Documents autorisés : cours, TD, notes manuscrites, calculatrice. Barème indicatif : 4+5+5+6 Durée : 1h 30.

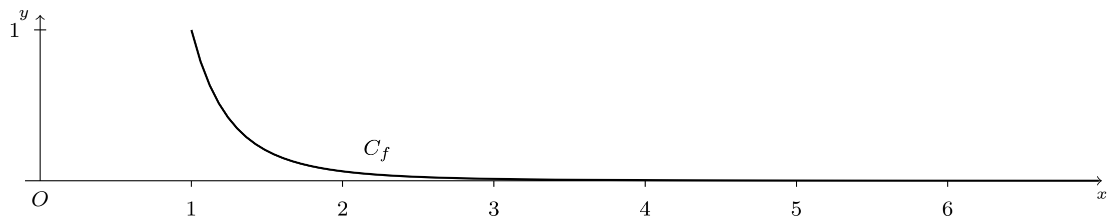
Les résultats sont présentés avec trois chiffres significatifs, sauf indication particulière.

Exercice 1

Calcul intégral

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{x^4}$ sur $[1, +\infty[$.

1. Calculer $\left(-\dfrac{1}{3x^3}\right)'$ sur $[1, +\infty[$.
2. Préciser $F(x) = \displaystyle\int_1^x f(t)\,dt$.
3. En déduire la nature de $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ (convergente ou divergente) et sa valeur éventuelle. Expliquer.
4. Interpréter graphiquement.



Exercice 2

Loi conjointe

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes dont la loi de probabilité est respectivement donnée par

i	1	2
$P(X = i)$	0,2	0,8

i	-2	1	3
$P(Y = i)$	0,3	0,5	0,2

1. Représenter graphiquement la loi de probabilité de Y.
2. Représenter graphiquement la fonction de répartition de Y.
3. Calculer $E(Y)$ et $V(Y)$. Expliquer.
4. Construire la loi conjointe de X et Y, en précisant les lois marginales de X et de Y. Expliquer. Reproduire et compléter le tableau suivant.

$X\backslash Y$	-2	1	3	$P(X=i)$
1				
2				
$P(Y=j)$				

5. Quelle est la probabilité p que X et Y soient impairs ?

Exercice 3

Loi binomiale et loi normale
Une compagnie aérienne a mis en place pour une de ses lignes un système de sur-réservation afin d'abaisser les coûts. Les réservations ne peuvent se faire qu'auprès d'une agence ou sur le site Internet de la compagnie.
Sur cette ligne, la compagnie affrète un appareil de 76 places et a vendu 80 réservations. On suppose que le nombre de clients se présentant à l'embarquement peut être modélisé par une variable aléatoire X qui suit la loi binomiale de paramètres $n = 80$ et $p = 0,90$. On souhaite calculer la probabilité que la compagnie se trouve en situation de sur-réservation (c'est-à-dire avec plus de clients qui se présentent à l'embarquement que de places) : $P(X \geq 77)$, en utilisant une loi binomiale, puis une loi normale.

1. *Loi binomiale*
   On suppose $X \sim \mathcal{B}(80;\ 0,90)$.
   Calculer $P(X \geq 77)$ avec quatre décimales.
   Indication
   On pourra utiliser une table de probabilités.
   Si $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ avec $p > 0,5$, on peut utiliser
   (a) $P(X \leq i) = 1 - P(X' \leq n - i - 1)$ avec $X' \sim \mathcal{B}(n, 1-p)$,
   (b) $P(X \geq i) = P(X' \leq n - i)$ avec $X' \sim \mathcal{B}(n, 1-p)$.
2. *Loi normale*
   (a) Montrer qu'on peut supposer que X suit une loi normale dont on précisera les paramètres m et σ avec quatre décimales : $X \sim \mathcal{N}(m;\ \sigma)$.
   Indication : on vérifiera $n \geq 30$, $np \geq 5$ et $n(1-p) \geq 5$.
   (b) On suppose $X \sim \mathcal{N}(m;\ \sigma)$. Calculer $P(X \geq 76,5)$ avec quatre décimales.
   Indication : on pourra utiliser une table de probabilités.

Exercice 4

Loi binomiale et loi de Poisson
$n = 70$ personnes s'apprêtent à passer un portique de sécurité. On suppose que pour chaque personne la probabilité que le portique sonne est égale à $p = 0,05$. On note X la variable aléatoire donnant le nombre de personnes faisant sonner le portique de manière indépendante parmi les personnes de ce groupe.

1. On suppose $X \sim \mathcal{B}\,(n;\,p)$
   (a) Calculer l'espérance de X : $E(X)$ et interpréter le résultat.
   (b) Calculer la probabilité (avec quatre décimales)
      i. qu'au moins une personne du groupe fasse sonner le portique ;
      ii. qu'au maximum 4 personnes fassent sonner le portique.

      Indication : on pourra utiliser une table de probabilités.
2. Montrer qu'on peut supposer que X suive une loi de Poisson dont on précisera le paramètre λ.

   Indication : on pourra vérifier que $n \geq 30$, $p \leq 0,1$ et $E(X) \leq 10$.
3. En supposant que $X \sim \mathcal{P}\,(\lambda)$, calculer la probabilité (avec quatre décimales)
   (a) qu'au moins une personne du groupe fasse sonner le portique ;
   (b) qu'au maximum 4 personnes fassent sonner le portique.

   Indication : on pourra utiliser une table de probabilités.