Documents autorisés : cours, TD, notes manuscrites. Barème indicatif : 3,5 + 1 + 1 + 8 + 6,5. Durée : 1h 30.

## Exercice 1

Le prix de vente moyen du $m^2$, en milliers d'euros pour les appartements et les maisons en France est donné par le tableau suivant.
*Source : Le Monde 7 juillet* 2 010, *Century 21 6 juillet* 2 010.

| Année | 2 005 | 2 006 | 2 007 | 2 008 | 2 009 | 2 010 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Maisons X | 1,854 | 2,059 | 2,108 | 2,058 | 1,904 | 2,021 |
| Appartements Y | 2,583 | 3,052 | 3,172 | 3,124 | 2,993 | 3,243 |

1. Représenter graphiquement le nuage de points ($X$ en abscisse, $Y$ en ordonnée).
2. Préciser $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\sigma_X^2$, $\sigma_Y^2$ et $\sigma_{XY}$.
3. Ajuster $Y$ en $X$ selon la méthode des moindres carrés et préciser la formule obtenue :
   $Y = aX + b$.
4. Tracer la droite $D$ d'équation $y = ax + b$ obtenue sur le graphique précédent.
5. Etudier la qualité de l'ajustement en précisant $r^2$.
6. Préciser la somme des résidus : $S = \displaystyle\sum_{i=1}^{6} (y_i - (ax_i + b))^2$.

   *Indication* : $\displaystyle\sum_{i=1}^{6} (y_i - (ax_i + b))^2 = 6\sigma_Y^2(1 - r^2)$.
7. En utilisant la formule obtenue, donner une estimation du prix du $m^2$ pour une maison si le prix correspondant à un appartement est de 3 000 euros.

## Exercice 2

*Carotte* (nom de code chez les étudiants pour l'antisèche)

Une étude menée dans une université pluridisciplinaire française relève que sur 1 815 étudiants, 70,5 % avouent avoir déjà triché. 35 % des filles disent n'avoir jamais triché, contre 25 % des garçons.
On tire au hasard un individu dans l'ensemble des 1 815 étudiants interrogés. Quelle est la probabilité qu'il s'agisse d'une fille ?

*Source : Le Monde* du 26 décembre 2 010

**Exercice 3**

La variable aléatoire $X$ qui donne nombre de spams reçus par un salarié d'une entreprise en une journée suit la loi binomiale $\mathcal{B}(10;\ 0,05)$ qu'on approche par la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$.

1. Préciser $\lambda$.
2. Reproduire et compléter le tableau :

| $X$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $P(X=i)$ | | | | |

**Exercice 4**

*Les réponses aux questions de cet exercice seront données sous la forme de fractions irréductibles.*

La loi conjointe du couple de variables aléatoires $(X_1, X_2)$ est donnée par :

| $X_1 \backslash X_2$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | $\frac{1}{64}$ | $\frac{3}{64}$ | $\frac{3}{64}$ | $\frac{1}{64}$ |
| 1 | $\frac{3}{32}$ | $\frac{3}{16}$ | $\frac{3}{32}$ | 0 |
| 2 | $\frac{3}{16}$ | $\frac{3}{16}$ | 0 | 0 |
| 3 | $\frac{1}{8}$ | 0 | 0 | 0 |

1. Préciser
   (a) la loi marginale de $X_1$.
   Reproduire et compléter le tableau suivant :

   | $X_1$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
   |---|---|---|---|---|
   | $P(X_1=i)$ | | | | |

   (b) la loi marginale de $X_2$.
   Reproduire et compléter le tableau suivant :

   | $X_2$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
   |---|---|---|---|---|
   | $P(X_2=i)$ | | | | |

2. Est-ce que $X_1$ et $X_2$ sont indépendantes ? Justifier.
3. Préciser la loi de probabilité de $X = X_1 + X_2$.
   Reproduire et compléter le tableau suivant :

   | $X$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
   |---|---|---|---|---|
   | $P(X=i)$ | | | | |

4. (a) Déterminer $E(X_1)$, $E(X_2)$, $E(X_1X_2)$, $V(X_1)$ et $V(X_2)$.
   (b) En déduire $E(X_1+X_2)$, $cov(X_1,X_2)$ et $V(X_1+X_2)$.

   On présentera les résultats dans un tableau :

| $E(X_1)$ | $E(X_2)$ | $E(X_1X_2)$ | $V(X_1)$ | $V(X_2)$ | $E(X_1+X_2)$ | $cov(X_1,X_2)$ | $V(X_1+X_2)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | |

*Indication* :
$E(X_1+X_2) = E(X_1) + E(X_2)$, $cov(X_1,X_2) = E(X_1X_2) - E(X_1)E(X_2)$ et $V(X_1+X_2) = V(X_1) + V(X_2) + 2cov(X_1,X_2)$.

## Exercice 5

Estimation du nombre de boules dans une urne

Une urne contient $N$ boules indiscernables numérotées de 1 à $N$.
On note $m$ un entier vérifiant $1 \leq m \leq N$.
On tire $m$ boules au hasard et sans remise dans l'urne et on considère la variable aléatoire $X$ égale au plus grand nombre sorti.

1. Cas $m = 1$ : on tire une boule au hasard dans l'urne. La variable aléatoire $X$ égale au nombre sorti.
   (a) Préciser $P(X = i)$ pour $1 \leq i \leq N$.
   (b) Déterminer $E(X)$.
   (c) Montrer que $N = 2E(X) - 1$.
   (d) Application numérique : $N = 5$.
      i. Reproduire et compléter le tableau :

| $X$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $P(X=i)$ | | | | | |

      ii. Préciser $E(X)$.
   (e) Estimation
   Une urne contient un nombre inconnu de boules $N \geq 2$. Pour obtenir une valeur approchée de $N$, on répète 100 fois de manière indépendante l'expérience aléatoire suivante :
   *On prélève une boule au hasard. On note le numéro $x_i$ et on remet la boule dans l'urne.*
   On pose $\overline{x} = \dfrac{1}{100}\displaystyle\sum_{i=1}^{100} x_i$ et on approche $N$ par $N \approx 2\overline{x} - 1$.
   Application numérique
   On procède à l'expérience aléatoire décrite et on obtient : $\displaystyle\sum_{i=1}^{100} x_i = 50\,151$.
   Préciser une valeur approchée de $N$.
2. Cas $m$ quelconque ($2 \leq m \leq N$).
   On tire $m$ boules au hasard et sans remise dans l'urne et on considère la variable aléatoire $X$ égale au plus grand nombre sorti.

(a) Préciser $P(X = i)$ pour $m \leq i \leq N$.

*Indication :* le cardinal de l'événement $(X = i)$ ( $m \leq i \leq N$) est le nombre de manières de choisir $m - 1$ boules parmi les $i - 1$ boules qui ont un numéro compris entre 1 et $i - 1$ : $C_{i-1}^{m-1}$.

(b) Calcul de $E(X)$

i. En écrivant $\displaystyle\sum_{i=m}^{N} P(X = i) = 1$, montrer que $\displaystyle\sum_{i=m}^{N} C_{i-1}^{m-1} = C_N^m$.

ii. En remplaçant $m$ par $m + 1$ et $N$ par $N + 1$, en déduire $\displaystyle\sum_{i=m}^{N} C_i^m = C_{N+1}^{m+1}$.

iii. Montrer que $iC_{i-1}^{m-1} = mC_i^m$.

iv. En déduire $E(X)$.

(c) Application numérique : $N = 5$, $m = 3$.

i. Reproduire et compléter le tableau :

| $X$ | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|
| $P(X = i)$ | | | |

ii. Préciser $E(X)$.

(d) Soit $N \geq 3$ quelconque. On pose $m = 3$. Montrer que $N = \dfrac{4}{3}E(X) - 1$.

(e) Estimation

Une urne contient un nombre inconnu $N \geq 3$ de boules. Pour obtenir une valeur approchée de $N$, on répète 100 fois de manière indépendante l'expérience aléatoire suivante :

*On préléve 3 boules au hasard sans remise. On note le plus grand des numéros $x_i$ et on remet les trois boules dans l'urne.*

On pose $\overline{x} = \dfrac{1}{100}\displaystyle\sum_{i=1}^{100} x_i$ et on approche $N$ par $N \approx \dfrac{4}{3}\overline{x} - 1$.

Application numérique

On procède à l'expérience aléatoire décrite et on obtient : $\displaystyle\sum_{i=1}^{100} x_i = 74\,922$.

Préciser une valeur approchée de $N$.

Annexe :

100 tirages d'une boule :
583 541 870 265 319 120 940 646 480 640 545 648 544 722 523 994 219 106 110 64 405 449 366 764 628 772 933 973 193 139 697 94 526 531 862 485 394 672 742 521 348 150 587 263 45 755 243 443 688 360 737 395 684 705 443 20 331 425 271 198 822 430 888 392 770 397 809 756 378 217 791 950 328 672 439 834 769 168 862 990 515 885 589 155 200 407 749 826 790 319 535 90 112 137 679 496 190 496 148 55

100 tirages de trois boules (maximum) :
906 914 958 971 958 916 960 934 758 656 707 824 951 439 796 647 755 680 960 586 752 960 548 841 930 350 617 831 918 754 531 935 569 795 529 655 749 914 826 997 962 869 400 911 264 870 854 623 402 240 903 945 901 781 404 957 576 822 650 732 745 687 781 930 487 511 818 812 940 623 471 845 228 924 905 980 595 712 297 508 802 929 579 964 522 680 988 914 336 722 654 904 891 745 905 860 806 887 979 713