R3.08

Probabilités

François Morellet 40 000 carrés

> Ce sont coups du hasard, dont on n'est point garant.
>
> Molière

Ensemble dénombrable

Définitions

Ensemble dénombrable

Définitions

Un ensemble E est dit dénombrable s'il existe une bijection de $\mathbb{N}$ sur E.

Ensemble dénombrable

Définitions

Un ensemble E est dit dénombrable s'il existe une bijection de $\mathbb{N}$ sur E.

Exemple

Ensemble dénombrable

Définitions

Un ensemble E est dit dénombrable s'il existe une bijection de $\mathbb{N}$ sur E.

Exemple

$2\mathbb{N}$ est dénombrable.

Ensemble dénombrable

Définitions

Un ensemble E est dit dénombrable s'il existe une bijection de $\mathbb{N}$ sur E.

Exemple

$2\mathbb{N}$ est dénombrable.
$f : \mathbb{N} \to 2\mathbb{N}$ définie par $f(n) = 2n$ est une bijection.

Ensemble des parties d'un ensemble

Définition

Ensemble des parties d'un ensemble

Définition

L'ensemble des parties d'un ensemble est l'ensemble de toutes ses parties ou sous-ensembles.

Ensemble des parties d'un ensemble

Définition

L'ensemble des parties d'un ensemble est l'ensemble de toutes ses parties ou sous-ensembles.

Notation

Ensemble des parties d'un ensemble

Définition

L'ensemble des parties d'un ensemble est l'ensemble de toutes ses parties ou sous-ensembles.

Notation

$\mathcal{P}(E)$

Ensemble des parties d'un ensemble

Définition

L'ensemble des parties d'un ensemble est l'ensemble de toutes ses parties ou sous-ensembles.

Notation

$\mathcal{P}(E)$

Exemple

Ensemble des parties d'un ensemble

Définition

L'ensemble des parties d'un ensemble est l'ensemble de toutes ses parties ou sous-ensembles.

Notation

$\mathcal{P}(E)$

Exemple

$E = \{0, 1\}$

Ensemble des parties d'un ensemble

Définition

L'ensemble des parties d'un ensemble est l'ensemble de toutes ses parties ou sous-ensembles.

Notation

$\mathcal{P}(E)$

Exemple

$E = \{0, 1\}$
$\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$

Partition

Définition

Partition

Définition

Une partition d'un ensemble E est un ensemble de parties de E disjointes et non vides, dont la réunion est E.

Partition

Définition

Une partition d'un ensemble E est un ensemble de parties de E disjointes et non vides, dont la réunion est E.

Exemple

Partition

Définition

Une partition d'un ensemble E est un ensemble de parties de E disjointes et non vides, dont la réunion est E.

Exemple

$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Partition

Définition

Une partition d'un ensemble E est un ensemble de parties de E disjointes et non vides, dont la réunion est E.

Exemple

$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
$P = \{2, 4, 6\}$ et $I = \{1, 3, 5\}$ forment une partition de E.

Image et image réciproque

Image

Image et image réciproque

Image

Soit $f : E \to F$ une application.

Image et image réciproque

Image

Soit $f : E \to F$ une application.
Pour tout partie A de E, $f(A) = \{f(x),\ x \in A\}$

Image et image réciproque

Image

Soit $f : E \to F$ une application.
Pour tout partie A de E, $f(A) = \{f(x),\ x \in A\}$
Cas particulier : l'image de f est $f(E)$.

R3.08 Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Plan

Rappels

Probabilités

Probabilité conditionnelle

Indépendance

Annexe

Image et image réciproque

Image

Soit $f : E \to F$ une application.
Pour tout partie A de E, $f(A) = \{f(x),\ x \in A\}$
Cas particulier : l'image de f est $f(E)$.

Image réciproque

Image et image réciproque

Image

Soit $f : E \to F$ une application.
Pour tout partie A de E, $f(A) = \{f(x),\ x \in A\}$
Cas particulier : l'image de f est $f(E)$.

Image réciproque

Pour toute partie B de F, $f^{-1}(B) = \{x,\ x \in E \text{ et } f(x) \in B\}$

Image et image réciproque

Propriétés

Image et image réciproque

Propriétés

- $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

Image et image réciproque

Propriétés

- $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$
- $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ (égalité si et seulement si f est injective)

Image et image réciproque

Propriétés

- $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$
- $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ (égalité si et seulement si f est injective)
- $f\left(\overline{A}\right) = \overline{f(A)}$ si et seulement si f est bijective

Image et image réciproque

R3.08 Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

- Plan
- Rappels
- Probabilités
- Probabilité conditionnelle
- Indépendance
- Annexe

Propriétés

- $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$
- $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ (égalité si et seulement si f est injective)
- $f\left(\overline{A}\right) = \overline{f(A)}$ si et seulement si f est bijective
- $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$

Image et image réciproque

Propriétés

- $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$
- $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ (égalité si et seulement si f est injective)
- $f\left(\overline{A}\right) = \overline{f(A)}$ si et seulement si f est bijective
- $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$
- $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$

Image et image réciproque

R3.08 Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Plan

Rappels

Probabilités

Probabilité conditionnelle

Indépendance

Annexe

Propriétés

- $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$
- $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ (égalité si et seulement si f est injective)
- $f\left(\overline{A}\right) = \overline{f(A)}$ si et seulement si f est bijective
- $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$
- $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$
- $f^{-1}\left(\overline{A}\right) = \overline{f^{-1}(A)}$

Expérience aléatoire

Expérience aléatoire

Je réputais presque pour faux tout ce qui n'était que vraisemblable.

Discours de la méthode, René Descartes

Expérience aléatoire

Je réputais presque pour faux tout ce qui n'était que vraisemblable.

Discours de la méthode, René Descartes

Expérience aléatoire

Expérience aléatoire

Je réputais presque pour faux tout ce qui n'était que vraisemblable.

Discours de la méthode, René Descartes

Expérience aléatoire

Une expérience aléatoire est une expérience reproductible dont on ne connaît pas l'issue (le résultat) à l'avance tout en en connaissant toutes les issues possibles.

Expérience aléatoire

Je réputais presque pour faux tout ce qui n'était que vraisemblable.

Discours de la méthode, René Descartes

Expérience aléatoire

Une expérience aléatoire est une expérience reproductible dont on ne connaît pas l'issue (le résultat) à l'avance tout en en connaissant toutes les issues possibles.
L'ensemble des issues possibles est appelé l'univers des possibles et souvent noté Ω.

Expérience aléatoire

Je réputais presque pour faux tout ce qui n'était que vraisemblable.

Discours de la méthode, René Descartes

Expérience aléatoire

Une expérience aléatoire est une expérience reproductible dont on ne connaît pas l'issue (le résultat) à l'avance tout en en connaissant toutes les issues possibles.
L'ensemble des issues possibles est appelé l'univers des possibles et souvent noté Ω.
Un élément ω de Ω est aussi appelé réalisation possible ou épreuve.

Expérience aléatoire

Expérience aléatoire

Exemples

Expérience aléatoire

Exemples

Une expérience aléatoire consiste à relever Pile ou Face sur la face supérieure d'une pièce lancée en l'air.

Expérience aléatoire

Exemples

Une expérience aléatoire consiste à relever Pile ou Face sur la face supérieure d'une pièce lancée en l'air.
$\Omega = \{P, F\}$

Expérience aléatoire

Exemples

Une expérience aléatoire consiste à relever Pile ou Face sur la face supérieure d'une pièce lancée en l'air.
$\Omega = \{P, F\}$
Une expérience aléatoire consiste à relever la suite des nombres lus sur la face supérieure d'un dé parfait lancé à n reprises ($n \geq 1$).

Expérience aléatoire

Exemples

Une expérience aléatoire consiste à relever Pile ou Face sur la face supérieure d'une pièce lancée en l'air.
$\Omega = \{P, F\}$
Une expérience aléatoire consiste à relever la suite des nombres lus sur la face supérieure d'un dé parfait lancé à n reprises ($n \geq 1$).
$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^n$

Expérience aléatoire

Exemples

Une expérience aléatoire consiste à relever Pile ou Face sur la face supérieure d'une pièce lancée en l'air.
$\Omega = \{P, F\}$
Une expérience aléatoire consiste à relever la suite des nombres lus sur la face supérieure d'un dé parfait lancé à n reprises ($n \geq 1$).
$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^n$
Une expérience aléatoire consiste à relever le nombre de 6 lus sur la face supérieure d'un dé parfait lancé à n reprises ($n \geq 1$).

Expérience aléatoire

R3.08
Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Plan

Rappels

Probabilités

Probabilité conditionnelle

Indépendance

Annexe

Exemples

Une expérience aléatoire consiste à relever Pile ou Face sur la face supérieure d'une pièce lancée en l'air.
$\Omega = \{P, F\}$
Une expérience aléatoire consiste à relever la suite des nombres lus sur la face supérieure d'un dé parfait lancé à n reprises ($n \geq 1$).
$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^n$
Une expérience aléatoire consiste à relever le nombre de 6 lus sur la face supérieure d'un dé parfait lancé à n reprises ($n \geq 1$).
$\Omega = \{0, 1, 2, 3, \cdots, n\}$

Événement

Événement

Événement

Événement

Événement

Un sous-ensemble A de Ω est appelé un événement.

Événement

Événement

Un sous-ensemble A de Ω est appelé un événement.
Un événement A est dit réalisé lors d'une expérience aléatoire si l'épreuve ω réalisée ou obtenue appartient à A.

Événement

Événement

Un sous-ensemble A de Ω est appelé un événement.
Un événement A est dit réalisé lors d'une expérience aléatoire si l'épreuve ω réalisée ou obtenue appartient à A.
Ω peut être fini, infini dénombrable ou infini non dénombrable.

Événement

Événement

Un sous-ensemble A de Ω est appelé un événement.
Un événement A est dit réalisé lors d'une expérience aléatoire si l'épreuve ω réalisée ou obtenue appartient à A.
Ω peut être fini, infini dénombrable ou infini non dénombrable.

Exemples

Événement

Événement

Un sous-ensemble A de Ω est appelé un événement.
Un événement A est dit réalisé lors d'une expérience aléatoire si l'épreuve ω réalisée ou obtenue appartient à A.
Ω peut être fini, infini dénombrable ou infini non dénombrable.

Exemples

Pour $\Omega = \{P, F\}$, les événements sont $\emptyset$, $\{P\}$, $\{F\}$ et $\{P, F\}$.

Événement

Événement

Un sous-ensemble A de Ω est appelé un événement.
Un événement A est dit réalisé lors d'une expérience aléatoire si l'épreuve ω réalisée ou obtenue appartient à A.
Ω peut être fini, infini dénombrable ou infini non dénombrable.

Exemples

Pour $\Omega = \{P, F\}$, les événements sont $\emptyset$, $\{P\}$, $\{F\}$ et $\{P, F\}$.
Ce sont les éléments de $\mathcal{P}(\Omega)$.

Événement

Événement

Un sous-ensemble A de Ω est appelé un événement.
Un événement A est dit réalisé lors d'une expérience aléatoire si l'épreuve ω réalisée ou obtenue appartient à A.
Ω peut être fini, infini dénombrable ou infini non dénombrable.

Exemples

Pour $\Omega = \{P, F\}$, les événements sont $\emptyset$, $\{P\}$, $\{F\}$ et $\{P, F\}$.
Ce sont les éléments de $\mathcal{P}(\Omega)$.
Pour $\Omega = \{0, 1, 2, 3, \cdots, n\}$, les événements sont les 2^{n+1} éléments de $\mathcal{P}(\Omega)$.

Événement

Événement

Un sous-ensemble A de Ω est appelé un événement.
Un événement A est dit réalisé lors d'une expérience aléatoire si l'épreuve ω réalisée ou obtenue appartient à A.
Ω peut être fini, infini dénombrable ou infini non dénombrable.

Exemples

Pour $\Omega = \{P, F\}$, les événements sont $\emptyset$, $\{P\}$, $\{F\}$ et $\{P, F\}$.
Ce sont les éléments de $\mathcal{P}(\Omega)$.
Pour $\Omega = \{0, 1, 2, 3, \cdots, n\}$, les événements sont les 2^{n+1} éléments de $\mathcal{P}(\Omega)$.
Par exemple : $\emptyset$, $\{2\}$, $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ qui est l'événement *Au plus quatre 6*, ...

Tribu

Tribu

Tribu

Tribu

Tribu

Un ensemble $\mathcal{T}$ de parties de Ω est une tribu sur Ω si

Tribu

R3.08 Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Tribu

Un ensemble $\mathcal{T}$ de parties de Ω est une tribu sur Ω si

a) $\Omega \in \mathcal{T}$

Tribu

Tribu

Un ensemble $\mathcal{T}$ de parties de Ω est une tribu sur Ω si

a) $\Omega \in \mathcal{T}$

b) $\forall A \in \mathcal{T}\ \overline{A} \in \mathcal{T}$

Tribu

Tribu

Un ensemble $\mathcal{T}$ de parties de Ω est une tribu sur Ω si

a) $\Omega \in \mathcal{T}$

b) $\forall A \in \mathcal{T}\ \overline{A} \in \mathcal{T}$

c) $\forall (A_i)_{i \geq 1}\ ,\ A_i \in \mathcal{T}\ ,\ \bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i \in \mathcal{T}$

Tribu

Tribu

Remarque 1

Tribu

Remarque 1

Pour tout entier $n \geq 1$,

$$\forall (A_i)_{1 \leq i \leq n} \ , \ A_i \in \mathcal{T} \ , \ \bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{T}$$

Tribu

Remarque 1

Pour tout entier $n \geq 1$,

$$\forall (A_i)_{1 \leq i \leq n} \ , \ A_i \in \mathcal{T} \ , \ \bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{T}$$

Démonstration : on pose $A_i = \emptyset$ pour $i \geq n+1$.

Tribu

Remarque 1

Pour tout entier $n \geq 1$,

$$\forall (A_i)_{1 \leq i \leq n} \;,\; A_i \in \mathcal{T} \;,\; \bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{T}$$

Démonstration : on pose $A_i = \emptyset$ pour $i \geq n+1$.

Remarque 2

Tribu

Remarque 1

Pour tout entier $n \geq 1$,

$$\forall (A_i)_{1 \leq i \leq n} \ , \ A_i \in \mathcal{T} \ , \ \bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{T}$$

Démonstration : on pose $A_i = \emptyset$ pour $i \geq n+1$.

Remarque 2

$$\forall (A_i)_{i \geq 1} \ , \ A_i \in \mathcal{T} \ , \ \bigcap_{i=1}^{+\infty} A_i \in \mathcal{T}$$

Tribu

Remarque 1

Pour tout entier $n \geq 1$,

$$\forall (A_i)_{1 \leq i \leq n} \ , \ A_i \in \mathcal{T} \ , \ \bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{T}$$

Démonstration : on pose $A_i = \emptyset$ pour $i \geq n+1$.

Remarque 2

$$\forall (A_i)_{i \geq 1} \ , \ A_i \in \mathcal{T} \ , \ \bigcap_{i=1}^{+\infty} A_i \in \mathcal{T}$$

Démonstration : on utilise b) et c).

Tribu

Tribu

Exemple 1

Tribu

Exemple 1

Soit $A \subset \Omega$.
$\mathcal{T} = \{\emptyset, A, \overline{A}, \Omega\}$ est une tribu sur Ω.

Tribu

Exemple 1

Soit $A \subset \Omega$.
$\mathcal{T} = \{\emptyset, A, \overline{A}, \Omega\}$ est une tribu sur Ω.

Exemple 2

Tribu

Exemple 1

Soit $A \subset \Omega$.
$\mathcal{T} = \{\emptyset, A, \overline{A}, \Omega\}$ est une tribu sur Ω.

Exemple 2

$\mathcal{P}(\Omega)$

Tribu

Tribu

Espace probabilisable

Tribu

Espace probabilisable

Soit Ω un ensemble et $\mathcal{T}$ une tribu sur Ω.
$(\Omega, \mathcal{T})$ est appelé espace probabilisable.

Tribu

Espace probabilisable

Soit Ω un ensemble et $\mathcal{T}$ une tribu sur Ω.
$(\Omega, \mathcal{T})$ est appelé espace probabilisable.

Événement certain

Tribu

Espace probabilisable

Soit Ω un ensemble et $\mathcal{T}$ une tribu sur Ω.
$(\Omega, \mathcal{T})$ est appelé espace probabilisable.

Événement certain

Ω est appelé l'événement certain : il est réalisé quelle que soit l'issue de l'expérience aléatoire.

Tribu

Espace probabilisable

Soit Ω un ensemble et $\mathcal{T}$ une tribu sur Ω.
$(\Omega, \mathcal{T})$ est appelé espace probabilisable.

Événement certain

Ω est appelé l'événement certain : il est réalisé quelle que soit l'issue de l'expérience aléatoire.

Evénement impossible

Tribu

Espace probabilisable

Soit Ω un ensemble et $\mathcal{T}$ une tribu sur Ω.
$(\Omega, \mathcal{T})$ est appelé espace probabilisable.

Événement certain

Ω est appelé l'événement certain : il est réalisé quelle que soit l'issue de l'expérience aléatoire.

Evénement impossible

$\emptyset$ est appelé l'événement impossible : il n'est pas réalisé quelle que soit l'issue de l'expérience aléatoire.

Tribu

Tribu

R3.08
Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Plan

Rappels

Probabilités

Probabilité conditionnelle

Indépendance

Annexe

Événement élémentaire

Tribu

Événement élémentaire

Un singleton $\{\omega\}$ de $\mathcal{T}$ est appelé événement élémentaire.

Tribu

Événement élémentaire

Un singleton $\{\omega\}$ de $\mathcal{T}$ est appelé événement élémentaire.

Événement contraire

Tribu

Événement élémentaire

Un singleton $\{\omega\}$ de $\mathcal{T}$ est appelé événement élémentaire.

Événement contraire

L'événement $\overline{A}$ (complémentaire de A dans Ω) est dit l'événement contraire de A.

Tribu

Tribu

Événements incompatibles

Tribu

Événements incompatibles

Deux événements A et B sont dits incompatibles si $A \cap B = \emptyset$.

Tribu

Événements incompatibles

Deux événements A et B sont dits incompatibles si $A \cap B = \emptyset$.
Soit $(A_i)_{i \in I}$ (I ensemble fini ou non) une famille d'événements.

Tribu

Événements incompatibles

Deux événements A et B sont dits incompatibles si $A \cap B = \emptyset$.
Soit $(A_i)_{i \in I}$ (I ensemble fini ou non) une famille d'événements.
$(A_i)_{i \in I}$ est une famille d'événements incompatibles (dans leur ensemble) si pour toute suite finie $(i_j)_{1 \leq j \leq n}$ de I

$$\bigcap_{j=1}^{n} A_{i_j} = \emptyset$$

Tribu

Événements incompatibles

Deux événements A et B sont dits incompatibles si $A \cap B = \emptyset$.
Soit $(A_i)_{i \in I}$ (I ensemble fini ou non) une famille d'événements.
$(A_i)_{i \in I}$ est une famille d'événements incompatibles (dans leur ensemble) si pour toute suite finie $(i_j)_{1 \leq j \leq n}$ de I

$$\bigcap_{j=1}^{n} A_{i_j} = \emptyset$$

Remarque

Tribu

Événements incompatibles

Deux événements A et B sont dits incompatibles si $A \cap B = \emptyset$.
Soit $(A_i)_{i \in I}$ (I ensemble fini ou non) une famille d'événements.
$(A_i)_{i \in I}$ est une famille d'événements incompatibles (dans leur ensemble) si pour toute suite finie $(i_j)_{1 \leq j \leq n}$ de I

$$\bigcap_{j=1}^{n} A_{i_j} = \emptyset$$

Remarque

Les événements de $(A_i)_{i \in I}$ sont incompatibles deux à deux si et seulement s'ils sont incompatibles dans leur ensemble.

Tribu

Événements incompatibles

Deux événements A et B sont dits incompatibles si $A \cap B = \emptyset$.
Soit $(A_i)_{i \in I}$ (I ensemble fini ou non) une famille d'événements.
$(A_i)_{i \in I}$ est une famille d'événements incompatibles (dans leur ensemble) si pour toute suite finie $(i_j)_{1 \leq j \leq n}$ de I

$$\bigcap_{j=1}^{n} A_{i_j} = \emptyset$$

Remarque

Les événements de $(A_i)_{i \in I}$ sont incompatibles deux à deux si et seulement s'ils sont incompatibles dans leur ensemble.

$$\forall i, j \in I \quad A_i \cap A_j = \emptyset \Leftrightarrow \forall (i_j)_{1 \leq j \leq n} \quad \bigcap_{j=1}^{n} A_{i_j} = \emptyset$$

Tribu

R3.08 Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Tribu

Système complet d'événements

Tribu

R3.08 Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

- Plan
- Rappels
- Probabilités
- Probabilité conditionnelle
- Indépendance
- Annexe

Système complet d'événements

Une suite finie ou dénombrable d'événements formant une partition de Ω est un système complet (ou famille complète) d'événements.

Tribu

Tribu

Tribu engendrée par une partie ou un ensemble de parties

Tribu

Tribu engendrée par une partie ou un ensemble de parties

On appelle tribu engendrée par une partie A (respectivement un ensemble de parties $\mathcal{E}$) de Ω la plus petite tribu (pour l'inclusion) contenant A (respectivement $\mathcal{E}$).

Tribu

Tribu engendrée par une partie ou un ensemble de parties

On appelle tribu engendrée par une partie A (respectivement un ensemble de parties $\mathcal{E}$) de Ω la plus petite tribu (pour l'inclusion) contenant A (respectivement $\mathcal{E}$).

Notation

Tribu

Tribu engendrée par une partie ou un ensemble de parties

On appelle tribu engendrée par une partie A (respectivement un ensemble de parties $\mathcal{E}$) de Ω la plus petite tribu (pour l'inclusion) contenant A (respectivement $\mathcal{E}$).

Notation

$\mathcal{T}(A)$, $\mathcal{T}(\mathcal{E})$

Tribu

Tribu

Exemple 1

Tribu

Exemple 1

$\mathcal{T}(A) = \{\emptyset, A, \overline{A}, \Omega\}.$

Tribu

Exemple 1

$\mathcal{T}(A) = \{\emptyset, A, \overline{A}, \Omega\}$.

Exemple 2

Tribu

Exemple 1

$\mathcal{T}(A) = \{\emptyset, A, \overline{A}, \Omega\}$.

Exemple 2

Si Ω est fini ou dénombrable, $\mathcal{P}(\Omega)$ est la tribu engendrée par les singletons de Ω.

Tribu

Exemple 1

$\mathcal{T}(A) = \{\emptyset, A, \overline{A}, \Omega\}$.

Exemple 2

Si Ω est fini ou dénombrable, $\mathcal{P}(\Omega)$ est la tribu engendrée par les singletons de Ω.

Exemple 3

Tribu

Exemple 1

$\mathcal{T}(A) = \{\emptyset, A, \overline{A}, \Omega\}$.

Exemple 2

Si Ω est fini ou dénombrable, $\mathcal{P}(\Omega)$ est la tribu engendrée par les singletons de Ω.

Exemple 3

La tribu engendrée par tous les intervalles $]-\infty, a]$, $]-\infty, a[$, $]a, +\infty[$, $[a, +\infty[$, $]a, b[$, $]a, b]$, $[a, b[$ et $[a, b]$ (a et b réels) est appelée tribu borélienne de $\mathbb{R}$ et notée $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Tribu

Exemple 1

$\mathcal{T}(A) = \{\emptyset, A, \overline{A}, \Omega\}$.

Exemple 2

Si Ω est fini ou dénombrable, $\mathcal{P}(\Omega)$ est la tribu engendrée par les singletons de Ω.

Exemple 3

La tribu engendrée par tous les intervalles $]-\infty, a]$, $]-\infty, a[$, $]a, +\infty[$, $[a, +\infty[$, $]a, b[$, $]a, b]$, $[a, b[$ et $[a, b]$ (a et b réels) est appelée tribu borélienne de $\mathbb{R}$ et notée $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.
On démontre que $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est engendrée par les intervalles du type $]-\infty, a]$ (a réel).

Tribu

Exemple 1

$\mathcal{T}(A) = \{\emptyset, A, \overline{A}, \Omega\}$.

Exemple 2

Si Ω est fini ou dénombrable, $\mathcal{P}(\Omega)$ est la tribu engendrée par les singletons de Ω.

Exemple 3

La tribu engendrée par tous les intervalles $]-\infty, a]$, $]-\infty, a[$, $]a, +\infty[$, $[a, +\infty[$, $]a, b[$, $]a, b]$, $[a, b[$ et $[a, b]$ (a et b réels) est appelée tribu borélienne de $\mathbb{R}$ et notée $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.
On démontre que $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est engendrée par les intervalles du type $]-\infty, a]$ (a réel).
De plus, si I est un intervalle, $I \cap \mathcal{B}(\mathbb{R})$ est une tribu notée $\mathcal{B}(I)$.

Tribu

Exemple 1

$\mathcal{T}(A) = \{\emptyset, A, \overline{A}, \Omega\}$.

Exemple 2

Si Ω est fini ou dénombrable, $\mathcal{P}(\Omega)$ est la tribu engendrée par les singletons de Ω.

Exemple 3

La tribu engendrée par tous les intervalles $]-\infty, a]$, $]-\infty, a[$, $]a, +\infty[$, $[a, +\infty[$, $]a, b[$, $]a, b]$, $[a, b[$ et $[a, b]$ (a et b réels) est appelée tribu borélienne de $\mathbb{R}$ et notée $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.
On démontre que $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est engendrée par les intervalles du type $]-\infty, a]$ (a réel).
De plus, si I est un intervalle, $I \cap \mathcal{B}(\mathbb{R})$ est une tribu notée $\mathcal{B}(I)$.

Félix Édouard Justin Émile Borel (1871-1956) : mathématicien français.

Probabilité

Probabilité

Probabilité

Probabilité

Probabilité

Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace probabilisable.

Probabilité

Probabilité

Soit $(\Omega,\mathcal{T})$ un espace probabilisable.
On appelle probabilité une application $\mathcal{T} \to [0,1]$ telle que

Probabilité

Probabilité

Soit $(\Omega,\mathcal{T})$ un espace probabilisable.
On appelle probabilité une application $\mathcal{T} \to [0,1]$ telle que
a) $P(\Omega) = 1$

Probabilité

Probabilité

Soit $(\Omega,\mathcal{T})$ un espace probabilisable.
On appelle probabilité une application $\mathcal{T} \to [0,1]$ telle que
a) $P(\Omega) = 1$
b) pour toute suite $(A_i)_{i\geq 1}$, d'événements incompatibles :

Probabilité

R3.08 Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Plan

Rappels

Probabilités

Probabilité conditionnelle

Indépendance

Annexe

Probabilité

Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace probabilisable.
On appelle **probabilité** une application $\mathcal{T} \to [0,1]$ telle que
a) $P(\Omega) = 1$
b) pour toute suite $(A_i)_{i \geq 1}$, d'événements incompatibles :

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{+\infty} P(A_i)$$

Probabilité

Probabilité

Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace probabilisable.
On appelle probabilité une application $\mathcal{T} \to [0,1]$ telle que
a) $P(\Omega) = 1$
b) pour toute suite $(A_i)_{i \geq 1}$, d'événements incompatibles :

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{+\infty} P(A_i)$$

Espace probabilisé

Probabilité

Probabilité

Soit $(\Omega,\mathcal{T})$ un espace probabilisable.
On appelle **probabilité** une application $\mathcal{T} \to [0,1]$ telle que
a) $P(\Omega) = 1$
b) pour toute suite $(A_i)_{i\geq 1}$, d'événements incompatibles :

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{+\infty} P(A_i)$$

Espace probabilisé

Ω muni de la tribu $\mathcal{T}$ et d'une probabilité P est appelé **espace probabilisé**.

Probabilité

Probabilité

Soit $(\Omega,\mathcal{T})$ un espace probabilisable.
On appelle probabilité une application $\mathcal{T} \to [0,1]$ telle que
a) $P(\Omega) = 1$
b) pour toute suite $(A_i)_{i\geq 1}$, d'événements incompatibles :

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{+\infty} P(A_i)$$

Espace probabilisé

Ω muni de la tribu $\mathcal{T}$ et d'une probabilité P est appelé espace probabilisé.

Notation

Probabilité

Probabilité

Soit $(\Omega,\mathcal{T})$ un espace probabilisable.
On appelle probabilité une application $\mathcal{T} \to [0,1]$ telle que
a) $P(\Omega) = 1$
b) pour toute suite $(A_i)_{i\geq 1}$, d'événements incompatibles :

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{+\infty} P(A_i)$$

Espace probabilisé

Ω muni de la tribu $\mathcal{T}$ et d'une probabilité P est appelé espace probabilisé.

Notation

$(\Omega,\ \mathcal{T},\ P)$

Probabilité

Propriétés

Probabilité

Propriétés

a) $P(\emptyset) = 0$

Probabilité

Propriétés

a) $P(\emptyset) = 0$

b) Pour tout entier $n \geq 1$,

$$\forall (A_i)_{1 \leq i \leq n} \ , \ A_i \in \mathcal{T} \ , \ A_i \text{ incompatibles, } P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

Probabilité

R3.08 Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Plan

Rappels

Probabilités

Probabilité conditionnelle

Indépendance

Annexe

Propriétés

a) $P(\emptyset) = 0$

b) Pour tout entier $n \geq 1$,

$$\forall (A_i)_{1 \leq i \leq n} \text{ , } A_i \in \mathcal{T} \text{ , } A_i \text{ incompatibles, } P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

c) $\forall A \in \mathcal{T},\ P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A)$

Propriétés

a) $P(\emptyset) = 0$

b) Pour tout entier $n \geq 1$,

$$\forall (A_i)_{1 \leq i \leq n}\ ,\ A_i \in \mathcal{T}\ ,\ A_i \text{ incompatibles, } P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

c) $\forall A \in \mathcal{T},\ P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A)$

d) $\forall A, B \in \mathcal{T},\ P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Probabilité

Propriétés

a) $P(\emptyset) = 0$

b) Pour tout entier $n \geq 1$,

$$\forall (A_i)_{1 \leq i \leq n} \ , \ A_i \in \mathcal{T} \ , \ A_i \text{ incompatibles, } P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

c) $\forall A \in \mathcal{T},\ P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A)$

d) $\forall A, B \in \mathcal{T},\ P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

e) Si $A \subset B$ alors $P(A) \leq P(B)$

Probabilité

R3.08 Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Propriétés

a) $P(\emptyset) = 0$

b) Pour tout entier $n \geq 1$,

$$\forall (A_i)_{1 \leq i \leq n}\ ,\ A_i \in \mathcal{T}\ ,\ A_i \text{ incompatibles, } P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

c) $\forall A \in \mathcal{T},\ P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A)$

d) $\forall A, B \in \mathcal{T},\ P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

e) Si $A \subset B$ alors $P(A) \leq P(B)$

f) $\forall A, B \in \mathcal{T},\ P(A) \leq P(A \cup B)$ et $P(A \cap B) \leq P(A)$

Probabilité

Propriétés

a) $P(\emptyset) = 0$

b) Pour tout entier $n \geq 1$,

$$\forall (A_i)_{1 \leq i \leq n}\ ,\ A_i \in \mathcal{T}\ ,\ A_i \text{ incompatibles, } P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

c) $\forall A \in \mathcal{T},\ P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A)$

d) $\forall A, B \in \mathcal{T},\ P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

e) Si $A \subset B$ alors $P(A) \leq P(B)$

f) $\forall A, B \in \mathcal{T},\ P(A) \leq P(A \cup B)$ et $P(A \cap B) \leq P(A)$

Démonstration en annexe.

Probabilité

Probabilité

Événement presque certain

Probabilité

Événement presque certain

Un événement de probabilité égale à 1 est appelé événement presque certain.

Probabilité

Événement presque certain

Un événement de probabilité égale à 1 est appelé événement presque certain.

Événement presque impossible

Probabilité

Événement presque certain

Un événement de probabilité égale à 1 est appelé événement presque certain.

Événement presque impossible

Un événement de probabilité nulle est appelé événement presque impossible.

Probabilité

Événement presque certain

Un événement de probabilité égale à 1 est appelé événement presque certain.

Événement presque impossible

Un événement de probabilité nulle est appelé événement presque impossible.

Exemples

Probabilité

Événement presque certain

Un événement de probabilité égale à 1 est appelé événement presque certain.

Événement presque impossible

Un événement de probabilité nulle est appelé événement presque impossible.

Exemples

Ω est un événement presque certain.

Probabilité

Événement presque certain

Un événement de probabilité égale à 1 est appelé événement presque certain.

Événement presque impossible

Un événement de probabilité nulle est appelé événement presque impossible.

Exemples

Ω est un événement presque certain.
$\emptyset$ est un événement presque impossible.

Probabilité sur un ensemble fini

Probabilité sur un ensemble fini

Probabilité sur un ensemble fini

Probabilité sur un ensemble fini

Probabilité sur un ensemble fini

Si Ω est fini, la tribu $\mathcal{T}$ est en général $\mathcal{P}(\Omega)$ et toute probabilité sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ est entièrement définie par $P(\{\omega\})$, $\omega \in \Omega$.

Probabilité sur un ensemble fini

R3.08 Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

- Plan
- Rappels
- **Probabilités**
- Probabilité conditionnelle
- Indépendance
- Annexe

Probabilité sur un ensemble fini

Si Ω est fini, la tribu $\mathcal{T}$ est en général $\mathcal{P}(\Omega)$ et toute probabilité sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ est entièrement définie par $P(\{\omega\})$, $\omega \in \Omega$.

Notation

Probabilité sur un ensemble fini

R3.08 Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Probabilité sur un ensemble fini

Si Ω est fini, la tribu $\mathcal{T}$ est en général $\mathcal{P}(\Omega)$ et toute probabilité sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ est entièrement définie par $P(\{\omega\})$, $\omega \in \Omega$.

Notation

$P(\{\omega\}) = P(\omega)$

Probabilité sur un ensemble fini

Probabilité sur un ensemble fini

Si Ω est fini, la tribu $\mathcal{T}$ est en général $\mathcal{P}(\Omega)$ et toute probabilité sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ est entièrement définie par $P(\{\omega\})$, $\omega \in \Omega$.

Notation

$P(\{\omega\}) = P(\omega)$

On a alors :

$$\forall A \in \mathcal{P}(\Omega) \; P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\omega)$$

Probabilité sur un ensemble fini

Probabilité sur un ensemble fini

Équiprobabilité - probabilité uniforme

Probabilité sur un ensemble fini

R3.08 Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Plan

Rappels

Probabilités

Probabilité conditionnelle

Indépendance

Annexe

Équiprobabilité - probabilité uniforme

Si Ω est fini et toutes les épreuves équiprobales (chaque événement élémentaire a la même probabilité)

Probabilité sur un ensemble fini

Équiprobabilité - probabilité uniforme

Si Ω est fini et toutes les épreuves équiprobales (chaque événement élémentaire a la même probabilité) alors

$$\forall A \in \mathcal{P}(\Omega)\ P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\text{nombre de cas favorables à la réalisation de A}}{\text{nombre de cas possibles}}$$

Probabilité sur un ensemble fini

Équiprobabilité - probabilité uniforme

Si Ω est fini et toutes les épreuves équiprobales (chaque événement élémentaire a la même probabilité) alors

$$\forall A \in \mathcal{P}(\Omega)\ P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\text{nombre de cas favorables à la réalisation de A}}{\text{nombre de cas possibles}}$$

Définition

Probabilité sur un ensemble fini

Équiprobabilité - probabilité uniforme

Si Ω est fini et toutes les épreuves équiprobales (chaque événement élémentaire a la même probabilité) alors

$$\forall A \in \mathcal{P}(\Omega)\ P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\text{nombre de cas favorables à la réalisation de A}}{\text{nombre de cas possibles}}$$

Définition

La probabilité P définie sur $\mathcal{P}(\Omega)$ par $P(\omega) = \dfrac{1}{|\Omega|}$ est appelée probabilité uniforme.

Probabilité sur un ensemble fini

Probabilité sur un ensemble fini

Exemple 1

Probabilité sur un ensemble fini

Exemple 1

Expérience aléatoire : relever Pile ou Face sur la face supérieure d'une pièce lancée en l'air.

Probabilité sur un ensemble fini

Exemple 1

Expérience aléatoire : relever Pile ou Face sur la face supérieure d'une pièce lancée en l'air.
$\Omega = \{P, F\}$

Probabilité sur un ensemble fini

Exemple 1

Expérience aléatoire : relever Pile ou Face sur la face supérieure d'une pièce lancée en l'air.

$\Omega = \{P, F\}$

$P(P) = P(F) = \dfrac{1}{2}$ (équiprobabilité)

Probabilité sur un ensemble fini

Exemple 1

Expérience aléatoire : relever Pile ou Face sur la face supérieure d'une pièce lancée en l'air.

$\Omega = \{P, F\}$

$P(P) = P(F) = \dfrac{1}{2}$ (équiprobabilité)

Exemple 2

Probabilité sur un ensemble fini

Exemple 1

Expérience aléatoire : relever Pile ou Face sur la face supérieure d'une pièce lancée en l'air.
$\Omega = \{P, F\}$
$P(P) = P(F) = \dfrac{1}{2}$ (équiprobabilité)

Exemple 2

Expérience aléatoire : relever la suite des nombres lus sur la face supérieure d'un dé parfait lancé à n reprises ($n \geq 1$).

Probabilité sur un ensemble fini

Exemple 1

Expérience aléatoire : relever Pile ou Face sur la face supérieure d'une pièce lancée en l'air.

$\Omega = \{P, F\}$

$P(P) = P(F) = \dfrac{1}{2}$ (équiprobabilité)

Exemple 2

Expérience aléatoire : relever la suite des nombres lus sur la face supérieure d'un dé parfait lancé à n reprises ($n \geq 1$).

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^n$

Probabilité sur un ensemble fini

Exemple 1

Expérience aléatoire : relever Pile ou Face sur la face supérieure d'une pièce lancée en l'air.

$\Omega = \{P, F\}$

$P(P) = P(F) = \dfrac{1}{2}$ (équiprobabilité)

Exemple 2

Expérience aléatoire : relever la suite des nombres lus sur la face supérieure d'un dé parfait lancé à n reprises ($n \geq 1$).

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^n$

$\forall \omega = (u_1, u_2, \cdots, u_n) \in \Omega,$

Probabilité sur un ensemble fini

R3.08 Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Exemple 1

Expérience aléatoire : relever Pile ou Face sur la face supérieure d'une pièce lancée en l'air.

$\Omega = \{P, F\}$

$P(P) = P(F) = \dfrac{1}{2}$ (équiprobabilité)

Exemple 2

Expérience aléatoire : relever la suite des nombres lus sur la face supérieure d'un dé parfait lancé à n reprises ($n \geq 1$).

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^n$

$\forall \omega = (u_1, u_2, \cdots, u_n) \in \Omega,\ P(\omega) = \dfrac{1}{6^n}$ (équiprobabilité)

Probabilité sur un ensemble infini dénombrable

Probabilité sur un ensemble infini dénombrable

Probabilité sur un ensemble infini dénombrable

Probabilité sur un ensemble infini dénombrable

Probabilité sur un ensemble infini dénombrable

Si Ω est infini dénombrable, la tribu $\mathcal{T}$ est en général $\mathcal{P}(\Omega)$ et toute probabilité sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ est entièrement définie par $P(\{\omega\})$, $\omega \in \Omega$.

Probabilité sur un ensemble infini dénombrable

Probabilité sur un ensemble infini dénombrable

Si Ω est infini dénombrable, la tribu $\mathcal{T}$ est en général $\mathcal{P}(\Omega)$ et toute probabilité sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ est entièrement définie par $P(\{\omega\})$, $\omega \in \Omega$.

Notation

Probabilité sur un ensemble infini dénombrable

Probabilité sur un ensemble infini dénombrable

Si Ω est infini dénombrable, la tribu $\mathcal{T}$ est en général $\mathcal{P}(\Omega)$ et toute probabilité sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ est entièrement définie par $P(\{\omega\})$, $\omega \in \Omega$.

Notation

$P(\{\omega\}) = P(\omega)$

Probabilité sur un ensemble infini dénombrable

Probabilité sur un ensemble infini dénombrable

Si Ω est infini dénombrable, la tribu $\mathcal{T}$ est en général $\mathcal{P}(\Omega)$ et toute probabilité sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ est entièrement définie par $P(\{\omega\})$, $\omega \in \Omega$.

Notation

$P(\{\omega\}) = P(\omega)$

On a alors :

$$\forall A \in \mathcal{P}(\Omega) \; P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\omega)$$

Probabilité sur un ensemble infini dénombrable

Probabilité sur un ensemble infini dénombrable

R3.08 Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Plan

Rappels

Probabilités

Probabilité conditionnelle

Indépendance

Annexe

Exemple

Probabilité sur un ensemble infini dénombrable

Exemple

Expérience aléatoire : on lance une pièce parfaite jusqu'à obtenir *Pile* et on note le numéro du lancer correspondant.

Probabilité sur un ensemble infini dénombrable

R3.08 Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Plan

Rappels

Probabilités

Probabilité conditionnelle

Indépendance

Annexe

Exemple

Expérience aléatoire : on lance une pièce parfaite jusqu'à obtenir *Pile* et on note le numéro du lancer correspondant.
On note $A_i =$ "Obtenir Pile au i-ème lancer" $(i \geq 1)$.

Probabilité sur un ensemble infini dénombrable

Exemple

Expérience aléatoire : on lance une pièce parfaite jusqu'à obtenir *Pile* et on note le numéro du lancer correspondant.
On note $A_i =$ "Obtenir Pile au i-ème lancer" $(i \geq 1)$.
$\forall i \geq 1,\ P\left(A_i\right) = \frac{1}{2^{i-1}}.\frac{1}{2} = \frac{1}{2^i}$

Probabilité sur un ensemble infini dénombrable

Exemple

Expérience aléatoire : on lance une pièce parfaite jusqu'à obtenir *Pile* et on note le numéro du lancer correspondant.
On note $A_i =$ "Obtenir Pile au i-ème lancer" $(i \geq 1)$.

$$\forall i \geq 1,\ P(A_i) = \frac{1}{2^{i-1}}.\frac{1}{2} = \frac{1}{2^i}$$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2}.\frac{1-1/2^n}{1-1/2} = 1 - \frac{1}{2^n}$$

Probabilité sur un ensemble infini dénombrable

Exemple

Expérience aléatoire : on lance une pièce parfaite jusqu'à obtenir *Pile* et on note le numéro du lancer correspondant.
On note $A_i =$ "Obtenir Pile au i-ème lancer" $(i \geq 1)$.

$$\forall i \geq 1,\ P(A_i) = \frac{1}{2^{i-1}}.\frac{1}{2} = \frac{1}{2^i}$$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2}.\frac{1-1/2^n}{1-1/2} = 1 - \frac{1}{2^n}$$

On obtient alors $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2} \times \frac{1-1/2^n}{1-1/2} = 1 - \frac{1}{2^n} \to 1$ lorsque $n \to \infty$.

Probabilité sur un ensemble infini dénombrable

Exemple

Expérience aléatoire : on lance une pièce parfaite jusqu'à obtenir *Pile* et on note le numéro du lancer correspondant.

On note $A_i =$ "Obtenir Pile au i-ème lancer" $(i \geq 1)$.

$$\forall i \geq 1,\ P(A_i) = \frac{1}{2^{i-1}}.\frac{1}{2} = \frac{1}{2^i}$$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2}.\frac{1-1/2^n}{1-1/2} = 1 - \frac{1}{2^n}$$

On obtient alors $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2} \times \frac{1-1/2^n}{1-1/2} = 1 - \frac{1}{2^n} \to 1$ lorsque $n \to \infty$.

On a donc $\displaystyle P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots = 1.$

Probabilité sur un ensemble infini dénombrable

R3.08 Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

- Plan
- Rappels
- Probabilités
- Probabilité conditionnelle
- Indépendance
- Annexe

Exemple

Expérience aléatoire : on lance une pièce parfaite jusqu'à obtenir *Pile* et on note le numéro du lancer correspondant.

On note $A_i =$ "Obtenir Pile au i-ème lancer" $(i \geq 1)$.

$\forall i \geq 1,\ P(A_i) = \dfrac{1}{2^{i-1}}.\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2^i}$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2}.\frac{1-1/2^n}{1-1/2} = 1 - \frac{1}{2^n}$$

On obtient alors $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2} \times \frac{1-1/2^n}{1-1/2} = 1 - \frac{1}{2^n} \to 1$ lorsque $n \to \infty$.

On a donc $\displaystyle P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots = 1$.

Remarque : $\displaystyle P\left(\overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i}\right) = 1 - 1 = 0$ (événement presque impossible).

Probabilité sur un ensemble infini non dénombrable

Probabilité sur un ensemble infini non dénombrable

Probabilité sur un ensemble infini non dénombrable

Probabilité sur un ensemble infini non dénombrable

Probabilité sur un ensemble infini non dénombrable

Si Ω est un intervalle, la tribu $\mathcal{T}$ est en général $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Probabilité sur un ensemble infini non dénombrable

Probabilité sur un ensemble infini non dénombrable

Si Ω est un intervalle, la tribu $\mathcal{T}$ est en général $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.
La probabilité uniforme sur $\Omega = [a, b]$ est définie par

$$\forall [\alpha, \beta] \subset [a, b] \quad P\left([\alpha, \beta]\right) = \frac{\beta - \alpha}{b - a}$$

Probabilité sur un ensemble infini non dénombrable

Probabilité sur un ensemble infini non dénombrable

Si Ω est un intervalle, la tribu $\mathcal{T}$ est en général $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.
La probabilité uniforme sur $\Omega = [a, b]$ est définie par

$$\forall[\alpha, \beta] \subset [a, b] \quad P\left([\alpha, \beta]\right) = \frac{\beta - \alpha}{b - a}$$

Remarques

Probabilité sur un ensemble infini non dénombrable

Probabilité sur un ensemble infini non dénombrable

Si Ω est un intervalle, la tribu $\mathcal{T}$ est en général $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.
La probabilité uniforme sur $\Omega = [a, b]$ est définie par

$$\forall[\alpha, \beta] \subset [a, b] \quad P([\alpha, \beta]) = \frac{\beta - \alpha}{b - a}$$

Remarques

a) L'expérience aléatoire associée est le choix au hasard d'un réel sur $[a, b]$.

Probabilité sur un ensemble infini non dénombrable

Probabilité sur un ensemble infini non dénombrable

Si Ω est un intervalle, la tribu $\mathcal{T}$ est en général $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.
La probabilité uniforme sur $\Omega = [a, b]$ est définie par

$$\forall [\alpha, \beta] \subset [a, b] \quad P([\alpha, \beta]) = \frac{\beta - \alpha}{b - a}$$

Remarques

a) L'expérience aléatoire associée est le choix au hasard d'un réel sur $[a, b]$.

b) $\forall \alpha \in [a, b]$ $P(\alpha) = P([\alpha, \alpha]) = \dfrac{\alpha - \alpha}{b - a} = 0$.

Probabilité sur un ensemble infini non dénombrable

Probabilité sur un ensemble infini non dénombrable

Si Ω est un intervalle, la tribu $\mathcal{T}$ est en général $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.
La probabilité uniforme sur $\Omega = [a, b]$ est définie par

$$\forall[\alpha, \beta] \subset [a, b] \quad P([\alpha, \beta]) = \frac{\beta - \alpha}{b - a}$$

Remarques

a) L'expérience aléatoire associée est le choix au hasard d'un réel sur $[a, b]$.

b) $\forall \alpha \in [a, b] \; P(\alpha) = P([\alpha, \alpha]) = \dfrac{\alpha - \alpha}{b - a} = 0$.

Conséquence

Probabilité sur un ensemble infini non dénombrable

Probabilité sur un ensemble infini non dénombrable

Si Ω est un intervalle, la tribu $\mathcal{T}$ est en général $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.
La probabilité uniforme sur $\Omega = [a, b]$ est définie par

$$\forall [\alpha, \beta] \subset [a, b] \quad P([\alpha, \beta]) = \frac{\beta - \alpha}{b - a}$$

Remarques

a) L'expérience aléatoire associée est le choix au hasard d'un réel sur $[a, b]$.

b) $\forall \alpha \in [a, b] \;\; P(\alpha) = P([\alpha, \alpha]) = \dfrac{\alpha - \alpha}{b - a} = 0.$

Conséquence

$$P(]\alpha, \beta]) = P(]\alpha, \beta[) = P([\alpha, \beta[) = P([\alpha, \beta])$$

Probabilité sur un ensemble infini non dénombrable

Probabilité sur un ensemble infini non dénombrable

Exemple

Probabilité sur un ensemble infini non dénombrable

Exemple

Expérience aléatoire : choix au hasard d'un réel sur $[0, 1]$.

Probabilité sur un ensemble infini non dénombrable

Exemple

Expérience aléatoire : choix au hasard d'un réel sur $[0, 1]$.

$$P\left(\left[0, \frac{1}{2}\right]\right) = \frac{1/2 - 0}{1 - 0} = \frac{1}{2}$$

Probabilité sur un ensemble infini non dénombrable

Exemple

Expérience aléatoire : choix au hasard d'un réel sur $[0, 1]$.

$$P\left(\left[0, \frac{1}{2}\right]\right) = \frac{1/2 - 0}{1 - 0} = \frac{1}{2}$$

$$P\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1/2 - 1/2}{1 - 0} = 0$$

Probabilité sur un ensemble infini non dénombrable

Exemple

Expérience aléatoire : choix au hasard d'un réel sur $[0, 1]$.

$$P\left(\left[0, \frac{1}{2}\right]\right) = \frac{1/2 - 0}{1 - 0} = \frac{1}{2}$$

$$P\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1/2 - 1/2}{1 - 0} = 0 \text{ (événement presque impossible).}$$

Probabilité conditionnelle

Probabilité conditionnelle

Définition

Probabilité conditionnelle

Définition

Soit $(\Omega,\ \mathcal{T},\ P)$ un espace probabilisé et A un événement tel que $P(A) \neq 0$.

Probabilité conditionnelle

Définition

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé et A un événement tel que $P(A) \neq 0$.
Pour tout événement B, le réel noté $P(B/A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$ est appelé **probabilité conditionnelle de B sachant A**.

Probabilité conditionnelle

Définition

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé et A un événement tel que $P(A) \neq 0$.
Pour tout événement B, le réel noté $P(B/A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$ est appelé probabilité conditionnelle de B sachant A.

Propriété

Probabilité conditionnelle

Définition

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé et A un événement tel que $P(A) \neq 0$. Pour tout événement B, le réel noté $P(B/A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$ est appelé **probabilité conditionnelle de B sachant A**.

Propriété

L'application $B \to P(B/A)$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{T})$.

Probabilité conditionnelle

Définition

Soit $(\Omega,\ \mathcal{T},\ P)$ un espace probabilisé et A un événement tel que $P(A) \neq 0$.
Pour tout événement B, le réel noté $P\left(B/A\right) = \dfrac{P\left(A \cap B\right)}{P\left(A\right)}$ est appelé **probabilité conditionnelle de B sachant A**.

Propriété

L'application $B \to P\left(B/A\right)$ est une probabilité sur $(\Omega,\ \mathcal{T})$.
Démonstration en annexe.

Probabilité conditionnelle

Définition

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé et A un événement tel que $P(A) \neq 0$.
Pour tout événement B, le réel noté $P(B/A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$ est appelé **probabilité conditionnelle de B sachant A**.

Propriété

L'application $B \to P(B/A)$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{T})$.
Démonstration en annexe.

Autre notation

Probabilité conditionnelle

Définition

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé et A un événement tel que $P(A) \neq 0$. Pour tout événement B, le réel noté $P(B/A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$ est appelé probabilité conditionnelle de B sachant A.

Propriété

L'application $B \to P(B/A)$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{T})$.
Démonstration en annexe.

Autre notation

$P(B/A) = P_A(B)$

Probabilité conditionnelle

Probabilité conditionnelle

Exemple

Probabilité conditionnelle

Exemple

Dans une usine, une machine M fabrique 300 objets A et une machine m fabrique 200 objets B chaque jour.
La machine M sort 5 % d'objets défectueux et la machine m en sort 7 %.
On tire au hasard un objet de la fabrication journalière des deux machines.

Probabilité conditionnelle

Exemple

Dans une usine, une machine M fabrique 300 objets A et une machine m fabrique 200 objets B chaque jour.
La machine M sort 5 % d'objets défectueux et la machine m en sort 7 %.
On tire au hasard un objet de la fabrication journalière des deux machines.
Ω est l'ensemble des objets fabriqués : $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_{500}\}$.

Probabilité conditionnelle

R3.08 Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Exemple

Dans une usine, une machine M fabrique 300 objets A et une machine m fabrique 200 objets B chaque jour.
La machine M sort 5 % d'objets défectueux et la machine m en sort 7 %.
On tire au hasard un objet de la fabrication journalière des deux machines.
Ω est l'ensemble des objets fabriqués : $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_{500}\}$.
$|\Omega| = 500$

Probabilité conditionnelle

Exemple

Dans une usine, une machine M fabrique 300 objets A et une machine m fabrique 200 objets B chaque jour.
La machine M sort 5 % d'objets défectueux et la machine m en sort 7 %.
On tire au hasard un objet de la fabrication journalière des deux machines.
Ω est l'ensemble des objets fabriqués : $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_{500}\}$.
$|\Omega| = 500$
On pose $M =$ *"l'objet est fabriqué par M"* ; $m =$ *"l'objet est fabriqué par m"* et $D =$ *"l'objet est défectueux"*.

Probabilité conditionnelle

R3.08 Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Plan

Rappels

Probabilités

Probabilité conditionnelle

Indépendance

Annexe

Exemple

Dans une usine, une machine M fabrique 300 objets A et une machine m fabrique 200 objets B chaque jour.
La machine M sort 5 % d'objets défectueux et la machine m en sort 7 %.
On tire au hasard un objet de la fabrication journalière des deux machines.
Ω est l'ensemble des objets fabriqués : $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_{500}\}$.
$|\Omega| = 500$
On pose $M =$ *"l'objet est fabriqué par M"* ; $m =$ *"l'objet est fabriqué par m"* et $D =$ *"l'objet est défectueux"*.

$$P(M) = \frac{300}{500} = 0,6 \; ; \; P(m) = P\left(\overline{M}\right) = \frac{200}{500} = 0,4$$

Probabilité conditionnelle

R3.08 Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Exemple

Dans une usine, une machine M fabrique 300 objets A et une machine m fabrique 200 objets B chaque jour.
La machine M sort 5 % d'objets défectueux et la machine m en sort 7 %.
On tire au hasard un objet de la fabrication journalière des deux machines.
Ω est l'ensemble des objets fabriqués : $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_{500}\}$.
$|\Omega| = 500$
On pose $M =$ *"l'objet est fabriqué par M"* ; $m =$ *"l'objet est fabriqué par m"* et $D =$ *"l'objet est défectueux"*.

$P(M) = \dfrac{300}{500} = 0,6$; $P(m) = P\left(\overline{M}\right) = \dfrac{200}{500} = 0,4$

$P(D/M) =$

Probabilité conditionnelle

Exemple

Dans une usine, une machine M fabrique 300 objets A et une machine m fabrique 200 objets B chaque jour.
La machine M sort 5 % d'objets défectueux et la machine m en sort 7 %.
On tire au hasard un objet de la fabrication journalière des deux machines.
Ω est l'ensemble des objets fabriqués : $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_{500}\}$.
$|\Omega| = 500$
On pose $M =$ *"l'objet est fabriqué par M"* ; $m =$ *"l'objet est fabriqué par m"* et $D =$ *"l'objet est défectueux"*.

$P(M) = \dfrac{300}{500} = 0,6$; $P(m) = P\left(\overline{M}\right) = \dfrac{200}{500} = 0,4$

$P(D/M) = \dfrac{5}{100}$

Probabilité conditionnelle

R3.08 Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Exemple

Dans une usine, une machine M fabrique 300 objets A et une machine m fabrique 200 objets B chaque jour.
La machine M sort 5 % d'objets défectueux et la machine m en sort 7 %.
On tire au hasard un objet de la fabrication journalière des deux machines.
Ω est l'ensemble des objets fabriqués : $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_{500}\}$.
$|\Omega| = 500$
On pose $M =$ *"l'objet est fabriqué par M"* ; $m =$ *"l'objet est fabriqué par m"* et $D =$ *"l'objet est défectueux"*.

$P(M) = \frac{300}{500} = 0,6$; $P(m) = P\left(\overline{M}\right) = \frac{200}{500} = 0,4$

$P(D/M) = \frac{5}{100}$, $P(D/m) =$

Probabilité conditionnelle

Exemple

Dans une usine, une machine M fabrique 300 objets A et une machine m fabrique 200 objets B chaque jour.
La machine M sort 5 % d'objets défectueux et la machine m en sort 7 %.
On tire au hasard un objet de la fabrication journalière des deux machines.
Ω est l'ensemble des objets fabriqués : $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_{500}\}$.
$|\Omega| = 500$
On pose $M =$ *"l'objet est fabriqué par M"* ; $m =$ *"l'objet est fabriqué par m"* et $D =$ *"l'objet est défectueux"*.

$$P(M) = \frac{300}{500} = 0,6 \; ; \; P(m) = P\left(\overline{M}\right) = \frac{200}{500} = 0,4$$

$$P(D/M) = \frac{5}{100} \; , \; P(D/m) = \frac{7}{100}$$

Probabilité conditionnelle

R3.08 Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Exemple

Dans une usine, une machine M fabrique 300 objets A et une machine m fabrique 200 objets B chaque jour.
La machine M sort 5 % d'objets défectueux et la machine m en sort 7 %.
On tire au hasard un objet de la fabrication journalière des deux machines.
Ω est l'ensemble des objets fabriqués : $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_{500}\}$.
$|\Omega| = 500$
On pose $M =$ *"l'objet est fabriqué par M"* ; $m =$ *"l'objet est fabriqué par m"* et $D =$ *"l'objet est défectueux"*.

$P(M) = \dfrac{300}{500} = 0,6$; $P(m) = P\left(\overline{M}\right) = \dfrac{200}{500} = 0,4$

$P(D/M) = \dfrac{5}{100}$, $P(D/m) = \dfrac{7}{100}$

$P(D)$

Probabilité conditionnelle

Exemple

Dans une usine, une machine M fabrique 300 objets A et une machine m fabrique 200 objets B chaque jour.
La machine M sort 5 % d'objets défectueux et la machine m en sort 7 %.
On tire au hasard un objet de la fabrication journalière des deux machines.
Ω est l'ensemble des objets fabriqués : $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_{500}\}$.
$|\Omega| = 500$
On pose $M =$ *"l'objet est fabriqué par M"* ; $m =$ *"l'objet est fabriqué par m"* et $D =$ *"l'objet est défectueux"*.

$P(M) = \dfrac{300}{500} = 0,6$; $P(m) = P\left(\overline{M}\right) = \dfrac{200}{500} = 0,4$

$P(D/M) = \dfrac{5}{100}$, $P(D/m) = \dfrac{7}{100}$

$P(D) = P(D \cap \Omega)$

Probabilité conditionnelle

Exemple

Dans une usine, une machine M fabrique 300 objets A et une machine m fabrique 200 objets B chaque jour.
La machine M sort 5 % d'objets défectueux et la machine m en sort 7 %.
On tire au hasard un objet de la fabrication journalière des deux machines.
Ω est l'ensemble des objets fabriqués : $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_{500}\}$.
$|\Omega| = 500$
On pose $M =$ *"l'objet est fabriqué par M"* ; $m =$ *"l'objet est fabriqué par m"* et $D =$ *"l'objet est défectueux"*.

$P(M) = \dfrac{300}{500} = 0,6$; $P(m) = P\left(\overline{M}\right) = \dfrac{200}{500} = 0,4$

$P(D/M) = \dfrac{5}{100}$, $P(D/m) = \dfrac{7}{100}$

$P(D) = P(D \cap \Omega) = P\left(D \cap \left(M \cup \overline{M}\right)\right)$

Probabilité conditionnelle

R3.08 Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Exemple

Dans une usine, une machine M fabrique 300 objets A et une machine m fabrique 200 objets B chaque jour.
La machine M sort 5 % d'objets défectueux et la machine m en sort 7 %.
On tire au hasard un objet de la fabrication journalière des deux machines.
Ω est l'ensemble des objets fabriqués : $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_{500}\}$.
$|\Omega| = 500$
On pose $M =$ *"l'objet est fabriqué par M"* ; $m =$ *"l'objet est fabriqué par m"* et $D =$ *"l'objet est défectueux"*.

$$P(M) = \frac{300}{500} = 0,6 \; ; \; P(m) = P\left(\overline{M}\right) = \frac{200}{500} = 0,4$$

$$P(D/M) = \frac{5}{100} \; , \; P(D/m) = \frac{7}{100}$$

$$P(D) = P(D \cap \Omega) = P\left(D \cap \left(M \cup \overline{M}\right)\right) = P\left((D \cap M) \cup \left(D \cap \overline{M}\right)\right)$$

Probabilité conditionnelle

Exemple

Dans une usine, une machine M fabrique 300 objets A et une machine m fabrique 200 objets B chaque jour.
La machine M sort 5 % d'objets défectueux et la machine m en sort 7 %.
On tire au hasard un objet de la fabrication journalière des deux machines.
Ω est l'ensemble des objets fabriqués : $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_{500}\}$.
$|\Omega| = 500$
On pose $M =$ *"l'objet est fabriqué par M"* ; $m =$ *"l'objet est fabriqué par m"* et $D =$ *"l'objet est défectueux"*.

$$P(M) = \frac{300}{500} = 0,6 \; ; \; P(m) = P\left(\overline{M}\right) = \frac{200}{500} = 0,4$$

$$P(D/M) = \frac{5}{100} \; , \; P(D/m) = \frac{7}{100}$$

$$P(D) = P(D \cap \Omega) = P\left(D \cap \left(M \cup \overline{M}\right)\right) = P\left((D \cap M) \cup \left(D \cap \overline{M}\right)\right) = P(D \cap M) + P(D \cap \overline{M})$$

Probabilité conditionnelle

Exemple

Dans une usine, une machine M fabrique 300 objets A et une machine m fabrique 200 objets B chaque jour.
La machine M sort 5 % d'objets défectueux et la machine m en sort 7 %.
On tire au hasard un objet de la fabrication journalière des deux machines.
Ω est l'ensemble des objets fabriqués : $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_{500}\}$.
$|\Omega| = 500$
On pose $M =$ *"l'objet est fabriqué par M"* ; $m =$ *"l'objet est fabriqué par m"* et $D =$ *"l'objet est défectueux"*.

$$P(M) = \frac{300}{500} = 0,6 \ ; \ P(m) = P\left(\overline{M}\right) = \frac{200}{500} = 0,4$$

$$P(D/M) = \frac{5}{100} \ , \ P(D/m) = \frac{7}{100}$$

$$P(D) = P(D \cap \Omega) = P\left(D \cap \left(M \cup \overline{M}\right)\right) = P\left((D \cap M) \cup \left(D \cap \overline{M}\right)\right) = P(D \cap M) + P(D \cap \overline{M})$$

$$P(D) = P(D/M).P(M) + P\left(D/\overline{M}\right).P\left(\overline{M}\right)$$

Probabilité conditionnelle

R3.08 Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Exemple

Dans une usine, une machine M fabrique 300 objets A et une machine m fabrique 200 objets B chaque jour.
La machine M sort 5 % d'objets défectueux et la machine m en sort 7 %.
On tire au hasard un objet de la fabrication journalière des deux machines.
Ω est l'ensemble des objets fabriqués : $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_{500}\}$.
$|\Omega| = 500$
On pose $M =$ *"l'objet est fabriqué par M"* ; $m =$ *"l'objet est fabriqué par m"* et $D =$ *"l'objet est défectueux"*.

$$P(M) = \frac{300}{500} = 0,6 \; ; \; P(m) = P\left(\overline{M}\right) = \frac{200}{500} = 0,4$$

$$P(D/M) = \frac{5}{100} \; , \; P(D/m) = \frac{7}{100}$$

$$P(D) = P(D \cap \Omega) = P\left(D \cap \left(M \cup \overline{M}\right)\right) = P\left((D \cap M) \cup \left(D \cap \overline{M}\right)\right) = P(D \cap M) + P(D \cap \overline{M})$$

$$P(D) = P(D/M).P(M) + P\left(D/\overline{M}\right).P\left(\overline{M}\right) = 0,6.\frac{5}{100} + 0,4.\frac{7}{100}$$

Probabilité conditionnelle

Exemple

Dans une usine, une machine M fabrique 300 objets A et une machine m fabrique 200 objets B chaque jour.
La machine M sort 5 % d'objets défectueux et la machine m en sort 7 %.
On tire au hasard un objet de la fabrication journalière des deux machines.
Ω est l'ensemble des objets fabriqués : $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_{500}\}$.
$|\Omega| = 500$
On pose $M =$ *"l'objet est fabriqué par M"* ; $m =$ *"l'objet est fabriqué par m"* et $D =$ *"l'objet est défectueux"*.

$$P(M) = \frac{300}{500} = 0,6 \; ; \; P(m) = P\left(\overline{M}\right) = \frac{200}{500} = 0,4$$

$$P(D/M) = \frac{5}{100} \; , \; P(D/m) = \frac{7}{100}$$

$$P(D) = P(D \cap \Omega) = P\left(D \cap \left(M \cup \overline{M}\right)\right) = P\left((D \cap M) \cup \left(D \cap \overline{M}\right)\right) = P(D \cap M) + P(D \cap \overline{M})$$

$$P(D) = P(D/M).P(M) + P\left(D/\overline{M}\right).P\left(\overline{M}\right) = 0,6.\frac{5}{100} + 0,4.\frac{7}{100} = 0,03 + 0,028 = 0,058.$$

Probabilité conditionnelle

R3.08 Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Exemple

Dans une usine, une machine M fabrique 300 objets A et une machine m fabrique 200 objets B chaque jour.
La machine M sort 5 % d'objets défectueux et la machine m en sort 7 %.
On tire au hasard un objet de la fabrication journalière des deux machines.
Ω est l'ensemble des objets fabriqués : $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_{500}\}$.
$|\Omega| = 500$
On pose $M =$ *"l'objet est fabriqué par M"* ; $m =$ *"l'objet est fabriqué par m"* et $D =$ *"l'objet est défectueux"*.

$$P(M) = \frac{300}{500} = 0,6 \; ; \; P(m) = P\left(\overline{M}\right) = \frac{200}{500} = 0,4$$

$$P(D/M) = \frac{5}{100} \; , \; P(D/m) = \frac{7}{100}$$

$$P(D) = P(D \cap \Omega) = P\left(D \cap \left(M \cup \overline{M}\right)\right) = P\left((D \cap M) \cup \left(D \cap \overline{M}\right)\right) = P(D \cap M) + P(D \cap \overline{M})$$

$$P(D) = P(D/M).P(M) + P\left(D/\overline{M}\right).P\left(\overline{M}\right) = 0,6.\frac{5}{100} + 0,4.\frac{7}{100} = 0,03 + 0,028 = 0,058.$$

On s'intéresse à la probabilité qu'une pièce défectueuse ait été fabriquée par la machine M.

Probabilité conditionnelle

Exemple

Dans une usine, une machine M fabrique 300 objets A et une machine m fabrique 200 objets B chaque jour.
La machine M sort 5 % d'objets défectueux et la machine m en sort 7 %.
On tire au hasard un objet de la fabrication journalière des deux machines.
Ω est l'ensemble des objets fabriqués : $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_{500}\}$.
$|\Omega| = 500$
On pose $M =$ *"l'objet est fabriqué par M"* ; $m =$ *"l'objet est fabriqué par m"* et $D =$ *"l'objet est défectueux"*.

$$P(M) = \frac{300}{500} = 0,6 \text{ ; } P(m) = P\left(\overline{M}\right) = \frac{200}{500} = 0,4$$

$$P(D/M) = \frac{5}{100} \text{ , } P(D/m) = \frac{7}{100}$$

$$P(D) = P(D \cap \Omega) = P\left(D \cap \left(M \cup \overline{M}\right)\right) = P\left((D \cap M) \cup \left(D \cap \overline{M}\right)\right) = P(D \cap M) + P(D \cap \overline{M})$$

$$P(D) = P(D/M).P(M) + P\left(D/\overline{M}\right).P\left(\overline{M}\right) = 0,6.\frac{5}{100} + 0,4.\frac{7}{100} = 0,03 + 0,028 = 0,058.$$

On s'intéresse à la probabilité qu'une pièce défectueuse ait été fabriquée par la machine M.

$$P(M/D) = \frac{P(M \cap D)}{P(D)}$$

Probabilité conditionnelle

Exemple

Dans une usine, une machine M fabrique 300 objets A et une machine m fabrique 200 objets B chaque jour.
La machine M sort 5 % d'objets défectueux et la machine m en sort 7 %.
On tire au hasard un objet de la fabrication journalière des deux machines.
Ω est l'ensemble des objets fabriqués : $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_{500}\}$.
$|\Omega| = 500$
On pose $M =$ *"l'objet est fabriqué par M"* ; $m =$ *"l'objet est fabriqué par m"* et $D =$ *"l'objet est défectueux"*.

$$P(M) = \frac{300}{500} = 0,6 \; ; \; P(m) = P\left(\overline{M}\right) = \frac{200}{500} = 0,4$$

$$P(D/M) = \frac{5}{100}, \; P(D/m) = \frac{7}{100}$$

$$P(D) = P(D \cap \Omega) = P\left(D \cap \left(M \cup \overline{M}\right)\right) = P\left((D \cap M) \cup \left(D \cap \overline{M}\right)\right) = P(D \cap M) + P(D \cap \overline{M})$$

$$P(D) = P(D/M).P(M) + P\left(D/\overline{M}\right).P\left(\overline{M}\right) = 0,6.\frac{5}{100} + 0,4.\frac{7}{100} = 0,03 + 0,028 = 0,058.$$

On s'intéresse à la probabilité qu'une pièce défectueuse ait été fabriquée par la machine M.

$$P(M/D) = \frac{P(M \cap D)}{P(D)} = \frac{0,6.\frac{5}{100}}{0,058} = \frac{30}{58} = \frac{15}{29} \approx 0,517$$

Probabilité conditionnelle

Probabilité conditionnelle

Cas où Ω est fini et P uniforme

Probabilité conditionnelle

Cas où Ω est fini et P uniforme

Dans ce cas, on a

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Probabilité conditionnelle

R3.08 Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Cas où Ω est fini et P uniforme

Dans ce cas, on a

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{|A \cap B|}{|\Omega|}}{\frac{|A|}{|\Omega|}}$$

Probabilité conditionnelle

Cas où Ω est fini et P uniforme

Dans ce cas, on a

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{|A \cap B|}{|\Omega|}}{\frac{|A|}{|\Omega|}} = \frac{|A \cap B|}{|A|}$$

Probabilité conditionnelle

Cas où Ω est fini et P uniforme

Dans ce cas, on a

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{|A \cap B|}{|\Omega|}}{\frac{|A|}{|\Omega|}} = \frac{|A \cap B|}{|A|}$$

ce qui correspond à l'intuition d'un changement d'univers des possibles :

Probabilité conditionnelle

Cas où Ω est fini et P uniforme

Dans ce cas, on a

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{|A \cap B|}{|\Omega|}}{\frac{|A|}{|\Omega|}} = \frac{|A \cap B|}{|A|}$$

ce qui correspond à l'intuition d'un changement d'univers des possibles : Ω est remplacé par A et $A \cap B$ est la *trace de B sur A.*

Probabilité conditionnelle

R3.08 Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Plan

Rappels

Probabilités

Probabilité conditionnelle

Indépendance

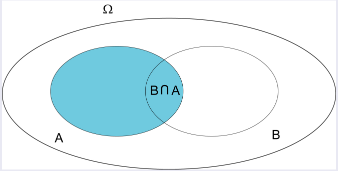
Annexe

Cas où Ω est fini et P uniforme

Dans ce cas, on a

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{|A\cap B|}{|\Omega|}}{\frac{|A|}{|\Omega|}} = \frac{|A \cap B|}{|A|}$$

ce qui correspond à l'intuition d'un changement d'univers des possibles : Ω est remplacé par A et $A \cap B$ est la *trace de* B *sur* A.



Probabilité conditionnelle

Probabilité conditionnelle

Formule des probabilités totales

Probabilité conditionnelle

Formule des probabilités totales

Soit $(B_i)_{i \in I}$ (I fini ou dénombrable) une famille complète d'événements telle que $\forall i \in I \; P(B_i) \neq 0$.

Probabilité conditionnelle

Formule des probabilités totales

Soit $(B_i)_{i \in I}$ (I fini ou dénombrable) une famille complète d'événements telle que $\forall i \in I \ P(B_i) \neq 0$.

$$P(A) = \sum_{i \in I} P(B_i) P(A/B_i)$$

Probabilité conditionnelle

Formule des probabilités totales

Soit $(B_i)_{i \in I}$ (I fini ou dénombrable) une famille complète d'événements telle que $\forall i \in I \ P(B_i) \neq 0$.

$$P(A) = \sum_{i \in I} P(B_i) P(A/B_i)$$

Formule de Bayes

Probabilité conditionnelle

Formule des probabilités totales

Soit $(B_i)_{i\in I}$ (I fini ou dénombrable) une famille complète d'événements telle que $\forall i \in I \ P(B_i) \neq 0$.

$$P(A) = \sum_{i\in I} P(B_i) P(A/B_i)$$

Formule de Bayes

Avec les mêmes hypothèses et $P(A) \neq 0$

Probabilité conditionnelle

Formule des probabilités totales

Soit $(B_i)_{i \in I}$ (I fini ou dénombrable) une famille complète d'événements telle que $\forall i \in I \;\; P(B_i) \neq 0$.

$$P(A) = \sum_{i \in I} P(B_i) P(A/B_i)$$

Formule de Bayes

Avec les mêmes hypothèses et $P(A) \neq 0$

$$\forall i \in I \;\; P(B_i/A) = \frac{P(B_i) P(A/B_i)}{\sum_{i \in I} P(B_i) P(A/B_i)}$$

Probabilité conditionnelle

Formule des probabilités totales

Soit $(B_i)_{i\in I}$ (I fini ou dénombrable) une famille complète d'événements telle que $\forall i \in I \ P(B_i) \neq 0$.

$$P(A) = \sum_{i\in I} P(B_i)\, P(A/B_i)$$

Formule de Bayes

Avec les mêmes hypothèses et $P(A) \neq 0$

$$\forall i \in I \ P(B_i/A) = \frac{P(B_i)\, P(A/B_i)}{\sum_{i\in I} P(B_i)\, P(A/B_i)}$$

Démonstration en annexe.

Probabilité conditionnelle

Formule des probabilités totales

Soit $(B_i)_{i\in I}$ (I fini ou dénombrable) une famille complète d'événements telle que $\forall i \in I \;\; P(B_i) \neq 0$.

$$P(A) = \sum_{i\in I} P(B_i)\, P(A/B_i)$$

Formule de Bayes

Avec les mêmes hypothèses et $P(A) \neq 0$

$$\forall i \in I \;\; P(B_i/A) = \frac{P(B_i)\, P(A/B_i)}{\sum_{i\in I} P(B_i)\, P(A/B_i)}$$

Démonstration en annexe.

Thomas Bayes (1702-1761) : mathématicien britannique.

Probabilité conditionnelle

Probabilité conditionnelle

Exemple

Probabilité conditionnelle

Exemple

M et $m = \overline{M}$ forment une famille complète d'événements telles que $P(M) \neq 0$ et $P(m) \neq 0$.

Probabilité conditionnelle

R3.08 Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Plan

Rappels

Probabilités

Probabilité conditionnelle

Indépendance

Annexe

Exemple

M et $m = \overline{M}$ forment une famille complète d'événements telles que $P(M) \neq 0$ et $P(m) \neq 0$.
La formule des probabilités totales permet d'écrire :

Probabilité conditionnelle

Exemple

M et $m = \overline{M}$ forment une famille complète d'événements telles que $P(M) \neq 0$ et $P(m) \neq 0$.
La formule des probabilités totales permet d'écrire :

$$P(D) = P(M).P(D/M) + P(m).P(D/m)$$

Probabilité conditionnelle

Exemple

M et $m = \overline{M}$ forment une famille complète d'événements telles que $P(M) \neq 0$ et $P(m) \neq 0$.

La formule des probabilités totales permet d'écrire :

$$P(D) = P(M).P(D/M) + P(m).P(D/m) = 0,6.\frac{5}{100} + 0,4.\frac{7}{100}$$

Probabilité conditionnelle

Exemple

M et $m = \overline{M}$ forment une famille complète d'événements telles que $P(M) \neq 0$ et $P(m) \neq 0$.
La formule des probabilités totales permet d'écrire :

$$P(D) = P(M).P(D/M) + P(m).P(D/m) = 0,6.\frac{5}{100} + 0,4.\frac{7}{100}$$

$$P(D) = 0,03 + 0,028 = 0,058.$$

Probabilité conditionnelle

R3.08 Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Plan

Rappels

Probabilités

Probabilité conditionnelle

Indépendance

Annexe

Exemple

M et $m = \overline{M}$ forment une famille complète d'événements telles que $P(M) \neq 0$ et $P(m) \neq 0$.

La formule des probabilités totales permet d'écrire :

$$P(D) = P(M).P(D/M) + P(m).P(D/m) = 0,6.\frac{5}{100} + 0,4.\frac{7}{100}$$

$$P(D) = 0,03 + 0,028 = 0,058.$$

La formule de Bayes donne :

Probabilité conditionnelle

Exemple

M et $m = \overline{M}$ forment une famille complète d'événements telles que $P(M) \neq 0$ et $P(m) \neq 0$.
La formule des probabilités totales permet d'écrire :

$$P(D) = P(M).P(D/M) + P(m).P(D/m) = 0,6.\frac{5}{100} + 0,4.\frac{7}{100}$$

$$P(D) = 0,03 + 0,028 = 0,058.$$

La formule de Bayes donne :

$$P(M/D) = \frac{P\,(M)\,P\,(D/M)}{P(M).P(D/M) + P(m).P(D/m)}$$

Probabilité conditionnelle

Exemple

M et $m = \overline{M}$ forment une famille complète d'événements telles que $P(M) \neq 0$ et $P(m) \neq 0$.

La formule des probabilités totales permet d'écrire :

$$P(D) = P(M).P(D/M) + P(m).P(D/m) = 0,6.\frac{5}{100} + 0,4.\frac{7}{100}$$

$$P(D) = 0,03 + 0,028 = 0,058.$$

La formule de Bayes donne :

$$P(M/D) = \frac{P(M)\,P(D/M)}{P(M).P(D/M) + P(m).P(D/m)} = \frac{0,6.0,05}{0,6.\frac{5}{100} + 0,4.\frac{7}{100}}$$

Probabilité conditionnelle

R3.08 Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Plan

Rappels

Probabilités

Probabilité conditionnelle

Indépendance

Annexe

Exemple

M et $m = \overline{M}$ forment une famille complète d'événements telles que $P(M) \neq 0$ et $P(m) \neq 0$.

La formule des probabilités totales permet d'écrire :

$$P(D) = P(M).P(D/M) + P(m).P(D/m) = 0,6.\frac{5}{100} + 0,4.\frac{7}{100}$$

$$P(D) = 0,03 + 0,028 = 0,058.$$

La formule de Bayes donne :

$$P(M/D) = \frac{P\,(M)\,P\,(D/M)}{P(M).P(D/M) + P(m).P(D/m)} = \frac{0,6.0,05}{0,6.\frac{5}{100} + 0,4.\frac{7}{100}}$$

$$P(M/D) = \frac{0,030}{0,058}$$

Probabilité conditionnelle

Exemple

M et $m = \overline{M}$ forment une famille complète d'événements telles que $P(M) \neq 0$ et $P(m) \neq 0$.
La formule des probabilités totales permet d'écrire :

$$P(D) = P(M).P(D/M) + P(m).P(D/m) = 0,6.\frac{5}{100} + 0,4.\frac{7}{100}$$

$$P(D) = 0,03 + 0,028 = 0,058.$$

La formule de Bayes donne :

$$P(M/D) = \frac{P(M)\,P(D/M)}{P(M).P(D/M) + P(m).P(D/m)} = \frac{0,6.0,05}{0,6.\frac{5}{100} + 0,4.\frac{7}{100}}$$

$$P(M/D) = \frac{0,030}{0,058} = \frac{15}{29} \approx 0,517$$

Indépendance

Indépendance

Indépendance de deux événements

Indépendance

R3.08 Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Indépendance de deux événements

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé et A et B deux événements.

Indépendance

Indépendance de deux événements

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé et A et B deux événements.
A et B sont dits indépendants si $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

Indépendance

Indépendance

Remarque

Indépendance

Remarque

Si $P(A) \neq 0$ alors A et B sont indépendants si et seulement si $P(B/A) = P(B)$.

Indépendance

Remarque

Si $P(A) \neq 0$ alors A et B sont indépendants si et seulement si $P(B/A) = P(B)$.

Démonstration

Indépendance

Remarque

Si $P(A) \neq 0$ alors A et B sont indépendants si et seulement si $P(B/A) = P(B)$.

Démonstration

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A)P(B)}{P(A)} = P(B).$$

Indépendance

Remarque

Si $P(A) \neq 0$ alors A et B sont indépendants si et seulement si $P(B/A) = P(B)$.

Démonstration

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A)P(B)}{P(A)} = P(B).$$

Réciproquement si $P(B/A) = P(B)$ alors $P(A \cap B) = P(A)P(B/A) = P(A)P(B)$.

Indépendance

Indépendance

Propriétés

Indépendance

Propriétés

a) Un événement presque impossible (respectivement presque certain) est indépendant de tout événement.

Indépendance

R3.08 Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

- Plan
- Rappels
- Probabilités
- Probabilité conditionnelle
- Indépendance
- Annexe

Propriétés

a) Un événement presque impossible (respectivement presque certain) est indépendant de tout événement.
b) Si A et B sont indépendants alors A et $\overline{B}$ (respectivement $\overline{A}$ et B, $\overline{A}$ et B, $\overline{A}$ et $\overline{B}$) sont indépendants.

Indépendance

Propriétés

a) Un événement presque impossible (respectivement presque certain) est indépendant de tout événement.
b) Si A et B sont indépendants alors A et $\overline{B}$ (respectivement $\overline{A}$ et B, $\overline{A}$ et B, $\overline{A}$ et $\overline{B}$) sont indépendants.
Démonstration en annexe.

Indépendance

R3.08 Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Indépendance

Indépendance d'une famille d'événements

Indépendance

Indépendance d'une famille d'événements

Soit $(\Omega,\ \mathcal{T},\ P)$ un espace probabilisé et $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'événements (I ensemble fini ou non).

Indépendance

Indépendance d'une famille d'événements

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé et $(A_i)_{i \in I}$ une famille d'événements (I ensemble fini ou non).
$(A_i)_{i \in I}$ est une famille d'événements indépendants (dans leur ensemble) si pour toute suite finie $(i_j)_{1 \leq j \leq n}$ de I

Indépendance

Indépendance d'une famille d'événements

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé et $(A_i)_{i \in I}$ une famille d'événements (I ensemble fini ou non).
$(A_i)_{i \in I}$ est une famille d'événements indépendants (dans leur ensemble) si pour toute suite finie $(i_j)_{1 \leq j \leq n}$ de I

$$P\left(\bigcap_{j=1}^{n} A_{i_j}\right) = \prod_{j=1}^{n} P\left(A_{i_j}\right)$$

Indépendance

Indépendance d'une famille d'événements

Soit $(\Omega,\ \mathcal{T},\ P)$ un espace probabilisé et $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'événements (I ensemble fini ou non).
$(A_i)_{i\in I}$ est une famille d'événements indépendants (dans leur ensemble) si pour toute suite finie $(i_j)_{1\leq j\leq n}$ de I

$$P\left(\bigcap_{j=1}^{n} A_{i_j}\right) = \prod_{j=1}^{n} P\left(A_{i_j}\right)$$

Remarque

Indépendance

Indépendance d'une famille d'événements

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé et $(A_i)_{i \in I}$ une famille d'événements (I ensemble fini ou non).
$(A_i)_{i \in I}$ est une famille d'événements indépendants (dans leur ensemble) si pour toute suite finie $(i_j)_{1 \leq j \leq n}$ de I

$$P\left(\bigcap_{j=1}^{n} A_{i_j}\right) = \prod_{j=1}^{n} P\left(A_{i_j}\right)$$

Remarque

L'indépendance deux à deux n'implique pas l'indépendance d'une famille d'événements dans leur ensemble.

Indépendance

Indépendance

Exemple

Indépendance

Exemple

On considère l'expérience aléatoire consistant à lancer un dé tétraédrique parfait et à noter le nombre lu sur sa face inférieure.

Indépendance

Exemple

On considère l'expérience aléatoire consistant à lancer un dé tétraédrique parfait et à noter le nombre lu sur sa face inférieure.
$\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$, $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$, P : probabilité uniforme.

Indépendance

Exemple

On considère l'expérience aléatoire consistant à lancer un dé tétraédrique parfait et à noter le nombre lu sur sa face inférieure.
$\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$, $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$, P : probabilité uniforme.
On note $A_1 = \{1, 2\}$, $A_2 = \{2, 3\}$ et $A_3 = \{1, 3\}$.

Indépendance

Exemple

On considère l'expérience aléatoire consistant à lancer un dé tétraédrique parfait et à noter le nombre lu sur sa face inférieure.
$\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$, $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$, P : probabilité uniforme.
On note $A_1 = \{1, 2\}$, $A_2 = \{2, 3\}$ et $A_3 = \{1, 3\}$.

$$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{1}{2}$$

Indépendance

Exemple

On considère l'expérience aléatoire consistant à lancer un dé tétraédrique parfait et à noter le nombre lu sur sa face inférieure.
$\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$, $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$, P : probabilité uniforme.
On note $A_1 = \{1, 2\}$, $A_2 = \{2, 3\}$ et $A_3 = \{1, 3\}$.

$$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{1}{2}$$

$$P(A_1 \cap A_2) = P(2) = \frac{1}{4} = P(A_1)\, P(A_2)$$

Indépendance

Exemple

On considère l'expérience aléatoire consistant à lancer un dé tétraédrique parfait et à noter le nombre lu sur sa face inférieure.
$\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$, $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$, P : probabilité uniforme.
On note $A_1 = \{1, 2\}$, $A_2 = \{2, 3\}$ et $A_3 = \{1, 3\}$.

$$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{1}{2}$$

$$P(A_1 \cap A_2) = P(2) = \frac{1}{4} = P(A_1)\,P(A_2)$$

$$P(A_1 \cap A_3) = P(1) = \frac{1}{4} = P(A_1)\,P(A_3)$$

Indépendance

Exemple

On considère l'expérience aléatoire consistant à lancer un dé tétraédrique parfait et à noter le nombre lu sur sa face inférieure.
$\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$, $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$, P : probabilité uniforme.
On note $A_1 = \{1, 2\}$, $A_2 = \{2, 3\}$ et $A_3 = \{1, 3\}$.

$$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{1}{2}$$

$$P(A_1 \cap A_2) = P(2) = \frac{1}{4} = P(A_1)P(A_2)$$

$$P(A_1 \cap A_3) = P(1) = \frac{1}{4} = P(A_1)P(A_3)$$

$$P(A_2 \cap A_3) = P(3) = \frac{1}{4} = P(A_2)P(A_3)$$

Indépendance

Exemple

On considère l'expérience aléatoire consistant à lancer un dé tétraédrique parfait et à noter le nombre lu sur sa face inférieure.
$\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$, $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$, P : probabilité uniforme.
On note $A_1 = \{1, 2\}$, $A_2 = \{2, 3\}$ et $A_3 = \{1, 3\}$.

$$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{1}{2}$$

$$P(A_1 \cap A_2) = P(2) = \frac{1}{4} = P(A_1)\,P(A_2)$$

$$P(A_1 \cap A_3) = P(1) = \frac{1}{4} = P(A_1)\,P(A_3)$$

$$P(A_2 \cap A_3) = P(3) = \frac{1}{4} = P(A_2)\,P(A_3)$$

Mais $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(\emptyset) = 0$ et $P(A_1)\,P(A_2)\,P(A_3) = \dfrac{1}{8}$

Indépendance

Indépendance

Indépendance d'une famille d'expériences aléatoires

Indépendance

R3.08
Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Indépendance d'une famille d'expériences aléatoires

Soit une famille de n expériences aléatoires $(\mathcal{E}_i)$ associées à un espace probabilisé $(\Omega_i, \mathcal{T}_i, P_i)$ avec $1 \leq i \leq n$.

Indépendance d'une famille d'expériences aléatoires

Soit une famille de n expériences aléatoires $(\mathcal{E}_i)$ associées à un espace probabilisé $(\Omega_i, \mathcal{T}_i, P_i)$ avec $1 \leq i \leq n$.
On construit un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ associé à l'expérience aléatoire définie par la suite des n expériences aléatoires $(\mathcal{E}_i)$ réalisées de manière indépendante en posant :

Indépendance

R3.08 Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Plan

Rappels

Probabilités

Probabilité conditionnelle

Indépendance

Annexe

Indépendance d'une famille d'expériences aléatoires

Soit une famille de n expériences aléatoires $(\mathcal{E}_i)$ associées à un espace probabilisé $(\Omega_i, \mathcal{T}_i, P_i)$ avec $1 \leq i \leq n$.
On construit un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ associé à l'expérience aléatoire définie par la suite des n expériences aléatoires $(\mathcal{E}_i)$ réalisées de manière indépendante en posant :
$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \cdots \times \Omega_n$

Indépendance

Indépendance d'une famille d'expériences aléatoires

Soit une famille de n expériences aléatoires $(\mathcal{E}_i)$ associées à un espace probabilisé $(\Omega_i, \mathcal{T}_i, P_i)$ avec $1 \leq i \leq n$.
On construit un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ associé à l'expérience aléatoire définie par la suite des n expériences aléatoires $(\mathcal{E}_i)$ réalisées de manière indépendante en posant :
$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \cdots \times \Omega_n$
$\mathcal{T}$ est la tribu engendrée par les parties de Ω.

Indépendance

Indépendance d'une famille d'expériences aléatoires

Soit une famille de n expériences aléatoires $(\mathcal{E}_i)$ associées à un espace probabilisé $(\Omega_i, \mathcal{T}_i, P_i)$ avec $1 \leq i \leq n$.
On construit un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ associé à l'expérience aléatoire définie par la suite des n expériences aléatoires $(\mathcal{E}_i)$ réalisées de manière indépendante en posant :
$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \cdots \times \Omega_n$
$\mathcal{T}$ est la tribu engendrée par les parties de Ω.
$\forall A_i \in \mathcal{T}_i,\ P\left(A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n\right) = P_1\left(A_1\right) P_2\left(A_2\right) \cdots P_n\left(A_n\right)$

Indépendance

Indépendance d'une famille d'expériences aléatoires

Soit une famille de n expériences aléatoires $(\mathcal{E}_i)$ associées à un espace probabilisé $(\Omega_i, \mathcal{T}_i, P_i)$ avec $1 \leq i \leq n$.
On construit un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ associé à l'expérience aléatoire définie par la suite des n expériences aléatoires $(\mathcal{E}_i)$ réalisées de manière indépendante en posant :
$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \cdots \times \Omega_n$
$\mathcal{T}$ est la tribu engendrée par les parties de Ω.
$\forall A_i \in \mathcal{T}_i,\ P(A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n) = P_1(A_1)\, P_2(A_2) \cdots P_n(A_n)$

Notations

Indépendance

Indépendance d'une famille d'expériences aléatoires

Soit une famille de n expériences aléatoires $(\mathcal{E}_i)$ associées à un espace probabilisé $(\Omega_i, \mathcal{T}_i, P_i)$ avec $1 \leq i \leq n$.
On construit un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ associé à l'expérience aléatoire définie par la suite des n expériences aléatoires $(\mathcal{E}_i)$ réalisées de manière indépendante en posant :
$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \cdots \times \Omega_n$
$\mathcal{T}$ est la tribu engendrée par les parties de Ω.
$\forall A_i \in \mathcal{T}_i,\ P(A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n) = P_1(A_1) P_2(A_2) \cdots P_n(A_n)$

Notations

$\Omega = \Omega_1 \otimes \Omega_2 \otimes \cdots \otimes \Omega_n$

Indépendance

Indépendance d'une famille d'expériences aléatoires

Soit une famille de n expériences aléatoires $(\mathcal{E}_i)$ associées à un espace probabilisé $(\Omega_i, \mathcal{T}_i, P_i)$ avec $1 \leq i \leq n$.
On construit un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ associé à l'expérience aléatoire définie par la suite des n expériences aléatoires $(\mathcal{E}_i)$ réalisées de manière indépendante en posant :
$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \cdots \times \Omega_n$
$\mathcal{T}$ est la tribu engendrée par les parties de Ω.
$\forall A_i \in \mathcal{T}_i,\ P\left(A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n\right) = P_1\left(A_1\right) P_2\left(A_2\right) \cdots P_n\left(A_n\right)$

Notations

$\Omega = \Omega_1 \otimes \Omega_2 \otimes \cdots \otimes \Omega_n$
$\mathcal{T} = \mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2 \otimes \cdots \otimes \mathcal{T}_n$

Indépendance

Indépendance d'une famille d'expériences aléatoires

Soit une famille de n expériences aléatoires $(\mathcal{E}_i)$ associées à un espace probabilisé $(\Omega_i, \mathcal{T}_i, P_i)$ avec $1 \leq i \leq n$.
On construit un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ associé à l'expérience aléatoire définie par la suite des n expériences aléatoires $(\mathcal{E}_i)$ réalisées de manière indépendante en posant :
$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \cdots \times \Omega_n$
$\mathcal{T}$ est la tribu engendrée par les parties de Ω.
$\forall A_i \in \mathcal{T}_i,\ P\left(A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n\right) = P_1\left(A_1\right) P_2\left(A_2\right) \cdots P_n\left(A_n\right)$

Notations

$\Omega = \Omega_1 \otimes \Omega_2 \otimes \cdots \otimes \Omega_n$
$\mathcal{T} = \mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2 \otimes \cdots \otimes \mathcal{T}_n$
$P = P_1 \otimes P_2 \otimes \cdots \otimes P_n$.

Indépendance

Indépendance

Exemple

Indépendance

R3.08
Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Exemple

Expérience aléatoire $\mathcal{E}$:

Indépendance

Exemple

Expérience aléatoire $\mathcal{E}$:
Une urne $\mathcal{U}_1$ contient un jeton numéroté 1, un jeton numéroté 2 et un jeton numéroté 3.

Indépendance

Exemple

Expérience aléatoire $\mathcal{E}$:
Une urne $\mathcal{U}_1$ contient un jeton numéroté 1, un jeton numéroté 2 et un jeton numéroté 3.
Une urne $\mathcal{U}_2$ contient un jeton numéroté 1 et un jeton numéroté 2.

Indépendance

Exemple

Expérience aléatoire $\mathcal{E}$:
Une urne $\mathcal{U}_1$ contient un jeton numéroté 1, un jeton numéroté 2 et un jeton numéroté 3.
Une urne $\mathcal{U}_2$ contient un jeton numéroté 1 et un jeton numéroté 2.
On tire au hasard un jeton dans l'urne $\mathcal{U}_1$ puis un jeton dans l'urne $\mathcal{U}_2$.

Indépendance

Exemple

Expérience aléatoire $\mathcal{E}$:
Une urne $\mathcal{U}_1$ contient un jeton numéroté 1, un jeton numéroté 2 et un jeton numéroté 3.
Une urne $\mathcal{U}_2$ contient un jeton numéroté 1 et un jeton numéroté 2.
On tire au hasard un jeton dans l'urne $\mathcal{U}_1$ puis un jeton dans l'urne $\mathcal{U}_2$.
On note le numéro du premier jeton puis le numéro du deuxième.

Indépendance

Exemple

Expérience aléatoire $\mathcal{E}$:
Une urne $\mathcal{U}_1$ contient un jeton numéroté 1, un jeton numéroté 2 et un jeton numéroté 3.
Une urne $\mathcal{U}_2$ contient un jeton numéroté 1 et un jeton numéroté 2.
On tire au hasard un jeton dans l'urne $\mathcal{U}_1$ puis un jeton dans l'urne $\mathcal{U}_2$.
On note le numéro du premier jeton puis le numéro du deuxième.

Premier point de vue

Indépendance

Exemple

Expérience aléatoire $\mathcal{E}$:
Une urne $\mathcal{U}_1$ contient un jeton numéroté 1, un jeton numéroté 2 et un jeton numéroté 3.
Une urne $\mathcal{U}_2$ contient un jeton numéroté 1 et un jeton numéroté 2.
On tire au hasard un jeton dans l'urne $\mathcal{U}_1$ puis un jeton dans l'urne $\mathcal{U}_2$.
On note le numéro du premier jeton puis le numéro du deuxième.

Premier point de vue

$\Omega = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,1),(3,2)\}$

Indépendance

R3.08 Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Exemple

Expérience aléatoire $\mathcal{E}$:
Une urne $\mathcal{U}_1$ contient un jeton numéroté 1, un jeton numéroté 2 et un jeton numéroté 3.
Une urne $\mathcal{U}_2$ contient un jeton numéroté 1 et un jeton numéroté 2.
On tire au hasard un jeton dans l'urne $\mathcal{U}_1$ puis un jeton dans l'urne $\mathcal{U}_2$.
On note le numéro du premier jeton puis le numéro du deuxième.

Premier point de vue

$\Omega = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,1),(3,2)\}$
$\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$

Indépendance

Exemple

Expérience aléatoire $\mathcal{E}$:
Une urne $\mathcal{U}_1$ contient un jeton numéroté 1, un jeton numéroté 2 et un jeton numéroté 3.
Une urne $\mathcal{U}_2$ contient un jeton numéroté 1 et un jeton numéroté 2.
On tire au hasard un jeton dans l'urne $\mathcal{U}_1$ puis un jeton dans l'urne $\mathcal{U}_2$.
On note le numéro du premier jeton puis le numéro du deuxième.

Premier point de vue

$\Omega = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,1),(3,2)\}$
$\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$
Équiprobabilité sur Ω :

Indépendance

R3.08 Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Exemple

Expérience aléatoire $\mathcal{E}$:
Une urne $\mathcal{U}_1$ contient un jeton numéroté 1, un jeton numéroté 2 et un jeton numéroté 3.
Une urne $\mathcal{U}_2$ contient un jeton numéroté 1 et un jeton numéroté 2.
On tire au hasard un jeton dans l'urne $\mathcal{U}_1$ puis un jeton dans l'urne $\mathcal{U}_2$.
On note le numéro du premier jeton puis le numéro du deuxième.

Premier point de vue

$\Omega = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,1),(3,2)\}$
$\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$
Équiprobabilité sur Ω :

$$P(1,1) = P(1,2) = P(2,1) = P(2,2) = P(3,1) = P(3,2) = \frac{1}{6}$$

Indépendance

Indépendance

Deuxième point de vue

Indépendance

Deuxième point de vue

Expérience aléatoire $\mathcal{E}_1$:

Deuxième point de vue

Expérience aléatoire $\mathcal{E}_1$:
Une urne $\mathcal{U}_1$ contient un jeton numéroté 1, un jeton numéroté 2 et un jeton numéroté 3.

Indépendance

Deuxième point de vue

Expérience aléatoire $\mathcal{E}_1$:

Une urne $\mathcal{U}_1$ contient un jeton numéroté 1, un jeton numéroté 2 et un jeton numéroté 3.

On tire au hasard un jeton dans l'urne $\mathcal{U}_1$.

Indépendance

Deuxième point de vue

Expérience aléatoire $\mathcal{E}_1$:

Une urne $\mathcal{U}_1$ contient un jeton numéroté 1, un jeton numéroté 2 et un jeton numéroté 3.

On tire au hasard un jeton dans l'urne $\mathcal{U}_1$.

$\Omega_1 = \{1, 2, 3\}$

Indépendance

Deuxième point de vue

Expérience aléatoire $\mathcal{E}_1$:

Une urne $\mathcal{U}_1$ contient un jeton numéroté 1, un jeton numéroté 2 et un jeton numéroté 3.

On tire au hasard un jeton dans l'urne $\mathcal{U}_1$.

$\Omega_1 = \{1, 2, 3\}$

$\mathcal{T}_1 = \mathcal{P}(\Omega_1)$

Indépendance

Deuxième point de vue

Expérience aléatoire $\mathcal{E}_1$:

Une urne $\mathcal{U}_1$ contient un jeton numéroté 1, un jeton numéroté 2 et un jeton numéroté 3.

On tire au hasard un jeton dans l'urne $\mathcal{U}_1$.

$\Omega_1 = \{1, 2, 3\}$

$\mathcal{T}_1 = \mathcal{P}(\Omega_1)$

$$P_1(1) = P_1(2) = P_1(3) = \frac{1}{3}$$

Indépendance

Deuxième point de vue

Expérience aléatoire $\mathcal{E}_1$:

Une urne $\mathcal{U}_1$ contient un jeton numéroté 1, un jeton numéroté 2 et un jeton numéroté 3.

On tire au hasard un jeton dans l'urne $\mathcal{U}_1$.

$\Omega_1 = \{1, 2, 3\}$

$\mathcal{T}_1 = \mathcal{P}(\Omega_1)$

$P_1(1) = P_1(2) = P_1(3) = \dfrac{1}{3}$

Expérience aléatoire $\mathcal{E}_2$:

Indépendance

Deuxième point de vue

Expérience aléatoire $\mathcal{E}_1$:

Une urne $\mathcal{U}_1$ contient un jeton numéroté 1, un jeton numéroté 2 et un jeton numéroté 3.

On tire au hasard un jeton dans l'urne $\mathcal{U}_1$.

$\Omega_1 = \{1, 2, 3\}$

$\mathcal{T}_1 = \mathcal{P}(\Omega_1)$

$$P_1(1) = P_1(2) = P_1(3) = \frac{1}{3}$$

Expérience aléatoire $\mathcal{E}_2$:

Une urne $\mathcal{U}_2$ contient un jeton numéroté 1 et un jeton numéroté 2.

Indépendance

Deuxième point de vue

Expérience aléatoire $\mathcal{E}_1$:

Une urne $\mathcal{U}_1$ contient un jeton numéroté 1, un jeton numéroté 2 et un jeton numéroté 3.

On tire au hasard un jeton dans l'urne $\mathcal{U}_1$.

$\Omega_1 = \{1, 2, 3\}$

$\mathcal{T}_1 = \mathcal{P}(\Omega_1)$

$P_1(1) = P_1(2) = P_1(3) = \dfrac{1}{3}$

Expérience aléatoire $\mathcal{E}_2$:

Une urne $\mathcal{U}_2$ contient un jeton numéroté 1 et un jeton numéroté 2.

On tire au hasard un jeton dans l'urne $\mathcal{U}_2$.

Indépendance

Deuxième point de vue

Expérience aléatoire $\mathcal{E}_1$:

Une urne $\mathcal{U}_1$ contient un jeton numéroté 1, un jeton numéroté 2 et un jeton numéroté 3.

On tire au hasard un jeton dans l'urne $\mathcal{U}_1$.

$\Omega_1 = \{1, 2, 3\}$

$\mathcal{T}_1 = \mathcal{P}(\Omega_1)$

$$P_1(1) = P_1(2) = P_1(3) = \frac{1}{3}$$

Expérience aléatoire $\mathcal{E}_2$:

Une urne $\mathcal{U}_2$ contient un jeton numéroté 1 et un jeton numéroté 2.

On tire au hasard un jeton dans l'urne $\mathcal{U}_2$.

$\Omega_2 = \{1, 2\}$

Indépendance

Deuxième point de vue

Expérience aléatoire $\mathcal{E}_1$:

Une urne $\mathcal{U}_1$ contient un jeton numéroté 1, un jeton numéroté 2 et un jeton numéroté 3.
On tire au hasard un jeton dans l'urne $\mathcal{U}_1$.
$\Omega_1 = \{1, 2, 3\}$
$\mathcal{T}_1 = \mathcal{P}(\Omega_1)$

$$P_1(1) = P_1(2) = P_1(3) = \frac{1}{3}$$

Expérience aléatoire $\mathcal{E}_2$:

Une urne $\mathcal{U}_2$ contient un jeton numéroté 1 et un jeton numéroté 2.
On tire au hasard un jeton dans l'urne $\mathcal{U}_2$.
$\Omega_2 = \{1, 2\}$
$\mathcal{T}_2 = \mathcal{P}(\Omega_2)$

Indépendance

Deuxième point de vue

Expérience aléatoire $\mathcal{E}_1$:

Une urne $\mathcal{U}_1$ contient un jeton numéroté 1, un jeton numéroté 2 et un jeton numéroté 3.
On tire au hasard un jeton dans l'urne $\mathcal{U}_1$.
$\Omega_1 = \{1, 2, 3\}$
$\mathcal{T}_1 = \mathcal{P}(\Omega_1)$
$P_1(1) = P_1(2) = P_1(3) = \dfrac{1}{3}$

Expérience aléatoire $\mathcal{E}_2$:

Une urne $\mathcal{U}_2$ contient un jeton numéroté 1 et un jeton numéroté 2.
On tire au hasard un jeton dans l'urne $\mathcal{U}_2$.
$\Omega_2 = \{1, 2\}$
$\mathcal{T}_2 = \mathcal{P}(\Omega_2)$
$P_2(1) = P_2(2) = \dfrac{1}{2}$

Indépendance

Deuxième point de vue

Indépendance

Deuxième point de vue

Expérience aléatoire $\mathcal{E}$, suite $(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$:

Indépendance

Deuxième point de vue

Expérience aléatoire $\mathcal{E}$, suite $(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$:

$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 = \{1,2,3\} \times \{1,2\} = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,1),(3,2)\}$

Indépendance

Deuxième point de vue

Expérience aléatoire $\mathcal{E}$, suite $(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$:

$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 = \{1,2,3\} \times \{1,2\} = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,1),(3,2)\}$

$\mathcal{T} = \mathcal{T}(\Omega_1 \times \Omega_2) = \mathcal{P}(\Omega_1 \times \Omega_2)$

Indépendance

Deuxième point de vue

Expérience aléatoire $\mathcal{E}$, suite $(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$:

$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 = \{1, 2, 3\} \times \{1, 2\} = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2)\}$

$\mathcal{T} = \mathcal{T}(\Omega_1 \times \Omega_2) = \mathcal{P}(\Omega_1 \times \Omega_2)$

$P = P_1 \otimes P_2$ définie par

Indépendance

Deuxième point de vue

Expérience aléatoire $\mathcal{E}$, suite $(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$:
$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 = \{1,2,3\} \times \{1,2\} = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,1),(3,2)\}$
$\mathcal{T} = \mathcal{T}(\Omega_1 \times \Omega_2) = \mathcal{P}(\Omega_1 \times \Omega_2)$
$P = P_1 \otimes P_2$ définie par
$P(i,j) = P_1 \otimes P_2(i,j) = P_1(i)P_2(j) = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{6}$ avec $i \in \{1,2,3\}$ et $j \in \{1,2\}$.


UN TRÈFLE À 4 FEUILLES, ÇA PORTE CHANCE À CELUI QUI LE TROUVE, À CELUI QUI LE CUEILLE, À CELUI QUI LE REÇOIT ET À CELUI QUI LE CONSERVE
FINALEMENT, IL N'Y A QU'AU TRÈFLE LUI-MÊME QUE ÇA NE RÉUSSIT PAS

Probabilité

R3.08 Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Propriétés : démonstration

Probabilité

Propriétés : démonstration

a) On pose $A_1 = \Omega$ et $A_i = \emptyset$ pour $i \geq 2$.

Propriétés : démonstration

a) On pose $A_1 = \Omega$ et $A_i = \emptyset$ pour $i \geq 2$.
On obtient alors $P(\emptyset) = 0$.

Propriétés : démonstration

a) On pose $A_1 = \Omega$ et $A_i = \emptyset$ pour $i \geq 2$.
On obtient alors $P(\emptyset) = 0$.
b) On pose $A_i = \emptyset$ pour $i \geq n+1$.

Probabilité

R3.08 Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Propriétés : démonstration

a) On pose $A_1 = \Omega$ et $A_i = \emptyset$ pour $i \geq 2$.
On obtient alors $P(\emptyset) = 0$.
b) On pose $A_i = \emptyset$ pour $i \geq n+1$.
c) $\Omega = A \cup \overline{A}$ et $A \cap \overline{A} = \emptyset$ donnent $P(\Omega) = P\left(A \cup \overline{A}\right) = P(A) + P\left(\overline{A}\right)$

Probabilité

Propriétés : démonstration

a) On pose $A_1 = \Omega$ et $A_i = \emptyset$ pour $i \geq 2$.
On obtient alors $P(\emptyset) = 0$.
b) On pose $A_i = \emptyset$ pour $i \geq n + 1$.
c) $\Omega = A \cup \overline{A}$ et $A \cap \overline{A} = \emptyset$ donnent $P(\Omega) = P\left(A \cup \overline{A}\right) = P(A) + P\left(\overline{A}\right)$

et donc $P(A) + P\left(\overline{A}\right) = 1$

Probabilité

Propriétés : démonstration

a) On pose $A_1 = \Omega$ et $A_i = \emptyset$ pour $i \geq 2$.
On obtient alors $P(\emptyset) = 0$.
b) On pose $A_i = \emptyset$ pour $i \geq n+1$.
c) $\Omega = A \cup \overline{A}$ et $A \cap \overline{A} = \emptyset$ donnent $P(\Omega) = P\left(A \cup \overline{A}\right) = P(A) + P\left(\overline{A}\right)$

et donc $P(A) + P\left(\overline{A}\right) = 1$

d) $A \cup B = A \cup \left(\overline{A} \cap B\right)$ avec A et $\overline{A} \cap B$ incompatibles.

Probabilité

Propriétés : démonstration

a) On pose $A_1 = \Omega$ et $A_i = \emptyset$ pour $i \geq 2$.
On obtient alors $P(\emptyset) = 0$.
b) On pose $A_i = \emptyset$ pour $i \geq n+1$.
c) $\Omega = A \cup \overline{A}$ et $A \cap \overline{A} = \emptyset$ donnent $P(\Omega) = P\left(A \cup \overline{A}\right) = P(A) + P\left(\overline{A}\right)$

et donc $P(A) + P\left(\overline{A}\right) = 1$

d) $A \cup B = A \cup \left(\overline{A} \cap B\right)$ avec A et $\overline{A} \cap B$ incompatibles.

On a donc $P\left(A \cup B\right) = P\left(A\right) + P\left(\overline{A} \cap B\right)$.

Propriétés : démonstration

a) On pose $A_1 = \Omega$ et $A_i = \emptyset$ pour $i \geq 2$.
On obtient alors $P(\emptyset) = 0$.
b) On pose $A_i = \emptyset$ pour $i \geq n+1$.
c) $\Omega = A \cup \overline{A}$ et $A \cap \overline{A} = \emptyset$ donnent $P(\Omega) = P\left(A \cup \overline{A}\right) = P(A) + P\left(\overline{A}\right)$

et donc $P(A) + P\left(\overline{A}\right) = 1$

d) $A \cup B = A \cup \left(\overline{A} \cap B\right)$ avec A et $\overline{A} \cap B$ incompatibles.

On a donc $P(A \cup B) = P(A) + P\left(\overline{A} \cap B\right)$.

De plus, $B = (A \cap B) \cup \left(\overline{A} \cap B\right)$ avec $A \cap B$ et $\overline{A} \cap B$ incompatibles.

Probabilité

Propriétés : démonstration

a) On pose $A_1 = \Omega$ et $A_i = \emptyset$ pour $i \geq 2$.
On obtient alors $P(\emptyset) = 0$.
b) On pose $A_i = \emptyset$ pour $i \geq n+1$.
c) $\Omega = A \cup \overline{A}$ et $A \cap \overline{A} = \emptyset$ donnent $P(\Omega) = P\left(A \cup \overline{A}\right) = P(A) + P\left(\overline{A}\right)$
et donc $P(A) + P\left(\overline{A}\right) = 1$

d) $A \cup B = A \cup \left(\overline{A} \cap B\right)$ avec A et $\overline{A} \cap B$ incompatibles.

On a donc $P\left(A \cup B\right) = P\left(A\right) + P\left(\overline{A} \cap B\right)$.

De plus, $B = (A \cap B) \cup \left(\overline{A} \cap B\right)$ avec $A \cap B$ et $\overline{A} \cap B$ incompatibles.

On en déduit $P(B) = P\left(A \cap B\right) + P\left(\overline{A} \cap B\right)$ et donc

Propriétés : démonstration

a) On pose $A_1 = \Omega$ et $A_i = \emptyset$ pour $i \geq 2$.
On obtient alors $P(\emptyset) = 0$.
b) On pose $A_i = \emptyset$ pour $i \geq n+1$.
c) $\Omega = A \cup \overline{A}$ et $A \cap \overline{A} = \emptyset$ donnent $P(\Omega) = P\left(A \cup \overline{A}\right) = P(A) + P\left(\overline{A}\right)$
et donc $P(A) + P\left(\overline{A}\right) = 1$
d) $A \cup B = A \cup \left(\overline{A} \cap B\right)$ avec A et $\overline{A} \cap B$ incompatibles.
On a donc $P(A \cup B) = P(A) + P\left(\overline{A} \cap B\right)$.
De plus, $B = (A \cap B) \cup \left(\overline{A} \cap B\right)$ avec $A \cap B$ et $\overline{A} \cap B$ incompatibles.
On en déduit $P(B) = P(A \cap B) + P\left(\overline{A} \cap B\right)$ et donc
$P(A \cup B) = P(A) + P\left(\overline{A} \cap B\right) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Probabilité

Propriétés : démonstration

a) On pose $A_1 = \Omega$ et $A_i = \emptyset$ pour $i \geq 2$.
On obtient alors $P(\emptyset) = 0$.
b) On pose $A_i = \emptyset$ pour $i \geq n+1$.
c) $\Omega = A \cup \overline{A}$ et $A \cap \overline{A} = \emptyset$ donnent $P(\Omega) = P\left(A \cup \overline{A}\right) = P(A) + P\left(\overline{A}\right)$

et donc $P(A) + P\left(\overline{A}\right) = 1$

d) $A \cup B = A \cup \left(\overline{A} \cap B\right)$ avec A et $\overline{A} \cap B$ incompatibles.

On a donc $P(A \cup B) = P(A) + P\left(\overline{A} \cap B\right)$.

De plus, $B = (A \cap B) \cup \left(\overline{A} \cap B\right)$ avec $A \cap B$ et $\overline{A} \cap B$ incompatibles.

On en déduit $P(B) = P(A \cap B) + P\left(\overline{A} \cap B\right)$ et donc

$P(A \cup B) = P(A) + P\left(\overline{A} \cap B\right) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
e) Si $A \subset B$ alors
$P(B) = P(A \cap B) + P\left(\overline{A} \cap B\right) = P(A) + P\left(\overline{A} \cap B\right) \geq P(A)$.

Probabilité conditionnelle

Probabilité conditionnelle

Définition

Probabilité conditionnelle

R3.08 Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Définition

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé et A un événement tel que $P(A) \neq 0$.

Probabilité conditionnelle

Définition

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé et A un événement tel que $P(A) \neq 0$. Pour tout événement B, le réel noté $P(B/A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$ est appelé **probabilité de B sachant A**.

Probabilité conditionnelle

Définition

Soit $(\Omega,\ \mathcal{T},\ P)$ un espace probabilisé et A un événement tel que $P(A) \neq 0$. Pour tout événement B, le réel noté $P\left(B/A\right) = \dfrac{P\left(A \cap B\right)}{P\left(A\right)}$ est appelé **probabilité de B sachant A**.

Propriété

Probabilité conditionnelle

Définition

Soit $(\Omega,\ \mathcal{T},\ P)$ un espace probabilisé et A un événement tel que $P(A) \neq 0$.
Pour tout événement B, le réel noté $P\left(B/A\right) = \dfrac{P\left(A \cap B\right)}{P\left(A\right)}$ est appelé **probabilité de B sachant A**.

Propriété

L'application $B \rightarrow P\left(B/A\right)$ est une probabilité sur $(\Omega,\ \mathcal{T})$.

Probabilité conditionnelle

Définition

Soit $(\Omega,\ \mathcal{T},\ P)$ un espace probabilisé et A un événement tel que $P(A) \neq 0$.
Pour tout événement B, le réel noté $P\left(B/A\right) = \dfrac{P\left(A \cap B\right)}{P\left(A\right)}$ est appelé **probabilité de B sachant A**.

Propriété

L'application $B \to P\left(B/A\right)$ est une probabilité sur $(\Omega,\ \mathcal{T})$.
Démonstration en annexe.

Probabilité conditionnelle

Définition

Soit $(\Omega,\ \mathcal{T},\ P)$ un espace probabilisé et A un événement tel que $P(A) \neq 0$.
Pour tout événement B, le réel noté $P(B/A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$ est appelé **probabilité de B sachant A**.

Propriété

L'application $B \to P(B/A)$ est une probabilité sur $(\Omega,\ \mathcal{T})$.
Démonstration en annexe.

Autre notation

Probabilité conditionnelle

Définition

Soit $(\Omega,\ \mathcal{T},\ P)$ un espace probabilisé et A un événement tel que $P(A) \neq 0$.
Pour tout événement B, le réel noté $P\left(B/A\right) = \dfrac{P\left(A \cap B\right)}{P\left(A\right)}$ est appelé **probabilité de B sachant A**.

Propriété

L'application $B \to P\left(B/A\right)$ est une probabilité sur $(\Omega,\ \mathcal{T})$.
Démonstration en annexe.

Autre notation

$P\left(B/A\right) = P_A\left(B\right)$

Probabilité conditionnelle

Probabilité conditionnelle

Démonstration

Démonstration

a) $A \cap B \subset A$ donne $P(A \cap B) \leq P(A)$ et donc $\dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} \leq 1$.

Démonstration

a) $A \cap B \subset A$ donne $P(A \cap B) \leq P(A)$ et donc $\dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} \leq 1$.

Par ailleurs, $P(B/A) \geq 0$ et $P(A) > 0$ impliquent $\dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} \geq 0$.

Probabilité conditionnelle

Démonstration

a) $A \cap B \subset A$ donne $P(A \cap B) \leq P(A)$ et donc $\dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} \leq 1$.

Par ailleurs, $P(B/A) \geq 0$ et $P(A) > 0$ impliquent $\dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} \geq 0$.

b) $P(\Omega/A) = \dfrac{P(A \cap \Omega)}{P(A)} = \dfrac{P(A)}{P(A)} = 1$.

Démonstration

a) $A \cap B \subset A$ donne $P(A \cap B) \leq P(A)$ et donc $\dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} \leq 1$.

Par ailleurs, $P(B/A) \geq 0$ et $P(A) > 0$ impliquent $\dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} \geq 0$.

b) $P(\Omega/A) = \dfrac{P(A \cap \Omega)}{P(A)} = \dfrac{P(A)}{P(A)} = 1$.

c) Pour toute suite $(B_i)_{i \geq 1}$, d'événements incompatibles :

Probabilité conditionnelle

Démonstration

a) $A \cap B \subset A$ donne $P(A \cap B) \leq P(A)$ et donc $\dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} \leq 1$.

Par ailleurs, $P(B/A) \geq 0$ et $P(A) > 0$ impliquent $\dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} \geq 0$.

b) $P(\Omega/A) = \dfrac{P(A \cap \Omega)}{P(A)} = \dfrac{P(A)}{P(A)} = 1$.

c) Pour toute suite $(B_i)_{i \geq 1}$, d'événements incompatibles :

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} B_i/A\right) = \frac{P\left(A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} B_i\right)\right)}{P(A)} = \frac{P\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} (A \cap B_i)\right)}{P(A)}$$

Probabilité conditionnelle

Démonstration

a) $A \cap B \subset A$ donne $P(A \cap B) \leq P(A)$ et donc $\dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} \leq 1$.

Par ailleurs, $P(B/A) \geq 0$ et $P(A) > 0$ impliquent $\dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} \geq 0$.

b) $P(\Omega/A) = \dfrac{P(A \cap \Omega)}{P(A)} = \dfrac{P(A)}{P(A)} = 1$.

c) Pour toute suite $(B_i)_{i \geq 1}$, d'événements incompatibles :

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} B_i / A\right) = \frac{P\left(A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} B_i\right)\right)}{P(A)} = \frac{P\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} (A \cap B_i)\right)}{P(A)}$$

Or $\forall i \neq j$ $(A \cap B_i) \cap (A \cap B_j) = A \cap B_i \cap A \cap B_j = A \cap B_i \cap B_j = A \cap \emptyset = \emptyset$.

Probabilité conditionnelle

Démonstration

a) $A \cap B \subset A$ donne $P(A \cap B) \leq P(A)$ et donc $\dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} \leq 1$.

Par ailleurs, $P(B/A) \geq 0$ et $P(A) > 0$ impliquent $\dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} \geq 0$.

b) $P(\Omega/A) = \dfrac{P(A \cap \Omega)}{P(A)} = \dfrac{P(A)}{P(A)} = 1$.

c) Pour toute suite $(B_i)_{i \geq 1}$, d'événements incompatibles :

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} B_i / A\right) = \frac{P\left(A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} B_i\right)\right)}{P(A)} = \frac{P\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} (A \cap B_i)\right)}{P(A)}$$

Or $\forall i \neq j$ $(A \cap B_i) \cap (A \cap B_j) = A \cap B_i \cap A \cap B_j = A \cap B_i \cap B_j = A \cap \emptyset = \emptyset$.
On a donc

$$\frac{P\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} (A \cap B_i)\right)}{P(A)} = \frac{\sum_{i=1}^{+\infty} P(A \cap B_i)}{P(A)} = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{P(A \cap B_i)}{P(A)} = \sum_{i=1}^{+\infty} P(B_i/A)$$

Indépendance

Indépendance

Propriétés d'une probabilité

Indépendance

R3.08 Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Plan

Rappels

Probabilités

Probabilité conditionnelle

Indépendance

Annexe

Propriétés d'une probabilité

a) Un événement presque impossible (respectivement presque certain) est indépendant de tout événement.

Indépendance

Propriétés d'une probabilité

a) Un événement presque impossible (respectivement presque certain) est indépendant de tout événement.
b) Si A et B sont indépendants alors A et $\overline{B}$ (respectivement $\overline{A}$ et B, $\overline{A}$ et B, $\overline{A}$ et $\overline{B}$) sont indépendants.

Indépendance

Propriétés d'une probabilité

a) Un événement presque impossible (respectivement presque certain) est indépendant de tout événement.
b) Si A et B sont indépendants alors A et $\overline{B}$ (respectivement $\overline{A}$ et B, $\overline{A}$ et B, $\overline{A}$ et $\overline{B}$) sont indépendants.

Démonstration

Indépendance

Propriétés d'une probabilité

a) Un événement presque impossible (respectivement presque certain) est indépendant de tout événement.
b) Si A et B sont indépendants alors A et $\overline{B}$ (respectivement $\overline{A}$ et B, $\overline{A}$ et B, $\overline{A}$ et $\overline{B}$) sont indépendants.

Démonstration

a) Si $P(A) = 0$ alors $P(A \cap B) \leq P(A) = 0$ et $P(A)P(B) = 0$.

Indépendance

R3.08 Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Propriétés d'une probabilité

a) Un événement presque impossible (respectivement presque certain) est indépendant de tout événement.
b) Si A et B sont indépendants alors A et $\overline{B}$ (respectivement $\overline{A}$ et B, $\overline{A}$ et B, $\overline{A}$ et $\overline{B}$) sont indépendants.

Démonstration

a) Si $P(A) = 0$ alors $P(A \cap B) \leq P(A) = 0$ et $P(A)P(B) = 0$.
Si $P(A) = 1$ alors $1 = P(A) \leq P(A \cup B)$
et donc $1 = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 1 + P(B) - P(A \cap B)$

Indépendance

Propriétés d'une probabilité

a) Un événement presque impossible (respectivement presque certain) est indépendant de tout événement.
b) Si A et B sont indépendants alors A et $\overline{B}$ (respectivement $\overline{A}$ et B, $\overline{A}$ et B, $\overline{A}$ et $\overline{B}$) sont indépendants.

Démonstration

a) Si $P(A) = 0$ alors $P(A \cap B) \leq P(A) = 0$ et $P(A)P(B) = 0$.
Si $P(A) = 1$ alors $1 = P(A) \leq P(A \cup B)$
et donc $1 = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 1 + P(B) - P(A \cap B)$
puis $P(B) - P(A \cap B) = 0$ et $P(A \cap B) = P(B)$.

Indépendance

Propriétés d'une probabilité

a) Un événement presque impossible (respectivement presque certain) est indépendant de tout événement.
b) Si A et B sont indépendants alors A et $\overline{B}$ (respectivement $\overline{A}$ et B, $\overline{A}$ et B, $\overline{A}$ et $\overline{B}$) sont indépendants.

Démonstration

a) Si $P(A) = 0$ alors $P(A \cap B) \leq P(A) = 0$ et $P(A)P(B) = 0$.
Si $P(A) = 1$ alors $1 = P(A) \leq P(A \cup B)$
et donc $1 = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 1 + P(B) - P(A \cap B)$
puis $P(B) - P(A \cap B) = 0$ et $P(A \cap B) = P(B)$.
Par ailleurs, $P(A)P(B) = P(B)$. **b)**
$P(A)\,P\left(\overline{B}\right) = P(A)\,(1 - P(B)) = P(A) - P(A)\,P(B) = P(A) - P(A \cap B) = P\left(A \cap \overline{B}\right)$.

Indépendance

Propriétés d'une probabilité

a) Un événement presque impossible (respectivement presque certain) est indépendant de tout événement.
b) Si A et B sont indépendants alors A et $\overline{B}$ (respectivement $\overline{A}$ et B, $\overline{A}$ et B, $\overline{A}$ et $\overline{B}$) sont indépendants.

Démonstration

a) Si $P(A) = 0$ alors $P(A \cap B) \leq P(A) = 0$ et $P(A)P(B) = 0$.
Si $P(A) = 1$ alors $1 = P(A) \leq P(A \cup B)$
et donc $1 = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 1 + P(B) - P(A \cap B)$
puis $P(B) - P(A \cap B) = 0$ et $P(A \cap B) = P(B)$.
Par ailleurs, $P(A)P(B) = P(B)$. **b)**
$P(A)\,P\left(\overline{B}\right) = P(A)\,(1 - P(B)) = P(A) - P(A)\,P(B) = P(A) - P(A \cap B) = P\left(A \cap \overline{B}\right)$.
En effet, $A = (A \cap B) \cup \left(A \cap \overline{B}\right)$ avec $(A \cap B) \cap \left(A \cap \overline{B}\right) = \emptyset$.

Probabilité conditionnelle

Probabilité conditionnelle

Formule des probabilités totales et formule de Bayes : démonstration

Probabilité conditionnelle

Formule des probabilités totales et formule de Bayes : démonstration

Soit $(B_i)_{i \in I}$ (I fini ou dénombrable) une famille complète d'événements telle que $\forall i \in I \;\; P(B_i) \neq 0$.

Probabilité conditionnelle

Formule des probabilités totales et formule de Bayes : démonstration

Soit $(B_i)_{i\in I}$ (I fini ou dénombrable) une famille complète d'événements telle que $\forall i \in I \; P(B_i) \neq 0$.
On a

$$A = A \cap \Omega = A \cap \left(\bigcup_{i \in I} B_i \right) = \bigcup_{i \in I} (A \cap B_i)$$

avec $\forall i, \; j \in I, \; i \neq j$

Probabilité conditionnelle

Formule des probabilités totales et formule de Bayes : démonstration

Soit $(B_i)_{i\in I}$ (I fini ou dénombrable) une famille complète d'événements telle que $\forall i \in I \ P(B_i) \neq 0$.
On a

$$A = A \cap \Omega = A \cap \left(\bigcup_{i \in I} B_i \right) = \bigcup_{i \in I} (A \cap B_i)$$

avec $\forall i,\ j \in I,\ i \neq j (A \cap B_i) \cap (A \cap B_j) = A \cap (B_i \cap B_j) = \emptyset.$

Probabilité conditionnelle

R3.08 Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Formule des probabilités totales et formule de Bayes : démonstration

Soit $(B_i)_{i\in I}$ (I fini ou dénombrable) une famille complète d'événements telle que $\forall i \in I \; P(B_i) \neq 0$.

On a

$$A = A \cap \Omega = A \cap \left(\bigcup_{i\in I} B_i \right) = \bigcup_{i\in I} (A \cap B_i)$$

avec $\forall i,\; j \in I,\; i \neq j (A \cap B_i) \cap (A \cap B_j) = A \cap (B_i \cap B_j) = \emptyset$.

On en déduit

$$P(A) = P\left(\bigcup_{i\in I} (A \cap B_i) \right) = \sum_{i\in I} P(A \cap B_i) = \sum_{i\in I} P(B_i) P(A/B_i)$$

Probabilité conditionnelle

Formule des probabilités totales et formule de Bayes : démonstration

Soit $(B_i)_{i\in I}$ (I fini ou dénombrable) une famille complète d'événements telle que $\forall i \in I \; P(B_i) \neq 0$.
On a

$$A = A \cap \Omega = A \cap \left(\bigcup_{i\in I} B_i \right) = \bigcup_{i\in I} (A \cap B_i)$$

avec $\forall i, \; j \in I, \; i \neq j (A \cap B_i) \cap (A \cap B_j) = A \cap (B_i \cap B_j) = \emptyset$.
On en déduit

$$P(A) = P\left(\bigcup_{i\in I} (A \cap B_i) \right) = \sum_{i\in I} P(A \cap B_i) = \sum_{i\in I} P(B_i) P(A/B_i)$$

Formule de Bayes :

Probabilité conditionnelle

Formule des probabilités totales et formule de Bayes : démonstration

Soit $(B_i)_{i \in I}$ (I fini ou dénombrable) une famille complète d'événements telle que $\forall i \in I \; P(B_i) \neq 0$.
On a

$$A = A \cap \Omega = A \cap \left(\bigcup_{i \in I} B_i \right) = \bigcup_{i \in I} (A \cap B_i)$$

avec $\forall i,\; j \in I,\; i \neq j (A \cap B_i) \cap (A \cap B_j) = A \cap (B_i \cap B_j) = \emptyset$.
On en déduit

$$P(A) = P\left(\bigcup_{i \in I} (A \cap B_i) \right) = \sum_{i \in I} P(A \cap B_i) = \sum_{i \in I} P(B_i) P(A/B_i)$$

Formule de Bayes :

$$\forall i \in I \;\; P(B_i/A) = \frac{P(B_i \cap A)}{P(A)} = \frac{P(B_i) P(A/B_i)}{\sum_{i \in I} P(B_i) P(A/B_i)}$$