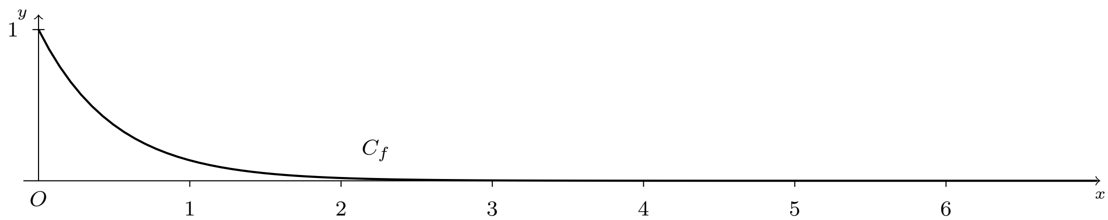
Documents autorisés : cours, TD, notes manuscrites, calculatrice. Barème indicatif : 4+5+2+4+5 Durée : 1h 30.

Les résultats sont présentés avec trois chiffres significatifs, sauf indication particulière.

Exercice 1

Calcul intégral
On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-2x}$ sur $[0, +\infty[$.

1. Calculer $\left(-\dfrac{e^{-2x}}{2}\right)'$ sur $[0, +\infty[$.
2. Préciser $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$.
3. En déduire la nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ (convergente ou divergente) et sa valeur éventuelle. Expliquer.
   Indication : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} e^{-2x} = 0$
4. Interpréter graphiquement.



Exercice 2

Loi conjointe
La loi conjointe de deux variables X et Y est donnée par le tableau suivant.

$X\backslash Y$	1	2
0	0,10	0,20
1	0,20	0,30
2	0,10	0,10

1. Préciser la loi de probabilité de X et la loi de probabilité de Y.
   Reproduire et compléter le tableau suivant.

$X\backslash Y$	1	2	$P(X=i)$
0	$0,10$	$0,20$	
1	$0,20$	$0,30$	
2	$0,10$	$0,10$	
$P(Y=j)$			1

2. Représenter graphiquement la loi de probabilité de X.
3. Représenter graphiquement la fonction de répartition de X.
4. Calculer $E(X)$ et $V(X)$. Expliquer.
5. Est-ce que les variables X et Y sont indépendantes ? Expliquer.
6. Quelle est la probabilité p que X ou Y soient impairs ?
7. Préciser la loi de probabilité de $Z = X + Y$.

Exercice 3

Loi binomiale
Dans un pays donné, il y a 85 % de droitiers.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de droitiers dans un groupe de $n = 40$ personnes tiré au hasard et de manière indépendante dans le pays considéré. Le nombre d'habitants dans le pays est assez important pour que l'on puisse considérer le tirage comme étant avec remise.
On suppose $X \sim \mathcal{B}(n;\, p)$ avec $p = 0,85$.
Calculer $P(X \geq 35)$ avec quatre décimales.
Indication
On pourra utiliser une table de probabilités.
Si $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ avec $p > 0,5$, on peut utiliser

1. $P(X \leq i) = 1 - P(X' \leq n - i - 1)$ avec $X' \sim \mathcal{B}(n, 1-p)$,
2. $P(X \geq i) = P(X' \leq n - i)$ avec $X' \sim \mathcal{B}(n, 1-p)$.

Exercice 4

Loi binomiale et loi normale
Une entreprise comporte 200 salariés qui peuvent se rendre au restaurant de l'entreprise pour y déjeuner. Le restaurant d'entreprise a 195 places. On suppose que le nombre de salariés se présentant au restaurant de l'entreprise peut être modélisé par une variable aléatoire X qui suit la loi binomiale de paramètres $n = 200$ et $p = 0,96$.
On souhaite calculer la probabilité que le nombre de salariés se présentant au restaurant d'entreprise est supérieur au nombre de places : $P(X \geq 196)$.

1. Montrer qu'on peut supposer que X suit une loi normale dont on précisera les paramètres m et σ avec quatre décimales : $X \sim \mathcal{N}(m;\, \sigma)$.
   Indication : on vérifiera $n \geq 30$, $np \geq 5$ et $n(1-p) \geq 5$.

2. On suppose $X \sim \mathcal{N}(m; \sigma)$. Calculer $P(X \geq 195,5)$ avec quatre décimales.
   Indication : on pourra utiliser une table de probabilités.

Exercice 5

Loi binomiale et loi de Poisson
On admet que la probabilité qu'un voyageur oublie ses bagages dans le train est $p = 0,005$. Un train transporte $n = 800$ voyageurs. On admettra que les voyageurs se sont regroupés au hasard et que leurs comportement par rapport à leurs bagages sont indépendants les uns des autres.
On note X la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de voyageurs ayant oublié leurs bagages dans le train.

1. On suppose $X \sim \mathcal{B}(n, p)$.
   (a) Calculer l'espérance de X : $E(X)$.
   (b) Interpréter le résultat.
2. Montrer qu'on peut supposer que X suive une loi de Poisson dont on précisera le paramètre λ.
   Indication : on pourra vérifier que $n \geq 30$, $p \leq 0,1$ et $E(X) \leq 10$.
3. En supposant que $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, calculer la probabilité (avec quatre décimales)
   (a) qu'au moins un voyageur oublie ses bagages ;
   (b) qu'au maximum 5 voyageurs oublient leurs bagages.
   Indication : on pourra utiliser une table de probabilités ou $e = 2,718281828...$