Documents autorisés : cours, TD, notes manuscrites. Barème indicatif : 4,5 + 3 + 4,5 + 4 + 4. Durée : 1h 30.

Exercice 1

Le nombre de manifestants (en milliers) selon les syndicats et selon la police et le ministère de l'intérieur relevés lors de manifestations le 29 janvier 2009 est donné par le tableau suivant. *Source : Le Monde 29 janvier 2009.*

Ville	Evreux	Brive	Niort	Tarbes	Marseille	Paris
Police X	3,5	7	8	16	24	65
Syndicats Y	20	10	12	28	300	300

1. Représenter graphiquement le nuage de points (X en abscisse, Y en ordonnée).
2. Préciser $\overline{x}$, $\overline{y}$, σ_X^2, σ_Y^2 et σ_{XY}.
3. Ajuster Y en X selon la méthode des moindres carrés et préciser la formule obtenue : $Y = aX + b$.
4. Tracer la droite D d'équation $y = ax + b$ obtenue sur le graphique précédent.
5. Etudier la qualité de l'ajustement en précisant r^2.
6. Préciser la somme des résidus : $S = \sum_{i=1}^{6} (y_i - (ax_i + b))^2$.

   Indication : $\sum_{i=1}^{6} (y_i - (ax_i + b))^2 = 6\sigma_Y^2(1 - r^2)$.
7. En utilisant la formule obtenue, donner une estimation du nombre de manifestants donné par les syndicats pour une évaluation de 20 000 manifestants donnée par la police.

Exercice 2

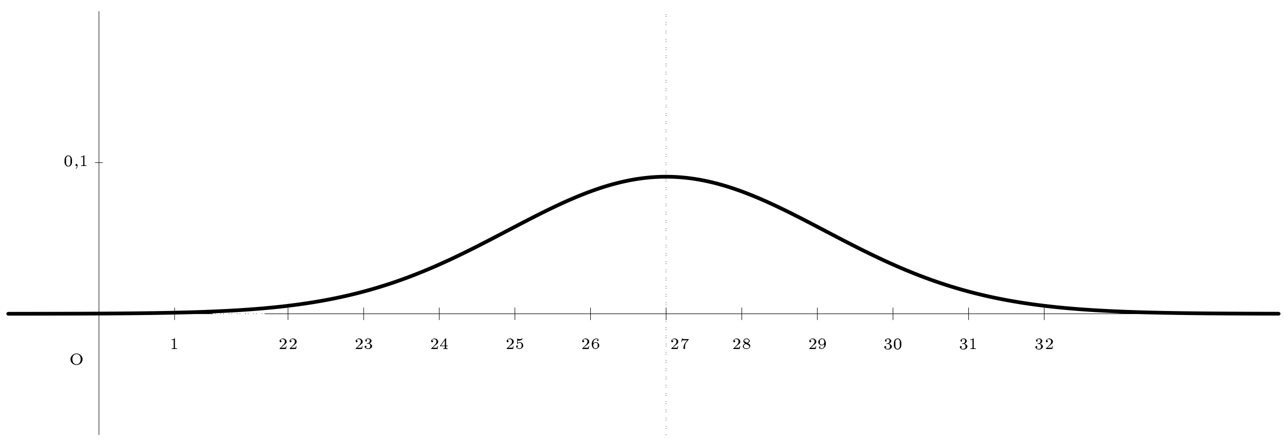
La variable aléatoire X qui donne le nombre d'étudiants absents dans un groupe de 25 étudiants lors d'une séance d'enseignement suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(25, \frac{4}{100}\right)$.

1. Préciser $P(X = 0)$, $P(X = 1)$ et $P(X \geq 2)$.
2. On procède à présent à une approximation suivant la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ avec $\lambda = E(X)$.
   (a) Préciser λ.
   (b) Reprendre les calculs et préciser $P(X = 0)$, $P(X = 1)$ et $P(X \geq 2)$. Comparer.
3. Le groupe participe à 10 séances d'enseignement.
   Préciser la probabilité qu'il y ait sur l'ensemble des 10 séances
   (a) aucun absent,
   (b) au moins un absent,
   (c) exactement 1 absent.

Exercice 3

En France, 27 % des élèves de troisième de collège portent un appareil dentaire.
On note X la variable aléatoire qui donne le nombre d'élèves qui portent un appareil dentaire dans un groupe de 100 élèves de troisième.

1. On suppose que X suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(100,\ \frac{27}{100}\right)$.
   Préciser $P\left(X = 30\right)$ sans chercher à calculer ce nombre.
2. On procède à présent à une approximation suivant la loi normale $\mathcal{N}\left(m, \sigma\right)$ avec $m = E(X)$ et $\sigma = \sqrt{V(X)}$.
   (a) Préciser m et σ.
   (b) Quelle est la probabilité
      i. que 30 élèves portent un appareil dentaire : $P\left(29,5 \leq X \leq 30,5\right)$?
      ii. qu'entre 20 et 30 élèves portent un appareil dentaire : $P\left(19,5 \leq X \leq 30,5\right)$?
   (c) Préciser le plus petit nombre d'élèves n portant un appareil dentaire tel que $P\left(-0,5 \leq X \leq n + 0,5\right) \geq 0,75$. Interpréter graphiquement en reproduisant la représentation suivante :



Exercice 4

Les réponses aux questions de cet exercice seront données sous la forme de fractions irréductibles.

La loi conjointe du couple de variables aléatoires (X_1, X_2) est donnée par :

$X_1 \backslash X_2$	-1	0	1
0	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{6}$
1	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	0

On pose $X_3 = max(X_1, X_2)$.

1. Préciser la loi conjointe du couple de variables aléatoires (X_1, X_3).
   On pourra présenter les résultats dans un tableau.
2. Préciser
   (a) la loi marginale de X_1.
   (b) la loi marginale de X_3.
3. Est-ce que X_1 et X_3 sont indépendantes ?
4. (a) Déterminer $E(X_1)$, $E(X_3)$, $E(X_1X_3)$, $V(X_1)$ et $V(X_3)$.
   (b) En déduire $E(X_1 + X_3)$, $cov(X_1, X_3)$ et $V(X_1 + X_3)$.
   On présentera les résultats dans un tableau :

$E(X_1)$	$E(X_3)$	$E(X_1X_3)$	$V(X_1)$	$V(X_3)$	$E(X_1+X_3)$	$cov(X_1,X_3)$	$V(X_1+X_3)$

Indication :
$E(X_1 + X_3) = E(X_1) + E(X_3)$, $cov(X_1, X_3) = E(X_1X_3) - E(X_1)E(X_3)$ et $V(X_1 + X_3) = V(X_1) + V(X_3) + 2cov(X_1, X_3)$.

Exercice 5

On a procédé à N lancers d'un dé à six faces et on a relevé le numéro x_i de la face supérieure à chaque jet. Les résultats obtenus sont précisés dans le tableau suivant ($N = 1200$).

Variable X	1	2	3	4	5	6	Total
Effectif observé o_i	183	213	197	200	208	199	1200

1. Dans le cas d'un dé parfait, on considère que les effectifs théoriques t_i devraient être égaux à $\frac{N}{6}$.
   Reproduire et compléter le tableau :

Variable X	1	2	3	4	5	6	Total
Effectif observé o_i	183	213	197	200	208	199	1200
Effectif théorique t_i	200	200	200	200	200	200	1200
$y_i = o_i - t_i$							

2. Reproduire et compléter le tableau pour la variable Y :

Moyenne	
Variance	
Ecart-type	

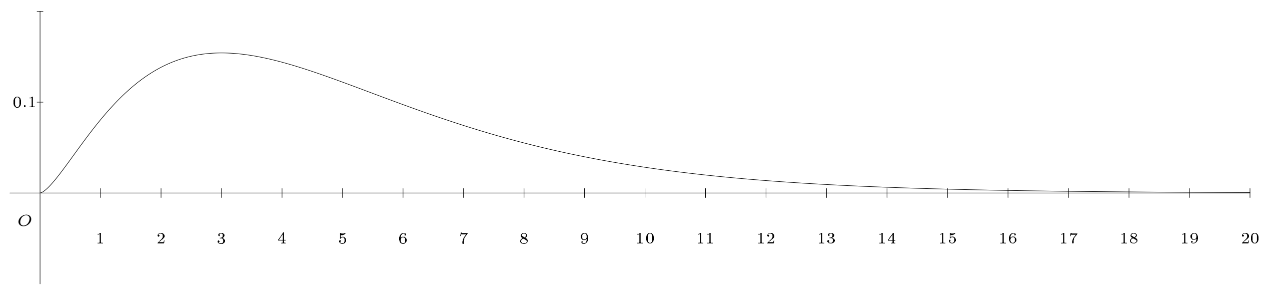
3. On définit l'écart quadratique relatif par $e_r = \sum_{i=1}^{6} \frac{(o_i - t_i)^2}{t_i}$.

   Préciser e_r.

   Pour déterminer si le dé est parfait ou non on utilise la méthode suivante. Si e_r est trop important, on peut remettre en cause l'hypothèse : *le dé est parfait*. Sinon, on ne la rejette pas.

On démontre que sous l'hypothèse H_0 : "*le dé est parfait*", la variable $E_r = \displaystyle\sum_{i=1}^{6} \frac{(O_i - T_i)^2}{T_i}$ suit la loi du χ^2 définie par $P\left(E_r \leq e_r\right) = \displaystyle\int_0^{e_r} f(x)\,dx$ avec $f(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{6\sqrt{\pi}} x^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{x}{2}}$.

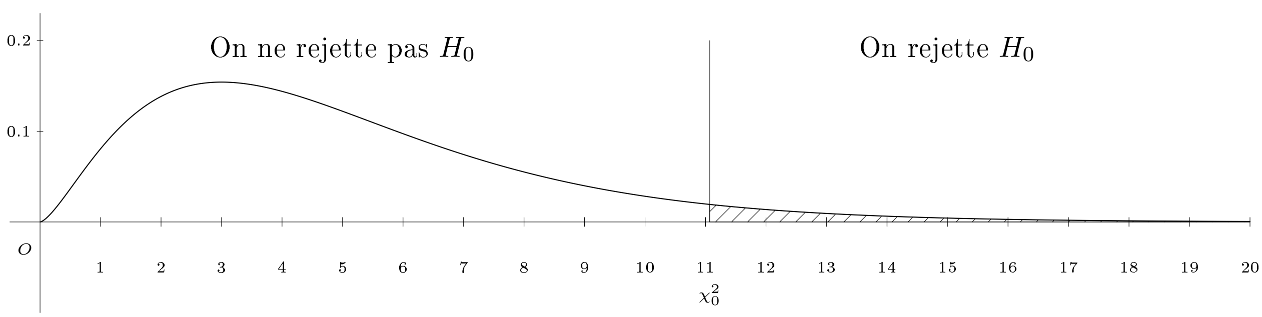
Représentation graphique de $f(x)$



Fonction de répartition

e_r	2,675	4,351	6,626	8,115	9,236	11,070	15,086	16,750	20,515
$P\left(E_r \leq e_r\right)$	0,250	0,500	0,750	0,850	0,900	0,950	0,990	0,995	0,999

On note χ_0^2 le nombre tel que $P\left(E_r \leq \chi_0^2\right) = 0,95$. Si $e_r \leq \chi_0^2$ alors on ne rejette pas l'hypothèse H_0 : "le dé est parfait" au seuil de 5 %. Sinon, on rejette l'hypothèse H_0 : il y a un doute sur le dé.



4. (a) Préciser χ_0^2.
   (b) Comparer e_r obtenu dans la question 3 et χ_0^2.
   (c) Conclure quant au dé.
   (d) On répète 12 fois l'expérience consistant à jeter N fois le dé et à relever le numéro sur la face supérieure.
   Sous l'hypothèse H_0, préciser la probabilité que l'écart e_r
      i. ne dépasse jamais χ_0^2,
      ii. dépasse χ_0^2 au moins une fois,
      iii. dépasse χ_0^2 exactement une fois.