Documents autorisés : cours, TD, notes manuscrites, calculatrice. Barème indicatif : 4 + 4 + 4 + 4 + 4 Durée : 1h 30.

Exercice 1

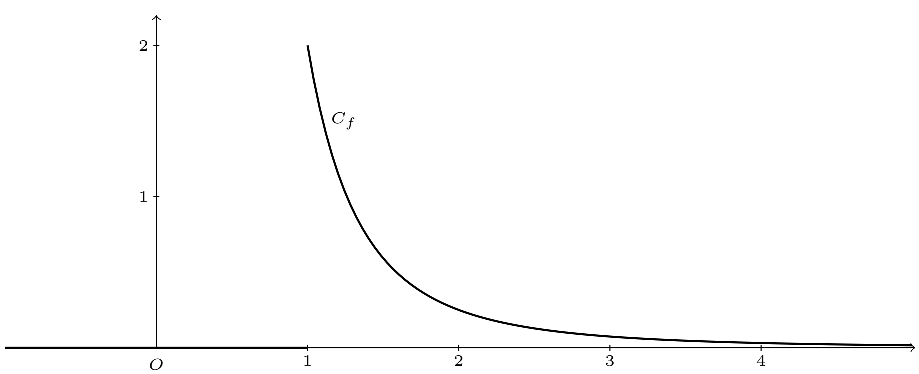
Calcul intégral

On note f la fonction définie et continue par morceaux par $f(x) = \dfrac{2}{x^3}$ sur $[1, +\infty[$ et $f(x) = 0$ sinon.

1. Soit $x \geq 1$. Calculer $F(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{2}{t^3}\,dt$.
2. En déduire $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{2}{x^3}\,dx$.

   Indication : préciser $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{2}{t^3}\,dt$, si cette limite existe.
3. En déduire que f est une densité de probabilité.

   Indication : on pourra vérifier que f est positive et continue par morceaux, ainsi que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$.
4. On note X une variable aléatoire telle que $P(X \leq x) = \displaystyle\int_1^x \frac{2}{t^3}\,dt$.
   (a) Calculer $P(2 \leq X \leq 3)$, puis interpréter graphiquement en représentant f.
   (b) Calculer $P(X \geq 2)$, puis interpréter graphiquement en représentant f.



Exercice 2

Calcul intégral

1. Calculer $\displaystyle\int_1^2 2te^t\,dt$ en utilisant une intégration par parties.
2. Calculer $\displaystyle\int_1^4 e^{\sqrt{x}}\,dx$ en utilisant le changement de variable $t = \sqrt{x}$.

Exercice 3

Loi normale
Sur une chaîne d'embouteillage dans une brasserie, la quantité X (en cl) de liquide fournie par la machine pour remplir chaque bouteille de contenance 110 cl peut être modélisée par une variable aléatoire de loi normale de moyenne μ et d'écart-type $\sigma = 2$.

1. Le directeur de la coopérative souhaite qu'il y ait moins de 1 % de bouteilles qui débordent au risque de ne plus suivre la législation.
   Il se demande quelle peut être alors la valeur maximale de μ.
   (a) On pose $T \sim \mathcal{N}(0\,;\,1)$. Préciser les nombres u tel que $P(T > u) < 0,01$.
   (b) En déduire les nombres μ tels que $P(X > 110) < 0,01$ avec $X \sim \mathcal{N}(\mu\,;\,2)$.
   (c) Quelle peut être alors la valeur maximale de μ ?
2. Le directeur de la coopérative souhaite à présent qu'il y ait moins de 0,5 % de bouteilles contenant moins d'un litre pour suivre une autre règle de la législation. À quelle valeur minimale de la moyenne μ peut-on régler la machine pour respecter cette législation ?
   Indication : il s'agit de déterminer la valeur minimale de μ tel que $X \sim \mathcal{N}(\mu\,;\,2)$ et $P(X < 100) < 0,005$.
3. La législation impose qu'il y ait moins de 1 % de bouteilles qui débordent et moins de 0,5 % de bouteilles contenant moins d'un litre.
   Peut-on satisfaire à ces deux conditions ?

Exercice 4

Intervalle de fluctuation
Dans une université, il y a $p = 20$ % de sportifs de haut niveau. On prélève un échantillon de $n = 30$ étudiants de manière aléatoire.
Dans cet échantillon, il y a $n_s = 9$ sportifs de haut niveau. On se demande si l'échantillon est représentatif pour ce critère en construisant un intervalle de fluctuation au seuil de risque $\alpha = 5$ % ou de niveau $1 - \alpha = 95$ %.

1. Préciser les paramètres de la loi binomiale suivie par le nombre X de sportifs de haut niveau dans un échantillon aléatoire de $n = 30$ étudiants.
2. On pose $F(x) = P(X \leq x)$.
   Préciser l'entier n_1 tel que $F(n_1 - 1) \leq \dfrac{\alpha}{2}$ et $F(n_1) > \dfrac{\alpha}{2}$.
   Indication : on pourra utiliser une table de probabilités.
3. Déterminer l'entier n_2 tel que $F(n_2 - 1) < 1 - \dfrac{\alpha}{2}$ et $F(n_2) \geq 1 - \dfrac{\alpha}{2}$.
4. En déduire l'intervalle de fluctuation $I = \left[\dfrac{n_1}{n}, \dfrac{n_2}{n}\right]$ obtenu au seuil de risque $\alpha = 5$ % (ou de niveau $1 - \alpha = 95$ %) pour la proportion de sportifs de haut niveau dans un échantillon aléatoire de $n = 30$ étudiants.
5. Calculer $P\left(\dfrac{n_1}{n} \leq \dfrac{X}{n} \leq \dfrac{n_2}{n}\right) = P(n_1 \leq X \leq n_2)$.

6. La proportion observée $\dfrac{n_s}{n}$ est-elle dans l'intervalle I ?
7. L'échantillon est-il représentatif pour ce critère ?

Exercice 5

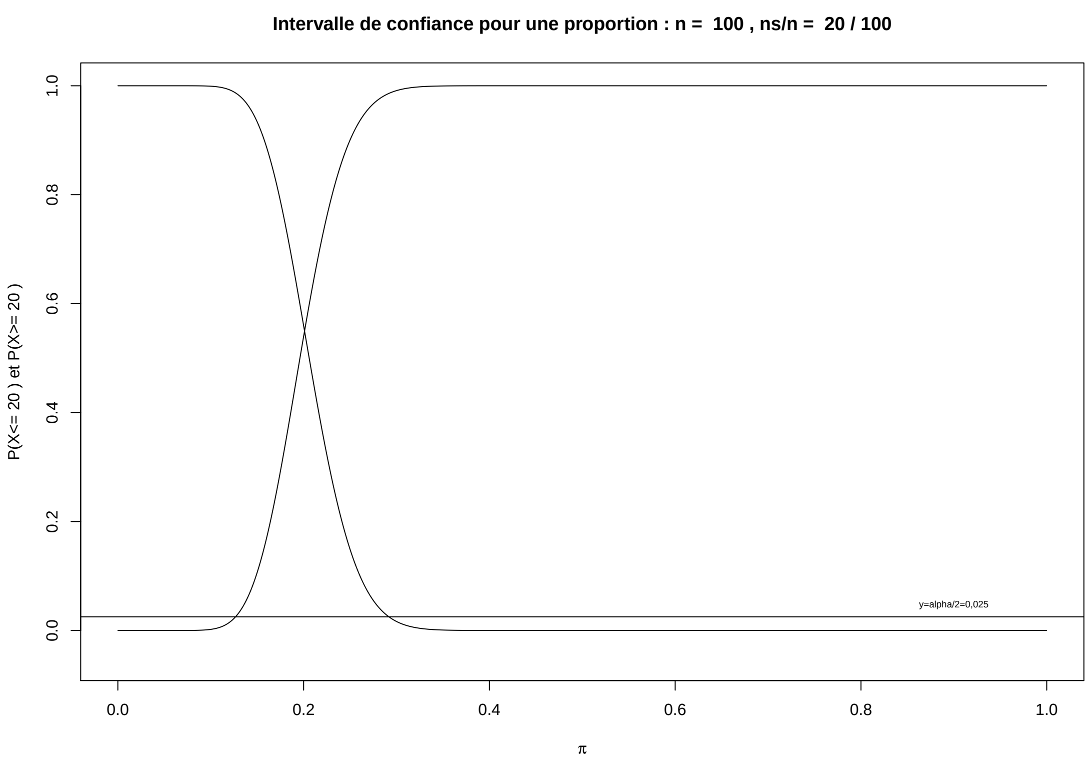
Intervalle de confiance

Dans un IUT, il y a une proportion π de sportifs de haut niveau. On prélève un échantillon de $n = 100$ étudiants de manière aléatoire. Il y a $n_s = 20$ sportifs de haut niveau.
On va déterminer un intervalle de confiance pour π de niveau $1 - \alpha = 0,95$ par différentes méthodes.

1. **Méthode 1 : méthode "exacte" (intervalle de confiance de Clopper-Pearson)**

   On cherche à déterminer ici un intervalle de confiance sans utiliser d'approximation. L'intervalle de confiance que l'on cherche à déterminer est l'ensemble des nombres $\pi \in \,]0, 1[$ vérifiant les trois conditions :
   - $X \sim \mathcal{B}(n, \pi)$,
   - $P(X \leq 20) \geq 0,025$,
   - $P(X \geq 20) \geq 0,025$.

   On a représenté sur le même graphique
   (a) $P(X \leq 20)$ en fonction de π,
   (b) $P(X \geq 20)$ en fonction de π,
   (c) la droite $D : y = 0,025$.



En déduire de manière approchée (graphiquement) l'intervalle I_0 des nombres π tels que $X \sim \mathcal{B}(n, \pi)$, $P(X \geq 20) \geq 0,025$ et $P(X \leq 20) \geq 0,025$.

2. **Méthode 2 : approximation gaussienne**

   (a) **Approche 1**

   Comme $n \geq 30$, on peut tenter une approximation par une loi normale :
   $\dfrac{\overline{X} - \pi}{\sqrt{\pi(1-\pi)/n}} \sim \mathcal{N}(0, 1)$.
   On pose $u_{1-\alpha/2}$ le nombre tel que $P\left(T \leq u_{1-\alpha/2}\right) = 1 - \dfrac{\alpha}{2}$, avec $T \sim \mathcal{N}(0;\, 1)$.
   $\left|\dfrac{\overline{X} - \pi}{\sqrt{\pi(1-\pi)/n}}\right| \leq u_{1-\alpha/2}$ s'écrit $\dfrac{\left(\overline{X} - \pi\right)^2}{\pi(1-\pi)/n} \leq u^2_{1-\alpha/2}$.
   On remplace $\dfrac{\overline{X} - \pi}{\sqrt{\pi(1-\pi)/n}}$ par $\dfrac{\overline{X} - \pi}{\sqrt{\overline{X}(1-\overline{X})/n}}$ qui suit approximativement $\mathcal{N}(0, 1)$.
   On obtient un nouvel intervalle de confiance :
   $[T_1,\, T_2] = \left[\overline{X} - u_{1-\alpha/2}\sqrt{\overline{X}(1-\overline{X})/n},\, \overline{X} + u_{1-\alpha/2}\sqrt{\overline{X}(1-\overline{X})/n}\right]$.
   En déduire la réalisation $I_1 = [t_1,\, t_2]$ obtenue.
   Indications : déterminer $u_{1-\alpha/2}$ en utilisant la table de la loi normale centrée et réduite, puis préciser t_1 et t_2 en posant $\overline{x} = \dfrac{n_s}{n}$.

   (b) **Approche 2**

   $\forall \pi \in [0, 1]$ $\pi(1-\pi) \leq 1/4$.
   On obtient alors l'intervalle de confiance $\left[\overline{X} - \dfrac{u_{1-\alpha/2}}{2\sqrt{n}}, \overline{X} + \dfrac{u_{1-\alpha/2}}{2\sqrt{n}}\right]$.
   En déduire la réalisation $I_2 = [t'_1,\, t'_2]$ obtenue.

3. **Synthèse**

Reproduire et compléter le tableau suivant :

I_0	
I_1	
I_2	