R3.08

Variable aléatoire 1

François Morellet 40 000 carrés

Ce sont coups du hasard, dont on n'est point garant.

Molière

Variable aléatoire réelle

Première définition

Variable aléatoire réelle

Première définition

Soit $(\Omega,\ \mathcal{T},\ P)$ un espace probabilisé associé à une expérience aléatoire et $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ la tribu borélienne de $\mathbb{R}$.

Variable aléatoire réelle

Première définition

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé associé à une expérience aléatoire et $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ la tribu borélienne de $\mathbb{R}$.
Une variable aléatoire réelle X sur $(\Omega, \mathcal{T})$ est une application $X : \Omega \to \mathbb{R}$ vérifiant $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\ X^{-1}(B) \in \mathcal{T}$.

Variable aléatoire réelle

Première définition

Soit $(\Omega,\ \mathcal{T},\ P)$ un espace probabilisé associé à une expérience aléatoire et $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ la tribu borélienne de $\mathbb{R}$.
Une variable aléatoire réelle X sur $(\Omega,\ \mathcal{T})$ est une application $X:\Omega\to\mathbb{R}$ vérifiant $\forall B\in\mathcal{B}(\mathbb{R})\ X^{-1}(B)\in\mathcal{T}$.

Définition équivalente

Variable aléatoire réelle

Première définition

Soit $(\Omega,\ \mathcal{T},\ P)$ un espace probabilisé associé à une expérience aléatoire et $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ la tribu borélienne de $\mathbb{R}$.
Une variable aléatoire réelle X sur $(\Omega,\ \mathcal{T})$ est une application $X : \Omega \to \mathbb{R}$ vérifiant $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\ X^{-1}(B) \in \mathcal{T}$.

Définition équivalente

Une variable aléatoire réelle X sur $(\Omega,\ \mathcal{T})$ est une application $X : \Omega \to \mathbb{R}$ vérifiant $\forall x \in \mathbb{R}\ X^{-1}(]-\infty, x]) \in \mathcal{T}$.

Variable aléatoire réelle

Première définition

Soit $(\Omega,\ \mathcal{T},\ P)$ un espace probabilisé associé à une expérience aléatoire et $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ la tribu borélienne de $\mathbb{R}$.
Une variable aléatoire réelle X sur $(\Omega,\ \mathcal{T})$ est une application $X : \Omega \to \mathbb{R}$ vérifiant $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\ X^{-1}(B) \in \mathcal{T}$.

Définition équivalente

Une variable aléatoire réelle X sur $(\Omega,\ \mathcal{T})$ est une application $X : \Omega \to \mathbb{R}$ vérifiant $\forall x \in \mathbb{R}\ X^{-1}(]-\infty, x]) \in \mathcal{T}$.

Notation

Variable aléatoire réelle

Première définition

Soit $(\Omega,\ \mathcal{T},\ P)$ un espace probabilisé associé à une expérience aléatoire et $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ la tribu borélienne de $\mathbb{R}$.
Une variable aléatoire réelle X sur $(\Omega,\ \mathcal{T})$ est une application $X : \Omega \to \mathbb{R}$ vérifiant $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\ X^{-1}(B) \in \mathcal{T}$.

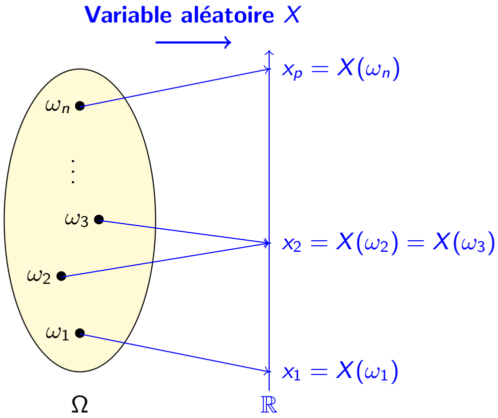
Définition équivalente

Une variable aléatoire réelle X sur $(\Omega,\ \mathcal{T})$ est une application $X : \Omega \to \mathbb{R}$ vérifiant $\forall x \in \mathbb{R}\ X^{-1}(]-\infty, x]) \in \mathcal{T}$.

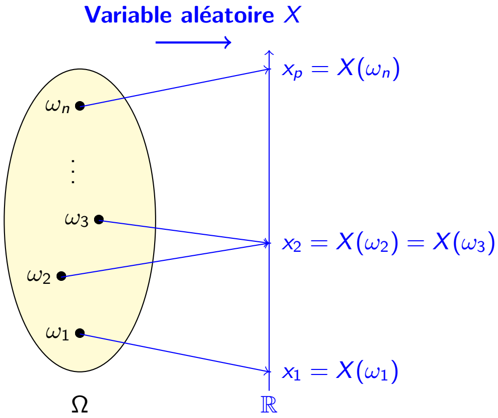
Notation

$X^{-1}(]-\infty, x]) = \{\omega \in \Omega,\ X(\omega) \leq x\} = (X \leq x)$

Variable aléatoire réelle



Variable aléatoire réelle



Remarque : une variable aléatoire associée à une expérience aléatoire est un **nombre** dont le résultat dépend de l'expérience.

Variable aléatoire réelle

Notations

Variable aléatoire réelle

Notations

$$X \in B = X^{-1}(B) \qquad = \{\omega \in \Omega,\ X(\omega) \in B\}$$

Variable aléatoire réelle

Notations

$$
\begin{aligned}
X \in B = X^{-1}(B) & \quad = \{\omega \in \Omega,\ X(\omega) \in B\} \\
(X < a) = X^{-1}(]-\infty, a[) & \quad = \{\omega \in \Omega,\ X(\omega) < a\}
\end{aligned}
$$

Variable aléatoire réelle

Notations

$$\begin{aligned} X \in B = X^{-1}(B) &= \{\omega \in \Omega,\ X(\omega) \in B\} \\ (X < a) = X^{-1}(]-\infty, a[) &= \{\omega \in \Omega,\ X(\omega) < a\} \\ (X \geq a) = X^{-1}([a, +\infty[) &= \{\omega \in \Omega,\ X(\omega) \geq a\} \end{aligned}$$

Variable aléatoire réelle

Notations

$$
\begin{aligned}
X \in B = X^{-1}(B) \quad &= \{\omega \in \Omega,\ X(\omega) \in B\} \\
(X < a) = X^{-1}(]-\infty, a[) \quad &= \{\omega \in \Omega,\ X(\omega) < a\} \\
(X \geq a) = X^{-1}([a, +\infty[) \quad &= \{\omega \in \Omega,\ X(\omega) \geq a\} \\
(X > a) = X^{-1}(]a, +\infty[) \quad &= \{\omega \in \Omega,\ X(\omega) > a\}
\end{aligned}
$$

Variable aléatoire réelle

Notations

$$
\begin{aligned}
X \in B = X^{-1}(B) \quad & = \{\omega \in \Omega,\ X(\omega) \in B\} \\
(X < a) = X^{-1}(]-\infty, a[) \quad & = \{\omega \in \Omega,\ X(\omega) < a\} \\
(X \geq a) = X^{-1}([a, +\infty[) \quad & = \{\omega \in \Omega,\ X(\omega) \geq a\} \\
(X > a) = X^{-1}(]a, +\infty[) \quad & = \{\omega \in \Omega,\ X(\omega) > a\} \\
(a \leq X \leq b) = X^{-1}([a, b]) \quad & = \{\omega \in \Omega,\ a \leq X(\omega) \leq b\}
\end{aligned}
$$

Variable aléatoire réelle

Notations

$$
\begin{aligned}
X \in B = X^{-1}(B) \qquad & = \{\omega \in \Omega,\ X(\omega) \in B\} \\
(X < a) = X^{-1}(]-\infty, a[) \qquad & = \{\omega \in \Omega,\ X(\omega) < a\} \\
(X \geq a) = X^{-1}([a, +\infty[) \qquad & = \{\omega \in \Omega,\ X(\omega) \geq a\} \\
(X > a) = X^{-1}(]a, +\infty[) \qquad & = \{\omega \in \Omega,\ X(\omega) > a\} \\
(a \leq X \leq b) = X^{-1}([a, b]) \qquad & = \{\omega \in \Omega,\ a \leq X(\omega) \leq b\} \\
(a < X \leq b) = X^{-1}(]a, b]) \qquad & = \{\omega \in \Omega,\ a < X(\omega) \leq b\}
\end{aligned}
$$

Variable aléatoire réelle

R3.08 Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Plan

Variable aléatoire

Variable aléatoire réelle

Variable aléatoire discrète

Variable aléatoire continue

Complément

Annexe : autres lois

Notations

$$
\begin{aligned}
X \in B = X^{-1}(B) &= \{\omega \in \Omega,\ X(\omega) \in B\} \\
(X < a) = X^{-1}(]-\infty, a[) &= \{\omega \in \Omega,\ X(\omega) < a\} \\
(X \geq a) = X^{-1}([a, +\infty[) &= \{\omega \in \Omega,\ X(\omega) \geq a\} \\
(X > a) = X^{-1}(]a, +\infty[) &= \{\omega \in \Omega,\ X(\omega) > a\} \\
(a \leq X \leq b) = X^{-1}([a, b]) &= \{\omega \in \Omega,\ a \leq X(\omega) \leq b\} \\
(a < X \leq b) = X^{-1}(]a, b]) &= \{\omega \in \Omega,\ a < X(\omega) \leq b\} \\
(X = a) = X^{-1}(\{a\}) &= \{\omega \in \Omega,\ X(\omega) = a\}
\end{aligned}
$$

Variable aléatoire réelle

Notations

$$
\begin{aligned}
X \in B = X^{-1}(B) &= \{\omega \in \Omega,\ X(\omega) \in B\} \\
(X < a) = X^{-1}(]-\infty, a[) &= \{\omega \in \Omega,\ X(\omega) < a\} \\
(X \geq a) = X^{-1}([a, +\infty[) &= \{\omega \in \Omega,\ X(\omega) \geq a\} \\
(X > a) = X^{-1}(]a, +\infty[) &= \{\omega \in \Omega,\ X(\omega) > a\} \\
(a \leq X \leq b) = X^{-1}([a, b]) &= \{\omega \in \Omega,\ a \leq X(\omega) \leq b\} \\
(a < X \leq b) = X^{-1}(]a, b]) &= \{\omega \in \Omega,\ a < X(\omega) \leq b\} \\
(X = a) = X^{-1}(\{a\}) &= \{\omega \in \Omega,\ X(\omega) = a\} \\
\ldots &
\end{aligned}
$$

Variable aléatoire réelle

Fonction de répartition

Variable aléatoire réelle

R3.08 Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Fonction de répartition

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé associé à une expérience aléatoire et X une variable aléatoire réelle.

Variable aléatoire réelle

Fonction de répartition

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé associé à une expérience aléatoire et X une variable aléatoire réelle.
La fonction de répartition de X est la fonction $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$ définie par $F(x) = P(X \leq x)$.

Variable aléatoire réelle

Fonction de répartition

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé associé à une expérience aléatoire et X une variable aléatoire réelle.
La fonction de répartition de X est la fonction $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ définie par $F(x) = P(X \leq x)$.

Propriétés

Variable aléatoire réelle

Fonction de répartition

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé associé à une expérience aléatoire et X une variable aléatoire réelle.
La fonction de répartition de X est la fonction $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$ définie par $F(x) = P(X \leq x)$.

Propriétés

1. F est croissante.

Variable aléatoire réelle

Fonction de répartition

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé associé à une expérience aléatoire et X une variable aléatoire réelle.
La fonction de répartition de X est la fonction $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$ définie par $F(x) = P(X \leq x)$.

Propriétés

1. F est croissante.
2. $F(x) \to 0$ lorsque $x \to -\infty$

Variable aléatoire réelle

Fonction de répartition

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé associé à une expérience aléatoire et X une variable aléatoire réelle.
La fonction de répartition de X est la fonction $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$ définie par $F(x) = P(X \leq x)$.

Propriétés

1. F est croissante.
2. $F(x) \to 0$ lorsque $x \to -\infty$
3. $F(x) \to 1$ lorsque $x \to +\infty$

Variable aléatoire réelle

Fonction de répartition

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé associé à une expérience aléatoire et X une variable aléatoire réelle.
La fonction de répartition de X est la fonction $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ définie par $F(x) = P(X \leq x)$.

Propriétés

1. F est croissante.
2. $F(x) \to 0$ lorsque $x \to -\infty$
3. $F(x) \to 1$ lorsque $x \to +\infty$
4. Limite à droite :

Variable aléatoire réelle

Fonction de répartition

Soit $(\Omega,\ \mathcal{T},\ P)$ un espace probabilisé associé à une expérience aléatoire et X une variable aléatoire réelle.
La fonction de répartition de X est la fonction $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$ définie par $F(x) = P\,(X \leq x)$.

Propriétés

1. F est croissante.
2. $F(x) \to 0$ lorsque $x \to -\infty$
3. $F(x) \to 1$ lorsque $x \to +\infty$
4. Limite à droite :
   $\forall x_0 \in \mathbb{R}\ F(x) \to F(x_0)$ lorsque $x \to {x_0}_+$ (F est continue à droite)

Variable aléatoire réelle

R3.08 Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Fonction de répartition

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé associé à une expérience aléatoire et X une variable aléatoire réelle.
La fonction de répartition de X est la fonction $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ définie par $F(x) = P(X \leq x)$.

Propriétés

1. F est croissante.
2. $F(x) \to 0$ lorsque $x \to -\infty$
3. $F(x) \to 1$ lorsque $x \to +\infty$
4. Limite à droite :
   $\forall x_0 \in \mathbb{R}$ $F(x) \to F(x_0)$ lorsque $x \to {x_0}_+$ (F est continue à droite)
5. Limite à gauche :

Variable aléatoire réelle

Fonction de répartition

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé associé à une expérience aléatoire et X une variable aléatoire réelle.
La fonction de répartition de X est la fonction $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$ définie par $F(x) = P(X \leq x)$.

Propriétés

1. F est croissante.
2. $F(x) \to 0$ lorsque $x \to -\infty$
3. $F(x) \to 1$ lorsque $x \to +\infty$
4. Limite à droite :
   $\forall x_0 \in \mathbb{R}$ $F(x) \to F(x_0)$ lorsque $x \to {x_0}_+$ (F est continue à droite)
5. Limite à gauche :
   $\forall x_0 \in \mathbb{R}$ $F(x) \to P(X < x_0)$ lorsque $x \to {x_0}_-$

Variable aléatoire réelle

Loi de probabilité

Variable aléatoire réelle

Loi de probabilité

Soit $(\Omega,\ \mathcal{T},\ P)$ un espace probabilisé associé à une expérience aléatoire et X une variable aléatoire réelle.

Variable aléatoire réelle

Loi de probabilité

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé associé à une expérience aléatoire et X une variable aléatoire réelle.
La loi de probabilité de X est l'application $P_X : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0,1]$ définie par $P_X(B) = P\left(X^{-1}(B)\right) = P(X \in B)$.

Variable aléatoire réelle

Loi de probabilité

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé associé à une expérience aléatoire et X une variable aléatoire réelle.
La loi de probabilité de X est l'application $P_X : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0,1]$ définie par $P_X(B) = P\left(X^{-1}(B)\right) = P(X \in B)$.

Propriété

Variable aléatoire réelle

Loi de probabilité

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé associé à une expérience aléatoire et X une variable aléatoire réelle.
La loi de probabilité de X est l'application $P_X : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0, 1]$ définie par $P_X(B) = P\left(X^{-1}(B)\right) = P(X \in B)$.

Propriété

P_X est une probabilité.

Variable aléatoire réelle

Loi de probabilité

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé associé à une expérience aléatoire et X une variable aléatoire réelle.
La loi de probabilité de X est l'application $P_X : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0,1]$ définie par $P_X(B) = P\left(X^{-1}(B)\right) = P(X \in B)$.

Propriété

P_X est une probabilité.
Démonstration en annexe

Variable aléatoire réelle

Vecteur de variables aléatoires

Variable aléatoire réelle

Vecteur de variables aléatoires

Soit $X_1, X_2, \cdots, X_n$ n variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathcal{T})$.

Variable aléatoire réelle

Vecteur de variables aléatoires

Soit $X_1, X_2, \cdots, X_n$ n variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathcal{T})$.
L'application $X = (X_1, X_2, \cdots, X_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ définie par
$X(\omega) = (X_1(\omega), X_2(\omega), \cdots, X_n(\omega))$ est appelée vecteur aléatoire.

Variable aléatoire réelle

Vecteur de variables aléatoires

Soit $X_1, X_2, \cdots, X_n$ n variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathcal{T})$.
L'application $X = (X_1, X_2, \cdots, X_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ définie par
$X(\omega) = (X_1(\omega), X_2(\omega), \cdots, X_n(\omega))$ est appelée **vecteur aléatoire**.

Fonction de répartition

Variable aléatoire réelle

Vecteur de variables aléatoires

Soit $X_1, X_2, \cdots, X_n$ n variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathcal{T})$.
L'application $X = (X_1, X_2, \cdots, X_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ définie par
$X(\omega) = (X_1(\omega), X_2(\omega), \cdots, X_n(\omega))$ est appelée vecteur aléatoire.

Fonction de répartition

La fonction de répartition du vecteur aléatoire $X = (X_1, X_2, \cdots, X_n)$ est l'application $F : \mathbb{R}^n \to [0, 1]$ définie par
$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = P((X_1 \leq x_1) \cap (X_2 \leq x_2) \cap \cdots \cap (X_n \leq x_n))$.

Variable aléatoire réelle

Fonction d'une variable aléatoire réelle

Variable aléatoire réelle

R3.08 Probabilités
Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Plan

Variable aléatoire
Variable aléatoire réelle
Variable aléatoire discrète
Variable aléatoire continue

Complément

Annexe : autres lois

Fonction d'une variable aléatoire réelle

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé associé à une expérience aléatoire, X une variable aléatoire réelle et une application $\phi : X(\Omega) \to \mathbb{R}$.

Variable aléatoire réelle

Fonction d'une variable aléatoire réelle

Soit $(\Omega,\ \mathcal{T},\ P)$ un espace probabilisé associé à une expérience aléatoire, X une variable aléatoire réelle et une application $\phi : X(\Omega) \to \mathbb{R}$.
$\phi(X)$ est une variable aléatoire réelle si pour tout réel x $(\phi(X) \leq x) \in \mathcal{T}$.

Variable aléatoire réelle

Fonction d'une variable aléatoire réelle

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé associé à une expérience aléatoire, X une variable aléatoire réelle et une application $\phi : X(\Omega) \to \mathbb{R}$.
$\phi(X)$ est une variable aléatoire réelle si pour tout réel x $(\phi(X) \leq x) \in \mathcal{T}$.

Exemples

Variable aléatoire réelle

Fonction d'une variable aléatoire réelle

Soit $(\Omega,\ \mathcal{T},\ P)$ un espace probabilisé associé à une expérience aléatoire, X une variable aléatoire réelle et une application $\phi : X(\Omega) \to \mathbb{R}$.
$\phi(X)$ est une variable aléatoire réelle si pour tout réel x $(\phi(X) \leq x) \in \mathcal{T}$.

Exemples

Soit X est une variable aléatoire réelle et a et b deux réels.

Variable aléatoire réelle

Fonction d'une variable aléatoire réelle

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé associé à une expérience aléatoire, X une variable aléatoire réelle et une application $\phi : X(\Omega) \to \mathbb{R}$.
$\phi(X)$ est une variable aléatoire réelle si pour tout réel x $(\phi(X) \leq x) \in \mathcal{T}$.

Exemples

Soit X est une variable aléatoire réelle et a et b deux réels.
$aX + b$ et X^2 sont des variables aléatoires réelles.

Variable aléatoire réelle

Cas d'un vecteur aléatoire

Variable aléatoire réelle

Cas d'un vecteur aléatoire

Soit $X = (X_1, X_2, \cdots, X_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ un vecteur aléatoire et une application $\phi : X_1(\Omega) \times X_2(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega) \to \mathbb{R}$.

Variable aléatoire réelle

Cas d'un vecteur aléatoire

Soit $X = (X_1, X_2, \cdots, X_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ un vecteur aléatoire et une application $\phi : X_1(\Omega) \times X_2(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega) \to \mathbb{R}$.
$\phi(X_1, X_2, \cdots, X_n) : \Omega \to \mathbb{R}$ est une variable aléatoire réelle

Variable aléatoire réelle

Cas d'un vecteur aléatoire

Soit $X = (X_1, X_2, \cdots, X_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ un vecteur aléatoire et une application $\phi : X_1(\Omega) \times X_2(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega) \to \mathbb{R}$.
$\phi(X_1, X_2, \cdots, X_n) : \Omega \to \mathbb{R}$ est une variable aléatoire réelle si pour tout réel x $(\phi(X_1, X_2, \cdots, X_n) \leq x) \in \mathcal{T}$.

Variable aléatoire réelle

Cas d'un vecteur aléatoire

Soit $X = (X_1, X_2, \cdots, X_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ un vecteur aléatoire et une application $\phi : X_1(\Omega) \times X_2(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega) \to \mathbb{R}$.
$\phi(X_1, X_2, \cdots, X_n) : \Omega \to \mathbb{R}$ est une variable aléatoire réelle si pour tout réel x $(\phi(X_1, X_2, \cdots, X_n) \leq x) \in \mathcal{T}$.

Exemples

Variable aléatoire réelle

Cas d'un vecteur aléatoire

Soit $X = (X_1, X_2, \cdots, X_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ un vecteur aléatoire et une application $\phi : X_1(\Omega) \times X_2(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega) \to \mathbb{R}$.
$\phi(X_1, X_2, \cdots, X_n) : \Omega \to \mathbb{R}$ est une variable aléatoire réelle si pour tout réel x $(\phi(X_1, X_2, \cdots, X_n) \leq x) \in \mathcal{T}$.

Exemples

Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires réelles et a et b deux réels.

Variable aléatoire réelle

Cas d'un vecteur aléatoire

Soit $X = (X_1, X_2, \cdots, X_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ un vecteur aléatoire et une application $\phi : X_1(\Omega) \times X_2(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega) \to \mathbb{R}$.
$\phi(X_1, X_2, \cdots, X_n) : \Omega \to \mathbb{R}$ est une variable aléatoire réelle si pour tout réel x $(\phi(X_1, X_2, \cdots, X_n) \leq x) \in \mathcal{T}$.

Exemples

Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires réelles et a et b deux réels.
$X_1 + X_2$, $X_1 - X_2$, $aX_1 + bX_2$, X_1X_2, $\max(X_1, X_2)$ et $\min(X_1, X_2)$ sont des variables aléatoires réelles.

Variable aléatoire discrète

Variable aléatoire discrète

Variable aléatoire discrète

R3.08 Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Plan

Variable aléatoire

Variable aléatoire réelle

Variable aléatoire discrète

Variable aléatoire continue

Complément

Annexe : autres lois

Variable aléatoire discrète

Soit $(\Omega,\ \mathcal{T},\ P)$ un espace probabilisé associé à une expérience aléatoire.

Variable aléatoire discrète

Variable aléatoire discrète

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé associé à une expérience aléatoire. Une variable aléatoire réelle X est **discrète** si $X(\Omega)$ est fini ou dénombrable.

Variable aléatoire discrète

Variable aléatoire discrète

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé associé à une expérience aléatoire.
Une variable aléatoire réelle X est discrète si $X(\Omega)$ est fini ou dénombrable.
Si $X(\Omega)$ est fini alors X est dite variable aléatoire discrète finie.

Variable aléatoire discrète

Variable aléatoire discrète

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé associé à une expérience aléatoire.
Une variable aléatoire réelle X est discrète si $X(\Omega)$ est fini ou dénombrable.
Si $X(\Omega)$ est fini alors X est dite variable aléatoire discrète finie.
Si $X(\Omega)$ est dénombrable alors X est dite variable aléatoire discrète infinie.

Variable aléatoire discrète

R3.08
Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Plan

Variable aléatoire

Variable aléatoire réelle

Variable aléatoire discrète

Variable aléatoire continue

Complément

Annexe : autres lois

Variable aléatoire discrète

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé associé à une expérience aléatoire.
Une variable aléatoire réelle X est discrète si $X(\Omega)$ est fini ou dénombrable.
Si $X(\Omega)$ est fini alors X est dite variable aléatoire discrète finie.
Si $X(\Omega)$ est dénombrable alors X est dite variable aléatoire discrète infinie.

Propriétés

Variable aléatoire discrète

Variable aléatoire discrète

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé associé à une expérience aléatoire.
Une variable aléatoire réelle X est discrète si $X(\Omega)$ est fini ou dénombrable.
Si $X(\Omega)$ est fini alors X est dite variable aléatoire discrète finie.
Si $X(\Omega)$ est dénombrable alors X est dite variable aléatoire discrète infinie.

Propriétés

Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une application telle que $X(\Omega) = \{x_i, \ i \in I\}$ est fini ou dénombrable.

Variable aléatoire discrète

Variable aléatoire discrète

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé associé à une expérience aléatoire.
Une variable aléatoire réelle X est discrète si $X(\Omega)$ est fini ou dénombrable.
Si $X(\Omega)$ est fini alors X est dite variable aléatoire discrète finie.
Si $X(\Omega)$ est dénombrable alors X est dite variable aléatoire discrète infinie.

Propriétés

Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une application telle que $X(\Omega) = \{x_i, \; i \in I\}$ est fini ou dénombrable.
a) X est une variable aléatoire réelle si et seulement si $\forall i \in I$, $(X = x_i) \in \mathcal{T}$.

Variable aléatoire discrète

Variable aléatoire discrète

Soit $(\Omega,\ \mathcal{T},\ P)$ un espace probabilisé associé à une expérience aléatoire.
Une variable aléatoire réelle X est discrète si $X(\Omega)$ est fini ou dénombrable.
Si $X(\Omega)$ est fini alors X est dite variable aléatoire discrète finie.
Si $X(\Omega)$ est dénombrable alors X est dite variable aléatoire discrète infinie.

Propriétés

Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une application telle que $X(\Omega) = \{x_i,\ \ i \in I\}$ est fini ou dénombrable.
a) X est une variable aléatoire réelle si et seulement si $\forall i \in I$, $(X = x_i) \in \mathcal{T}$.
On utilise $(X \leq x) = \displaystyle\bigcup_{x_i \leq x,\ i \in I} (X = x_i)$

Variable aléatoire discrète

Variable aléatoire discrète

Soit $(\Omega,\ \mathcal{T},\ P)$ un espace probabilisé associé à une expérience aléatoire.
Une variable aléatoire réelle X est discrète si $X(\Omega)$ est fini ou dénombrable.
Si $X(\Omega)$ est fini alors X est dite variable aléatoire discrète finie.
Si $X(\Omega)$ est dénombrable alors X est dite variable aléatoire discrète infinie.

Propriétés

Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une application telle que $X(\Omega) = \{x_i,\ i \in I\}$ est fini ou dénombrable.

a) X est une variable aléatoire réelle si et seulement si $\forall i \in I$, $(X = x_i) \in \mathcal{T}$.

On utilise $(X \leq x) = \displaystyle\bigcup_{x_i \leq x,\ i \in I} (X = x_i)$

b) Si Ω est fini ou dénombrable alors toute application $X : \Omega \to \mathbb{R}$ est une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$.

Variable aléatoire discrète

Exemple 1

Variable aléatoire discrète

Exemple 1

$\Omega = \mathbb{R},\ \mathcal{T} = \{\emptyset, \Omega\},\ P(\Omega) = 1,\ P(\emptyset) = 0.$

Variable aléatoire discrète

Exemple 1

$\Omega = \mathbb{R}$, $\mathcal{T} = \{\emptyset, \Omega\}$, $P(\Omega) = 1$, $P(\emptyset) = 0$.
Soit a un réel et $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $X(\omega) = a$ (application contante).

Variable aléatoire discrète

Exemple 1

$\Omega = \mathbb{R}$, $\mathcal{T} = \{\emptyset, \Omega\}$, $P(\Omega) = 1$, $P(\emptyset) = 0$.
Soit a un réel et $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $X(\omega) = a$ (application contante).
$X(\Omega) = \{a\}$.

Variable aléatoire discrète

Exemple 1

$\Omega = \mathbb{R}$, $\mathcal{T} = \{\emptyset, \Omega\}$, $P(\Omega) = 1$, $P(\emptyset) = 0$.
Soit a un réel et $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $X(\omega) = a$ (application contante).
$X(\Omega) = \{a\}$.
$(X = a) = X^{-1}(a) = \mathbb{R} \in \mathcal{T}$.

Variable aléatoire discrète

Exemple 1

$\Omega = \mathbb{R}$, $\mathcal{T} = \{\emptyset, \Omega\}$, $P(\Omega) = 1$, $P(\emptyset) = 0$.
Soit a un réel et $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $X(\omega) = a$ (application contante).
$X(\Omega) = \{a\}$.
$(X = a) = X^{-1}(a) = \mathbb{R} \in \mathcal{T}$.
X est une variable aléatoire discrète dite déterministe ou certaine.

Variable aléatoire discrète

Exemple 2

Variable aléatoire discrète

Exemple 2

Expérience aléatoire : on lance un dé parfait à 6 faces et on note le nombre lu sur sa face supérieure.

Variable aléatoire discrète

R3.08 Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Exemple 2

Expérience aléatoire : on lance un dé parfait à 6 faces et on note le nombre lu sur sa face supérieure.

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$, $\forall i \in \Omega \; P(i) = \dfrac{1}{6}$.

Variable aléatoire discrète

Exemple 2

Expérience aléatoire : on lance un dé parfait à 6 faces et on note le nombre lu sur sa face supérieure.

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$, $\forall i \in \Omega\ P(i) = \frac{1}{6}$.

Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ définie par $X(\omega) = 0$ si $\omega \in \{2, 4, 6\}$ et $X(\omega) = 1$ si $\omega \in \{1, 3, 5\}$.

Variable aléatoire discrète

Exemple 2

Expérience aléatoire : on lance un dé parfait à 6 faces et on note le nombre lu sur sa face supérieure.

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$, $\forall i \in \Omega \; P(i) = \dfrac{1}{6}$.

Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ définie par $X(\omega) = 0$ si $\omega \in \{2, 4, 6\}$ et $X(\omega) = 1$ si $\omega \in \{1, 3, 5\}$.

$X(\Omega) = \{0, 1\}$.

Variable aléatoire discrète

R3.08 Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Exemple 2

Expérience aléatoire : on lance un dé parfait à 6 faces et on note le nombre lu sur sa face supérieure.

$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$, $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$, $\forall i \in \Omega \; P(i) = \dfrac{1}{6}$.

Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ définie par $X(\omega) = 0$ si $\omega \in \{2,4,6\}$ et $X(\omega) = 1$ si $\omega \in \{1,3,5\}$.

$X(\Omega) = \{0,1\}$.

$(X = 0) = X^{-1}(0) = \{2,4,6\} \in \mathcal{P}(\Omega)$

Variable aléatoire discrète

Exemple 2

Expérience aléatoire : on lance un dé parfait à 6 faces et on note le nombre lu sur sa face supérieure.

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$, $\forall i \in \Omega \ P(i) = \dfrac{1}{6}$.

Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ définie par $X(\omega) = 0$ si $\omega \in \{2, 4, 6\}$ et $X(\omega) = 1$ si $\omega \in \{1, 3, 5\}$.

$X(\Omega) = \{0, 1\}$.

$(X = 0) = X^{-1}(0) = \{2, 4, 6\} \in \mathcal{P}(\Omega)$

$(X = 1) = X^{-1}(1) = \{1, 3, 5\} \in \mathcal{P}(\Omega)$

Variable aléatoire discrète

Exemple 2

Expérience aléatoire : on lance un dé parfait à 6 faces et on note le nombre lu sur sa face supérieure.

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$, $\forall i \in \Omega \; P(i) = \dfrac{1}{6}$.

Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ définie par $X(\omega) = 0$ si $\omega \in \{2, 4, 6\}$ et $X(\omega) = 1$ si $\omega \in \{1, 3, 5\}$.

$X(\Omega) = \{0, 1\}$.

$(X = 0) = X^{-1}(0) = \{2, 4, 6\} \in \mathcal{P}(\Omega)$

$(X = 1) = X^{-1}(1) = \{1, 3, 5\} \in \mathcal{P}(\Omega)$

X est une variable aléatoire discrète dite variable de Bernoulli : variable aléatoire telle que $X(\Omega) = \{0, 1\}$.

Variable aléatoire discrète

Exemple 2

Expérience aléatoire : on lance un dé parfait à 6 faces et on note le nombre lu sur sa face supérieure.

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$, $\forall i \in \Omega\ P(i) = \frac{1}{6}$.

Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ définie par $X(\omega) = 0$ si $\omega \in \{2, 4, 6\}$ et $X(\omega) = 1$ si $\omega \in \{1, 3, 5\}$.

$X(\Omega) = \{0, 1\}$.

$(X = 0) = X^{-1}(0) = \{2, 4, 6\} \in \mathcal{P}(\Omega)$

$(X = 1) = X^{-1}(1) = \{1, 3, 5\} \in \mathcal{P}(\Omega)$

X est une variable aléatoire discrète dite variable de Bernoulli : variable aléatoire telle que $X(\Omega) = \{0, 1\}$.

Jacques Bernoulli (1654-1705) : mathématicien suisse.

Variable aléatoire discrète

Remarque

Variable aléatoire discrète

Remarque

En posant $A = \{1, 3, 5\}$, on a $\overline{A} = \{2, 4, 6\}$

Variable aléatoire discrète

Remarque

En posant $A = \{1, 3, 5\}$, on a $\overline{A} = \{2, 4, 6\}$ et on peut prendre $\mathcal{T} = \{\emptyset, A, \overline{A}, \Omega\}$.

Variable aléatoire discrète

Exemple 3

Variable aléatoire discrète

Exemple 3

Soit $p \in]0, 1[$ et n un entier $(n \geq 1)$.

Variable aléatoire discrète

Exemple 3

Soit $p \in]0, 1[$ et n un entier ($n \geq 1$).
Expérience aléatoire : on lance n fois une pièce de monnaie et on note la valeur lue sur la face supérieure de la pièce : Pile (P) ou Face (F).

Variable aléatoire discrète

Exemple 3

Soit $p \in]0,1[$ et n un entier ($n \geq 1$).
Expérience aléatoire : on lance n fois une pièce de monnaie et on note la valeur lue sur la face supérieure de la pièce : Pile (P) ou Face (F).
Pour $n = 1$, $\Omega = \{P, F\}$, $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$, $P(P) = p$, $P(F) = 1 - p$.

Variable aléatoire discrète

Exemple 3

Soit $p \in]0,1[$ et n un entier $(n \geq 1)$.
Expérience aléatoire : on lance n fois une pièce de monnaie et on note la valeur lue sur la face supérieure de la pièce : Pile (P) ou Face (F).
Pour $n = 1$, $\Omega = \{P, F\}$, $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$, $P(P) = p$, $P(F) = 1 - p$.
Pour $n \geq 1$, $\Omega = \{P, F\}^n$, $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$, $\forall \omega = (\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n) \in \{P, F\}^n$, $P(\omega) = p^i(1-p)^{n-i}$, avec i nombre de P de ω.

Variable aléatoire discrète

Exemple 3

Soit $p \in]0,1[$ et n un entier ($n \geq 1$).
Expérience aléatoire : on lance n fois une pièce de monnaie et on note la valeur lue sur la face supérieure de la pièce : Pile (P) ou Face (F).
Pour $n = 1$, $\Omega = \{P, F\}$, $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$, $P(P) = p$, $P(F) = 1 - p$.
Pour $n \geq 1$, $\Omega = \{P, F\}^n$, $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$, $\forall \omega = (\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n) \in \{P, F\}^n$,
$P(\omega) = p^i (1-p)^{n-i}$, avec i nombre de P de ω.
Exemple : pour $n = 4$, $P(PFPP) = p^3(1-p)^1$.

Variable aléatoire discrète

Exemple 3

Soit $p \in]0, 1[$ et n un entier $(n \geq 1)$.
Expérience aléatoire : on lance n fois une pièce de monnaie et on note la valeur lue sur la face supérieure de la pièce : Pile (P) ou Face (F).
Pour $n = 1$, $\Omega = \{P, F\}$, $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$, $P(P) = p$, $P(F) = 1 - p$.
Pour $n \geq 1$, $\Omega = \{P, F\}^n$, $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$, $\forall \omega = (\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n) \in \{P, F\}^n$,
$P(\omega) = p^i (1 - p)^{n-i}$, avec i nombre de P de ω.
Exemple : pour $n = 4$, $P(PFPP) = p^3 (1 - p)^1$.
On note $X : \Omega \to \mathbb{N}$ définie par $X(\omega)$ est le nombre de P de ω.
$X(\Omega) = \{0, 1, 2 \cdots, n\}$.

Variable aléatoire discrète

R3.08 Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Plan

Variable aléatoire

Variable aléatoire réelle

Variable aléatoire discrète

Variable aléatoire continue

Complément

Annexe : autres lois

Exemple 3

Soit $p \in]0,1[$ et n un entier $(n \geq 1)$.
Expérience aléatoire : on lance n fois une pièce de monnaie et on note la valeur lue sur la face supérieure de la pièce : Pile (P) ou Face (F).
Pour $n = 1$, $\Omega = \{P, F\}$, $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$, $P(P) = p$, $P(F) = 1 - p$.
Pour $n \geq 1$, $\Omega = \{P, F\}^n$, $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$, $\forall \omega = (\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n) \in \{P, F\}^n$, $P(\omega) = p^i (1-p)^{n-i}$, avec i nombre de P de ω.
Exemple : pour $n = 4$, $P(PFPP) = p^3(1-p)^1$.
On note $X : \Omega \to \mathbb{N}$ définie par $X(\omega)$ est le nombre de P de ω.
$X(\Omega) = \{0, 1, 2 \cdots, n\}$.
Il s'agit d'une application de Ω fini ($|\Omega| = 2^n$) dans $\mathbb{N}$.
X est donc une variable aléatoire discrète.

Variable aléatoire discrète

R3.08 Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Plan

Variable aléatoire

Variable aléatoire réelle

Variable aléatoire discrète

Variable aléatoire continue

Complément

Annexe : autres lois

Exemple 3 : $n = 3$

Variable aléatoire discrète

Exemple 3 : $n = 3$

$$\Omega = \{P, F\}^3 = \{FFF, PFF, FPF, FFP, PPF, PFP, FPP, PPP\}$$

Variable aléatoire discrète

Exemple 3 : $n = 3$

$\Omega = \{P, F\}^3 = \{FFF, PFF, FPF, FFP, PPF, PFP, FPP, PPP\}$
$\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$

Variable aléatoire discrète

Exemple 3 : $n = 3$

$\Omega = \{P, F\}^3 = \{FFF, PFF, FPF, FFP, PPF, PFP, FPP, PPP\}$
$\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$
$X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$

Variable aléatoire discrète

Exemple 3 : $n = 3$

$\Omega = \{P, F\}^3 = \{FFF, PFF, FPF, FFP, PPF, PFP, FPP, PPP\}$
$\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$
$X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$
$(X = 0) = X^{-1}(0) = \{FFF\} \in \mathcal{P}(\Omega)$

Variable aléatoire discrète

Exemple 3 : $n = 3$

$\Omega = \{P, F\}^3 = \{FFF, PFF, FPF, FFP, PPF, PFP, FPP, PPP\}$
$\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$
$X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$
$(X = 0) = X^{-1}(0) = \{FFF\} \in \mathcal{P}(\Omega)$
$(X = 1) = X^{-1}(1) = \{PFF, FPF, FFP\} \in \mathcal{P}(\Omega)$

Variable aléatoire discrète

Exemple 3 : $n = 3$

$\Omega = \{P, F\}^3 = \{FFF, PFF, FPF, FFP, PPF, PFP, FPP, PPP\}$
$\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$
$X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$
$(X = 0) = X^{-1}(0) = \{FFF\} \in \mathcal{P}(\Omega)$
$(X = 1) = X^{-1}(1) = \{PFF, FPF, FFP\} \in \mathcal{P}(\Omega)$
$(X = 2) = X^{-1}(2) = \{PPF, PFP, FPP\} \in \mathcal{P}(\Omega)$

Variable aléatoire discrète

Exemple 3 : $n = 3$

$\Omega = \{P, F\}^3 = \{FFF, PFF, FPF, FFP, PPF, PFP, FPP, PPP\}$
$\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$
$X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$
$(X = 0) = X^{-1}(0) = \{FFF\} \in \mathcal{P}(\Omega)$
$(X = 1) = X^{-1}(1) = \{PFF, FPF, FFP\} \in \mathcal{P}(\Omega)$
$(X = 2) = X^{-1}(2) = \{PPF, PFP, FPP\} \in \mathcal{P}(\Omega)$
$(X = 3) = X^{-1}(3) = \{PPP\} \in \mathcal{P}(\Omega)$

Variable aléatoire discrète

Dans la suite, on note $X(\Omega) = \{x_i,\ i \in I\}$.

Loi de probabilité

Variable aléatoire discrète

Dans la suite, on note $X(\Omega) = \{x_i,\ i \in I\}$.

Loi de probabilité

La loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète est définie par la donnée de $X(\Omega) = \{x_i,\ i \in I\}$ et des $P(X = x_i)$ $(i \in I)$.

Variable aléatoire discrète

Dans la suite, on note $X(\Omega) = \{x_i, \ i \in I\}$.

Loi de probabilité

La loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète est définie par la donnée de $X(\Omega) = \{x_i, \ i \in I\}$ et des $P(X = x_i)$ $(i \in I)$.

Propriétés

Variable aléatoire discrète

Dans la suite, on note $X(\Omega) = \{x_i, \ i \in I\}$.

Loi de probabilité

La loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète est définie par la donnée de $X(\Omega) = \{x_i, \ i \in I\}$ et des $P(X = x_i)$ $(i \in I)$.

Propriétés

i)

$$\sum_{x_i \in X(\Omega)} P(X = x_i) = \sum_{i \in I} P(X = x_i) = 1$$

Variable aléatoire discrète

Dans la suite, on note $X(\Omega) = \{x_i,\ i \in I\}$.

Loi de probabilité

La loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète est définie par la donnée de $X(\Omega) = \{x_i,\ i \in I\}$ et des $P(X = x_i)$ $(i \in I)$.

Propriétés

i)

$$\sum_{x_i \in X(\Omega)} P(X = x_i) = \sum_{i \in I} P(X = x_i) = 1$$

ii) Soit $B \subset \mathbb{R}$.

Variable aléatoire discrète

Dans la suite, on note $X(\Omega) = \{x_i,\ i \in I\}$.

Loi de probabilité

La loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète est définie par la donnée de $X(\Omega) = \{x_i,\ i \in I\}$ et des $P(X = x_i)$ $(i \in I)$.

Propriétés

i)

$$\sum_{x_i \in X(\Omega)} P(X = x_i) = \sum_{i \in I} P(X = x_i) = 1$$

ii) Soit $B \subset \mathbb{R}$. On a

$$P(X \in B) = \sum_{x_i \in B} P(X = x_i)$$

Variable aléatoire discrète

Exemple 1

Variable aléatoire discrète

Exemple 1

$\Omega = \mathbb{R}$, $\mathcal{T} = \{\emptyset, \Omega\}$,

Variable aléatoire discrète

Exemple 1

$\Omega = \mathbb{R}$, $\mathcal{T} = \{\emptyset, \Omega\}$,
$P(\Omega) = 1$, $P(\emptyset) = 0$.

Variable aléatoire discrète

Exemple 1

$\Omega = \mathbb{R}$, $\mathcal{T} = \{\emptyset, \Omega\}$,
$P(\Omega) = 1$, $P(\emptyset) = 0$.
$X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $X(\omega) = a$

Variable aléatoire discrète

Exemple 1

$\Omega = \mathbb{R}$, $\mathcal{T} = \{\emptyset, \Omega\}$,
$P(\Omega) = 1$, $P(\emptyset) = 0$.
$X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $X(\omega) = a$
$X(\Omega) = \{a\}$.

Variable aléatoire discrète

Exemple 1

$\Omega = \mathbb{R}$, $\mathcal{T} = \{\emptyset, \Omega\}$,
$P(\Omega) = 1$, $P(\emptyset) = 0$.
$X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $X(\omega) = a$
$X(\Omega) = \{a\}$.
$(X = a) = X^{-1}(a) = \mathbb{R}$.

Variable aléatoire discrète

Exemple 1

$\Omega = \mathbb{R}$, $\mathcal{T} = \{\emptyset, \Omega\}$,
$P(\Omega) = 1$, $P(\emptyset) = 0$.
$X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $X(\omega) = a$
$X(\Omega) = \{a\}$.
$(X = a) = X^{-1}(a) = \mathbb{R}$.
Loi de probabilité de X :

Variable aléatoire discrète

Exemple 1

$\Omega = \mathbb{R}$, $\mathcal{T} = \{\emptyset, \Omega\}$,
$P(\Omega) = 1$, $P(\emptyset) = 0$.
$X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $X(\omega) = a$
$X(\Omega) = \{a\}$.
$(X = a) = X^{-1}(a) = \mathbb{R}$.
Loi de probabilité de X :
$P(X = a) = P(\Omega) = 1$.

Variable aléatoire discrète

Exemple 2

Variable aléatoire discrète

Exemple 2

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$, $\forall i \in \Omega,\ P(i) = \dfrac{1}{6}$.

Variable aléatoire discrète

Exemple 2

$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$, $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$, $\forall i \in \Omega,\ P(i) = \dfrac{1}{6}$.
$X : \Omega \to \mathbb{R}$ définie par $X(\omega) = 0$ si $\omega \in \{2,4,6\}$ et $X(\omega) = 1$ si $\omega \in \{1,3,5\}$.

Variable aléatoire discrète

Exemple 2

$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$, $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$, $\forall i \in \Omega,\ P(i) = \dfrac{1}{6}$.
$X : \Omega \to \mathbb{R}$ définie par $X(\omega) = 0$ si $\omega \in \{2,4,6\}$ et $X(\omega) = 1$ si $\omega \in \{1,3,5\}$.
$X(\Omega) = \{0,1\}$.

Variable aléatoire discrète

R3.08 Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Exemple 2

$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$, $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$, $\forall i \in \Omega,\ P(i) = \dfrac{1}{6}$.
$X : \Omega \to \mathbb{R}$ définie par $X(\omega) = 0$ si $\omega \in \{2,4,6\}$ et $X(\omega) = 1$ si $\omega \in \{1,3,5\}$.
$X(\Omega) = \{0,1\}$.
$(X = 0) = X^{-1}(0) = \{2,4,6\}$

Variable aléatoire discrète

Exemple 2

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$, $\forall i \in \Omega,\ P(i) = \dfrac{1}{6}$.

$X : \Omega \to \mathbb{R}$ définie par $X(\omega) = 0$ si $\omega \in \{2, 4, 6\}$ et $X(\omega) = 1$ si $\omega \in \{1, 3, 5\}$.

$X(\Omega) = \{0, 1\}$.

$(X = 0) = X^{-1}(0) = \{2, 4, 6\}$

$(X = 1) = X^{-1}(1) = \{1, 3, 5\}$

Variable aléatoire discrète

R3.08 Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Exemple 2

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$, $\forall i \in \Omega,\ P(i) = \dfrac{1}{6}$.

$X : \Omega \to \mathbb{R}$ définie par $X(\omega) = 0$ si $\omega \in \{2, 4, 6\}$ et $X(\omega) = 1$ si $\omega \in \{1, 3, 5\}$.

$X(\Omega) = \{0, 1\}$.

$(X = 0) = X^{-1}(0) = \{2, 4, 6\}$

$(X = 1) = X^{-1}(1) = \{1, 3, 5\}$

Loi de probabilité de X :

Variable aléatoire discrète

Exemple 2

$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$, $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$, $\forall i \in \Omega$, $P(i) = \dfrac{1}{6}$.
$X : \Omega \to \mathbb{R}$ définie par $X(\omega) = 0$ si $\omega \in \{2,4,6\}$ et $X(\omega) = 1$ si $\omega \in \{1,3,5\}$.
$X(\Omega) = \{0,1\}$.
$(X = 0) = X^{-1}(0) = \{2,4,6\}$
$(X = 1) = X^{-1}(1) = \{1,3,5\}$
Loi de probabilité de X :
$P(X = 0) = P(\{2,4,6\}) = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$.

Variable aléatoire discrète

R3.08 Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Plan

Variable aléatoire

Variable aléatoire réelle

Variable aléatoire discrète

Variable aléatoire continue

Complément

Annexe : autres lois

Exemple 2

$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$, $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$, $\forall i \in \Omega,\ P(i) = \dfrac{1}{6}$.

$X : \Omega \to \mathbb{R}$ définie par $X(\omega) = 0$ si $\omega \in \{2,4,6\}$ et $X(\omega) = 1$ si $\omega \in \{1,3,5\}$.

$X(\Omega) = \{0,1\}$.

$(X = 0) = X^{-1}(0) = \{2,4,6\}$

$(X = 1) = X^{-1}(1) = \{1,3,5\}$

Loi de probabilité de X :

$P(X = 0) = P(\{2,4,6\}) = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$.

$P(X = 1) = P(\{1,3,5\}) = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$.

Variable aléatoire discrète

Exemple 2

$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$, $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$, $\forall i \in \Omega,\ P(i) = \dfrac{1}{6}$.
$X : \Omega \to \mathbb{R}$ définie par $X(\omega) = 0$ si $\omega \in \{2,4,6\}$ et $X(\omega) = 1$ si $\omega \in \{1,3,5\}$.
$X(\Omega) = \{0,1\}$.
$(X = 0) = X^{-1}(0) = \{2,4,6\}$
$(X = 1) = X^{-1}(1) = \{1,3,5\}$
Loi de probabilité de X :
$P(X = 0) = P(\{2,4,6\}) = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$.
$P(X = 1) = P(\{1,3,5\}) = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$.
Remarque : $P(X = 0) + P(X = 1) = 1$.

Variable aléatoire discrète

R3.08
Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Plan

Variable aléatoire

Variable aléatoire réelle

Variable aléatoire discrète

Variable aléatoire continue

Complément

Annexe : autres lois

Exemple 3

Variable aléatoire discrète

Exemple 3

Pour $n \geq 1$, $\Omega = \{P, F\}^n$, $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$, $\forall \omega = (\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n) \in \{P, F\}^n$, $P(\omega) = p^i (1-p)^{n-i}$, avec i nombre de P de ω.

Exemple 3

Pour $n \geq 1$, $\Omega = \{P, F\}^n$, $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$, $\forall \omega = (\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n) \in \{P, F\}^n$,
$P(\omega) = p^i(1-p)^{n-i}$, avec i nombre de P de ω.
$X : \Omega \to \mathbb{N}$ définie par $X(\omega)$ est le nombre de P de ω.
$X(\Omega) = \{0, 1, 2, \cdots, n\}$

Variable aléatoire discrète

Exemple 3

Pour $n \geq 1$, $\Omega = \{P, F\}^n$, $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$, $\forall \omega = (\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n) \in \{P, F\}^n$,
$P(\omega) = p^i (1-p)^{n-i}$, avec i nombre de P de ω.
$X : \Omega \rightarrow \mathbb{N}$ définie par $X(\omega)$ est le nombre de P de ω.
$X(\Omega) = \{0, 1, 2, \cdots, n\}$
Loi de probabilité (loi binomiale) de X :

Variable aléatoire discrète

Exemple 3

Pour $n \geq 1$, $\Omega = \{P, F\}^n$, $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$, $\forall \omega = (\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n) \in \{P, F\}^n$,
$P(\omega) = p^i(1-p)^{n-i}$, avec i nombre de P de ω.
$X : \Omega \to \mathbb{N}$ définie par $X(\omega)$ est le nombre de P de ω.
$X(\Omega) = \{0, 1, 2, \cdots, n\}$
Loi de probabilité (loi binomiale) de X :
$\forall i \in [\![0; n]\!]$, $P(X = i) = C_n^i p^i (1-p)^{n-i}$

Variable aléatoire discrète

Exemple 3

Pour $n \geq 1$, $\Omega = \{P, F\}^n$, $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$, $\forall \omega = (\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n) \in \{P, F\}^n$,
$P(\omega) = p^i(1-p)^{n-i}$, avec i nombre de P de ω.
$X : \Omega \to \mathbb{N}$ définie par $X(\omega)$ est le nombre de P de ω.
$X(\Omega) = \{0, 1, 2, \cdots, n\}$
Loi de probabilité (loi binomiale) de X :
$\forall i \in [\![0; n]\!]$, $P(X = i) = C_n^i p^i (1-p)^{n-i}$
Démonstration : il y a C_n^i suites ω de i P et de $n-i$ F.

Variable aléatoire discrète

Exemple 3

Pour $n \geq 1$, $\Omega = \{P, F\}^n$, $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$, $\forall \omega = (\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n) \in \{P, F\}^n$,
$P(\omega) = p^i (1-p)^{n-i}$, avec i nombre de P de ω.
$X : \Omega \to \mathbb{N}$ définie par $X(\omega)$ est le nombre de P de ω.
$X(\Omega) = \{0, 1, 2, \cdots, n\}$
Loi de probabilité (loi binomiale) de X :
$\forall i \in [\![0; n]\!]$, $P(X = i) = C_n^i p^i (1-p)^{n-i}$
Démonstration : il y a C_n^i suites ω de i P et de $n - i$ F.
Remarque :

$$\sum_{i=0}^{n} P(X = i) = \sum_{i=0}^{n} C_n^i p^i (1-p)^{n-i} = (p + (1-p))^n = 1^n = 1$$

Variable aléatoire discrète

Fonction de répartition

Variable aléatoire discrète

Fonction de répartition

La fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète est définie par

$$F(x) = P\left(X \leq x\right) = \sum_{x_i \leq x} P\left(X = x_i\right)$$

Variable aléatoire discrète

Fonction de répartition

La fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète est définie par

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} P(X = x_i)$$

Remarque

Variable aléatoire discrète

Fonction de répartition

La fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète est définie par

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} P(X = x_i)$$

Remarque

$$F(x) = P(X \leq x) = P(X \in]-\infty, x]) = P(X \in]-\infty, x] \cap X(\Omega))$$

Variable aléatoire discrète

Fonction de répartition

La fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète est définie par

$$F(x) = P\left(X \leq x\right) = \sum_{x_i \leq x} P\left(X = x_i\right)$$

Remarque

$F(x) = P\left(X \leq x\right) = P\left(X \in \left]-\infty, x\right]\right) = P\left(X \in \left]-\infty, x\right] \cap X\left(\Omega\right)\right)$
$F(x) = P\left(X(\omega) \in \left]-\infty, x\right] \cap \left\{x_1, x_2, ..., x_i, ...\right\}\right).$

Variable aléatoire discrète

Exemple 1

Variable aléatoire discrète

Exemple 1

Loi de probabilité de X : $P(X = a) = 1$.

Variable aléatoire discrète

R3.08 Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Exemple 1

Loi de probabilité de X : $P(X=a)=1$.
Fonction de répartition de X :

Variable aléatoire discrète

Exemple 1

Loi de probabilité de X : $P(X = a) = 1$.

Fonction de répartition de X :

$\forall x < a,\ F(x) = P(X \in]-\infty, x] \cap \{a\}) = 0$

Variable aléatoire discrète

Exemple 1

Loi de probabilité de X : $P(X = a) = 1$.

Fonction de répartition de X :

$\forall x < a,\ F(x) = P(X \in]-\infty, x] \cap \{a\}) = 0$

$\forall x \geq a,\ F(x) = P(X \in]-\infty, x] \cap \{a\}) = P(X = a) = 1$

Variable aléatoire discrète

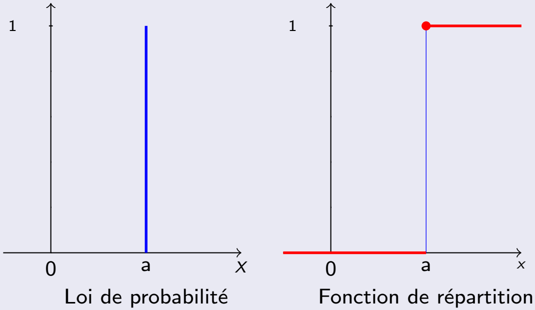
Exemple 1

Variable aléatoire discrète

R3.08 Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Exemple 1



Variable aléatoire discrète

Exemple 2

Variable aléatoire discrète

Exemple 2

Loi de probabilité de X :

Variable aléatoire discrète

Exemple 2

Loi de probabilité de X :

$$P(X = 0) = \frac{1}{2}$$

Variable aléatoire discrète

Exemple 2

Loi de probabilité de X :

$$P(X = 0) = \frac{1}{2}$$

$$P(X = 1) = \frac{1}{2}$$

Variable aléatoire discrète

Exemple 2

Loi de probabilité de X :

$P(X = 0) = \frac{1}{2}$

$P(X = 1) = \frac{1}{2}$

Fonction de répartition de X :

Variable aléatoire discrète

Exemple 2

Loi de probabilité de X :

$P(X = 0) = \frac{1}{2}$

$P(X = 1) = \frac{1}{2}$

Fonction de répartition de X :

$\forall x < 0,\ F(x) = P(X \in]-\infty, x] \cap \{0, 1\}) = 0$

Variable aléatoire discrète

Exemple 2

Loi de probabilité de X :

$P(X = 0) = \frac{1}{2}$

$P(X = 1) = \frac{1}{2}$

Fonction de répartition de X :

$\forall x < 0,\ F(x) = P(X \in]-\infty, x] \cap \{0, 1\}) = 0$

$\forall x,\ 0 \leq x < 1 :\ F(x) = P(X \in]-\infty, x] \cap \{0, 1\}) = P(X = 0) = \frac{1}{2}$

Variable aléatoire discrète

Exemple 2

Loi de probabilité de X :

$P(X = 0) = \dfrac{1}{2}$

$P(X = 1) = \dfrac{1}{2}$

Fonction de répartition de X :

$\forall x < 0,\ F(x) = P(X \in]-\infty, x] \cap \{0, 1\}) = 0$

$\forall x,\ 0 \leq x < 1 :\ F(x) = P(X \in]-\infty, x] \cap \{0, 1\}) = P(X = 0) = \dfrac{1}{2}$

$\forall x \geq 1,$

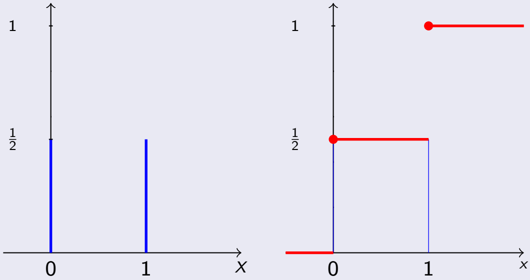
$F(x) = P(X \in]-\infty, x] \cap \{0, 1\}) = P(X = 0) + P(X = 1) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} = 1$

Variable aléatoire discrète

Exemple 2

Variable aléatoire discrète

Exemple 2



Loi de probabilité   Fonction de répartition

Variable aléatoire discrète

Exemple 3

Variable aléatoire discrète

Exemple 3

Loi de probabilité (loi binomiale) de X :

Variable aléatoire discrète

R3.08 Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Exemple 3

Loi de probabilité (loi binomiale) de X :
$\forall i,\ 0 \leq i \leq n,\ P(X = i) = C_n^i p^i (1-p)^{n-i}$

Variable aléatoire discrète

R3.08 Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Plan

Variable aléatoire

Variable aléatoire réelle

Variable aléatoire discrète

Variable aléatoire continue

Complément

Annexe : autres lois

Exemple 3

Loi de probabilité (loi binomiale) de X :
$\forall i,\ 0 \leq i \leq n,\ P\left(X = i\right) = C_n^i p^i (1-p)^{n-i}$
Fonction de répartition de X :

Variable aléatoire discrète

Exemple 3

Loi de probabilité (loi binomiale) de X :
$\forall i,\ 0 \leq i \leq n,\ P(X = i) = C_n^i p^i (1-p)^{n-i}$
Fonction de répartition de X :
$\forall x < 0,\ F(x) = 0$

Variable aléatoire discrète

Exemple 3

Loi de probabilité (loi binomiale) de X :

$\forall i,\ 0 \leq i \leq n,\ P\left(X = i\right) = C_n^i p^i (1-p)^{n-i}$

Fonction de répartition de X :

$\forall x < 0,\ F(x) = 0$

$\forall x,\ 0 \leq x < 1 :\ F(x) = P\left(X = 0\right) = C_n^0 p^0 (1-p)^{n-0} = (1-p)^n$

Variable aléatoire discrète

Exemple 3

Loi de probabilité (loi binomiale) de X :
$\forall i,\ 0 \leq i \leq n,\ P(X = i) = C_n^i p^i (1-p)^{n-i}$
Fonction de répartition de X :
$\forall x < 0,\ F(x) = 0$
$\forall x,\ 0 \leq x < 1 :\ F(x) = P(X = 0) = C_n^0 p^0 (1-p)^{n-0} = (1-p)^n$
$\forall x,\ 1 \leq x < 2 :\ F(x) = P(X = 0) + P(X = 1) =$
$(1-p)^n + C_n^1 p^1 (1-p)^{n-1} = (1-p)^n + np(1-p)^{n-1}$

Variable aléatoire discrète

Exemple 3

Loi de probabilité (loi binomiale) de X :
$\forall i,\ 0 \leq i \leq n,\ P(X = i) = C_n^i p^i (1-p)^{n-i}$
Fonction de répartition de X :
$\forall x < 0,\ F(x) = 0$
$\forall x,\ 0 \leq x < 1 :\ F(x) = P(X = 0) = C_n^0 p^0 (1-p)^{n-0} = (1-p)^n$
$\forall x,\ 1 \leq x < 2 :\ F(x) = P(X = 0) + P(X = 1) =$
$(1-p)^n + C_n^1 p^1 (1-p)^{n-1} = (1-p)^n + np(1-p)^{n-1}$
$\forall x,\ 2 \leq x < 3 :\ F(x) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$

Variable aléatoire discrète

R3.08 Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Exemple 3

Loi de probabilité (loi binomiale) de X :

$\forall i,\ 0 \leq i \leq n,\ P(X = i) = C_n^i p^i (1-p)^{n-i}$

Fonction de répartition de X :

$\forall x < 0,\ F(x) = 0$

$\forall x,\ 0 \leq x < 1 :\ F(x) = P(X = 0) = C_n^0 p^0 (1-p)^{n-0} = (1-p)^n$

$\forall x,\ 1 \leq x < 2 :\ F(x) = P(X = 0) + P(X = 1) =$

$(1-p)^n + C_n^1 p^1 (1-p)^{n-1} = (1-p)^n + np(1-p)^{n-1}$

$\forall x,\ 2 \leq x < 3 :\ F(x) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$

$= (1-p)^n + np(1-p)^{n-1} + C_n^2 p^2 (1-p)^{n-2} =$

$(1-p)^n + np(1-p)^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} p^2 (1-p)^{n-2}$

Variable aléatoire discrète

Exemple 3

Loi de probabilité (loi binomiale) de X :
$\forall i,\ 0 \leq i \leq n,\ P\left(X = i\right) = C_n^i p^i (1-p)^{n-i}$
Fonction de répartition de X :
$\forall x < 0,\ F(x) = 0$
$\forall x,\ 0 \leq x < 1:\ F(x) = P\left(X = 0\right) = C_n^0 p^0 (1-p)^{n-0} = (1-p)^n$
$\forall x,\ 1 \leq x < 2:\ F(x) = P\left(X = 0\right) + P\left(X = 1\right) =$
$(1-p)^n + C_n^1 p^1 (1-p)^{n-1} = (1-p)^n + np(1-p)^{n-1}$
$\forall x,\ 2 \leq x < 3:\ F(x) = P\left(X = 0\right) + P\left(X = 1\right) + P\left(X = 2\right)$
$= (1-p)^n + np(1-p)^{n-1} + C_n^2 p^2 (1-p)^{n-2} =$
$(1-p)^n + np(1-p)^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} p^2 (1-p)^{n-2}$
...

Variable aléatoire discrète

Exemple 3

Loi de probabilité (loi binomiale) de X :

$\forall i,\ 0 \leq i \leq n,\ P(X = i) = C_n^i p^i (1-p)^{n-i}$

Fonction de répartition de X :

$\forall x < 0,\ F(x) = 0$

$\forall x,\ 0 \leq x < 1 :\ F(x) = P(X = 0) = C_n^0 p^0 (1-p)^{n-0} = (1-p)^n$

$\forall x,\ 1 \leq x < 2 :\ F(x) = P(X = 0) + P(X = 1) =$

$(1-p)^n + C_n^1 p^1 (1-p)^{n-1} = (1-p)^n + np(1-p)^{n-1}$

$\forall x,\ 2 \leq x < 3 :\ F(x) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$

$= (1-p)^n + np(1-p)^{n-1} + C_n^2 p^2 (1-p)^{n-2} =$

$(1-p)^n + np(1-p)^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} p^2 (1-p)^{n-2}$

...

$$\forall x \geq n,\ F(x) = \sum_{k=0}^{n} P(X = k) = 1$$

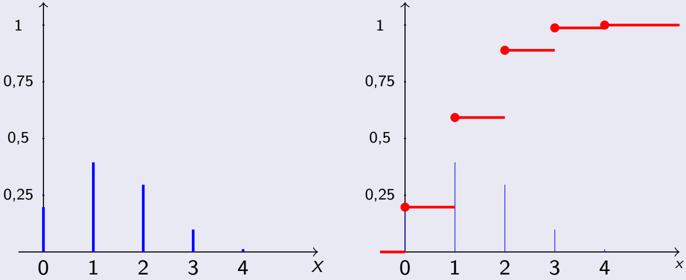
Variable aléatoire discrète : lois de probabilité usuelles

Loi binomiale

Variable aléatoire discrète : lois de probabilité usuelles

Loi binomiale

$$\boxed{X \sim \mathcal{B}\left(4, \tfrac{1}{3}\right)}$$



Loi de probabilité

Fonction de répartition

Variable aléatoire discrète

Fonction d'une variable aléatoire discrète

Variable aléatoire discrète

Fonction d'une variable aléatoire discrète

Soit X une variable aléatoire discrète et une application $\phi : X(\Omega) \to \mathbb{R}$.

Variable aléatoire discrète

Fonction d'une variable aléatoire discrète

Soit X une variable aléatoire discrète et une application $\phi : X(\Omega) \to \mathbb{R}$.
$\phi(X(\Omega)) = \phi\{x_i,\ i \in I\} = \{y_j,\ j \in J\}$ est fini ou dénombrable.

Variable aléatoire discrète

Fonction d'une variable aléatoire discrète

Soit X une variable aléatoire discrète et une application $\phi : X(\Omega) \to \mathbb{R}$.
$\phi(X(\Omega)) = \phi\{x_i,\ i \in I\} = \{y_j,\ j \in J\}$ est fini ou dénombrable.
On en déduit que $\phi(X)$ est une variable aléatoire discrète.

Variable aléatoire discrète

Fonction d'une variable aléatoire discrète

Soit X une variable aléatoire discrète et une application $\phi : X(\Omega) \to \mathbb{R}$.
$\phi(X(\Omega)) = \phi\{x_i,\ i \in I\} = \{y_j,\ j \in J\}$ est fini ou dénombrable.
On en déduit que $\phi(X)$ est une variable aléatoire discrète.
De même, si $\phi_1 : X(\Omega) \to \mathbb{R}$ et $\phi_2 : X(\Omega) \to \mathbb{R}$ sont deux applications, $\phi_1(X) + \phi_2(X)$ est une une variable aléatoire discrète.

Variable aléatoire discrète

Fonction d'une variable aléatoire discrète

Soit X une variable aléatoire discrète et une application $\phi : X(\Omega) \to \mathbb{R}$.
$\phi(X(\Omega)) = \phi\{x_i,\ i \in I\} = \{y_j,\ j \in J\}$ est fini ou dénombrable.
On en déduit que $\phi(X)$ est une variable aléatoire discrète.
De même, si $\phi_1 : X(\Omega) \to \mathbb{R}$ et $\phi_2 : X(\Omega) \to \mathbb{R}$ sont deux applications, $\phi_1(X) + \phi_2(X)$ est une une variable aléatoire discrète.
Loi de probabilité :

Variable aléatoire discrète

R3.08 Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Fonction d'une variable aléatoire discrète

Soit X une variable aléatoire discrète et une application $\phi : X(\Omega) \to \mathbb{R}$.
$\phi(X(\Omega)) = \phi\{x_i,\ i \in I\} = \{y_j,\ j \in J\}$ est fini ou dénombrable.
On en déduit que $\phi(X)$ est une variable aléatoire discrète.
De même, si $\phi_1 : X(\Omega) \to \mathbb{R}$ et $\phi_2 : X(\Omega) \to \mathbb{R}$ sont deux applications, $\phi_1(X) + \phi_2(X)$ est une une variable aléatoire discrète.
Loi de probabilité :

$$P(\phi(X) = y) = \sum_{x_i, \phi(x_i) = y} P(X = x_i)$$

Variable aléatoire discrète

Exemples

Variable aléatoire discrète

Exemples

Soit X est une variable aléatoire réelle définie par $X(\Omega) = \{-1, 0, 1\}$ et $P(X = -1) = \frac{1}{3}$, $P(X = 0) = \frac{1}{3}$ et $P(X = 1) = \frac{1}{3}$.

Variable aléatoire discrète

Exemples

Soit X est une variable aléatoire réelle définie par $X(\Omega) = \{-1, 0, 1\}$ et $P(X = -1) = \frac{1}{3}$, $P(X = 0) = \frac{1}{3}$ et $P(X = 1) = \frac{1}{3}$.
Soit $Y = 2X + 1$ et $Z = X^2$.

Variable aléatoire discrète

Exemples

Soit X est une variable aléatoire réelle définie par $X(\Omega) = \{-1, 0, 1\}$ et $P(X = -1) = \frac{1}{3}$, $P(X = 0) = \frac{1}{3}$ et $P(X = 1) = \frac{1}{3}$.
Soit $Y = 2X + 1$ et $Z = X^2$.
$Y(\Omega) = \{-1, 1, 3\}$ et $Z(\Omega) = \{0, 1\}$.

Variable aléatoire discrète

Exemples

Soit X est une variable aléatoire réelle définie par $X(\Omega) = \{-1, 0, 1\}$ et $P(X = -1) = \frac{1}{3}$, $P(X = 0) = \frac{1}{3}$ et $P(X = 1) = \frac{1}{3}$.
Soit $Y = 2X + 1$ et $Z = X^2$.
$Y(\Omega) = \{-1, 1, 3\}$ et $Z(\Omega) = \{0, 1\}$.
Loi de probabilité de Y :

Variable aléatoire discrète

Exemples

Soit X est une variable aléatoire réelle définie par $X(\Omega) = \{-1, 0, 1\}$ et $P(X = -1) = \frac{1}{3}$, $P(X = 0) = \frac{1}{3}$ et $P(X = 1) = \frac{1}{3}$.
Soit $Y = 2X + 1$ et $Z = X^2$.
$Y(\Omega) = \{-1, 1, 3\}$ et $Z(\Omega) = \{0, 1\}$.
Loi de probabilité de Y :

$$P(Y = -1) = P(2X + 1 = -1) = \sum_{x_i, 2x_i+1=-1} P(X = x_i) = P(X = -1) = \frac{1}{3}$$

Variable aléatoire discrète

Exemples

Soit X est une variable aléatoire réelle définie par $X(\Omega) = \{-1, 0, 1\}$ et $P(X = -1) = \frac{1}{3}$, $P(X = 0) = \frac{1}{3}$ et $P(X = 1) = \frac{1}{3}$.
Soit $Y = 2X + 1$ et $Z = X^2$.
$Y(\Omega) = \{-1, 1, 3\}$ et $Z(\Omega) = \{0, 1\}$.
Loi de probabilité de Y :

$$P(Y = -1) = P(2X + 1 = -1) = \sum_{x_i, 2x_i+1=-1} P(X = x_i) = P(X = -1) = \frac{1}{3}$$

$$P(Y = 1) = P(2X + 1 = 1) = \sum_{x_i, 2x_i+1=1} P(X = x_i) = P(X = 0) = \frac{1}{3}$$

Variable aléatoire discrète

R3.08 Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Exemples

Soit X est une variable aléatoire réelle définie par $X(\Omega) = \{-1, 0, 1\}$ et $P(X = -1) = \frac{1}{3}$, $P(X = 0) = \frac{1}{3}$ et $P(X = 1) = \frac{1}{3}$.
Soit $Y = 2X + 1$ et $Z = X^2$.
$Y(\Omega) = \{-1, 1, 3\}$ et $Z(\Omega) = \{0, 1\}$.
Loi de probabilité de Y :

$$P(Y = -1) = P(2X + 1 = -1) = \sum_{x_i, 2x_i + 1 = -1} P(X = x_i) = P(X = -1) = \frac{1}{3}$$

$$P(Y = 1) = P(2X + 1 = 1) = \sum_{x_i, 2x_i + 1 = 1} P(X = x_i) = P(X = 0) = \frac{1}{3}$$

$$P(Y = 3) = P(2X + 1 = 3) = \sum_{x_i, 2x_i + 1 = 3} P(X = x_i) = P(X = 1) = \frac{1}{3}$$

Variable aléatoire discrète

Exemples

Soit X est une variable aléatoire réelle définie par $X(\Omega) = \{-1, 0, 1\}$ et $P(X = -1) = \frac{1}{3}$, $P(X = 0) = \frac{1}{3}$ et $P(X = 1) = \frac{1}{3}$.
Soit $Y = 2X + 1$ et $Z = X^2$.
$Y(\Omega) = \{-1, 1, 3\}$ et $Z(\Omega) = \{0, 1\}$.
Loi de probabilité de Y :

$$P(Y = -1) = P(2X + 1 = -1) = \sum_{x_i, 2x_i+1=-1} P(X = x_i) = P(X = -1) = \frac{1}{3}$$

$$P(Y = 1) = P(2X + 1 = 1) = \sum_{x_i, 2x_i+1=1} P(X = x_i) = P(X = 0) = \frac{1}{3}$$

$$P(Y = 3) = P(2X + 1 = 3) = \sum_{x_i, 2x_i+1=3} P(X = x_i) = P(X = 1) = \frac{1}{3}$$

Loi de probabilité de Z :

Variable aléatoire discrète

R3.08 Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Plan

Variable aléatoire
- Variable aléatoire réelle
- Variable aléatoire discrète
- Variable aléatoire continue

Complément

Annexe : autres lois

Exemples

Soit X est une variable aléatoire réelle définie par $X(\Omega) = \{-1, 0, 1\}$ et $P(X = -1) = \frac{1}{3}$, $P(X = 0) = \frac{1}{3}$ et $P(X = 1) = \frac{1}{3}$.
Soit $Y = 2X + 1$ et $Z = X^2$.
$Y(\Omega) = \{-1, 1, 3\}$ et $Z(\Omega) = \{0, 1\}$.
Loi de probabilité de Y :

$$P(Y = -1) = P(2X + 1 = -1) = \sum_{x_i, 2x_i+1=-1} P(X = x_i) = P(X = -1) = \frac{1}{3}$$

$$P(Y = 1) = P(2X + 1 = 1) = \sum_{x_i, 2x_i+1=1} P(X = x_i) = P(X = 0) = \frac{1}{3}$$

$$P(Y = 3) = P(2X + 1 = 3) = \sum_{x_i, 2x_i+1=3} P(X = x_i) = P(X = 1) = \frac{1}{3}$$

Loi de probabilité de Z :

$$P(Z = 0) = P\left(X^2 = 0\right) = \sum_{x_i, x_i^2=0} P(X = x_i) = P(X = 0) = \frac{1}{3}$$

Variable aléatoire discrète

Exemples

Soit X est une variable aléatoire réelle définie par $X(\Omega) = \{-1, 0, 1\}$ et $P(X = -1) = \frac{1}{3}$, $P(X = 0) = \frac{1}{3}$ et $P(X = 1) = \frac{1}{3}$.
Soit $Y = 2X + 1$ et $Z = X^2$.
$Y(\Omega) = \{-1, 1, 3\}$ et $Z(\Omega) = \{0, 1\}$.
Loi de probabilité de Y :

$$P(Y = -1) = P(2X + 1 = -1) = \sum_{x_i, 2x_i+1=-1} P(X = x_i) = P(X = -1) = \frac{1}{3}$$

$$P(Y = 1) = P(2X + 1 = 1) = \sum_{x_i, 2x_i+1=1} P(X = x_i) = P(X = 0) = \frac{1}{3}$$

$$P(Y = 3) = P(2X + 1 = 3) = \sum_{x_i, 2x_i+1=3} P(X = x_i) = P(X = 1) = \frac{1}{3}$$

Loi de probabilité de Z :

$$P(Z = 0) = P\left(X^2 = 0\right) = \sum_{x_i, x_i^2=0} P(X = x_i) = P(X = 0) = \frac{1}{3}$$

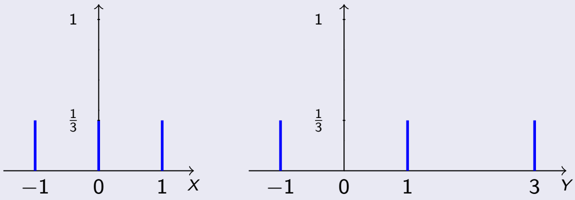
$$P(Z = 1) = P\left(X^2 = 1\right) = \sum_{x_i, x_i^2=1} P(X = x_i) = P(X = -1) + P(X = 1) = \frac{2}{3}$$

Variable aléatoire discrète

Exemples : loi de probabilité de $Y = 2X + 1$

Variable aléatoire discrète

Exemples : loi de probabilité de $Y = 2X + 1$



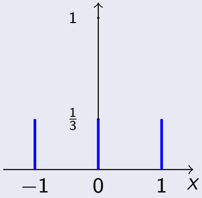
Loi de probabilité de X Loi de probabilité de $Y = 2X + 1$

Variable aléatoire discrète

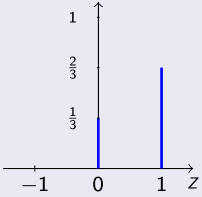
Exemples : loi de probabilité de $Z = X^2$

Variable aléatoire discrète

Exemples : loi de probabilité de $Z = X^2$



Loi de probabilité de X



Loi de probabilité de $Z = X^2$

Variable aléatoire discrète

Espérance

Variable aléatoire discrète

R3.08 Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Plan

Variable aléatoire

Variable aléatoire réelle

Variable aléatoire discrète

Variable aléatoire continue

Complément

Annexe : autres lois

Espérance

Soit X une variable aléatoire discrète et $X(\Omega) = \{x_i,\ i \in I\}$.

Variable aléatoire discrète

Espérance

Soit X une variable aléatoire discrète et $X(\Omega) = \{x_i, \ i \in I\}$.
On appelle espérance de X, le nombre, s'il existe, défini par

Variable aléatoire discrète

R3.08 Probabilités
Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Plan
Variable aléatoire
Variable aléatoire réelle
Variable aléatoire discrète
Variable aléatoire continue
Complément
Annexe : autres lois

Espérance

Soit X une variable aléatoire discrète et $X(\Omega) = \{x_i, \ i \in I\}$.
On appelle espérance de X, le nombre, s'il existe, défini par

$$E(X) = \sum_{x_i \in X(\Omega)} x_i P(X = x_i)$$

Variable aléatoire discrète

Espérance

Soit X une variable aléatoire discrète et $X(\Omega) = \{x_i,\ i \in I\}$.
On appelle espérance de X, le nombre, s'il existe, défini par

$$E(X) = \sum_{x_i \in X(\Omega)} x_i P(X = x_i)$$

Remarques

Variable aléatoire discrète

R3.08 Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Plan

Variable aléatoire

Variable aléatoire réelle

Variable aléatoire discrète

Variable aléatoire continue

Complément

Annexe : autres lois

Espérance

Soit X une variable aléatoire discrète et $X(\Omega) = \{x_i,\ i \in I\}$.
On appelle espérance de X, le nombre, s'il existe, défini par

$$E(X) = \sum_{x_i \in X(\Omega)} x_i P(X = x_i)$$

Remarques

i) L'espérance ne dépend que de la loi de probabilité suivie par X. On rencontre donc aussi l'expression : espérance d'une loi de probabilité.

Variable aléatoire discrète

Espérance

Soit X une variable aléatoire discrète et $X(\Omega) = \{x_i, \ i \in I\}$.
On appelle espérance de X, le nombre, s'il existe, défini par

$$E(X) = \sum_{x_i \in X(\Omega)} x_i P(X = x_i)$$

Remarques

i) L'espérance ne dépend que de la loi de probabilité suivie par X. On rencontre donc aussi l'expression : espérance d'une loi de probabilité.
ii) Autre expression : valeur moyenne de X.

Variable aléatoire discrète

R3.08 Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Espérance

Soit X une variable aléatoire discrète et $X(\Omega) = \{x_i,\ i \in I\}$.
On appelle espérance de X, le nombre, s'il existe, défini par

$$E(X) = \sum_{x_i \in X(\Omega)} x_i P(X = x_i)$$

Remarques

i) L'espérance ne dépend que de la loi de probabilité suivie par X. On rencontre donc aussi l'expression : espérance d'une loi de probabilité.
ii) Autre expression : valeur moyenne de X.
iii) Si $X(\Omega)$ est fini alors $E(X)$ existe toujours.

Variable aléatoire discrète

Espérance

Soit X une variable aléatoire discrète et $X(\Omega) = \{x_i,\ i \in I\}$.
On appelle espérance de X, le nombre, s'il existe, défini par

$$E(X) = \sum_{x_i \in X(\Omega)} x_i P(X = x_i)$$

Remarques

i) L'espérance ne dépend que de la loi de probabilité suivie par X. On rencontre donc aussi l'expression : espérance d'une loi de probabilité.
ii) Autre expression : valeur moyenne de X.
iii) Si $X(\Omega)$ est fini alors $E(X)$ existe toujours.
Si $X(\Omega)$ est dénombrable alors $E(X)$ existe si et seulement si la série associée est absolument convergente, ce qui garantit qu'on puisse modifier l'ordre des termes.

Variable aléatoire discrète

Exemple 1

Variable aléatoire discrète

Exemple 1

Loi de probabilité de X :

Variable aléatoire discrète

R3.08 Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Plan

Variable aléatoire

Variable aléatoire réelle

Variable aléatoire discrète

Variable aléatoire continue

Complément

Annexe : autres lois

Exemple 1

Loi de probabilité de X :
$P(X = a) = 1$

Variable aléatoire discrète

R3.08
Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Plan

Variable aléatoire

Variable aléatoire réelle

Variable aléatoire discrète

Variable aléatoire continue

Complément

Annexe : autres lois

Exemple 1

Loi de probabilité de X :
$P\left(X=a\right)=1$

$$E\left(X\right)=aP\left(X=a\right)=a$$

Variable aléatoire discrète

Exemple 1

Loi de probabilité de X :
$P(X = a) = 1$

$$E(X) = aP(X = a) = a$$

Exemple 2

Variable aléatoire discrète

Exemple 1

Loi de probabilité de X :
$P(X = a) = 1$

$$E(X) = aP(X = a) = a$$

Exemple 2

Loi de probabilité de X :

Variable aléatoire discrète

Exemple 1

Loi de probabilité de X :

$P(X = a) = 1$

$$E(X) = aP(X = a) = a$$

Exemple 2

Loi de probabilité de X :

$P(X = 0) = \frac{1}{2}$

Variable aléatoire discrète

Exemple 1

Loi de probabilité de X :
$P\left(X=a\right)=1$

$$E\left(X\right)=aP\left(X=a\right)=a$$

Exemple 2

Loi de probabilité de X :
$P\left(X=0\right)=\dfrac{1}{2}$
$P\left(X=1\right)=\dfrac{1}{2}$

Variable aléatoire discrète

Exemple 1

Loi de probabilité de X :
$P(X = a) = 1$

$$E(X) = aP(X = a) = a$$

Exemple 2

Loi de probabilité de X :

$P(X = 0) = \frac{1}{2}$

$P(X = 1) = \frac{1}{2}$

$$E(X) = 0.P(X = 0) + 1.P(X = 1) = 0.\frac{1}{2} + 1.\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Variable aléatoire discrète

Exemple 3

Variable aléatoire discrète

Exemple 3

Loi de probabilité (loi binomiale) de X :

Variable aléatoire discrète

Exemple 3

Loi de probabilité (loi binomiale) de X :
$\forall i,\ 0 \leq i \leq n,\ P\left(X = i\right) = C_n^i p^i \left(1 - p\right)^{n-i}$

Exemple 3

Loi de probabilité (loi binomiale) de X :
$\forall i,\ 0 \leq i \leq n,\ P\left(X = i\right) = C_n^i p^i (1-p)^{n-i}$

$$E\left(X\right) = \sum_{i=0}^{n} iP\left(X = i\right) = \sum_{i=0}^{n} iC_n^i p^i (1-p)^{n-i} = np$$

Variable aléatoire discrète

Exemple 3

Loi de probabilité (loi binomiale) de X :
$\forall i,\ 0 \leq i \leq n,\ P(X = i) = C_n^i p^i (1-p)^{n-i}$

$$E(X) = \sum_{i=0}^{n} iP(X = i) = \sum_{i=0}^{n} iC_n^i p^i (1-p)^{n-i} = np$$

Démonstration en annexe.

Variable aléatoire discrète

Propriétés

Variable aléatoire discrète

R3.08 Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Propriétés

Soit X une variable aléatoire discrète.

Variable aléatoire discrète

Propriétés

Soit X une variable aléatoire discrète.
i) Soit une application $\phi : X(\Omega) \to \mathbb{R}$.

Variable aléatoire discrète

Propriétés

Soit X une variable aléatoire discrète.

i) Soit une application $\phi : X(\Omega) \to \mathbb{R}$.

Si elle existe, $E(\phi(X)) = \sum_{x_i \in X(\Omega)} \phi(x_i) P(X = x_i)$

Variable aléatoire discrète

Propriétés

Soit X une variable aléatoire discrète.

i) Soit une application $\phi : X(\Omega) \to \mathbb{R}$.

Si elle existe, $E(\phi(X)) = \sum_{x_i \in X(\Omega)} \phi(x_i) P(X = x_i)$

ii) Si elle existe, $E(aX + b) = aE(X) + b$

Variable aléatoire discrète

Propriétés

Soit X une variable aléatoire discrète.

i) Soit une application $\phi : X(\Omega) \to \mathbb{R}$.

Si elle existe, $E(\phi(X)) = \sum_{x_i \in X(\Omega)} \phi(x_i) P(X = x_i)$

ii) Si elle existe, $E(aX + b) = aE(X) + b$

iii) Soit deux applications $\phi_1 : X(\Omega) \to \mathbb{R}$ et $\phi_2 : X(\Omega) \to \mathbb{R}$.

Variable aléatoire discrète

Propriétés

Soit X une variable aléatoire discrète.

i) Soit une application $\phi : X(\Omega) \to \mathbb{R}$.

Si elle existe, $E(\phi(X)) = \sum_{x_i \in X(\Omega)} \phi(x_i) P(X = x_i)$

ii) Si elle existe, $E(aX + b) = aE(X) + b$

iii) Soit deux applications $\phi_1 : X(\Omega) \to \mathbb{R}$ et $\phi_2 : X(\Omega) \to \mathbb{R}$.

Si elle existe, $E(\phi_1(X) + \phi_2(X)) = E(\phi_1(X)) + E(\phi_2(X))$

Variable aléatoire discrète

Variance

Variable aléatoire discrète

Variance

Soit X une variable aléatoire discrète et $X(\Omega) = \{x_i,\ i \in I\}$ qui admet une espérance.

Variable aléatoire discrète

Variance

Soit X une variable aléatoire discrète et $X(\Omega) = \{x_i,\ i \in I\}$ qui admet une espérance.
On appelle variance de X, le nombre, s'il existe, défini par

$$V(X) = E\left(\left(X - E(X)\right)^2\right)$$

Variable aléatoire discrète

Variance

Soit X une variable aléatoire discrète et $X(\Omega) = \{x_i,\ i \in I\}$ qui admet une espérance.
On appelle variance de X, le nombre, s'il existe, défini par

$$V(X) = E\left((X - E(X))^2\right)$$

Si $V(X)$ existe, on appelle écart-type de X le nombre $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Variable aléatoire discrète

R3.08 Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Variance

Soit X une variable aléatoire discrète et $X(\Omega) = \{x_i,\ i \in I\}$ qui admet une espérance.
On appelle variance de X, le nombre, s'il existe, défini par

$$V(X) = E\left((X - E(X))^2\right)$$

Si $V(X)$ existe, on appelle écart-type de X le nombre $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Remarques

Variable aléatoire discrète

Variance

Soit X une variable aléatoire discrète et $X(\Omega) = \{x_i,\ i \in I\}$ qui admet une espérance.
On appelle variance de X, le nombre, s'il existe, défini par

$$V(X) = E\left((X - E(X))^2\right)$$

Si $V(X)$ existe, on appelle écart-type de X le nombre $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Remarques

i) La variance mesure la dispersion autour de l'espérance.

Variable aléatoire discrète

R3.08 Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Variance

Soit X une variable aléatoire discrète et $X(\Omega) = \{x_i,\ i \in I\}$ qui admet une espérance.
On appelle variance de X, le nombre, s'il existe, défini par

$$V(X) = E\left((X - E(X))^2\right)$$

Si $V(X)$ existe, on appelle écart-type de X le nombre $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Remarques

i) La variance mesure la dispersion autour de l'espérance.
ii) Pour tous réels a et b, si elle existe $V(aX + b) = a^2 V(X)$.

Variable aléatoire discrète

Variance

Soit X une variable aléatoire discrète et $X(\Omega) = \{x_i,\ i \in I\}$ qui admet une espérance.
On appelle variance de X, le nombre, s'il existe, défini par

$$V(X) = E\left((X - E(X))^2\right)$$

Si $V(X)$ existe, on appelle écart-type de X le nombre $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Remarques

i) La variance mesure la dispersion autour de l'espérance.
ii) Pour tous réels a et b, si elle existe $V(aX + b) = a^2 V(X)$.
iii) Si elle existe, $V(X) = E\left(X^2\right) - (E(X))^2$.

Variable aléatoire discrète

Exemple 1

Variable aléatoire discrète

Exemple 1

Loi de probabilité de X : $P(X = a) = 1$.

Variable aléatoire discrète

Exemple 1

Loi de probabilité de X : $P(X = a) = 1$.
$E(X) = a$

Variable aléatoire discrète

Exemple 1

Loi de probabilité de X : $P(X = a) = 1$.
$E(X) = a$
$V(X) = E\left((X - E(X))^2\right) = E\left((X - a)^2\right) = (a - a)^2 P(X = a) = 0$

Variable aléatoire discrète

Exemple 1

Loi de probabilité de X : $P(X = a) = 1$.
$E(X) = a$
$V(X) = E\left((X - E(X))^2\right) = E\left((X - a)^2\right) = (a - a)^2 P(X = a) = 0$
ou $V(X) = E\left(X^2\right) - (E(X))^2 = a^2 P(X = a) - a^2 = 0$

Variable aléatoire discrète

Exemple 2

Variable aléatoire discrète

R3.08 Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Exemple 2

Loi de probabilité de X :

Variable aléatoire discrète

Exemple 2

Loi de probabilité de X :

$P(X = 0) = \dfrac{1}{2}$

Variable aléatoire discrète

Exemple 2

Loi de probabilité de X :

$P\left(X=0\right)=\frac{1}{2}$

$P\left(X=1\right)=\frac{1}{2}$

Variable aléatoire discrète

Exemple 2

Loi de probabilité de X :

$P(X = 0) = \frac{1}{2}$

$P(X = 1) = \frac{1}{2}$

$E(X) = \frac{1}{2}$

Variable aléatoire discrète

Exemple 2

Loi de probabilité de X :

$P(X=0)=\dfrac{1}{2}$

$P(X=1)=\dfrac{1}{2}$

$E(X)=\dfrac{1}{2}$

$V(X)=E\left(\left(X-\frac{1}{2}\right)^2\right)=\left(0-\frac{1}{2}\right)^2P(X=0)+\left(1-\frac{1}{2}\right)^2P(X=1)=\frac{1}{4}$

Variable aléatoire discrète

Exemple 2

Loi de probabilité de X :

$$P\left(X=0\right)=\frac{1}{2}$$

$$P\left(X=1\right)=\frac{1}{2}$$

$$E\left(X\right)=\frac{1}{2}$$

$$V(X)=E\left(\left(X-\tfrac{1}{2}\right)^2\right)=\left(0-\tfrac{1}{2}\right)^2P\left(X=0\right)+\left(1-\tfrac{1}{2}\right)^2P\left(X=1\right)=\tfrac{1}{4}$$

ou $V(X)=E\left(X^2\right)-\left(\tfrac{1}{2}\right)^2=0^2.P\left(X=0\right)+1^2.P\left(X=1\right)-\left(\tfrac{1}{2}\right)^2=\tfrac{1}{4}.$

Variable aléatoire discrète

Exemple 3

Variable aléatoire discrète

Exemple 3

Loi de probabilité (loi binomiale) de X :
$\forall i,\ 0 \leq i \leq n,\ P\left(X = i\right) = C_n^i p^i (1-p)^{n-i}$

Variable aléatoire discrète

R3.08 Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Exemple 3

Loi de probabilité (loi binomiale) de X :
$\forall i,\ 0 \leq i \leq n,\ P(X = i) = C_n^i p^i (1-p)^{n-i}$
$E(X) = np$

Variable aléatoire discrète

Exemple 3

Loi de probabilité (loi binomiale) de X :
$\forall i,\ 0 \leq i \leq n,\ P\left(X = i\right) = C_n^i p^i (1-p)^{n-i}$
$E\left(X\right) = np$
$V\left(X\right) = np(1-p) = npq$ en posant $q = 1 - p$.

Variable aléatoire discrète

Exemple 3

Loi de probabilité (loi binomiale) de X :
$\forall i,\ 0 \leq i \leq n,\ P\left(X = i\right) = C_n^i p^i (1-p)^{n-i}$
$E\left(X\right) = np$
$V\left(X\right) = np(1-p) = npq$ en posant $q = 1 - p$.
Démonstration en annexe.

Variable aléatoire discrète : lois de probabilité usuelles

Loi uniforme

Variable aléatoire discrète : lois de probabilité usuelles

Loi uniforme

Une variable aléatoire X suit la loi uniforme $\mathcal{U}\left(\frac{1}{n}\right)$ sur $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ si

Loi uniforme

Une variable aléatoire X suit la loi uniforme $\mathcal{U}\left(\frac{1}{n}\right)$ sur $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ si
α) $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$

Loi uniforme

Une variable aléatoire X suit la loi uniforme $\mathcal{U}\left(\frac{1}{n}\right)$ sur $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ si

$\alpha)$ $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$

$\beta)$ $\forall i,\ 1 \leq i \leq n,\ P(X = x_i) = \dfrac{1}{n}$

Variable aléatoire discrète : lois de probabilité usuelles

Loi uniforme

Une variable aléatoire X suit la loi uniforme $\mathcal{U}\left(\frac{1}{n}\right)$ sur $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ si

$\alpha)$ $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$

$\beta)$ $\forall i,\ 1 \leq i \leq n,\ P\left(X = x_i\right) = \dfrac{1}{n}$

$$E\left(X\right) = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

Loi uniforme

Une variable aléatoire X suit la loi uniforme $\mathcal{U}\left(\frac{1}{n}\right)$ sur $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ si

α) $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$

β) $\forall i,\ 1 \leq i \leq n,\ P(X = x_i) = \dfrac{1}{n}$

$$E(X) = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

$$V(X) = \frac{(x_1 - E(X))^2 + (x_2 - E(X))^2 + \cdots + (x_n - E(X))^2}{n} = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{n} - (E(X))^2$$

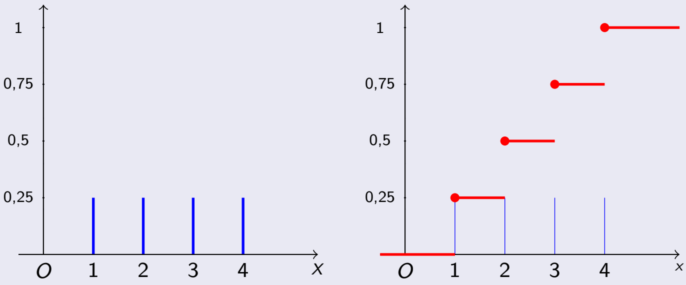
Variable aléatoire discrète : lois de probabilité usuelles

Loi uniforme

Variable aléatoire discrète : lois de probabilité usuelles

Loi uniforme

$$\boxed{X \sim \mathcal{U}\left(\frac{1}{4}\right) \text{ sur } \{1, 2, 3, 4\}}$$



Loi de probabilité

Fonction de répartition

Variable aléatoire discrète : lois de probabilité usuelles

Loi de Bernoulli

Variable aléatoire discrète : lois de probabilité usuelles

Loi de Bernoulli

Soit $p \in]0,1[$.

Variable aléatoire discrète : lois de probabilité usuelles

Loi de Bernoulli

Soit $p \in]0,1[$.

Une variable aléatoire X suit la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(1,p)$ de paramètre p si

Variable aléatoire discrète : lois de probabilité usuelles

Loi de Bernoulli

Soit $p \in]0,1[$.
Une variable aléatoire X suit la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(1,p)$ de paramètre p si
α) $X(\Omega) = \{0,1\}$

Loi de Bernoulli

Soit $p \in]0,1[$.
Une variable aléatoire X suit la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(1,p)$ de paramètre p si
$\alpha)$ $X(\Omega) = \{0,1\}$
$\beta)$ $P(X=1) = p$, $P(X=0) = 1-p = q$

Loi de Bernoulli

Soit $p \in]0,1[$.
Une variable aléatoire X suit la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(1,p)$ de paramètre p si
$\alpha)$ $X(\Omega) = \{0,1\}$
$\beta)$ $P(X=1) = p$, $P(X=0) = 1-p = q$
$E(X) = p$

Variable aléatoire discrète : lois de probabilité usuelles

Loi de Bernoulli

Soit $p \in]0,1[$.
Une variable aléatoire X suit la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(1,p)$ de paramètre p si
α) $X(\Omega) = \{0,1\}$
β) $P(X=1) = p$, $P(X=0) = 1-p = q$
$E(X) = p$
$V(X) = pq$

Variable aléatoire discrète : lois de probabilité usuelles

Loi de Bernoulli

Variable aléatoire discrète : lois de probabilité usuelles

Loi de Bernoulli

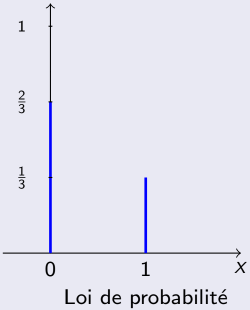
Dans une expérience aléatoire $\mathcal{E}$ à deux issues, appelée épreuve de Bernoulli, la variable aléatoire X qui vaut 1 si $\mathcal{E}$ donne un succès et 0 sinon (échec), est appelée variable de Bernoulli associée à $\mathcal{E}$.

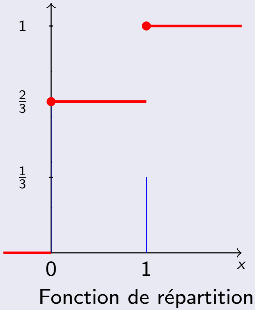
Loi de Bernoulli

Variable aléatoire discrète : lois de probabilité usuelles

Loi de Bernoulli

$$\boxed{X \sim \mathcal{B}\left(1, \frac{1}{3}\right)}$$





Variable aléatoire discrète : lois de probabilité usuelles

Loi binomiale

Variable aléatoire discrète : lois de probabilité usuelles

Loi binomiale

Soit $p \in]0,1[$ et n un entier naturel, $n \geq 1$.

Variable aléatoire discrète : lois de probabilité usuelles

Loi binomiale

Soit $p \in]0,1[$ et n un entier naturel, $n \geq 1$.
Une variable aléatoire X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ de paramètres n et p si

Variable aléatoire discrète : lois de probabilité usuelles

Loi binomiale

Soit $p \in]0,1[$ et n un entier naturel, $n \geq 1$.
Une variable aléatoire X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ de paramètres n et p si
$\alpha)$ $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$

Loi binomiale

Soit $p \in]0,1[$ et n un entier naturel, $n \geq 1$.
Une variable aléatoire X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ de paramètres n et p si

α) $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$

β) $\forall i,\ 0 \leq i \leq n,\ P\left(X = i\right) = C_n^i p^i (1-p)^{n-i}$

Variable aléatoire discrète : lois de probabilité usuelles

Loi binomiale

Soit $p \in]0,1[$ et n un entier naturel, $n \geq 1$.
Une variable aléatoire X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ de paramètres n et p si

α) $X(\Omega) = [\![0,n]\!]$

β) $\forall i,\ 0 \leq i \leq n,\ P(X = i) = C_n^i p^i (1-p)^{n-i}$

$E(X) = np$

Variable aléatoire discrète : lois de probabilité usuelles

Loi binomiale

Soit $p \in]0,1[$ et n un entier naturel, $n \geq 1$.
Une variable aléatoire X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ de paramètres n et p si

α) $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$

β) $\forall i,\ 0 \leq i \leq n,\ P\left(X = i\right) = C_n^i p^i (1-p)^{n-i}$

$E\left(X\right) = np$

$V\left(X\right) = np(1-p) = npq$ en posant $q = 1 - p$

Variable aléatoire discrète : lois de probabilité usuelles

Loi binomiale

Variable aléatoire discrète : lois de probabilité usuelles

Loi binomiale

Soit $\mathcal{E}$ une expérience aléatoire qui est une suite de n épreuves de Bernoulli $\mathcal{E}_i$ indépendantes et de même paramètre p.

Loi binomiale

Soit $\mathcal{E}$ une expérience aléatoire qui est une suite de n épreuves de Bernoulli $\mathcal{E}_i$ indépendantes et de même paramètre p.
La variable aléatoire X égale au nombre de succès obtenus sur ces n épreuves suit la loi binomiale de paramètre n et p.

Loi binomiale

Soit $\mathcal{E}$ une expérience aléatoire qui est une suite de n épreuves de Bernoulli $\mathcal{E}_i$ indépendantes et de même paramètre p.
La variable aléatoire X égale au nombre de succès obtenus sur ces n épreuves suit la loi binomiale de paramètre n et p.
Notation : $X \sim \mathcal{B}(n, p)$.

Variable aléatoire discrète : lois de probabilité usuelles

Loi binomiale

Variable aléatoire discrète : lois de probabilité usuelles

R3.08 Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Plan

Variable aléatoire

Variable aléatoire réelle

Variable aléatoire discrète

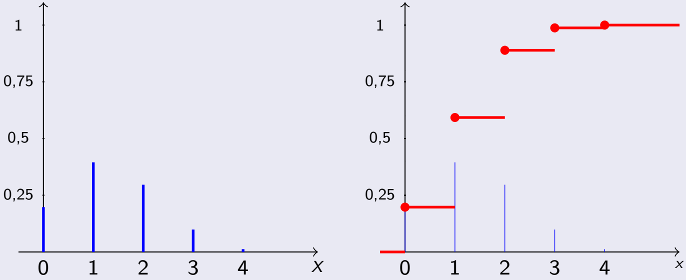
Variable aléatoire continue

Complément

Annexe : autres lois

Loi binomiale

$$\boxed{X \sim \mathcal{B}\left(4, \tfrac{1}{3}\right)}$$



Loi de probabilité   Fonction de répartition

Variable aléatoire discrète : lois de probabilité usuelles

Loi hypergéométrique

Variable aléatoire discrète : lois de probabilité usuelles

Loi hypergéométrique

Une urne contient N boules dont N_1 blanches et N_2 noires.

Variable aléatoire discrète : lois de probabilité usuelles

Loi hypergéométrique

Une urne contient N boules dont N_1 blanches et N_2 noires.
On tire n boules sans remise.

Variable aléatoire discrète : lois de probabilité usuelles

Loi hypergéométrique

Une urne contient N boules dont N_1 blanches et N_2 noires.
On tire n boules sans remise.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues.

Loi hypergéométrique

Une urne contient N boules dont N_1 blanches et N_2 noires.
On tire n boules sans remise.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues.
$X(\Omega) = [\![max\,(0, n - N_2)\,, min\,(n, N_1)]\!]$.

Variable aléatoire discrète : lois de probabilité usuelles

Loi hypergéométrique

Une urne contient N boules dont N_1 blanches et N_2 noires.
On tire n boules sans remise.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues.
$X(\Omega) = [\![max\left(0, n - N_2\right), min\left(n, N_1\right)]\!]$.
En effet, le nombre i de boules blanches tirées vérifie $0 \leq i \leq N_1$ et $0 \leq n - i \leq N_2$, soit $n - N_2 \leq i \leq n$.

Loi hypergéométrique

Une urne contient N boules dont N_1 blanches et N_2 noires.
On tire n boules sans remise.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues.
$X(\Omega) = [\![max\left(0, n - N_2\right), min\left(n, N_1\right)]\!]$.
En effet, le nombre i de boules blanches tirées vérifie $0 \leq i \leq N_1$ et $0 \leq n - i \leq N_2$, soit $n - N_2 \leq i \leq n$.
$\forall i \in X(\Omega),\ P\left(X = i\right) = \dfrac{C_{N_1}^{i}\, C_{N_2}^{n-i}}{C_N^n}$ avec $N_2 = N - N_1$.

Variable aléatoire discrète : lois de probabilité usuelles

Loi hypergéométrique

Une urne contient N boules dont N_1 blanches et N_2 noires.
On tire n boules sans remise.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues.
$X(\Omega) = [\![max\left(0, n - N_2\right), min\left(n, N_1\right)]\!]$.
En effet, le nombre i de boules blanches tirées vérifie $0 \leq i \leq N_1$ et $0 \leq n - i \leq N_2$, soit $n - N_2 \leq i \leq n$.
$\forall i \in X(\Omega)$, $P\left(X = i\right) = \dfrac{C_{N_1}^{i} C_{N_2}^{n-i}}{C_N^n}$ avec $N_2 = N - N_1$.

Exemples

Variable aléatoire discrète : lois de probabilité usuelles

Loi hypergéométrique

Une urne contient N boules dont N_1 blanches et N_2 noires.
On tire n boules sans remise.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues.
$X(\Omega) = \llbracket max\left(0, n - N_2\right), min\left(n, N_1\right)\rrbracket$.
En effet, le nombre i de boules blanches tirées vérifie $0 \leq i \leq N_1$ et $0 \leq n - i \leq N_2$, soit $n - N_2 \leq i \leq n$.
$\forall i \in X(\Omega),\ P\left(X = i\right) = \dfrac{C_{N_1}^{i} C_{N_2}^{n-i}}{C_N^n}$ avec $N_2 = N - N_1$.

Exemples

En prenant $N_1 = 5$, $N_2 = 10$ et $n = 3$, on a $X(\Omega) = \llbracket 0, 3\rrbracket$.

Loi hypergéométrique

Une urne contient N boules dont N_1 blanches et N_2 noires.
On tire n boules sans remise.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues.
$X(\Omega) = [\![max\left(0, n - N_2\right), min\left(n, N_1\right)]\!]$.
En effet, le nombre i de boules blanches tirées vérifie $0 \leq i \leq N_1$ et $0 \leq n - i \leq N_2$, soit $n - N_2 \leq i \leq n$.
$\forall i \in X(\Omega),\ P\left(X = i\right) = \dfrac{C_{N_1}^{i}\, C_{N_2}^{n-i}}{C_N^n}$ avec $N_2 = N - N_1$.

Exemples

En prenant $N_1 = 5$, $N_2 = 10$ et $n = 3$, on a $X(\Omega) = [\![0, 3]\!]$.
Et $P\left(X = 2\right) = \dfrac{C_5^2\, C_{10}^{3-2}}{C_{15}^3} \approx 0,2198$

Variable aléatoire discrète : lois de probabilité usuelles

Loi hypergéométrique

Une urne contient N boules dont N_1 blanches et N_2 noires.
On tire n boules sans remise.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues.
$X(\Omega) = [\![max\left(0, n - N_2\right), min\left(n, N_1\right)]\!]$.
En effet, le nombre i de boules blanches tirées vérifie $0 \leq i \leq N_1$ et $0 \leq n - i \leq N_2$, soit $n - N_2 \leq i \leq n$.
$\forall i \in X(\Omega),\ P\left(X = i\right) = \dfrac{C_{N_1}^{i} C_{N_2}^{n-i}}{C_N^n}$ avec $N_2 = N - N_1$.

Exemples

En prenant $N_1 = 5$, $N_2 = 10$ et $n = 3$, on a $X(\Omega) = [\![0, 3]\!]$.
Et $P\left(X = 2\right) = \dfrac{C_5^2 C_{10}^{3-2}}{C_{15}^3} \approx 0,2198$
Avec $N_1 = 13$, $N_2 = 2$ et $n = 3$, on a $X(\Omega) = [\![1, 3]\!]$.

Variable aléatoire discrète : lois de probabilité usuelles

Loi hypergéométrique

Loi hypergéométrique

Soit N, n et N_1 trois entiers, $N \geq 2$, $1 \leq n$, $1 \leq N_1 < N$.

Loi hypergéométrique

Soit N, n et N_1 trois entiers, $N \geq 2$, $1 \leq n$, $1 \leq N_1 < N$. On note $p = \dfrac{N_1}{N}$.

Variable aléatoire discrète : lois de probabilité usuelles

Loi hypergéométrique

Soit N, n et N_1 trois entiers, $N \geq 2$, $1 \leq n$, $1 \leq N_1 < N$. On note $p = \dfrac{N_1}{N}$.

Une variable aléatoire X suit la loi hypergéométrique $\mathcal{H}(N, n, p)$ de paramètres N, n et p sur $[\![0, n]\!]$ si

Loi hypergéométrique

Soit N, n et N_1 trois entiers, $N \geq 2$, $1 \leq n$, $1 \leq N_1 < N$. On note $p = \dfrac{N_1}{N}$.
Une variable aléatoire X suit la loi hypergéométrique $\mathcal{H}(N, n, p)$ de paramètres N, n et p sur $[\![0, n]\!]$ si
α) $X(\Omega) = [\![max\,(0, n - N_2)\,, min\,(n, N_1)]\!]$

Variable aléatoire discrète : lois de probabilité usuelles

Loi hypergéométrique

Soit N, n et N_1 trois entiers, $N \geq 2$, $1 \leq n$, $1 \leq N_1 < N$. On note $p = \dfrac{N_1}{N}$.

Une variable aléatoire X suit la loi hypergéométrique $\mathcal{H}(N, n, p)$ de paramètres N, n et p sur $[\![0, n]\!]$ si

$\alpha)$ $X(\Omega) = [\![max\,(0, n - N_2)\,, min\,(n, N_1)]\!]$

$\beta)$ $\forall i \in X(\Omega)$, $P\,(X = i) = \dfrac{C_{N_1}^{i}\,C_{N_2}^{n-i}}{C_N^n}$ avec $N_1 = Np$ et $N_2 = N - N_1$.

Variable aléatoire discrète : lois de probabilité usuelles

Loi hypergéométrique

Soit N, n et N_1 trois entiers, $N \geq 2$, $1 \leq n$, $1 \leq N_1 < N$. On note $p = \dfrac{N_1}{N}$.
Une variable aléatoire X suit la loi hypergéométrique $\mathcal{H}(N, n, p)$ de paramètres N, n et p sur $[\![0, n]\!]$ si
α) $X(\Omega) = [\![max\left(0, n - N_2\right), min\left(n, N_1\right)]\!]$
β) $\forall i \in X(\Omega)$, $P\left(X = i\right) = \dfrac{C_{N_1}^{i} C_{N_2}^{n-i}}{C_N^n}$ avec $N_1 = Np$ et $N_2 = N - N_1$.
$E\left(X\right) = np$

Variable aléatoire discrète : lois de probabilité usuelles

Loi hypergéométrique

Soit N, n et N_1 trois entiers, $N \geq 2$, $1 \leq n$, $1 \leq N_1 < N$. On note $p = \dfrac{N_1}{N}$.

Une variable aléatoire X suit la loi hypergéométrique $\mathcal{H}(N, n, p)$ de paramètres N, n et p sur $[\![0, n]\!]$ si

α) $X(\Omega) = [\![max\left(0, n - N_2\right), min\left(n, N_1\right)]\!]$

β) $\forall i \in X(\Omega)$, $P\left(X = i\right) = \dfrac{C_{N_1}^{i} C_{N_2}^{n-i}}{C_N^n}$ avec $N_1 = Np$ et $N_2 = N - N_1$.

$E\left(X\right) = np$

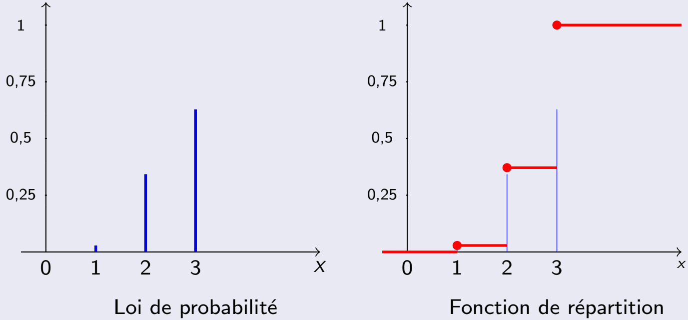
$V\left(X\right) = \dfrac{N-n}{N-1} np(1-p) = \dfrac{N-n}{N-1} npq$ en posant $q = 1 - p$.

Variable aléatoire discrète : lois de probabilité usuelles

Loi hypergéométrique : $X \sim \mathcal{H}\left(15, 3, \frac{13}{15}\right)$

Variable aléatoire discrète : lois de probabilité usuelles

Loi hypergéométrique : $X \sim \mathcal{H}\left(15, 3, \frac{13}{15}\right)$



On tire sans remise 3 boules dans une urne contenant 13 boules blanches et 2 boules noires. X est le nombre de boules blanches tirées.

Loi hypergéométrique : remarques

Loi hypergéométrique : remarques

1. L'espérance np de la loi $\mathcal{H}(N, n, p)$ est indépendante de N et est la même que celle de la loi $\mathcal{B}(n, p)$.

Variable aléatoire discrète : lois de probabilité usuelles

Loi hypergéométrique : remarques

1. L'espérance np de la loi $\mathcal{H}(N, n, p)$ est indépendante de N et est la même que celle de la loi $\mathcal{B}(n, p)$.
2. La variance $\dfrac{N-n}{N-1}npq$ de la loi $\mathcal{H}(N, n, p)$ tend vers la variance npq de la loi $\mathcal{B}(n, p)$ quand $N \to +\infty$.

Variable aléatoire discrète : lois de probabilité usuelles

Loi hypergéométrique : remarques

1. L'espérance np de la loi $\mathcal{H}(N, n, p)$ est indépendante de N et est la même que celle de la loi $\mathcal{B}(n, p)$.
2. La variance $\dfrac{N-n}{N-1}npq$ de la loi $\mathcal{H}(N, n, p)$ tend vers la variance npq de la loi $\mathcal{B}(n, p)$ quand $N \to +\infty$.
3. $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \frac{C_{N_1}^{i} C_{N_2}^{n-i}}{C_N^n} = C_n^i p^i q^{n-i}$.

Variable aléatoire discrète : lois de probabilité usuelles

Loi hypergéométrique : remarques

1. L'espérance np de la loi $\mathcal{H}(N, n, p)$ est indépendante de N et est la même que celle de la loi $\mathcal{B}(n, p)$.
2. La variance $\dfrac{N-n}{N-1}npq$ de la loi $\mathcal{H}(N, n, p)$ tend vers la variance npq de la loi $\mathcal{B}(n, p)$ quand $N \to +\infty$.
3. $\lim\limits_{N \to +\infty} \dfrac{C_{N_1}^{i} C_{N_2}^{n-i}}{C_N^n} = C_n^i p^i q^{n-i}$.

La loi $\mathcal{H}(N, n, p)$ tend vers la loi $\mathcal{B}(n, p)$ quand $N \to +\infty$.

Variable aléatoire discrète : lois de probabilité usuelles

Loi hypergéométrique : remarques

1. L'espérance np de la loi $\mathcal{H}(N, n, p)$ est indépendante de N et est la même que celle de la loi $\mathcal{B}(n, p)$.
2. La variance $\dfrac{N-n}{N-1}npq$ de la loi $\mathcal{H}(N, n, p)$ tend vers la variance npq de la loi $\mathcal{B}(n, p)$ quand $N \to +\infty$.
3. $\displaystyle\lim_{N \to +\infty} \frac{C_{N_1}^{i} C_{N_2}^{n-i}}{C_N^n} = C_n^i p^i q^{n-i}.$

La loi $\mathcal{H}(N, n, p)$ tend vers la loi $\mathcal{B}(n, p)$ quand $N \to +\infty$.
L'approximation est satisfaisante si $\dfrac{n}{N} < 0,05$.

Variable aléatoire discrète : lois de probabilité usuelles

Loi hypergéométrique : tirage sans ou avec remise

Variable aléatoire discrète : lois de probabilité usuelles

Loi hypergéométrique : tirage sans ou avec remise

Si on reprend le modèle de l'urne contenant N boules et où la proportion de boules blanches est p, lorsque N est grand et qu'on tire sans remise n boules de l'urne, la composition de l'urne n'est que très légèrement modifiée après chaque tirage.

Variable aléatoire discrète : lois de probabilité usuelles

Loi hypergéométrique : tirage sans ou avec remise

Si on reprend le modèle de l'urne contenant N boules et où la proportion de boules blanches est p, lorsque N est grand et qu'on tire sans remise n boules de l'urne, la composition de l'urne n'est que très légèrement modifiée après chaque tirage.
Tout se passe donc *presque* comme si les boules étaient tirées avec remise.

Variable aléatoire discrète : lois de probabilité usuelles

Loi de Poisson

Variable aléatoire discrète : lois de probabilité usuelles

Loi de Poisson

Soit $\lambda > 0$.

Loi de Poisson

Soit $\lambda > 0$.
Une variable aléatoire X suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ de paramètre λ si

Variable aléatoire discrète : lois de probabilité usuelles

Loi de Poisson

Soit $\lambda > 0$.
Une variable aléatoire X suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ de paramètre λ si
$\alpha)$ $X(\Omega) = \mathbb{N}$

Variable aléatoire discrète : lois de probabilité usuelles

Loi de Poisson

Soit $\lambda > 0$.

Une variable aléatoire X suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ de paramètre λ si

$\alpha)$ $X(\Omega) = \mathbb{N}$

$\beta)$ $\forall i \geq 0,\ P(X = i) = e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^i}{i!}$

Variable aléatoire discrète : lois de probabilité usuelles

Loi de Poisson

Soit $\lambda > 0$.
Une variable aléatoire X suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ de paramètre λ si

α) $X(\Omega) = \mathbb{N}$

β) $\forall i \geq 0,\ P(X = i) = e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^i}{i!}$

$E(X) = \lambda$

Variable aléatoire discrète : lois de probabilité usuelles

Loi de Poisson

Soit $\lambda > 0$.
Une variable aléatoire X suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ de paramètre λ si
α) $X(\Omega) = \mathbb{N}$
β) $\forall i \geq 0,\ P(X = i) = e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^i}{i!}$
$E(X) = \lambda$
$V(X) = \lambda$

Variable aléatoire discrète : lois de probabilité usuelles

Loi de Poisson

Soit $\lambda > 0$.
Une variable aléatoire X suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ de paramètre λ si

α) $X(\Omega) = \mathbb{N}$

β) $\forall i \geq 0,\ P(X = i) = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^i}{i!}$

$E(X) = \lambda$

$V(X) = \lambda$

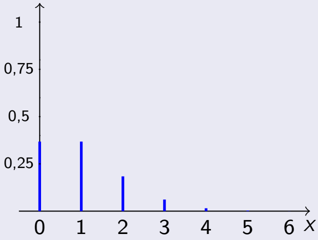
Siméon Denis Poisson (1781-1840) : mathématicien français.

Variable aléatoire discrète : lois de probabilité usuelles

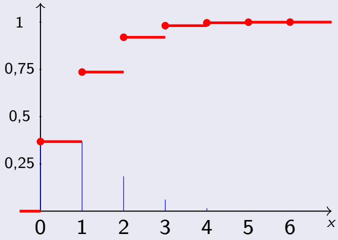
Loi de Poisson : $X \sim \mathcal{P}(1)$

Variable aléatoire discrète : lois de probabilité usuelles

Loi de Poisson : $X \sim \mathcal{P}(1)$



Loi de probabilité



Fonction de répartition

Variable aléatoire discrète : lois de probabilité usuelles

Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson

Variable aléatoire discrète : lois de probabilité usuelles

Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson

Pour n et i grands et p petit, le calcul de $C_n^i p^i (1-p)^{n-i}$ est délicat.

Variable aléatoire discrète : lois de probabilité usuelles

Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson

Pour n et i grands et p petit, le calcul de $C_n^i p^i (1-p)^{n-i}$ est délicat.
On va chercher une approximation en se plaçant dans le cas où lorsque n tend vers $+\infty$, p tend vers 0 et l'espérance np de la loi binomiale tend vers une constante λ.

Variable aléatoire discrète : lois de probabilité usuelles

Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson

Pour n et i grands et p petit, le calcul de $C_n^i p^i (1-p)^{n-i}$ est délicat.
On va chercher une approximation en se plaçant dans le cas où lorsque n tend vers $+\infty$, p tend vers 0 et l'espérance np de la loi binomiale tend vers une constante λ.
Démonstration en annexe.

Variable aléatoire discrète : lois de probabilité usuelles

Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson

Variable aléatoire discrète : lois de probabilité usuelles

Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson

On obtient alors $\lim\limits_{n \to +\infty} C_n^i p^i (1-p)^{n-i} = e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^i}{i!}$.

Variable aléatoire discrète : lois de probabilité usuelles

Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson

On obtient alors $\lim\limits_{n \to +\infty} C_n^i p^i (1-p)^{n-i} = e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^i}{i!}$.

On dit alors que la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ tend vers la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$.

Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson

On obtient alors $\lim_{n \to +\infty} C_n^i p^i (1-p)^{n-i} = e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^i}{i!}$.

On dit alors que la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ tend vers la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$.

Ce résultat permet de remplacer numériquement la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ par la loi de Poisson $\mathcal{P}(np)$ lorsque n est grand, p petit et np de l'ordre de quelques unités.

Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson

On obtient alors $\lim_{n \to +\infty} C_n^i p^i (1-p)^{n-i} = e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^i}{i!}$.
On dit alors que la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ tend vers la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$.
Ce résultat permet de remplacer numériquement la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ par la loi de Poisson $\mathcal{P}(np)$ lorsque n est grand, p petit et np de l'ordre de quelques unités.
On utilise numériquement l'approximation de Poisson dans les conditions suivantes :

R3.08 Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Plan

Variable aléatoire

Variable aléatoire réelle

Variable aléatoire discrète

Variable aléatoire continue

Complément

Annexe : autres lois

Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson

On obtient alors $\lim\limits_{n \to +\infty} C_n^i p^i (1-p)^{n-i} = e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^i}{i!}$.

On dit alors que la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ tend vers la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$.

Ce résultat permet de remplacer numériquement la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ par la loi de Poisson $\mathcal{P}(np)$ lorsque n est grand, p petit et np de l'ordre de quelques unités.

On utilise numériquement l'approximation de Poisson dans les conditions suivantes :

$n \geq 30$, $p \leq 0,1$, $np \leq 10$, i petit devant n (événements rares).

Approximation d'une loi par une autre

Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson : exemple

Approximation d'une loi par une autre

Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson : exemple

$\mathcal{B}(50,\ 0,05)$ approchée par $\mathcal{P}(2,5)$ ($np = 50 \times 0,05 = 2,5$)

Approximation d'une loi par une autre

Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson : exemple

$\mathcal{B}(50,\ 0,05)$ approchée par $\mathcal{P}(2,5)$ $(np = 50 \times 0,05 = 2,5)$

$$C_n^i p^i (1-p)^{n-i} \approx e^{-np} \frac{(np)^i}{i!}$$

Approximation d'une loi par une autre

Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson : exemple

$\mathcal{B}(50,\ 0,05)$ approchée par $\mathcal{P}(2,5)$ $(np = 50 \times 0,05 = 2,5)$

$$C_n^i p^i (1-p)^{n-i} \approx e^{-np} \frac{(np)^i}{i!}$$

$$C_{50}^i 0,05^i (1-0,05)^{50-i} \approx e^{-2,5} \frac{2,5^i}{i!}$$

Approximation d'une loi par une autre

Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson : exemple

$\mathcal{B}(50,\ 0,05)$ approchée par $\mathcal{P}(2,5)$ ($np = 50 \times 0,05 = 2,5$)

$$C_n^i p^i (1-p)^{n-i} \approx e^{-np} \frac{(np)^i}{i!}$$

$$C_{50}^i 0,05^i (1-0,05)^{50-i} \approx e^{-2,5} \frac{2,5^i}{i!}$$

$$C_{50}^3 0,05^3 (1-0,05)^{50-3} \approx 0,2199$$

Approximation d'une loi par une autre

Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson : exemple

$\mathcal{B}(50,\ 0,05)$ approchée par $\mathcal{P}(2,5)$ $(np = 50 \times 0,05 = 2,5)$

$$C_n^i p^i (1-p)^{n-i} \approx e^{-np} \frac{(np)^i}{i!}$$

$$C_{50}^i 0,05^i (1-0,05)^{50-i} \approx e^{-2,5} \frac{2,5^i}{i!}$$

$$C_{50}^3 0,05^3 (1-0,05)^{50-3} \approx 0,2199$$

$$e^{-2,5} \frac{2,5^3}{3!} \approx 0,2138$$

Approximation d'une loi par une autre

Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson : exemple

Approximation d'une loi par une autre

R3.08
Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Plan

Variable aléatoire

Variable aléatoire réelle

Variable aléatoire discrète

Variable aléatoire continue

Complément

Annexe : autres lois

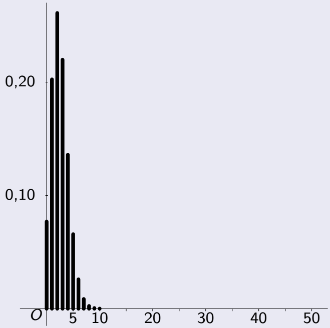
Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson : exemple

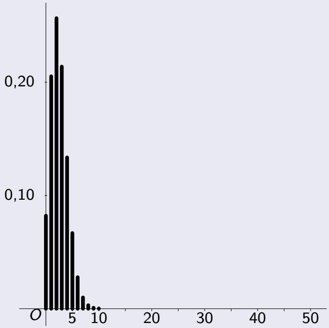
$\mathcal{B}(50,\ 0,05)$ approchée par $\mathcal{P}(2,5)$

Approximation d'une loi par une autre

Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson : exemple

$\mathcal{B}(50,\ 0,05)$ approchée par $\mathcal{P}(2,5)$





Variable aléatoire discrète : couple de variables aléatoires

Loi conjointe

Variable aléatoire discrète : couple de variables aléatoires

Loi conjointe

Soit $(\Omega,\ \mathcal{T},\ P)$ un espace probabilisé associé à une expérience aléatoire et X et Y deux variables aléatoires discrètes.

Variable aléatoire discrète : couple de variables aléatoires

Loi conjointe

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé associé à une expérience aléatoire et X et Y deux variables aléatoires discrètes.
La loi conjointe de X et de Y, ou loi du couple ou du vecteur (X, Y) est la donnée de

Variable aléatoire discrète : couple de variables aléatoires

Loi conjointe

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé associé à une expérience aléatoire et X et Y deux variables aléatoires discrètes.
La loi conjointe de X et de Y, ou loi du couple ou du vecteur (X, Y) est la donnée de
$\alpha)$ $X(\Omega) = \{x_i, \ i \in I\}$, $Y(\Omega) = \{y_j, \ j \in J\}$

Variable aléatoire discrète : couple de variables aléatoires

Loi conjointe

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé associé à une expérience aléatoire et X et Y deux variables aléatoires discrètes.
La loi conjointe de X et de Y, ou loi du couple ou du vecteur (X, Y) est la donnée de
$\alpha)$ $X(\Omega) = \{x_i, \ i \in I\}$, $Y(\Omega) = \{y_j, \ j \in J\}$
$\beta)$ $\forall i \in I, j \in J \ p_{ij} = P((X = x_i) \cap (Y = y_j))$

Variable aléatoire discrète : couple de variables aléatoires

R3.08 Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Plan

Variable aléatoire

Variable aléatoire réelle

Variable aléatoire discrète

Variable aléatoire continue

Complément

Annexe : autres lois

Loi conjointe

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé associé à une expérience aléatoire et X et Y deux variables aléatoires discrètes.
La loi conjointe de X et de Y, ou loi du couple ou du vecteur (X, Y) est la donnée de
$\alpha)$ $X(\Omega) = \{x_i, \ i \in I\}$, $Y(\Omega) = \{y_j, \ j \in J\}$
$\beta)$ $\forall i \in I, j \in J \ p_{ij} = P((X = x_i) \cap (Y = y_j))$

Remarques

Variable aléatoire discrète : couple de variables aléatoires

Loi conjointe

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé associé à une expérience aléatoire et X et Y deux variables aléatoires discrètes.
La loi conjointe de X et de Y, ou loi du couple ou du vecteur (X, Y) est la donnée de
α) $X(\Omega) = \{x_i,\ i \in I\}$, $Y(\Omega) = \{y_j,\ j \in J\}$
β) $\forall i \in I, j \in J$ $p_{ij} = P((X = x_i) \cap (Y = y_j))$

Remarques

$$\sum_{i \in I, j \in J} p_{ij} = 1$$

Variable aléatoire discrète : couple de variables aléatoires

Loi conjointe

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé associé à une expérience aléatoire et X et Y deux variables aléatoires discrètes.
La loi conjointe de X et de Y, ou loi du couple ou du vecteur (X, Y) est la donnée de
$\alpha)$ $X(\Omega) = \{x_i,\ i \in I\}$, $Y(\Omega) = \{y_j,\ j \in J\}$
$\beta)$ $\forall i \in I, j \in J$ $p_{ij} = P((X = x_i) \cap (Y = y_j))$

Remarques

$$\sum_{i \in I, j \in J} p_{ij} = 1$$

$\forall A \subset \mathbb{R}, B \subset \mathbb{R}$

$$P((X \in A) \cap (Y \in B)) = \sum_{x_i \in A, y_j \in B} P((X = x_i) \cap (Y = y_j))$$

Variable aléatoire discrète : couple de variables aléatoires

Lois marginales

Variable aléatoire discrète : couple de variables aléatoires

Lois marginales

Les lois marginales de X et de Y sont respectivement données par :

Variable aléatoire discrète : couple de variables aléatoires

Lois marginales

Les lois marginales de X et de Y sont respectivement données par :
α) $\forall i \in I$,

$$P(X = x_i) = p_{i.} = \sum_{j \in J} P((X = x_i) \cap (Y = y_j)) = \sum_{j \in J} p_{ij}$$

Variable aléatoire discrète : couple de variables aléatoires

Lois marginales

Les lois marginales de X et de Y sont respectivement données par :

α) $\forall i \in I$,

$$P(X = x_i) = p_{i.} = \sum_{j \in J} P((X = x_i) \cap (Y = y_j)) = \sum_{j \in J} p_{ij}$$

β) $\forall j \in J$,

$$P(Y = y_j) = p_{.j} = \sum_{i \in I} P((X = x_i) \cap (Y = y_j)) = \sum_{i \in I} p_{ij}$$

Variable aléatoire discrète : couple de variables aléatoires

Exemple

Variable aléatoire discrète : couple de variables aléatoires

Exemple

Une urne $\mathcal{U}_1$ contient un jeton numéroté 1, un jeton numéroté 2 et un jeton numéroté 3.

Variable aléatoire discrète : couple de variables aléatoires

R3.08 Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Plan

Variable aléatoire

Variable aléatoire réelle

Variable aléatoire discrète

Variable aléatoire continue

Complément

Annexe : autres lois

Exemple

Une urne $\mathcal{U}_1$ contient un jeton numéroté 1, un jeton numéroté 2 et un jeton numéroté 3.
Une urne $\mathcal{U}_2$ contient un jeton numéroté 1 et un jeton numéroté 2.

Variable aléatoire discrète : couple de variables aléatoires

Exemple

Une urne $\mathcal{U}_1$ contient un jeton numéroté 1, un jeton numéroté 2 et un jeton numéroté 3.
Une urne $\mathcal{U}_2$ contient un jeton numéroté 1 et un jeton numéroté 2.
On tire au hasard un jeton dans l'urne $\mathcal{U}_1$ puis un jeton dans l'urne $\mathcal{U}_2$.

Variable aléatoire discrète : couple de variables aléatoires

Exemple

Une urne $\mathcal{U}_1$ contient un jeton numéroté 1, un jeton numéroté 2 et un jeton numéroté 3.
Une urne $\mathcal{U}_2$ contient un jeton numéroté 1 et un jeton numéroté 2.
On tire au hasard un jeton dans l'urne $\mathcal{U}_1$ puis un jeton dans l'urne $\mathcal{U}_2$.
On note X le numéro du premier jeton et Y le numéro du deuxième.

Variable aléatoire discrète : couple de variables aléatoires

Exemple

Une urne $\mathcal{U}_1$ contient un jeton numéroté 1, un jeton numéroté 2 et un jeton numéroté 3.
Une urne $\mathcal{U}_2$ contient un jeton numéroté 1 et un jeton numéroté 2.
On tire au hasard un jeton dans l'urne $\mathcal{U}_1$ puis un jeton dans l'urne $\mathcal{U}_2$.
On note X le numéro du premier jeton et Y le numéro du deuxième.
$\Omega = \{1, 2, 3\} \times \{1, 2\} = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2)\}$

Variable aléatoire discrète : couple de variables aléatoires

Exemple

Une urne $\mathcal{U}_1$ contient un jeton numéroté 1, un jeton numéroté 2 et un jeton numéroté 3.
Une urne $\mathcal{U}_2$ contient un jeton numéroté 1 et un jeton numéroté 2.
On tire au hasard un jeton dans l'urne $\mathcal{U}_1$ puis un jeton dans l'urne $\mathcal{U}_2$.
On note X le numéro du premier jeton et Y le numéro du deuxième.
$\Omega = \{1, 2, 3\} \times \{1, 2\} = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2)\}$
$X(\Omega) = \{1, 2, 3\}$

Variable aléatoire discrète : couple de variables aléatoires

Exemple

Une urne $\mathcal{U}_1$ contient un jeton numéroté 1, un jeton numéroté 2 et un jeton numéroté 3.
Une urne $\mathcal{U}_2$ contient un jeton numéroté 1 et un jeton numéroté 2.
On tire au hasard un jeton dans l'urne $\mathcal{U}_1$ puis un jeton dans l'urne $\mathcal{U}_2$.
On note X le numéro du premier jeton et Y le numéro du deuxième.
$\Omega = \{1, 2, 3\} \times \{1, 2\} = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2)\}$
$X(\Omega) = \{1, 2, 3\}$
$Y(\Omega) = \{1, 2\}$

Variable aléatoire discrète : couple de variables aléatoires

Exemple

Exemple

ω	$(1,1)$	$(1,2)$	$(2,1)$	$(2,2)$	$(3,1)$	$(3,2)$
$X(\omega)$	1	1	2	2	3	3
$Y(\omega)$	1	2	1	2	1	2

Variable aléatoire discrète : couple de variables aléatoires

Exemple

ω	$(1,1)$	$(1,2)$	$(2,1)$	$(2,2)$	$(3,1)$	$(3,2)$
$X(\omega)$	1	1	2	2	3	3
$Y(\omega)$	1	2	1	2	1	2

L'équiprobabilité sur Ω donne :

Exemple

ω	$(1,1)$	$(1,2)$	$(2,1)$	$(2,2)$	$(3,1)$	$(3,2)$
$X(\omega)$	1	1	2	2	3	3
$Y(\omega)$	1	2	1	2	1	2

L'équiprobabilité sur Ω donne :

$p_{11} = P((X=1) \cap (Y=1)) = P(1,1) = \frac{1}{6}$,

Variable aléatoire discrète : couple de variables aléatoires

Exemple

ω	$(1,1)$	$(1,2)$	$(2,1)$	$(2,2)$	$(3,1)$	$(3,2)$
$X(\omega)$	1	1	2	2	3	3
$Y(\omega)$	1	2	1	2	1	2

L'équiprobabilité sur Ω donne :

$p_{11} = P((X=1)\cap(Y=1)) = P(1,1) = \frac{1}{6}$,

$p_{12} = P((X=1)\cap(Y=2)) = P(1,2) = \frac{1}{6}$

Variable aléatoire discrète : couple de variables aléatoires

Exemple

ω	$(1,1)$	$(1,2)$	$(2,1)$	$(2,2)$	$(3,1)$	$(3,2)$
$X(\omega)$	1	1	2	2	3	3
$Y(\omega)$	1	2	1	2	1	2

L'équiprobabilité sur Ω donne :

$p_{11} = P\left((X=1)\cap(Y=1)\right) = P(1,1) = \frac{1}{6}$,
$p_{12} = P\left((X=1)\cap(Y=2)\right) = P(1,2) = \frac{1}{6}$
...

Variable aléatoire discrète : couple de variables aléatoires

Exemple

Variable aléatoire discrète : couple de variables aléatoires

Exemple

Loi conjointe et lois marginales

Variable aléatoire discrète : couple de variables aléatoires

Exemple

Loi conjointe et lois marginales

X/Y	1	2	$p_{i.}$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
3	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
$p_{.j}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

Variable aléatoire discrète : couple de variables aléatoires

Lois conditionnelles

Variable aléatoire discrète : couple de variables aléatoires

Lois conditionnelles

Les lois conditionnelles de X par rapport à Y et de Y par rapport à X sont respectivement données par :

Variable aléatoire discrète : couple de variables aléatoires

Lois conditionnelles

Les lois conditionnelles de X par rapport à Y et de Y par rapport à X sont respectivement données par :

α**)** $\forall i \in I$,

$$P\left(X = x_i / Y = y_j\right) = \frac{P\left(\left(X = x_i\right) \cap \left(Y = y_j\right)\right)}{P\left(Y = y_j\right)} = \frac{p_{ij}}{p_{.j}}$$

Variable aléatoire discrète : couple de variables aléatoires

Lois conditionnelles

Les lois conditionnelles de X par rapport à Y et de Y par rapport à X sont respectivement données par :

α) $\forall i \in I$,

$$P\left(X = x_i / Y = y_j\right) = \frac{P\left(\left(X = x_i\right) \cap \left(Y = y_j\right)\right)}{P\left(Y = y_j\right)} = \frac{p_{ij}}{p_{.j}}$$

β) $\forall j \in J$,

$$P\left(Y = y_j / X = x_i\right) = \frac{P\left(\left(X = x_i\right) \cap \left(Y = y_j\right)\right)}{P\left(X = x_i\right)} = \frac{p_{ij}}{p_{i.}}$$

Variable aléatoire discrète : couple de variables aléatoires

Exemple

Variable aléatoire discrète : couple de variables aléatoires

Exemple

$$P\left(X=1/Y=1\right)=\frac{p_{11}}{p_{.1}}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}$$

Exemple

$$P(X = 1/Y = 1) = \frac{p_{11}}{p_{.1}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$$

$$P(X = 2/Y = 1) = \frac{p_{21}}{p_{.1}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$$

Exemple

$$P(X = 1/Y = 1) = \frac{p_{11}}{p_{.1}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$$

$$P(X = 2/Y = 1) = \frac{p_{21}}{p_{.1}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$$

$$P(X = 3/Y = 1) = \frac{p_{31}}{p_{.1}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$$

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Loi de probabilité

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Loi de probabilité

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé associé à une expérience aléatoire et $X = (X_1, X_2, \cdots, X_n)$ un vecteur aléatoire (suite de n variables aléatoires discrètes sur Ω).

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Loi de probabilité

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé associé à une expérience aléatoire et $X = (X_1, X_2, \cdots, X_n)$ un vecteur aléatoire (suite de n variables aléatoires discrètes sur Ω).
La loi de probabilité de $X = (X_1, X_2, \cdots, X_n)$ est la donnée de

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Loi de probabilité

Soit $(\Omega,\ \mathcal{T},\ P)$ un espace probabilisé associé à une expérience aléatoire et $X = (X_1, X_2, \cdots, X_n)$ un vecteur aléatoire (suite de n variables aléatoires discrètes sur Ω).

La loi de probabilité de $X = (X_1, X_2, \cdots, X_n)$ est la donnée de

α) $X_1(\Omega)$, $X_2(\Omega)$, ..., $X_n(\Omega)$

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Loi de probabilité

Soit $(\Omega,\ \mathcal{T},\ P)$ un espace probabilisé associé à une expérience aléatoire et $X = (X_1, X_2, \cdots, X_n)$ un vecteur aléatoire (suite de n variables aléatoires discrètes sur Ω).

La loi de probabilité de $X = (X_1, X_2, \cdots, X_n)$ est la donnée de

$\alpha)$ $X_1(\Omega)$, $X_2(\Omega)$, ..., $X_n(\Omega)$

$\beta)$ $P((X_1 = x_1) \cap (X_2 = x_2) \cap \cdots \cap (X_n = x_n))$

$\forall (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in X_1(\Omega) \times X_2(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega)$

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Loi de probabilité

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé associé à une expérience aléatoire et $X = (X_1, X_2, \cdots, X_n)$ un vecteur aléatoire (suite de n variables aléatoires discrètes sur Ω).
La loi de probabilité de $X = (X_1, X_2, \cdots, X_n)$ est la donnée de
α) $X_1(\Omega)$, $X_2(\Omega)$, ..., $X_n(\Omega)$
β) $P((X_1 = x_1) \cap (X_2 = x_2) \cap \cdots \cap (X_n = x_n))$
$\forall (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in X_1(\Omega) \times X_2(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega)$

Remarque

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Loi de probabilité

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé associé à une expérience aléatoire et $X = (X_1, X_2, \cdots, X_n)$ un vecteur aléatoire (suite de n variables aléatoires discrètes sur Ω).

La loi de probabilité de $X = (X_1, X_2, \cdots, X_n)$ est la donnée de

α) $X_1(\Omega)$, $X_2(\Omega)$, ..., $X_n(\Omega)$

β) $P((X_1 = x_1) \cap (X_2 = x_2) \cap \cdots \cap (X_n = x_n))$

$\forall (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in X_1(\Omega) \times X_2(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega)$

Remarque

$$\sum_{x_i \in X_i(\Omega)} P((X_1 = x_1) \cap (X_2 = x_2) \cap \cdots \cap (X_n = x_n)) = 1$$

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Lois marginales, lois conditionnelles

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Lois marginales, lois conditionnelles

On généralise les définitions des lois marginales et conditionnelles d'un couple au cas d'un vecteur $X = (X_1, X_2, \cdots, X_n)$.

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Exemple

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

R3.08 Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Exemple

On note X_1 le numéro du premier jeton, X_2 le numéro du deuxième et X_3 le nombre de 1.

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Exemple

On note X_1 le numéro du premier jeton, X_2 le numéro du deuxième et X_3 le nombre de 1.
$\Omega = \{1,2,3\} \times \{1,2\} = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,1),(3,2)\}$

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Exemple

On note X_1 le numéro du premier jeton, X_2 le numéro du deuxième et X_3 le nombre de 1.
$\Omega = \{1, 2, 3\} \times \{1, 2\} = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2)\}$
Loi de probabilité de $X = (X_1, X_2, X_3)$:

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Exemple

On note X_1 le numéro du premier jeton, X_2 le numéro du deuxième et X_3 le nombre de 1.

$\Omega = \{1, 2, 3\} \times \{1, 2\} = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2)\}$

Loi de probabilité de $X = (X_1, X_2, X_3)$:

$X_1(\Omega) = \{1, 2, 3\}$, $X_2(\Omega) = \{1, 2\}$, $X_3(\Omega) = \{0, 1, 2\}$

Exemple

On note X_1 le numéro du premier jeton, X_2 le numéro du deuxième et X_3 le nombre de 1.
$\Omega = \{1,2,3\} \times \{1,2\} = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,1),(3,2)\}$
Loi de probabilité de $X = (X_1, X_2, X_3)$:
$X_1(\Omega) = \{1,2,3\}$, $X_2(\Omega) = \{1,2\}$, $X_3(\Omega) = \{0,1,2\}$
On précise $P((X_1 = i) \cap (X_2 = j) \cap (X_3 = k))$ pour $(i,j,k) \in X_1(\Omega) \times X_2(\Omega) \times X_3(\Omega)$

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Exemple

On note X_1 le numéro du premier jeton, X_2 le numéro du deuxième et X_3 le nombre de 1.

$\Omega = \{1,2,3\} \times \{1,2\} = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,1),(3,2)\}$

Loi de probabilité de $X = (X_1, X_2, X_3)$:

$X_1(\Omega) = \{1,2,3\}$, $X_2(\Omega) = \{1,2\}$, $X_3(\Omega) = \{0,1,2\}$

On précise $P((X_1 = i) \cap (X_2 = j) \cap (X_3 = k))$ pour $(i,j,k) \in X_1(\Omega) \times X_2(\Omega) \times X_3(\Omega)$

$P((X_1 = 1) \cap (X_2 = 1) \cap (X_3 = 0)) = 0$

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Exemple

On note X_1 le numéro du premier jeton, X_2 le numéro du deuxième et X_3 le nombre de 1.

$\Omega = \{1,2,3\} \times \{1,2\} = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,1),(3,2)\}$

Loi de probabilité de $X = (X_1, X_2, X_3)$:

$X_1(\Omega) = \{1,2,3\}$, $X_2(\Omega) = \{1,2\}$, $X_3(\Omega) = \{0,1,2\}$

On précise $P((X_1 = i) \cap (X_2 = j) \cap (X_3 = k))$ pour $(i,j,k) \in X_1(\Omega) \times X_2(\Omega) \times X_3(\Omega)$

$P((X_1 = 1) \cap (X_2 = 1) \cap (X_3 = 0)) = 0$
$P((X_1 = 1) \cap (X_2 = 1) \cap (X_3 = 1)) = 0$

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Exemple

On note X_1 le numéro du premier jeton, X_2 le numéro du deuxième et X_3 le nombre de 1.

$\Omega = \{1,2,3\} \times \{1,2\} = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,1),(3,2)\}$

Loi de probabilité de $X = (X_1, X_2, X_3)$:

$X_1(\Omega) = \{1,2,3\}$, $X_2(\Omega) = \{1,2\}$, $X_3(\Omega) = \{0,1,2\}$

On précise $P((X_1 = i) \cap (X_2 = j) \cap (X_3 = k))$ pour $(i,j,k) \in X_1(\Omega) \times X_2(\Omega) \times X_3(\Omega)$

$P((X_1 = 1) \cap (X_2 = 1) \cap (X_3 = 0)) = 0$
$P((X_1 = 1) \cap (X_2 = 1) \cap (X_3 = 1)) = 0$
$P((X_1 = 1) \cap (X_2 = 1) \cap (X_3 = 2)) = \frac{1}{6}$

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Exemple

On note X_1 le numéro du premier jeton, X_2 le numéro du deuxième et X_3 le nombre de 1.

$\Omega = \{1,2,3\} \times \{1,2\} = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,1),(3,2)\}$

Loi de probabilité de $X = (X_1, X_2, X_3)$:

$X_1(\Omega) = \{1,2,3\}$, $X_2(\Omega) = \{1,2\}$, $X_3(\Omega) = \{0,1,2\}$

On précise $P((X_1 = i) \cap (X_2 = j) \cap (X_3 = k))$ pour $(i,j,k) \in X_1(\Omega) \times X_2(\Omega) \times X_3(\Omega)$

$P((X_1 = 1) \cap (X_2 = 1) \cap (X_3 = 0)) = 0$
$P((X_1 = 1) \cap (X_2 = 1) \cap (X_3 = 1)) = 0$
$P((X_1 = 1) \cap (X_2 = 1) \cap (X_3 = 2)) = \frac{1}{6}$
$P((X_1 = 1) \cap (X_2 = 2) \cap (X_3 = 0)) = 0$

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

R3.08 Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Exemple

On note X_1 le numéro du premier jeton, X_2 le numéro du deuxième et X_3 le nombre de 1.

$\Omega = \{1,2,3\} \times \{1,2\} = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,1),(3,2)\}$

Loi de probabilité de $X = (X_1, X_2, X_3)$:

$X_1(\Omega) = \{1,2,3\}$, $X_2(\Omega) = \{1,2\}$, $X_3(\Omega) = \{0,1,2\}$

On précise $P((X_1 = i) \cap (X_2 = j) \cap (X_3 = k))$ pour $(i,j,k) \in X_1(\Omega) \times X_2(\Omega) \times X_3(\Omega)$

$P((X_1 = 1) \cap (X_2 = 1) \cap (X_3 = 0)) = 0$

$P((X_1 = 1) \cap (X_2 = 1) \cap (X_3 = 1)) = 0$

$P((X_1 = 1) \cap (X_2 = 1) \cap (X_3 = 2)) = \frac{1}{6}$

$P((X_1 = 1) \cap (X_2 = 2) \cap (X_3 = 0)) = 0$

$P((X_1 = 1) \cap (X_2 = 2) \cap (X_3 = 1)) = \frac{1}{6}$

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Exemple

On note X_1 le numéro du premier jeton, X_2 le numéro du deuxième et X_3 le nombre de 1.

$\Omega = \{1,2,3\} \times \{1,2\} = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,1),(3,2)\}$

Loi de probabilité de $X = (X_1, X_2, X_3)$:

$X_1(\Omega) = \{1,2,3\}$, $X_2(\Omega) = \{1,2\}$, $X_3(\Omega) = \{0,1,2\}$

On précise $P((X_1 = i) \cap (X_2 = j) \cap (X_3 = k))$ pour $(i,j,k) \in X_1(\Omega) \times X_2(\Omega) \times X_3(\Omega)$

$P((X_1 = 1) \cap (X_2 = 1) \cap (X_3 = 0)) = 0$
$P((X_1 = 1) \cap (X_2 = 1) \cap (X_3 = 1)) = 0$
$P((X_1 = 1) \cap (X_2 = 1) \cap (X_3 = 2)) = \frac{1}{6}$
$P((X_1 = 1) \cap (X_2 = 2) \cap (X_3 = 0)) = 0$
$P((X_1 = 1) \cap (X_2 = 2) \cap (X_3 = 1)) = \frac{1}{6}$
$P((X_1 = 1) \cap (X_2 = 2) \cap (X_3 = 2)) = 0$

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Exemple

On note X_1 le numéro du premier jeton, X_2 le numéro du deuxième et X_3 le nombre de 1.

$\Omega = \{1,2,3\} \times \{1,2\} = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,1),(3,2)\}$

Loi de probabilité de $X = (X_1, X_2, X_3)$:

$X_1(\Omega) = \{1,2,3\}$, $X_2(\Omega) = \{1,2\}$, $X_3(\Omega) = \{0,1,2\}$

On précise $P((X_1 = i) \cap (X_2 = j) \cap (X_3 = k))$ pour $(i,j,k) \in X_1(\Omega) \times X_2(\Omega) \times X_3(\Omega)$

$P((X_1 = 1) \cap (X_2 = 1) \cap (X_3 = 0)) = 0$

$P((X_1 = 1) \cap (X_2 = 1) \cap (X_3 = 1)) = 0$

$P((X_1 = 1) \cap (X_2 = 1) \cap (X_3 = 2)) = \frac{1}{6}$

$P((X_1 = 1) \cap (X_2 = 2) \cap (X_3 = 0)) = 0$

$P((X_1 = 1) \cap (X_2 = 2) \cap (X_3 = 1)) = \frac{1}{6}$

$P((X_1 = 1) \cap (X_2 = 2) \cap (X_3 = 2)) = 0$

$P((X_1 = 2) \cap (X_2 = 1) \cap (X_3 = 0)) = 0$

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Exemple

On note X_1 le numéro du premier jeton, X_2 le numéro du deuxième et X_3 le nombre de 1.

$\Omega = \{1,2,3\} \times \{1,2\} = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,1),(3,2)\}$

Loi de probabilité de $X = (X_1, X_2, X_3)$:

$X_1(\Omega) = \{1,2,3\}$, $X_2(\Omega) = \{1,2\}$, $X_3(\Omega) = \{0,1,2\}$

On précise $P((X_1 = i) \cap (X_2 = j) \cap (X_3 = k))$ pour $(i,j,k) \in X_1(\Omega) \times X_2(\Omega) \times X_3(\Omega)$

$P((X_1 = 1) \cap (X_2 = 1) \cap (X_3 = 0)) = 0$
$P((X_1 = 1) \cap (X_2 = 1) \cap (X_3 = 1)) = 0$
$P((X_1 = 1) \cap (X_2 = 1) \cap (X_3 = 2)) = \frac{1}{6}$
$P((X_1 = 1) \cap (X_2 = 2) \cap (X_3 = 0)) = 0$
$P((X_1 = 1) \cap (X_2 = 2) \cap (X_3 = 1)) = \frac{1}{6}$
$P((X_1 = 1) \cap (X_2 = 2) \cap (X_3 = 2)) = 0$
$P((X_1 = 2) \cap (X_2 = 1) \cap (X_3 = 0)) = 0$
$P((X_1 = 2) \cap (X_2 = 1) \cap (X_3 = 1)) = \frac{1}{6}$

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Exemple

On note X_1 le numéro du premier jeton, X_2 le numéro du deuxième et X_3 le nombre de 1.

$\Omega = \{1,2,3\} \times \{1,2\} = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,1),(3,2)\}$

Loi de probabilité de $X = (X_1, X_2, X_3)$:

$X_1(\Omega) = \{1,2,3\}$, $X_2(\Omega) = \{1,2\}$, $X_3(\Omega) = \{0,1,2\}$

On précise $P((X_1 = i) \cap (X_2 = j) \cap (X_3 = k))$ pour $(i,j,k) \in X_1(\Omega) \times X_2(\Omega) \times X_3(\Omega)$

$P((X_1 = 1) \cap (X_2 = 1) \cap (X_3 = 0)) = 0$

$P((X_1 = 1) \cap (X_2 = 1) \cap (X_3 = 1)) = 0$

$P((X_1 = 1) \cap (X_2 = 1) \cap (X_3 = 2)) = \frac{1}{6}$

$P((X_1 = 1) \cap (X_2 = 2) \cap (X_3 = 0)) = 0$

$P((X_1 = 1) \cap (X_2 = 2) \cap (X_3 = 1)) = \frac{1}{6}$

$P((X_1 = 1) \cap (X_2 = 2) \cap (X_3 = 2)) = 0$

$P((X_1 = 2) \cap (X_2 = 1) \cap (X_3 = 0)) = 0$

$P((X_1 = 2) \cap (X_2 = 1) \cap (X_3 = 1)) = \frac{1}{6}$

$P((X_1 = 2) \cap (X_2 = 1) \cap (X_3 = 2)) = 0$

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Exemple

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

R3.08 Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Exemple

$P\left((X_1 = 2) \cap (X_2 = 2) \cap (X_3 = 0)\right) = \frac{1}{6}$

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Exemple

$P((X_1 = 2) \cap (X_2 = 2) \cap (X_3 = 0)) = \frac{1}{6}$
$P((X_1 = 2) \cap (X_2 = 2) \cap (X_3 = 1)) = 0$

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Exemple

$P\left((X_1 = 2) \cap (X_2 = 2) \cap (X_3 = 0)\right) = \frac{1}{6}$
$P\left((X_1 = 2) \cap (X_2 = 2) \cap (X_3 = 1)\right) = 0$
$P\left((X_1 = 2) \cap (X_2 = 2) \cap (X_3 = 2)\right) = 0$

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Exemple

$P((X_1 = 2) \cap (X_2 = 2) \cap (X_3 = 0)) = \frac{1}{6}$
$P((X_1 = 2) \cap (X_2 = 2) \cap (X_3 = 1)) = 0$
$P((X_1 = 2) \cap (X_2 = 2) \cap (X_3 = 2)) = 0$
$P((X_1 = 3) \cap (X_2 = 1) \cap (X_3 = 0)) = 0$

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Exemple

$P\left((X_1 = 2) \cap (X_2 = 2) \cap (X_3 = 0)\right) = \frac{1}{6}$
$P\left((X_1 = 2) \cap (X_2 = 2) \cap (X_3 = 1)\right) = 0$
$P\left((X_1 = 2) \cap (X_2 = 2) \cap (X_3 = 2)\right) = 0$
$P\left((X_1 = 3) \cap (X_2 = 1) \cap (X_3 = 0)\right) = 0$
$P\left((X_1 = 3) \cap (X_2 = 1) \cap (X_3 = 1)\right) = \frac{1}{6}$

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

R3.08 Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Plan

Variable aléatoire

Variable aléatoire réelle

Variable aléatoire discrète

Variable aléatoire continue

Complément

Annexe : autres lois

Exemple

$P((X_1 = 2) \cap (X_2 = 2) \cap (X_3 = 0)) = \frac{1}{6}$
$P((X_1 = 2) \cap (X_2 = 2) \cap (X_3 = 1)) = 0$
$P((X_1 = 2) \cap (X_2 = 2) \cap (X_3 = 2)) = 0$
$P((X_1 = 3) \cap (X_2 = 1) \cap (X_3 = 0)) = 0$
$P((X_1 = 3) \cap (X_2 = 1) \cap (X_3 = 1)) = \frac{1}{6}$
$P((X_1 = 3) \cap (X_2 = 1) \cap (X_3 = 2)) = 0$

Exemple

$P((X_1 = 2) \cap (X_2 = 2) \cap (X_3 = 0)) = \frac{1}{6}$
$P((X_1 = 2) \cap (X_2 = 2) \cap (X_3 = 1)) = 0$
$P((X_1 = 2) \cap (X_2 = 2) \cap (X_3 = 2)) = 0$
$P((X_1 = 3) \cap (X_2 = 1) \cap (X_3 = 0)) = 0$
$P((X_1 = 3) \cap (X_2 = 1) \cap (X_3 = 1)) = \frac{1}{6}$
$P((X_1 = 3) \cap (X_2 = 1) \cap (X_3 = 2)) = 0$
$P((X_1 = 3) \cap (X_2 = 2) \cap (X_3 = 0)) = \frac{1}{6}$

Exemple

$P((X_1 = 2) \cap (X_2 = 2) \cap (X_3 = 0)) = \frac{1}{6}$
$P((X_1 = 2) \cap (X_2 = 2) \cap (X_3 = 1)) = 0$
$P((X_1 = 2) \cap (X_2 = 2) \cap (X_3 = 2)) = 0$
$P((X_1 = 3) \cap (X_2 = 1) \cap (X_3 = 0)) = 0$
$P((X_1 = 3) \cap (X_2 = 1) \cap (X_3 = 1)) = \frac{1}{6}$
$P((X_1 = 3) \cap (X_2 = 1) \cap (X_3 = 2)) = 0$
$P((X_1 = 3) \cap (X_2 = 2) \cap (X_3 = 0)) = \frac{1}{6}$
$P((X_1 = 3) \cap (X_2 = 2) \cap (X_3 = 1)) = 0$

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

R3.08 Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Exemple

$P\left((X_1 = 2) \cap (X_2 = 2) \cap (X_3 = 0)\right) = \frac{1}{6}$
$P\left((X_1 = 2) \cap (X_2 = 2) \cap (X_3 = 1)\right) = 0$
$P\left((X_1 = 2) \cap (X_2 = 2) \cap (X_3 = 2)\right) = 0$
$P\left((X_1 = 3) \cap (X_2 = 1) \cap (X_3 = 0)\right) = 0$
$P\left((X_1 = 3) \cap (X_2 = 1) \cap (X_3 = 1)\right) = \frac{1}{6}$
$P\left((X_1 = 3) \cap (X_2 = 1) \cap (X_3 = 2)\right) = 0$
$P\left((X_1 = 3) \cap (X_2 = 2) \cap (X_3 = 0)\right) = \frac{1}{6}$
$P\left((X_1 = 3) \cap (X_2 = 2) \cap (X_3 = 1)\right) = 0$
$P\left((X_1 = 3) \cap (X_2 = 2) \cap (X_3 = 2)\right) = 0$

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Fonction d'un vecteur aléatoire

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Fonction d'un vecteur aléatoire

Loi de probabilité

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

R3.08 Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Fonction d'un vecteur aléatoire

Loi de probabilité

Soit $X = (X_1, X_2, \cdots, X_n)$ un vecteur aléatoire (suite de n variables aléatoires discrètes sur Ω)

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Fonction d'un vecteur aléatoire

Loi de probabilité

Soit $X = (X_1, X_2, \cdots, X_n)$ un vecteur aléatoire (suite de n variables aléatoires discrètes sur Ω)
et $\phi : X_1(\Omega) \times X_2(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega) \to \mathbb{R}$.

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Fonction d'un vecteur aléatoire

Loi de probabilité

Soit $X = (X_1, X_2, \cdots, X_n)$ un vecteur aléatoire (suite de n variables aléatoires discrètes sur Ω)
et $\phi : X_1(\Omega) \times X_2(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega) \to \mathbb{R}$.
La **loi de probabilité** de la variable aléatoire discrète sur Ω $\phi(X)$ est la donnée de

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Fonction d'un vecteur aléatoire

Loi de probabilité

Soit $X = (X_1, X_2, \cdots, X_n)$ un vecteur aléatoire (suite de n variables aléatoires discrètes sur Ω)
et $\phi : X_1(\Omega) \times X_2(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega) \to \mathbb{R}$.
La loi de probabilité de la variable aléatoire discrète sur Ω $\phi(X)$ est la donnée de
α) $\phi(X)(\Omega) = \phi(X_1(\Omega) \times X_2(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega))$

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Fonction d'un vecteur aléatoire

Loi de probabilité

Soit $X = (X_1, X_2, \cdots, X_n)$ un vecteur aléatoire (suite de n variables aléatoires discrètes sur Ω)
et $\phi : X_1(\Omega) \times X_2(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega) \to \mathbb{R}$.
La loi de probabilité de la variable aléatoire discrète sur Ω $\phi(X)$ est la donnée de
$\alpha)$ $\phi(X)(\Omega) = \phi(X_1(\Omega) \times X_2(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega))$
$\beta)$ $P(\phi(X) = x) = P(\phi(X_1, X_2, \cdots, X_n) = x)$

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Fonction d'un vecteur aléatoire

Loi de probabilité

Soit $X = (X_1, X_2, \cdots, X_n)$ un vecteur aléatoire (suite de n variables aléatoires discrètes sur Ω)

et $\phi : X_1(\Omega) \times X_2(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$.

La loi de probabilité de la variable aléatoire discrète sur Ω $\phi(X)$ est la donnée de

$\alpha)$ $\phi(X)(\Omega) = \phi\left(X_1(\Omega) \times X_2(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega)\right)$

$\beta)$ $P(\phi(X) = x) = P(\phi(X_1, X_2, \cdots, X_n) = x) = \displaystyle\sum_{x_i \in X_i(\Omega), \phi(x_1, x_2, \cdots, x_n) = x} P((X_1 = x_1) \cap (X_2 = x_2) \cap \cdots \cap (X_n = x_n))$

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Cas particuliers

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Cas particuliers

$$\phi\,(X_1, X_2, \cdots, X_n) = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Cas particuliers

$$\phi(X_1, X_2, \cdots, X_n) = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$
$$\phi(X_1, X_2, \cdots, X_n) = X_1 X_2 \cdots X_n$$

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Exemple

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Exemple

On note X le numéro du premier jeton et Y le numéro du deuxième.

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Exemple

On note X le numéro du premier jeton et Y le numéro du deuxième.
$\Omega = \{1, 2, 3\} \times \{1, 2\} = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2)\}$

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Exemple

On note X le numéro du premier jeton et Y le numéro du deuxième.
$\Omega = \{1,2,3\} \times \{1,2\} = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,1),(3,2)\}$
$X(\Omega) = \{1,2,3\}$

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Exemple

On note X le numéro du premier jeton et Y le numéro du deuxième.
$\Omega = \{1,2,3\} \times \{1,2\} = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,1),(3,2)\}$
$X(\Omega) = \{1,2,3\}$ $Y(\Omega) = \{1,2\}$

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Exemple

On note X le numéro du premier jeton et Y le numéro du deuxième.
$\Omega = \{1, 2, 3\} \times \{1, 2\} = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2)\}$
$X(\Omega) = \{1, 2, 3\}$ $Y(\Omega) = \{1, 2\}$
Loi de probabilité de $S = X + Y$ (ici $\phi(X, Y) = X + Y$)

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Exemple

On note X le numéro du premier jeton et Y le numéro du deuxième.
$\Omega = \{1, 2, 3\} \times \{1, 2\} = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2)\}$
$X(\Omega) = \{1, 2, 3\}$ $Y(\Omega) = \{1, 2\}$
Loi de probabilité de $S = X + Y$ (ici $\phi(X, Y) = X + Y$)
$S(\Omega) = \{2, 3, 4, 5\}$

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Exemple

On note X le numéro du premier jeton et Y le numéro du deuxième.
$\Omega = \{1,2,3\} \times \{1,2\} = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,1),(3,2)\}$
$X(\Omega) = \{1,2,3\}$ $Y(\Omega) = \{1,2\}$
Loi de probabilité de $S = X + Y$ (ici $\phi(X,Y) = X + Y$)
$S(\Omega) = \{2,3,4,5\}$

ω	$(1,1)$	$(1,2)$	$(2,1)$	$(2,2)$	$(3,1)$	$(3,2)$
$X(\omega)$	1	1	2	2	3	3
$Y(\omega)$	1	2	1	2	1	2
$S(\omega)$	2	3	3	4	4	5

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Exemple

On note X le numéro du premier jeton et Y le numéro du deuxième.
$\Omega = \{1,2,3\} \times \{1,2\} = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,1),(3,2)\}$
$X(\Omega) = \{1,2,3\}$ $Y(\Omega) = \{1,2\}$
Loi de probabilité de $S = X + Y$ (ici $\phi(X,Y) = X + Y$)
$S(\Omega) = \{2,3,4,5\}$

ω	$(1,1)$	$(1,2)$	$(2,1)$	$(2,2)$	$(3,1)$	$(3,2)$
$X(\omega)$	1	1	2	2	3	3
$Y(\omega)$	1	2	1	2	1	2
$S(\omega)$	2	3	3	4	4	5

L'équiprobabilité sur Ω donne :

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

R3.08 Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Plan

Variable aléatoire

Variable aléatoire réelle

Variable aléatoire discrète

Variable aléatoire continue

Complément

Annexe : autres lois

Exemple

On note X le numéro du premier jeton et Y le numéro du deuxième.
$\Omega = \{1,2,3\} \times \{1,2\} = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,1),(3,2)\}$
$X(\Omega) = \{1,2,3\}$ $Y(\Omega) = \{1,2\}$
Loi de probabilité de $S = X + Y$ (ici $\phi(X,Y) = X + Y$)
$S(\Omega) = \{2,3,4,5\}$

ω	$(1,1)$	$(1,2)$	$(2,1)$	$(2,2)$	$(3,1)$	$(3,2)$
$X(\omega)$	1	1	2	2	3	3
$Y(\omega)$	1	2	1	2	1	2
$S(\omega)$	2	3	3	4	4	5

L'équiprobabilité sur Ω donne :

$$P(S=2) = \frac{1}{6}$$

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Exemple

On note X le numéro du premier jeton et Y le numéro du deuxième.
$\Omega = \{1,2,3\} \times \{1,2\} = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,1),(3,2)\}$
$X(\Omega) = \{1,2,3\}$ $Y(\Omega) = \{1,2\}$
Loi de probabilité de $S = X + Y$ (ici $\phi(X,Y) = X + Y$)
$S(\Omega) = \{2,3,4,5\}$

ω	$(1,1)$	$(1,2)$	$(2,1)$	$(2,2)$	$(3,1)$	$(3,2)$
$X(\omega)$	1	1	2	2	3	3
$Y(\omega)$	1	2	1	2	1	2
$S(\omega)$	2	3	3	4	4	5

L'équiprobabilité sur Ω donne :
$P(S=2) = \frac{1}{6}$; $P(S=3) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Exemple

On note X le numéro du premier jeton et Y le numéro du deuxième.
$\Omega = \{1,2,3\} \times \{1,2\} = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,1),(3,2)\}$
$X(\Omega) = \{1,2,3\}$ $Y(\Omega) = \{1,2\}$
Loi de probabilité de $S = X + Y$ (ici $\phi(X,Y) = X + Y$)
$S(\Omega) = \{2,3,4,5\}$

ω	$(1,1)$	$(1,2)$	$(2,1)$	$(2,2)$	$(3,1)$	$(3,2)$
$X(\omega)$	1	1	2	2	3	3
$Y(\omega)$	1	2	1	2	1	2
$S(\omega)$	2	3	3	4	4	5

L'équiprobabilité sur Ω donne :
$P(S=2) = \frac{1}{6}$; $P(S=3) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$;
$P(S=4) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Exemple

On note X le numéro du premier jeton et Y le numéro du deuxième.
$\Omega = \{1,2,3\} \times \{1,2\} = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,1),(3,2)\}$
$X(\Omega) = \{1,2,3\}$ $Y(\Omega) = \{1,2\}$
Loi de probabilité de $S = X + Y$ (ici $\phi(X,Y) = X + Y$)
$S(\Omega) = \{2,3,4,5\}$

ω	$(1,1)$	$(1,2)$	$(2,1)$	$(2,2)$	$(3,1)$	$(3,2)$
$X(\omega)$	1	1	2	2	3	3
$Y(\omega)$	1	2	1	2	1	2
$S(\omega)$	2	3	3	4	4	5

L'équiprobabilité sur Ω donne :
$P(S=2) = \frac{1}{6}$; $P(S=3) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$;
$P(S=4) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$; $P(S=5) = \frac{1}{6}$

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Indépendance

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Indépendance

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé associé à une expérience aléatoire et X et Y deux variables aléatoires discrètes sur Ω.

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Indépendance

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé associé à une expérience aléatoire et X et Y deux variables aléatoires discrètes sur Ω.
X et Y sont indépendantes si

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

R3.08
Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Plan

Variable aléatoire

Variable aléatoire réelle

Variable aléatoire discrète

Variable aléatoire continue

Complément

Annexe : autres lois

Indépendance

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé associé à une expérience aléatoire et X et Y deux variables aléatoires discrètes sur Ω.
X et Y sont indépendantes si $\forall (x_i, y_j) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$,

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Indépendance

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé associé à une expérience aléatoire et X et Y deux variables aléatoires discrètes sur Ω.

X et Y sont indépendantes si $\forall (x_i, y_j) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$,
$P\left((X = x_i) \cap (Y = y_j)\right) = P\left(X = x_i\right) P\left(Y = y_j\right)$

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Indépendance

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé associé à une expérience aléatoire et X et Y deux variables aléatoires discrètes sur Ω.
X et Y sont indépendantes si $\forall (x_i, y_j) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$,
$P\left((X = x_i) \cap (Y = y_j)\right) = P\left(X = x_i\right) P\left(Y = y_j\right)$

Exemple : loi conjointe et lois marginales

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Indépendance

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé associé à une expérience aléatoire et X et Y deux variables aléatoires discrètes sur Ω.
X et Y sont indépendantes si $\forall (x_i, y_j) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$,
$P((X = x_i) \cap (Y = y_j)) = P(X = x_i) P(Y = y_j)$

Exemple : loi conjointe et lois marginales

X/Y	1	2	$p_{i.}$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
3	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
$p_{.j}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Indépendance

Soit $(\Omega,\ \mathcal{T},\ P)$ un espace probabilisé associé à une expérience aléatoire et X et Y deux variables aléatoires discrètes sur Ω.
X et Y sont indépendantes si $\forall (x_i, y_j) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$,
$P\left((X = x_i) \cap (Y = y_j)\right) = P\left(X = x_i\right) P\left(Y = y_j\right)$

Exemple : loi conjointe et lois marginales

X/Y	1	2	$p_{i.}$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
3	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
$p_{.j}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

$$\forall (i, j) \in \{1, 2, 3\} \times \{1, 2\},\ p_{ij} = p_{i.} p_{.j} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} :$$

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

R3.08
Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Plan

Variable aléatoire

Variable aléatoire réelle

Variable aléatoire discrète

Variable aléatoire continue

Complément

Annexe : autres lois

Indépendance

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé associé à une expérience aléatoire et X et Y deux variables aléatoires discrètes sur Ω.
X et Y sont indépendantes si $\forall (x_i, y_j) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$,
$P((X = x_i) \cap (Y = y_j)) = P(X = x_i) P(Y = y_j)$

Exemple : loi conjointe et lois marginales

X/Y	1	2	$p_{i.}$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
3	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
$p_{.j}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

$\forall (i,j) \in \{1,2,3\} \times \{1,2\}$, $p_{ij} = p_{i.}p_{.j} = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{2}$: X et Y sont indépendantes.

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Indépendance

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Indépendance

X_1, X_2 ... X_n sont indépendantes si

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Indépendance

X_1, X_2 ... X_n sont indépendantes si
$\forall (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in X_1(\Omega) \times X_2(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega)$,

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Indépendance

X_1, X_2 ... X_n sont indépendantes si
$\forall (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in X_1(\Omega) \times X_2(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega)$,
$P\left((X_1 = x_1) \cap (X_2 = x_2) \cap \cdots \cap (X_n = x_n)\right)$
$= P(X_1 = x_1)\, P(X_2 = x_2) \cdots P(X_n = x_n)$

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Propriétés

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Propriétés

α) Si X et Y sont indépendantes alors pour tous A, $B \subset \mathbb{R}$
$P\left((X \in A) \cap (Y \in B)\right) = P\left(X \in A\right) P\left(Y \in B\right)$

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Propriétés

α) Si X et Y sont indépendantes alors pour tous A, $B \subset \mathbb{R}$
$P\left((X \in A) \cap (Y \in B)\right) = P\left(X \in A\right) P\left(Y \in B\right)$
β) Si X_1, X_2 ... X_n sont indépendantes

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Propriétés

α) Si X et Y sont indépendantes alors pour tous A, $B \subset \mathbb{R}$
$P\left((X \in A) \cap (Y \in B)\right) = P\left(X \in A\right) P\left(Y \in B\right)$
β) Si X_1, X_2 ... X_n sont indépendantes alors pour tous A_1, A_2, ..., $A_n \in \mathbb{R}$,

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Propriétés

α) Si X et Y sont indépendantes alors pour tous A, $B \subset \mathbb{R}$
$P((X \in A) \cap (Y \in B)) = P(X \in A)\, P(Y \in B)$
β) Si X_1, X_2 ... X_n sont indépendantes alors pour tous A_1, A_2, ..., $A_n \in \mathbb{R}$,
$P((X_1 \in A_1) \cap (X_2 \in A_2) \cap \cdots \cap (X_n \in A_n))$
$= P(X_1 \in A_1)\, P(X_2 \in A_2) \cdots P(X_n \in A_n)$

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Propriétés

α) Si X et Y sont indépendantes alors pour tous A, $B \subset \mathbb{R}$
$P((X \in A) \cap (Y \in B)) = P(X \in A)\, P(Y \in B)$
β) Si X_1, X_2 ... X_n sont indépendantes alors pour tous A_1, A_2, ..., $A_n \in \mathbb{R}$,
$P((X_1 \in A_1) \cap (X_2 \in A_2) \cap \cdots \cap (X_n \in A_n))$
$= P(X_1 \in A_1)\, P(X_2 \in A_2) \cdots P(X_n \in A_n)$

Remarques

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Propriétés

α) Si X et Y sont indépendantes alors pour tous A, $B \subset \mathbb{R}$
$P((X \in A) \cap (Y \in B)) = P(X \in A) P(Y \in B)$
β) Si X_1, X_2 ... X_n sont indépendantes alors pour tous A_1, A_2, ..., $A_n \in \mathbb{R}$,
$P((X_1 \in A_1) \cap (X_2 \in A_2) \cap \cdots \cap (X_n \in A_n))$
$= P(X_1 \in A_1) P(X_2 \in A_2) \cdots P(X_n \in A_n)$

Remarques

Pour $n \geq 3$, l'indépendance entraîne l'indépendance deux à deux, mais la réciproque est fausse.

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Propriétés

α) Si X et Y sont indépendantes alors pour tous A, $B \subset \mathbb{R}$
$P\left((X \in A) \cap (Y \in B)\right) = P(X \in A)\, P(Y \in B)$
β) Si X_1, X_2 ... X_n sont indépendantes alors pour tous A_1, A_2, ..., $A_n \in \mathbb{R}$,
$P\left((X_1 \in A_1) \cap (X_2 \in A_2) \cap \cdots \cap (X_n \in A_n)\right)$
$= P(X_1 \in A_1)\, P(X_2 \in A_2) \cdots P(X_n \in A_n)$

Remarques

Pour $n \geq 3$, l'indépendance entraîne l'indépendance deux à deux, mais la réciproque est fausse.
Les variables aléatoires associées à des expériences aléatoires indépendantes sont indépendantes.

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Espérance d'une somme de variables aléatoires

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Espérance d'une somme de variables aléatoires

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé associé à une expérience aléatoire et X et Y deux variables aléatoires discrètes sur Ω.

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Espérance d'une somme de variables aléatoires

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé associé à une expérience aléatoire et X et Y deux variables aléatoires discrètes sur Ω.

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$$

Démonstration en annexe.

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Espérance d'une somme de variables aléatoires

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé associé à une expérience aléatoire et X et Y deux variables aléatoires discrètes sur Ω.

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$$

Démonstration en annexe.

On en déduit, pour n variables aléatoires discrètes X_1, X_2, ..., X_n sur Ω :

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Espérance d'une somme de variables aléatoires

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé associé à une expérience aléatoire et X et Y deux variables aléatoires discrètes sur Ω.

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$$

Démonstration en annexe.

On en déduit, pour n variables aléatoires discrètes X_1, X_2, ..., X_n sur Ω :

$$E(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_n)$$

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Espérance d'une somme de variables aléatoires

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé associé à une expérience aléatoire et X et Y deux variables aléatoires discrètes sur Ω.

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$$

Démonstration en annexe.

On en déduit, pour n variables aléatoires discrètes X_1, X_2, ..., X_n sur Ω :

$$E(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_n)$$

Exemple

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Espérance d'une somme de variables aléatoires

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé associé à une expérience aléatoire et X et Y deux variables aléatoires discrètes sur Ω.

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$$

Démonstration en annexe.

On en déduit, pour n variables aléatoires discrètes X_1, X_2, ..., X_n sur Ω :

$$E(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_n)$$

Exemple

En reprenant $S = X + Y$, on obtient : $E(S) = E(X+Y) = E(X) + E(Y)$.

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Espérance d'une somme de variables aléatoires

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé associé à une expérience aléatoire et X et Y deux variables aléatoires discrètes sur Ω.

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$$

Démonstration en annexe.

On en déduit, pour n variables aléatoires discrètes X_1, X_2, ..., X_n sur Ω :

$$E(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_n)$$

Exemple

En reprenant $S = X + Y$, on obtient : $E(S) = E(X+Y) = E(X) + E(Y)$.

$E(X) = 1.P(X=1) + 2.P(X=2) + 3.P(X=3) = 1.\dfrac{1}{3} + 2.\dfrac{1}{3} + 3.\dfrac{1}{3} = 2$

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Espérance d'une somme de variables aléatoires

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé associé à une expérience aléatoire et X et Y deux variables aléatoires discrètes sur Ω.

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$$

Démonstration en annexe.

On en déduit, pour n variables aléatoires discrètes X_1, X_2, ..., X_n sur Ω :

$$E(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_n)$$

Exemple

En reprenant $S = X + Y$, on obtient : $E(S) = E(X+Y) = E(X) + E(Y)$.

$E(X) = 1.P(X=1) + 2.P(X=2) + 3.P(X=3) = 1.\frac{1}{3} + 2.\frac{1}{3} + 3.\frac{1}{3} = 2$

$E(Y) = 1.P(Y=1) + 2.P(Y=2) = 1.\frac{1}{2} + 2.\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Espérance d'une somme de variables aléatoires

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé associé à une expérience aléatoire et X et Y deux variables aléatoires discrètes sur Ω.

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$$

Démonstration en annexe.

On en déduit, pour n variables aléatoires discrètes X_1, X_2, ..., X_n sur Ω :

$$E(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_n)$$

Exemple

En reprenant $S = X + Y$, on obtient : $E(S) = E(X+Y) = E(X) + E(Y)$.

$E(X) = 1.P(X=1) + 2.P(X=2) + 3.P(X=3) = 1.\frac{1}{3} + 2.\frac{1}{3} + 3.\frac{1}{3} = 2$

$E(Y) = 1.P(Y=1) + 2.P(Y=2) = 1.\frac{1}{2} + 2.\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

On en déduit $E(S) = 2 + \frac{3}{2} = \frac{7}{2}$.

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Espérance du produit de variables aléatoires indépendantes

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Espérance du produit de variables aléatoires indépendantes

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé associé à une expérience aléatoire et X et Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes.

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Espérance du produit de variables aléatoires indépendantes

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé associé à une expérience aléatoire et X et Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes.

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

Démonstration en annexe.

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Espérance du produit de variables aléatoires indépendantes

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé associé à une expérience aléatoire et X et Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes.

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

Démonstration en annexe.

On en déduit, pour n variables aléatoires discrètes indépendantes X_1, X_2, ..., X_n sur Ω :

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Espérance du produit de variables aléatoires indépendantes

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé associé à une expérience aléatoire et X et Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes.

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

Démonstration en annexe.

On en déduit, pour n variables aléatoires discrètes indépendantes X_1, X_2, ..., X_n sur Ω :

$$E(X_1X_2\cdots X_n) = E(X_1)E(X_2)\dots E(X_n)$$

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Espérance du produit de variables aléatoires indépendantes

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé associé à une expérience aléatoire et X et Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes.

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

Démonstration en annexe.

On en déduit, pour n variables aléatoires discrètes indépendantes X_1, X_2, ..., X_n sur Ω :

$$E(X_1X_2\cdots X_n) = E(X_1)E(X_2)\ldots E(X_n)$$

Exemple

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Espérance du produit de variables aléatoires indépendantes

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé associé à une expérience aléatoire et X et Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes.

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

Démonstration en annexe.

On en déduit, pour n variables aléatoires discrètes indépendantes X_1, X_2, ..., X_n sur Ω :

$$E(X_1X_2\cdots X_n) = E(X_1)E(X_2)\ldots E(X_n)$$

Exemple

En reprenant le même exemple, X et Y sont indépendantes

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Espérance du produit de variables aléatoires indépendantes

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé associé à une expérience aléatoire et X et Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes.

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

Démonstration en annexe.

On en déduit, pour n variables aléatoires discrètes indépendantes X_1, X_2, ..., X_n sur Ω :

$$E(X_1X_2\cdots X_n) = E(X_1)E(X_2)\dots E(X_n)$$

Exemple

En reprenant le même exemple, X et Y sont indépendantes et donc $E(XY) = E(X)E(Y) = 2.\frac{3}{2} = 3$.

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Covariance

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Covariance

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé associé à une expérience aléatoire et X et Y deux variables aléatoires dont l'espérance existe.

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Covariance

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé associé à une expérience aléatoire et X et Y deux variables aléatoires dont l'espérance existe.
La covariance de X et de Y est, si elle existe :

Covariance

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé associé à une expérience aléatoire et X et Y deux variables aléatoires dont l'espérance existe.

La covariance de X et de Y est, si elle existe :

$$cov\,(X, Y) = E\,((X - E(X))\,(Y - E(Y)))$$

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Propriétés de la covariance

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

R3.08 Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Propriétés de la covariance

Si elles existent :

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Propriétés de la covariance

Si elles existent :

i) $cov\,(X, Y) = cov\,(Y, X)$

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Propriétés de la covariance

Si elles existent :

i) $cov\,(X,Y) = cov\,(Y,X)$

ii) $cov\,(aX+bY,Z) = a\ cov\,(X,Z) + b\ cov\,(Y,Z)$

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Propriétés de la covariance

Si elles existent :

i) $cov\,(X, Y) = cov\,(Y, X)$

ii) $cov\,(aX + bY, Z) = a\ cov\,(X, Z) + b\ cov\,(Y, Z)$

iii) $cov\,(X, Y) = E\,(XY) - E(X)E(Y)$

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Propriétés de la covariance

Si elles existent :

i) $cov\,(X,Y) = cov\,(Y,X)$

ii) $cov\,(aX + bY, Z) = a\;cov\,(X,Z) + b\;cov\,(Y,Z)$

iii) $cov\,(X,Y) = E\,(XY) - E(X)E(Y)$

iv) Si X et Y indépendantes alors $cov\,(X,Y) = 0$

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Propriétés de la covariance

Si elles existent :

i) $cov\,(X, Y) = cov\,(Y, X)$

ii) $cov\,(aX + bY, Z) = a\ cov\,(X, Z) + b\ cov\,(Y, Z)$

iii) $cov\,(X, Y) = E\,(XY) - E(X)E(Y)$

iv) Si X et Y indépendantes alors $cov\,(X, Y) = 0$

v) $V(X) = cov\,(X, X)$

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Propriétés de la covariance

Si elles existent :

i) $cov\,(X, Y) = cov\,(Y, X)$

ii) $cov\,(aX + bY, Z) = a\ cov\,(X, Z) + b\ cov\,(Y, Z)$

iii) $cov\,(X, Y) = E\,(XY) - E(X)E(Y)$

iv) Si X et Y indépendantes alors $cov\,(X, Y) = 0$

v) $V(X) = cov\,(X, X)$

vi) $V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2cov\,(X, Y)$

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Propriétés de la covariance

Si elles existent :

i) $cov\,(X, Y) = cov\,(Y, X)$

ii) $cov\,(aX + bY, Z) = a\ cov\,(X, Z) + b\ cov\,(Y, Z)$

iii) $cov\,(X, Y) = E\,(XY) - E(X)E(Y)$

iv) Si X et Y indépendantes alors $cov\,(X, Y) = 0$

v) $V(X) = cov\,(X, X)$

vi) $V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2cov\,(X, Y)$

Démonstration en annexe.

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Propriétés de la covariance

Si elles existent :

i) $cov\,(X,Y) = cov\,(Y,X)$

ii) $cov\,(aX+bY,Z) = a\;cov\,(X,Z) + b\;cov\,(Y,Z)$

iii) $cov\,(X,Y) = E\,(XY) - E(X)E(Y)$

iv) Si X et Y indépendantes alors $cov\,(X,Y) = 0$

v) $V(X) = cov\,(X,X)$

vi) $V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2cov\,(X,Y)$

Démonstration en annexe.

Remarques

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Propriétés de la covariance

Si elles existent :

i) $cov\,(X, Y) = cov\,(Y, X)$

ii) $cov\,(aX + bY, Z) = a\ cov\,(X, Z) + b\ cov\,(Y, Z)$

iii) $cov\,(X, Y) = E\,(XY) - E(X)E(Y)$

iv) Si X et Y indépendantes alors $cov\,(X, Y) = 0$

v) $V(X) = cov\,(X, X)$

vi) $V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2cov\,(X, Y)$

Démonstration en annexe.

Remarques

La réciproque de iv) peut être fausse.

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Propriétés de la covariance

Si elles existent :

i) $cov\,(X, Y) = cov\,(Y, X)$

ii) $cov\,(aX + bY, Z) = a\ cov\,(X, Z) + b\ cov\,(Y, Z)$

iii) $cov\,(X, Y) = E\,(XY) - E(X)E(Y)$

iv) Si X et Y indépendantes alors $cov\,(X, Y) = 0$

v) $V(X) = cov\,(X, X)$

vi) $V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2cov\,(X, Y)$

Démonstration en annexe.

Remarques

La réciproque de iv) peut être fausse.

On généralise vi) au cas de n variables :

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Propriétés de la covariance

Si elles existent :
i) $cov\,(X, Y) = cov\,(Y, X)$
ii) $cov\,(aX + bY, Z) = a\ cov\,(X, Z) + b\ cov\,(Y, Z)$
iii) $cov\,(X, Y) = E\,(XY) - E(X)E(Y)$
iv) Si X et Y indépendantes alors $cov\,(X, Y) = 0$
v) $V(X) = cov\,(X, X)$
vi) $V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2cov\,(X, Y)$
Démonstration en annexe.

Remarques

La réciproque de iv) peut être fausse.
On généralise vi) au cas de n variables :

$$V(X_1+X_2+\cdots+X_n) = V(X_1)+V(X_2)+\cdots+V(X_n)+2\sum_{1\leq i<j\leq n} cov\,(X_i, X_j)$$

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Variance de la somme de variables aléatoires indépendantes

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Variance de la somme de variables aléatoires indépendantes

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé associé à une expérience aléatoire

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

R3.08 Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Plan

Variable aléatoire

Variable aléatoire réelle

Variable aléatoire discrète

Variable aléatoire continue

Complément

Annexe : autres lois

Variance de la somme de variables aléatoires indépendantes

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé associé à une expérience aléatoire et X et Y (respectivement X_1, X_2, ..., X_n) deux (respectivement n) variables aléatoires discrètes indépendantes.

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Variance de la somme de variables aléatoires indépendantes

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé associé à une expérience aléatoire et X et Y (respectivement X_1, X_2, ..., X_n) deux (respectivement n) variables aléatoires discrètes indépendantes. Alors

1. $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Variance de la somme de variables aléatoires indépendantes

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé associé à une expérience aléatoire et X et Y (respectivement X_1, X_2, ..., X_n) deux (respectivement n) variables aléatoires discrètes indépendantes. Alors

1. $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$
2. $V(X_1 + X_2 + \cdots X_n) = V(X_1) + V(X_2) + \cdots + V(X_n)$

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Démonstration

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Démonstration

$$V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2cov\,(X,Y) = V(X) + V(Y)$$

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Démonstration

$$V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2cov\,(X,Y) = V(X) + V(Y)$$
$$V(X_1+X_2+\cdots+X_n) = V(X_1)+V(X_2)+\cdots+V(X_n)+2\sum_{1\leq i<j\leq n} cov\,(X_i,X_j)$$

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Démonstration

$$V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2cov\,(X,Y) = V(X) + V(Y)$$

$$V(X_1+X_2+\cdots+X_n) = V(X_1)+V(X_2)+\cdots+V(X_n)+2\sum_{1\leq i<j\leq n} cov\,(X_i, X_j)$$

$$= V(X_1+X_2+\cdots+X_n) = V(X_1)+V(X_2)+\cdots+V(X_n)$$

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Exemple

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Exemple

En reprenant le même exemple, X et Y sont indépendantes et $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$.

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Exemple

En reprenant le même exemple, X et Y sont indépendantes et $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$.

Or $V(X) = 1^2.P(X=1) + 2^2.P(X=2) + 3^2.P(X=3) - 2^2$

$$V(X) = 1.\frac{1}{3} + 4.\frac{1}{3} + 9.\frac{1}{3} - 4 = \frac{2}{3}$$

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

R3.08 Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Plan

Variable aléatoire

Variable aléatoire réelle

Variable aléatoire discrète

Variable aléatoire continue

Complément

Annexe : autres lois

Exemple

En reprenant le même exemple, X et Y sont indépendantes et $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$.

Or $V(X) = 1^2.P(X=1) + 2^2.P(X=2) + 3^2.P(X=3) - 2^2$

$$V(X) = 1.\frac{1}{3} + 4.\frac{1}{3} + 9.\frac{1}{3} - 4 = \frac{2}{3}$$

$$V(Y) = 1^2.P(Y=1) + 2^2.P(Y=2) - \left(\frac{3}{2}\right)^2$$

Exemple

En reprenant le même exemple, X et Y sont indépendantes et $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$.

Or $V(X) = 1^2.P(X=1) + 2^2.P(X=2) + 3^2.P(X=3) - 2^2$

$$V(X) = 1.\frac{1}{3} + 4.\frac{1}{3} + 9.\frac{1}{3} - 4 = \frac{2}{3}$$

$$V(Y) = 1^2.P(Y=1) + 2^2.P(Y=2) - \left(\frac{3}{2}\right)^2$$

$$V(Y) = 1.\frac{1}{2} + 4.\frac{1}{2} - \frac{9}{4} = \frac{1}{4}$$

Exemple

En reprenant le même exemple, X et Y sont indépendantes et
$V(X+Y) = V(X) + V(Y)$.
Or $V(X) = 1^2.P(X=1) + 2^2.P(X=2) + 3^2.P(X=3) - 2^2$

$$V(X) = 1.\frac{1}{3} + 4.\frac{1}{3} + 9.\frac{1}{3} - 4 = \frac{2}{3}$$

$$V(Y) = 1^2.P(Y=1) + 2^2.P(Y=2) - \left(\frac{3}{2}\right)^2$$

$$V(Y) = 1.\frac{1}{2} + 4.\frac{1}{2} - \frac{9}{4} = \frac{1}{4}$$

On en déduit $V(X+Y) = \frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \frac{11}{12}$.

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Loi binomiale

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Loi binomiale

Soit X_1, X_2, ..., X_n n variables aléatoires indépendantes, $X_i \sim \mathcal{B}(1, p)$.

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Loi binomiale

Soit X_1, X_2, ..., X_n n variables aléatoires indépendantes, $X_i \sim \mathcal{B}(1, p)$.
$X_i(\Omega) = \{0, 1\}$.
On pose $S = X_1 + X_2 + ... + X_n$.

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Loi binomiale

Soit X_1, X_2, ..., X_n n variables aléatoires indépendantes, $X_i \sim \mathcal{B}(1, p)$.
$X_i(\Omega) = \{0, 1\}$.
On pose $S = X_1 + X_2 + ... + X_n$. $S(\Omega) = \{0, 1, ..., n\}$

Loi binomiale

Soit X_1, X_2, ..., X_n n variables aléatoires indépendantes, $X_i \sim \mathcal{B}(1, p)$.
$X_i(\Omega) = \{0, 1\}$.
On pose $S = X_1 + X_2 + ... + X_n$. $S(\Omega) = \{0, 1, ..., n\}$

$$P(S = k) = \sum_{x_1 + x_2 + \ldots + x_n = k} P((X_1 = x_1) \cap (X_2 = x_2) \cap \cdots \cap (X_n = x_n))$$

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Loi binomiale

Soit X_1, X_2, ..., X_n n variables aléatoires indépendantes, $X_i \sim \mathcal{B}(1, p)$.
$X_i(\Omega) = \{0, 1\}$.
On pose $S = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$. $S(\Omega) = \{0, 1, \ldots, n\}$

$$P(S = k) = \sum_{x_1 + x_2 + \ldots + x_n = k} P((X_1 = x_1) \cap (X_2 = x_2) \cap \cdots \cap (X_n = x_n))$$

$$P(S = k) = \sum_{x_1 + x_2 + \ldots + x_n = k} P(X_1 = x_1) P(X_2 = x_2) \cdots P(X_n = x_n)$$

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Loi binomiale

Soit X_1, X_2, ..., X_n n variables aléatoires indépendantes, $X_i \sim \mathcal{B}(1, p)$.
$X_i(\Omega) = \{0, 1\}$.
On pose $S = X_1 + X_2 + ... + X_n$. $S(\Omega) = \{0, 1, ..., n\}$

$$P(S = k) = \sum_{x_1+x_2+\ldots+x_n=k} P((X_1 = x_1) \cap (X_2 = x_2) \cap \cdots \cap (X_n = x_n))$$

$$P(S = k) = \sum_{x_1+x_2+\ldots+x_n=k} P(X_1 = x_1) P(X_2 = x_2) \cdots P(X_n = x_n)$$

Comme il y a C_n^k termes et que chacun des termes
$P(X_1 = x_1) P(X_2 = x_2) \cdots P(X_n = x_n) = p^k (1 - p)^{n-k}$,

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Loi binomiale

Soit $X_1, X_2, ..., X_n$ n variables aléatoires indépendantes, $X_i \sim \mathcal{B}(1, p)$.
$X_i(\Omega) = \{0, 1\}$.
On pose $S = X_1 + X_2 + ... + X_n$. $S(\Omega) = \{0, 1, ..., n\}$

$$P(S = k) = \sum_{x_1+x_2+\ldots+x_n=k} P((X_1 = x_1) \cap (X_2 = x_2) \cap \cdots \cap (X_n = x_n))$$

$$P(S = k) = \sum_{x_1+x_2+\ldots+x_n=k} P(X_1 = x_1) P(X_2 = x_2) \cdots P(X_n = x_n)$$

Comme il y a C_n^k termes et que chacun des termes
$P(X_1 = x_1) P(X_2 = x_2) \cdots P(X_n = x_n) = p^k (1-p)^{n-k}$, on obtient

Loi binomiale

Soit X_1, X_2, ..., X_n n variables aléatoires indépendantes, $X_i \sim \mathcal{B}(1, p)$.
$X_i(\Omega) = \{0, 1\}$.
On pose $S = X_1 + X_2 + ... + X_n$. $S(\Omega) = \{0, 1, ..., n\}$

$$P(S = k) = \sum_{x_1+x_2+\ldots+x_n=k} P((X_1 = x_1) \cap (X_2 = x_2) \cap \cdots \cap (X_n = x_n))$$

$$P(S = k) = \sum_{x_1+x_2+\ldots+x_n=k} P(X_1 = x_1) P(X_2 = x_2) \cdots P(X_n = x_n)$$

Comme il y a C_n^k termes et que chacun des termes
$P(X_1 = x_1) P(X_2 = x_2) \cdots P(X_n = x_n) = p^k (1-p)^{n-k}$, on obtient

$$P(S = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Loi binomiale

Soit X_1, X_2, ..., X_n n variables aléatoires indépendantes, $X_i \sim \mathcal{B}(1, p)$.
$X_i(\Omega) = \{0, 1\}$.
On pose $S = X_1 + X_2 + ... + X_n$. $S(\Omega) = \{0, 1, ..., n\}$

$$P(S = k) = \sum_{x_1+x_2+\ldots+x_n=k} P((X_1 = x_1) \cap (X_2 = x_2) \cap \cdots \cap (X_n = x_n))$$

$$P(S = k) = \sum_{x_1+x_2+\ldots+x_n=k} P(X_1 = x_1) P(X_2 = x_2) \cdots P(X_n = x_n)$$

Comme il y a C_n^k termes et que chacun des termes $P(X_1 = x_1) P(X_2 = x_2) \cdots P(X_n = x_n) = p^k (1-p)^{n-k}$, on obtient

$$P(S = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

et $S \sim \mathcal{B}(n, p)$.

Loi de Poisson

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Loi de Poisson

Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$ indépendantes alors $X + Y \sim \mathcal{P}(\lambda + \mu)$.

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Loi de Poisson

Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$ indépendantes alors $X + Y \sim \mathcal{P}(\lambda + \mu)$.
Exemple : un standard téléphonique reçoit en moyenne 4 appels de 10h à 11h et 2 appels de 11h à midi.

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Loi de Poisson

Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$ indépendantes alors $X + Y \sim \mathcal{P}(\lambda + \mu)$.
Exemple : un standard téléphonique reçoit en moyenne 4 appels de 10h à 11h et 2 appels de 11h à midi.
En supposant $X \sim \mathcal{P}(4)$, $Y \sim \mathcal{P}(2)$ indépendantes alors $X + Y \sim \mathcal{P}(6)$.

Loi de Poisson

Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$ indépendantes alors $X + Y \sim \mathcal{P}(\lambda + \mu)$.

Exemple : un standard téléphonique reçoit en moyenne 4 appels de 10h à 11h et 2 appels de 11h à midi.

En supposant $X \sim \mathcal{P}(4)$, $Y \sim \mathcal{P}(2)$ indépendantes alors $X + Y \sim \mathcal{P}(6)$.

$$P(X + Y = 0) = e^{-6}\frac{6^0}{0!} \approx 0,00248$$

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

R3.08 Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Plan

Variable aléatoire

Variable aléatoire réelle

Variable aléatoire discrète

Variable aléatoire continue

Complément

Annexe : autres lois

Loi de Poisson

Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$ indépendantes alors $X + Y \sim \mathcal{P}(\lambda + \mu)$.

Exemple : un standard téléphonique reçoit en moyenne 4 appels de 10h à 11h et 2 appels de 11h à midi.

En supposant $X \sim \mathcal{P}(4)$, $Y \sim \mathcal{P}(2)$ indépendantes alors $X + Y \sim \mathcal{P}(6)$.

$$P(X + Y = 0) = e^{-6}\frac{6^0}{0!} \approx 0,00248$$

$$P(X + Y = 1) = e^{-6}\frac{6^1}{1!} \approx 0,0174$$

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Loi de Poisson

Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$ indépendantes alors $X + Y \sim \mathcal{P}(\lambda + \mu)$.
Exemple : un standard téléphonique reçoit en moyenne 4 appels de 10h à 11h et 2 appels de 11h à midi.
En supposant $X \sim \mathcal{P}(4)$, $Y \sim \mathcal{P}(2)$ indépendantes alors $X + Y \sim \mathcal{P}(6)$.

$$P(X + Y = 0) = e^{-6}\frac{6^0}{0!} \approx 0,00248$$

$$P(X + Y = 1) = e^{-6}\frac{6^1}{1!} \approx 0,0174$$

Remarque : $P(X + Y = 0) = P((X = 0) \cap (Y = 0)) = e^{-4}\frac{4^0}{0!}e^{-2}\frac{2^0}{0!}$

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Loi de Poisson

Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$ indépendantes alors $X + Y \sim \mathcal{P}(\lambda + \mu)$.

Exemple : un standard téléphonique reçoit en moyenne 4 appels de 10h à 11h et 2 appels de 11h à midi.

En supposant $X \sim \mathcal{P}(4)$, $Y \sim \mathcal{P}(2)$ indépendantes alors $X + Y \sim \mathcal{P}(6)$.

$$P(X + Y = 0) = e^{-6}\frac{6^0}{0!} \approx 0,00248$$

$$P(X + Y = 1) = e^{-6}\frac{6^1}{1!} \approx 0,0174$$

Remarque : $P(X + Y = 0) = P((X = 0) \cap (Y = 0)) = e^{-4}\frac{4^0}{0!}e^{-2}\frac{2^0}{0!}$

$P(X + Y = 1) = P((X = 0) \cap (Y = 1)) + P((X = 1) \cap (Y = 0))$

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Loi de Poisson

Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$ indépendantes alors $X + Y \sim \mathcal{P}(\lambda + \mu)$.
Exemple : un standard téléphonique reçoit en moyenne 4 appels de 10h à 11h et 2 appels de 11h à midi.
En supposant $X \sim \mathcal{P}(4)$, $Y \sim \mathcal{P}(2)$ indépendantes alors $X + Y \sim \mathcal{P}(6)$.

$$P(X+Y=0) = e^{-6}\frac{6^0}{0!} \approx 0,00248$$

$$P(X+Y=1) = e^{-6}\frac{6^1}{1!} \approx 0,0174$$

Remarque : $P(X+Y=0) = P((X=0)\cap(Y=0)) = e^{-4}\frac{4^0}{0!}e^{-2}\frac{2^0}{0!}$

$$P(X+Y=1) = P((X=0)\cap(Y=1)) + P((X=1)\cap(Y=0))$$

$$P(X+Y=1) = e^{-4}\frac{4^0}{0!}e^{-2}\frac{2^1}{1!} + e^{-4}\frac{4^1}{1!}e^{-2}\frac{2^0}{0!}$$

Variable aléatoire continue

Densité de probabilité

Variable aléatoire continue

Densité de probabilité

Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une densité de probabilité si

Variable aléatoire continue

Densité de probabilité

Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une densité de probabilité si

i) $f \geq 0$,

Variable aléatoire continue

Densité de probabilité

Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une densité de probabilité si

i) $f \geq 0$,

ii) f est continue sauf éventuellement en un nombre fini de réels,

Variable aléatoire continue

Densité de probabilité

Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une densité de probabilité si

i) $f \geq 0$,

ii) f est continue sauf éventuellement en un nombre fini de réels,

iii) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ est convergente et est égale à 1.

Variable aléatoire continue

Exemple

Variable aléatoire continue

Exemple

f définie par $f(x) = 1$ si $x \in [0, 1]$ et $f(x) = 0$ sinon.

Variable aléatoire continue

Exemple

f définie par $f(x) = 1$ si $x \in [0,1]$ et $f(x) = 0$ sinon.

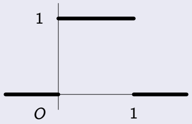
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \int_{-\infty}^{0} 0\,dt + \int_{0}^{1} 1dt + \int_{1}^{+\infty} 0\,dt = 0 + 1 + 0 = 1$$

Variable aléatoire continue

Exemple

f définie par $f(x) = 1$ si $x \in [0, 1]$ et $f(x) = 0$ sinon.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \int_{-\infty}^{0} 0\,dt + \int_{0}^{1} 1dt + \int_{1}^{+\infty} 0\,dt = 0 + 1 + 0 = 1$$



Variable aléatoire continue

Variable aléatoire absolument continue

Variable aléatoire continue

Variable aléatoire absolument continue

Une variable aléatoire réelle X est dite absolument continue s'il existe une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ positive et continue sauf éventuellement en un nombre fini de réels telle que

$$\forall x \in \mathbb{R} \; F(x) = P\left(X \leq x\right) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

Variable aléatoire continue

Variable aléatoire absolument continue

Une variable aléatoire réelle X est dite absolument continue s'il existe une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ positive et continue sauf éventuellement en un nombre fini de réels telle que

$$\forall x \in \mathbb{R} \; F(x) = P\left(X \leq x\right) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

La fonction f est une densité de probabilité appelée densité de X.

Variable aléatoire continue

Exemple de variable aléatoire absolument continue

Variable aléatoire continue

Exemple de variable aléatoire absolument continue

Toute variable aléatoire X admettant comme densité de probabilité la fonction f définie par $f(x) = 1$ si $x \in [0, 1]$ et $f(x) = 0$ sinon.

Variable aléatoire continue

Exemple de variable aléatoire absolument continue

Toute variable aléatoire X admettant comme densité de probabilité la fonction f définie par $f(x) = 1$ si $x \in [0, 1]$ et $f(x) = 0$ sinon.

i) si $x < 0$ alors $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{x} 0\, dt = 0$

Variable aléatoire continue

Exemple de variable aléatoire absolument continue

Toute variable aléatoire X admettant comme densité de probabilité la fonction f définie par $f(x) = 1$ si $x \in [0,1]$ et $f(x) = 0$ sinon.

i) si $x < 0$ alors $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{x} 0\,dt = 0$

ii) si $0 \leq x < 1$ alors

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{0} 0\,dt + \int_{0}^{x} 1\,dt = 0 + x = x$$

Variable aléatoire continue

Exemple de variable aléatoire absolument continue

Toute variable aléatoire X admettant comme densité de probabilité la fonction f définie par $f(x) = 1$ si $x \in [0, 1]$ et $f(x) = 0$ sinon.

i) si $x < 0$ alors $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{x} 0\, dt = 0$

ii) si $0 \leq x < 1$ alors

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{0} 0\, dt + \int_{0}^{x} 1\, dt = 0 + x = x$$

iii) si $x \geq 1$ alors

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{0} 0\, dt + \int_{0}^{1} f(t)\, dt + \int_{1}^{x} 0\, dt = 0 + 1 + 0 = 1.$$

Variable aléatoire continue

Exemple de variable aléatoire absolument continue

Toute variable aléatoire X admettant comme densité de probabilité la fonction f définie par $f(x) = 1$ si $x \in [0, 1]$ et $f(x) = 0$ sinon.

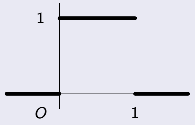
i) si $x < 0$ alors $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{x} 0\,dt = 0$

ii) si $0 \leq x < 1$ alors

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{0} 0\,dt + \int_{0}^{x} 1\,dt = 0 + x = x$$

iii) si $x \geq 1$ alors

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{0} 0\,dt + \int_{0}^{1} f(t)\,dt + \int_{1}^{x} 0\,dt = 0 + 1 + 0 = 1.$$



Variable aléatoire continue

Exemple de variable aléatoire absolument continue

Toute variable aléatoire X admettant comme densité de probabilité la fonction f définie par $f(x) = 1$ si $x \in [0,1]$ et $f(x) = 0$ sinon.

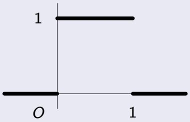
i) si $x < 0$ alors $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{x} 0\,dt = 0$

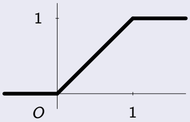
ii) si $0 \leq x < 1$ alors

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{0} 0\,dt + \int_{0}^{x} 1\,dt = 0 + x = x$$

iii) si $x \geq 1$ alors

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{0} 0\,dt + \int_{0}^{1} f(t)\,dt + \int_{1}^{x} 0\,dt = 0 + 1 + 0 = 1.$$





Variable aléatoire continue

Propriétés

Variable aléatoire continue

Propriétés

Soit X une variable aléatoire absolument continue de densité f.

Variable aléatoire continue

Propriétés

Soit X une variable aléatoire absolument continue de densité f.

i) $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$

Variable aléatoire continue

Propriétés

Soit X une variable aléatoire absolument continue de densité f.

i) $\lim_{x \to +\infty} F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$

ii) pour tout réel x en lequel f est continue $F'(x) = f(x)$.

Variable aléatoire continue

Propriétés

Soit X une variable aléatoire absolument continue de densité f.

i) $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$

ii) pour tout réel x en lequel f est continue $F'(x) = f(x)$.

iii) $\forall a \in \mathbb{R}\ P(X = a) = 0$

Variable aléatoire continue

Propriétés

Soit X une variable aléatoire absolument continue de densité f.

i) $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$

ii) pour tout réel x en lequel f est continue $F'(x) = f(x)$.

iii) $\forall a \in \mathbb{R}\ P(X = a) = 0$

iv) $\forall a \in \mathbb{R}\ P(X \leq a) = P(X < a) = F(a) = \int_{-\infty}^{a} f(t)dt$

Variable aléatoire continue

Propriétés

Soit X une variable aléatoire absolument continue de densité f.

i) $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$

ii) pour tout réel x en lequel f est continue $F'(x) = f(x)$.

iii) $\forall a \in \mathbb{R}\ P(X = a) = 0$

iv) $\forall a \in \mathbb{R}\ P(X \leq a) = P(X < a) = F(a) = \int_{-\infty}^{a} f(t)dt$

v) $\forall a \in \mathbb{R}\ P(X \geq a) = P(X > a) = 1 - F(a) = 1 - \int_{-\infty}^{a} f(t)dt$

Variable aléatoire continue

Propriétés

Soit X une variable aléatoire absolument continue de densité f.

i) $\lim_{x \to +\infty} F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$

ii) pour tout réel x en lequel f est continue $F'(x) = f(x)$.

iii) $\forall a \in \mathbb{R}\ P(X = a) = 0$

iv) $\forall a \in \mathbb{R}\ P(X \leq a) = P(X < a) = F(a) = \int_{-\infty}^{a} f(t)dt$

v) $\forall a \in \mathbb{R}\ P(X \geq a) = P(X > a) = 1 - F(a) = 1 - \int_{-\infty}^{a} f(t)dt$

vi) $\forall a \in \mathbb{R}\ P(a \leq X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X \leq b) =$
$P(a < X < b) = P(X \leq b) - P(X \leq a) = F(b) - F(a) = \int_{a}^{b} f(t)dt$

Variable aléatoire continue

R3.08 Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Plan

Variable aléatoire

Variable aléatoire réelle

Variable aléatoire discrète

Variable aléatoire continue

Complément

Annexe : autres lois

Exemple

Variable aléatoire continue

Exemple

Soit f définie par $f(x) = e^{-x}$ sur $[0, +\infty[$ et $f(x) = 0$ sur $]-\infty, 0[$.

Variable aléatoire continue

R3.08 Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Plan

Variable aléatoire

Variable aléatoire réelle

Variable aléatoire discrète

Variable aléatoire continue

Complément

Annexe : autres lois

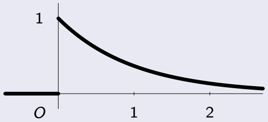
Exemple

Soit f définie par $f(x) = e^{-x}$ sur $[0, +\infty[$ et $f(x) = 0$ sur $]-\infty, 0[$.
f est une densité de probabilité et toute variable aléatoire X admettant la fonction f comme densité est absolument continue.

Variable aléatoire continue

Exemple

Soit f définie par $f(x) = e^{-x}$ sur $[0, +\infty[$ et $f(x) = 0$ sur $]-\infty, 0[$.
f est une densité de probabilité et toute variable aléatoire X admettant la fonction f comme densité est absolument continue.



Variable aléatoire continue

Exemple

Variable aléatoire continue

Exemple

Pour f définie par $f(x) = e^{-x}$ sur $[0, +\infty[$ et $f(x) = 0$ sur $]-\infty, 0[$,

Variable aléatoire continue

R3.08 Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Exemple

Pour f définie par $f(x) = e^{-x}$ sur $[0, +\infty[$ et $f(x) = 0$ sur $]-\infty, 0[$,

$F(x) = P(X \leq x) = \displaystyle\int_0^x e^{-t} dt = 1 - e^{-x}$ sur $[0, +\infty[$ et 0 sur $]-\infty, 0[$.

Variable aléatoire continue

Exemple

Pour f définie par $f(x) = e^{-x}$ sur $[0, +\infty[$ et $f(x) = 0$ sur $]-\infty, 0[$,

$F(x) = P(X \leq x) = \int_0^x e^{-t} dt = 1 - e^{-x}$ sur $[0, +\infty[$ et 0 sur $]-\infty, 0[$.

$P(X \leq 1) = F(1) = 1 - e^{-1} \approx 0,632$

Variable aléatoire continue

Exemple

Pour f définie par $f(x) = e^{-x}$ sur $[0, +\infty[$ et $f(x) = 0$ sur $]-\infty, 0[$,

$F(x) = P(X \leq x) = \int_0^x e^{-t} dt = 1 - e^{-x}$ sur $[0, +\infty[$ et 0 sur $]-\infty, 0[$.

$P(X \leq 1) = F(1) = 1 - e^{-1} \approx 0,632$

$P(1 \leq X \leq 2) = F(2) - F(1) = 1 - e^{-2} - \left(1 - e^{-1}\right) = e^{-1} - e^{-2} \approx 0,233$

Variable aléatoire continue

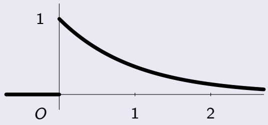
Exemple

Pour f définie par $f(x) = e^{-x}$ sur $[0, +\infty[$ et $f(x) = 0$ sur $]-\infty, 0[$,

$F(x) = P(X \leq x) = \int_0^x e^{-t}dt = 1 - e^{-x}$ sur $[0, +\infty[$ et 0 sur $]-\infty, 0[$.

$P(X \leq 1) = F(1) = 1 - e^{-1} \approx 0,632$

$P(1 \leq X \leq 2) = F(2) - F(1) = 1 - e^{-2} - \left(1 - e^{-1}\right) = e^{-1} - e^{-2} \approx 0,233$



Variable aléatoire continue

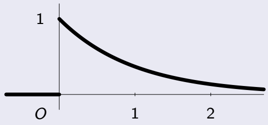
Exemple

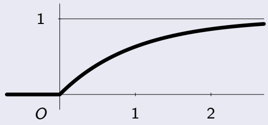
Pour f définie par $f(x) = e^{-x}$ sur $[0, +\infty[$ et $f(x) = 0$ sur $]-\infty, 0[$,

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_0^x e^{-t} dt = 1 - e^{-x} \text{ sur } [0, +\infty[\text{ et } 0 \text{ sur }]-\infty, 0[.$$

$$P(X \leq 1) = F(1) = 1 - e^{-1} \approx 0,632$$

$$P(1 \leq X \leq 2) = F(2) - F(1) = 1 - e^{-2} - \left(1 - e^{-1}\right) = e^{-1} - e^{-2} \approx 0,233$$





Variable aléatoire continue

Fonction d'une variable aléatoire absolument continue

Variable aléatoire continue

Fonction d'une variable aléatoire absolument continue

Soit X une variable aléatoire absolument continue et $\phi : X(\Omega) \to \mathbb{R}$ une fonction.

Variable aléatoire continue

Fonction d'une variable aléatoire absolument continue

Soit X une variable aléatoire absolument continue et $\phi : X(\Omega) \to \mathbb{R}$ une fonction.
Si $P(\phi(X) \leq x)$ existe pour tout réel x, alors $\phi(X)$ est une variable aléatoire.

Variable aléatoire continue

Fonction d'une variable aléatoire absolument continue

Soit X une variable aléatoire absolument continue et $\phi : X(\Omega) \to \mathbb{R}$ une fonction.
Si $P(\phi(X) \leq x)$ existe pour tout réel x, alors $\phi(X)$ est une variable aléatoire.
S'il existe $g \geq 0$ sur $\mathbb{R}$ continue sauf éventuellement en un nombre fini de réels et telle que $G(x) = P(\phi(X) \leq x) = \int_{-\infty}^{x} g(t)dt$ alors $\phi(X)$ est une variable aléatoire absolument continue de densité g.

Variable aléatoire continue

Fonction d'une variable aléatoire absolument continue

Soit X une variable aléatoire absolument continue et $\phi : X(\Omega) \to \mathbb{R}$ une fonction.
Si $P\left(\phi(X) \leq x\right)$ existe pour tout réel x, alors $\phi(X)$ est une variable aléatoire.
S'il existe $g \geq 0$ sur $\mathbb{R}$ continue sauf éventuellement en un nombre fini de réels et telle que $G(x) = P\left(\phi(X) \leq x\right) = \int_{-\infty}^{x} g(t)dt$ alors $\phi(X)$ est une variable aléatoire absolument continue de densité g.

Exemple

Variable aléatoire continue

Fonction d'une variable aléatoire absolument continue

Soit X une variable aléatoire absolument continue et $\phi : X(\Omega) \to \mathbb{R}$ une fonction.
Si $P(\phi(X) \leq x)$ existe pour tout réel x, alors $\phi(X)$ est une variable aléatoire.
S'il existe $g \geq 0$ sur $\mathbb{R}$ continue sauf éventuellement en un nombre fini de réels et telle que $G(x) = P(\phi(X) \leq x) = \int_{-\infty}^{x} g(t)dt$ alors $\phi(X)$ est une variable aléatoire absolument continue de densité g.

Exemple

Si X est une variable aléatoire absolument continue de densité f, et $a \neq 0$ et b deux réels alors $aX + b$ est une variable aléatoire absolument continue de densité $g(x) = \frac{1}{|a|} f\left(\frac{x-b}{a}\right)$.

Variable aléatoire continue

R3.08 Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Plan

Variable aléatoire

Variable aléatoire réelle

Variable aléatoire discrète

Variable aléatoire continue

Complément

Annexe : autres lois

Fonction d'une variable aléatoire absolument continue

Soit X une variable aléatoire absolument continue et $\phi : X(\Omega) \to \mathbb{R}$ une fonction.
Si $P(\phi(X) \leq x)$ existe pour tout réel x, alors $\phi(X)$ est une variable aléatoire.
S'il existe $g \geq 0$ sur $\mathbb{R}$ continue sauf éventuellement en un nombre fini de réels et telle que $G(x) = P(\phi(X) \leq x) = \int_{-\infty}^{x} g(t)dt$ alors $\phi(X)$ est une variable aléatoire absolument continue de densité g.

Exemple

Si X est une variable aléatoire absolument continue de densité f, et $a \neq 0$ et b deux réels alors $aX + b$ est une variable aléatoire absolument continue de densité $g(x) = \frac{1}{|a|} f\left(\frac{x-b}{a}\right)$.
Démonstration en annexe.

Variable aléatoire continue

Espérance

Variable aléatoire continue

Espérance

Soit X une variable aléatoire absolument continue de densité f.

Variable aléatoire continue

Espérance

Soit X une variable aléatoire absolument continue de densité f.
L'espérance de X est $E(X) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$ si l'intégrale est absolument convergente.

Variable aléatoire continue

Espérance

Soit X une variable aléatoire absolument continue de densité f.

L'espérance de X est $E(X) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$ si l'intégrale est absolument convergente.

Sinon, l'espérance n'existe pas.

Variable aléatoire continue

Espérance

Soit X une variable aléatoire absolument continue de densité f.

L'espérance de X est $E(X) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$ si l'intégrale est absolument convergente.

Sinon, l'espérance n'existe pas.

Exemple

Variable aléatoire continue

Espérance

Soit X une variable aléatoire absolument continue de densité f.

L'espérance de X est $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$ si l'intégrale est absolument convergente.

Sinon, l'espérance n'existe pas.

Exemple

Soit X la variable aléatoire de densité f définie par $f(x) = 1$ si $x \in [0, 1]$ et $f(x) = 0$ sinon.

Variable aléatoire continue

Espérance

Soit X une variable aléatoire absolument continue de densité f.

L'espérance de X est $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$ si l'intégrale est absolument convergente.

Sinon, l'espérance n'existe pas.

Exemple

Soit X la variable aléatoire de densité f définie par $f(x) = 1$ si $x \in [0, 1]$ et $f(x) = 0$ sinon.

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\ dx$$

Variable aléatoire continue

Espérance

Soit X une variable aléatoire absolument continue de densité f.
L'espérance de X est $E(X) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$ si l'intégrale est absolument convergente.
Sinon, l'espérance n'existe pas.

Exemple

Soit X la variable aléatoire de densité f définie par $f(x) = 1$ si $x \in [0, 1]$ et $f(x) = 0$ sinon.

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\ dx = \int_0^1 x.1\ dx$$

Variable aléatoire continue

Espérance

Soit X une variable aléatoire absolument continue de densité f.
L'espérance de X est $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$ si l'intégrale est absolument convergente.
Sinon, l'espérance n'existe pas.

Exemple

Soit X la variable aléatoire de densité f définie par $f(x) = 1$ si $x \in [0,1]$ et $f(x) = 0$ sinon.

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\ dx = \int_0^1 x.1\ dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1$$

Variable aléatoire continue

Espérance

Soit X une variable aléatoire absolument continue de densité f.
L'espérance de X est $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$ si l'intégrale est absolument convergente.
Sinon, l'espérance n'existe pas.

Exemple

Soit X la variable aléatoire de densité f définie par $f(x) = 1$ si $x \in [0, 1]$ et $f(x) = 0$ sinon.

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\ dx = \int_0^1 x.1\ dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

Variable aléatoire continue

Espérance de $\phi(X)$

Variable aléatoire continue

R3.08 Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Espérance de $\phi(X)$

Soit X une variable aléatoire absolument continue de densité f.

Variable aléatoire continue

Espérance de $\phi(X)$

Soit X une variable aléatoire absolument continue de densité f.

L'espérance de $\phi(X)$ est $E(\phi(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x)f(x)dx$ si l'intégrale est absolument convergente.

Variable aléatoire continue

Espérance de $\phi(X)$

Soit X une variable aléatoire absolument continue de densité f.
L'espérance de $\phi(X)$ est $E\left(\phi(X)\right) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x)f(x)dx$ si l'intégrale est absolument convergente.

Conséquences

Variable aléatoire continue

Espérance de $\phi(X)$

Soit X une variable aléatoire absolument continue de densité f.
L'espérance de $\phi(X)$ est $E\left(\phi(X)\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x)f(x)dx$ si l'intégrale est absolument convergente.

Conséquences

Si $E(X)$ existe alors $\forall a,\ b,\ E(aX+b)$ existe et $E(aX+b) = aE(X)+b$.

Variable aléatoire continue

R3.08 Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Plan

Variable aléatoire

Variable aléatoire réelle

Variable aléatoire discrète

Variable aléatoire continue

Complément

Annexe : autres lois

Espérance de $\phi(X)$

Soit X une variable aléatoire absolument continue de densité f.
L'espérance de $\phi(X)$ est $E(\phi(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x)f(x)dx$ si l'intégrale est absolument convergente.

Conséquences

Si $E(X)$ existe alors $\forall a,\ b,\ E(aX+b)$ existe et $E(aX+b) = aE(X)+b$.
Si $E(\phi_1(X))$ et $E(\phi_2(X))$ existent

Variable aléatoire continue

Espérance de $\phi(X)$

Soit X une variable aléatoire absolument continue de densité f.

L'espérance de $\phi(X)$ est $E\left(\phi(X)\right) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x)f(x)dx$ si l'intégrale est absolument convergente.

Conséquences

Si $E(X)$ existe alors $\forall a,\ b,\ E(aX+b)$ existe et $E(aX+b) = aE(X)+b$.

Si $E\left(\phi_1(X)\right)$ et $E\left(\phi_2(X)\right)$ existent alors $E\left(\phi_1(X)+\phi_2(X)\right)$ existe et $E\left(\phi_1(X)+\phi_2(X)\right) = E\left(\phi_1(X)\right)+E\left(\phi_2(X)\right)$.

Variable aléatoire continue

Variance

Variable aléatoire continue

Variance

Soit X une variable aléatoire absolument continue de densité f telle que $E(X)$ existe.

Variable aléatoire continue

Variance

Soit X une variable aléatoire absolument continue de densité f telle que $E(X)$ existe.
La variance de X est, si elle existe, $V(X) = E\left((X - E(X))^2\right)$

Variable aléatoire continue

R3.08 Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Plan

Variable aléatoire

Variable aléatoire réelle

Variable aléatoire discrète

Variable aléatoire continue

Complément

Annexe : autres lois

Variance

Soit X une variable aléatoire absolument continue de densité f telle que $E(X)$ existe.
La variance de X est, si elle existe, $V(X) = E\left((X - E(X))^2\right)$
L'écart-type est alors $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Variable aléatoire continue

Variance

Soit X une variable aléatoire absolument continue de densité f telle que $E(X)$ existe.
La variance de X est, si elle existe, $V(X) = E\left((X - E(X))^2\right)$
L'écart-type est alors $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Exemple

Variable aléatoire continue

Variance

Soit X une variable aléatoire absolument continue de densité f telle que $E(X)$ existe.
La variance de X est, si elle existe, $V(X) = E\left((X - E(X))^2\right)$
L'écart-type est alors $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Exemple

Soit X la variable aléatoire de densité f définie par $f(x) = 1$ si $x \in [0, 1]$ et $f(x) = 0$ sinon.

Variable aléatoire continue

Variance

Soit X une variable aléatoire absolument continue de densité f telle que $E(X)$ existe.
La variance de X est, si elle existe, $V(X) = E\left((X - E(X))^2\right)$
L'écart-type est alors $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Exemple

Soit X la variable aléatoire de densité f définie par $f(x) = 1$ si $x \in [0,1]$ et $f(x) = 0$ sinon.

$$V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 f(x)dx$$

Variable aléatoire continue

Variance

Soit X une variable aléatoire absolument continue de densité f telle que $E(X)$ existe.
La variance de X est, si elle existe, $V(X) = E\left((X - E(X))^2\right)$
L'écart-type est alors $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Exemple

Soit X la variable aléatoire de densité f définie par $f(x) = 1$ si $x \in [0, 1]$ et $f(x) = 0$ sinon.

$$V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 f(x)dx = \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 dx$$

Variable aléatoire continue

Variance

Soit X une variable aléatoire absolument continue de densité f telle que $E(X)$ existe.
La variance de X est, si elle existe, $V(X) = E\left((X - E(X))^2\right)$
L'écart-type est alors $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Exemple

Soit X la variable aléatoire de densité f définie par $f(x) = 1$ si $x \in [0, 1]$ et $f(x) = 0$ sinon.

$$V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 f(x)dx = \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 dx = \left[\frac{\left(x - \frac{1}{2}\right)^3}{3}\right]_0^1$$

Variable aléatoire continue

Variance

Soit X une variable aléatoire absolument continue de densité f telle que $E(X)$ existe.
La variance de X est, si elle existe, $V(X) = E\left((X - E(X))^2\right)$
L'écart-type est alors $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Exemple

Soit X la variable aléatoire de densité f définie par $f(x) = 1$ si $x \in [0, 1]$ et $f(x) = 0$ sinon.

$$V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 f(x)dx = \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 dx = \left[\frac{\left(x - \frac{1}{2}\right)^3}{3}\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{24} + \frac{1}{24} = \frac{1}{12}$$

Variable aléatoire continue

Variance

Soit X une variable aléatoire absolument continue de densité f telle que $E(X)$ existe.
La variance de X est, si elle existe, $V(X) = E\left((X - E(X))^2\right)$
L'écart-type est alors $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Exemple

Soit X la variable aléatoire de densité f définie par $f(x) = 1$ si $x \in [0,1]$ et $f(x) = 0$ sinon.

$$V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 f(x)dx = \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 dx = \left[\frac{\left(x - \frac{1}{2}\right)^3}{3}\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{24} + \frac{1}{24} = \frac{1}{12}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\frac{1}{12}} = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

Variable aléatoire continue

Propriétés

Variable aléatoire continue

R3.08 Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Plan

Variable aléatoire

Variable aléatoire réelle

Variable aléatoire discrète

Variable aléatoire continue

Complément

Annexe : autres lois

Propriétés

Sous réserve d'existence,

Variable aléatoire continue

R3.08 Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Propriétés

Sous réserve d'existence,

$$V(X) = E\left(X^2\right) - (E(X))^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - (E(X))^2$$

Variable aléatoire continue

Propriétés

Sous réserve d'existence,

$$V(X) = E\left(X^2\right) - (E(X))^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - (E(X))^2$$

$\forall a,\ b,\ V(aX+b)$ existe et $V(aX+b) = a^2 V(X)$.

Variable aléatoire continue

Propriétés

Sous réserve d'existence,

$$V(X) = E\left(X^2\right) - (E(X))^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - (E(X))^2$$

$\forall a,\ b,\ V(aX+b)$ existe et $V(aX+b) = a^2 V(X)$.

Exemple

Variable aléatoire continue

Propriétés

Sous réserve d'existence,

$$V(X) = E\left(X^2\right) - (E(X))^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - (E(X))^2$$

$\forall a,\ b,\ V(aX+b)$ existe et $V(aX+b) = a^2 V(X)$.

Exemple

$$V(X) = \int_0^1 x^2 f(x)dx - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

Variable aléatoire continue

Variables absolument continues indépendantes

Variable aléatoire continue

Variables absolument continues indépendantes

Deux variables absolument continues X et Y sont indépendantes si

Variable aléatoire continue

Variables absolument continues indépendantes

Deux variables absolument continues X et Y sont indépendantes si

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \;\; P((X \leq x) \cap (Y \leq y)) = P(X \leq x)P(Y \leq y)$$

Variable aléatoire continue

Variables absolument continues indépendantes

Deux variables absolument continues X et Y sont indépendantes si

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \;\; P((X \leq x) \cap (Y \leq y)) = P(X \leq x)P(Y \leq y)$$

n variables absolument continues X_1, X_2, ..., X_n sont indépendantes si

$$\forall x_i \in \mathbb{R} \; P((X_1 \leq x_1) \cap (X_2 \leq x_2) \cdots \cap (X_n \leq x_n))$$

$$= P(X_1 \leq x_1)P(X_2 \leq x_2) \cdots P(X_n \leq x_n)$$

Variable aléatoire continue : lois usuelles

Loi uniforme

Variable aléatoire continue : lois usuelles

Loi uniforme

Soit a et b deux réels. Une variable aléatoire réelle X suit la loi uniforme sur $[a, b]$ si elle admet pour densité la fonction f définie par

Variable aléatoire continue : lois usuelles

Loi uniforme

Soit a et b deux réels. Une variable aléatoire réelle X suit la loi uniforme sur $[a, b]$ si elle admet pour densité la fonction f définie par

$f(x) = \dfrac{1}{b-a}$ si $x \in [a, b]$ et $f(x) = 0$ sinon.

Variable aléatoire continue : lois usuelles

Loi uniforme

Soit a et b deux réels. Une variable aléatoire réelle X suit la loi uniforme sur $[a, b]$ si elle admet pour densité la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{b-a}$ si $x \in [a, b]$ et $f(x) = 0$ sinon.

Notation

Variable aléatoire continue : lois usuelles

Loi uniforme

Soit a et b deux réels. Une variable aléatoire réelle X suit la loi uniforme sur $[a, b]$ si elle admet pour densité la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{b-a}$ si $x \in [a, b]$ et $f(x) = 0$ sinon.

Notation

$X \sim \mathcal{U}_{[a,b]}$.

Variable aléatoire continue : lois usuelles

R3.08 Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Plan

Variable aléatoire

Variable aléatoire réelle

Variable aléatoire discrète

Variable aléatoire continue

Complément

Annexe : autres lois

Loi uniforme : exemple

Variable aléatoire continue : lois usuelles

R3.08
Probabilités
Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Plan

Variable aléatoire

Variable aléatoire réelle

Variable aléatoire discrète

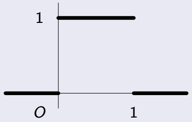
Variable aléatoire continue

Complément

Annexe : autres lois

Loi uniforme : exemple

Toute variable aléatoire X de densité f définie par $f(x) = 1$ si $x \in [0, 1]$ et $f(x) = 0$ sinon.



Variable aléatoire continue : lois usuelles

Loi uniforme : propriétés

Variable aléatoire continue : lois usuelles

Loi uniforme : propriétés

Fonction de répartition :

Variable aléatoire continue : lois usuelles

Loi uniforme : propriétés

Fonction de répartition :

$F(x) = 0$ si $x < a$, $F(x) = \dfrac{x-a}{b-a}$ si $a \leq x < b$, $F(x) = 1$ si $x \geq b$.

Variable aléatoire continue : lois usuelles

Loi uniforme : propriétés

Fonction de répartition :

$F(x) = 0$ si $x < a$, $F(x) = \dfrac{x-a}{b-a}$ si $a \leq x < b$, $F(x) = 1$ si $x \geq b$.

$E(X) = \dfrac{a+b}{2}$, $V(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12}$

Variable aléatoire continue : lois usuelles

R3.08
Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Plan

Variable aléatoire

Variable aléatoire réelle

Variable aléatoire discrète

Variable aléatoire continue

Complément

Annexe : autres lois

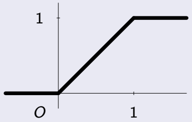
Loi uniforme : propriétés

Fonction de répartition :

$F(x) = 0$ si $x < a$, $F(x) = \dfrac{x-a}{b-a}$ si $a \leq x < b$, $F(x) = 1$ si $x \geq b$.

$E(X) = \dfrac{a+b}{2}$, $V(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12}$

Exemple : $X \sim \mathcal{U}_{[0,1]}$



Variable aléatoire continue : lois usuelles

Loi exponentielle

Variable aléatoire continue : lois usuelles

Loi exponentielle

Soit a un réel strictement positif.

Variable aléatoire continue : lois usuelles

Loi exponentielle

Soit a un réel strictement positif. Une variable aléatoire réelle X suit la loi exponentielle de paramètre a si elle admet pour densité la fonction f définie par

Variable aléatoire continue : lois usuelles

Loi exponentielle

Soit a un réel strictement positif. Une variable aléatoire réelle X suit la loi exponentielle de paramètre a si elle admet pour densité la fonction f définie par $f(x) = ae^{-ax}$ si $x \geq 0$, $f(x) = 0$ sinon.

Variable aléatoire continue : lois usuelles

Loi exponentielle

Soit a un réel strictement positif. Une variable aléatoire réelle X suit la loi exponentielle de paramètre a si elle admet pour densité la fonction f définie par $f(x) = ae^{-ax}$ si $x \geq 0$, $f(x) = 0$ sinon.

Notation

Variable aléatoire continue : lois usuelles

Loi exponentielle

Soit a un réel strictement positif. Une variable aléatoire réelle X suit la loi exponentielle de paramètre a si elle admet pour densité la fonction f définie par $f(x) = ae^{-ax}$ si $x \geq 0$, $f(x) = 0$ sinon.

Notation

$X \sim \mathcal{E}(a)$.

Loi exponentielle : exemple

Variable aléatoire continue : lois usuelles

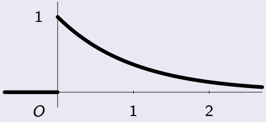
Loi exponentielle : exemple

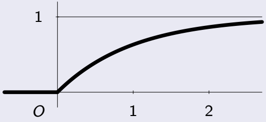
Toute variable aléatoire X de densité f définie par $f(x) = e^{-x}$ sur $[0, +\infty[$ et $f(x) = 0$ sinon.

Variable aléatoire continue : lois usuelles

Loi exponentielle : exemple

Toute variable aléatoire X de densité f définie par $f(x) = e^{-x}$ sur $[0, +\infty[$ et $f(x) = 0$ sinon.





Variable aléatoire continue : lois usuelles

Loi exponentielle : propriétés

Variable aléatoire continue : lois usuelles

Loi exponentielle : propriétés

$X \sim \mathcal{E}(a)$ $(a > 0)$

Variable aléatoire continue : lois usuelles

Loi exponentielle : propriétés

$X \sim \mathcal{E}(a)$ $(a > 0)$
$f(x) = ae^{-ax}$ si $x \geq 0$, $f(x) = 0$ sinon.

Variable aléatoire continue : lois usuelles

Loi exponentielle : propriétés

$X \sim \mathcal{E}(a)$ $(a > 0)$
$f(x) = ae^{-ax}$ si $x \geq 0$, $f(x) = 0$ sinon.
Fonction de répartition :

Variable aléatoire continue : lois usuelles

Loi exponentielle : propriétés

$X \sim \mathcal{E}(a)$ $(a > 0)$
$f(x) = ae^{-ax}$ si $x \geq 0$, $f(x) = 0$ sinon.
Fonction de répartition :
$F(x) = 0$ si $x < 0$, $F(x) = 1 - e^{-ax}$ si $x \geq 0$.

Variable aléatoire continue : lois usuelles

Loi exponentielle : propriétés

$X \sim \mathcal{E}(a)$ $(a > 0)$
$f(x) = ae^{-ax}$ si $x \geq 0$, $f(x) = 0$ sinon.
Fonction de répartition :
$F(x) = 0$ si $x < 0$, $F(x) = 1 - e^{-ax}$ si $x \geq 0$.

$$E(X) = \int_0^{+\infty} xae^{-ax}\,dx = \frac{1}{a}$$

Variable aléatoire continue : lois usuelles

Loi exponentielle : propriétés

$X \sim \mathcal{E}(a)$ $(a > 0)$

$f(x) = ae^{-ax}$ si $x \geq 0$, $f(x) = 0$ sinon.

Fonction de répartition :

$F(x) = 0$ si $x < 0$, $F(x) = 1 - e^{-ax}$ si $x \geq 0$.

$$E(X) = \int_0^{+\infty} xae^{-ax}\,dx = \frac{1}{a}$$

$$V(X) = \int_0^{+\infty} x^2ae^{-ax}\,dx - (E(X))^2 = \frac{1}{a^2}$$

Variable aléatoire continue : lois usuelles

Loi exponentielle : propriétés

$X \sim \mathcal{E}(a)$ $(a > 0)$

$f(x) = ae^{-ax}$ si $x \geq 0$, $f(x) = 0$ sinon.

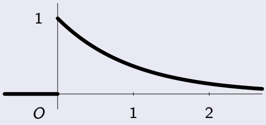
Fonction de répartition :

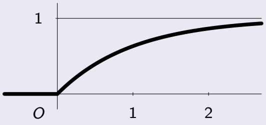
$F(x) = 0$ si $x < 0$, $F(x) = 1 - e^{-ax}$ si $x \geq 0$.

$$E(X) = \int_0^{+\infty} xae^{-ax}\,dx = \frac{1}{a}$$

$$V(X) = \int_0^{+\infty} x^2ae^{-ax}\,dx - (E(X))^2 = \frac{1}{a^2}$$

Exemple : $X \sim \mathcal{E}(1)$





Loi normale centrée réduite

Variable aléatoire continue : lois usuelles

Loi normale centrée réduite

Une variable aléatoire réelle X suit la loi normale centrée réduite si elle admet pour densité la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Variable aléatoire continue : lois usuelles

Loi normale centrée réduite

Une variable aléatoire réelle X suit la loi normale centrée réduite si elle admet pour densité la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Remarque

Variable aléatoire continue : lois usuelles

Loi normale centrée réduite

Une variable aléatoire réelle X suit la loi normale centrée réduite si elle admet pour densité la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Remarque

La définition est justifiée par $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = \sqrt{2\pi}$.

Variable aléatoire continue : lois usuelles

R3.08 Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Loi normale centrée réduite

Une variable aléatoire réelle X suit la loi normale centrée réduite si elle admet pour densité la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Remarque

La définition est justifiée par $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}$.

Notation

Variable aléatoire continue : lois usuelles

Loi normale centrée réduite

Une variable aléatoire réelle X suit la loi normale centrée réduite si elle admet pour densité la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Remarque

La définition est justifiée par $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = \sqrt{2\pi}$.

Notation

$X \sim \mathcal{N}(0,\, 1)$.

Variable aléatoire continue : lois usuelles

Loi normale centrée réduite

Une variable aléatoire réelle X suit la loi normale centrée réduite si elle admet pour densité la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Remarque

La définition est justifiée par $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}$.

Notation

$X \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

La loi normale a été définie par Pierre-Simon de Laplace (1749-1827; français) en 1774, puis Carl-Friedrich Gauss (1777-1855; allemand) en 1809.

Variable aléatoire continue : lois usuelles

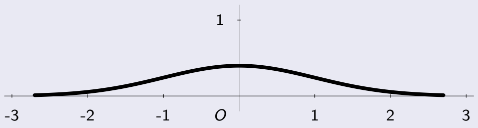
R3.08 Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Loi normale centrée réduite : $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

Variable aléatoire continue : lois usuelles

Loi normale centrée réduite : $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$



Variable aléatoire continue : lois usuelles

R3.08 Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Loi normale centrée réduite : propriétés

Variable aléatoire continue : lois usuelles

Loi normale centrée réduite : propriétés

Fonction de répartition :

Variable aléatoire continue : lois usuelles

R3.08
Probabilités

Département Informatique
IUT de Saint-Dié-des-Vosges

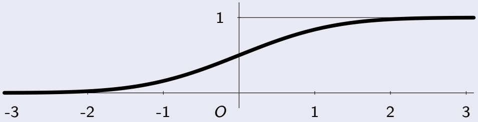
Loi normale centrée réduite : propriétés

Fonction de répartition : $F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} \, dt$

Variable aléatoire continue : lois usuelles

Loi normale centrée réduite : propriétés

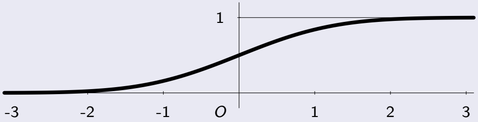
Fonction de répartition : $F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$



Variable aléatoire continue : lois usuelles

Loi normale centrée réduite : propriétés

Fonction de répartition : $F(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$



$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\, dx = 0$$

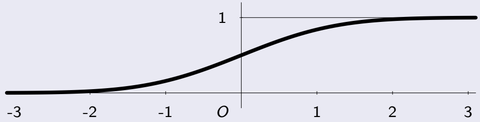
Variable aléatoire continue : lois usuelles

R3.08 Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Loi normale centrée réduite : propriétés

Fonction de répartition : $F(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$



$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\, dx = 0$$

$$V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\, dx - (E(X))^2 = 1$$

Variable aléatoire continue : lois usuelles

Loi normale centrée réduite : propriétés

Variable aléatoire continue : lois usuelles

R3.08 Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Plan

Variable aléatoire

Variable aléatoire réelle

Variable aléatoire discrète

Variable aléatoire continue

Complément

Annexe : autres lois

Loi normale centrée réduite : propriétés

Soit F la fonction de répartition de X suivant la loi normale centrée réduite.

Variable aléatoire continue : lois usuelles

Loi normale centrée réduite : propriétés

Soit F la fonction de répartition de X suivant la loi normale centrée réduite.

$F(0) = P(X \leq 0) = 0,5$

Variable aléatoire continue : lois usuelles

Loi normale centrée réduite : propriétés

Soit F la fonction de répartition de X suivant la loi normale centrée réduite.

$F(0) = P(X \leq 0) = 0,5$

$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = P(X \leq x) = P(X \geq -x) = 1 - P(X \leq -x)$.

Variable aléatoire continue : lois usuelles

Loi normale centrée réduite : propriétés

Soit F la fonction de répartition de X suivant la loi normale centrée réduite.

$F(0) = P(X \leq 0) = 0,5$

$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = P(X \leq x) = P(X \geq -x) = 1 - P(X \leq -x)$.

$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = 1 - F(-x)$.

Variable aléatoire continue : lois usuelles

Loi normale centrée réduite : propriétés

Soit F la fonction de répartition de X suivant la loi normale centrée réduite.

$F(0) = P(X \leq 0) = 0,5$

$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = P(X \leq x) = P(X \geq -x) = 1 - P(X \leq -x)$.

$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = 1 - F(-x)$.

$P(-1 \leq X \leq 1) \approx 0,6826$

Variable aléatoire continue : lois usuelles

Loi normale centrée réduite : propriétés

Soit F la fonction de répartition de X suivant la loi normale centrée réduite.

$F(0) = P(X \leq 0) = 0,5$

$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = P(X \leq x) = P(X \geq -x) = 1 - P(X \leq -x)$.

$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = 1 - F(-x)$.

$P(-1 \leq X \leq 1) \approx 0,6826$

$P(-2 \leq X \leq 2) \approx 0,9544$

Variable aléatoire continue : lois usuelles

R3.08 Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Plan

Variable aléatoire

Variable aléatoire réelle

Variable aléatoire discrète

Variable aléatoire continue

Complément

Annexe : autres lois

Loi normale centrée réduite : propriétés

Soit F la fonction de répartition de X suivant la loi normale centrée réduite.

$F(0) = P(X \leq 0) = 0,5$

$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = P(X \leq x) = P(X \geq -x) = 1 - P(X \leq -x)$.

$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = 1 - F(-x)$.

$P(-1 \leq X \leq 1) \approx 0,6826$

$P(-2 \leq X \leq 2) \approx 0,9544$

$P(-3 \leq X \leq 3) \approx 0,9974$

Variable aléatoire continue : lois usuelles

Loi normale centrée réduite : calculs

Loi normale centrée réduite : calculs

$P(-1 \leq X \leq 1)$

Variable aléatoire continue : lois usuelles

R3.08 Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Loi normale centrée réduite : calculs

$$P(-1 \leq X \leq 1) = F(1) - F(-1)$$

Variable aléatoire continue : lois usuelles

Loi normale centrée réduite : calculs

$$P(-1 \leq X \leq 1) = F(1) - F(-1) = F(1) - (1 - F(1))$$

Variable aléatoire continue : lois usuelles

Loi normale centrée réduite : calculs

$$P(-1 \leq X \leq 1) = F(1) - F(-1) = F(1) - (1 - F(1))$$
$$= 2F(1) - 1$$

Variable aléatoire continue : lois usuelles

Loi normale centrée réduite : calculs

$P(-1 \leq X \leq 1) = F(1) - F(-1) = F(1) - (1 - F(1))$
$= 2F(1) - 1 \approx 2.0,8413 - 1 \approx 0,6826$

Loi normale centrée réduite : calculs

$P(-1 \leq X \leq 1) = F(1) - F(-1) = F(1) - (1 - F(1))$
$= 2F(1) - 1 \approx 2.0,8413 - 1 \approx 0,6826$
$P(-2 \leq X \leq 2)$

Loi normale centrée réduite : calculs

$P(-1 \leq X \leq 1) = F(1) - F(-1) = F(1) - (1 - F(1))$
$= 2F(1) - 1 \approx 2.0,8413 - 1 \approx 0,6826$
$P(-2 \leq X \leq 2) = 2F(2) - 1 \approx 2.0,9772 - 1 \approx 0,9544$

Variable aléatoire continue : lois usuelles

Loi normale centrée réduite : calculs

$P(-1 \leq X \leq 1) = F(1) - F(-1) = F(1) - (1 - F(1))$
$= 2F(1) - 1 \approx 2.0,8413 - 1 \approx 0,6826$
$P(-2 \leq X \leq 2) = 2F(2) - 1 \approx 2.0,9772 - 1 \approx 0,9544$
$P(-3 \leq X \leq 3)$

Variable aléatoire continue : lois usuelles

Loi normale centrée réduite : calculs

$P(-1 \leq X \leq 1) = F(1) - F(-1) = F(1) - (1 - F(1))$
$= 2F(1) - 1 \approx 2.0,8413 - 1 \approx 0,6826$
$P(-2 \leq X \leq 2) = 2F(2) - 1 \approx 2.0,9772 - 1 \approx 0,9544$
$P(-3 \leq X \leq 3) = 2F(3) - 1 \approx 2.0,9987 - 1 \approx 0,9974$

Variable aléatoire continue : lois usuelles

Loi normale centrée réduite : calculs

$P(-1 \leq X \leq 1) = F(1) - F(-1) = F(1) - (1 - F(1))$
$= 2F(1) - 1 \approx 2.0,8413 - 1 \approx 0,6826$
$P(-2 \leq X \leq 2) = 2F(2) - 1 \approx 2.0,9772 - 1 \approx 0,9544$
$P(-3 \leq X \leq 3) = 2F(3) - 1 \approx 2.0,9987 - 1 \approx 0,9974$
$P(-0,54 \leq X \leq 1,12)$

Variable aléatoire continue : lois usuelles

Loi normale centrée réduite : calculs

$P(-1 \leq X \leq 1) = F(1) - F(-1) = F(1) - (1 - F(1))$
$= 2F(1) - 1 \approx 2.0,8413 - 1 \approx 0,6826$
$P(-2 \leq X \leq 2) = 2F(2) - 1 \approx 2.0,9772 - 1 \approx 0,9544$
$P(-3 \leq X \leq 3) = 2F(3) - 1 \approx 2.0,9987 - 1 \approx 0,9974$
$P(-0,54 \leq X \leq 1,12) = F(1,12) - F(-0,54)$

Variable aléatoire continue : lois usuelles

Loi normale centrée réduite : calculs

$P(-1 \leq X \leq 1) = F(1) - F(-1) = F(1) - (1 - F(1))$
$= 2F(1) - 1 \approx 2.0,8413 - 1 \approx 0,6826$
$P(-2 \leq X \leq 2) = 2F(2) - 1 \approx 2.0,9772 - 1 \approx 0,9544$
$P(-3 \leq X \leq 3) = 2F(3) - 1 \approx 2.0,9987 - 1 \approx 0,9974$
$P(-0,54 \leq X \leq 1,12) = F(1,12) - F(-0,54) = F(1,12) - (1 - F(0,54))$

Loi normale centrée réduite : calculs

$P(-1 \leq X \leq 1) = F(1) - F(-1) = F(1) - (1 - F(1))$
$= 2F(1) - 1 \approx 2.0,8413 - 1 \approx 0,6826$
$P(-2 \leq X \leq 2) = 2F(2) - 1 \approx 2.0,9772 - 1 \approx 0,9544$
$P(-3 \leq X \leq 3) = 2F(3) - 1 \approx 2.0,9987 - 1 \approx 0,9974$
$P(-0,54 \leq X \leq 1,12) = F(1,12) - F(-0,54) = F(1,12) - (1 - F(0,54))$
$= F(1,12) - 1 + F(0,54) \approx 0,8686 - 1 + 0,7054 \approx 0,5740$

Variable aléatoire continue : lois usuelles

Loi normale

Variable aléatoire continue : lois usuelles

Loi normale

Une variable aléatoire réelle X suit la loi normale de paramètres m et σ si elle admet pour densité la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$

Variable aléatoire continue : lois usuelles

Loi normale

Une variable aléatoire réelle X suit la loi normale de paramètres m et σ si elle admet pour densité la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$

Loi normale : propriété

Variable aléatoire continue : lois usuelles

Loi normale

Une variable aléatoire réelle X suit la loi normale de paramètres m et σ si elle admet pour densité la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$

Loi normale : propriété

$E(X) = m$
$V(X) = \sigma^2$

Variable aléatoire continue : lois usuelles

R3.08 Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Loi normale

Une variable aléatoire réelle X suit la loi normale de paramètres m et σ si elle admet pour densité la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$

Loi normale : propriété

$E(X) = m$

$V(X) = \sigma^2$

Notation

Variable aléatoire continue : lois usuelles

R3.08 Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Loi normale

Une variable aléatoire réelle X suit la loi normale de paramètres m et σ si elle admet pour densité la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$

Loi normale : propriété

$E(X) = m$

$V(X) = \sigma^2$

Notation

$X \sim \mathcal{N}(m, \sigma)$

Variable aléatoire continue : lois usuelles

Loi normale : exemples

Variable aléatoire continue : lois usuelles

Loi normale : exemples

$\mathcal{N}(-1, 2)$,

Variable aléatoire continue : lois usuelles

R3.08 Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Loi normale : exemples

$\mathcal{N}(-1,\,2)$, $\mathcal{N}(1,\,\frac{1}{5})$,

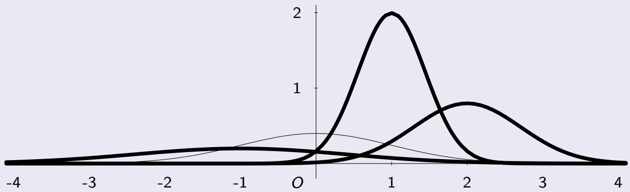
Loi normale : exemples

$\mathcal{N}(-1,\, 2)$, $\mathcal{N}(1,\, \frac{1}{5})$, $\mathcal{N}(2,\, \frac{1}{2})$

Variable aléatoire continue : lois usuelles

Loi normale : exemples

$\mathcal{N}(-1,\ 2)$, $\mathcal{N}(1,\ \frac{1}{5})$, $\mathcal{N}(2,\ \frac{1}{2})$



Variable aléatoire continue : lois usuelles

Loi normale : propriété

Variable aléatoire continue : lois usuelles

Loi normale : propriété

$X \sim \mathcal{N}(m, \sigma)$

Variable aléatoire continue : lois usuelles

Loi normale : propriété

$X \sim \mathcal{N}(m, \sigma)$ si et seulement si $T = \dfrac{X - m}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1)$

Variable aléatoire continue : lois usuelles

Loi normale : propriété

$X \sim \mathcal{N}(m, \sigma)$ si et seulement si $T = \dfrac{X - m}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1)$

Démonstration

Variable aléatoire continue : lois usuelles

Loi normale : propriété

$X \sim \mathcal{N}(m, \sigma)$ si et seulement si $T = \dfrac{X - m}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1)$

Démonstration

$T = \frac{X-m}{\sigma} = \frac{1}{\sigma}X - \frac{m}{\sigma}$.

Variable aléatoire continue : lois usuelles

R3.08 Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Plan

Variable aléatoire

Variable aléatoire réelle

Variable aléatoire discrète

Variable aléatoire continue

Complément

Annexe : autres lois

Loi normale : propriété

$X \sim \mathcal{N}(m, \sigma)$ si et seulement si $T = \dfrac{X - m}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1)$

Démonstration

$T = \frac{X-m}{\sigma} = \frac{1}{\sigma}X - \frac{m}{\sigma}$.
La densité associée à T est donc

Variable aléatoire continue : lois usuelles

Loi normale : propriété

$X \sim \mathcal{N}(m, \sigma)$ si et seulement si $T = \dfrac{X-m}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1)$

Démonstration

$T = \frac{X-m}{\sigma} = \frac{1}{\sigma}X - \frac{m}{\sigma}$.
La densité associée à T est donc

$$g(x) = \frac{1}{\frac{1}{\sigma}} f\left(\frac{x - (-\frac{m}{\sigma})}{\frac{1}{\sigma}}\right) = \sigma f(\sigma x + m) = \sigma \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(\sigma x + m - m)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Variable aléatoire continue : lois usuelles

Loi normale : exemple

Variable aléatoire continue : lois usuelles

Loi normale : exemple

Soit $X \sim \mathcal{N}(2, \dfrac{1}{2})$.

Variable aléatoire continue : lois usuelles

Loi normale : exemple

Soit $X \sim \mathcal{N}(2, \dfrac{1}{2})$.

$P\left(1 \leq X \leq 2,5\right)$

Variable aléatoire continue : lois usuelles

Loi normale : exemple

Soit $X \sim \mathcal{N}(2, \frac{1}{2})$.

$$P(1 \leq X \leq 2,5) = P\left(\frac{1-2}{0,5} \leq \frac{X-2}{0,5} \leq \frac{2,5-2}{0,5}\right)$$

Variable aléatoire continue : lois usuelles

Loi normale : exemple

Soit $X \sim \mathcal{N}(2, \frac{1}{2})$.

$$P(1 \leq X \leq 2,5) = P\left(\frac{1-2}{0,5} \leq \frac{X-2}{0,5} \leq \frac{2,5-2}{0,5}\right) = P(-2 \leq T \leq 1)$$

Variable aléatoire continue : lois usuelles

R3.08 Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Loi normale : exemple

Soit $X \sim \mathcal{N}(2, \frac{1}{2})$.

$$P(1 \leq X \leq 2,5) = P\left(\frac{1-2}{0,5} \leq \frac{X-2}{0,5} \leq \frac{2,5-2}{0,5}\right) = P(-2 \leq T \leq 1)$$

$$= F(1) - F(-2)$$

Loi normale : exemple

Soit $X \sim \mathcal{N}(2, \frac{1}{2})$.

$$P(1 \leq X \leq 2,5) = P\left(\frac{1-2}{0,5} \leq \frac{X-2}{0,5} \leq \frac{2,5-2}{0,5}\right) = P(-2 \leq T \leq 1)$$
$$= F(1) - F(-2) = F(1) - (1 - F(2))$$

Variable aléatoire continue : lois usuelles

Loi normale : exemple

Soit $X \sim \mathcal{N}(2, \frac{1}{2})$.

$$P(1 \leq X \leq 2,5) = P\left(\frac{1-2}{0,5} \leq \frac{X-2}{0,5} \leq \frac{2,5-2}{0,5}\right) = P(-2 \leq T \leq 1)$$

$$= F(1) - F(-2) = F(1) - (1 - F(2)) = F(1) - 1 + F(2)$$

Variable aléatoire continue : lois usuelles

Loi normale : exemple

Soit $X \sim \mathcal{N}(2, \frac{1}{2})$.

$$P\left(1 \leq X \leq 2,5\right) = P\left(\frac{1-2}{0,5} \leq \frac{X-2}{0,5} \leq \frac{2,5-2}{0,5}\right) = P\left(-2 \leq T \leq 1\right)$$

$$= F(1) - F(-2) = F(1) - (1 - F(2)) = F(1) - 1 + F(2)$$

$$\approx 0,8413 - 1 + 0,9772 \approx 0,8185$$

Propriétés de l'espérance

Variable aléatoire continue

Propriétés de l'espérance

Soit X et Y deux variables aléatoires absolument continues dont l'espérance existe et a et b deux réels.

Variable aléatoire continue

Propriétés de l'espérance

Soit X et Y deux variables aléatoires absolument continues dont l'espérance existe et a et b deux réels.
$E(aX + bY)$ existe et $E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$.

Variable aléatoire continue

Propriétés de l'espérance

Soit X et Y deux variables aléatoires absolument continues dont l'espérance existe et a et b deux réels.
$E(aX + bY)$ existe et $E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$.
Si X et Y sont indépendantes alors $E(XY) = E(X)E(Y)$.

Variable aléatoire continue

Propriétés de l'espérance

Soit X et Y deux variables aléatoires absolument continues dont l'espérance existe et a et b deux réels.

$E(aX + bY)$ existe et $E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$.

Si X et Y sont indépendantes alors $E(XY) = E(X)E(Y)$.

Si X_1, X_2, ..., X_n sont indépendantes alors $E(X_1X_2 \cdots X_n) = E(X_1)E(X_2) \cdots E(X_n)$.

Variable aléatoire continue

Propriétés de la variance

Variable aléatoire continue

R3.08 Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Propriétés de la variance

Soit X et Y (respectivement X_1, X_2, ..., X_n) deux (respectivement n) variables aléatoires absolument continues indépendantes.

Variable aléatoire continue

Propriétés de la variance

Soit X et Y (respectivement X_1, X_2, ..., X_n) deux (respectivement n) variables aléatoires absolument continues indépendantes.
Alors $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$

Variable aléatoire continue

Propriétés de la variance

Soit X et Y (respectivement X_1, X_2, ..., X_n) deux (respectivement n) variables aléatoires absolument continues indépendantes.

Alors $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$

$V(X_1 + X_2 + \cdots X_n) = V(X_1) + V(X_2) + \cdots + V(X_n)$

Variable aléatoire continue

Loi normale : propriété

Loi normale : propriété

Si X_1, X_2, ..., X_n sont n variables aléatoires indépendantes suivant respectivement la loi normale $\mathcal{N}(m_1, \sigma_1)$, $\mathcal{N}(m_2, \sigma_2)$,..., $\mathcal{N}(m_n, \sigma_n)$ et α_i des réels alors

Variable aléatoire continue

Loi normale : propriété

Si X_1, X_2, ..., X_n sont n variables aléatoires indépendantes suivant respectivement la loi normale $\mathcal{N}(m_1, \sigma_1)$, $\mathcal{N}(m_2, \sigma_2)$,..., $\mathcal{N}(m_n, \sigma_n)$ et α_i des réels alors $X = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \cdots + \alpha_n X_n \sim \mathcal{N}(m, \sigma)$

Loi normale : propriété

Si X_1, X_2, ..., X_n sont n variables aléatoires indépendantes suivant respectivement la loi normale $\mathcal{N}(m_1, \sigma_1)$, $\mathcal{N}(m_2, \sigma_2)$,..., $\mathcal{N}(m_n, \sigma_n)$ et α_i des réels alors $X = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \cdots + \alpha_n X_n \sim \mathcal{N}(m, \sigma)$

avec $m = \alpha_1 m_1 + \alpha_2 m_2 + \cdots \alpha_n m_n$

Variable aléatoire continue

Loi normale : propriété

Si X_1, X_2, ..., X_n sont n variables aléatoires indépendantes suivant respectivement la loi normale $\mathcal{N}(m_1,\, \sigma_1)$, $\mathcal{N}(m_2,\, \sigma_2)$,..., $\mathcal{N}(m_n,\, \sigma_n)$ et α_i des réels alors $X = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \cdots + \alpha_n X_n \sim \mathcal{N}(m,\, \sigma)$

avec $m = \alpha_1 m_1 + \alpha_2 m_2 + \cdots \alpha_n m_n$ et $\sigma = \sqrt{\alpha_1^2\sigma_1^2 + \alpha_2^2\sigma_2^2 + \cdots + \alpha_n^2\sigma_n^2}$

Loi normale : propriété

Variable aléatoire continue

Loi normale : propriété

Cas particulier important

Loi normale : propriété

Cas particulier important
Si X_1, X_2, ..., X_n sont n variables aléatoires indépendantes suivant la même loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma)$ alors

Variable aléatoire continue

Loi normale : propriété

Cas particulier important

Si X_1, X_2, ..., X_n sont n variables aléatoires indépendantes suivant la même loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma)$ alors $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n \sim \mathcal{N}(nm, \sqrt{n}\sigma)$

Variable aléatoire continue

Loi normale : propriété

Cas particulier important

Si X_1, X_2, ..., X_n sont n variables aléatoires indépendantes suivant la même loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma)$ alors $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n \sim \mathcal{N}(nm, \sqrt{n}\sigma)$

et $\overline{X} = \dfrac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} \sim \mathcal{N}(m, \sigma/\sqrt{n})$

Variable aléatoire continue

Loi normale : propriété et exemple

Variable aléatoire continue

Loi normale : propriété et exemple

Exemple : la contenance (en grammes) d'une boîte de céréales suit la loi normale $\mathcal{N}(750, 5)$.

Loi normale : propriété et exemple

Exemple : la contenance (en grammes) d'une boîte de céréales suit la loi normale $\mathcal{N}(750, 5)$.
On prend au hasard $n = 10$ boîtes. On suppose que la contenance de la i-ème boîte est une variable aléatoire $X_i \sim \mathcal{N}(750, 5)$ et que les X_i sont indépendantes.

Variable aléatoire continue

Loi normale : propriété et exemple

Exemple : la contenance (en grammes) d'une boîte de céréales suit la loi normale $\mathcal{N}(750, 5)$.

On prend au hasard $n = 10$ boîtes. On suppose que la contenance de la i-ème boîte est une variable aléatoire $X_i \sim \mathcal{N}(750, 5)$ et que les X_i sont indépendantes.

$$X = \sum_{i=1}^{10} X_i \sim \mathcal{N}(750 \times 10,\ 5\sqrt{10})$$

Variable aléatoire continue

Loi normale : propriété et exemple

Exemple : la contenance (en grammes) d'une boîte de céréales suit la loi normale $\mathcal{N}(750,\, 5)$.

On prend au hasard $n = 10$ boîtes. On suppose que la contenance de la i-ème boîte est une variable aléatoire $X_i \sim \mathcal{N}(750,\, 5)$ et que les X_i sont indépendantes.

$$X = \sum_{i=1}^{10} X_i \sim \mathcal{N}(750 \times 10,\, 5\sqrt{10})$$

$$\overline{X} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} X_i \sim \mathcal{N}(750,\, 5/\sqrt{10})$$

Variable aléatoire réelle

R3.08 Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Démonstration : P_X est une probabilité

Variable aléatoire réelle

Démonstration : P_X est une probabilité

La loi de probabilité de X est l'application $P_X : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0, 1]$ définie par $P_X(B) = P\left(X^{-1}(B)\right) = P(X \in B)$.

Variable aléatoire réelle

Démonstration : P_X est une probabilité

La loi de probabilité de X est l'application $P_X : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0, 1]$ définie par
$P_X(B) = P\left(X^{-1}(B)\right) = P(X \in B)$.

a) $P_X(\mathbb{R}) = P\left(X^{-1}(\mathbb{R})\right) = P(\Omega) = 1$

Variable aléatoire réelle

Démonstration : P_X est une probabilité

La loi de probabilité de X est l'application $P_X : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0,1]$ définie par $P_X(B) = P\left(X^{-1}(B)\right) = P(X \in B)$.

a) $P_X(\mathbb{R}) = P\left(X^{-1}(\mathbb{R})\right) = P(\Omega) = 1$

b) Soit $(B_i)_{i \geq 1}$ une suite d'événements incompatibles.

Démonstration : P_X est une probabilité

La loi de probabilité de X est l'application $P_X : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0,1]$ définie par $P_X(B) = P\left(X^{-1}(B)\right) = P(X \in B)$.

a) $P_X(\mathbb{R}) = P\left(X^{-1}(\mathbb{R})\right) = P(\Omega) = 1$

b) Soit $(B_i)_{i \geq 1}$ une suite d'événements incompatibles.

On a

$$X^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} B_i\right) = \bigcup_{i=1}^{+\infty} X^{-1}(B_i)$$

et $X^{-1}(B_i) \cap X^{-1}(B_j) = X^{-1}(B_i \cap B_j) = X^{-1}(\emptyset) = \emptyset$.

Variable aléatoire réelle

Démonstration : P_X est une probabilité

La loi de probabilité de X est l'application $P_X : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0,1]$ définie par $P_X(B) = P\left(X^{-1}(B)\right) = P(X \in B)$.

a) $P_X(\mathbb{R}) = P\left(X^{-1}(\mathbb{R})\right) = P(\Omega) = 1$

b) Soit $(B_i)_{i \geq 1}$ une suite d'événements incompatibles.
On a

$$X^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} B_i\right) = \bigcup_{i=1}^{+\infty} X^{-1}(B_i)$$

et $X^{-1}(B_i) \cap X^{-1}(B_j) = X^{-1}(B_i \cap B_j) = X^{-1}(\emptyset) = \emptyset$.
On en déduit

$$P_X\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} B_i\right) = P\left(X^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} B_i\right)\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} X^{-1}(B_i)\right) = \sum_{i=1}^{+\infty} P\left(X^{-1}(B_i)\right)$$

Variable aléatoire réelle

R3.08 Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Plan

Variable aléatoire

Variable aléatoire réelle

Variable aléatoire discrète

Variable aléatoire continue

Complément

Annexe : autres lois

Démonstration : P_X est une probabilité

La loi de probabilité de X est l'application $P_X : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0,1]$ définie par $P_X(B) = P\left(X^{-1}(B)\right) = P(X \in B)$.

a) $P_X(\mathbb{R}) = P\left(X^{-1}(\mathbb{R})\right) = P(\Omega) = 1$

b) Soit $(B_i)_{i\geq 1}$ une suite d'événements incompatibles.

On a

$$X^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} B_i\right) = \bigcup_{i=1}^{+\infty} X^{-1}(B_i)$$

et $X^{-1}(B_i) \cap X^{-1}(B_j) = X^{-1}(B_i \cap B_j) = X^{-1}(\emptyset) = \emptyset$.

On en déduit

$$P_X\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} B_i\right) = P\left(X^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} B_i\right)\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} X^{-1}(B_i)\right) = \sum_{i=1}^{+\infty} P\left(X^{-1}(B_i)\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{+\infty} P_X(B_i)$$

Espérance d'une variable aléatoire suivant la loi binomiale

Démonstration

Espérance d'une variable aléatoire suivant la loi binomiale

Démonstration

Loi de probabilité (loi binomiale) de X :

Espérance d'une variable aléatoire suivant la loi binomiale

Démonstration

Loi de probabilité (loi binomiale) de X :
$\forall i,\ 0 \leq i \leq n,\ P\left(X = i\right) = C_n^i p^i \left(1 - p\right)^{n-i}$

Espérance d'une variable aléatoire suivant la loi binomiale

Démonstration

Loi de probabilité (loi binomiale) de X :

$\forall i,\ 0 \leq i \leq n,\ P(X = i) = C_n^i p^i (1-p)^{n-i}$

$$E(X) = \sum_{i=0}^{n} iP(X = i) = \sum_{i=0}^{n} iC_n^i p^i (1-p)^{n-i} = np$$

Espérance d'une variable aléatoire suivant la loi binomiale

Démonstration

Loi de probabilité (loi binomiale) de X :

$\forall i,\ 0 \leq i \leq n,\ P(X = i) = C_n^i p^i (1-p)^{n-i}$

$$E(X) = \sum_{i=0}^{n} iP(X = i) = \sum_{i=0}^{n} iC_n^i p^i (1-p)^{n-i} = np$$

$$\text{Or } \sum_{i=0}^{n} iC_n^i p^i (1-p)^{n-i} = np \sum_{i=1}^{n} C_{n-1}^{i-1} p^{i-1} (1-p)^{n-1-(i-1)}$$

Espérance d'une variable aléatoire suivant la loi binomiale

Démonstration

Loi de probabilité (loi binomiale) de X :
$\forall i,\ 0 \leq i \leq n,\ P\left(X = i\right) = C_n^i p^i (1-p)^{n-i}$

$$E\left(X\right) = \sum_{i=0}^{n} iP\left(X = i\right) = \sum_{i=0}^{n} iC_n^i p^i (1-p)^{n-i} = np$$

$$\text{Or } \sum_{i=0}^{n} iC_n^i p^i (1-p)^{n-i} = np \sum_{i=1}^{n} C_{n-1}^{i-1} p^{i-1} (1-p)^{n-1-(i-1)}$$

$$= np \sum_{j=0}^{n-1} C_{n-1}^{j} p^{j} (1-p)^{n-1-j} \text{ en posant } j = i-1.$$

Espérance d'une variable aléatoire suivant la loi binomiale

Démonstration

Loi de probabilité (loi binomiale) de X :

$\forall i,\ 0 \leq i \leq n,\ P\left(X = i\right) = C_n^i p^i (1-p)^{n-i}$

$$E\left(X\right) = \sum_{i=0}^{n} iP\left(X = i\right) = \sum_{i=0}^{n} iC_n^i p^i (1-p)^{n-i} = np$$

$$\text{Or } \sum_{i=0}^{n} iC_n^i p^i (1-p)^{n-i} = np \sum_{i=1}^{n} C_{n-1}^{i-1} p^{i-1} (1-p)^{n-1-(i-1)}$$

$$= np \sum_{j=0}^{n-1} C_{n-1}^{j} p^{j} (1-p)^{n-1-j} \text{ en posant } j = i-1.$$

On en déduit $E\left(X\right) = np\left(p - (1-p)\right)^{n-1} = np.1^{n-1} = np$.

Espérance d'une variable aléatoire suivant la loi binomiale

Démonstration

Loi de probabilité (loi binomiale) de X :

$\forall i,\ 0 \leq i \leq n,\ P(X = i) = C_n^i p^i (1-p)^{n-i}$

$$E(X) = \sum_{i=0}^{n} iP(X = i) = \sum_{i=0}^{n} iC_n^i p^i (1-p)^{n-i} = np$$

$$\text{Or } \sum_{i=0}^{n} iC_n^i p^i (1-p)^{n-i} = np \sum_{i=1}^{n} C_{n-1}^{i-1} p^{i-1} (1-p)^{n-1-(i-1)}$$

$$= np \sum_{j=0}^{n-1} C_{n-1}^{j} p^{j} (1-p)^{n-1-j} \text{ en posant } j = i-1.$$

On en déduit $E(X) = np(p - (1-p))^{n-1} = np.1^{n-1} = np$.

Explication :

Espérance d'une variable aléatoire suivant la loi binomiale

Démonstration

Loi de probabilité (loi binomiale) de X :

$\forall i,\ 0 \leq i \leq n,\ P\left(X = i\right) = C_n^i p^i (1-p)^{n-i}$

$$E\left(X\right) = \sum_{i=0}^{n} iP\left(X = i\right) = \sum_{i=0}^{n} iC_n^i p^i (1-p)^{n-i} = np$$

$$\text{Or } \sum_{i=0}^{n} iC_n^i p^i (1-p)^{n-i} = np \sum_{i=1}^{n} C_{n-1}^{i-1} p^{i-1} (1-p)^{n-1-(i-1)}$$

$$= np \sum_{j=0}^{n-1} C_{n-1}^{j} p^{j} (1-p)^{n-1-j} \text{ en posant } j = i-1.$$

On en déduit $E\left(X\right) = np\left(p-(1-p)\right)^{n-1} = np.1^{n-1} = np$.

Explication :

$$C_n^i = \frac{n!}{i!(n-i)!} = \frac{n.(n-1)!}{i.(i-1)!(n-i)!} = \frac{n}{i}\frac{(n-1)!}{(i-1)!\left(n-1-(i-1)\right)!} = \frac{n}{i}C_{n-1}^{i-1}$$

Variance d'une variable aléatoire suivant la loi binomiale

Démonstration

Variance d'une variable aléatoire suivant la loi binomiale

Démonstration

Loi de probabilité (loi binomiale) de X :
$\forall i,\ 0 \leq i \leq n,\ P\left(X = i\right) = C_n^i p^i (1-p)^{n-i}$

Variance d'une variable aléatoire suivant la loi binomiale

Démonstration

Loi de probabilité (loi binomiale) de X :
$\forall i,\ 0 \leq i \leq n,\ P\left(X = i\right) = C_n^i p^i (1-p)^{n-i}$
$E\left(X\right) = np$

Variance d'une variable aléatoire suivant la loi binomiale

Démonstration

Loi de probabilité (loi binomiale) de X :
$\forall i,\ 0 \leq i \leq n,\ P(X = i) = C_n^i p^i (1-p)^{n-i}$
$E(X) = np$
$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = E(X^2) - (np)^2$

Variance d'une variable aléatoire suivant la loi binomiale

Démonstration

Loi de probabilité (loi binomiale) de X :

$\forall i,\ 0 \leq i \leq n,\ P(X = i) = C_n^i p^i (1-p)^{n-i}$

$E(X) = np$

$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = E(X^2) - (np)^2$

$$E(X^2) = \sum_{i=0}^{n} i^2 P(X = i) = \sum_{i=1}^{n} i^2 C_n^i p^i (1-p)^{n-i}$$

Variance d'une variable aléatoire suivant la loi binomiale

Démonstration

Loi de probabilité (loi binomiale) de X :

$\forall i,\ 0 \leq i \leq n,\ P(X = i) = C_n^i p^i (1-p)^{n-i}$

$E(X) = np$

$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = E(X^2) - (np)^2$

$$E(X^2) = \sum_{i=0}^{n} i^2 P(X = i) = \sum_{i=1}^{n} i^2 C_n^i p^i (1-p)^{n-i}$$

Or $C_n^i = \dfrac{n}{i} C_{n-1}^{i-1} = \dfrac{n(n-1)}{i(i-1)} C_{n-2}^{i-2}$ pour $i \geq 1$.

Variance d'une variable aléatoire suivant la loi binomiale

Démonstration (suite)

Variance d'une variable aléatoire suivant la loi binomiale

Démonstration (suite)

On écrit alors $i^2 C_n^i p^i (1-p)^{n-i} = i(i-1) C_n^i p^i (1-p)^{n-i} + i C_n^i p^i (1-p)^{n-i}$ et

Variance d'une variable aléatoire suivant la loi binomiale

R3.08 Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Plan

Variable aléatoire

Variable aléatoire réelle

Variable aléatoire discrète

Variable aléatoire continue

Complément

Annexe : autres lois

Démonstration (suite)

On écrit alors $i^2 C_n^i p^i (1-p)^{n-i} = i(i-1) C_n^i p^i (1-p)^{n-i} + i C_n^i p^i (1-p)^{n-i}$ et

$$E(X^2) = \sum_{i=2}^{n} i(i-1) C_n^i p^i (1-p)^{n-i} + \sum_{i=1}^{n} i C_n^i p^i (1-p)^{n-i}.$$

Variance d'une variable aléatoire suivant la loi binomiale

Démonstration (suite)

On écrit alors $i^2 C_n^i p^i (1-p)^{n-i} = i(i-1) C_n^i p^i (1-p)^{n-i} + i C_n^i p^i (1-p)^{n-i}$ et

$$E(X^2) = \sum_{i=2}^{n} i(i-1) C_n^i p^i (1-p)^{n-i} + \sum_{i=1}^{n} i C_n^i p^i (1-p)^{n-i}.$$

On a $i(i-1) C_n^i p^i (1-p)^{n-i} = i(i-1) \dfrac{n(n-1)}{i(i-1)} C_{n-2}^{i-2} p^i (1-p)^{n-i}$

Variance d'une variable aléatoire suivant la loi binomiale

Démonstration (suite)

On écrit alors $i^2 C_n^i p^i (1-p)^{n-i} = i(i-1) C_n^i p^i (1-p)^{n-i} + i C_n^i p^i (1-p)^{n-i}$ et

$$E(X^2) = \sum_{i=2}^{n} i(i-1) C_n^i p^i (1-p)^{n-i} + \sum_{i=1}^{n} i C_n^i p^i (1-p)^{n-i}.$$

On a $i(i-1) C_n^i p^i (1-p)^{n-i} = i(i-1) \dfrac{n(n-1)}{i(i-1)} C_{n-2}^{i-2} p^i (1-p)^{n-i}$

$= n(n-1) C_{n-2}^{i-2} p^i (1-p)^{n-i}$ et donc

Variance d'une variable aléatoire suivant la loi binomiale

Démonstration (suite)

On écrit alors $i^2 C_n^i p^i (1-p)^{n-i} = i(i-1) C_n^i p^i (1-p)^{n-i} + i C_n^i p^i (1-p)^{n-i}$ et

$$E(X^2) = \sum_{i=2}^{n} i(i-1) C_n^i p^i (1-p)^{n-i} + \sum_{i=1}^{n} i C_n^i p^i (1-p)^{n-i}.$$

On a $i(i-1) C_n^i p^i (1-p)^{n-i} = i(i-1) \dfrac{n(n-1)}{i(i-1)} C_{n-2}^{i-2} p^i (1-p)^{n-i}$

$= n(n-1) C_{n-2}^{i-2} p^i (1-p)^{n-i}$ et donc

$$E(X^2) = \sum_{i=2}^{n} n(n-1) p^2 C_{n-2}^{i-2} p^{i-2} (1-p)^{n-2-(i-2)}$$

Variance d'une variable aléatoire suivant la loi binomiale

Démonstration (suite)

On écrit alors $i^2 C_n^i p^i (1-p)^{n-i} = i(i-1) C_n^i p^i (1-p)^{n-i} + i C_n^i p^i (1-p)^{n-i}$ et

$$E(X^2) = \sum_{i=2}^{n} i(i-1) C_n^i p^i (1-p)^{n-i} + \sum_{i=1}^{n} i C_n^i p^i (1-p)^{n-i}.$$

On a $i(i-1) C_n^i p^i (1-p)^{n-i} = i(i-1) \dfrac{n(n-1)}{i(i-1)} C_{n-2}^{i-2} p^i (1-p)^{n-i}$

$= n(n-1) C_{n-2}^{i-2} p^i (1-p)^{n-i}$ et donc

$$E(X^2) = \sum_{i=2}^{n} n(n-1) p^2 C_{n-2}^{i-2} p^{i-2} (1-p)^{n-2-(i-2)}$$

$= n(n-1)p^2 \sum_{j=0}^{n-2} C_{n-2}^{j} p^j (1-p)^{n-2-j}$

Variance d'une variable aléatoire suivant la loi binomiale

Démonstration (suite)

On écrit alors $i^2 C_n^i p^i (1-p)^{n-i} = i(i-1) C_n^i p^i (1-p)^{n-i} + i C_n^i p^i (1-p)^{n-i}$ et

$$E(X^2) = \sum_{i=2}^{n} i(i-1) C_n^i p^i (1-p)^{n-i} + \sum_{i=1}^{n} i C_n^i p^i (1-p)^{n-i}.$$

On a $i(i-1) C_n^i p^i (1-p)^{n-i} = i(i-1) \dfrac{n(n-1)}{i(i-1)} C_{n-2}^{i-2} p^i (1-p)^{n-i}$

$= n(n-1) C_{n-2}^{i-2} p^i (1-p)^{n-i}$ et donc

$$E(X^2) = \sum_{i=2}^{n} n(n-1) p^2 C_{n-2}^{i-2} p^{i-2} (1-p)^{n-2-(i-2)}$$

$= n(n-1)p^2 \sum_{j=0}^{n-2} C_{n-2}^{j} p^j (1-p)^{n-2-j}$

$= n(n-1)p^2 \left(p + (1-p)\right)^{n-2} = n(n-1)p^2$

On obtient finalement : $V(X) = n(n-1)p^2 + np - (np)^2$

$= n^2p^2 - np^2 + np - n^2p^2 = np(1-p)$

Variance d'une variable aléatoire suivant la loi binomiale

Démonstration (suite)

On écrit alors $i^2 C_n^i p^i (1-p)^{n-i} = i(i-1) C_n^i p^i (1-p)^{n-i} + i C_n^i p^i (1-p)^{n-i}$ et

$$E(X^2) = \sum_{i=2}^{n} i(i-1) C_n^i p^i (1-p)^{n-i} + \sum_{i=1}^{n} i C_n^i p^i (1-p)^{n-i}.$$

On a $i(i-1) C_n^i p^i (1-p)^{n-i} = i(i-1) \dfrac{n(n-1)}{i(i-1)} C_{n-2}^{i-2} p^i (1-p)^{n-i}$

$= n(n-1) C_{n-2}^{i-2} p^i (1-p)^{n-i}$ et donc

$$E(X^2) = \sum_{i=2}^{n} n(n-1) p^2 C_{n-2}^{i-2} p^{i-2} (1-p)^{n-2-(i-2)}$$

$= n(n-1)p^2 \sum_{j=0}^{n-2} C_{n-2}^{j} p^j (1-p)^{n-2-j}$

$= n(n-1)p^2 \left(p + (1-p)\right)^{n-2} = n(n-1)p^2$

On obtient finalement : $V(X) = n(n-1)p^2 + np - (np)^2$

$= n^2p^2 - np^2 + np - n^2p^2 = np(1-p)$

$V(X) = np(1-p) = npq$ en posant $q = 1 - p$.

Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson : démonstration

Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson : démonstration

Remarque : np tend vers λ lorsque n tend vers $+\infty$ permet d'écrire $np = \lambda + \epsilon(n)$ avec $\epsilon(n) \underset{n\to\infty}{\to} 0$, soit $p = \frac{\lambda}{n} + \frac{1}{n}\epsilon(n)$.

Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson : démonstration

Remarque : np tend vers λ lorsque n tend vers $+\infty$ permet d'écrire $np = \lambda + \epsilon(n)$ avec $\epsilon(n) \underset{n\to\infty}{\rightarrow} 0$, soit $p = \frac{\lambda}{n} + \frac{1}{n}\epsilon(n)$.

$$C_n^i p^i (1-p)^{n-i} = \frac{n(n-1)...(n-(i-1))p^i(1-p)^n}{i!(1-p)^i}$$

Variable aléatoire discrète : lois de probabilité usuelles

Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson : démonstration

Remarque : np tend vers λ lorsque n tend vers $+\infty$ permet d'écrire $np = \lambda + \epsilon(n)$ avec $\epsilon(n) \underset{n\to\infty}{\to} 0$, soit $p = \frac{\lambda}{n} + \frac{1}{n}\epsilon(n)$.

$$C_n^i p^i (1-p)^{n-i} = \frac{n(n-1)\dots(n-(i-1))p^i(1-p)^n}{i!(1-p)^i}$$

$$(1-p)^i \underset{n\to+\infty}{\to} 1^i = 1$$

Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson : démonstration

Remarque : np tend vers λ lorsque n tend vers $+\infty$ permet d'écrire $np = \lambda + \epsilon(n)$ avec $\epsilon(n) \underset{n\to\infty}{\to} 0$, soit $p = \frac{\lambda}{n} + \frac{1}{n}\epsilon(n)$.

$$C_n^i p^i (1-p)^{n-i} = \frac{n(n-1)...(n-(i-1))p^i(1-p)^n}{i!(1-p)^i}$$

$$(1-p)^i \underset{n\to+\infty}{\to} 1^i = 1$$

$$n(n-1)...(n-(i-1))p^i = np(n-1)p...(n-(i-1))p$$

Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson : démonstration

Remarque : np tend vers λ lorsque n tend vers $+\infty$ permet d'écrire $np = \lambda + \epsilon(n)$ avec $\epsilon(n) \underset{n\to\infty}{\to} 0$, soit $p = \frac{\lambda}{n} + \frac{1}{n}\epsilon(n)$.

$$C_n^i p^i (1-p)^{n-i} = \frac{n(n-1)...(n-(i-1))p^i(1-p)^n}{i!(1-p)^i}$$

$$(1-p)^i \underset{n\to+\infty}{\to} 1^i = 1$$

$$n(n-1)...(n-(i-1))p^i = np(n-1)p...(n-(i-1))p$$
$$= np.(1-\tfrac{1}{n})np(1-\tfrac{2}{n})np...(1-\tfrac{i-1}{n})np$$

Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson : démonstration

Remarque : np tend vers λ lorsque n tend vers $+\infty$ permet d'écrire $np = \lambda + \epsilon(n)$ avec $\epsilon(n) \underset{n\to\infty}{\to} 0$, soit $p = \frac{\lambda}{n} + \frac{1}{n}\epsilon(n)$.

$$C_n^i p^i (1-p)^{n-i} = \frac{n(n-1)...(n-(i-1))p^i(1-p)^n}{i!(1-p)^i}$$

$$(1-p)^i \underset{n\to+\infty}{\to} 1^i = 1$$

$$n(n-1)...(n-(i-1))p^i = np(n-1)p...(n-(i-1))p$$
$$= np.(1-\tfrac{1}{n})np(1-\tfrac{2}{n})np...(1-\tfrac{i-1}{n})np$$
$$= (np)^i(1-\tfrac{1}{n})(1-\tfrac{2}{n})...(1-\tfrac{i-1}{n})$$

Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson : démonstration

Remarque : np tend vers λ lorsque n tend vers $+\infty$ permet d'écrire $np = \lambda + \epsilon(n)$ avec $\epsilon(n) \underset{n\to\infty}{\to} 0$, soit $p = \frac{\lambda}{n} + \frac{1}{n}\epsilon(n)$.

$$C_n^i p^i (1-p)^{n-i} = \frac{n(n-1)...(n-(i-1))p^i(1-p)^n}{i!(1-p)^i}$$

$$(1-p)^i \underset{n\to+\infty}{\to} 1^i = 1$$

$$n(n-1)...(n-(i-1))p^i = np(n-1)p...(n-(i-1))p$$
$$= np.(1-\tfrac{1}{n})np(1-\tfrac{2}{n})np...(1-\tfrac{i-1}{n})np$$
$$= (np)^i(1-\tfrac{1}{n})(1-\tfrac{2}{n})...(1-\tfrac{i-1}{n})$$
$$n(n-1)...(n-(i-1))p^i \to \lambda^i$$

Variable aléatoire discrète : lois de probabilité usuelles

Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson : démonstration

Remarque : np tend vers λ lorsque n tend vers $+\infty$ permet d'écrire $np = \lambda + \epsilon(n)$ avec $\epsilon(n) \underset{n\to\infty}{\to} 0$, soit $p = \frac{\lambda}{n} + \frac{1}{n}\epsilon(n)$.

$$C_n^i p^i (1-p)^{n-i} = \frac{n(n-1)\ldots(n-(i-1))p^i(1-p)^n}{i!(1-p)^i}$$

$(1-p)^i \underset{n\to+\infty}{\to} 1^i = 1$

$n(n-1)\ldots(n-(i-1))p^i = np(n-1)p\ldots(n-(i-1))p$
$= np.(1-\frac{1}{n})np(1-\frac{2}{n})np\ldots(1-\frac{i-1}{n})np$
$= (np)^i(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\ldots(1-\frac{i-1}{n})$
$n(n-1)\ldots(n-(i-1))p^i \to \lambda^i$
$(1-p)^n$:

Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson : démonstration

Remarque : np tend vers λ lorsque n tend vers $+\infty$ permet d'écrire $np = \lambda + \epsilon(n)$ avec $\epsilon(n) \underset{n\to\infty}{\rightarrow} 0$, soit $p = \frac{\lambda}{n} + \frac{1}{n}\epsilon(n)$.

$$C_n^i p^i (1-p)^{n-i} = \frac{n(n-1)...(n-(i-1))p^i(1-p)^n}{i!(1-p)^i}$$

$$(1-p)^i \underset{n\to+\infty}{\rightarrow} 1^i = 1$$

$$n(n-1)...(n-(i-1))p^i = np(n-1)p...(n-(i-1))p$$
$$= np.(1-\tfrac{1}{n})np(1-\tfrac{2}{n})np...(1-\tfrac{i-1}{n})np$$
$$= (np)^i(1-\tfrac{1}{n})(1-\tfrac{2}{n})...(1-\tfrac{i-1}{n})$$
$$n(n-1)...(n-(i-1))p^i \rightarrow \lambda^i$$

$(1-p)^n$:

$$\ln(1-p)^n = n\ln(1-p) \underset{+\infty}{\sim} n.(-p) = -np \underset{+\infty}{\rightarrow} -\lambda$$

Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson : démonstration

Remarque : np tend vers λ lorsque n tend vers $+\infty$ permet d'écrire $np = \lambda + \epsilon(n)$ avec $\epsilon(n) \underset{n\to\infty}{\to} 0$, soit $p = \frac{\lambda}{n} + \frac{1}{n}\epsilon(n)$.

$$C_n^i p^i (1-p)^{n-i} = \frac{n(n-1)...(n-(i-1))p^i(1-p)^n}{i!(1-p)^i}$$

$(1-p)^i \underset{n\to+\infty}{\to} 1^i = 1$

$n(n-1)...(n-(i-1))p^i = np(n-1)p...(n-(i-1))p$
$= np.(1-\frac{1}{n})np(1-\frac{2}{n})np...(1-\frac{i-1}{n})np$
$= (np)^i(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})...(1-\frac{i-1}{n})$
$n(n-1)...(n-(i-1))p^i \to \lambda^i$
$(1-p)^n$:
$\ln(1-p)^n = n\ln(1-p) \underset{+\infty}{\sim} n.(-p) = -np \underset{+\infty}{\to} -\lambda$
On a donc $(1-p)^n = exp(n\ln(1-p)) \underset{+\infty}{\to} e^{-\lambda}$

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Espérance d'une somme de variables aléatoires. Démonstration dans le cas fini.

Espérance d'une somme de variables aléatoires. Démonstration dans le cas fini.

On pose $I = \{1, 2, \cdots, m\}$ et $J = \{1, 2, \cdots, n\}$.

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Espérance d'une somme de variables aléatoires. Démonstration dans le cas fini.

On pose $I = \{1, 2, \cdots, m\}$ et $J = \{1, 2, \cdots, n\}$.

$$E(X+Y) = \sum_{(i,j)\in I\times J} (x_i + y_j) P\left((X = x_i) \cap (Y = y_j)\right)$$

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Espérance d'une somme de variables aléatoires. Démonstration dans le cas fini.

On pose $I = \{1, 2, \cdots, m\}$ et $J = \{1, 2, \cdots, n\}$.

$$E(X+Y) = \sum_{(i,j)\in I\times J} (x_i + y_j) P\left((X = x_i) \cap (Y = y_j)\right)$$

$$= \sum_{(i,j)\in I\times J} x_i P\left((X = x_i) \cap (Y = y_j)\right) + \sum_{(i,j)\in I\times J} y_j P\left((X = x_i) \cap (Y = y_j)\right)$$

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Espérance d'une somme de variables aléatoires. Démonstration dans le cas fini.

On pose $I = \{1, 2, \cdots, m\}$ et $J = \{1, 2, \cdots, n\}$.

$$E(X+Y) = \sum_{(i,j)\in I\times J} (x_i + y_j) P\left((X = x_i) \cap (Y = y_j)\right)$$

$$= \sum_{(i,j)\in I\times J} x_i P\left((X = x_i) \cap (Y = y_j)\right) + \sum_{(i,j)\in I\times J} y_j P\left((X = x_i) \cap (Y = y_j)\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_i P\left((X = x_i) \cap (Y = y_j)\right) + \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} y_j P\left((X = x_i) \cap (Y = y_j)\right)$$

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Espérance d'une somme de variables aléatoires. Démonstration dans le cas fini.

On pose $I = \{1, 2, \cdots, m\}$ et $J = \{1, 2, \cdots, n\}$.

$$E(X+Y) = \sum_{(i,j)\in I\times J} (x_i + y_j) P\left((X = x_i)\cap(Y = y_j)\right)$$

$$= \sum_{(i,j)\in I\times J} x_i P\left((X = x_i)\cap(Y = y_j)\right) + \sum_{(i,j)\in I\times J} y_j P\left((X = x_i)\cap(Y = y_j)\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_i P\left((X = x_i)\cap(Y = y_j)\right) + \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} y_j P\left((X = x_i)\cap(Y = y_j)\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} x_i \sum_{j=1}^{n} P\left((X = x_i)\cap(Y = y_j)\right) + \sum_{j=1}^{n} y_j \sum_{i=1}^{m} P\left((X = x_i)\cap(Y = y_j)\right)$$

Espérance d'une somme de variables aléatoires. Démonstration dans le cas fini.

On pose $I = \{1, 2, \cdots, m\}$ et $J = \{1, 2, \cdots, n\}$.

$$E(X+Y) = \sum_{(i,j)\in I\times J} (x_i + y_j) P\left((X = x_i) \cap (Y = y_j)\right)$$

$$= \sum_{(i,j)\in I\times J} x_i P\left((X = x_i) \cap (Y = y_j)\right) + \sum_{(i,j)\in I\times J} y_j P\left((X = x_i) \cap (Y = y_j)\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_i P\left((X = x_i) \cap (Y = y_j)\right) + \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} y_j P\left((X = x_i) \cap (Y = y_j)\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} x_i \sum_{j=1}^{n} P\left((X = x_i) \cap (Y = y_j)\right) + \sum_{j=1}^{n} y_j \sum_{i=1}^{m} P\left((X = x_i) \cap (Y = y_j)\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} x_i P\left(X = x_i\right) + \sum_{j=1}^{n} y_j P\left(Y = y_j\right)$$

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Espérance d'une somme de variables aléatoires. Démonstration dans le cas fini.

On pose $I = \{1, 2, \cdots, m\}$ et $J = \{1, 2, \cdots, n\}$.

$$E(X+Y) = \sum_{(i,j)\in I\times J} (x_i + y_j) P\left((X = x_i) \cap (Y = y_j)\right)$$

$$= \sum_{(i,j)\in I\times J} x_i P\left((X = x_i) \cap (Y = y_j)\right) + \sum_{(i,j)\in I\times J} y_j P\left((X = x_i) \cap (Y = y_j)\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_i P\left((X = x_i) \cap (Y = y_j)\right) + \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} y_j P\left((X = x_i) \cap (Y = y_j)\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} x_i \sum_{j=1}^{n} P\left((X = x_i) \cap (Y = y_j)\right) + \sum_{j=1}^{n} y_j \sum_{i=1}^{m} P\left((X = x_i) \cap (Y = y_j)\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} x_i P(X = x_i) + \sum_{j=1}^{n} y_j P(Y = y_j)$$

$$= E(X) + E(Y)$$

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Espérance du produit de variables aléatoires indépendantes. Démonstration dans le cas fini.

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Espérance du produit de variables aléatoires indépendantes. Démonstration dans le cas fini.

On pose $I = \{1, 2, \cdots, m\}$ et $J = \{1, 2, \cdots, n\}$.

Espérance du produit de variables aléatoires indépendantes. Démonstration dans le cas fini.

On pose $I = \{1, 2, \cdots, m\}$ et $J = \{1, 2, \cdots, n\}$.

$$E(XY) = \sum_{(i,j)\in I\times J} x_i y_j P\left((X = x_i) \cap (Y = y_j)\right)$$

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

R3.08 Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Espérance du produit de variables aléatoires indépendantes. Démonstration dans le cas fini.

On pose $I = \{1, 2, \cdots, m\}$ et $J = \{1, 2, \cdots, n\}$.

$$E(XY) = \sum_{(i,j)\in I\times J} x_i y_j P\left((X = x_i) \cap (Y = y_j)\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i y_j P\left((X = x_i) \cap (Y = y_j)\right)$$

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Espérance du produit de variables aléatoires indépendantes. Démonstration dans le cas fini.

On pose $I = \{1, 2, \cdots, m\}$ et $J = \{1, 2, \cdots, n\}$.

$$E(XY) = \sum_{(i,j)\in I\times J} x_i y_j P\left((X = x_i) \cap (Y = y_j)\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j P\left((X = x_i) \cap (Y = y_j)\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j P\left(X = x_i\right) P\left(Y = y_j\right)$$

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Espérance du produit de variables aléatoires indépendantes. Démonstration dans le cas fini.

On pose $I = \{1, 2, \cdots, m\}$ et $J = \{1, 2, \cdots, n\}$.

$$E(XY) = \sum_{(i,j)\in I\times J} x_i y_j P\left((X = x_i) \cap (Y = y_j)\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j P\left((X = x_i) \cap (Y = y_j)\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j P\left(X = x_i\right) P\left(Y = y_j\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} x_i P\left(X = x_i\right) \sum_{j=1}^{n} y_j P\left(Y = y_j\right)$$

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Espérance du produit de variables aléatoires indépendantes. Démonstration dans le cas fini.

On pose $I = \{1, 2, \cdots, m\}$ et $J = \{1, 2, \cdots, n\}$.

$$E(XY) = \sum_{(i,j)\in I\times J} x_i y_j P\left((X = x_i) \cap (Y = y_j)\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i y_j P\left((X = x_i) \cap (Y = y_j)\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i y_j P\left(X = x_i\right) P\left(Y = y_j\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} x_i P\left(X = x_i\right) \sum_{j=1}^{n} y_j P\left(Y = y_j\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} x_i P\left(X = x_i\right) E(Y)$$

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Espérance du produit de variables aléatoires indépendantes. Démonstration dans le cas fini.

On pose $I = \{1, 2, \cdots, m\}$ et $J = \{1, 2, \cdots, n\}$.

$$E(XY) = \sum_{(i,j)\in I\times J} x_i y_j P\left((X = x_i) \cap (Y = y_j)\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i y_j P\left((X = x_i) \cap (Y = y_j)\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i y_j P\left(X = x_i\right) P\left(Y = y_j\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} x_i P\left(X = x_i\right) \sum_{j=1}^{n} y_j P\left(Y = y_j\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} x_i P\left(X = x_i\right) E(Y)$$

$$= E(Y) \sum_{i=1}^{m} x_i P\left(X = x_i\right)$$

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Espérance du produit de variables aléatoires indépendantes. Démonstration dans le cas fini.

On pose $I = \{1, 2, \cdots, m\}$ et $J = \{1, 2, \cdots, n\}$.

$$E(XY) = \sum_{(i,j)\in I\times J} x_i y_j P\left((X = x_i) \cap (Y = y_j)\right)$$
$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j P\left((X = x_i) \cap (Y = y_j)\right)$$
$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j P(X = x_i)\, P(Y = y_j)$$
$$= \sum_{i=1}^{m} x_i P(X = x_i) \sum_{j=1}^{n} y_j P(Y = y_j)$$
$$= \sum_{i=1}^{m} x_i P(X = x_i)\, E(Y)$$
$$= E(Y)\sum_{i=1}^{m} x_i P(X = x_i)$$
$$= E(Y)E(X)$$

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Espérance du produit de variables aléatoires indépendantes. Démonstration dans le cas fini.

On pose $I = \{1, 2, \cdots, m\}$ et $J = \{1, 2, \cdots, n\}$.

$$E(XY) = \sum_{(i,j)\in I\times J} x_i y_j P\left((X = x_i) \cap (Y = y_j)\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j P\left((X = x_i) \cap (Y = y_j)\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j P\left(X = x_i\right) P\left(Y = y_j\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} x_i P\left(X = x_i\right) \sum_{j=1}^{n} y_j P\left(Y = y_j\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} x_i P\left(X = x_i\right) E(Y)$$

$$= E(Y) \sum_{i=1}^{m} x_i P\left(X = x_i\right)$$

$$= E(Y)E(X) = E(X)E(Y)$$

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Propriétés de la covariance. Démonstration.

Propriétés de la covariance. Démonstration.

i) $cov\,(X,Y) = E\left((X-E(X))\,(Y-E(Y))\right)$
$= E\left((Y-E(Y))\,(X-E(X))\right) = cov\,(Y,X)$

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Propriétés de la covariance. Démonstration.

i) $cov\,(X,Y) = E\left((X - E(X))\,(Y - E(Y))\right)$
$= E\left((Y - E(Y))\,(X - E(X))\right) = cov\,(Y,X)$
ii) $cov\,(aX + bY, Z)$

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Propriétés de la covariance. Démonstration.

i) $cov\,(X,Y) = E\,((X-E(X))\,(Y-E(Y)))$
$= E\,((Y-E(Y))\,(X-E(X))) = cov\,(Y,X)$
ii) $cov\,(aX+bY,Z)$
$= E\,((aX+bY-E(aX+bY))\,(Z-E(Z)))$

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Propriétés de la covariance. Démonstration.

i) $cov\,(X,Y) = E\,((X - E(X))\,(Y - E(Y)))$
$= E\,((Y - E(Y))\,(X - E(X))) = cov\,(Y,X)$
ii) $cov\,(aX + bY, Z)$
$= E\,((aX + bY - E(aX + bY))\,(Z - E(Z)))$
$= E\,((aX + bY - aE(X) - bE(Y))\,(Z - E(Z)))$

Propriétés de la covariance. Démonstration.

i) $cov\,(X,Y) = E\,((X-E(X))\,(Y-E(Y)))$
$= E\,((Y-E(Y))\,(X-E(X))) = cov\,(Y,X)$

ii) $cov\,(aX+bY,Z)$
$= E\,((aX+bY-E(aX+bY))\,(Z-E(Z)))$
$= E\,((aX+bY-aE(X)-bE(Y))\,(Z-E(Z)))$
$= E\,((a(X-E(X)+b(Y-E(Y)))\,(Z-E(Z)))$

Propriétés de la covariance. Démonstration.

i) $cov\,(X,Y) = E\,((X-E(X))\,(Y-E(Y)))$
$= E\,((Y-E(Y))\,(X-E(X))) = cov\,(Y,X)$
ii) $cov\,(aX+bY,Z)$
$= E\,((aX+bY-E(aX+bY))\,(Z-E(Z)))$
$= E\,((aX+bY-aE(X)-bE(Y))\,(Z-E(Z)))$
$= E\,((a(X-E(X))+b(Y-E(Y)))\,(Z-E(Z)))$
$= E\,(a(X-E(X))(Z-E(Z))) + E\,(b(Y-E(Y))(Z-E(Z)))$

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Propriétés de la covariance. Démonstration.

i) $cov\,(X,Y) = E\left((X - E(X))\,(Y - E(Y))\right)$
$= E\left((Y - E(Y))\,(X - E(X))\right) = cov\,(Y,X)$

ii) $cov\,(aX + bY, Z)$
$= E\left((aX + bY - E(aX + bY))\,(Z - E(Z))\right)$
$= E\left((aX + bY - aE(X) - bE(Y))\,(Z - E(Z))\right)$
$= E\left((a(X - E(X)) + b(Y - E(Y)))\,(Z - E(Z))\right)$
$= E\left(a(X - E(X))(Z - E(Z))\right) + E\left(b(Y - E(Y))(Z - E(Z))\right)$
$= acov\,(X,Z) + bcov\,(Y,Z)$

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Propriétés de la covariance. Démonstration.

i) $cov\,(X,Y) = E\,((X-E(X))\,(Y-E(Y)))$
$= E\,((Y-E(Y))\,(X-E(X))) = cov\,(Y,X)$
ii) $cov\,(aX+bY,Z)$
$= E\,((aX+bY-E(aX+bY))\,(Z-E(Z)))$
$= E\,((aX+bY-aE(X)-bE(Y))\,(Z-E(Z)))$
$= E\,((a(X-E(X))+b(Y-E(Y)))\,(Z-E(Z)))$
$= E\,(a(X-E(X))(Z-E(Z))) + E\,(b(Y-E(Y))(Z-E(Z)))$
$= acov\,(X,Z) + bcov\,(Y,Z)$
iii) $cov\,(X,Y) = E\,(XY-E(Y)X-E(X)Y+E(X)E(Y))$

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Propriétés de la covariance. Démonstration.

i) $cov\,(X,Y) = E\,((X-E(X))\,(Y-E(Y)))$
$= E\,((Y-E(Y))\,(X-E(X))) = cov\,(Y,X)$
ii) $cov\,(aX+bY,Z)$
$= E\,((aX+bY-E(aX+bY))\,(Z-E(Z)))$
$= E\,((aX+bY-aE(X)-bE(Y))\,(Z-E(Z)))$
$= E\,((a(X-E(X))+b(Y-E(Y)))\,(Z-E(Z)))$
$= E\,(a(X-E(X))(Z-E(Z))) + E\,(b(Y-E(Y))(Z-E(Z)))$
$= acov\,(X,Z) + bcov\,(Y,Z)$
iii) $cov\,(X,Y) = E\,(XY - E(Y)X - E(X)Y + E(X)E(Y))$
$= E(XY) - E(Y)E(X) - E(X)E(Y) + E(X)E(Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

R3.08 Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Propriétés de la covariance. Démonstration.

i) $cov\,(X,Y) = E\,((X - E(X))\,(Y - E(Y)))$
$= E\,((Y - E(Y))\,(X - E(X))) = cov\,(Y,X)$

ii) $cov\,(aX + bY, Z)$
$= E\,((aX + bY - E(aX + bY))\,(Z - E(Z)))$
$= E\,((aX + bY - aE(X) - bE(Y))\,(Z - E(Z)))$
$= E\,((a(X - E(X)) + b(Y - E(Y)))\,(Z - E(Z)))$
$= E\,(a(X - E(X))(Z - E(Z))) + E\,(b(Y - E(Y))(Z - E(Z)))$
$= acov\,(X,Z) + bcov\,(Y,Z)$

iii) $cov\,(X,Y) = E\,(XY - E(Y)X - E(X)Y + E(X)E(Y))$
$= E(XY) - E(Y)E(X) - E(X)E(Y) + E(X)E(Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$

iv) Si X et Y indépendantes alors $E(XY) = E(X)E(Y)$ et donc $cov\,(X,Y) = 0$

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Propriétés de la covariance. Démonstration.

i) $cov\,(X,Y) = E\,((X - E(X))\,(Y - E(Y)))$
$= E\,((Y - E(Y))\,(X - E(X))) = cov\,(Y,X)$
ii) $cov\,(aX + bY, Z)$
$= E\,((aX + bY - E(aX + bY))\,(Z - E(Z)))$
$= E\,((aX + bY - aE(X) - bE(Y))\,(Z - E(Z)))$
$= E\,((a(X - E(X)) + b(Y - E(Y)))\,(Z - E(Z)))$
$= E\,(a(X - E(X))(Z - E(Z))) + E\,(b(Y - E(Y))(Z - E(Z)))$
$= acov\,(X,Z) + bcov\,(Y,Z)$
iii) $cov\,(X,Y) = E\,(XY - E(Y)X - E(X)Y + E(X)E(Y))$
$= E(XY) - E(Y)E(X) - E(X)E(Y) + E(X)E(Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$
iv) Si X et Y indépendantes alors $E(XY) = E(X)E(Y)$ et donc $cov\,(X,Y) = 0$
v) $cov\,(X,X) = E\,((X - E(X))\,(X - E(X))) = V(X)$

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Propriétés de la covariance. Démonstration.

i) $cov\,(X,Y) = E\left((X-E(X))\,(Y-E(Y))\right)$
$= E\left((Y-E(Y))\,(X-E(X))\right) = cov\,(Y,X)$
ii) $cov\,(aX+bY,Z)$
$= E\left((aX+bY-E(aX+bY))\,(Z-E(Z))\right)$
$= E\left((aX+bY-aE(X)-bE(Y))\,(Z-E(Z))\right)$
$= E\left((a(X-E(X))+b(Y-E(Y)))\,(Z-E(Z))\right)$
$= E\left(a(X-E(X))(Z-E(Z))\right) + E\left(b(Y-E(Y))(Z-E(Z))\right)$
$= acov\,(X,Z) + bcov\,(Y,Z)$
iii) $cov\,(X,Y) = E\left(XY-E(Y)X-E(X)Y+E(X)E(Y)\right)$
$= E(XY)-E(Y)E(X)-E(X)E(Y)+E(X)E(Y) = E(XY)-E(X)E(Y)$
iv) Si X et Y indépendantes alors $E(XY)=E(X)E(Y)$ et donc $cov\,(X,Y)=0$
v) $cov\,(X,X) = E\left((X-E(X))\,(X-E(X))\right) = V(X)$
vi)
$V(X+Y) = cov(X+Y,X+Y) = cov(X,X)+cov(X,Y)+cov(Y,X)+cov(Y,Y)$

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Propriétés de la covariance. Démonstration.

i) $cov\,(X,Y) = E\,((X - E(X))\,(Y - E(Y)))$
$= E\,((Y - E(Y))\,(X - E(X))) = cov\,(Y,X)$
ii) $cov\,(aX + bY, Z)$
$= E\,((aX + bY - E(aX + bY))\,(Z - E(Z)))$
$= E\,((aX + bY - aE(X) - bE(Y))\,(Z - E(Z)))$
$= E\,((a(X - E(X)) + b(Y - E(Y)))\,(Z - E(Z)))$
$= E\,(a(X - E(X))(Z - E(Z))) + E\,(b(Y - E(Y))(Z - E(Z)))$
$= acov\,(X,Z) + bcov\,(Y,Z)$
iii) $cov\,(X,Y) = E\,(XY - E(Y)X - E(X)Y + E(X)E(Y))$
$= E(XY) - E(Y)E(X) - E(X)E(Y) + E(X)E(Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$
iv) Si X et Y indépendantes alors $E(XY) = E(X)E(Y)$ et donc $cov\,(X,Y) = 0$
v) $cov\,(X,X) = E\,((X - E(X))\,(X - E(X))) = V(X)$
vi)
$V(X+Y) = cov(X+Y, X+Y) = cov(X,X) + cov(X,Y) + cov(Y,X) + cov(Y,Y)$
$= V(X) + V(Y) + 2cov\,(X,Y)$

Variable aléatoire continue

Densité de $aX + b$. Démonstration.

Variable aléatoire continue

Densité de $aX+b$. Démonstration.

Si X est une variable aléatoire absolument continue de densité f, et $a \neq 0$ et b deux réels alors $aX+b$ est une variable aléatoire absolument continue de densité $g(x) = \frac{1}{|a|} f\left(\frac{x-b}{a}\right)$.

Variable aléatoire continue

R3.08 Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Densité de $aX + b$. Démonstration.

Si X est une variable aléatoire absolument continue de densité f, et $a \neq 0$ et b deux réels alors $aX + b$ est une variable aléatoire absolument continue de densité $g(x) = \frac{1}{|a|} f\left(\frac{x-b}{a}\right)$.

$P\left(aX + b \leq x\right) = P\left(X \leq \frac{x-b}{a}\right)$ si $a > 0$, $P\left(X \geq \frac{x-b}{a}\right)$ si $a < 0$.

Densité de $aX + b$. Démonstration (suite).

Densité de $aX + b$. Démonstration (suite).

$\boxed{a > 0}$

$$P\left(X \leq \frac{x-b}{a}\right) = \int_{-\infty}^{\frac{x-b}{a}} f(t)\,dt.$$

Densité de $aX+b$. Démonstration (suite).

$\boxed{a>0}$

$$P\left(X \leq \frac{x-b}{a}\right) = \int_{-\infty}^{\frac{x-b}{a}} f(t)\,dt.$$

En posant $t = \dfrac{u-b}{a}$, on a

$$\int_{y}^{\frac{x-b}{a}} f(t)\,dt = \int_{ay+b}^{x} f\left(\frac{u-b}{a}\right)\frac{1}{a}du \underset{-\infty}{\rightarrow} \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{a} f\left(\frac{u-b}{a}\right) du.$$

Variable aléatoire continue

Densité de $aX + b$. Démonstration (suite).

Densité de $aX + b$. Démonstration (suite).

$\boxed{a < 0}$

$$P\left(X \geq \frac{x-b}{a}\right) = \int_{\frac{x-b}{a}}^{+\infty} f(t)\,dt.$$

Variable aléatoire continue

Densité de $aX + b$. Démonstration (suite).

$\boxed{a < 0}$

$$P\left(X \geq \frac{x-b}{a}\right) = \int_{\frac{x-b}{a}}^{+\infty} f(t)\, dt.$$

En posant $t = \dfrac{u-b}{a}$, on a

Variable aléatoire continue

Densité de $aX + b$. Démonstration (suite).

$\boxed{a < 0}$

$$P\left(X \geq \frac{x-b}{a}\right) = \int_{\frac{x-b}{a}}^{+\infty} f(t)\,dt.$$

En posant $t = \dfrac{u-b}{a}$, on a

$$\int_{\frac{x-b}{a}}^{y} f(t)\,dt = \int_{x}^{ay+b} f\left(\frac{u-b}{a}\right)\frac{1}{a}du \underset{+\infty}{\rightarrow} \int_{x}^{-\infty} f\left(\frac{u-b}{a}\right)\frac{1}{a}du$$

avec $\displaystyle\int_{x}^{-\infty} f\left(\frac{u-b}{a}\right)\frac{1}{a}du = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{-a} f\left(\frac{u-b}{a}\right)du.$

Variable aléatoire continue

Densité de $aX+b$. Démonstration (suite).

$\boxed{a<0}$

$$P\left(X \geq \frac{x-b}{a}\right) = \int_{\frac{x-b}{a}}^{+\infty} f(t)\,dt.$$

En posant $t = \dfrac{u-b}{a}$, on a

$$\int_{\frac{x-b}{a}}^{y} f(t)\,dt = \int_{x}^{ay+b} f\left(\frac{u-b}{a}\right)\frac{1}{a}du \underset{+\infty}{\rightarrow} \int_{x}^{-\infty} f\left(\frac{u-b}{a}\right)\frac{1}{a}du$$

avec $\displaystyle\int_{x}^{-\infty} f\left(\frac{u-b}{a}\right)\frac{1}{a}du = \int_{-\infty}^{x}\frac{1}{-a}f\left(\frac{u-b}{a}\right)du.$

On a donc bien la densité $g(x) = \dfrac{1}{|a|}f\left(\dfrac{x-b}{a}\right)$.

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Loi multinomiale

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Loi multinomiale

Soit $p_i \in]0,1[$ $(1 \leq i \leq m)$ avec $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} p_i = 1$.

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Loi multinomiale

Soit $p_i \in]0,1[$ $(1 \leq i \leq m)$ avec $\sum_{i=1}^{m} p_i = 1$.

La loi multinomiale $\mathcal{M}(n, p_1, p_2, ..., p_m)$ est la loi conjointe du vecteur $(X_1, X_2, ..., X_m)$ définie par

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Loi multinomiale

Soit $p_i \in]0,1[$ $(1 \leq i \leq m)$ avec $\sum_{i=1}^{m} p_i = 1$.

La loi multinomiale $\mathcal{M}(n, p_1, p_2, ..., p_m)$ est la loi conjointe du vecteur $(X_1, X_2, ..., X_m)$ définie par

1. $X_i(\Omega) = [\![0, n]\!]$

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

R3.08 Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Plan

Variable aléatoire

Variable aléatoire réelle

Variable aléatoire discrète

Variable aléatoire continue

Complément

Annexe : autres lois

Loi multinomiale

Soit $p_i \in]0,1[$ $(1 \leq i \leq m)$ avec $\sum_{i=1}^{m} p_i = 1$.

La loi multinomiale $\mathcal{M}(n, p_1, p_2, ..., p_m)$ est la loi conjointe du vecteur $(X_1, X_2, ..., X_m)$ définie par

1. $X_i(\Omega) = [\![0, n]\!]$
2. pour tout $(x_1, x_2 ..., x_m) \in [\![0, n]\!]^m$
$$P((X_1 = x_1) \cap (X_2 = x_2) ... \cap (X_m = x_m)) = \frac{n!}{x_1! x_2! ... x_m!} p_1^{x_1} p_2^{x_2} ... p_m^{x_m}$$
si $x_1 + x_2 + ... + x_m = n$, 0 sinon.

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Loi multinomiale

Soit $p_i \in]0,1[$ $(1 \leq i \leq m)$ avec $\sum_{i=1}^{m} p_i = 1$.

La loi multinomiale $\mathcal{M}(n, p_1, p_2, ..., p_m)$ est la loi conjointe du vecteur $(X_1, X_2, ..., X_m)$ définie par

1. $X_i(\Omega) = [\![0, n]\!]$
2. pour tout $(x_1, x_2 ..., x_m) \in [\![0, n]\!]^m$
   $$P((X_1 = x_1) \cap (X_2 = x_2) ... \cap (X_m = x_m)) = \frac{n!}{x_1!x_2!...x_m!} p_1^{x_1} p_2^{x_2} ... p_m^{x_m}$$
   si $x_1 + x_2 + ... + x_m = n$, 0 sinon.

Interprétation et exemple : tirages avec remise dans une urne multicolore.

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Loi multinomiale

Soit $p_i \in]0,1[$ $(1 \leq i \leq m)$ avec $\sum_{i=1}^{m} p_i = 1$.

La loi **multinomiale** $\mathcal{M}(n, p_1, p_2, ..., p_m)$ est la loi conjointe du vecteur $(X_1, X_2, ..., X_m)$ définie par

1. $X_i(\Omega) = [\![0, n]\!]$
2. pour tout $(x_1, x_2 ..., x_m) \in [\![0, n]\!]^m$
$$P((X_1 = x_1) \cap (X_2 = x_2) \ldots \cap (X_m = x_m)) = \frac{n!}{x_1! x_2! \ldots x_m!} p_1^{x_1} p_2^{x_2} \ldots p_m^{x_m}$$
si $x_1 + x_2 + \ldots + x_m = n$, 0 sinon.

Interprétation et exemple : tirages avec remise dans une urne multicolore. Une urne contient N boules de couleurs c_i (N_i boules, $1 \leq i \leq m$).

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Loi multinomiale

Soit $p_i \in]0,1[$ $(1 \leq i \leq m)$ avec $\sum_{i=1}^{m} p_i = 1$.

La loi multinomiale $\mathcal{M}(n, p_1, p_2, ..., p_m)$ est la loi conjointe du vecteur $(X_1, X_2, ..., X_m)$ définie par

1. $X_i(\Omega) = [\![0, n]\!]$
2. pour tout $(x_1, x_2 ..., x_m) \in [\![0, n]\!]^m$
   $P((X_1 = x_1) \cap (X_2 = x_2) ... \cap (X_m = x_m)) = \dfrac{n!}{x_1! x_2! ... x_m!} p_1^{x_1} p_2^{x_2} ... p_m^{x_m}$
   si $x_1 + x_2 + ... + x_m = n$, 0 sinon.

Interprétation et exemple : tirages avec remise dans une urne multicolore. Une urne contient N boules de couleurs c_i (N_i boules, $1 \leq i \leq m$).

$N_1 + N_2 + ... + N_m = N$;

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Loi multinomiale

Soit $p_i \in]0,1[$ $(1 \leq i \leq m)$ avec $\sum_{i=1}^{m} p_i = 1$.

La loi multinomiale $\mathcal{M}(n, p_1, p_2, ..., p_m)$ est la loi conjointe du vecteur $(X_1, X_2, ..., X_m)$ définie par

1. $X_i(\Omega) = [\![0, n]\!]$
2. pour tout $(x_1, x_2 ..., x_m) \in [\![0, n]\!]^m$
   $$P((X_1 = x_1) \cap (X_2 = x_2) ... \cap (X_m = x_m)) = \frac{n!}{x_1!x_2!...x_m!} p_1^{x_1} p_2^{x_2} ... p_m^{x_m}$$
   si $x_1 + x_2 + ... + x_m = n$, 0 sinon.

Interprétation et exemple : tirages avec remise dans une urne multicolore. Une urne contient N boules de couleurs c_i (N_i boules, $1 \leq i \leq m$).

$N_1 + N_2 + ... + N_m = N$; $p_i = \dfrac{N_i}{N}$.

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Loi multinomiale

Soit $p_i \in]0,1[$ $(1 \leq i \leq m)$ avec $\sum_{i=1}^{m} p_i = 1$.

La loi multinomiale $\mathcal{M}(n, p_1, p_2, \ldots, p_m)$ est la loi conjointe du vecteur $(X_1, X_2, \ldots, X_m)$ définie par

1. $X_i(\Omega) = [\![0, n]\!]$
2. pour tout $(x_1, x_2 \ldots, x_m) \in [\![0, n]\!]^m$
   $$P((X_1 = x_1) \cap (X_2 = x_2) \ldots \cap (X_m = x_m)) = \frac{n!}{x_1! x_2! \ldots x_m!} p_1^{x_1} p_2^{x_2} \ldots p_m^{x_m}$$
   si $x_1 + x_2 + \ldots + x_m = n$, 0 sinon.

Interprétation et exemple : tirages avec remise dans une urne multicolore. Une urne contient N boules de couleurs c_i (N_i boules, $1 \leq i \leq m$).

$N_1 + N_2 + \ldots + N_m = N$; $p_i = \dfrac{N_i}{N}$.

On effectue n tirages d'une boule avec remise et on note X_i le nombre de boules de couleurs c_i obtenues.

Loi multinomiale : exemple

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Loi multinomiale : exemple

Une urne contient 20 boules rouges, 30 boules vertes et 50 boules bleues ($N = 100$).

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Loi multinomiale : exemple

Une urne contient 20 boules rouges, 30 boules vertes et 50 boules bleues ($N = 100$).
On effectue $n = 12$ tirages d'une boule avec remise et on note X_1 le nombre de boules rouges, X_2 le nombre de boules vertes et X_3 le nombre de boules bleues obtenues.

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Loi multinomiale : exemple

Une urne contient 20 boules rouges, 30 boules vertes et 50 boules bleues ($N = 100$).
On effectue $n = 12$ tirages d'une boule avec remise et on note X_1 le nombre de boules rouges, X_2 le nombre de boules vertes et X_3 le nombre de boules bleues obtenues.

$$P\left((X_1 = x_1) \cap (X_2 = x_2) \cap (X_3 = x_3)\right) = \frac{12!}{x_1!x_2!x_3!}\left(\frac{20}{100}\right)^{x_1}\left(\frac{30}{100}\right)^{x_2}\left(\frac{50}{100}\right)^{x_3}$$

Loi multinomiale : exemple

Une urne contient 20 boules rouges, 30 boules vertes et 50 boules bleues ($N = 100$).

On effectue $n = 12$ tirages d'une boule avec remise et on note X_1 le nombre de boules rouges, X_2 le nombre de boules vertes et X_3 le nombre de boules bleues obtenues.

$$P\left((X_1 = x_1) \cap (X_2 = x_2) \cap (X_3 = x_3)\right) = \frac{12!}{x_1!x_2!x_3!}\left(\frac{20}{100}\right)^{x_1}\left(\frac{30}{100}\right)^{x_2}\left(\frac{50}{100}\right)^{x_3}$$

En prenant $x_1 = 5$, $x_2 = 3$ et $x_3 = 4$, on obtient

$$P\left((X_1 = 5) \cap (X_2 = 3) \cap (X_3 = 4)\right) = \frac{12!}{5!3!4!}0,2^5 0,3^3 0,5^4 \approx 0,01497$$

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Loi multinomiale : remarques

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Loi multinomiale : remarques

1. La loi binomiale est un cas particulier de la loi multinomiale ($m = 2$)

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Loi multinomiale : remarques

1. La loi binomiale est un cas particulier de la loi multinomiale ($m = 2$)
2. $X_i \sim \mathcal{B}(n, p_i)$

Variable aléatoire discrète : vecteur aléatoire

Loi multinomiale : remarques

1. La loi binomiale est un cas particulier de la loi multinomiale $(m = 2)$
2. $X_i \sim \mathcal{B}(n, p_i)$
3. $E(X_i) = np_i$, $V(X_i) = np_i(1 - p_i)$, $cov(X_i, X_j) = -np_ip_j$

Loi gamma

Loi gamma

z et θ sont des réels strictement positifs.

Variable aléatoire continue : lois usuelles

Loi gamma

z et θ sont des réels strictement positifs.

On pose $\Gamma(z) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x} x^{z-1}\, dx$

Variable aléatoire continue : lois usuelles

R3.08 Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Plan

Variable aléatoire

Variable aléatoire réelle

Variable aléatoire discrète

Variable aléatoire continue

Complément

Annexe : autres lois

Loi gamma

z et θ sont des réels strictement positifs.

On pose $\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{z-1}\, dx$

La densité d'une variable aléatoire $X \sim \gamma(z, \theta)$ est $f(x) = \frac{\theta^z}{\Gamma(z)} e^{-\theta x} x^{z-1}$ $(x \geq 0)$.

Variable aléatoire continue : lois usuelles

Loi gamma

z et θ sont des réels strictement positifs.

On pose $\Gamma(z) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x} x^{z-1}\, dx$

La densité d'une variable aléatoire $X \sim \gamma(z, \theta)$ est $f(x) = \dfrac{\theta^z}{\Gamma(z)} e^{-\theta x} x^{z-1}$ $(x \geq 0)$.

$E(X) = \dfrac{z}{\theta}$; $V(X) = \dfrac{z}{\theta^2}$.

Variable aléatoire continue : lois usuelles

R3.08 Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Loi gamma

z et θ sont des réels strictement positifs.

On pose $\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{z-1}\, dx$

La densité d'une variable aléatoire $X \sim \gamma(z, \theta)$ est $f(x) = \dfrac{\theta^z}{\Gamma(z)} e^{-\theta x} x^{z-1}$ $(x \geq 0)$.

$E(X) = \dfrac{z}{\theta}$; $V(X) = \dfrac{z}{\theta^2}$.

Exemple : somme de z variables aléatoires X_i indépendantes et de loi exponentielle de paramètre θ.

Variable aléatoire continue : lois usuelles

Loi du χ^2

Variable aléatoire continue : lois usuelles

Loi du χ^2

La loi du χ^2 à n degrés de liberté est la loi $\gamma(n/2, 1/2)$.

Loi du χ^2

La loi du χ^2 à n degrés de liberté est la loi $\gamma(n/2, 1/2)$.
Notation : χ^2_n

Loi du χ^2

La loi du χ^2 à n degrés de liberté est la loi $\gamma(n/2, 1/2)$.
Notation : χ^2_n
Propriété caractéristique :

Si $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ indépendantes et $X_i \sim \mathcal{N}(0,1)$ alors $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \sim \chi^2_n$.

Variable aléatoire continue : lois usuelles

Loi du χ^2

La loi du χ^2 à n degrés de liberté est la loi $\gamma(n/2, 1/2)$.
Notation : χ^2_n
Propriété caractéristique :

Si $(X_i)_{1\leq i\leq n}$ indépendantes et $X_i \sim \mathcal{N}(0,1)$ alors $\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \sim \chi^2_n$.

$E\left(\chi^2_n\right) = n$; $V\left(\chi^2_n\right) = 2n$.

Variable aléatoire continue : lois usuelles

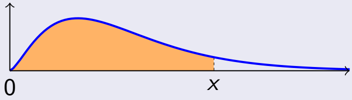
Loi du χ^2

La loi du χ^2 à n degrés de liberté est la loi $\gamma(n/2, 1/2)$.
Notation : χ^2_n
Propriété caractéristique :

Si $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ indépendantes et $X_i \sim \mathcal{N}(0,1)$ alors $\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \sim \chi^2_n$.

$E\left(\chi^2_n\right) = n$; $V\left(\chi^2_n\right) = 2n$.

χ^2_5 : $P\left(\chi^2_n \leq x\right)$



Variable aléatoire continue : lois usuelles

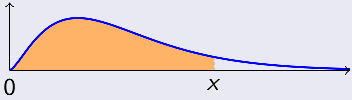
Loi du χ^2

La loi du χ^2 à n degrés de liberté est la loi $\gamma(n/2, 1/2)$.
Notation : χ_n^2
Propriété caractéristique :

Si $(X_i)_{1\leq i\leq n}$ indépendantes et $X_i \sim \mathcal{N}(0,1)$ alors $\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \sim \chi_n^2$.

$E\left(\chi_n^2\right) = n$; $V\left(\chi_n^2\right) = 2n$.

χ_5^2 : $P\left(\chi_n^2 \leq x\right)$



Utilisation : tests d'hypothèse.

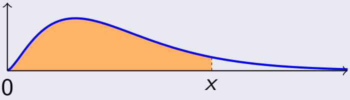
Loi du χ^2

La loi du χ^2 à n degrés de liberté est la loi $\gamma(n/2, 1/2)$.
Notation : χ^2_n
Propriété caractéristique :

Si $(X_i)_{1\leq i\leq n}$ indépendantes et $X_i \sim \mathcal{N}(0,1)$ alors $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \sim \chi^2_n$.

$$E\left(\chi^2_n\right) = n \;;\; V\left(\chi^2_n\right) = 2n.$$

χ^2_5 : $P\left(\chi^2_n \leq x\right)$



Utilisation : tests d'hypothèse.
La table donne $x_{n;\alpha}$ tel que $P\left(\chi^2_n \leq x_{n;\alpha}\right) = \alpha$.

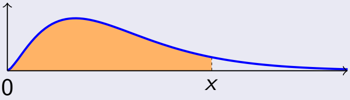
Loi du χ^2

La loi du χ^2 à n degrés de liberté est la loi $\gamma(n/2, 1/2)$.
Notation : χ^2_n
Propriété caractéristique :

Si $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ indépendantes et $X_i \sim \mathcal{N}(0,1)$ alors $\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \sim \chi^2_n$.

$E\left(\chi^2_n\right) = n$; $V\left(\chi^2_n\right) = 2n$.

χ^2_5 : $P\left(\chi^2_n \leq x\right)$



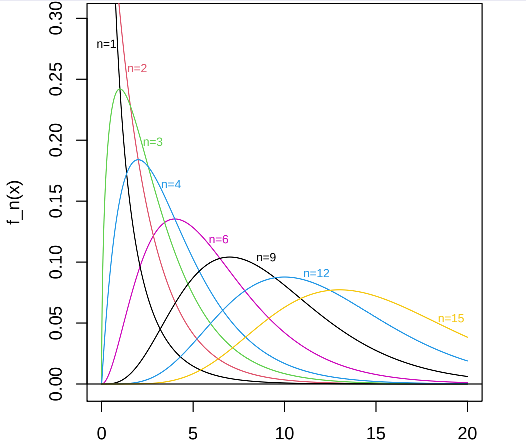
Utilisation : tests d'hypothèse.
La table donne $x_{n;\alpha}$ tel que $P\left(\chi^2_n \leq x_{n;\alpha}\right) = \alpha$.
Exemple : $x_{5;0,95} = 11,070$: $P\left(\chi^2_n \leq 11,070\right) = 0,95$

Variable aléatoire continue : lois usuelles

Loi du χ_n^2 : densité en fonction du nombre de degrés de liberté n

Variable aléatoire continue : lois usuelles

Loi du χ^2_n : densité en fonction du nombre de degrés de liberté n



Variable aléatoire continue : lois usuelles

Loi de Student $\mathcal{T}_n$

Loi de Student $\mathcal{T}_n$

On pose $\Gamma(z) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}x^{z-1}\,dx$.

Loi de Student $\mathcal{T}_n$

On pose $\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{z-1}\, dx$.

La densité d'une variable aléatoire X qui suit la loi de Student à n degrés de liberté est $f(x) = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$ $(x \in \mathbb{R})$.

Variable aléatoire continue : lois usuelles

R3.08 Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Plan

Variable aléatoire

Variable aléatoire réelle

Variable aléatoire discrète

Variable aléatoire continue

Complément

Annexe : autres lois

Loi de Student $\mathcal{T}_n$

On pose $\Gamma(z) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}x^{z-1}\,dx$.

La densité d'une variable aléatoire X qui suit la loi de Student à n degrés de liberté est $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{n\pi}}\dfrac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(1+\dfrac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$ $(x \in \mathbb{R})$.

Notation : $X \sim \mathcal{T}_n$.

Variable aléatoire continue : lois usuelles

Loi de Student $\mathcal{T}_n$

On pose $\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{z-1}\, dx$.

La densité d'une variable aléatoire X qui suit la loi de Student à n degrés de liberté est $f(x) = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Notation : $X \sim \mathcal{T}_n$.

Propriété : Si $U \sim \mathcal{N}(0,1)$ et $Y \sim \chi^2_n$ indépendantes alors $\frac{U}{\sqrt{Y/n}} \sim \mathcal{T}_n$.

Variable aléatoire continue : lois usuelles

Loi de Student $\mathcal{T}_n$

On pose $\Gamma(z) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x} x^{z-1}\, dx$.

La densité d'une variable aléatoire X qui suit la loi de Student à n degrés de liberté est $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{n\pi}} \dfrac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1 + \dfrac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$ $(x \in \mathbb{R})$.

Notation : $X \sim \mathcal{T}_n$.

Propriété : Si $U \sim \mathcal{N}(0,1)$ et $Y \sim \chi^2_n$ indépendantes alors $\dfrac{U}{\sqrt{Y/n}} \sim \mathcal{T}_n$.

$E\left(T_n\right) = 0$ pour $n \geq 2$; $V\left(T_n\right) = \dfrac{n}{n-2}$ pour $n \geq 3$.

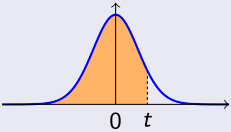
Variable aléatoire continue : lois usuelles

Loi de Student $\mathcal{T}_n$

Variable aléatoire continue : lois usuelles

Loi de Student $\mathcal{T}_n$

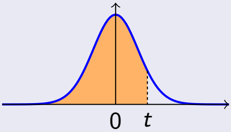
$\mathcal{T}_{49}$: $P\left(T_{49} \leq t\right)$



Variable aléatoire continue : lois usuelles

Loi de Student $\mathcal{T}_n$

$\mathcal{T}_{49}$: $P\left(T_{49} \leq t\right)$

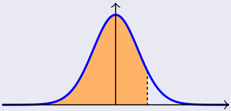


Utilisation : intervalle de confiance et tests d'hypothèse.

Variable aléatoire continue : lois usuelles

Loi de Student $\mathcal{T}_n$

$$\mathcal{T}_{49} : P\,(T_{49} \leq t)$$



Utilisation : intervalle de confiance et tests d'hypothèse.

Pseudonyme de William Sealy Gosset : statisticien britannique (1876-1937).

Variable aléatoire continue : lois usuelles

Loi de Student : remarques

Loi de Student : remarques

1. f est paire : la représentation graphique $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Variable aléatoire continue : lois usuelles

R3.08 Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Loi de Student : remarques

1. f est paire : la représentation graphique $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
2. On en déduit : $P\left(T_n \leq -t\right) = P\left(T_n > t\right) = 1 - P\left(T_n \leq t\right)$.

Variable aléatoire continue : lois usuelles

Loi de Student : remarques

1. f est paire : la représentation graphique $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
2. On en déduit : $P(T_n \leq -t) = P(T_n > t) = 1 - P(T_n \leq t)$.

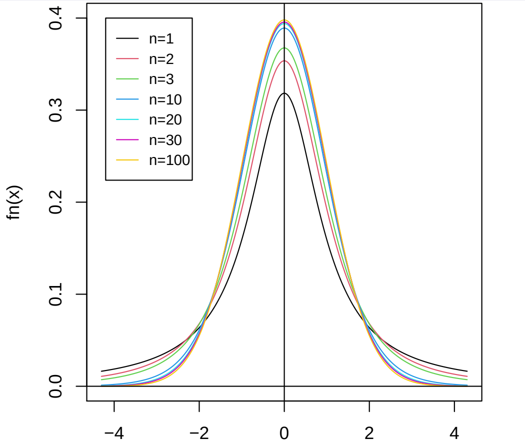
Exemple : $P(T_5 \leq -2,015) = 1 - P(T_5 \leq 2,015) \approx 1 - 0,95 = 0,05$

Variable aléatoire continue : lois usuelles

Loi de Student $\mathcal{T}_n$: densité en fonction du nombre de degrés de liberté n

Variable aléatoire continue : lois usuelles

Loi de Student $\mathcal{T}_n$: densité en fonction du nombre de degrés de liberté n

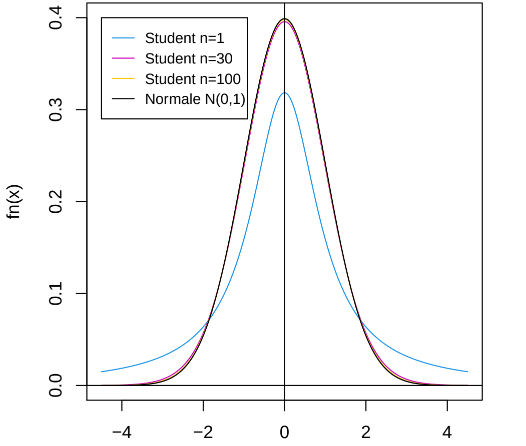


Variable aléatoire continue : lois usuelles

Loi de Student $\mathcal{T}_n$: densité en fonction du nombre de degrés de liberté n

Variable aléatoire continue : lois usuelles

Loi de Student $\mathcal{T}_n$: densité en fonction du nombre de degrés de liberté n



Pour $n \geq 100$, la loi de student peut être approchée par la loi normale centrée réduite.

Variable aléatoire continue

Loi du χ^2 : propriété

Variable aléatoire continue

Loi du χ^2 : propriété

Si X_1, X_2, ..., X_n sont n variables aléatoires indépendantes suivant la même loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$ alors

Variable aléatoire continue

Loi du χ^2 : propriété

Si X_1, X_2, ..., X_n sont n variables aléatoires indépendantes suivant la même loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$ alors $\sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \overline{X}\right)^2 \sim \chi^2_{n-1}$.

Variable aléatoire continue

Loi du χ^2 : propriété

Si X_1, X_2, ..., X_n sont n variables aléatoires indépendantes suivant la même loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$ alors $\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2 \sim \chi^2_{n-1}$.

Remarques :

Loi du χ^2 : propriété

Si X_1, X_2, ..., X_n sont n variables aléatoires indépendantes suivant la même loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$ alors $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2 \sim \chi^2_{n-1}$.

Remarques :
Les variables $X_i - \overline{X}$ ne sont pas indépendantes (somme nulle), d'où la perte d'un degré de liberté.

Variable aléatoire continue

R3.08 Probabilités

Département Informatique IUT de Saint-Dié-des-Vosges

Plan

Variable aléatoire

Variable aléatoire réelle

Variable aléatoire discrète

Variable aléatoire continue

Complément

Annexe : autres lois

Loi du χ^2 : propriété

Si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont n variables aléatoires indépendantes suivant la même loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$ alors $\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2 \sim \chi^2_{n-1}$.

Remarques :
Les variables $X_i - \overline{X}$ ne sont pas indépendantes (somme nulle), d'où la perte d'un degré de liberté.

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} \sim \mathcal{N}(0, 1/\sqrt{n})$$

Variable aléatoire continue : lois usuelles

Loi de Fischer-Snedecor $\mathcal{F}_{n,m}$

Variable aléatoire continue : lois usuelles

Loi de Fischer-Snedecor $\mathcal{F}_{n,m}$

On pose $B(x,y) = \displaystyle\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt$ (fonction *Beta*).

Variable aléatoire continue : lois usuelles

Loi de Fischer-Snedecor $\mathcal{F}_{n,m}$

On pose $B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt$ (fonction *Beta*).

La densité d'une variable aléatoire X qui suit la loi de Fischer-Snedecor de paramètre (n,m) est

$$f(x) = \frac{1}{xB\left(n/2, m/2\right)} \left(\frac{nx}{nx+m}\right)^{n/2} \left(1 - \frac{nx}{nx+m}\right)^{m/2} \quad (x \in \mathbb{R}_+).$$

Variable aléatoire continue : lois usuelles

Loi de Fischer-Snedecor $\mathcal{F}_{n,m}$

On pose $B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt$ (fonction *Beta*).

La densité d'une variable aléatoire X qui suit la loi de Fischer-Snedecor de paramètre (n,m) est

$$f(x) = \frac{1}{xB\left(n/2, m/2\right)} \left(\frac{nx}{nx+m}\right)^{n/2} \left(1 - \frac{nx}{nx+m}\right)^{m/2} \quad (x \in \mathbb{R}_+).$$

Notation : $X \sim \mathcal{F}_{n,m}$.

Variable aléatoire continue : lois usuelles

Loi de Fischer-Snedecor $\mathcal{F}_{n,m}$

On pose $B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt$ (fonction *Beta*).

La densité d'une variable aléatoire X qui suit la loi de Fischer-Snedecor de paramètre (n,m) est

$$f(x) = \frac{1}{xB\left(n/2, m/2\right)} \left(\frac{nx}{nx+m}\right)^{n/2} \left(1 - \frac{nx}{nx+m}\right)^{m/2} \quad (x \in \mathbb{R}_+).$$

Notation : $X \sim \mathcal{F}_{n,m}$.

Propriété :

Si $X \sim \chi^2_n$, $Y \sim \chi^2_m$ et X, Y indépendantes alors $\dfrac{X/n}{Y/m} \sim \mathcal{F}_{n,m}$

Variable aléatoire continue : lois usuelles

Loi de Fischer-Snedecor $\mathcal{F}_{n,m}$

On pose $B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\, dt$ (fonction *Beta*).

La densité d'une variable aléatoire X qui suit la loi de Fischer-Snedecor de paramètre (n,m) est

$$f(x) = \frac{1}{xB\left(n/2, m/2\right)} \left(\frac{nx}{nx+m}\right)^{n/2} \left(1 - \frac{nx}{nx+m}\right)^{m/2} \quad (x \in \mathbb{R}_+).$$

Notation : $X \sim \mathcal{F}_{n,m}$.

Propriété :

Si $X \sim \chi^2_n$, $Y \sim \chi^2_m$ et X, Y indépendantes alors $\dfrac{X/n}{Y/m} \sim \mathcal{F}_{n,m}$

Utilisation : comparaison des variances de deux échantillons.