluctuation de X de niveau 0,95 (ou 95 %) ou au seuil de risque 0,05 (ou 5 %) : $[\![4, 12]\!]$
Intervalle de fluctuation de $\overline{X}$ de niveau 0,95 (ou 95 %) ou au seuil de risque 0,05 (ou 5 %) : $[0,2\,;\,0,6]$.
$P(4 \leq X \leq 12) = P\left(\dfrac{4}{20} \leq \overline{X} \leq \dfrac{12}{20}\right) = 0,963 \geq 1 - 0,05 = 0,95$
(ou 95 %)

Intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une proportion

Intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une proportion



Intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une proportion

Intervalle de fluctuation

R3.08 Probabilités

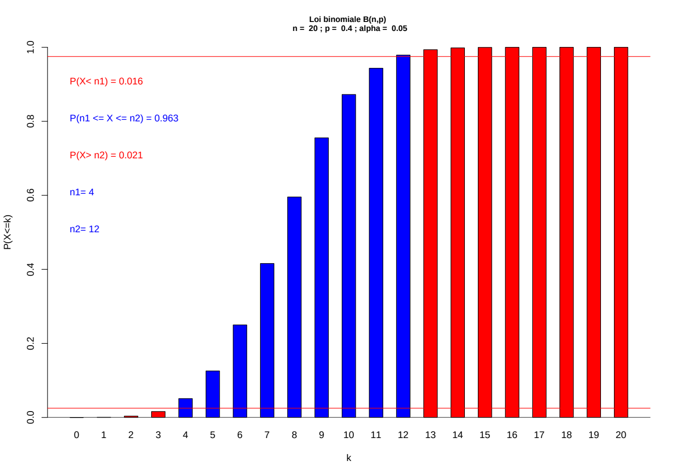
Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Plan

Loi des grands nombres

Annexe : intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une proportion



Intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une proportion

Intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une proportion

Si $n \geq 30$, $np \geq 5$ et $nq = n(1-p) \geq 5$ alors $X \sim \mathcal{N}(np, \sqrt{npq})$ et $\overline{X} \sim \mathcal{N}\left(p, \sqrt{pq/n}\right)$ et $\dfrac{\overline{X} - p}{\sqrt{pq/n}} \sim \mathcal{N}(0,1)$.

Intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une proportion

Si $n \geq 30$, $np \geq 5$ et $nq = n(1-p) \geq 5$ alors $X \sim \mathcal{N}\left(np, \sqrt{npq}\right)$ et $\overline{X} \sim \mathcal{N}\left(p, \sqrt{pq/n}\right)$ et $\dfrac{\overline{X}-p}{\sqrt{pq/n}} \sim \mathcal{N}(0,1)$.

L'intervalle I de fluctuation de $\overline{X}$ de niveau $1-\alpha$ ou au seuil de risque α est alors défini par $P\left(\left|\dfrac{\overline{X}-p}{\sqrt{pq/n}}\right| \leq u_{1-\alpha/2}\right) = 1-\alpha$ avec $F\left(u_{1-\alpha/2}\right) = 1-\alpha/2$:

Intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une proportion

Si $n \geq 30$, $np \geq 5$ et $nq = n(1-p) \geq 5$ alors $X \sim \mathcal{N}\left(np, \sqrt{npq}\right)$ et $\overline{X} \sim \mathcal{N}\left(p, \sqrt{pq/n}\right)$ et $\dfrac{\overline{X}-p}{\sqrt{pq/n}} \sim \mathcal{N}(0,1)$.

L'intervalle I de fluctuation de $\overline{X}$ de niveau $1-\alpha$ ou au seuil de risque α est alors défini par $P\left(\left|\dfrac{\overline{X}-p}{\sqrt{pq/n}}\right| \leq u_{1-\alpha/2}\right) = 1-\alpha$ avec $F\left(u_{1-\alpha/2}\right) = 1-\alpha/2$:

$I = \left[p - u_{1-\alpha/2}\sqrt{pq/n},\ p + u_{1-\alpha/2}\sqrt{pq/n}\right]$

Intervalle de fluctuation

R3.08 Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Plan

Loi des grands nombres

Annexe : intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une proportion

Si $n \geq 30$, $np \geq 5$ et $nq = n(1-p) \geq 5$ alors $X \sim \mathcal{N}\left(np, \sqrt{npq}\right)$ et $\overline{X} \sim \mathcal{N}\left(p, \sqrt{pq/n}\right)$ et $\dfrac{\overline{X}-p}{\sqrt{pq/n}} \sim \mathcal{N}(0,1)$.

L'intervalle I de fluctuation de $\overline{X}$ de niveau $1-\alpha$ ou au seuil de risque α est alors défini par $P\left(\left|\dfrac{\overline{X}-p}{\sqrt{pq/n}}\right| \leq u_{1-\alpha/2}\right) = 1-\alpha$ avec $F\left(u_{1-\alpha/2}\right) = 1-\alpha/2$:

$$I = \left[p - u_{1-\alpha/2}\sqrt{pq/n},\ p + u_{1-\alpha/2}\sqrt{pq/n}\right]$$

Détail : $\left|\dfrac{\overline{X}-p}{\sqrt{pq/n}}\right| \leq u_{1-\alpha/2}$ s'écrit $-u_{1-\alpha/2} \leq \dfrac{\overline{X}-p}{\sqrt{pq/n}} \leq u_{1-\alpha/2}$ puis $p - u_{1-\alpha/2}\sqrt{pq/n} \leq \overline{X} \leq p + u_{1-\alpha/2}\sqrt{pq/n}$.

Intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une proportion

Intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une proportion

Exemple : $n = 70$, $p = 0,4$: $n \geq 30$, $np = 28 \geq 5$ et $nq = n(1-p) = 42 \geq 5$

Intervalle de fluctuation

R3.08 Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Plan

Loi des grands nombres

Annexe : intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une proportion

Exemple : $n = 70,\ p = 0,4$: $n \geq 30,\ np = 28 \geq 5$ et $nq = n(1-p) = 42 \geq 5$

$X \sim \mathcal{N}\left(28, \sqrt{16,8}\right)$ et $\overline{X} \sim \mathcal{N}\left(0,4;\ \sqrt{0,24/70}\right)$.

Intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une proportion

Exemple : $n = 70$, $p = 0,4$: $n \geq 30$, $np = 28 \geq 5$ et $nq = n(1-p) = 42 \geq 5$

$X \sim \mathcal{N}\left(28, \sqrt{16,8}\right)$ et $\overline{X} \sim \mathcal{N}\left(0,4;\ \sqrt{0,24/70}\right)$.

On pose $\alpha = 0,05$: $u_{1-\alpha/2} = u_{0,975} = 1,96$.

Intervalle de fluctuation

R3.08 Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Plan

Loi des grands nombres

Annexe : intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une proportion

Exemple : $n = 70$, $p = 0,4$: $n \geq 30$, $np = 28 \geq 5$ et $nq = n(1-p) = 42 \geq 5$

$X \sim \mathcal{N}\left(28, \sqrt{16,8}\right)$ et $\overline{X} \sim \mathcal{N}\left(0,4;\ \sqrt{0,24/70}\right)$.

On pose $\alpha = 0,05$: $u_{1-\alpha/2} = u_{0,975} = 1,96$.

L'intervalle I de fluctuation de $\overline{X}$ de niveau $1-\alpha$ ou au seuil de risque α est alors défini par $P\left(\left|\dfrac{\overline{X}-0,4}{\sqrt{0,24/70}}\right| \leq 1,96\right) = 1 - 0,05 = 0,95$

Intervalle de fluctuation

R3.08 Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Plan

Loi des grands nombres

Annexe : intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une proportion

Exemple : $n = 70$, $p = 0,4$: $n \geq 30$, $np = 28 \geq 5$ et $nq = n(1-p) = 42 \geq 5$

$X \sim \mathcal{N}\left(28, \sqrt{16,8}\right)$ et $\overline{X} \sim \mathcal{N}\left(0,4;\ \sqrt{0,24/70}\right)$.

On pose $\alpha = 0,05$: $u_{1-\alpha/2} = u_{0,975} = 1,96$.

L'intervalle I de fluctuation de $\overline{X}$ de niveau $1-\alpha$ ou au seuil de risque α est alors défini par $P\left(\left|\dfrac{\overline{X}-0,4}{\sqrt{0,24/70}}\right| \leq 1,96\right) = 1 - 0,05 = 0,95$

$I = \left[0,4 - 1,96\sqrt{0,24/70};\ 0,4 + 1,96\sqrt{0,24/70}\right] = [0,285;\ 0,515]$

Intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une proportion

Exemple : $n = 70,\ p = 0,4$: $n \geq 30,\ np = 28 \geq 5$ et $nq = n(1-p) = 42 \geq 5$

$X \sim \mathcal{N}\left(28, \sqrt{16,8}\right)$ et $\overline{X} \sim \mathcal{N}\left(0,4;\ \sqrt{0,24/70}\right)$.

On pose $\alpha = 0,05$: $u_{1-\alpha/2} = u_{0,975} = 1,96$.

L'intervalle I de fluctuation de $\overline{X}$ de niveau $1-\alpha$ ou au seuil de risque α est alors défini par $P\left(\left|\dfrac{\overline{X} - 0,4}{\sqrt{0,24/70}}\right| \leq 1,96\right) = 1 - 0,05 = 0,95$

$I = \left[0,4 - 1,96\sqrt{0,24/70};\ 0,4 + 1,96\sqrt{0,24/70}\right] = [0,285;\ 0,515]$

L'intervalle I de fluctuation de X de niveau $1-\alpha$ ou au seuil de risque α est alors défini par les bornes $0,285 \times 70 \approx 20$ et $0,515 \times 70 \approx 36$,

Intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une proportion

Exemple : $n = 70,\ p = 0,4$: $n \geq 30,\ np = 28 \geq 5$ et $nq = n(1-p) = 42 \geq 5$

$X \sim \mathcal{N}\left(28, \sqrt{16,8}\right)$ et $\overline{X} \sim \mathcal{N}\left(0,4;\ \sqrt{0,24/70}\right)$.

On pose $\alpha = 0,05$: $u_{1-\alpha/2} = u_{0,975} = 1,96$.

L'intervalle I de fluctuation de $\overline{X}$ de niveau $1-\alpha$ ou au seuil de risque α est alors défini par $P\left(\left|\dfrac{\overline{X}-0,4}{\sqrt{0,24/70}}\right| \leq 1,96\right) = 1 - 0,05 = 0,95$

$I = \left[0,4 - 1,96\sqrt{0,24/70};\ 0,4 + 1,96\sqrt{0,24/70}\right] = [0,285;\ 0,515]$

L'intervalle I de fluctuation de X de niveau $1-\alpha$ ou au seuil de risque α est alors défini par les bornes $0,285 \times 70 \approx 20$ et $0,515 \times 70 \approx 36$, soit $[\![20, 36]\!]$.

Intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une proportion

Intervalle de fluctuation

R3.08 Probabilités

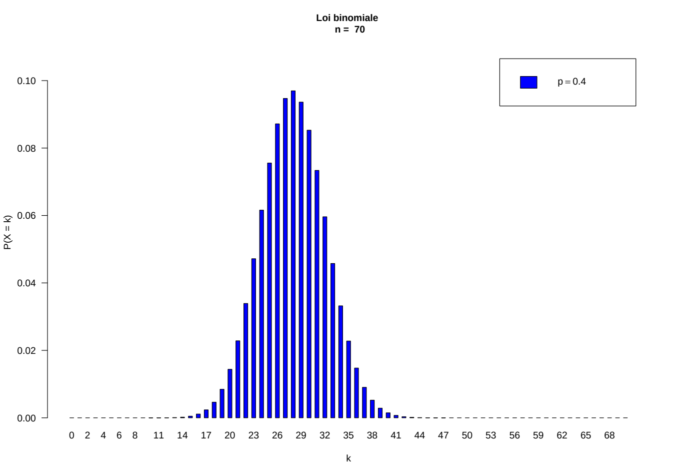
Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Plan

Loi des grands nombres

Annexe : intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une proportion



Intervalle de fluctuation

R3.08 Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Plan

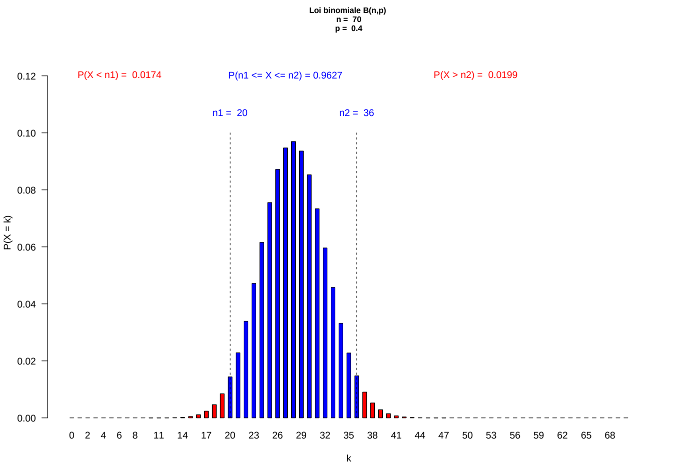
Loi des grands nombres

Annexe : intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une proportion

Intervalle de fluctuation

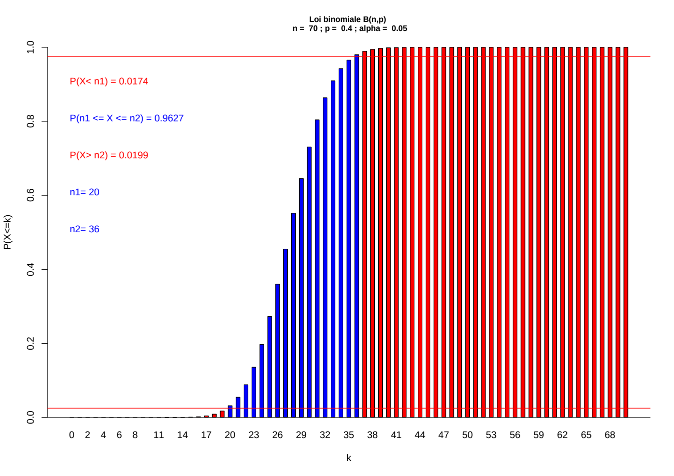
Intervalle de fluctuation : cas d'une proportion



Intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une proportion

Intervalle de fluctuation : cas d'une proportion



Intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une proportion

Intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une proportion

Calcul direct :

Intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une proportion

Calcul direct :

$$I' = \left[\frac{20}{70}, \frac{36}{70}\right] = [0,285;\ 0,515]$$

Intervalle de fluctuation

R3.08 Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Plan

Loi des grands nombres

Annexe : intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une proportion

Calcul direct :

$$I' = \left[\frac{20}{70}, \frac{36}{70}\right] = [0,285;\ 0,515]$$

soit $[\![20, 36]\!]$.

Intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une proportion

Calcul direct :

$$I' = \left[\frac{20}{70}, \frac{36}{70}\right] = [0,285;\ 0,515]$$

soit $[\![20, 36]\!]$.

$\frac{20}{70} \approx 0,2857143$; $\frac{36}{70} \approx 0,5142857$

Intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une proportion

Calcul direct :

$$I' = \left[\frac{20}{70}, \frac{36}{70}\right] = [0,285;\ 0,515]$$

soit $[\![20, 36]\!]$.

$\frac{20}{70} \approx 0,2857143$; $\frac{36}{70} \approx 0,5142857$

Avec la loi normale :

Intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une proportion

Calcul direct :

$$I' = \left[\frac{20}{70}, \frac{36}{70}\right] = [0,285;\ 0,515]$$

soit $[\![20, 36]\!]$.

$\frac{20}{70} \approx 0,2857143;\ \frac{36}{70} \approx 0,5142857$

Avec la loi normale :

$$I = \left[0,4 - 1,96\sqrt{0,24/70};\ 0,4 + 1,96\sqrt{0,24/70}\right] = [0,285;\ 0,515]$$

Intervalle de fluctuation

R3.08 Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Plan

Loi des grands nombres

Annexe : intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une proportion

Calcul direct :

$I' = \left[\frac{20}{70}, \frac{36}{70}\right] = [0,285;\ 0,515]$

soit $[\![20, 36]\!]$.

$\frac{20}{70} \approx 0,2857143;\ \frac{36}{70} \approx 0,5142857$

Avec la loi normale :

$I = \left[0,4 - 1,96\sqrt{0,24/70};\ 0,4 + 1,96\sqrt{0,24/70}\right] = [0,285;\ 0,515]$

soit $[\![20, 36]\!]$.

Intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une proportion

Calcul direct :

$$I' = \left[\frac{20}{70}, \frac{36}{70}\right] = [0,285;\ 0,515]$$

soit $[\![20, 36]\!]$.

$\frac{20}{70} \approx 0,2857143$; $\frac{36}{70} \approx 0,5142857$

Avec la loi normale :

$$I = \left[0,4 - 1,96\sqrt{0,24/70};\ 0,4 + 1,96\sqrt{0,24/70}\right] = [0,285;\ 0,515]$$

soit $[\![20, 36]\!]$.

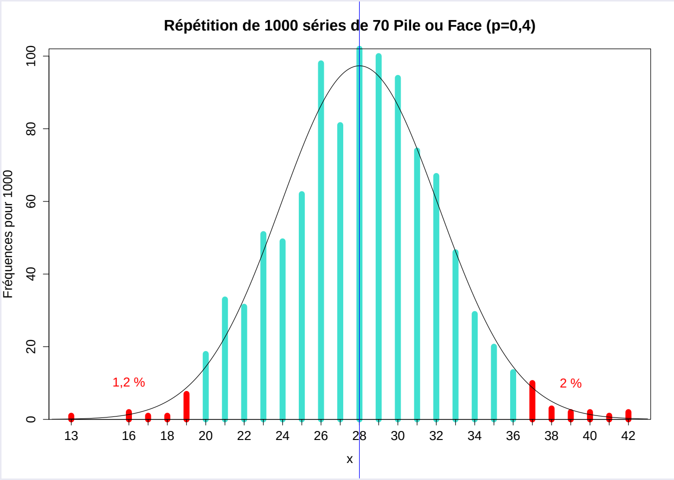
$0,4 - 1,96\sqrt{0,24/70} \approx 0,2852342$; $0,4 + 1,96\sqrt{0,24/70} \approx 0.5147658$

Intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une proportion

Intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une proportion



Intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une proportion

Intervalle de fluctuation

R3.08 Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Plan

Loi des grands nombres

Annexe : intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une proportion

Si $P(X = 0) \geq \dfrac{\alpha}{2}$ alors $n_1 = 0$.

Intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une proportion

Si $P(X = 0) \geq \dfrac{\alpha}{2}$ alors $n_1 = 0$.

De même, si $P(X = n) \geq \dfrac{\alpha}{2}$ alors $n_2 = n$.

Intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une proportion

Si $P\left(X=0\right) \geq \dfrac{\alpha}{2}$ alors $n_1 = 0$.

De même, si $P\left(X=n\right) \geq \dfrac{\alpha}{2}$ alors $n_2 = n$.

Exemple : $X \sim \mathcal{B}\left(n, p\right)$ avec $n = 5\,969$ et $p = 0,00052$.

Intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une proportion

Si $P(X=0) \geq \dfrac{\alpha}{2}$ alors $n_1 = 0$.

De même, si $P(X=n) \geq \dfrac{\alpha}{2}$ alors $n_2 = n$.

Exemple : $X \sim \mathcal{B}(n,p)$ avec $n = 5\,969$ et $p = 0,00052$.

$$P(X=0) \approx 0,044 \geq \frac{0,05}{2}$$

Intervalle de fluctuation

R3.08 Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Plan

Loi des grands nombres

Annexe : intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une proportion

Si $P(X=0) \geq \frac{\alpha}{2}$ alors $n_1 = 0$.

De même, si $P(X=n) \geq \frac{\alpha}{2}$ alors $n_2 = n$.

Exemple : $X \sim \mathcal{B}(n,p)$ avec $n = 5\,969$ et $p = 0,00052$.

$$P(X=0) \approx 0,044 \geq \frac{0,05}{2}$$

$$P(X \leq 6) \approx 0,961 < 1 - \frac{0,05}{2}$$

Intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une proportion

Si $P(X = 0) \geq \frac{\alpha}{2}$ alors $n_1 = 0$.

De même, si $P(X = n) \geq \frac{\alpha}{2}$ alors $n_2 = n$.

Exemple : $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ avec $n = 5\,969$ et $p = 0,00052$.

$$P(X = 0) \approx 0,044 \geq \frac{0,05}{2}$$

$$P(X \leq 6) \approx 0,961 < 1 - \frac{0,05}{2}$$

$$P(X \leq 7) \approx 0,985 \geq 1 - \frac{0,05}{2}$$

Intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une proportion

Si $P(X = 0) \geq \dfrac{\alpha}{2}$ alors $n_1 = 0$.

De même, si $P(X = n) \geq \dfrac{\alpha}{2}$ alors $n_2 = n$.

Exemple : $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ avec $n = 5\,969$ et $p = 0,00052$.

$P(X = 0) \approx 0,044 \geq \dfrac{0,05}{2}$

$P(X \leq 6) \approx 0,961 < 1 - \dfrac{0,05}{2}$

$P(X \leq 7) \approx 0,985 \geq 1 - \dfrac{0,05}{2}$

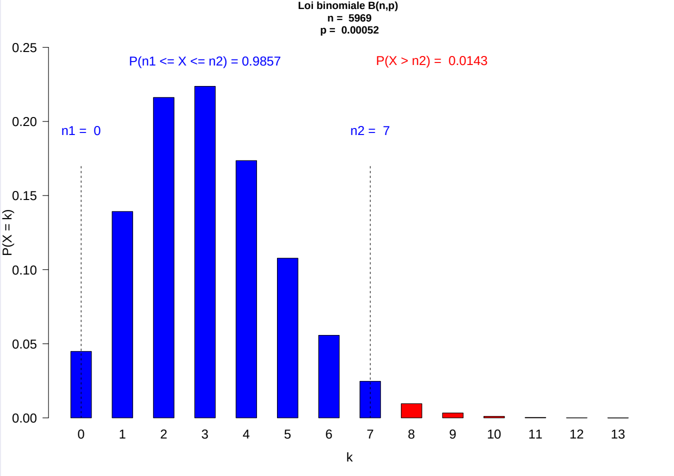
Intervalle de fluctuation de X de niveau 0,95 (ou 95 %) ou au seuil de risque 0,05 (ou 5 %) : $[\![0, 7]\!]$

Intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une proportion

Intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une proportion



Intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une proportion

R3.08 Probabilités

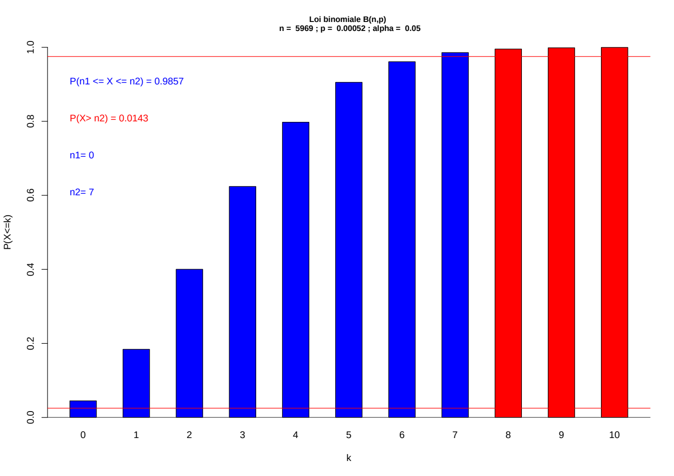
Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Plan

Loi des grands nombres

Annexe : intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une proportion



Intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation unilatéral : cas d'une proportion

Intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation unilatéral : cas d'une proportion

Dans ce dernier cas, on peut envisager de partager l'axe des valeurs de la variable X en deux intervalles $[\![0, n_2]\!]$ et $[\![n_2, n]\!]$ au lieu de trois.

Intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation unilatéral : cas d'une proportion

Dans ce dernier cas, on peut envisager de partager l'axe des valeurs de la variable X en deux intervalles $[\![0, n_2]\!]$ et $[\![n_2, n]\!]$ au lieu de trois.
On parlera alors d'intervalle de fluctuation unilatéral (bilatéral dans l'approche précédente).

Intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation unilatéral : cas d'une proportion

Dans ce dernier cas, on peut envisager de partager l'axe des valeurs de la variable X en deux intervalles $[\![0,\ n_2]\!]$ et $[\![n_2,\ n]\!]$ au lieu de trois.
On parlera alors d'intervalle de fluctuation unilatéral (bilatéral dans l'approche précédente).
n_2 est choisi pour que $[\![0,\ n_2]\!]$ soit le plus petit intervalle vérifiant $P\,(X > n_2) \leq \alpha$, c'est-à-dire tel que $P\,(X \leq n_2) \geq 1 - \alpha$.

Intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une proportion

Intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une proportion

Exemple : $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ avec $n = 5\,969$ et $p = 0,00052$.

Intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une proportion

Exemple : $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ avec $n = 5\,969$ et $p = 0,00052$.
$P(X \leq 5) \approx 0,905 < 1 - 0,05$

Intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une proportion

Exemple : $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ avec $n = 5\,969$ et $p = 0,00052$.
$P(X \leq 5) \approx 0,905 < 1 - 0,05$
$P(X \leq 6) \approx 0,961 \geq 1 - 0,05$

Intervalle de fluctuation

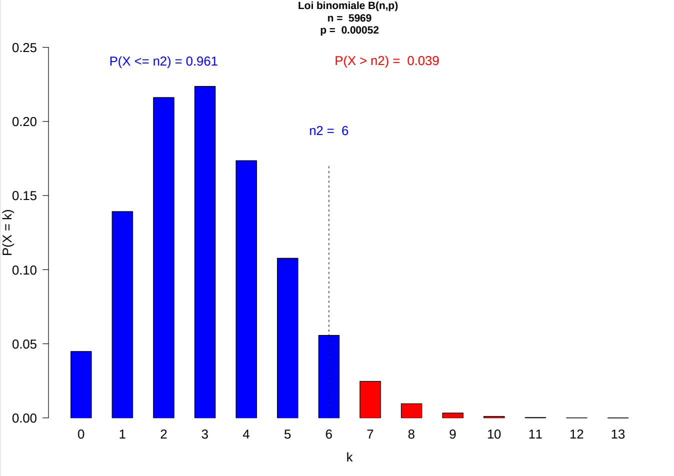
Intervalle de fluctuation : cas d'une proportion

Exemple : $X \sim \mathcal{B}(n,p)$ avec $n = 5\,969$ et $p = 0,00052$.
$P(X \leq 5) \approx 0,905 < 1 - 0,05$
$P(X \leq 6) \approx 0,961 \geq 1 - 0,05$
Intervalle de fluctuation de X de niveau $0,95$ (ou 95 %) ou au seuil de risque 0,05 (ou 5 %) : $[\![0,\ 6]\!]$

Intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une proportion

Intervalle de fluctuation : cas d'une proportion



Intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une proportion

Intervalle de fluctuation

R3.08 Probabilités

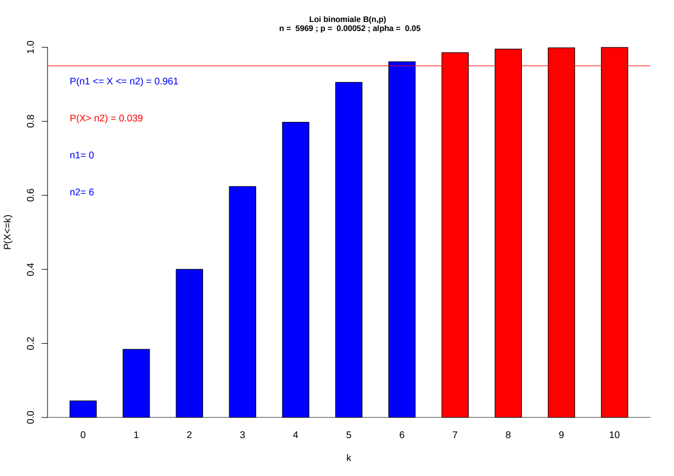
Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Plan

Loi des grands nombres

Annexe : intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une proportion



Intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une moyenne

Intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une moyenne

On suppose X suit une loi de moyenne (espérance) μ et d'écart-type σ.

Intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une moyenne

On suppose X suit une loi de moyenne (espérance) μ et d'écart-type σ. Une suite $(X_1, X_2, ..., X_n)$ de n variables indépendantes et qui suivent cette même loi est appelée un échantillon de cette loi.

Intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une moyenne

On suppose X suit une loi de moyenne (espérance) μ et d'écart-type σ.
Une suite $(X_1, X_2, ..., X_n)$ de n variables indépendantes et qui suivent cette même loi est appelée un échantillon de cette loi.
Si la taille n d'un échantillon $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ est assez grande ($n \geq 30$),
$\overline{X} \sim \mathcal{N}\left(\mu, \sigma/\sqrt{n}\right)$ (théorème central limite).

Intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une moyenne

On suppose X suit une loi de moyenne (espérance) μ et d'écart-type σ.
Une suite $(X_1, X_2, ..., X_n)$ de n variables indépendantes et qui suivent cette même loi est appelée un échantillon de cette loi.
Si la taille n d'un échantillon $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ est assez grande ($n \geq 30$),
$\overline{X} \sim \mathcal{N}\left(\mu, \sigma/\sqrt{n}\right)$ (théorème central limite).
Un intervalle de fluctuation de niveau $1 - \alpha$ est alors

$$\left[\mu - u_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \mu + u_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right].$$

Intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une moyenne

On suppose X suit une loi de moyenne (espérance) μ et d'écart-type σ.
Une suite $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ de n variables indépendantes et qui suivent cette même loi est appelée un échantillon de cette loi.
Si la taille n d'un échantillon $(X_i)_{1\leq i\leq n}$ est assez grande ($n \geq 30$), $\overline{X} \sim \mathcal{N}\left(\mu, \sigma/\sqrt{n}\right)$ (théorème central limite).
Un intervalle de fluctuation de niveau $1-\alpha$ est alors

$$\left[\mu - u_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \mu + u_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right].$$

Exemple : dans un élevage, le poids de naissance moyen d'un lapin est $\mu = 40$ g avec un écart-type $\sigma = 5$ g.

Intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une moyenne

On suppose X suit une loi de moyenne (espérance) μ et d'écart-type σ.
Une suite $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ de n variables indépendantes et qui suivent cette même loi est appelée un échantillon de cette loi.
Si la taille n d'un échantillon $(X_i)_{1\leq i\leq n}$ est assez grande ($n \geq 30$), $\overline{X} \sim \mathcal{N}\left(\mu, \sigma/\sqrt{n}\right)$ (théorème central limite).
Un intervalle de fluctuation de niveau $1-\alpha$ est alors

$$\left[\mu - u_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \mu + u_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right].$$

Exemple : dans un élevage, le poids de naissance moyen d'un lapin est $\mu = 40$ g avec un écart-type $\sigma = 5$ g.
Pour un échantillon de taille $n = 1\,000$, on a $\overline{X} \sim \mathcal{N}\left(40, \dfrac{5}{\sqrt{1\,000}}\right)$ et on obtient l'intervalle de fluctuation du poids de naissance de niveau 95 % :

Intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une moyenne

On suppose X suit une loi de moyenne (espérance) μ et d'écart-type σ.
Une suite $(X_1, X_2, ..., X_n)$ de n variables indépendantes et qui suivent cette même loi est appelée un échantillon de cette loi.
Si la taille n d'un échantillon $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ est assez grande ($n \geq 30$),
$\overline{X} \sim \mathcal{N}\left(\mu, \sigma/\sqrt{n}\right)$ (théorème central limite).
Un intervalle de fluctuation de niveau $1 - \alpha$ est alors
$\left[\mu - u_{1-\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}, \mu + u_{1-\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$.
Exemple : dans un élevage, le poids de naissance moyen d'un lapin est $\mu = 40$ g avec un écart-type $\sigma = 5$ g.
Pour un échantillon de taille $n = 1\,000$, on a $\overline{X} \sim \mathcal{N}\left(40, \dfrac{5}{\sqrt{1\,000}}\right)$ et on obtient l'intervalle de fluctuation du poids de naissance de niveau 95 % :
$\left[40 - 1,96\dfrac{5}{\sqrt{1\,000}} ; 40 + 1,96\dfrac{5}{\sqrt{1\,000}}\right]$

Intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une moyenne

On suppose X suit une loi de moyenne (espérance) μ et d'écart-type σ.
Une suite $(X_1, X_2, ..., X_n)$ de n variables indépendantes et qui suivent cette même loi est appelée un échantillon de cette loi.
Si la taille n d'un échantillon $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ est assez grande ($n \geq 30$), $\overline{X} \sim \mathcal{N}\left(\mu, \sigma/\sqrt{n}\right)$ (théorème central limite).
Un intervalle de fluctuation de niveau $1 - \alpha$ est alors
$\left[\mu - u_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \mu + u_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$.
Exemple : dans un élevage, le poids de naissance moyen d'un lapin est $\mu = 40$ g avec un écart-type $\sigma = 5$ g.
Pour un échantillon de taille $n = 1\,000$, on a $\overline{X} \sim \mathcal{N}\left(40, \frac{5}{\sqrt{1\,000}}\right)$ et on obtient l'intervalle de fluctuation du poids de naissance de niveau 95 % :
$\left[40 - 1,96\frac{5}{\sqrt{1\,000}} ; 40 + 1,96\frac{5}{\sqrt{1\,000}}\right]$, soit $[39,69; 40,31]$.

Intervalle de fluctuation

R3.08 Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Plan

Loi des grands nombres

Annexe : intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une moyenne

On suppose X suit une loi de moyenne (espérance) μ et d'écart-type σ.
Une suite $(X_1, X_2, ..., X_n)$ de n variables indépendantes et qui suivent cette même loi est appelée un échantillon de cette loi.
Si la taille n d'un échantillon $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ est assez grande ($n \geq 30$), $\overline{X} \sim \mathcal{N}\left(\mu, \sigma/\sqrt{n}\right)$ (théorème central limite).
Un intervalle de fluctuation de niveau $1-\alpha$ est alors
$\left[\mu - u_{1-\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}, \mu + u_{1-\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$.
Exemple : dans un élevage, le poids de naissance moyen d'un lapin est $\mu = 40$ g avec un écart-type $\sigma = 5$ g.
Pour un échantillon de taille $n = 1\,000$, on a $\overline{X} \sim \mathcal{N}\left(40, \dfrac{5}{\sqrt{1\,000}}\right)$ et on obtient l'intervalle de fluctuation du poids de naissance de niveau 95 % :
$\left[40 - 1,96\dfrac{5}{\sqrt{1\,000}} ; 40 + 1,96\dfrac{5}{\sqrt{1\,000}}\right]$, soit $[39,69; 40,31]$.
Au niveau 99 %,

Intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une moyenne

On suppose X suit une loi de moyenne (espérance) μ et d'écart-type σ.
Une suite $(X_1, X_2, ..., X_n)$ de n variables indépendantes et qui suivent cette même loi est appelée un échantillon de cette loi.
Si la taille n d'un échantillon $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ est assez grande ($n \geq 30$), $\overline{X} \sim \mathcal{N}\left(\mu, \sigma/\sqrt{n}\right)$ (théorème central limite).
Un intervalle de fluctuation de niveau $1-\alpha$ est alors
$$\left[\mu - u_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \mu + u_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right].$$
Exemple : dans un élevage, le poids de naissance moyen d'un lapin est $\mu = 40$ g avec un écart-type $\sigma = 5$ g.
Pour un échantillon de taille $n = 1\,000$, on a $\overline{X} \sim \mathcal{N}\left(40, \frac{5}{\sqrt{1\,000}}\right)$ et on obtient l'intervalle de fluctuation du poids de naissance de niveau 95 % :
$$\left[40 - 1,96\frac{5}{\sqrt{1\,000}};\ 40 + 1,96\frac{5}{\sqrt{1\,000}}\right],\text{ soit } [39,69;\ 40,31].$$
Au niveau 99 %, on obtient $[39,59;\ 40,41]$ ($u_{1-\alpha/2} = u_{0,995} = 2,58$).

Intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une moyenne $\overline{X} \sim \mathcal{N}\left(40, \frac{5}{\sqrt{1\,000}}\right)$

Intervalle de fluctuation

R3.08 Probabilités

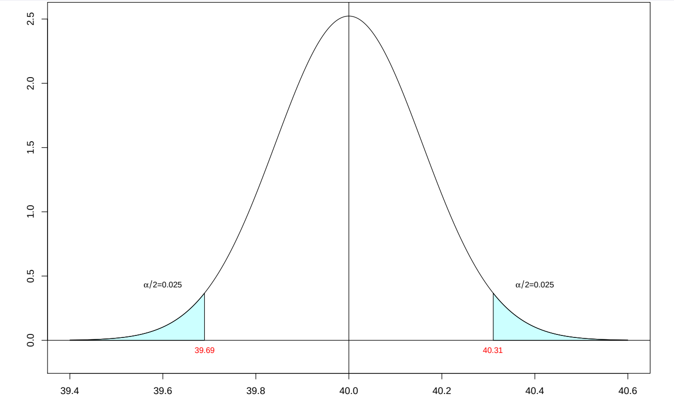
Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Plan

Loi des grands nombres

Annexe : intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une moyenne $\overline{X} \sim \mathcal{N}\left(40, \frac{5}{\sqrt{1\,000}}\right)$



Intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une moyenne $\overline{X} \sim \mathcal{N}\left(40, \frac{5}{\sqrt{1\,000}}\right)$

Intervalle de fluctuation

R3.08 Probabilités

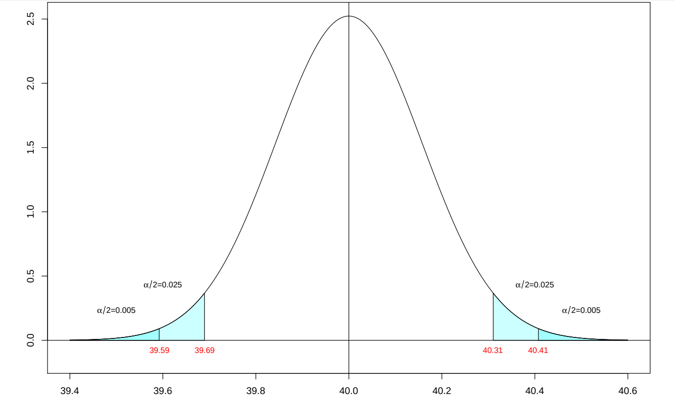
Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Plan

Loi des grands nombres

Annexe : intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une moyenne $\overline{X} \sim \mathcal{N}\left(40, \frac{5}{\sqrt{1\,000}}\right)$



Intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une moyenne

Intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une moyenne

Si la taille n d'un échantillon $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ n'est pas assez grande ($n < 30$), $\overline{X}$ ne suit pas une loi normale.

Intervalle de fluctuation

R3.08 Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Plan

Loi des grands nombres

Annexe : intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une moyenne

Si la taille n d'un échantillon $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ n'est pas assez grande ($n < 30$), $\overline{X}$ ne suit pas une loi normale.
Si $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$ $(1 \leq i \leq n)$ alors $\overline{X} \sim \mathcal{N}\left(\mu, \sigma/\sqrt{n}\right)$.

Intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une moyenne

Si la taille n d'un échantillon $(X_i)_{1\leq i\leq n}$ n'est pas assez grande ($n<30$), $\overline{X}$ ne suit pas une loi normale.
Si $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$ $(1 \leq i \leq n)$ alors $\overline{X} \sim \mathcal{N}\left(\mu, \sigma/\sqrt{n}\right)$.
Et un intervalle de fluctuation de niveau $1-\alpha$ est alors

$$\left[\mu - u_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \mu + u_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right].$$

Intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une moyenne

Si la taille n d'un échantillon $(X_i)_{1\leq i\leq n}$ n'est pas assez grande ($n<30$), $\overline{X}$ ne suit pas une loi normale.
Si $X_i \sim \mathcal{N}(\mu,\sigma)$ $(1\leq i\leq n)$ alors $\overline{X}\sim\mathcal{N}(\mu,\sigma/\sqrt{n})$.
Et un intervalle de fluctuation de niveau $1-\alpha$ est alors

$$\left[\mu - u_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \mu + u_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right].$$

Exemple : on suppose que le poids de naissance d'un lapin suit la loi normale $\mathcal{N}(40,\,5)$.

Intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une moyenne

Si la taille n d'un échantillon $(X_i)_{1\leq i\leq n}$ n'est pas assez grande ($n<30$), $\overline{X}$ ne suit pas une loi normale.
Si $X_i \sim \mathcal{N}(\mu,\sigma)$ ($1\leq i\leq n$) alors $\overline{X}\sim\mathcal{N}\left(\mu,\sigma/\sqrt{n}\right)$.
Et un intervalle de fluctuation de niveau $1-\alpha$ est alors
$$\left[\mu-u_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\mu+u_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right].$$
Exemple : on suppose que le poids de naissance d'un lapin suit la loi normale $\mathcal{N}(40,\ 5)$.

Pour un échantillon de taille $n=20$, $\overline{X}\sim\mathcal{N}\left(40,\ \frac{5}{\sqrt{20}}\right)$ on obtient l'intervalle de fluctuation du poids de naissance de niveau 95 % :

Intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une moyenne

Si la taille n d'un échantillon $(X_i)_{1\leq i\leq n}$ n'est pas assez grande ($n < 30$), $\overline{X}$ ne suit pas une loi normale.
Si $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$ $(1 \leq i \leq n)$ alors $\overline{X} \sim \mathcal{N}\left(\mu, \sigma/\sqrt{n}\right)$.
Et un intervalle de fluctuation de niveau $1-\alpha$ est alors
$\left[\mu - u_{1-\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}, \mu + u_{1-\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$.
Exemple : on suppose que le poids de naissance d'un lapin suit la loi normale $\mathcal{N}(40,\ 5)$.

Pour un échantillon de taille $n = 20$, $\overline{X} \sim \mathcal{N}\left(40,\ \dfrac{5}{\sqrt{20}}\right)$ on obtient l'intervalle de fluctuation du poids de naissance de niveau 95 % :
$\left[40 - 1,96\dfrac{5}{\sqrt{20}};\ 40 + 1,96\dfrac{5}{\sqrt{20}}\right]$

Intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une moyenne

Si la taille n d'un échantillon $(X_i)_{1\leq i\leq n}$ n'est pas assez grande ($n<30$), $\overline{X}$ ne suit pas une loi normale.
Si $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$ ($1 \leq i \leq n$) alors $\overline{X} \sim \mathcal{N}\left(\mu, \sigma/\sqrt{n}\right)$.
Et un intervalle de fluctuation de niveau $1-\alpha$ est alors

$$\left[\mu - u_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \mu + u_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right].$$

Exemple : on suppose que le poids de naissance d'un lapin suit la loi normale $\mathcal{N}(40,\ 5)$.

Pour un échantillon de taille $n=20$, $\overline{X} \sim \mathcal{N}\left(40,\ \frac{5}{\sqrt{20}}\right)$ on obtient l'intervalle de fluctuation du poids de naissance de niveau 95 % :

$$\left[40 - 1,96\frac{5}{\sqrt{20}};\ 40 + 1,96\frac{5}{\sqrt{20}}\right],$$

soit $[37,81;\ 42,19]$.

Intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une moyenne

Si la taille n d'un échantillon $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ n'est pas assez grande ($n < 30$), $\overline{X}$ ne suit pas une loi normale.
Si $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$ $(1 \leq i \leq n)$ alors $\overline{X} \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma/\sqrt{n})$.
Et un intervalle de fluctuation de niveau $1 - \alpha$ est alors
$$\left[\mu - u_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \mu + u_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right].$$
Exemple : on suppose que le poids de naissance d'un lapin suit la loi normale $\mathcal{N}(40,\ 5)$.

Pour un échantillon de taille $n = 20$, $\overline{X} \sim \mathcal{N}\left(40,\ \frac{5}{\sqrt{20}}\right)$ on obtient l'intervalle de fluctuation du poids de naissance de niveau 95 % :
$$\left[40 - 1,96\frac{5}{\sqrt{20}};\ 40 + 1,96\frac{5}{\sqrt{20}}\right],$$
soit $[37,81;\ 42,19]$.
Au niveau 99 %,

Intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une moyenne

Si la taille n d'un échantillon $(X_i)_{1\leq i\leq n}$ n'est pas assez grande ($n < 30$), $\overline{X}$ ne suit pas une loi normale.
Si $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$ $(1 \leq i \leq n)$ alors $\overline{X} \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma/\sqrt{n})$.
Et un intervalle de fluctuation de niveau $1-\alpha$ est alors
$\left[\mu - u_{1-\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}, \mu + u_{1-\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$.
Exemple : on suppose que le poids de naissance d'un lapin suit la loi normale $\mathcal{N}(40,\ 5)$.

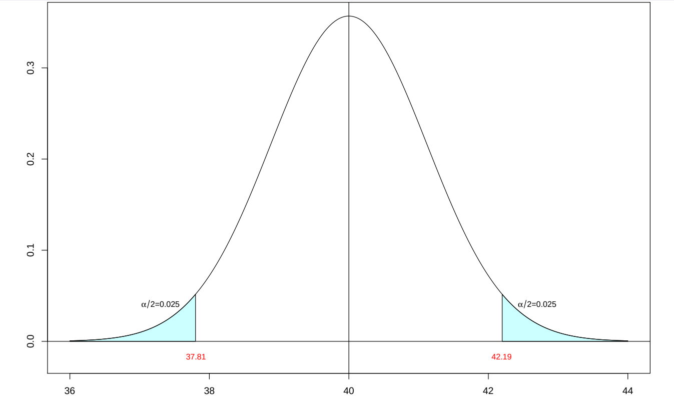
Pour un échantillon de taille $n = 20$, $\overline{X} \sim \mathcal{N}\left(40,\ \dfrac{5}{\sqrt{20}}\right)$ on obtient l'intervalle de fluctuation du poids de naissance de niveau 95 % :
$\left[40 - 1,96\dfrac{5}{\sqrt{20}};\ 40 + 1,96\dfrac{5}{\sqrt{20}}\right]$,
soit $[37,81;\ 42,19]$.
Au niveau 99 %, on obient $[37,12;\ 42,88]$ $(u_{1-\alpha/2} = u_{0,995} = 2,58)$.

Intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une moyenne $\overline{X} \sim \mathcal{N}\left(40, \dfrac{5}{\sqrt{20}}\right)$

Intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une moyenne $\overline{X} \sim \mathcal{N}\left(40, \frac{5}{\sqrt{20}}\right)$

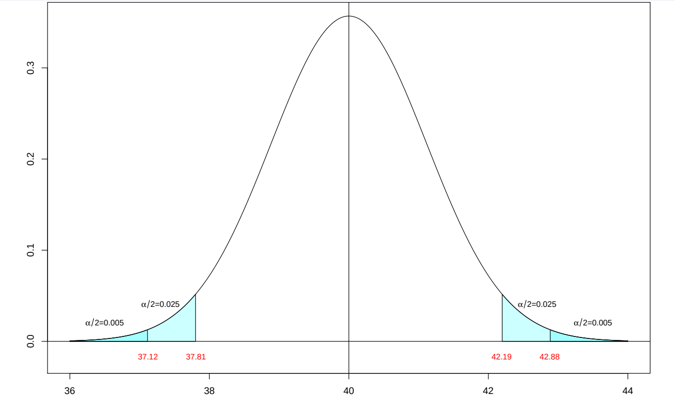


Intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une moyenne $\overline{X} \sim \mathcal{N}\left(40, \dfrac{5}{\sqrt{20}}\right)$

Intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation : cas d'une moyenne $\overline{X} \sim \mathcal{N}\left(40, \frac{5}{\sqrt{20}}\right)$



Tables de la Loi binomiale

Utilisation des tables ($p > 0,5$)

Tables de la Loi binomiale

Utilisation des tables ($p > 0,5$)

Si $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ alors :
$P(X \leq i) = 1 - P\left(X' \leq n - i - 1\right)$ avec $X' \sim \mathcal{B}(n, 1 - p)$,

Tables de la Loi binomiale

Utilisation des tables ($p > 0,5$)

Si $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ alors :
$P(X \leq i) = 1 - P\left(X' \leq n - i - 1\right)$ avec $X' \sim \mathcal{B}(n, 1-p)$,
$P(X \geq i) = P\left(X' \leq n - i\right)$ avec $X' \sim \mathcal{B}(n, 1-p)$.

Tables de la Loi binomiale

Utilisation des tables ($p > 0,5$)

Si $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ alors :
$P(X \leq i) = 1 - P\left(X' \leq n - i - 1\right)$ avec $X' \sim \mathcal{B}(n, 1 - p)$,
$P(X \geq i) = P\left(X' \leq n - i\right)$ avec $X' \sim \mathcal{B}(n, 1 - p)$.
Démonstration en fin.

Tables de la Loi binomiale

Utilisation des tables ($p > 0,5$)

Si $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ alors :
$P(X \leq i) = 1 - P\left(X' \leq n - i - 1\right)$ avec $X' \sim \mathcal{B}(n, 1-p)$,
$P(X \geq i) = P\left(X' \leq n - i\right)$ avec $X' \sim \mathcal{B}(n, 1-p)$.
Démonstration en fin.

Exemple

Tables de la Loi binomiale

R3.08 Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Plan

Loi des grands nombres

Annexe : intervalle de fluctuation

Utilisation des tables ($p > 0,5$)

Si $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ alors :
$P(X \leq i) = 1 - P\left(X' \leq n - i - 1\right)$ avec $X' \sim \mathcal{B}(n, 1-p)$,
$P(X \geq i) = P\left(X' \leq n - i\right)$ avec $X' \sim \mathcal{B}(n, 1-p)$.
Démonstration en fin.

Exemple

$X \sim \mathcal{B}(25;\ 0,8)$

Tables de la Loi binomiale

Utilisation des tables ($p > 0,5$)

Si $X \sim \mathcal{B}(n,p)$ alors :
$P(X \leq i) = 1 - P\left(X' \leq n - i - 1\right)$ avec $X' \sim \mathcal{B}(n, 1-p)$,
$P(X \geq i) = P\left(X' \leq n - i\right)$ avec $X' \sim \mathcal{B}(n, 1-p)$.
Démonstration en fin.

Exemple

$X \sim \mathcal{B}(25;\ 0,8)$
$P(X \leq 20) = 1 - P\left(X' \leq 25 - 20 - 1\right)$ avec $X' \sim \mathcal{B}(25;\ 1 - 0,8)$

Tables de la Loi binomiale

Utilisation des tables ($p > 0,5$)

Si $X \sim \mathcal{B}(n,p)$ alors :
$P(X \leq i) = 1 - P\left(X' \leq n-i-1\right)$ avec $X' \sim \mathcal{B}(n, 1-p)$,
$P(X \geq i) = P\left(X' \leq n-i\right)$ avec $X' \sim \mathcal{B}(n, 1-p)$.
Démonstration en fin.

Exemple

$X \sim \mathcal{B}(25;\ 0,8)$
$P(X \leq 20) = 1 - P\left(X' \leq 25-20-1\right)$ avec $X' \sim \mathcal{B}(25;\ 1-0,8)$
$P(X \leq 20) = 1 - P\left(X' \leq 4\right)$ avec $X' \sim \mathcal{B}(25;\ 0,2)$

Tables de la Loi binomiale

R3.08 Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Plan

Loi des grands nombres

Annexe : intervalle de fluctuation

Utilisation des tables ($p > 0,5$)

Si $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ alors :
$P(X \leq i) = 1 - P\left(X' \leq n - i - 1\right)$ avec $X' \sim \mathcal{B}(n, 1-p)$,
$P(X \geq i) = P\left(X' \leq n - i\right)$ avec $X' \sim \mathcal{B}(n, 1-p)$.
Démonstration en fin.

Exemple

$X \sim \mathcal{B}(25;\ 0,8)$
$P(X \leq 20) = 1 - P\left(X' \leq 25 - 20 - 1\right)$ avec $X' \sim \mathcal{B}(25;\ 1 - 0,8)$
$P(X \leq 20) = 1 - P\left(X' \leq 4\right)$ avec $X' \sim \mathcal{B}(25;\ 0,2)$
$P(X \leq 20) = 1 - P\left(X' \leq 4\right) = 1 - 0,4207 = 0,5793$

Tables de la Loi binomiale

Utilisation des tables ($p > 0,5$)

Si $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ alors :
$P(X \leq i) = 1 - P\left(X' \leq n - i - 1\right)$ avec $X' \sim \mathcal{B}(n, 1-p)$,
$P(X \geq i) = P\left(X' \leq n - i\right)$ avec $X' \sim \mathcal{B}(n, 1-p)$.
Démonstration en fin.

Exemple

$X \sim \mathcal{B}(25;\ 0,8)$
$P(X \leq 20) = 1 - P\left(X' \leq 25 - 20 - 1\right)$ avec $X' \sim \mathcal{B}(25;\ 1 - 0,8)$
$P(X \leq 20) = 1 - P\left(X' \leq 4\right)$ avec $X' \sim \mathcal{B}(25;\ 0,2)$
$P(X \leq 20) = 1 - P\left(X' \leq 4\right) = 1 - 0,4207 = 0,5793$
$P(X \leq 20) = 0,5793$

Tables de la Loi binomiale

Utilisation des tables ($p > 0,5$)

Si $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ alors :
$P(X \leq i) = 1 - P\left(X' \leq n - i - 1\right)$ avec $X' \sim \mathcal{B}(n, 1-p)$,
$P(X \geq i) = P\left(X' \leq n - i\right)$ avec $X' \sim \mathcal{B}(n, 1-p)$.
Démonstration en fin.

Exemple

$X \sim \mathcal{B}(25;\ 0,8)$
$P(X \leq 20) = 1 - P\left(X' \leq 25 - 20 - 1\right)$ avec $X' \sim \mathcal{B}(25;\ 1 - 0,8)$
$P(X \leq 20) = 1 - P\left(X' \leq 4\right)$ avec $X' \sim \mathcal{B}(25;\ 0,2)$
$P(X \leq 20) = 1 - P\left(X' \leq 4\right) = 1 - 0,4207 = 0,5793$
$P(X \leq 20) = 0,5793$
Autre calcul :

Tables de la Loi binomiale

Utilisation des tables ($p > 0,5$)

Si $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ alors :
$P(X \leq i) = 1 - P\left(X' \leq n - i - 1\right)$ avec $X' \sim \mathcal{B}(n, 1-p)$,
$P(X \geq i) = P\left(X' \leq n - i\right)$ avec $X' \sim \mathcal{B}(n, 1-p)$.
Démonstration en fin.

Exemple

$X \sim \mathcal{B}(25;\ 0,8)$
$P(X \leq 20) = 1 - P\left(X' \leq 25 - 20 - 1\right)$ avec $X' \sim \mathcal{B}(25;\ 1 - 0,8)$
$P(X \leq 20) = 1 - P\left(X' \leq 4\right)$ avec $X' \sim \mathcal{B}(25;\ 0,2)$
$P(X \leq 20) = 1 - P\left(X' \leq 4\right) = 1 - 0,4207 = 0,5793$
$P(X \leq 20) = 0,5793$
Autre calcul :
$P(X \leq 20) = 1 - P\left(\overline{X \leq 20}\right) = 1 - P(X > 20) = 1 - P(X \geq 21)$

Tables de la Loi binomiale

Utilisation des tables ($p > 0,5$)

Si $X \sim \mathcal{B}(n,p)$ alors :
$P(X \leq i) = 1 - P\left(X' \leq n-i-1\right)$ avec $X' \sim \mathcal{B}(n, 1-p)$,
$P(X \geq i) = P\left(X' \leq n-i\right)$ avec $X' \sim \mathcal{B}(n, 1-p)$.
Démonstration en fin.

Exemple

$X \sim \mathcal{B}(25;\, 0,8)$
$P(X \leq 20) = 1 - P\left(X' \leq 25-20-1\right)$ avec $X' \sim \mathcal{B}(25;\, 1-0,8)$
$P(X \leq 20) = 1 - P\left(X' \leq 4\right)$ avec $X' \sim \mathcal{B}(25;\, 0,2)$
$P(X \leq 20) = 1 - P\left(X' \leq 4\right) = 1 - 0,4207 = 0,5793$
$P(X \leq 20) = 0,5793$
Autre calcul :
$P(X \leq 20) = 1 - P\left(\overline{X \leq 20}\right) = 1 - P(X > 20) = 1 - P(X \geq 21)$
$P(X \geq 21) = P\left(X' \leq 25-21\right) = P\left(X' \leq 4\right)$

Tables de la Loi binomiale

Utilisation des tables ($p > 0,5$)

Si $X \sim \mathcal{B}(n,p)$ alors :
$P(X \leq i) = 1 - P\left(X' \leq n-i-1\right)$ avec $X' \sim \mathcal{B}(n, 1-p)$,
$P(X \geq i) = P\left(X' \leq n-i\right)$ avec $X' \sim \mathcal{B}(n, 1-p)$.
Démonstration en fin.

Exemple

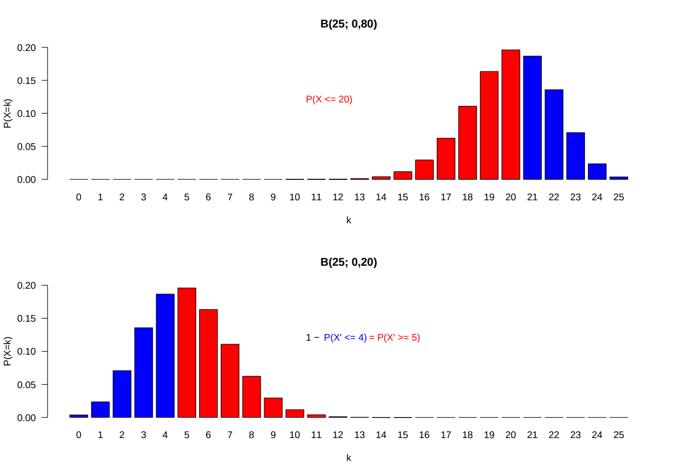
$X \sim \mathcal{B}(25;\ 0,8)$
$P(X \leq 20) = 1 - P\left(X' \leq 25-20-1\right)$ avec $X' \sim \mathcal{B}(25;\ 1-0,8)$
$P(X \leq 20) = 1 - P\left(X' \leq 4\right)$ avec $X' \sim \mathcal{B}(25;\ 0,2)$
$P(X \leq 20) = 1 - P\left(X' \leq 4\right) = 1 - 0,4207 = 0,5793$
$P(X \leq 20) = 0,5793$
Autre calcul :
$P(X \leq 20) = 1 - P\left(\overline{X \leq 20}\right) = 1 - P(X > 20) = 1 - P(X \geq 21)$
$P(X \geq 21) = P\left(X' \leq 25-21\right) = P\left(X' \leq 4\right)$
$P(X \leq 20) = 1 - P\left(X' \leq 4\right) = 1 - 0,4207 = 0,5793$

Tables de la Loi binomiale

Exemple

Tables de la Loi binomiale

Exemple



Tables de la Loi binomiale

Utilisation des tables ($p > 0,5$: démonstration)

Tables de la Loi binomiale

R3.08 Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Plan

Loi des grands nombres

Annexe : intervalle de fluctuation

Utilisation des tables ($p > 0,5$: démonstration)

Si $X \sim \mathcal{B}(n,p)$ alors :
$P(X \leq i) = 1 - P(X' \leq n-i-1)$ avec $X' \sim \mathcal{B}(n, 1-p)$,
$P(X \geq i) = P(X' \leq n-i)$ avec $X' \sim \mathcal{B}(n, 1-p)$.

Démonstration

$$P(X \leq i) = \sum_{k=0}^{i} C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

$$P(X \leq i) = \sum_{k'=n-i}^{n} C_n^{n-k'} p^{n-k'} (1-p)^{k'} \text{ en posant } k' = n-k.$$

$$P(X \leq i) = \sum_{k'=n-i}^{n} C_n^{k'} (1-p)^{k'} p^{n-k'}$$

$$P(X \leq i) = P(X' \geq n-i)$$

$$\boxed{P(X \leq i) = 1 - P(X' \leq n-i-1)}$$

On en déduit
$$P(X \geq i) = 1 - P(X \leq i-1) = 1 - (1 - P(X' \leq n-(i-1)-1))$$

$$\boxed{P(X \geq i) = P(X' \leq n-i)}$$