Documents autorisés : cours, TD, notes manuscrites, calculatrice.
Barème indicatif : 4 + 3 + 2 + 7 + 4 Durée : 1h 30.

Exercice 1

L'évolution du nombre total de voyageurs et du nombre d'abonnés prenant le train entre Montreux et Oberland Bernois (Suisse) est donnée par le tableau suivant (en millions de personnes) :

Année	2000	2001	2002	2003	2004
Nombre total X	1,742	1,751	1,756	1,824	1,841
Nombre d'abonnés Y	0,906	0,935	0,952	0,988	1,011

1. Représenter graphiquement le nuage de points (nombre total X en abscisse, nombre d'abonnés Y en ordonnée).
   Indication : on pourra représenter l'intervalle $[1,70; 1,85]$ en abscisse et $[0,90; 1,10]$ en ordonnée avec une unité de 5 cm pour 0,1 million de personnes.
2. Ajuster Y en X selon la méthode des moindres carrés et préciser la formule obtenue : $Y = aX + b$.
3. Tracer la droite d'équation $y = ax + b$ obtenue sur le graphique précédent.
4. Etudier la qualité de l'ajustement en précisant r^2.
5. Préciser la somme des carrés des résidus :

$$\sum_{i=1}^{5} (y_i - (ax_i + b))^2$$

Exercice 2

n est un entier strictement supérieur à 1. M. Otol joue n fois au loto de manière indépendante. La probabilité de gagner au premier rang (gros lot) est p.
Déterminer en fonction de p

1. la probabilité de ne jamais gagner au premier rang au cours des n parties.
2. la probabilité de gagner au premier rang une seule fois et ceci lors de la n-ième partie.
3. la probabilité de gagner au premier rang lors de la n-ième partie sachant qu'il n'a pas gagné au premier rang au cours des n-1 parties précédentes.

Exercice 3

Lorqu'un organisme adresse des invitations à un public déterminé, le taux de retour (nombre de personnes répondant favorablement à l'invitation) est estimé à 12 %.
Cet organisme invite 350 personnes. Le nombre de personne répondant favorablement à cette inviation est une variable aléatoire X qui suit la loi binomiale $\mathfrak{B}(350; 0,12)$ qu'on approche par une loi normale.

1. Préciser les paramètres de cette loi normale.
2. En déduire la probabilité qu'au moins 50 personnes répondent favorablement à l'invitation. Indication : on pourra calculer $P(X \geq 49,5)$.

Exercice 4

Les réponses aux questions de cet exercice seront données sous la forme de fractions irréductibles.

Un questionnaire 1 comporte trois questions. A chacune des trois questions, deux réponses sont proposées. Une est correcte et l'autre non.
Un questionnaire 2 comporte deux questions. A chacune des deux questions, trois réponses sont proposées. Une est correcte et les deux autres non.

1. Un étudiant répond aux questions du questionnaire 1 au hasard et de manière indépendante. On note X_1 la variable aléatoire qui compte le nombre de bonnes réponses à ce questionnaire.
   (a) Donner la loi de probabilité de X_1. On précisera $P(X_1 = i)$, $(0 \leq i \leq 3)$.
   (b) Déterminer l'espérance et la variance de X_1.
   (c) Le test associé au questionnaire 1 est considéré comme réussi si l'étudiant a répondu correctement à au moins deux questions. Quelle est la probabilité pour l'étudiant de réussir le test ?
2. L'étudiant répond ensuite aux questions du questionnaire 2 au hasard et de manière indépendante. On note X_2 la variable aléatoire qui compte le nombre de bonnes réponses à ce questionnaire.
   (a) Donner la loi de probabilité de X_2. On précisera $P(X_2 = i)$, $(0 \leq i \leq 2)$.
   (b) Déterminer l'espérance et la variance de X_2.
   (c) Le test associé au questionnaire 2 est considéré comme réussi si l'étudiant a répondu correctement à au moins une question. Quelle est la probabilité pour l'étudiant de réussir le test ?
3. On pose $Z = X_1 + X_2$.
   (a) Préciser la loi conjointe du couple (X_1, X_2).
   Indication : les variables aléatoires X_1 et X_2 sont indépendantes.
   (b) En déduire la loi de probabilité de Z.
   On présentera les résultats dans un tableau.
   (c) Préciser l'espérance et la variance de Z.
   (d) Déterminer $P((Z \geq 3)/(X_1 \geq 2))$, puis $P((Z \geq 3)/(X_2 \geq 1))$.

Exercice 5

Un avion de 36 places est affrêté par une compagnie aérienne pour la liaison Nancy-Marseille. Les billets sont vendus sur réservation. Le billet est facturé 400 euros et payé à l'enregistrement. 10% des personnes ayant réservé ne se présentent pas à l'embarquement.

1. La compagnie accepte 36 réservations.
   (a) Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X qui donne le nombre de personnes qui prendront effectivement l'avion en précisant $P(X = i)$, $0 \leq i \leq 36$.
   Indication : on pourra exprimer $P(X = i)$ en fonction de i.
   (b) Déterminer l'espérance de X.
   (c) Préciser en fonction de X la variable aléatoire Y égale au montant de la recette encaissée.
   (d) En déduire l'espérance de Y.
2. La compagnie décide d'accepter 40 réservations. Si une personne se présente alors qu'il n'y a plus de place, le remboursement du billet et une indemnité supplémentaire de 250 euros lui est accordée.
   (a) Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X' qui donne le nombre de personnes qui se présentent à l'aéroport pour prendre l'avion : $P(X' = i)$, $0 \leq i \leq 40$.
   Indication : on pourra exprimer $P(X' = i)$ en fonction de i.
   (b) Préciser en fonction de X' la variable aléatoire Y' donnant la recette correspondante.
   (c) En déduire l'espérance de Y'.
   (d) Comparer $E(Y)$ et $E(Y')$. Commenter.

Depuis le 17 février 2005, les usagers du transport aérien confrontés à un refus d'embarquement pour overbooking, sont indemnisés à hauteur de 250 euros pour les vols de moins de 1 500 kilomètres, de 400 euros pour ceux de 1 500 à 3 500 kilomètres et de 600 euros pour les vols supérieurs à 3 500 km (décision du Conseil européen).