Documents autorisés : cours, TD, notes manuscrites. Barème indicatif (sur 40) : 2 + 2 + 10 + 21 + 5. Durée : 1h 30.

Exercice 1

Chez les retraités, le niveau de vie médian est de 1 590 euros par mois, quand il atteint 1 735 euros chez les actifs (*Le Monde 29 août 2013*).
Que signifie cette phrase ?
Indication : le niveau de vie est le revenu disponible par personne dans un ménage.

Exercice 2

Préciser cinq entiers distincts dont la moyenne est 2 et la médiane 3. Justifier.

Exercice 3

Une enquête porte sur l'appréciation des ordres de grandeur par des enfants :

Valeur réelle X	10	20	40	50	60	90
Valeur estimée Y	28	41	55	60	65	75

I) Construire le nuage de points (X en abscisses : 1 cm pour 10, Y en ordonnées : 1 cm pour 10).

II) Ajustement

1. **1ère formule :** $Y = aX + b$

   a) Ajuster Y en X selon la méthode des moindres carrés. Préciser la formule obtenue : $Y = aX + b$.

   b) Tracer la droite d'équation $y = ax + b$ sur le graphique précédent.

   c) Étudier la qualité de l'ajustement.

   d) Calculer également la moyenne des résidus

$$m_1 = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6}\left(y_i - (ax_i + b)\right)^2$$

2. **2ème formule :** $Y = A\ln X + B$
   Pour obtenir cette formule, on écrit $X' = \ln X$, puis on ajuste Y en X' suivant la méthode des moindres carrés.

   a) Reproduire et compléter le tableau suivant :

X	10	20	40	50	60	90
X'						
Y	28	41	55	60	65	75

b) En déduire la deuxième formule obtenue $Y = A\ln X + B$ par la méthode des moindres carrés.

c) Tracer la courbe d'équation $y = A\ln x + B$ sur le même graphique.

d) Calculer la moyenne des résidus

$$m_2 = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6}\left(y_i - (A\ln x_i + B)\right)^2$$

3. Comparer m_1 et m_2. Conclure.

Exercice 4

Un étudiant effectue n appels téléphoniques de relance de stage vers n correspondants distincts ($n \geq 2$). Pour chaque appel, la probabilité d'obtenir le correspondant demandé est $p \in]0,1[$ et la probabilité de ne pas l'obtenir est $q = 1 - p$.

I) Soit X le nombre de correspondants obtenus lors de ces n appels.

1. Quelle est la loi suivie par X ?

2. Déterminer la loi de probabilité de X.

3. Préciser l'espérance $E(X)$, la variance $V(X)$ et l'écart-type σ_X. Reproduire et compléter le tableau suivant.

$E(X)$	$V(X)$	σ_X

4. Application numérique

a) $n = 3$. Reproduire et compléter les tableaux suivants.

i	0	1	2	3
$P(X = i)$				

$E(X)$	$V(X)$	σ_X

b) $n = 3$ et $p = 0,8$.

A. Reproduire et compléter les tableaux suivants.

i	0	1	2	3
$P(X = i)$				

$E(X)$	$V(X)$	σ_X

B. Représenter graphiquement la loi de probabilité.

II) On revient au cas général : $n \geq 2$ et $p \in]0,1[$.
Après ces n tentatives, l'étudiant appelle une deuxième fois chacun des $n - X$ correspondants qu'il n'a pas obtenus la première fois.
Soit Y le nombre de correspondants obtenus dans la deuxième série d'appels et $Z = X + Y$ le nombre total de correspondants obtenus.

1. Calculer la probabilité conditionnelle $P\left((Y=j)/(X=i)\right)$, pour $i \in \{0,1,\cdots,n\}$ et $j \in \{0,1,\cdots,n-i\}$.

2. En déduire $P\left((X=i)\cap(Y=j)\right)$ avec $i \in \{0,1,\cdots,n\}$ et $j \in \{0,1,\cdots,n-i\}$.

3. Application numérique

a) $n=3$ et $p \in]0,1[$.

A. Préciser la loi conjointe de X et de Y. Reproduire et compléter :

$X\backslash Y$	0	1	2	3	$P(X=i)$
0					
1					
2					
3					
$P(Y=j)$					

B. Est-ce que X et Y sont indépendantes ? Expliquer.

b) $n=3$ et $p=0,8$.

A. Préciser la loi conjointe de X et de Y. Reproduire et compléter :

$X\backslash Y$	0	1	2	3	$P(X=i)$
0					
1					
2					
3					
$P(Y=j)$					

B. En déduire $E(Y)$ et $V(Y)$. Reproduire et compléter :

$E(Y)$	$V(Y)$

C. Préciser la loi de probabilité de XY sous la forme d'un tableau.

k	0	1	2	3
$P(XY=k)$				

D. En déduire $E(XY)$ et $cov(X,Y)$. Reproduire et compléter le tableau suivant.

$E(XY)$	$cov(X,Y)$

4. On reprend $n=3$ et $p \in]0,1[$.

a) En utilisant $P(Z=k)=\sum_{i=0}^{k} P\left((X=i)\cap(Y=k-i)\right)$, préciser la loi de probabilité de Z.

b) Quelle est la loi suivie par Z ?

c) Préciser la loi de probabilité de Z. Reproduire et compléter le tableau suivant.

k	0	1	2	3
$P(Z=k)$				

d) Préciser $E(Z)$ et $V(Z)$. Reproduire et compléter le tableau suivant.

$E(Z)$	$V(Z)$

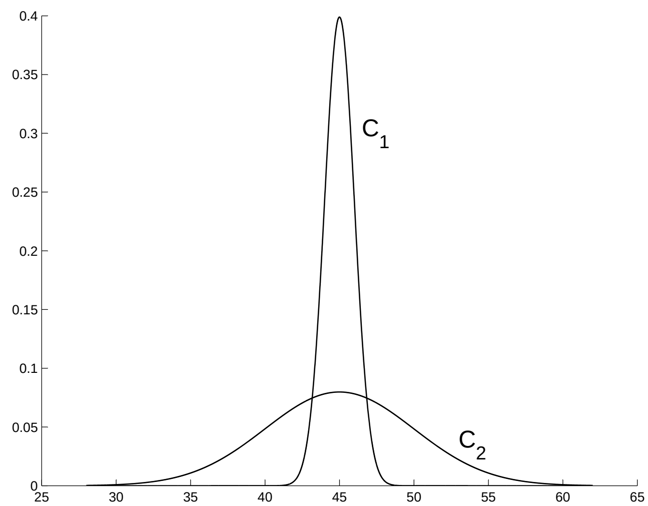
e) Application numérique : $n = 3$ et $p = 0,8$.
Préciser $E(Z)$ et $V(Z)$. Reproduire et compléter le tableau suivant.

$E(Z)$	$V(Z)$

Exercice 5

Dans l'ingénierie, il faut détecter les défauts et tester l'usure des câbles afin de décider du moment pour les changer.

Pour tester un câble, on mesure au laser le diamètre du câble à espaces réguliers (par exemple un million de fois). Après avoir classé et représenté ces données, on observe qu'elles peuvent être approchées par une courbe en cloche. Ci-dessous, sont représentées les mesures effectuées la première semaine d'utilisation et celles effectuées après trois mois d'utilisation intensive.



I) A votre avis, quelle courbe représente les mesures effectuées la première semaine ? Expliquez votre réponse.

II) On change le câble lorsque l'écart-type initial est multiplié par 5. Lorsque l'on décide de changer le câble, les diamètres du câble, exprimés en mm, suivent une loi normale $\mathcal{N}(45, 5)$.

1. Le câble casse lorsque son diamètre X est inférieur ou égal à 38 mm.
Quelle est la probabilité que le câble casse

a) la première semaine ?

b) lorsque l'on se décide à remplacer le câble ?

2. Le câble endommage sérieusement le treuil lorsque son diamètre X excède 50 mm.
Quelle est la probabilité d'abimer le treuil

a) au bout d'une semaine d'utilisation ?

b) lorsque l'on se décide à changer le câble ?

Source : IREM