Documents autorisés : cours, TD, notes manuscrites. Barème indicatif : 4 + 3 + 4 + 5 + 4. Durée : 1h.

Les valeurs approchées seront données avec trois chiffres significatifs.

Exercice 1

Vendredi 8 août, la cérémonie d'ouverture des Jeux Olympiques a été regardée par 2 milliards de personnes, soit un tiers de la population mondiale. (*Le Monde* du 16 août 2008).

On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de personnes ayant suivi la cérémonie d'ouverture des Jeux Olympiques le vendredi 8 août dans un groupe de 100 personnes.

1. On suppose que X suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(100,\ \frac{1}{3}\right)$.
   Préciser $P\,(X = 33)$ sans chercher à calculer ce nombre.
2. On procède à présent à une approximation suivant la loi normale $\mathcal{N}\,(m, \sigma)$ avec $m = E(X)$ et $\sigma = \sqrt{V(X)}$.
   (a) Préciser m et σ.
   (b) Quelle est la probabilité
      i. que 33 personnes aient suivi la cérémonie d'ouverture des Jeux Olympiques le vendredi 8 août : $P\,(32,5 \leq X \leq 33,5)$?
      ii. qu'entre 24 et 42 personnes aient suivi la cérémonie d'ouverture des Jeux Olympiques le vendredi 8 août : $P\,(23,5 \leq X \leq 42,5)$?

Exercice 2

Le nombre de baleines qui s'échouent sur les côtes bretones en une année est une variable aléatoire X qui suit la loi de Poisson $\mathcal{P}\,(2,5)$.

1. Préciser $P\,(X = 0)$, $P\,(X = 1)$ et $P\,(X = 2)$.
2. En déduire $P\,(X \geq 1)$, $P\,(X \geq 2)$ et $P\,(X \geq 3)$.

Source : JT TF1 16 août 2008.

Exercice 3

Le nombre d'insectes ingérés par une chauve souris en une nuit est une variable aléatoire X qui suit la loi normale $\mathcal{N}\,(m, \sigma)$ avec $m = 2\,000$ et $\sigma = 500$.

1. Quelle est la probabilité que
   (a) entre 1 200 et 2 600 insectes soient ingérés par une chauve souris en une nuit : $P\,(1\,199,5 \leq X \leq 2\,600,5)$?
   (b) au moins 2 800 insectes soient ingérés par une chauve souris en une nuit : $P\,(X \geq 2\,799,5)$?
2. Le nombre d'insectes ingérés par deux chauves souris en une nuit est la variable aléatoire Y qui suit la loi normale $\mathcal{N}\left(2m, \sqrt{2}\,\sigma\right)$.
   (a) Quelle est la probabilité qu'entre 2 400 et 5 200 insectes soient ingérés par deux chauves souris en une nuit : $P\,(2\,399,5 \leq Y \leq 5\,200,5)$?

(b) Préciser n tel que la probabilité qu'au moins n insectes soient ingérés par deux chauves souris en une nuit soit égale à 0,95.
Indication : n vérifie $P\left(Y \geq n-0,5\right)=0,95$.

Exercice 4

On note X_1 et X_2 les variables aléatoires respectivement définies par :

➢ $X_1(\Omega)=\{1,2\}$, $P(X_1=1)=0,2$ et $P(X_1=2)=0,8$.

➢ $X_2(\Omega)=\{1,2\}$, $P(X_2=1)=0,4$ et $P(X_2=2)=0,6$.

On pose $P\left((X_2=1)\,/\,(X_1=1)\right)=0,25$.

1. Préciser $P\left((X_1=1)\cap(X_2=1)\right)$
2. En déduire la loi conjointe du couple de variables aléatoires (X_1,X_2) en reproduisant et complétant le tableau suivant :

$X_1\backslash X_2$	1	2
1		
2		

3. Est-ce que X_1 et X_2 sont indépendantes ? Expliquer.
4. On pose $X_3=X_1X_2$. Donner la loi de probabilité de X_3.
   On pourra présenter les résultats dans un tableau.
5. Déterminer $E(X_1)$, $E(X_2)$, $E(X_3)$, $V(X_1)$ et $V(X_2)$.
   On reproduira et complétera le tableau suivant :

$E(X_1)$	$E(X_2)$	$E(X_3)$	$V(X_1)$	$V(X_2)$

6. En déduire $E(X_1+X_2)$, $cov(X_1,X_2)$ et $V(X_1+X_2)$.
   Indication : $E(X_1+X_2)=E(X_1)+E(X_2)$, $cov(X_1,X_2)=E(X_1X_2)-E(X_1)E(X_2)$ et $V(X_1+X_2)=V(X_1)+V(X_2)+2cov(X_1,X_2)$.
   On reproduira et complétera le tableau suivant :

$E(X_1+X_2)$	$cov(X_1,X_2)$	$V(X_1+X_2)$

Exercice 5

On note f la fonction définie par $f(x)=4x$ sur $\left[0,\frac{1}{2}\right]$, $f(x)=4-4x$ sur $\left[\frac{1}{2},1\right]$ et $f(x)=0$ sinon.

1. Représenter graphiquement f.
2. Montrer que f est une densité de probabilité.
3. Soit X une variable aléatoire de densité de probabilité f.
   (a) Préciser la fonction de répartion de X.
   (b) En déduire $P\left(\frac{1}{3}\leq X\leq\frac{3}{4}\right)$.
   (c) Préciser $E(X)$ et $V(X)$.