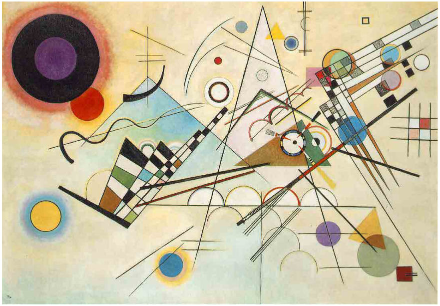
R3.08

Intégration

François Morellet 40 000 carrés



Wassily Kandinsky (1866-1944)

Sommes de Riemann

Subdivisions

Sommes de Riemann

Subdivisions

Une subdivision d'un intervalle $[a, b]$ est un sous-ensemble fini de $[a, b]$ $\sigma = \{x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ tel que $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$.

Sommes de Riemann

Subdivisions

Une subdivision d'un intervalle $[a, b]$ est un sous-ensemble fini de $[a, b]$ $\sigma = \{x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ tel que $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$.
Le pas d'une subdivision σ est le réel $P(\sigma) = \max\limits_{1 \leq i \leq n} (x_i - x_{i-1})$.

Sommes de Riemann

Subdivisions

Une subdivision d'un intervalle $[a, b]$ est un sous-ensemble fini de $[a, b]$
$\sigma = \{x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ tel que $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$.
Le pas d'une subdivision σ est le réel $P(\sigma) = \max\limits_{1 \leq i \leq n}(x_i - x_{i-1})$.

Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866) : mathématicien allemand.

Sommes de Riemann

Sommes de Riemann

Sommes de Riemann

Sommes de Riemann

Soit $\sigma = \{x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ une subdivision de $[a, b]$, f une fonction définie sur $[a, b]$ et $(x'_1, x'_2, \cdots, x'_n)$ une suite de réels tels que $x'_i \in [x_{i-1}, x_i]$ $(1 \leq i \leq n)$.

Sommes de Riemann

Sommes de Riemann

Soit $\sigma = \{x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ une subdivision de $[a, b]$, f une fonction définie sur $[a, b]$ et $(x'_1, x'_2, \cdots, x'_n)$ une suite de réels tels que $x'_i \in [x_{i-1}, x_i]$ $(1 \leq i \leq n)$.
On appelle sommes de Riemann les sommes

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})f(x'_i) = (x_1 - x_0)f(x'_1) + (x_2 - x_1)f(x'_2) + \cdots + (x_n - x_{n-1})f(x'_n).$$

Intégrale de Riemann

Sommes de Riemann

Intégrale de Riemann

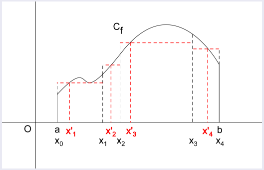
Sommes de Riemann

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})f(x_i') = (x_1 - x_0)f(x_1') + (x_2 - x_1)f(x_2') + \cdots + (x_n - x_{n-1})f(x_n')$$

Intégrale de Riemann

Sommes de Riemann

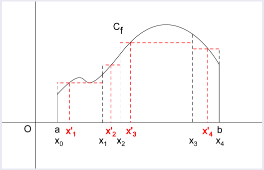
$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})f(x_i') = (x_1 - x_0)f(x_1') + (x_2 - x_1)f(x_2') + \cdots + (x_n - x_{n-1})f(x_n')$$



Intégrale de Riemann

Sommes de Riemann

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})f(x_i') = (x_1 - x_0)f(x_1') + (x_2 - x_1)f(x_2') + \cdots + (x_n - x_{n-1})f(x_n')$$

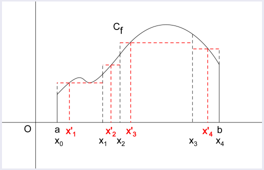


Fonction intégrable

Intégrale de Riemann

Sommes de Riemann

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})f(x_i') = (x_1 - x_0)f(x_1') + (x_2 - x_1)f(x_2') + \cdots + (x_n - x_{n-1})f(x_n')$$



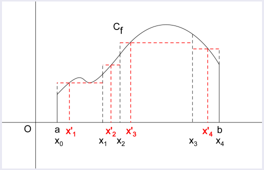
Fonction intégrable

f est intégrable au sens de Riemann si et seulement si les sommes de Riemann admettent une limite lorsque le pas $P(\sigma)$ de la subdivision tend vers 0.

Intégrale de Riemann

Sommes de Riemann

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})f(x_i') = (x_1 - x_0)f(x_1') + (x_2 - x_1)f(x_2') + \cdots + (x_n - x_{n-1})f(x_n')$$



Fonction intégrable

f est intégrable au sens de Riemann si et seulement si les sommes de Riemann admettent une limite lorsque le pas $P(\sigma)$ de la subdivision tend vers 0. La limite est notée $\int_a^b f(x)dx$.

Intégrale de Riemann d'une fonction continue

Cas d'une fonction continue

Intégrale de Riemann d'une fonction continue

Cas d'une fonction continue

Une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ est intégrable au sens de Riemann et $\lim_{P(\sigma)\to 0} \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) f(x_i') = \int_a^b f(x)dx$

Intégrale de Riemann d'une fonction continue

Cas d'une fonction continue

Une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ est intégrable au sens de Riemann et $\lim\limits_{P(\sigma)\to 0} \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})f(x_i') = \int_a^b f(x)dx$

Méthodes de calcul

Intégrale de Riemann d'une fonction continue

Cas d'une fonction continue

Une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ est intégrable au sens de Riemann et $\lim\limits_{P(\sigma)\to 0} \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) f(x_i') = \int_a^b f(x)dx$

Méthodes de calcul

$x_i' = a + (i-1)\dfrac{b-a}{n}$ $(1 \leq i \leq n)$: méthode des rectangles à gauche.

Intégrale de Riemann d'une fonction continue

Cas d'une fonction continue

Une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ est intégrable au sens de Riemann et $\lim_{P(\sigma)\to 0} \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) f(x_i') = \int_a^b f(x)dx$

Méthodes de calcul

$x_i' = a + (i-1)\dfrac{b-a}{n}$ $(1 \leq i \leq n)$: méthode des rectangles à gauche.

$x_i' = a + i\dfrac{b-a}{n}$ $(1 \leq i \leq n)$: méthode des rectangles à droite.

Intégrale de Riemann d'une fonction continue

Cas d'une fonction continue

Une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ est intégrable au sens de Riemann et $\lim\limits_{P(\sigma)\to 0} \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) f(x_i') = \int_a^b f(x)dx$

Méthodes de calcul

$x_i' = a + (i-1)\dfrac{b-a}{n}$ $(1 \leq i \leq n)$: méthode des rectangles à gauche.

$x_i' = a + i\dfrac{b-a}{n}$ $(1 \leq i \leq n)$: méthode des rectangles à droite.

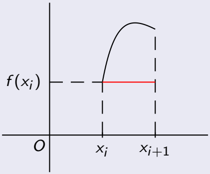
$x_i' = a + \dfrac{2i-1}{2}\dfrac{b-a}{n}$ $(1 \leq i \leq n)$: méthode du point médian.

Méthodes des rectangles

Rectangles à gauche

Méthodes des rectangles

Rectangles à gauche

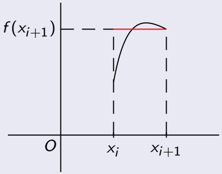


Méthodes des rectangles

Rectangles à droite

Méthodes des rectangles

Rectangles à droite

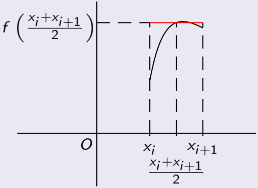


Méthodes des rectangles

Point médian

Méthodes des rectangles

Point médian



Méthode des rectangles à gauche

Exemple : $f(x) = e^x$ sur $[0, 1]$ (rectangles à gauche)

Méthode des rectangles à gauche

Exemple : $f(x) = e^x$ sur $[0, 1]$ (rectangles à gauche)

$$\sigma = \left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}\right\}$$

Méthode des rectangles à gauche

Exemple : $f(x) = e^x$ sur $[0,1]$ (rectangles à gauche)

$$\sigma = \left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}\right\}$$

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})f(x_i') = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\exp\left(\frac{i-1}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}e^{\left(\frac{i-1}{n}\right)}$$

Méthode des rectangles à gauche

Exemple : $f(x) = e^x$ sur $[0, 1]$ (rectangles à gauche)

$$\sigma = \left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, ..., \frac{n-1}{n}\right\}$$

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})f(x_i') = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \exp\left(\frac{i-1}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} e^{\left(\frac{i-1}{n}\right)}$$

$$\sum_{i=1}^{n} e^{\frac{i-1}{n}} = e^0 + e^{\frac{1}{n}} + e^{\frac{2}{n}} + e^{\frac{3}{n}} + \cdots + e^{\frac{n-1}{n}}$$

Méthode des rectangles à gauche

Exemple : $f(x) = e^x$ sur $[0, 1]$ (rectangles à gauche)

$$\sigma = \left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}\right\}$$

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})f(x_i') = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\exp\left(\frac{i-1}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} e^{\left(\frac{i-1}{n}\right)}$$

$$\sum_{i=1}^{n} e^{\frac{i-1}{n}} = e^0 + e^{\frac{1}{n}} + e^{\frac{2}{n}} + e^{\frac{3}{n}} + \cdots + e^{\frac{n-1}{n}}$$

$$= 1 + e^{\frac{1}{n}} + \left(e^{\frac{1}{n}}\right)^2 + \left(e^{\frac{1}{n}}\right)^3 + \cdots + \left(e^{\frac{1}{n}}\right)^{n-1}$$

Méthode des rectangles à gauche

Exemple : $f(x) = e^x$ sur $[0, 1]$ (rectangles à gauche)

$$\sigma = \left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}\right\}$$

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) f(x_i') = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \exp\left(\frac{i-1}{n}\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} e^{\left(\frac{i-1}{n}\right)}$$

$$\sum_{i=1}^{n} e^{\frac{i-1}{n}} = e^0 + e^{\frac{1}{n}} + e^{\frac{2}{n}} + e^{\frac{3}{n}} + \dots + e^{\frac{n-1}{n}}$$

$$= 1 + e^{\frac{1}{n}} + \left(e^{\frac{1}{n}}\right)^2 + \left(e^{\frac{1}{n}}\right)^3 + \dots + \left(e^{\frac{1}{n}}\right)^{n-1}$$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} e^{\frac{i-1}{n}} = \frac{1}{n} \frac{\left(e^{\frac{1}{n}}\right)^n - 1}{e^{\frac{1}{n}} - 1} = \frac{1}{n} \frac{e^1 - 1}{e^{\frac{1}{n}} - 1} = (e-1) \frac{\frac{1}{n}}{e^{\frac{1}{n}} - 1}$$

Méthode des rectangles à gauche

Exemple : $f(x) = e^x$ sur $[0,1]$ (rectangles à gauche)

$$\sigma = \left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}\right\}$$

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})f(x_i') = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\exp\left(\frac{i-1}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}e^{\left(\frac{i-1}{n}\right)}$$

$$\sum_{i=1}^{n}e^{\frac{i-1}{n}} = e^0 + e^{\frac{1}{n}} + e^{\frac{2}{n}} + e^{\frac{3}{n}} + \cdots + e^{\frac{n-1}{n}}$$

$$= 1 + e^{\frac{1}{n}} + \left(e^{\frac{1}{n}}\right)^2 + \left(e^{\frac{1}{n}}\right)^3 + \cdots + \left(e^{\frac{1}{n}}\right)^{n-1}$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}e^{\frac{i-1}{n}} = \frac{1}{n}\frac{\left(e^{\frac{1}{n}}\right)^n - 1}{e^{\frac{1}{n}} - 1} = \frac{1}{n}\frac{e^1 - 1}{e^{\frac{1}{n}} - 1} = (e-1)\frac{\frac{1}{n}}{e^{\frac{1}{n}} - 1}$$

Or $\dfrac{e^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} = \dfrac{e^{\frac{1}{n}} - e^0}{\frac{1}{n} - 0} \to \exp'(0) = \exp(0) = e^0 = 1$ quand $n \to +\infty$.

Méthode des rectangles à gauche

Exemple : $f(x) = e^x$ sur $[0,1]$ (rectangles à gauche)

$$\sigma = \left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}\right\}$$

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})f(x_i') = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\exp\left(\frac{i-1}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}e^{\left(\frac{i-1}{n}\right)}$$

$$\sum_{i=1}^{n}e^{\frac{i-1}{n}} = e^0 + e^{\frac{1}{n}} + e^{\frac{2}{n}} + e^{\frac{3}{n}} + \cdots + e^{\frac{n-1}{n}}$$

$$= 1 + e^{\frac{1}{n}} + \left(e^{\frac{1}{n}}\right)^2 + \left(e^{\frac{1}{n}}\right)^3 + \cdots + \left(e^{\frac{1}{n}}\right)^{n-1}$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}e^{\frac{i-1}{n}} = \frac{1}{n}\frac{\left(e^{\frac{1}{n}}\right)^n - 1}{e^{\frac{1}{n}} - 1} = \frac{1}{n}\frac{e^1 - 1}{e^{\frac{1}{n}} - 1} = (e-1)\frac{\frac{1}{n}}{e^{\frac{1}{n}} - 1}$$

Or $\dfrac{e^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} = \dfrac{e^{\frac{1}{n}} - e^0}{\frac{1}{n} - 0} \to \exp'(0) = \exp(0) = e^0 = 1$ quand $n \to +\infty$.

On obtient donc : $\displaystyle\int_0^1 e^x dx = e - 1$

Méthode des rectangles à gauche

Exemple : $f(x) = e^x$ sur $[0, 1]$

Méthode des rectangles à gauche

Exemple : $f(x) = e^x$ sur $[0,1]$

$$x_i' = a + (i-1)\frac{b-a}{n} = 0 + (i-1)\frac{1-0}{n} = \frac{i-1}{n} \quad (1 \leq i \leq n)$$

Méthode des rectangles à gauche

Exemple : $f(x) = e^x$ sur $[0, 1]$

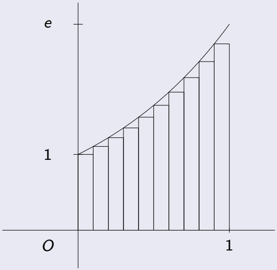
$$x_i' = a + (i-1)\frac{b-a}{n} = 0 + (i-1)\frac{1-0}{n} = \frac{i-1}{n} \quad (1 \leq i \leq n)$$

$$\boxed{n = 10}$$

Méthode des rectangles à gauche

Exemple : $f(x) = e^x$ sur $[0, 1]$

$$x_i' = a + (i-1)\frac{b-a}{n} = 0 + (i-1)\frac{1-0}{n} = \frac{i-1}{n} \quad (1 \leq i \leq n)$$



$\boxed{n = 10}$

Méthode des rectangles à gauche

Exemple : $f(x) = e^x$ sur $[0, 1]$

Méthode des rectangles à gauche

Exemple : $f(x) = e^x$ sur $[0, 1]$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i-1}{n}\right)$$

Méthode des rectangles à gauche

Exemple : $f(x) = e^x$ sur $[0, 1]$

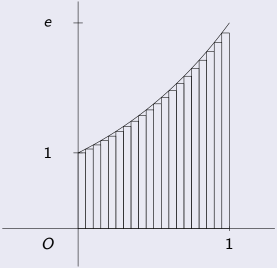
$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i-1}{n}\right)$$

$\boxed{n = 20}$

Méthode des rectangles à gauche

Exemple : $f(x) = e^x$ sur $[0, 1]$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i-1}{n}\right)$$



$\boxed{n = 20}$

Méthode des rectangles à gauche

R3.08 Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Exemple : $f(x) = e^x$ sur $[0, 1]$

Méthode des rectangles à gauche

Exemple : $f(x) = e^x$ sur $[0,1]$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i-1}{n}\right)$$

Méthode des rectangles à gauche

Exemple : $f(x) = e^x$ sur $[0, 1]$

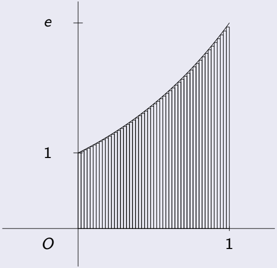
$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i-1}{n}\right)$$

$$\boxed{n = 50}$$

Méthode des rectangles à gauche

Exemple : $f(x) = e^x$ sur $[0, 1]$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i-1}{n}\right)$$



$\boxed{n = 50}$

Méthode des rectangles à droite

Exemple : $f(x) = e^x$ sur $[0, 1]$

Méthode des rectangles à droite

Exemple : $f(x) = e^x$ sur $[0, 1]$

$$x_i' = a + i\frac{b-a}{n} = 0 + i\frac{1-0}{n} = \frac{i}{n} \; (1 \leq i \leq n)$$

Méthode des rectangles à droite

R3.08 Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Exemple : $f(x) = e^x$ sur $[0,1]$

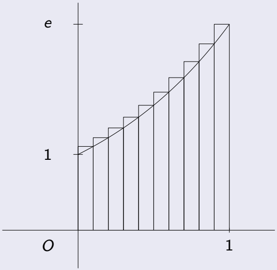
$$x_i' = a + i\frac{b-a}{n} = 0 + i\frac{1-0}{n} = \frac{i}{n} \; (1 \leq i \leq n)$$

$\boxed{n = 10}$

Méthode des rectangles à droite

Exemple : $f(x) = e^x$ sur $[0, 1]$

$$x_i' = a + i\frac{b-a}{n} = 0 + i\frac{1-0}{n} = \frac{i}{n} \ (1 \leq i \leq n)$$



$\boxed{n = 10}$

Méthode des rectangles à droite

Exemple : $f(x) = e^x$ sur $[0, 1]$

Méthode des rectangles à droite

Exemple : $f(x) = e^x$ sur $[0, 1]$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)$$

Méthode des rectangles à droite

Exemple : $f(x) = e^x$ sur $[0, 1]$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)$$

$$\boxed{n = 20}$$

Méthode des rectangles à droite

R3.08 Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Plan

Intégration

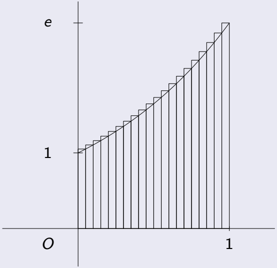
Intégrale généralisée

Compléments

Annexe

Exemple : $f(x) = e^x$ sur $[0, 1]$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)$$



$\boxed{n = 20}$

Méthode des rectangles à droite

Exemple : $f(x) = e^x$ sur $[0, 1]$

Méthode des rectangles à droite

Exemple : $f(x) = e^x$ sur $[0, 1]$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)$$

Méthode des rectangles à droite

Exemple : $f(x) = e^x$ sur $[0,1]$

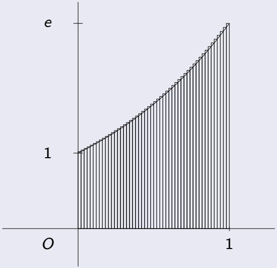
$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)$$

$$\boxed{n = 50}$$

Méthode des rectangles à droite

Exemple : $f(x) = e^x$ sur $[0, 1]$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)$$



$\boxed{n = 50}$

Méthode des rectangles : point médian

Exemple : $f(x) = e^x$ sur $[0, 1]$

Méthode des rectangles : point médian

Exemple : $f(x) = e^x$ sur $[0, 1]$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{2i-1}{2n}\right)$$

Méthode des rectangles : point médian

Exemple : $f(x) = e^x$ sur $[0, 1]$

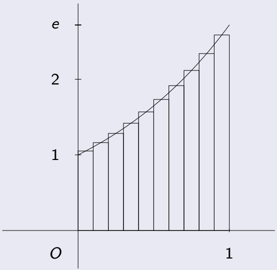
$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{2i-1}{2n}\right)$$

$$\boxed{n = 10}$$

Méthode des rectangles : point médian

Exemple : $f(x) = e^x$ sur $[0, 1]$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{2i-1}{2n}\right)$$



$\boxed{n = 10}$

Méthode des rectangles : point médian

Exemple : $f(x) = e^x$ sur $[0, 1]$

Méthode des rectangles : point médian

Exemple : $f(x) = e^x$ sur $[0, 1]$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{2i-1}{2n}\right)$$

Méthode des rectangles : point médian

Exemple : $f(x) = e^x$ sur $[0, 1]$

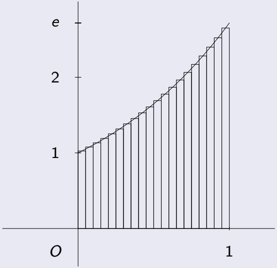
$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{2i-1}{2n}\right)$$

$$\boxed{n = 20}$$

Méthode des rectangles : point médian

Exemple : $f(x) = e^x$ sur $[0, 1]$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{2i-1}{2n}\right)$$



$\boxed{n = 20}$

Méthode des rectangles : point médian

Exemple : $f(x) = e^x$ sur $[0, 1]$

Méthode des rectangles : point médian

Exemple : $f(x) = e^x$ sur $[0, 1]$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{2i-1}{2n}\right)$$

Méthode des rectangles : point médian

Exemple : $f(x) = e^x$ sur $[0, 1]$

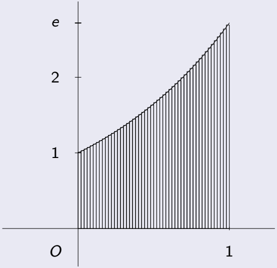
$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{2i-1}{2n}\right)$$

$$\boxed{n = 50}$$

Méthode des rectangles : point médian

Exemple : $f(x) = e^x$ sur $[0, 1]$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{2i-1}{2n}\right)$$



$\boxed{n = 50}$

Méthodes des rectangles

Cas des fonctions monotones

Méthodes des rectangles

Cas des fonctions monotones

Si f est croissante sur $[a, b]$ alors

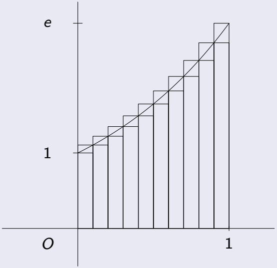
$$\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(a+(i-1)\frac{b-a}{n}\right) \leq \int_a^b f(t)\,dt \leq \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(a+i\frac{b-a}{n}\right)$$

Méthodes des rectangles

Cas des fonctions monotones

Si f est croissante sur $[a, b]$ alors

$$\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(a+(i-1)\frac{b-a}{n}\right) \leq \int_a^b f(t)\,dt \leq \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(a+i\frac{b-a}{n}\right)$$



Méthodes des rectangles

Cas des fonctions monotones

Méthodes des rectangles

Cas des fonctions monotones

Si f est décroissante sur $[a, b]$ alors

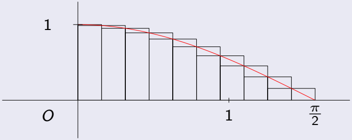
$$\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right) \leq \int_a^b f(t)\,dt \leq \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(a + (i-1)\frac{b-a}{n}\right)$$

Méthodes des rectangles

Cas des fonctions monotones

Si f est décroissante sur $[a, b]$ alors

$$\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(a+i\frac{b-a}{n}\right) \leq \int_a^b f(t)\,dt \leq \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(a+(i-1)\frac{b-a}{n}\right)$$



Méthode des trapèzes

Méthode

Méthode des trapèzes

Méthode

Sur $[x_i, x_{i+1}]$, on remplace $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ par $(x_{i+1} - x_i)\,\dfrac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2}$.

Méthode des trapèzes

Méthode

Sur $[x_i, x_{i+1}]$, on remplace $\int_a^b f(t)\,dt$ par $(x_{i+1} - x_i)\,\dfrac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2}$.

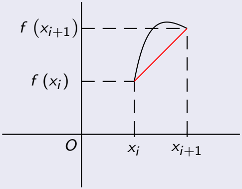
On obtient alors $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} \cdot \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2} = \frac{b-a}{n} \cdot \frac{f(a) + f(b)}{2} + \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n-1} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right)$.

Méthode des trapèzes

Méthode

Méthode des trapèzes

Méthode



Méthode des trapèzes

Exemple : $f(x) = e^x$ sur $[0, 1]$

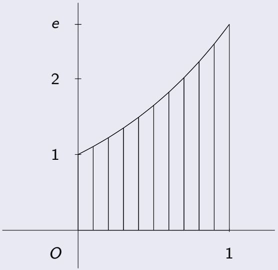
Méthode des trapèzes

Exemple : $f(x) = e^x$ sur $[0, 1]$

$\boxed{n = 10}$

Méthode des trapèzes

Exemple : $f(x) = e^x$ sur $[0, 1]$



$\boxed{n = 10}$

Méthode des trapèzes

Exemple : $f(x) = e^x$ sur $[0, 1]$

Méthode des trapèzes

Exemple : $f(x) = e^x$ sur $[0, 1]$

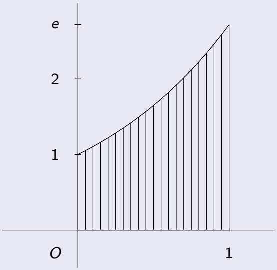
$\boxed{n = 20}$

Méthode des trapèzes

R3.08 Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Exemple : $f(x) = e^x$ sur $[0, 1]$



$\boxed{n = 20}$

Méthode des trapèzes

Exemple : $f(x) = e^x$ sur $[0, 1]$

Méthode des trapèzes

Exemple : $f(x) = e^x$ sur $[0, 1]$

$\boxed{n = 50}$

Méthode des trapèzes

R3.08 Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Plan

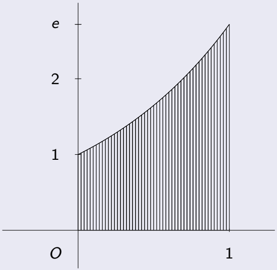
Intégration

Intégrale généralisée

Compléments

Annexe

Exemple : $f(x) = e^x$ sur $[0, 1]$



$\boxed{n = 50}$

Calcul approché : erreur

Notation de Landau

Calcul approché : erreur

Notation de Landau

Définition : une fonction $g(n)$ est dite $O\left(f(n)\right)$ (ou en $O\left(f(n)\right)$, ou $g = O(f)$) si il existe un entier naturel N et une constante positive k tels que :

Calcul approché : erreur

Notation de Landau

Définition : une fonction $g(n)$ est dite $O\,(f\,(n))$ (ou en $O\,(f\,(n))$, ou $g = O(f)$) si il existe un entier naturel N et une constante positive k tels que :
$\forall n \in \mathbb{N}\ n > N \Rightarrow 0 \leq g(n) \leq kf(n)$

Calcul approché : erreur

Notation de Landau

Définition : une fonction $g(n)$ est dite $O\left(f(n)\right)$ (ou en $O\left(f(n)\right)$, ou $g = O(f)$) si il existe un entier naturel N et une constante positive k tels que :
$\forall n \in \mathbb{N} \; n > N \Rightarrow 0 \leq g(n) \leq kf(n)$
Interprétation : pour n assez grand, $g(n)$ est dominé par $f(n)$.

Calcul approché : erreur

Notation de Landau

Définition : une fonction $g(n)$ est dite $O\left(f(n)\right)$ (ou en $O\left(f(n)\right)$, ou $g = O(f)$) si il existe un entier naturel N et une constante positive k tels que :
$\forall n \in \mathbb{N}\ n > N \Rightarrow 0 \leq g(n) \leq kf(n)$
Interprétation : pour n assez grand, $g(n)$ est dominé par $f(n)$.
Exemple : $\dfrac{(n-1)n}{2}$ est $O(n^2)$.

Calcul approché : erreur

Notation de Landau

Définition : une fonction $g(n)$ est dite $O\left(f(n)\right)$ (ou en $O\left(f(n)\right)$, ou $g = O(f)$) si il existe un entier naturel N et une constante positive k tels que :

$\forall n \in \mathbb{N} \; n > N \Rightarrow 0 \leq g(n) \leq kf(n)$

Interprétation : pour n assez grand, $g(n)$ est dominé par $f(n)$.

Exemple : $\dfrac{(n-1)n}{2}$ est $O(n^2)$.

Démonstration : $\dfrac{(n-1)n}{2} \leq \dfrac{1}{2} \times n^2$

Calcul approché : erreur

Notation de Landau

Définition : une fonction $g(n)$ est dite $O(f(n))$ (ou en $O(f(n))$, ou $g = O(f)$) si il existe un entier naturel N et une constante positive k tels que :
$\forall n \in \mathbb{N}\ n > N \Rightarrow 0 \leq g(n) \leq kf(n)$
Interprétation : pour n assez grand, $g(n)$ est dominé par $f(n)$.

Exemple : $\dfrac{(n-1)n}{2}$ est $O(n^2)$.

Démonstration : $\dfrac{(n-1)n}{2} \leq \dfrac{1}{2} \times n^2$

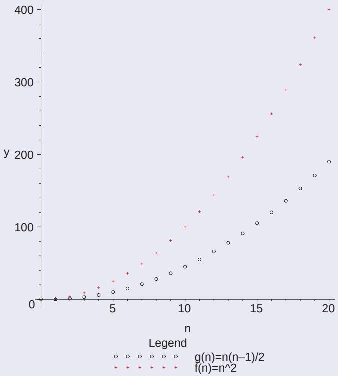
Notation de Edmund LANDAU : mathématicien allemand (1877-1938).

Calcul approché : erreur

$$\frac{(n-1)n}{2} = O(n^2)$$

Calcul approché : erreur

$\dfrac{(n-1)n}{2} = O(n^2)$



Calcul approché : erreur

Rectangles à gauche ou à droite

Calcul approché : erreur

Rectangles à gauche ou à droite

Si f est continûment dérivable sur $[a, b]$ et vérifiant : $\exists M \; \forall t \in [a, b] \; \left|f'(t)\right| \leq M$ alors

Calcul approché : erreur

Rectangles à gauche ou à droite

Si f est continûment dérivable sur $[a, b]$ et vérifiant : $\exists M \; \forall t \in [a, b] \; |f'(t)| \leq M$ alors

$$|\Delta_{Rd}(f, n)| = \left| \int_a^b f(t)\, dt - \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right) \right| \leq \frac{M(b-a)^2}{n}$$

Calcul approché : erreur

Rectangles à gauche ou à droite

Si f est continûment dérivable sur $[a, b]$ et vérifiant : $\exists M \; \forall t \in [a, b] \; |f'(t)| \leq M$ alors

$$|\Delta_{Rd}(f, n)| = \left| \int_a^b f(t)\, dt - \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right) \right| \leq \frac{M(b-a)^2}{n}$$

On dit que l'erreur est en $O(1/n)$ (méthode d'ordre 1).

Calcul approché : erreur

Méthode du point médian

Calcul approché : erreur

Méthode du point médian

Si f est deux fois continûment dérivable sur $[a, b]$

Calcul approché : erreur

Méthode du point médian

Si f est deux fois continûment dérivable sur $[a, b]$ et vérifiant : $\exists M\ \forall t \in [a, b]\ \left|f''(t)\right| \leq M$ alors

Calcul approché : erreur

R3.08 Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Plan

Intégration

Intégrale généralisée

Compléments

Annexe

Méthode du point médian

Si f est deux fois continûment dérivable sur $[a, b]$ et vérifiant : $\exists M \ \forall t \in [a, b] \ |f''(t)| \leq M$ alors

$$|\Delta_{Rm}(f, n)| = \left| \int_a^b f(t)\, dt - \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f\left(a + \frac{2i-1}{2} \frac{b-a}{n}\right) \right| \leq \frac{M(b-a)^3}{24n^2}$$

Calcul approché : erreur

Méthode du point médian

Si f est deux fois continûment dérivable sur $[a, b]$ et vérifiant : $\exists M\ \forall t \in [a, b]\ \left|f''(t)\right| \leq M$ alors

$$|\Delta_{Rm}(f, n)| = \left| \int_a^b f(t)\,dt - \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f\left(a + \frac{2i-1}{2}\frac{b-a}{n}\right) \right| \leq \frac{M(b-a)^3}{24n^2}$$

L'erreur est en $O(1/n^2)$ (méthode d'ordre 2).

Calcul approché : erreur

Méthode des trapèzes

Calcul approché : erreur

Méthode des trapèzes

Si f est deux fois continûment dérivable sur $[a, b]$

Calcul approché : erreur

Méthode des trapèzes

Si f est deux fois continûment dérivable sur $[a, b]$ et vérifiant : $\exists M \; \forall t \in [a, b] \; |f''(t)| \leq M$ alors

Calcul approché : erreur

Méthode des trapèzes

Si f est deux fois continûment dérivable sur $[a, b]$ et vérifiant : $\exists M\ \forall t \in [a, b]\ |f''(t)| \leq M$ alors

$$|\Delta_T(f, n)| = \left| \int_a^b f(t)\, dt - \frac{b-a}{n} . \frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{b-a}{n} . \sum_{i=1}^{n-1} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right) \right| \leq \frac{M(b-a)^3}{12n^2}$$

Calcul approché : erreur

Méthode des trapèzes

Si f est deux fois continûment dérivable sur $[a, b]$ et vérifiant : $\exists M\ \forall t \in [a, b]\ \left|f''(t)\right| \leq M$ alors

$$|\Delta_T(f, n)| = \left|\int_a^b f(t)\,dt - \frac{b-a}{n}.\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{b-a}{n}.\sum_{i=1}^{n-1} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right)\right| \leq \frac{M(b-a)^3}{12n^2}$$

L'erreur est en $O(1/n^2)$ (méthode d'ordre 2).

Interprétation graphique

Cas des fonctions positives

Interprétation graphique

Cas des fonctions positives

Dans le cas d'une fonction positive f, $\int_a^b f(t)dt$ est l'aire de la surface délimitée par l'axe des abscisses, les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ et la courbe représentative de f.

Interprétation graphique

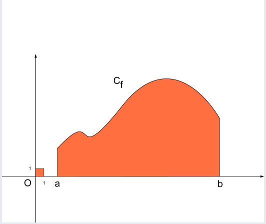
Cas des fonctions positives

Dans le cas d'une fonction positive f, $\int_a^b f(t)dt$ est l'aire de la surface délimitée par l'axe des abscisses, les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ et la courbe représentative de f.
L'unité d'aire est l'aire du rectangle ou du carré unité défini par l'origine du repère O et les points $I(1, 0)$ et $J(0, 1)$.

Interprétation graphique

Cas des fonctions positives

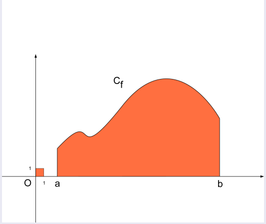
Dans le cas d'une fonction positive f, $\int_a^b f(t)dt$ est l'aire de la surface délimitée par l'axe des abscisses, les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ et la courbe représentative de f.
L'unité d'aire est l'aire du rectangle ou du carré unité défini par l'origine du repère O et les points $I(1,0)$ et $J(0,1)$.



Interprétation graphique

Cas des fonctions positives

Dans le cas d'une fonction positive f, $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ est l'aire de la surface délimitée par l'axe des abscisses, les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ et la courbe représentative de f.
L'unité d'aire est l'aire du rectangle ou du carré unité défini par l'origine du repère O et les points $I(1, 0)$ et $J(0, 1)$.



Dans le cas d'une fonction négative, l'aire est comptée négativement.

Propriétés

R3.08 Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Relation de Chasles

Propriétés

Relation de Chasles

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$.

Propriétés

Relation de Chasles

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$.

Pour tout $c \in [a, b]$, on a :

Propriétés

Relation de Chasles

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$.

Pour tout $c \in [a, b]$, on a : $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

Primitive

Définition

Primitive

Définition

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$.

Primitive

Définition

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$.
Une fonction F continue sur $[a, b]$ telle que pour tout $x \in]a, b[$
$F'(x) = f(x)$ est dite **primitive** de f sur $[a, b]$.

Primitive

Définition

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$.
Une fonction F continue sur $[a, b]$ telle que pour tout $x \in]a, b[$
$F'(x) = f(x)$ est dite primitive de f sur $[a, b]$.

Propriétés

Primitive

Définition

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$.
Une fonction F continue sur $[a, b]$ telle que pour tout $x \in]a, b[$
$F'(x) = f(x)$ est dite primitive de f sur $[a, b]$.

Propriétés

- Si F et G sont deux primitives de f sur $[a, b]$, alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $G(x) = F(x) + \lambda$.

Primitive

Définition

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$.
Une fonction F continue sur $[a, b]$ telle que pour tout $x \in]a, b[$
$F'(x) = f(x)$ est dite primitive de f sur $[a, b]$.

Propriétés

- Si F et G sont deux primitives de f sur $[a, b]$, alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $G(x) = F(x) + \lambda$.
- Soit f une fonction continue sur $[a, b]$.

Primitive

Définition

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$.
Une fonction F continue sur $[a, b]$ telle que pour tout $x \in]a, b[$
$F'(x) = f(x)$ est dite primitive de f sur $[a, b]$.

Propriétés

- Si F et G sont deux primitives de f sur $[a, b]$, alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $G(x) = F(x) + \lambda$.
- Soit f une fonction continue sur $[a, b]$.

La fonction définie sur $[a, b]$ par $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ est une primitive de f sur $[a, b]$.

Primitive

Définition

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$.
Une fonction F continue sur $[a, b]$ telle que pour tout $x \in]a, b[$
$F'(x) = f(x)$ est dite primitive de f sur $[a, b]$.

Propriétés

- Si F et G sont deux primitives de f sur $[a, b]$, alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $G(x) = F(x) + \lambda$.
- Soit f une fonction continue sur $[a, b]$.

La fonction définie sur $[a, b]$ par $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ est une primitive de f sur $[a, b]$.
C'est la primitive de f s'annulant en a.

Primitive

Théorème fondamental

Primitive

Théorème fondamental

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$.

Primitive

Théorème fondamental

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$.
Si F est une primitive de f sur $[a, b]$ alors

Primitive

Théorème fondamental

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$.
Si F est une primitive de f sur $[a, b]$ alors
$\int_a^b f(t)dt = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a)$.

Primitive

Théorème fondamental

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$.
Si F est une primitive de f sur $[a, b]$ alors

$$\int_a^b f(t)dt = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Exemple

Primitive

Théorème fondamental

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$.
Si F est une primitive de f sur $[a, b]$ alors
$\int_a^b f(t)dt = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a)$.

Exemple

$$\int_0^1 e^t dt = [e^t]_0^1 = e^1 - e^0 = e - 1$$

Primitive

Primitives usuelles

Primitive

Primitives usuelles

Fonction f	Primitive F
0	α
1	x
x	$\frac{x^2}{2}$
$x^\alpha \ (\alpha \neq -1)$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$
e^x	e^x
$\cos x$	$\sin x$
$\sin x$	$-\cos x$
$e^{\alpha x} \ (\alpha \neq 0)$	$\frac{e^{\alpha x}}{\alpha}$
$\cos \alpha x \ (\alpha \neq 0)$	$\frac{\sin \alpha x}{\alpha}$
$\sin \alpha x \ (\alpha \neq 0)$	$\frac{-\cos \alpha x}{\alpha}$

Primitive

Opérations

Primitive

Opérations

Fonction f	Primitive F
$f+g$	$F+G$
$f-g$	$F-G$
αf	αF
$\alpha f+\beta g$	$\alpha F+\beta G$

Primitive

Linéarité

Primitive

Linéarité

Soit f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$. Pour tous réels α et β on a

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) \ dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$$

Primitive

Linéarité

Soit f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$. Pour tous réels α et β on a

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) \, dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$$

Inégalités

Primitive

Linéarité

Soit f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$. Pour tous réels α et β on a

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\ dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$$

Inégalités

Soit f une fonction continue et positive sur $[a, b]$. On a alors :

Primitive

Linéarité

Soit f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$. Pour tous réels α et β on a

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\ dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$$

Inégalités

Soit f une fonction continue et positive sur $[a, b]$. On a alors :

- la fonction définie sur $[a, b]$: $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ est croissante sur $[a, b]$.

Primitive

Linéarité

Soit f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$. Pour tous réels α et β on a

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\ dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$$

Inégalités

Soit f une fonction continue et positive sur $[a,b]$. On a alors :

- la fonction définie sur $[a,b]$: $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ est croissante sur $[a,b]$.

- $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = 0$ si et seulement si f est la fonction nulle sur $[a,b]$.

Primitive

Linéarité

Soit f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$. Pour tous réels α et β on a
$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\ dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$$

Inégalités

Soit f une fonction continue et positive sur $[a, b]$. On a alors :

- la fonction définie sur $[a, b]$: $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ est croissante sur $[a, b]$.

- $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = 0$ si et seulement si f est la fonction nulle sur $[a, b]$.

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$ telles que pour tout $x \in [a, b]$ $f(x) \leq g(x)$. On a alors

Primitive

Linéarité

Soit f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$. Pour tous réels α et β on a

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\ dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$$

Inégalités

Soit f une fonction continue et positive sur $[a, b]$. On a alors :

- la fonction définie sur $[a, b]$: $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ est croissante sur $[a, b]$.

- $\int_a^b f(x)dx = 0$ si et seulement si f est la fonction nulle sur $[a, b]$.

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$ telles que pour tout $x \in [a, b]$ $f(x) \leq g(x)$. On a alors

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

Primitive

Valeur absolue

Primitive

Valeur absolue

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$. On a

Primitive

Valeur absolue

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$. On a

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

Primitive

Valeur absolue

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$. On a

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

Inégalité de Cauchy Schwarz

Primitive

Valeur absolue

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$. On a

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

Inégalité de Cauchy Schwarz

Soit f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$.

Primitive

Valeur absolue

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$. On a

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

Inégalité de Cauchy Schwarz

Soit f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$.

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2(x)dx\right)\left(\int_a^b g^2(x)dx\right).$$

Cas des fonctions continues par morceaux

Définitions

Cas des fonctions continues par morceaux

Définitions

Une fonction f définie sur $[a, b]$ est dite continue par morceaux s'il existe $n + 1$ réels de $[a, b]$:

Cas des fonctions continues par morceaux

Définitions

Une fonction f définie sur $[a, b]$ est dite continue par morceaux s'il existe $n+1$ réels de $[a, b]$: $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_{n-1} < a_n = b$ et n fonctions f_i continues sur $[a_{i-1}, a_i]$ tels que pour tout entier i, $1 \leq i \leq n$ et tout réel $x \in]a_{i-1}, a_i[$ on ait $f(x) = f_i(x)$.

Cas des fonctions continues par morceaux

Exemples

Cas des fonctions continues par morceaux

Exemples

- Toute fonction continue sur $[a, b]$.

Cas des fonctions continues par morceaux

Exemples

- Toute fonction continue sur $[a, b]$.

- f définie sur $[0, 2]$ par

Cas des fonctions continues par morceaux

Exemples

- Toute fonction continue sur $[a, b]$.

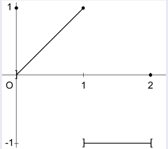
- f définie sur $[0, 2]$ par $\begin{cases} f(0) = 1 & \\ f(x) = x & \text{sur }]0, 1] \\ f(x) = -1 & \text{sur }]1, 2[\\ f(2) = 0 & \end{cases}$

Cas des fonctions continues par morceaux

Exemples

- Toute fonction continue sur $[a, b]$.

- f définie sur $[0, 2]$ par $\begin{cases} f(0) = 1 & \\ f(x) = x & \text{sur }]0,1] \\ f(x) = -1 & \text{sur }]1,2[\\ f(2) = 0 & \end{cases}$



Cas des fonctions continues par morceaux

Propriété

Cas des fonctions continues par morceaux

Propriété

Soit f et g sont deux fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$ et α et β deux réels.

Cas des fonctions continues par morceaux

Propriété

Soit f et g sont deux fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$ et α et β deux réels.
$\alpha f + \beta g$, fg et $|f|$ sont des fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$.

Cas des fonctions continues par morceaux

Propriété

Soit f et g sont deux fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$ et α et β deux réels.
$\alpha f + \beta g$, fg et $|f|$ sont des fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$.

Intégrale d'une fonction continue par morceaux

Cas des fonctions continues par morceaux

Propriété

Soit f et g sont deux fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$ et α et β deux réels.
$\alpha f + \beta g$, fg et $|f|$ sont des fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$.

Intégrale d'une fonction continue par morceaux

Avec les notations précédentes, on définit l'intégrale d'une fonction continue par morceaux f sur $[a, b]$ par

Cas des fonctions continues par morceaux

Propriété

Soit f et g sont deux fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$ et α et β deux réels.
$\alpha f + \beta g$, fg et $|f|$ sont des fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$.

Intégrale d'une fonction continue par morceaux

Avec les notations précédentes, on définit l'intégrale d'une fonction continue par morceaux f sur $[a, b]$ par $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{a_{i-1}}^{a_i} f_i(x)dx$

Cas des fonctions continues par morceaux

Exemple

Cas des fonctions continues par morceaux

Exemple

f définie sur $[0,2]$ par $\begin{cases} f(0) = 1 & \\ f(x) = x & \text{sur }]0,1] \\ f(x) = -1 & \text{sur }]1,2[\\ f(2) = 0 & \end{cases}$

Cas des fonctions continues par morceaux

Exemple

f définie sur $[0,2]$ par $\begin{cases} f(0) = 1 & \\ f(x) = x & \text{sur }]0,1] \\ f(x) = -1 & \text{sur }]1,2[\\ f(2) = 0 & \end{cases}$

$$\int_0^2 f(x)dx$$

Cas des fonctions continues par morceaux

Exemple

$$f \text{ définie sur } [0,2] \text{ par } \begin{cases} f(0) = 1 & \\ f(x) = x & \text{sur }]0,1] \\ f(x) = -1 & \text{sur }]1,2[\\ f(2) = 0 & \end{cases}$$

$$\int_0^2 f(x)dx = \int_0^1 xdx + \int_1^2 (-1)dx$$

Cas des fonctions continues par morceaux

Exemple

f définie sur $[0,2]$ par $\begin{cases} f(0) = 1 & \\ f(x) = x & \text{sur }]0,1] \\ f(x) = -1 & \text{sur }]1,2[\\ f(2) = 0 & \end{cases}$

$$\int_0^2 f(x)dx = \int_0^1 xdx + \int_1^2 (-1)dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 + [-x]_1^2$$

Cas des fonctions continues par morceaux

Exemple

f définie sur $[0,2]$ par $\begin{cases} f(0) = 1 & \\ f(x) = x & \text{sur }]0,1] \\ f(x) = -1 & \text{sur }]1,2[\\ f(2) = 0 & \end{cases}$

$$\int_0^2 f(x)dx = \int_0^1 xdx + \int_1^2 (-1)dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 + [-x]_1^2 = \frac{1}{2} + (-2-(-1)) = -\frac{1}{2}$$

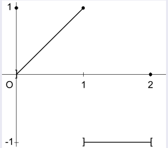
Cas des fonctions continues par morceaux

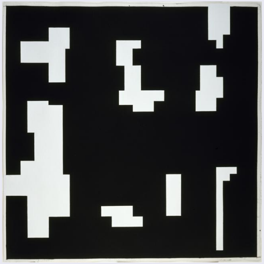
Exemple

f définie sur $[0,2]$ par $\begin{cases} f(0) = 1 & \\ f(x) = x & \text{sur }]0,1] \\ f(x) = -1 & \text{sur }]1,2[\\ f(2) = 0 & \end{cases}$

$$\int_0^2 f(x)dx = \int_0^1 xdx + \int_1^2 (-1)dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 + [-x]_1^2 = \frac{1}{2} + (-2-(-1)) = -\frac{1}{2}$$





Nombre et hasard (V 154), Aurélie Nemours, 1991

Intégrale généralisée

Cas d'une fonction définie sur un intervalle semi-ouvert

Intégrale généralisée

Cas d'une fonction définie sur un intervalle semi-ouvert

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle semi-ouvert $[a, b[$ $(-\infty < a < b \leq +\infty)$.

Intégrale généralisée

Cas d'une fonction définie sur un intervalle semi-ouvert

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle semi-ouvert $[a, b[$ $(-\infty < a < b \leq +\infty)$.
On dit que l'intégrale de f sur $[a, b[$ est convergente si la fonction F définie sur $[a, b[$ par $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ a une limite finie lorsque x tend vers b.

Intégrale généralisée

Cas d'une fonction définie sur un intervalle semi-ouvert

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle semi-ouvert $[a, b[$ $(-\infty < a < b \leq +\infty)$.
On dit que l'intégrale de f sur $[a, b[$ est convergente si la fonction F définie sur $[a, b[$ par $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ a une limite finie lorsque x tend vers b.
Cette limite est appelée intégrale généralisée de f sur $[a, b[$.

Intégrale généralisée

Cas d'une fonction définie sur un intervalle semi-ouvert

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle semi-ouvert $[a, b[$ $(-\infty < a < b \leq +\infty)$.
On dit que l'intégrale de f sur $[a, b[$ est convergente si la fonction F définie sur $[a, b[$ par $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ a une limite finie lorsque x tend vers b.
Cette limite est appelée intégrale généralisée de f sur $[a, b[$.
Si cette limite n'existe pas, on dit que l'intégrale de f sur $[a, b[$ est divergente.

Intégrale généralisée

Cas d'une fonction définie sur un intervalle semi-ouvert

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle semi-ouvert $[a, b[$ $(-\infty < a < b \leq +\infty)$.
On dit que l'intégrale de f sur $[a, b[$ est convergente si la fonction F définie sur $[a, b[$ par $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ a une limite finie lorsque x tend vers b.
Cette limite est appelée intégrale généralisée de f sur $[a, b[$.
Si cette limite n'existe pas, on dit que l'intégrale de f sur $[a, b[$ est divergente.
De même pour une fonction f définie et continue sur un intervalle semi-ouvert $]a, b]$ $(-\infty \leq a < b < +\infty)$: l'intégrale généralisée de f sur $]a, b]$ est la limite en a, si elle existe, de la fonction définie sur $]a, b]$ par $F(x) = \int_x^b f(t)dt$.

Intégrale généralisée

Notation

Intégrale généralisée

Notation

L'intégrale généralisée de f sur $[a, b[$ ou $]a, b]$ est notée $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$.

Intégrale généralisée

Exemple 1

Intégrale généralisée

Exemple 1

$f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ est continue sur $[1, +\infty[$.

Intégrale généralisée

Exemple 1

$f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ est continue sur $[1, +\infty[$.
Soit $x \geq 1$.

Intégrale généralisée

Exemple 1

$f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ est continue sur $[1, +\infty[$.

Soit $x \geq 1$.

$$F(x) = \int_1^x \frac{1}{t^2} dt =$$

Intégrale généralisée

Exemple 1

$f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ est continue sur $[1, +\infty[$.
Soit $x \geq 1$.
$F(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{1}{t^2} dt = \int_1^x t^{-2} dt$

Intégrale généralisée

Exemple 1

$f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ est continue sur $[1, +\infty[$.
Soit $x \geq 1$.

$$F(x) = \int_1^x \frac{1}{t^2} dt = \int_1^x t^{-2} dt = \left[\frac{t^{-2+1}}{-2+1} \right]_1^x$$

Intégrale généralisée

Exemple 1

$f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ est continue sur $[1, +\infty[$.
Soit $x \geq 1$.

$$F(x) = \int_1^x \frac{1}{t^2} dt = \int_1^x t^{-2} dt = \left[\frac{t^{-2+1}}{-2+1}\right]_1^x = \left[\frac{t^{-1}}{-1}\right]_1^x$$

Intégrale généralisée

Exemple 1

$f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ est continue sur $[1, +\infty[$.
Soit $x \geq 1$.

$$F(x) = \int_1^x \frac{1}{t^2} dt = \int_1^x t^{-2} dt = \left[\frac{t^{-2+1}}{-2+1}\right]_1^x = \left[\frac{t^{-1}}{-1}\right]_1^x = \left[-\frac{1}{t}\right]_1^x$$

Intégrale généralisée

Exemple 1

$f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ est continue sur $[1, +\infty[$.
Soit $x \geq 1$.
$F(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{1}{t^2} dt = \int_1^x t^{-2} dt = \left[\frac{t^{-2+1}}{-2+1}\right]_1^x = \left[\frac{t^{-1}}{-1}\right]_1^x = \left[-\frac{1}{t}\right]_1^x =$
$-\dfrac{1}{x} - \left(-\dfrac{1}{1}\right)$

Intégrale généralisée

R3.08 Probabilités
Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Plan
Intégration
Intégrale généralisée
Compléments
Annexe

Exemple 1

$f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ est continue sur $[1, +\infty[$.
Soit $x \geq 1$.
$F(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{1}{t^2}dt = \int_1^x t^{-2}dt = \left[\frac{t^{-2+1}}{-2+1}\right]_1^x = \left[\frac{t^{-1}}{-1}\right]_1^x = \left[-\frac{1}{t}\right]_1^x =$
$-\dfrac{1}{x} - \left(-\dfrac{1}{1}\right) = 1 - \dfrac{1}{x}$

Intégrale généralisée

Exemple 1

$f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ est continue sur $[1, +\infty[$.
Soit $x \geq 1$.
$F(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{1}{t^2} dt = \int_1^x t^{-2} dt = \left[\frac{t^{-2+1}}{-2+1}\right]_1^x = \left[\frac{t^{-1}}{-1}\right]_1^x = \left[-\frac{1}{t}\right]_1^x =$
$-\dfrac{1}{x} - \left(-\dfrac{1}{1}\right) = 1 - \dfrac{1}{x}$
$\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0.$

Intégrale généralisée

Exemple 1

$f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ est continue sur $[1, +\infty[$.

Soit $x \geq 1$.

$$F(x) = \int_1^x \frac{1}{t^2} dt = \int_1^x t^{-2} dt = \left[\frac{t^{-2+1}}{-2+1}\right]_1^x = \left[\frac{t^{-1}}{-1}\right]_1^x = \left[-\frac{1}{t}\right]_1^x =$$

$$-\frac{1}{x} - \left(-\frac{1}{1}\right) = 1 - \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Donc $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \int_1^x \frac{1}{t^2} dt = \lim_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right) = 1$

Intégrale généralisée

Exemple 1

$f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ est continue sur $[1, +\infty[$.
Soit $x \geq 1$.

$$F(x) = \int_1^x \frac{1}{t^2} dt = \int_1^x t^{-2} dt = \left[\frac{t^{-2+1}}{-2+1}\right]_1^x = \left[\frac{t^{-1}}{-1}\right]_1^x = \left[-\frac{1}{t}\right]_1^x = -\frac{1}{x} - \left(-\frac{1}{1}\right) = 1 - \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Donc $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \int_1^x \frac{1}{t^2} dt = \lim_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right) = 1$

L'intégrale de f sur $[1, +\infty[$ est donc convergente

Intégrale généralisée

Exemple 1

$f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ est continue sur $[1, +\infty[$.

Soit $x \geq 1$.

$F(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{1}{t^2} dt = \int_1^x t^{-2} dt = \left[\frac{t^{-2+1}}{-2+1}\right]_1^x = \left[\frac{t^{-1}}{-1}\right]_1^x = \left[-\frac{1}{t}\right]_1^x =$
$-\dfrac{1}{x} - \left(-\dfrac{1}{1}\right) = 1 - \dfrac{1}{x}$

$\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0.$

Donc $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \int_1^x \frac{1}{t^2} dt = \lim_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right) = 1$

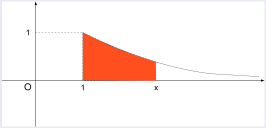
L'intégrale de f sur $[1, +\infty[$ est donc convergente et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2} = 1$

Intégrale généralisée

Interprétation graphique

Intégrale généralisée

Interprétation graphique



Intégrale généralisée

Exemple 2

Intégrale généralisée

Exemple 2

$f(x) = e^{-x}$ est définie et continue sur $[0, +\infty[$.

Intégrale généralisée

Exemple 2

$f(x) = e^{-x}$ est définie et continue sur $[0, +\infty[$.
Soit $x \in [0, +\infty[$.
$F(x) = \int_0^x e^{-t} dt = \left[-e^{-t}\right]_0^x = -e^{-x} - (-e^{-0}) = 1 - e^{-x}$.

Intégrale généralisée

Exemple 2

$f(x) = e^{-x}$ est définie et continue sur $[0, +\infty[$.
Soit $x \in [0, +\infty[$.
$F(x) = \int_0^x e^{-t}dt = \left[-e^{-t}\right]_0^x = -e^{-x} - (-e^{-0}) = 1 - e^{-x}$.
Or, $1 - e^{-x} \to 1$ lorsque $x \to +\infty$.

Intégrale généralisée

Exemple 2

$f(x) = e^{-x}$ est définie et continue sur $[0, +\infty[$.
Soit $x \in [0, +\infty[$.
$F(x) = \int_0^x e^{-t} dt = \left[-e^{-t}\right]_0^x = -e^{-x} - (-e^{-0}) = 1 - e^{-x}$.
Or, $1 - e^{-x} \to 1$ lorsque $x \to +\infty$.
On en déduit que l'intégrale de $f(x) = e^{-x}$ sur $[0, +\infty[$ est convergente

Intégrale généralisée

Exemple 2

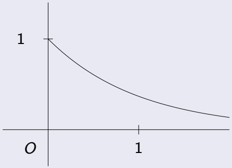
$f(x) = e^{-x}$ est définie et continue sur $[0, +\infty[$.
Soit $x \in [0, +\infty[$.
$F(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-t} dt = \left[-e^{-t}\right]_0^x = -e^{-x} - (-e^{-0}) = 1 - e^{-x}$.
Or, $1 - e^{-x} \to 1$ lorsque $x \to +\infty$.
On en déduit que l'intégrale de $f(x) = e^{-x}$ sur $[0, +\infty[$ est convergente et $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1$.

Intégrale généralisée

Interprétation graphique

Intégrale généralisée

Interprétation graphique



Intégrale généralisée

Exemple 3

Intégrale généralisée

Exemple 3

$f(x) = \dfrac{1}{x}$ est définie et continue sur $]0, 1]$.

Intégrale généralisée

Exemple 3

$f(x) = \dfrac{1}{x}$ est définie et continue sur $]0, 1]$.
Soit $x \in]0, 1]$.

Intégrale généralisée

Exemple 3

$f(x) = \dfrac{1}{x}$ est définie et continue sur $]0,1]$.
Soit $x \in]0,1]$.
$F(x) = \displaystyle\int_x^1 \frac{1}{t}dt$

Intégrale généralisée

Exemple 3

$f(x) = \dfrac{1}{x}$ est définie et continue sur $]0, 1]$.
Soit $x \in]0, 1]$.
$F(x) = \displaystyle\int_x^1 \frac{1}{t} dt = [\ln t]_x^1$

Intégrale généralisée

Exemple 3

$f(x) = \dfrac{1}{x}$ est définie et continue sur $]0,1]$.
Soit $x \in]0,1]$.
$F(x) = \displaystyle\int_x^1 \frac{1}{t}dt = [\ln t]_x^1 = \ln 1 - \ln x$

Intégrale généralisée

Exemple 3

$f(x) = \dfrac{1}{x}$ est définie et continue sur $]0, 1]$.
Soit $x \in]0, 1]$.
$F(x) = \displaystyle\int_x^1 \frac{1}{t} dt = [\ln t]_x^1 = \ln 1 - \ln x = -\ln x.$

Intégrale généralisée

Exemple 3

$f(x) = \dfrac{1}{x}$ est définie et continue sur $]0,1]$.
Soit $x \in]0,1]$.
$F(x) = \displaystyle\int_x^1 \frac{1}{t} dt = [\ln t]_x^1 = \ln 1 - \ln x = -\ln x$.
Or $-\ln x \underset{x \to 0+}{\longrightarrow} +\infty$.

Intégrale généralisée

Exemple 3

$f(x) = \dfrac{1}{x}$ est définie et continue sur $]0,1]$.
Soit $x \in]0,1]$.
$F(x) = \displaystyle\int_x^1 \frac{1}{t}dt = [\ln t]_x^1 = \ln 1 - \ln x = -\ln x$.
Or $-\ln x \underset{x \to 0+}{\longrightarrow} +\infty$.

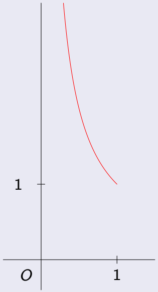
On en déduit que l'intégrale de $f(x) = \dfrac{1}{x}$ sur $]0,1]$: $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t}dt$ est divergente.

Intégrale généralisée

Interprétation graphique

Intégrale généralisée

Interprétation graphique



Intégrales de Riemann

Intégrales de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$

Intégrales de Riemann

Intégrales de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$

α est un réel.

Intégrales de Riemann

R3.08 Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Plan

Intégration

Intégrale généralisée

Compléments

Annexe

Intégrales de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$

α est un réel.

$f(x) = \dfrac{1}{x^\alpha}$ est définie et continue sur $[1, +\infty[$.

Intégrales de Riemann

Intégrales de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$

α est un réel.

$f(x) = \dfrac{1}{x^\alpha}$ est définie et continue sur $[1, +\infty[$.

On note $F_\alpha(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{1}{t^\alpha} dt \ (x \geq 1)$.

Intégrales de Riemann

Intégrales de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$

α est un réel.

$f(x) = \dfrac{1}{x^\alpha}$ est définie et continue sur $[1, +\infty[$.

On note $F_\alpha(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{1}{t^\alpha} dt \ (x \geq 1)$.

$\boxed{\alpha = 1}$

Intégrales de Riemann

Intégrales de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$

α est un réel.

$f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ est définie et continue sur $[1, +\infty[$.

On note $F_\alpha(x) = \int_1^x \frac{1}{t^\alpha} dt$ $(x \geq 1)$.

$\boxed{\alpha = 1}$

$$F_1(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\, dt$$

Intégrales de Riemann

Intégrales de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$

α est un réel.

$f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ est définie et continue sur $[1, +\infty[$.

On note $F_\alpha(x) = \int_1^x \frac{1}{t^\alpha} dt \ (x \geq 1)$.

$\boxed{\alpha = 1}$

$F_1(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\, dt = [\ln t]_1^x$

Intégrales de Riemann

Intégrales de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$

α est un réel.

$f(x) = \dfrac{1}{x^\alpha}$ est définie et continue sur $[1, +\infty[$.

On note $F_\alpha(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{1}{t^\alpha} dt \ (x \geq 1)$.

$\boxed{\alpha = 1}$

$$F_1(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\, dt = [\ln t]_1^x = \ln x - \ln 1$$

Intégrales de Riemann

Intégrales de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$

α est un réel.

$f(x) = \dfrac{1}{x^\alpha}$ est définie et continue sur $[1, +\infty[$.

On note $F_\alpha(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{1}{t^\alpha} dt \ (x \geq 1)$.

$\boxed{\alpha = 1}$

$F_1(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{1}{t}\, dt = [\ln t]_1^x = \ln x - \ln 1 = \ln x \to +\infty$ lorsque $x \to +\infty$.

Intégrales de Riemann

Intégrales de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$

α est un réel.
$f(x) = \dfrac{1}{x^\alpha}$ est définie et continue sur $[1, +\infty[$.
On note $F_\alpha(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{1}{t^\alpha} dt \ (x \geq 1)$.

$\boxed{\alpha = 1}$

$F_1(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{1}{t}\, dt = [\ln t]_1^x = \ln x - \ln 1 = \ln x \to +\infty$ lorsque $x \to +\infty$.
$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t}$ est divergente.

Intégrales de Riemann

Intégrales de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$

Intégrales de Riemann

Intégrales de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$

$\boxed{\alpha \neq 1}$

Intégrales de Riemann

R3.08 Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Plan

Intégration

Intégrale généralisée

Compléments

Annexe

Intégrales de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$

$\boxed{\alpha \neq 1}$

$$F_\alpha(x) = \int_1^x \frac{1}{t^\alpha} dt$$

Intégrales de Riemann

R3.08 Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Plan

Intégration

Intégrale généralisée

Compléments

Annexe

Intégrales de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$

$\boxed{\alpha \neq 1}$

$$F_\alpha(x) = \int_1^x \frac{1}{t^\alpha}\,dt = \left[\frac{1}{1-\alpha}\,\frac{1}{t^{\alpha-1}}\right]_1^x$$

Intégrales de Riemann

R3.08 Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

- Plan
- Intégration
- **Intégrale généralisée**
- Compléments
- Annexe

Intégrales de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$

$\boxed{\alpha \neq 1}$

$$F_\alpha(x) = \int_1^x \frac{1}{t^\alpha} dt = \left[\frac{1}{1-\alpha}\frac{1}{t^{\alpha-1}}\right]_1^x = \frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{1}{x^{\alpha-1}} - \frac{1}{1^{\alpha-1}}\right)$$

Intégrales de Riemann

Intégrales de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$

$\boxed{\alpha \neq 1}$

$$F_\alpha(x) = \int_1^x \frac{1}{t^\alpha}\,dt = \left[\frac{1}{1-\alpha}\,\frac{1}{t^{\alpha-1}}\right]_1^x = \frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{1}{x^{\alpha-1}} - \frac{1}{1^{\alpha-1}}\right) =$$
$$\frac{1}{1-\alpha}\,\frac{1}{x^{\alpha-1}} - \frac{1}{1-\alpha}.$$

Intégrales de Riemann

Intégrales de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$

$\boxed{\alpha \neq 1}$

$F_\alpha(x) = \int_1^x \frac{1}{t^\alpha} dt = \left[\frac{1}{1-\alpha}\frac{1}{t^{\alpha-1}}\right]_1^x = \frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{1}{x^{\alpha-1}} - \frac{1}{1^{\alpha-1}}\right) = \frac{1}{1-\alpha}\frac{1}{x^{\alpha-1}} - \frac{1}{1-\alpha}$.

Si $\alpha < 1$ alors $F_\alpha(x) \to +\infty$ lorsque $x \to +\infty$.

Intégrales de Riemann

Intégrales de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$

$\boxed{\alpha \neq 1}$

$F_\alpha(x) = \int_1^x \frac{1}{t^\alpha} dt = \left[\frac{1}{1-\alpha} \frac{1}{t^{\alpha-1}} \right]_1^x = \frac{1}{1-\alpha} \left(\frac{1}{x^{\alpha-1}} - \frac{1}{1^{\alpha-1}} \right) = \frac{1}{1-\alpha} \frac{1}{x^{\alpha-1}} - \frac{1}{1-\alpha}$.

Si $\alpha < 1$ alors $F_\alpha(x) \to +\infty$ lorsque $x \to +\infty$.

Si $\alpha > 1$ alors $F_\alpha(x) \to -\frac{1}{1-\alpha} = \frac{1}{\alpha - 1}$ lorsque $x \to +\infty$.

Intégrales de Riemann

Intégrales de Riemann $\int_1^{\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$

Intégrales de Riemann

R3.08 Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Plan

Intégration

Intégrale généralisée

Compléments

Annexe

Intégrales de Riemann $\int_1^{\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$

$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ est convergente si et seulement si $\alpha > 1$

Intégrales de Riemann

Intégrales de Riemann $\int_1^{\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$

$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ est convergente si et seulement si $\alpha > 1$

Si $\alpha > 1$ alors $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\, dt = \frac{1}{\alpha - 1}$.

Intégrales de Riemann

Exemples

Intégrales de Riemann

R3.08 Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Exemples

$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\, dt$ est convergente et

Intégrales de Riemann

R3.08 Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Plan

Intégration

Intégrale généralisée

Compléments

Annexe

Exemples

$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\, dt$ est convergente et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\, dt = \frac{1}{2-1} = 1$

Intégrales de Riemann

Exemples

$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt$ est convergente et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt = \frac{1}{2-1} = 1.$

$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt$

Intégrales de Riemann

Exemples

$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt$ est convergente et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt = \frac{1}{2-1} = 1.$

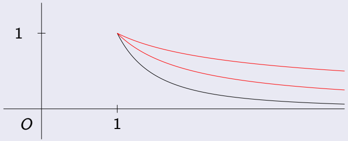
$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}}\,dt$ est divergente.

Intégrales de Riemann

Exemples

$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt$ est convergente et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt = \frac{1}{2-1} = 1.$

$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}}\,dt$ est divergente.



Intégrales de Riemann

Intégrales de Riemann $\displaystyle\int_a^b \frac{dt}{(t-a)^\alpha}$ et $\displaystyle\int_a^b \frac{dt}{(b-t)^\alpha}$

Intégrales de Riemann

Intégrales de Riemann $\displaystyle\int_a^b \frac{dt}{(t-a)^\alpha}$ et $\displaystyle\int_a^b \frac{dt}{(b-t)^\alpha}$

On obtient de même

Intégrales de Riemann

R3.08 Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Plan

Intégration

Intégrale généralisée

Compléments

Annexe

Intégrales de Riemann $\int_a^b \frac{dt}{(t-a)^\alpha}$ et $\int_a^b \frac{dt}{(b-t)^\alpha}$

On obtient de même

$$\boxed{\int_a^b \frac{dt}{(t-a)^\alpha} \text{ et } \int_a^b \frac{dt}{(b-t)^\alpha} \text{ sont convergentes si et seulement si } \alpha < 1.}$$

Intégrales de Riemann

Intégrales de Riemann $\int_a^b \frac{dt}{(t-a)^\alpha}$ et $\int_a^b \frac{dt}{(b-t)^\alpha}$

On obtient de même

$$\boxed{\int_a^b \frac{dt}{(t-a)^\alpha} \text{ et } \int_a^b \frac{dt}{(b-t)^\alpha} \text{ sont convergentes si et seulement si } \alpha < 1.}$$

Exemples

Intégrales de Riemann

Intégrales de Riemann $\int_a^b \frac{dt}{(t-a)^\alpha}$ et $\int_a^b \frac{dt}{(b-t)^\alpha}$

On obtient de même

$$\boxed{\int_a^b \frac{dt}{(t-a)^\alpha} \text{ et } \int_a^b \frac{dt}{(b-t)^\alpha} \text{ sont convergentes si et seulement si } \alpha < 1.}$$

Exemples

$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^2}dt = \int_0^1 \frac{dt}{(t-0)^2}$ est divergente : $\alpha = 2 \geq 1$.

Intégrales de Riemann

Intégrales de Riemann $\int_a^b \frac{dt}{(t-a)^\alpha}$ et $\int_a^b \frac{dt}{(b-t)^\alpha}$

On obtient de même

$$\boxed{\int_a^b \frac{dt}{(t-a)^\alpha} \text{ et } \int_a^b \frac{dt}{(b-t)^\alpha} \text{ sont convergentes si et seulement si } \alpha < 1.}$$

Exemples

$\int_0^1 \frac{1}{t^2}dt = \int_0^1 \frac{dt}{(t-0)^2}$ est divergente : $\alpha = 2 \geq 1$.

$\int_1^2 \frac{dt}{\sqrt{2-t}}$

Intégrales de Riemann

Intégrales de Riemann $\displaystyle\int_a^b \frac{dt}{(t-a)^\alpha}$ et $\displaystyle\int_a^b \frac{dt}{(b-t)^\alpha}$

On obtient de même

$$\boxed{\int_a^b \frac{dt}{(t-a)^\alpha} \text{ et } \int_a^b \frac{dt}{(b-t)^\alpha} \text{ sont convergentes si et seulement si } \alpha < 1.}$$

Exemples

$$\int_0^1 \frac{1}{t^2}dt = \int_0^1 \frac{dt}{(t-0)^2} \text{ est divergente : } \alpha = 2 \geq 1.$$

$$\int_1^2 \frac{dt}{\sqrt{2-t}} = \int_1^2 \frac{dt}{(2-t)^{\frac{1}{2}}} \text{ est convergente : } \alpha = \frac{1}{2} < 1.$$

Exemples

Intégrales de Riemann

Exemples

$$\int_0^1 \frac{1}{t^2}\,dt$$

Exemples

$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^2}\,dt = \int_0^1 \frac{dt}{(t-0)^2}$ est divergente.

Intégrales de Riemann

Exemples

$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^2}\,dt = \int_0^1 \frac{dt}{(t-0)^2}$ est divergente.

$\displaystyle\int_1^2 \frac{dt}{\sqrt{2-t}}$

Intégrales de Riemann

Exemples

$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^2}\,dt = \int_0^1 \frac{dt}{(t-0)^2}$ est divergente.

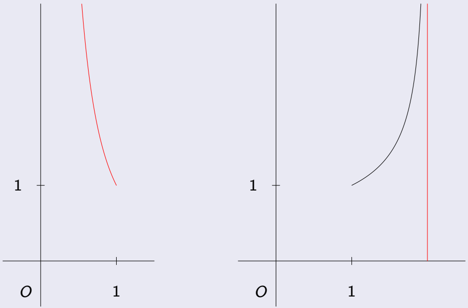
$\displaystyle\int_1^2 \frac{dt}{\sqrt{2-t}} = \int_1^2 \frac{dt}{(2-t)^{\frac{1}{2}}}$ est convergente.

Intégrales de Riemann

Exemples

$$\int_0^1 \frac{1}{t^2}\,dt = \int_0^1 \frac{dt}{(t-0)^2} \text{ est divergente.}$$

$$\int_1^2 \frac{dt}{\sqrt{2-t}} = \int_1^2 \frac{dt}{(2-t)^{\frac{1}{2}}} \text{ est convergente.}$$



Intégrale généralisée

Fonction définie sur un intervalle ouvert

Intégrale généralisée

Fonction définie sur un intervalle ouvert

Soit f une fonction continue sur un intervalle $]a, b[$ $(-\infty \leq a < b \leq +\infty)$ et $c \in]a, b[$.

Intégrale généralisée

Fonction définie sur un intervalle ouvert

Soit f une fonction continue sur un intervalle $]a, b[$ $(-\infty \leq a < b \leq +\infty)$ et $c \in]a, b[$.
L'intégrale de f sur $]a, b[$ est dite convergente si chacune des intégrales $\displaystyle\int_a^c f(t)dt$ et $\displaystyle\int_c^b f(t)dt$ est convergente.

Intégrale généralisée

Fonction définie sur un intervalle ouvert

Soit f une fonction continue sur un intervalle $]a, b[$ $(-\infty \leq a < b \leq +\infty)$ et $c \in]a, b[$.
L'intégrale de f sur $]a, b[$ est dite convergente si chacune des intégrales $\displaystyle\int_a^c f(t)dt$ et $\displaystyle\int_c^b f(t)dt$ est convergente.

On pose alors : $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt.$

Intégrale généralisée

Remarque 1

Intégrale généralisée

Remarque 1

La nature et la valeur de $\displaystyle\int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$ ne dépendent pas de c.

Intégrale généralisée

R3.08 Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Plan

Intégration

Intégrale généralisée

Compléments

Annexe

Remarque 1

La nature et la valeur de $\int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$ ne dépendent pas de c.

Démonstration en complément.

Intégrale généralisée

Remarque 1

La nature et la valeur de $\displaystyle\int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$ ne dépendent pas de c.

Démonstration en complément.

Remarque 2

Intégrale généralisée

Remarque 1

La nature et la valeur de $\int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$ ne dépendent pas de c.
Démonstration en complément.

Remarque 2

Dans la suite a et b vérifie $-\infty < a < b \leq +\infty$.

Intégrale généralisée

Remarque 1

La nature et la valeur de $\displaystyle\int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$ ne dépendent pas de c.
Démonstration en complément.

Remarque 2

Dans la suite a et b vérifie $-\infty < a < b \leq +\infty$. On peut se ramener au cas $-\infty \leq a < b < +\infty$ par le changement de variable : $y = -t$.

Intégrale généralisée

Exemple

Intégrale généralisée

R3.08 Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Exemple

Soit $f(x) = e^{-|x|}$ est continue sur $]-\infty, +\infty[$.

Intégrale généralisée

Exemple

Soit $f(x) = e^{-|x|}$ est continue sur $]-\infty, +\infty[$.

$$\boxed{\text{Nature de } \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|}\,dt}$$

Intégrale généralisée

R3.08 Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Plan

Intégration

Intégrale généralisée

Compléments

Annexe

Exemple

Soit $f(x) = e^{-|x|}$ est continue sur $]-\infty, +\infty[$.

$$\boxed{\text{Nature de } \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|} dt}$$

On sait que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-|t|} dt = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt$ est convergente et $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1$.

Intégrale généralisée

Exemple

Soit $f(x) = e^{-|x|}$ est continue sur $]-\infty, +\infty[$.

$$\boxed{\text{Nature de } \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|}dt}$$

On sait que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-|t|}dt = \int_0^{+\infty} e^{-t}dt$ est convergente et $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}dt = 1$.

Soit $x \leq 0$.

Intégrale généralisée

Exemple

Soit $f(x) = e^{-|x|}$ est continue sur $]-\infty, +\infty[$.

$$\boxed{\text{Nature de } \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|} dt}$$

On sait que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-|t|} dt = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt$ est convergente et $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1$.

Soit $x \leq 0$. $\displaystyle\int_x^0 e^{-|t|} dt$

Intégrale généralisée

Exemple

Soit $f(x) = e^{-|x|}$ est continue sur $]-\infty, +\infty[$.

$\boxed{\text{Nature de } \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|}dt}$

On sait que $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} e^{-|t|}dt = \int_{0}^{+\infty} e^{-t}dt$ est convergente et $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} e^{-t}dt = 1$.

Soit $x \leq 0$. $\displaystyle\int_{x}^{0} e^{-|t|}dt = \int_{x}^{0} e^{-(-t)}dt$

Intégrale généralisée

Exemple

Soit $f(x) = e^{-|x|}$ est continue sur $]-\infty, +\infty[$.

$$\boxed{\text{Nature de } \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|} dt}$$

On sait que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-|t|} dt = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt$ est convergente et $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1$.

Soit $x \leq 0$. $\displaystyle\int_x^0 e^{-|t|} dt = \int_x^0 e^{-(-t)} dt = \int_x^0 e^t dt$

Intégrale généralisée

Exemple

Soit $f(x) = e^{-|x|}$ est continue sur $]-\infty, +\infty[$.

$\boxed{\text{Nature de } \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|}\,dt}$

On sait que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-|t|}dt = \int_0^{+\infty} e^{-t}dt$ est convergente et $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}dt = 1$.

Soit $x \leq 0$. $\displaystyle\int_x^0 e^{-|t|}dt = \int_x^0 e^{-(-t)}dt = \int_x^0 e^{t}dt = \left[e^t\right]_x^0$

Intégrale généralisée

Exemple

Soit $f(x) = e^{-|x|}$ est continue sur $]-\infty, +\infty[$.

$\boxed{\text{Nature de } \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|}\,dt}$

On sait que $\int_0^{+\infty} e^{-|t|}dt = \int_0^{+\infty} e^{-t}dt$ est convergente et $\int_0^{+\infty} e^{-t}dt = 1$.

Soit $x \leq 0$. $\int_x^0 e^{-|t|}dt = \int_x^0 e^{-(-t)}dt = \int_x^0 e^{t}dt = \left[e^{t}\right]_x^0 = e^0 - e^x$

Intégrale généralisée

Exemple

Soit $f(x) = e^{-|x|}$ est continue sur $]-\infty, +\infty[$.

$\boxed{\text{Nature de } \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|} dt}$

On sait que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-|t|} dt = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt$ est convergente et $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1$.

Soit $x \leq 0$. $\displaystyle\int_x^0 e^{-|t|} dt = \int_x^0 e^{-(-t)} dt = \int_x^0 e^t dt = \left[e^t\right]_x^0 = e^0 - e^x = 1 - e^x$.

Intégrale généralisée

Exemple

Soit $f(x) = e^{-|x|}$ est continue sur $]-\infty, +\infty[$.

$\boxed{\text{Nature de } \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|} dt}$

On sait que $\int_0^{+\infty} e^{-|t|} dt = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt$ est convergente et $\int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1$.

Soit $x \leq 0$. $\int_x^0 e^{-|t|} dt = \int_x^0 e^{-(-t)} dt = \int_x^0 e^t dt = \left[e^t\right]_x^0 = e^0 - e^x = 1 - e^x$.

Or $1 - e^x \to 1$ lorsque $x \to -\infty$.

Intégrale généralisée

R3.08 Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Plan

Intégration

Intégrale généralisée

Compléments

Annexe

Exemple

Soit $f(x) = e^{-|x|}$ est continue sur $]-\infty, +\infty[$.

$\boxed{\text{Nature de } \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|}dt}$

On sait que $\int_0^{+\infty} e^{-|t|}dt = \int_0^{+\infty} e^{-t}dt$ est convergente et $\int_0^{+\infty} e^{-t}dt = 1$.

Soit $x \leq 0$. $\int_x^0 e^{-|t|}dt = \int_x^0 e^{-(-t)}dt = \int_x^0 e^t dt = \left[e^t\right]_x^0 = e^0 - e^x = 1 - e^x$.

Or $1 - e^x \to 1$ lorsque $x \to -\infty$.

On en déduit que $\int_{-\infty}^0 e^t dt$ est convergente et $\int_{-\infty}^0 e^t dt = 1$.

Intégrale généralisée

Exemple

Soit $f(x) = e^{-|x|}$ est continue sur $]-\infty, +\infty[$.

$\boxed{\text{Nature de } \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|} dt}$

On sait que $\int_0^{+\infty} e^{-|t|} dt = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt$ est convergente et $\int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1$.

Soit $x \leq 0$. $\int_x^0 e^{-|t|} dt = \int_x^0 e^{-(-t)} dt = \int_x^0 e^t dt = \left[e^t\right]_x^0 = e^0 - e^x = 1 - e^x$.

Or $1 - e^x \to 1$ lorsque $x \to -\infty$.

On en déduit que $\int_{-\infty}^0 e^t dt$ est convergente et $\int_{-\infty}^0 e^t dt = 1$.

Conclusion

Exemple

Soit $f(x) = e^{-|x|}$ est continue sur $]-\infty, +\infty[$.

$$\boxed{\text{Nature de } \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|}dt}$$

On sait que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-|t|}dt = \int_0^{+\infty} e^{-t}dt$ est convergente et $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}dt = 1$.

Soit $x \leq 0$. $\displaystyle\int_x^0 e^{-|t|}dt = \int_x^0 e^{-(-t)}dt = \int_x^0 e^t dt = \left[e^t\right]_x^0 = e^0 - e^x = 1 - e^x$.

Or $1 - e^x \to 1$ lorsque $x \to -\infty$.

On en déduit que $\displaystyle\int_{-\infty}^0 e^t dt$ est convergente et $\displaystyle\int_{-\infty}^0 e^t dt = 1$.

Conclusion

$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^t dt$ est convergente

Intégrale généralisée

Exemple

Soit $f(x) = e^{-|x|}$ est continue sur $]-\infty, +\infty[$.

$$\boxed{\text{Nature de } \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|}dt}$$

On sait que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-|t|}dt = \int_0^{+\infty} e^{-t}dt$ est convergente et $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}dt = 1$.

Soit $x \leq 0$. $\displaystyle\int_x^0 e^{-|t|}dt = \int_x^0 e^{-(-t)}dt = \int_x^0 e^t dt = \left[e^t\right]_x^0 = e^0 - e^x = 1 - e^x$.

Or $1 - e^x \to 1$ lorsque $x \to -\infty$.

On en déduit que $\displaystyle\int_{-\infty}^0 e^t dt$ est convergente et $\displaystyle\int_{-\infty}^0 e^t dt = 1$.

Conclusion

$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^t dt$ est convergente et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^t dt$

Intégrale généralisée

R3.08 Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Plan

Intégration

Intégrale généralisée

Compléments

Annexe

Exemple

Soit $f(x) = e^{-|x|}$ est continue sur $]-\infty, +\infty[$.

$$\boxed{\text{Nature de } \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|} dt}$$

On sait que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-|t|} dt = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt$ est convergente et $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1$.

Soit $x \leq 0$. $\displaystyle\int_x^0 e^{-|t|} dt = \int_x^0 e^{-(-t)} dt = \int_x^0 e^t dt = \left[e^t\right]_x^0 = e^0 - e^x = 1 - e^x$.

Or $1 - e^x \to 1$ lorsque $x \to -\infty$.

On en déduit que $\displaystyle\int_{-\infty}^0 e^t dt$ est convergente et $\displaystyle\int_{-\infty}^0 e^t dt = 1$.

Conclusion

$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^t dt$ est convergente et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^t dt = \int_{-\infty}^0 e^t dt + \int_0^{+\infty} e^t dt$

Exemple

Soit $f(x) = e^{-|x|}$ est continue sur $]-\infty, +\infty[$.

$$\boxed{\text{Nature de } \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|}dt}$$

On sait que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-|t|}dt = \int_0^{+\infty} e^{-t}dt$ est convergente et $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}dt = 1$.

Soit $x \leq 0$. $\displaystyle\int_x^0 e^{-|t|}dt = \int_x^0 e^{-(-t)}dt = \int_x^0 e^t dt = \left[e^t\right]_x^0 = e^0 - e^x = 1 - e^x$.

Or $1 - e^x \to 1$ lorsque $x \to -\infty$.

On en déduit que $\displaystyle\int_{-\infty}^0 e^t dt$ est convergente et $\displaystyle\int_{-\infty}^0 e^t dt = 1$.

Conclusion

$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^t dt$ est convergente et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^t dt = \int_{-\infty}^0 e^t dt + \int_0^{+\infty} e^t dt = 1 + 1 = 2$.

Intégrale généralisée

Exemple

Intégrale généralisée

Exemple

Soit $f(x) = e^{-|x|}$ est continue sur $]-\infty, +\infty[$.

Intégrale généralisée

Exemple

Soit $f(x) = e^{-|x|}$ est continue sur $]-\infty, +\infty[$.

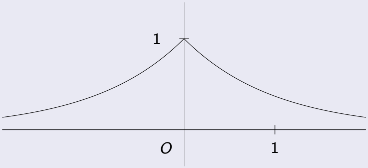
$$\boxed{\text{Nature de } \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|}\,dt}$$

Intégrale généralisée

Exemple

Soit $f(x) = e^{-|x|}$ est continue sur $]-\infty, +\infty[$.

$$\boxed{\text{Nature de } \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|}\,dt}$$



Intégrale généralisée

Convergence absolue

Intégrale généralisée

Convergence absolue

Soit f une fonction continue sur $[a, b[$. On dit que $\int_a^b f(t)dt$ est

absolument convergente

Intégrale généralisée

Convergence absolue

Soit f une fonction continue sur $[a, b[$. On dit que $\int_a^b f(t)dt$ est absolument convergente si $\int_a^b |f(t)|\, dt$ est convergente.

Intégrale généralisée

Convergence absolue

Soit f une fonction continue sur $[a, b[$. On dit que $\int_a^b f(t)dt$ est absolument convergente si $\int_a^b |f(t)|\, dt$ est convergente.

Théorème

Intégrale généralisée

Convergence absolue

Soit f une fonction continue sur $[a, b[$. On dit que $\int_a^b f(t)dt$ est **absolument convergente** si $\int_a^b |f(t)|\, dt$ est convergente.

Théorème

Si $\int_a^b f(t)dt$ est **absolument convergente**

Intégrale généralisée

Convergence absolue

Soit f une fonction continue sur $[a, b[$. On dit que $\int_a^b f(t)dt$ est absolument convergente si $\int_a^b |f(t)|\, dt$ est convergente.

Théorème

Si $\int_a^b f(t)dt$ est absolument convergente alors $\int_a^b f(t)dt$ est convergente.

Intégrale généralisée

R3.08 Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Convergence absolue

Soit f une fonction continue sur $[a,b[$. On dit que $\int_a^b f(t)dt$ est **absolument convergente** si $\int_a^b |f(t)|\, dt$ est convergente.

Théorème

Si $\int_a^b f(t)dt$ est **absolument convergente** alors $\int_a^b f(t)dt$ est convergente.

Remarque

Intégrale généralisée

Convergence absolue

Soit f une fonction continue sur $[a, b[$. On dit que $\int_a^b f(t)dt$ est **absolument convergente** si $\int_a^b |f(t)|\, dt$ est convergente.

Théorème

Si $\int_a^b f(t)dt$ est **absolument convergente** alors $\int_a^b f(t)dt$ est convergente.

Remarque

Il s'agit d'une condition suffisante de convergence.

Intégrale généralisée

Convergence absolue

Soit f une fonction continue sur $[a, b[$. On dit que $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ est **absolument convergente** si $\displaystyle\int_a^b |f(t)|\, dt$ est convergente.

Théorème

Si $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ est **absolument convergente** alors $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ est convergente.

Remarque

Il s'agit d'une condition suffisante de convergence.
Elle n'est pas nécessaire : il existe des intégrales généralisées convergentes, non absolument convergentes dites **semi-convergentes**.

Intégrale généralisée

Exemple

Intégrale généralisée

Exemple

Nature de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2}\, dt$

Intégrale généralisée

Exemple

$$\boxed{\text{Nature de } \int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2}\, dt}$$

$$\forall t \in [1, +\infty[\ \left|\frac{\cos t}{t^2}\right| \leq \frac{|\cos t|}{t^2} \leq \frac{1}{t^2}.$$

Intégrale généralisée

Exemple

$$\boxed{\text{Nature de } \int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2}\, dt}$$

$\forall t \in [1, +\infty[\ \left|\frac{\cos t}{t^2}\right| \leq \frac{|\cos t|}{t^2} \leq \frac{1}{t^2}$.

Or $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ est convergente (intégrale de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$).

Intégrale généralisée

Exemple

$$\boxed{\text{Nature de } \int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2}\, dt}$$

$\forall t \in [1, +\infty[\ \left|\frac{\cos t}{t^2}\right| \leq \frac{|\cos t|}{t^2} \leq \frac{1}{t^2}$.

Or $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ est convergente (intégrale de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$).

On en déduit que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left|\frac{\cos t}{t^2}\right| dt$ est convergente,

Intégrale généralisée

Exemple

$$\boxed{\text{Nature de } \int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2}\, dt}$$

$\forall t \in [1, +\infty[\ \left|\dfrac{\cos t}{t^2}\right| \leq \dfrac{|\cos t|}{t^2} \leq \dfrac{1}{t^2}$.

Or $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\, dt$ est convergente (intégrale de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$).

On en déduit que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left|\frac{\cos t}{t^2}\right| dt$ est convergente,

et donc que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2}\, dt$ est absolument convergente.

Intégrale généralisée

Exemple

$$\boxed{\text{Nature de } \int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2}\,dt}$$

$\forall t \in [1, +\infty[\ \left|\dfrac{\cos t}{t^2}\right| \leq \dfrac{|\cos t|}{t^2} \leq \dfrac{1}{t^2}$.

Or $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt$ est convergente (intégrale de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$).

On en déduit que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left|\frac{\cos t}{t^2}\right| dt$ est convergente,

et donc que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2}\,dt$ est absolument convergente.

Conclusion : $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2}\,dt$ est donc convergente.

Critères de convergence : cas général

R3.08 Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Plan

Intégration

Intégrale généralisée

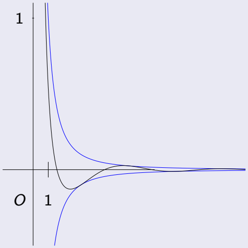
Compléments

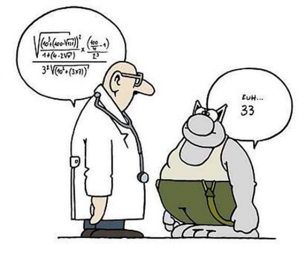
Annexe

Exemple : $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2}\,dt$

Critères de convergence : cas général

Exemple : $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2}\, dt$




EUH...
33

Calcul approché d'une intégrale : erreur

Démonstration des résultats

Calcul approché d'une intégrale : erreur

Démonstration des résultats

Méthode des rectangles à gauche

Calcul approché d'une intégrale : erreur

Démonstration des résultats

Méthode des rectangles à gauche

Sur $[a, b]$ $f(x) = f(a) + (x - a)f'(a + \theta(b - a))$ $(0 < \theta < 1)$.

Calcul approché d'une intégrale : erreur

Démonstration des résultats

Méthode des rectangles à gauche
Sur $[a, b]$ $f(x) = f(a) + (x - a)f'(a + \theta(b - a))$ $(0 < \theta < 1)$.
Méthode des rectangles à droite

Calcul approché d'une intégrale : erreur

Démonstration des résultats

Méthode des rectangles à gauche

Sur $[a, b]$ $f(x) = f(a) + (x - a)f'(a + \theta(b - a))$ $(0 < \theta < 1)$.

Méthode des rectangles à droite

Sur $[a, b]$ $f(x) = f(b) + (b - x)f'(b + \theta(a - b))$

Calcul approché d'une intégrale : erreur

Démonstration des résultats

Méthode des rectangles à gauche

Sur $[a, b]$ $f(x) = f(a) + (x - a)f'(a + \theta(b - a))$ $(0 < \theta < 1)$.

Méthode des rectangles à droite

Sur $[a, b]$ $f(x) = f(b) + (b - x)f'(b + \theta(a - b))$

Méthode du point médian

Calcul approché d'une intégrale : erreur

Démonstration des résultats

Méthode des rectangles à gauche

Sur $[a, b]$ $f(x) = f(a) + (x - a)f'(a + \theta(b - a))$ $(0 < \theta < 1)$.

Méthode des rectangles à droite

Sur $[a, b]$ $f(x) = f(b) + (b - x)f'(b + \theta(a - b))$

Méthode du point médian

$$f(x) = f(m) + (x - m)f'(m) + \frac{(x - m)^2}{2} f''(m + \theta x) \text{ avec } m = \frac{a + b}{2}$$

Calcul approché d'une intégrale : erreur

Démonstration des résultats

Méthode des rectangles à gauche

Sur $[a, b]$ $f(x) = f(a) + (x - a)f'(a + \theta(b - a))$ $(0 < \theta < 1)$.

Méthode des rectangles à droite

Sur $[a, b]$ $f(x) = f(b) + (b - x)f'(b + \theta(a - b))$

Méthode du point médian

$$f(x) = f(m) + (x - m)f'(m) + \frac{(x-m)^2}{2}f''(m + \theta x) \text{ avec } m = \frac{a+b}{2}$$

Méthode des trapèzes

Calcul approché d'une intégrale : erreur

Démonstration des résultats

Méthode des rectangles à gauche

Sur $[a, b]$ $f(x) = f(a) + (x-a)f'(a+\theta(b-a))$ $(0 < \theta < 1)$.

Méthode des rectangles à droite

Sur $[a, b]$ $f(x) = f(b) + (b-x)f'(b+\theta(a-b))$

Méthode du point médian

$$f(x) = f(m) + (x-m)f'(m) + \frac{(x-m)^2}{2}f''(m+\theta x) \text{ avec } m = \frac{a+b}{2}$$

Méthode des trapèzes

Sur $[a, b]$ on pose $g(x) = f(a) + \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$ et il existe $a+\theta(b-a)$ tel que

$$f(x) - g(x) = \frac{1}{2}(x-a)(b-x)f''(a+\theta(b-a)).$$

Calcul approché d'une intégrale : erreur

Exemple : $\displaystyle\int_0^1 e^t \, dt$

Calcul approché d'une intégrale : erreur

Exemple : $\displaystyle\int_0^1 e^t\,dt$

Méthode des rectangles à gauche ou à droite

Calcul approché d'une intégrale : erreur

Exemple : $\int_0^1 e^t \, dt$

Méthode des rectangles à gauche ou à droite

$$|\Delta_R(f, n)| \leq \frac{(1-0)^2}{n} e^1 = \frac{e}{n}$$

Calcul approché d'une intégrale : erreur

Exemple : $\int_0^1 e^t \, dt$

Méthode des rectangles à gauche ou à droite

$$|\Delta_R(f, n)| \leq \frac{(1-0)^2}{n} e^1 = \frac{e}{n}$$

Méthode du point médian

Calcul approché d'une intégrale : erreur

Exemple : $\int_0^1 e^t \, dt$

Méthode des rectangles à gauche ou à droite

$$|\Delta_R(f,n)| \leq \frac{(1-0)^2}{n} e^1 = \frac{e}{n}$$

Méthode du point médian

$$|\Delta_{Rm}(f,n)| \leq \frac{(1-0)^3}{24n^2} e^1 = \frac{e}{24n^2}$$

Calcul approché d'une intégrale : erreur

Exemple : $\displaystyle\int_0^1 e^t \, dt$

Méthode des rectangles à gauche ou à droite

$$|\Delta_R(f,n)| \leq \frac{(1-0)^2}{n} e^1 = \frac{e}{n}$$

Méthode du point médian

$$|\Delta_{Rm}(f,n)| \leq \frac{(1-0)^3}{24n^2} e^1 = \frac{e}{24n^2}$$

Méthode des trapèzes

Calcul approché d'une intégrale : erreur

Exemple : $\int_0^1 e^t \, dt$

Méthode des rectangles à gauche ou à droite

$$|\Delta_R(f,n)| \leq \frac{(1-0)^2}{n} e^1 = \frac{e}{n}$$

Méthode du point médian

$$|\Delta_{Rm}(f,n)| \leq \frac{(1-0)^3}{24n^2} e^1 = \frac{e}{24n^2}$$

Méthode des trapèzes

$$|\Delta_T(f,n)| \leq \frac{(1-0)^3}{12n^2} e^1 = \frac{e}{12n^2}$$

Calcul approché d'une intégrale : erreur

Exemple : $\int_0^1 e^t \, dt$

Calcul approché d'une intégrale : erreur

Exemple : $\int_0^1 e^t \, dt$

	Si $n \geq$	alors $\lvert\Delta(f, n)\rvert \leq$
Rectangles gauche ou droite	10	0.27182818
Rectangles point médian	10	0.00113262
Trapèzes	10	0.00226523

Calcul approché d'une intégrale : erreur

Exemple : $\int_0^1 e^t \, dt$

	Si $n \geq$	alors $\|\Delta(f, n)\| \leq$
Rectangles gauche ou droite	10	0.27182818
Rectangles point médian	10	0.00113262
Trapèzes	10	0.00226523

	Si $n \geq$	alors $\|\Delta(f, n)\| \leq$
Rectangles gauche ou droite	100	0.02718282
Rectangles point médian	100	0.00001133
Trapèzes	100	0.00002265

Calcul approché d'une intégrale : erreur

Exemple : $\int_0^1 e^t \, dt$

	Si $n \geq$	alors $|\Delta(f,n)| \leq$
Rectangles gauche ou droite	10	0.27182818
Rectangles point médian	10	0.00113262
Trapèzes	10	0.00226523

	Si $n \geq$	alors $|\Delta(f,n)| \leq$
Rectangles gauche ou droite	100	0.02718282
Rectangles point médian	100	0.00001133
Trapèzes	100	0.00002265

	Si $n \geq$	alors $|\Delta(f,n)| \leq$
Rectangles gauche ou droite	1000	0.00271828
Rectangles point médian	1000	0.00000011
Trapèzes	1000	0.00000023

Intégrale généralisée sur un intervalle ouvert

Remarque 1 : démonstration

Intégrale généralisée sur un intervalle ouvert

Remarque 1 : démonstration

La nature et la valeur de $\displaystyle\int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$ ne dépendent pas de c.

Intégrale généralisée sur un intervalle ouvert

Remarque 1 : démonstration

La nature et la valeur de $\int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$ ne dépendent pas de c.

Démonstration :

Intégrale généralisée sur un intervalle ouvert

Remarque 1 : démonstration

La nature et la valeur de $\int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$ ne dépendent pas de c.

Démonstration :
Si $c' \neq c$ alors $\int_{c'}^x f(t)dt - \int_c^x f(t)dt = \int_{c'}^x f(t)dt + \int_x^c f(t)dt = \int_{c'}^c f(t)dt$ est une constante : la nature de $\int_{c'}^b f(t)dt$ est celle de $\int_c^b f(t)dt$.

Intégrale généralisée sur un intervalle ouvert

Remarque 1 : démonstration

La nature et la valeur de $\int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$ ne dépendent pas de c.

Démonstration :

Si $c' \neq c$ alors $\int_{c'}^x f(t)dt - \int_c^x f(t)dt = \int_{c'}^x f(t)dt + \int_x^c f(t)dt = \int_{c'}^c f(t)dt$ est une constante : la nature de $\int_{c'}^b f(t)dt$ est celle de $\int_c^b f(t)dt$.

De plus,

$$\int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt = \int_a^{c'} f(t)dt + \int_{c'}^c f(t)dt + \int_c^{c'} f(t)dt + \int_{c'}^b f(t)dt$$

$$= \int_a^{c'} f(t)dt + \int_{c'}^b f(t)dt.$$

Intégrale généralisée sur un intervalle ouvert

Remarque 1 : démonstration

La nature et la valeur de $\displaystyle\int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$ ne dépendent pas de c.

Démonstration :

Si $c' \neq c$ alors $\displaystyle\int_{c'}^x f(t)dt - \int_c^x f(t)dt = \int_{c'}^x f(t)dt + \int_x^c f(t)dt = \int_{c'}^c f(t)dt$ est une constante : la nature de $\displaystyle\int_{c'}^b f(t)dt$ est celle de $\displaystyle\int_c^b f(t)dt$.

De plus,

$$\int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt = \int_a^{c'} f(t)dt + \int_{c'}^c f(t)dt + \int_c^{c'} f(t)dt + \int_{c'}^b f(t)dt$$

$$= \int_a^{c'} f(t)dt + \int_{c'}^b f(t)dt.$$

On en déduit que la nature et la valeur de $\displaystyle\int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$ ne dépendent pas de c.

Critères de convergence : cas d'une fonction positive

Comparaison

Critères de convergence : cas d'une fonction positive

Comparaison

Soit f une fonction continue et positive sur $[a, b[$.

Critères de convergence : cas d'une fonction positive

Comparaison

Soit f une fonction continue et positive sur $[a, b[$.

Pour que $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ soit convergente il faut et il suffit que $\displaystyle F(x) = \int_a^x f(t)dt$ soit majorée sur $[a, b[$.

Critères de convergence : cas d'une fonction positive

Comparaison

Soit f une fonction continue et positive sur $[a, b[$.

Pour que $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ soit convergente il faut et il suffit que $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ soit majorée sur $[a, b[$.

Si $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ est divergente alors $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt \to +\infty$ lorsque $x \to +\infty$.

Critères de convergence : cas d'une fonction positive

Comparaison

Soit f une fonction continue et positive sur $[a, b[$.

Pour que $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ soit convergente il faut et il suffit que $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ soit majorée sur $[a, b[$.

Si $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ est divergente alors $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt \to +\infty$ lorsque $x \to +\infty$.

Notation : $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = +\infty$.

Critères de convergence : cas d'une fonction positive

Corollaire

Critères de convergence : cas d'une fonction positive

Corollaire

Soit f et g deux fonctions continues et positives sur $[a, b[$ telles que $\forall t \in [a, b[\; f(t) \leq g(t)$.

Critères de convergence : cas d'une fonction positive

Corollaire

Soit f et g deux fonctions continues et positives sur $[a, b[$ telles que $\forall t \in [a, b[\ f(t) \leq g(t)$.

Si $\displaystyle\int_a^b g(t)dt$ est convergente

Critères de convergence : cas d'une fonction positive

Corollaire

Soit f et g deux fonctions continues et positives sur $[a, b[$ telles que $\forall t \in [a, b[\ f(t) \leq g(t)$.

Si $\displaystyle\int_a^b g(t)dt$ est convergente alors $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ est convergente

Critères de convergence : cas d'une fonction positive

Corollaire

Soit f et g deux fonctions continues et positives sur $[a, b[$ telles que $\forall t \in [a, b[\ f(t) \leq g(t)$.

Si $\displaystyle\int_a^b g(t)dt$ est convergente alors $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ est convergente et $\displaystyle\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt$.

Critères de convergence : cas d'une fonction positive

Corollaire

Soit f et g deux fonctions continues et positives sur $[a, b[$ telles que $\forall t \in [a, b[\ f(t) \leq g(t)$.

Si $\displaystyle\int_a^b g(t)dt$ est convergente alors $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ est convergente et $\displaystyle\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt$.

Si $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ est divergente

Critères de convergence : cas d'une fonction positive

Corollaire

Soit f et g deux fonctions continues et positives sur $[a, b[$ telles que $\forall t \in [a, b[\; f(t) \leq g(t)$.

Si $\displaystyle\int_a^b g(t)dt$ est convergente alors $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ est convergente et $\displaystyle\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt$.

Si $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ est divergente alors $\displaystyle\int_a^b g(t)dt$ est divergente

Critères de convergence : cas d'une fonction positive

Corollaire

Soit f et g deux fonctions continues et positives sur $[a, b[$ telles que $\forall t \in [a, b[\ f(t) \leq g(t)$.

Si $\int_a^b g(t)dt$ est convergente alors $\int_a^b f(t)dt$ est convergente et $\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt$.

Si $\int_a^b f(t)dt$ est divergente alors $\int_a^b g(t)dt$ est divergente et $\int_a^b g(t)dt = +\infty$.

Critères de convergence : cas d'une fonction positive

Exemple 1

Critères de convergence : cas d'une fonction positive

Exemple 1

$$\boxed{\text{Nature de } \int_1^{+\infty} e^{-t^2}\,dt}$$

Critères de convergence : cas d'une fonction positive

Exemple 1

$$\boxed{\text{Nature de } \int_1^{+\infty} e^{-t^2}\,dt}$$

$\forall t \in [1, +\infty[\ 0 \leq e^{-t^2} \leq e^{-t}$:

Critères de convergence : cas d'une fonction positive

Exemple 1

$$\boxed{\text{Nature de } \int_1^{+\infty} e^{-t^2} dt}$$

$\forall t \in [1, +\infty[\ 0 \leq e^{-t^2} \leq e^{-t}$:

$$\frac{e^{-t}}{e^{-t^2}} = e^{t^2-t} = e^{t(t-1)} \geq e^0 = 1 \text{ avec } e^{-t^2} > 0 \text{ et } e^{-t} > 0$$

Critères de convergence : cas d'une fonction positive

Exemple 1

$\boxed{\text{Nature de } \displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-t^2}\,dt}$

$\forall t \in [1, +\infty[\ 0 \leq e^{-t^2} \leq e^{-t}$:

$\dfrac{e^{-t}}{e^{-t^2}} = e^{t^2-t} = e^{t(t-1)} \geq e^0 = 1$ avec $e^{-t^2} > 0$ et $e^{-t} > 0$

Or $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-t}\,dt$ est convergente.

Critères de convergence : cas d'une fonction positive

Exemple 1

$$\boxed{\text{Nature de } \int_1^{+\infty} e^{-t^2} dt}$$

$\forall t \in [1, +\infty[\ 0 \leq e^{-t^2} \leq e^{-t}$:

$\dfrac{e^{-t}}{e^{-t^2}} = e^{t^2-t} = e^{t(t-1)} \geq e^0 = 1$ avec $e^{-t^2} > 0$ et $e^{-t} > 0$

Or $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-t} dt$ est convergente.

Donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-t^2} dt$ est convergente et $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-t^2} dt \leq \int_1^{+\infty} e^{-t} dt$.

Critères de convergence : cas d'une fonction positive

Exemple 1

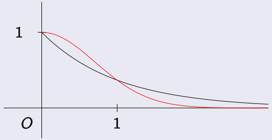
$$\boxed{\text{Nature de } \int_1^{+\infty} e^{-t^2}\,dt}$$

$\forall t \in [1, +\infty[\; 0 \leq e^{-t^2} \leq e^{-t}$:

$\dfrac{e^{-t}}{e^{-t^2}} = e^{t^2-t} = e^{t(t-1)} \geq e^0 = 1$ avec $e^{-t^2} > 0$ et $e^{-t} > 0$

Or $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-t}\,dt$ est convergente.

Donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$ est convergente et $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-t^2}\,dt \leq \int_1^{+\infty} e^{-t}\,dt$.



Critères de convergence : cas d'une fonction positive

Exemple 2

Critères de convergence : cas d'une fonction positive

Exemple 2

$$\boxed{\text{Nature de } \int_1^{+\infty} \frac{t+1}{t^2+1} dt}$$

Critères de convergence : cas d'une fonction positive

Exemple 2

$$\boxed{\text{Nature de } \int_1^{+\infty} \frac{t+1}{t^2+1} dt}$$

$\forall t \in [1, +\infty[\ 0 \leq \frac{1}{t} \leq \frac{t+1}{t^2+1}$:

Critères de convergence : cas d'une fonction positive

Exemple 2

$$\boxed{\text{Nature de } \int_1^{+\infty} \frac{t+1}{t^2+1}\,dt}$$

$\forall t \in [1, +\infty[\ 0 \leq \frac{1}{t} \leq \frac{t+1}{t^2+1}$:

$$\frac{t+1}{t^2+1} - \frac{1}{t} = \frac{t^2+t-(t^2+1)}{t(t^2+1)} = \frac{t-1}{t(t^2+1)} \geq 0.$$

Critères de convergence : cas d'une fonction positive

Exemple 2

$$\boxed{\text{Nature de } \int_1^{+\infty} \frac{t+1}{t^2+1} dt}$$

$\forall t \in [1, +\infty[\ 0 \leq \frac{1}{t} \leq \frac{t+1}{t^2+1}$:

$$\frac{t+1}{t^2+1} - \frac{1}{t} = \frac{t^2+t-(t^2+1)}{t(t^2+1)} = \frac{t-1}{t(t^2+1)} \geq 0.$$

Or $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t}$ est divergente (intégrale de Riemann : $\alpha = 1 \leq 1$).

Critères de convergence : cas d'une fonction positive

Exemple 2

$$\boxed{\text{Nature de } \int_1^{+\infty} \frac{t+1}{t^2+1}dt}$$

$\forall t \in [1, +\infty[\ 0 \leq \frac{1}{t} \leq \frac{t+1}{t^2+1}$:

$$\frac{t+1}{t^2+1} - \frac{1}{t} = \frac{t^2+t-(t^2+1)}{t(t^2+1)} = \frac{t-1}{t(t^2+1)} \geq 0.$$

Or $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t}$ est divergente (intégrale de Riemann : $\alpha = 1 \leq 1$).

Donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t+1}{t^2+1}dt$ est divergente et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t+1}{t^2+1}dt = +\infty$.

Critères de convergence : cas d'une fonction positive

Exemple 2

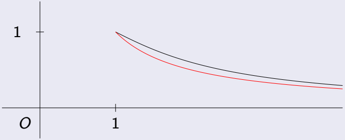
$$\boxed{\text{Nature de } \int_1^{+\infty} \frac{t+1}{t^2+1}\,dt}$$

$\forall t \in [1, +\infty[\; 0 \leq \frac{1}{t} \leq \frac{t+1}{t^2+1}$:

$$\frac{t+1}{t^2+1} - \frac{1}{t} = \frac{t^2+t-(t^2+1)}{t(t^2+1)} = \frac{t-1}{t(t^2+1)} \geq 0.$$

Or $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t}$ est divergente (intégrale de Riemann : $\alpha = 1 \leq 1$).

Donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t+1}{t^2+1}\,dt$ est divergente et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t+1}{t^2+1}\,dt = +\infty$.



Critères de convergence : cas d'une fonction positive

Equivalence

Critères de convergence : cas d'une fonction positive

Equivalence

Théorème

Critères de convergence : cas d'une fonction positive

Equivalence

Théorème

Soit f et g deux fonctions continues et positives sur $[a, b[$ équivalentes au voisinage de b.

Critères de convergence : cas d'une fonction positive

Equivalence

Théorème

Soit f et g deux fonctions continues et positives sur $[a, b[$ équivalentes au voisinage de b.

Alors $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ et $\displaystyle\int_a^b g(t)dt$ sont de même nature.

Critères de convergence : cas d'une fonction positive

Exemple 1

Critères de convergence : cas d'une fonction positive

Exemple 1

$$\boxed{\text{Nature de } \int_0^1 \frac{e^t}{\sqrt{1-t}}dt}$$

Critères de convergence : cas d'une fonction positive

Exemple 1

$$\boxed{\text{Nature de } \int_0^1 \frac{e^t}{\sqrt{1-t}} dt}$$

On a $\dfrac{e^t}{\sqrt{1-t}} \underset{1}{\sim} \dfrac{e}{\sqrt{1-t}}$:

Critères de convergence : cas d'une fonction positive

Exemple 1

$\boxed{\text{Nature de } \displaystyle\int_0^1 \frac{e^t}{\sqrt{1-t}} dt}$

On a $\dfrac{e^t}{\sqrt{1-t}} \underset{1}{\sim} \dfrac{e}{\sqrt{1-t}} : \dfrac{\frac{e^t}{\sqrt{1-t}}}{\frac{e}{\sqrt{1-t}}} = \dfrac{e^t}{\sqrt{1-t}} \dfrac{\sqrt{1-t}}{e} = e^{(t-1)} \underset{t \to 1}{\to} 1$

Critères de convergence : cas d'une fonction positive

Exemple 1

$$\boxed{\text{Nature de } \int_0^1 \frac{e^t}{\sqrt{1-t}}\,dt}$$

On a $\dfrac{e^t}{\sqrt{1-t}} \underset{1}{\sim} \dfrac{e}{\sqrt{1-t}} : \dfrac{\frac{e^t}{\sqrt{1-t}}}{\frac{e}{\sqrt{1-t}}} = \dfrac{e^t}{\sqrt{1-t}} \dfrac{\sqrt{1-t}}{e} = e^{(t-1)} \underset{t\to 1}{\longrightarrow} 1$

Or $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t}}\,dt = \int_0^1 \frac{1}{(1-t)^{\frac{1}{2}}}\,dt$ est convergente (intégrale de Riemann avec $\alpha = \frac{1}{2} < 1$).

Critères de convergence : cas d'une fonction positive

Exemple 1

$$\boxed{\text{Nature de } \int_0^1 \frac{e^t}{\sqrt{1-t}}\,dt}$$

On a $\dfrac{e^t}{\sqrt{1-t}} \underset{1}{\sim} \dfrac{e}{\sqrt{1-t}} : \dfrac{\frac{e^t}{\sqrt{1-t}}}{\frac{e}{\sqrt{1-t}}} = \dfrac{e^t}{\sqrt{1-t}} \dfrac{\sqrt{1-t}}{e} = e^{(t-1)} \underset{t\to 1}{\longrightarrow} 1$

Or $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t}}\,dt = \int_0^1 \frac{1}{(1-t)^{\frac{1}{2}}}\,dt$ est convergente (intégrale de Riemann avec $\alpha = \frac{1}{2} < 1$).

On en déduit que $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^t}{\sqrt{1-t}}\,dt$ est convergente.

Critères de convergence : cas d'une fonction positive

Exemple 2

Critères de convergence : cas d'une fonction positive

Exemple 2

$$\boxed{\text{Nature de } \int_1^{+\infty} \frac{t+1}{t^2+1}\,dt}$$

Critères de convergence : cas d'une fonction positive

Exemple 2

$$\boxed{\text{Nature de } \int_1^{+\infty} \frac{t+1}{t^2+1}\,dt}$$

On a $\dfrac{t+1}{t^2+1} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{t}{t^2} = \dfrac{1}{t}$

Critères de convergence : cas d'une fonction positive

Exemple 2

$\boxed{\text{Nature de } \int_1^{+\infty} \frac{t+1}{t^2+1} dt}$

On a $\frac{t+1}{t^2+1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{t}{t^2} = \frac{1}{t}$

Or $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t} dt$ est divergente (intégrale de Riemann avec $\alpha = 1 \leq 1$).

Exemple 2

$$\boxed{\text{Nature de } \int_1^{+\infty} \frac{t+1}{t^2+1}dt}$$

On a $\dfrac{t+1}{t^2+1} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{t}{t^2} = \dfrac{1}{t}$

Or $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}dt$ est divergente (intégrale de Riemann avec $\alpha = 1 \leq 1$).

On en déduit que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t+1}{t^2+1}dt$ est divergente.

Convergence absolue

Convergence absolue

Convergence absolue

Convergence absolue

Soit f une fonction continue sur $[a, b[$. On dit que $\int_a^b f(t)dt$ est

absolument convergente

Convergence absolue

Convergence absolue

Soit f une fonction continue sur $[a, b[$. On dit que $\int_a^b f(t)dt$ est **absolument convergente** si $\int_a^b |f(t)|\, dt$ est convergente.

Convergence absolue

Convergence absolue

Soit f une fonction continue sur $[a, b[$. On dit que $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ est absolument convergente si $\displaystyle\int_a^b |f(t)|\,dt$ est convergente.

Théorème

Convergence absolue

Convergence absolue

Soit f une fonction continue sur $[a, b[$. On dit que $\int_a^b f(t)dt$ est absolument convergente si $\int_a^b |f(t)|\, dt$ est convergente.

Théorème

Si $\int_a^b f(t)dt$ est absolument convergente

Convergence absolue

Convergence absolue

Soit f une fonction continue sur $[a, b[$. On dit que $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ est **absolument convergente** si $\displaystyle\int_a^b |f(t)|\, dt$ est convergente.

Théorème

Si $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ est **absolument convergente** alors $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ est convergente.

Convergence absolue

Convergence absolue

Soit f une fonction continue sur $[a, b[$. On dit que $\int_a^b f(t)dt$ est **absolument convergente** si $\int_a^b |f(t)|\,dt$ est convergente.

Théorème

Si $\int_a^b f(t)dt$ est **absolument convergente** alors $\int_a^b f(t)dt$ est convergente.

Remarque

Convergence absolue

Convergence absolue

Soit f une fonction continue sur $[a, b[$. On dit que $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ est **absolument convergente** si $\displaystyle\int_a^b |f(t)|\,dt$ est convergente.

Théorème

Si $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ est **absolument convergente** alors $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ est convergente.

Remarque

Il s'agit d'une condition suffisante de convergence.

Convergence absolue

Convergence absolue

Soit f une fonction continue sur $[a, b[$. On dit que $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ est **absolument convergente** si $\displaystyle\int_a^b |f(t)|\, dt$ est convergente.

Théorème

Si $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ est **absolument convergente** alors $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ est convergente.

Remarque

Il s'agit d'une condition suffisante de convergence.
Elle n'est pas nécessaire : il existe des intégrales généralisées convergentes, non absolument convergentes dites **semi-convergentes**.

Convergence absolue

Exemple 1

Convergence absolue

Exemple 1

$$\boxed{\text{Nature de } \int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2}\, dt}$$

Convergence absolue

Exemple 1

$$\boxed{\text{Nature de } \int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2}\, dt}$$

$\forall t \in [1, +\infty[\ \left|\frac{\cos t}{t^2}\right| \leq \frac{|\cos t|}{t^2} \leq \frac{1}{t^2}$.

Convergence absolue

Exemple 1

$$\boxed{\text{Nature de } \int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2} dt}$$

$\forall t \in [1, +\infty[\ \left|\frac{\cos t}{t^2}\right| \leq \frac{|\cos t|}{t^2} \leq \frac{1}{t^2}$.

Or $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ est convergente (intégrale de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$).

Convergence absolue

Exemple 1

$$\boxed{\text{Nature de } \int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2}\,dt}$$

$\forall t \in [1, +\infty[\ \left|\frac{\cos t}{t^2}\right| \leq \frac{|\cos t|}{t^2} \leq \frac{1}{t^2}$.

Or $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt$ est convergente (intégrale de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$).

On en déduit que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left|\frac{\cos t}{t^2}\right| dt$ est convergente,

Convergence absolue

Exemple 1

$$\boxed{\text{Nature de } \int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2}\, dt}$$

$\forall t \in [1, +\infty[\ \left|\frac{\cos t}{t^2}\right| \leq \frac{|\cos t|}{t^2} \leq \frac{1}{t^2}$.

Or $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\, dt$ est convergente (intégrale de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$).

On en déduit que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left|\frac{\cos t}{t^2}\right| dt$ est convergente,

et donc que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2}\, dt$ est absolument convergente.

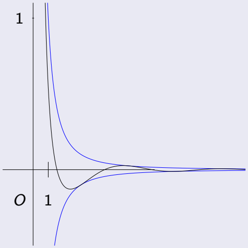
Conclusion : $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2}\, dt$ est donc convergente.

Critères de convergence : cas général

Exemple 1 : $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2}\,dt$

Critères de convergence : cas général

Exemple 1 : $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2}\,dt$



Critères de convergence : cas général

Exemple 2 : $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt$

Critères de convergence : cas général

Exemple 2 : $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$

Pour $x \in [1, +\infty[$ on va intégrer $\displaystyle\int_1^{x} \frac{\sin t}{t}\,dt$ par parties.

Critères de convergence : cas général

Exemple 2 : $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$

Pour $x \in [1, +\infty[$ on va intégrer $\displaystyle\int_1^{x} \frac{\sin t}{t}\,dt$ par parties.

$$\left|\begin{array}{lcl} f(t) = \frac{1}{t} & & f'(t) = -\frac{1}{t^2} \\ & \times & \\ g(t) = -\cos t & & g'(t) = \sin t \end{array}\right.$$

Critères de convergence : cas général

Exemple 2 : $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt$

Pour $x \in [1, +\infty[$ on va intégrer $\displaystyle\int_1^x \frac{\sin t}{t}\, dt$ par parties.

$$\left| \begin{array}{lcl} f(t) = \frac{1}{t} & & f'(t) = -\frac{1}{t^2} \\ & \times & \\ g(t) = -\cos t & & g'(t) = \sin t \end{array} \right.$$

$$\int_1^x \frac{\sin t}{t}\, dt = \left[-\frac{\cos t}{t}\right]_1^x - \int_1^x \frac{\cos t}{t^2}\, dt = -\frac{\cos x}{x} + \frac{\cos 1}{1} - \int_1^x \frac{\cos t}{t^2}\, dt.$$

Critères de convergence : cas général

Exemple 2 : $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$

Pour $x \in [1, +\infty[$ on va intégrer $\displaystyle\int_1^x \frac{\sin t}{t}\,dt$ par parties.

$$\left|\begin{array}{ll} f(t) = \frac{1}{t} & f'(t) = -\frac{1}{t^2} \\ & \\ g(t) = -\cos t & g'(t) = \sin t \end{array}\right.$$

$$\int_1^x \frac{\sin t}{t}\,dt = \left[-\frac{\cos t}{t}\right]_1^x - \int_1^x \frac{\cos t}{t^2}\,dt = -\frac{\cos x}{x} + \frac{\cos 1}{1} - \int_1^x \frac{\cos t}{t^2}\,dt.$$

$$-\frac{\cos x}{x} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

Critères de convergence : cas général

Exemple 2 : $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$

Pour $x \in [1, +\infty[$ on va intégrer $\displaystyle\int_1^{x} \frac{\sin t}{t} dt$ par parties.

$$\left| \begin{array}{lcl} f(t) = \frac{1}{t} & & f'(t) = -\frac{1}{t^2} \\ & \times & \\ g(t) = -\cos t & & g'(t) = \sin t \end{array} \right.$$

$$\int_1^{x} \frac{\sin t}{t} dt = \left[-\frac{\cos t}{t} \right]_1^x - \int_1^x \frac{\cos t}{t^2} dt = -\frac{\cos x}{x} + \frac{\cos 1}{1} - \int_1^x \frac{\cos t}{t^2} dt.$$

$$-\frac{\cos x}{x} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

$$\int_1^{x} \frac{\cos t}{t^2} dt \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} \int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2} dt \text{ (intégrale convergente).}$$

Critères de convergence : cas général

Exemple 2 : $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$

Pour $x \in [1, +\infty[$ on va intégrer $\displaystyle\int_1^x \frac{\sin t}{t}\,dt$ par parties.

$$\begin{array}{|lcl} f(t) = \frac{1}{t} & & f'(t) = -\frac{1}{t^2} \\ & \times & \\ g(t) = -\cos t & & g'(t) = \sin t \end{array}$$

$$\int_1^x \frac{\sin t}{t}\,dt = \left[-\frac{\cos t}{t}\right]_1^x - \int_1^x \frac{\cos t}{t^2}\,dt = -\frac{\cos x}{x} + \frac{\cos 1}{1} - \int_1^x \frac{\cos t}{t^2}\,dt.$$

$$-\frac{\cos x}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

$$\int_1^x \frac{\cos t}{t^2}\,dt \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2}\,dt \text{ (intégrale convergente).}$$

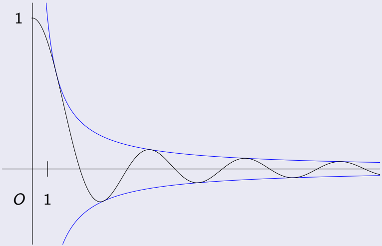
Conclusion : $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$ est donc convergente.

Critères de convergence : cas général

Exemple 2 : $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$

Critères de convergence : cas général

Exemple 2 : $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$



Critères de convergence : cas général

Remarques

Critères de convergence : cas général

Remarques

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \cos 1 - \int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2} dt$$

Critères de convergence : cas général

Remarques

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \cos 1 - \int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2} dt$$

On démontre que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ n'est pas absolument convergente.

Critères de convergence : cas général

Remarques

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \cos 1 - \int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2} dt$$

On démontre que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ n'est pas absolument convergente.

$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ est donc semi-convergente.

Critères de convergence : cas général

R3.08 Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Plan

Intégration

Intégrale généralisée

Complements

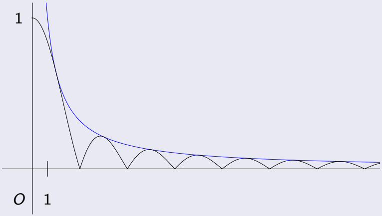
Annexe

Remarques

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \cos 1 - \int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2} dt$$

On démontre que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ n'est pas absolument convergente.

$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ est donc semi-convergente.



Critères de convergence : cas général

$$\int_1^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t} dt$$

Critères de convergence : cas général

R3.08 Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Plan

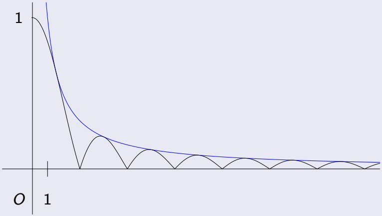
Intégration

Intégrale généralisée

Compléments

Annexe

$$\int_1^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t}\, dt$$



Techniques de calcul

Intégration par parties

Techniques de calcul

Intégration par parties

Soit f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$.

Techniques de calcul

Intégration par parties

Soit f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$.

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

Techniques de calcul

Intégration par parties

Soit f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$.

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

Démonstration

Techniques de calcul

Intégration par parties

Soit f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$.

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

Démonstration

$(f(x)g(x))' = f(x)g'(x) + f'(x)g(x)$

Techniques de calcul

Intégration par parties

Soit f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$.

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

Démonstration

$$(f(x)g(x))' = f(x)g'(x) + f'(x)g(x)$$

$$\int_a^b (f(x)g(x))'\, dx = \int_a^b f(x)g'(x)dx + \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

Techniques de calcul

Intégration par parties

Soit f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$.
$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

Démonstration

$$(f(x)g(x))' = f(x)g'(x) + f'(x)g(x)$$
$$\int_a^b (f(x)g(x))'\ dx = \int_a^b f(x)g'(x)dx + \int_a^b f'(x)g(x)dx$$
$$[f(x)g(x)]_a^b = \int_a^b f(x)g'(x)dx + \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

Techniques de calcul

Intégration par parties

Soit f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$.

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

Démonstration

$$(f(x)g(x))' = f(x)g'(x) + f'(x)g(x)$$
$$\int_a^b (f(x)g(x))'\ dx = \int_a^b f(x)g'(x)dx + \int_a^b f'(x)g(x)dx$$
$$[f(x)g(x)]_a^b = \int_a^b f(x)g'(x)dx + \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

Exemple

Techniques de calcul

Intégration par parties

Soit f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$.

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

Démonstration

$$(f(x)g(x))' = f(x)g'(x) + f'(x)g(x)$$

$$\int_a^b (f(x)g(x))'\, dx = \int_a^b f(x)g'(x)dx + \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

$$[f(x)g(x)]_a^b = \int_a^b f(x)g'(x)dx + \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

Exemple

$$\int_0^1 xe^x dx = [xe^x]_0^1 - \int_0^1 1e^x dx = 1e^1 - 0e^0 - [e^x]_0^1 = e - (e-1) = 1$$

Techniques de calcul

Disposition pratique

Techniques de calcul

Disposition pratique

$$\int_0^1 xe^x dx = [xe^x]_0^1 - \int_0^1 1e^x dx$$

Techniques de calcul

Disposition pratique

$$\int_0^1 xe^x dx = [xe^x]_0^1 - \int_0^1 1e^x dx$$

$$\left| \begin{array}{lcl} f(x) = x & & f'(x) = 1 \\ & \times & \\ g(x) = e^x & & g'(x) = e^x \end{array} \right.$$

Techniques de calcul

Changement de variable

Techniques de calcul

Changement de variable

Soit φ une fonctions de classe C^1 sur un intervalle $[a, b]$ et f une fonction continue sur l'intervalle $\varphi([a, b])$. On a alors :

Techniques de calcul

Changement de variable

Soit φ une fonctions de classe C^1 sur un intervalle $[a, b]$ et f une fonction continue sur l'intervalle $\varphi([a, b])$. On a alors :

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx = \int_a^b f(\varphi(t))\,\varphi'(t)dt$$

Techniques de calcul

Changement de variable

Soit φ une fonctions de classe C^1 sur un intervalle $[a, b]$ et f une fonction continue sur l'intervalle $\varphi([a, b])$. On a alors :

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx = \int_a^b f(\varphi(t))\,\varphi'(t)dt$$

Démonstration

Techniques de calcul

Changement de variable

Soit φ une fonctions de classe C^1 sur un intervalle $[a, b]$ et f une fonction continue sur l'intervalle $\varphi([a, b])$. On a alors :

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx = \int_a^b f(\varphi(t))\,\varphi'(t)dt$$

Démonstration

Soit F une primitive de f.

Techniques de calcul

Changement de variable

Soit φ une fonctions de classe C^1 sur un intervalle $[a, b]$ et f une fonction continue sur l'intervalle $\varphi([a, b])$. On a alors :

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx = \int_a^b f(\varphi(t))\,\varphi'(t)dt$$

Démonstration

Soit F une primitive de f.

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx = [F(x)]_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} = [F(\varphi(t))]_a^b = \int_a^b f(\varphi(t))\,\varphi'(t)dt$$

Techniques de calcul

Changement de variable

Soit φ une fonctions de classe C^1 sur un intervalle $[a, b]$ et f une fonction continue sur l'intervalle $\varphi([a, b])$. On a alors :

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

Démonstration

Soit F une primitive de f.

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx = [F(x)]_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} = [F(\varphi(t))]_a^b = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

car $(F(\varphi(t)))' = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$

Techniques de calcul

Exemple et disposition pratique : $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$

Techniques de calcul

Exemple et disposition pratique : $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$

Formule de changement de variable : $\boxed{x = \sin t}$

Techniques de calcul

Exemple et disposition pratique : $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$

Formule de changement de variable : $\boxed{x = \sin t}$

1) $\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{\cos^2 t} = |\cos t|$

Techniques de calcul

Exemple et disposition pratique : $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$

Formule de changement de variable : $\boxed{x = \sin t}$

1) $\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{\cos^2 t} = |\cos t|$

2) $dx = d\sin t = \cos t\, dt$

Techniques de calcul

Exemple et disposition pratique : $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$

Formule de changement de variable : $\boxed{x = \sin t}$

1) $\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{\cos^2 t} = |\cos t|$

2) $dx = d\sin t = \cos t\, dt$

3) $x = 0 = \sin 0 \; : \; t = 0$, $x = 1 = \sin\frac{\pi}{2} \; : \; t = \dfrac{\pi}{2}$

Techniques de calcul

Exemple et disposition pratique : $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$

Formule de changement de variable : $\boxed{x = \sin t}$

1) $\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{\cos^2 t} = |\cos t|$

2) $dx = d\sin t = \cos t\, dt$

3) $x = 0 = \sin 0$: $t = 0$, $x = 1 = \sin\frac{\pi}{2}$: $t = \dfrac{\pi}{2}$

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos t| \cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt$$

car $\cos t \geq 0$ sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$

Techniques de calcul

Exemple et disposition pratique : $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$

Formule de changement de variable : $\boxed{x = \sin t}$

1) $\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{\cos^2 t} = |\cos t|$

2) $dx = d\sin t = \cos t\, dt$

3) $x = 0 = \sin 0 : \ t = 0$, $x = 1 = \sin\frac{\pi}{2} : \ t = \dfrac{\pi}{2}$

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos t| \cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt$$

car $\cos t \geq 0$ sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$

$$\boxed{\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt}$$

Techniques de calcul

Exemple et disposition pratique : $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$

Formule de changement de variable : $\boxed{x = \sin t}$

1) $\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{\cos^2 t} = |\cos t|$

2) $dx = d\sin t = \cos t\, dt$

3) $x = 0 = \sin 0 \ : \ t = 0$, $x = 1 = \sin\frac{\pi}{2} \ : \ t = \dfrac{\pi}{2}$

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos t| \cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt$$

car $\cos t \geq 0$ sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$

$$\boxed{\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt}$$

$\cos^2 t = \dfrac{1+\cos 2t}{2}$

Techniques de calcul

Exemple et disposition pratique : $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$

Formule de changement de variable : $\boxed{x = \sin t}$

1) $\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{\cos^2 t} = |\cos t|$

2) $dx = d\sin t = \cos t\, dt$

3) $x = 0 = \sin 0 \,:\; t = 0 \;,\; x = 1 = \sin\frac{\pi}{2} \,:\; t = \frac{\pi}{2}$

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos t| \cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt$$

car $\cos t \geq 0$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

$$\boxed{\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt}$$

$\cos^2 t = \dfrac{1+\cos 2t}{2}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2} dt = \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4} + \frac{\sin 2\frac{\pi}{2}}{4} - \left(\frac{0}{2} + \frac{\sin 2.0}{4}\right) = \frac{\pi}{4}$$

Techniques de calcul

Autre exemple : $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+e^x}\,dx$

Techniques de calcul

Autre exemple : $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+e^x}dx$

Formule de changement de variable : $t = e^x$ ou $\boxed{x = \ln t}$

Techniques de calcul

Autre exemple : $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+e^x}\,dx$

Formule de changement de variable : $t = e^x$ ou $\boxed{x = \ln t}$

1) $\dfrac{1}{1+e^x} = \dfrac{1}{1+e^{\ln t}} = \dfrac{1}{1+t}$

Techniques de calcul

R3.08 Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Plan

Intégration

Intégrale généralisée

Compléments

Annexe

Autre exemple : $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+e^x}dx$

Formule de changement de variable : $t = e^x$ ou $\boxed{x = \ln t}$

1) $\displaystyle \frac{1}{1+e^x} = \frac{1}{1+e^{\ln t}} = \frac{1}{1+t}$

2) $\displaystyle dx = d\ln t = \frac{1}{t}dt$

Techniques de calcul

Autre exemple : $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+e^x}dx$

Formule de changement de variable : $t = e^x$ ou $\boxed{x = \ln t}$

1) $\displaystyle\frac{1}{1+e^x} = \frac{1}{1+e^{\ln t}} = \frac{1}{1+t}$

2) $\displaystyle dx = d\ln t = \frac{1}{t}dt$

3) $x = 0 = \ln 1 : \ t = 1 \ , \ x = 1 = \ln e : \ t = e$

Techniques de calcul

Autre exemple : $\int_0^1 \frac{1}{1+e^x}dx$

Formule de changement de variable : $t = e^x$ ou $\boxed{x = \ln t}$

1) $\frac{1}{1+e^x} = \frac{1}{1+e^{\ln t}} = \frac{1}{1+t}$

2) $dx = d\ln t = \frac{1}{t}dt$

3) $x = 0 = \ln 1 :\ t = 1\ ,\ x = 1 = \ln e :\ t = e$

$$\boxed{\int_0^1 \frac{1}{1+e^x}dx = \int_1^e \frac{1}{t(t+1)}dt}$$

Techniques de calcul

R3.08 Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Autre exemple : $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+e^x}\,dx$

Formule de changement de variable : $t = e^x$ ou $\boxed{x = \ln t}$

1) $\displaystyle \frac{1}{1+e^x} = \frac{1}{1+e^{\ln t}} = \frac{1}{1+t}$

2) $\displaystyle dx = d\ln t = \frac{1}{t}dt$

3) $x = 0 = \ln 1 : \ t = 1 \ , \ x = 1 = \ln e : \ t = e$

$$\boxed{\int_0^1 \frac{1}{1+e^x}\,dx = \int_1^e \frac{1}{t(t+1)}\,dt}$$

Or $\displaystyle \frac{1}{t(t+1)} = \frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}$.

Techniques de calcul

Autre exemple : $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+e^x}dx$

Formule de changement de variable : $t = e^x$ ou $\boxed{x = \ln t}$

1) $\displaystyle \frac{1}{1+e^x} = \frac{1}{1+e^{\ln t}} = \frac{1}{1+t}$

2) $\displaystyle dx = d\ln t = \frac{1}{t}dt$

3) $x = 0 = \ln 1 : \ t = 1$, $x = 1 = \ln e : \ t = e$

$$\boxed{\int_0^1 \frac{1}{1+e^x}dx = \int_1^e \frac{1}{t(t+1)}dt}$$

Or $\displaystyle \frac{1}{t(t+1)} = \frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}$.

$\displaystyle \int_1^e \frac{1}{t(t+1)}dt = \int_1^e \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\right)dt = [\ln t - \ln(t+1)]_1^e = \ln e - \ln(e+1) - (\ln 1 - \ln(1+1)) =$
$\displaystyle 1 + \ln\frac{2}{e+1}$

Techniques de calcul

Autre exemple : $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+e^x}\,dx$

Techniques de calcul

Autre exemple : $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+e^x}\,dx$

Avec $\boxed{t = e^x}$

Techniques de calcul

Autre exemple : $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+e^x}dx$

Avec $\boxed{t = e^x}$

1) $\displaystyle\frac{1}{1+e^x} = \frac{1}{1+t}$

Techniques de calcul

Autre exemple : $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+e^x}dx$

Avec $\boxed{t = e^x}$

1) $\displaystyle\frac{1}{1+e^x} = \frac{1}{1+t}$

2) $\displaystyle dt = de^x = e^x dx = tdx \; : \; dx = \frac{dt}{t}$

Techniques de calcul

Autre exemple : $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+e^x}dx$

Avec $\boxed{t = e^x}$

1) $\dfrac{1}{1+e^x} = \dfrac{1}{1+t}$

2) $dt = de^x = e^x dx = tdx \,:\, dx = \dfrac{dt}{t}$

3) $x = 0$: $t = e^0 = 1$, $x = 1 : t = e^1 = e$

Techniques de calcul

Autre exemple : $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+e^x}dx$

Avec $\boxed{t = e^x}$

1) $\dfrac{1}{1+e^x} = \dfrac{1}{1+t}$

2) $dt = de^x = e^x dx = tdx \; : \; dx = \dfrac{dt}{t}$

3) $x = 0$: $t = e^0 = 1$, $x = 1 : t = e^1 = e$

$$\boxed{\int_0^1 \frac{1}{1+e^x}dx = \int_1^e \frac{1}{t(t+1)}dt}$$