Documents autorisés : cours, TD, notes manuscrites. Barème indicatif : 4 + 3 + 6 + 5 + 2. Durée : 1h 30.

Exercice 1

On a relevé la proportion d'individus âgés de 18 ans au moins disposant d'un micro-ordinateur ou d'une connexion à l'Internet à leur domicile (CREDOC novembre 2005) :

Date	juil. 2000	juil. 2001	juil. 2002	juil. 2003	juil. 2004
Micro-ordinateur (pour cent) X	34	36	39	46	50
Connexion à l'Internet (pour cent) Y	14	19	23	30	35

1. Représenter graphiquement le nuage de points (X en abscisse, Y en ordonnée).
2. Préciser $\overline{x}$, $\overline{y}$, σ_X^2, σ_Y^2 et σ_{XY}.
3. Ajuster Y en X selon la méthode des moindres carrés et préciser la formule obtenue : $Y = aX + b$.
4. Tracer la droite D d'équation $y = ax + b$ obtenue sur le graphique précédent.
5. Etudier la qualité de l'ajustement en précisant r^2.
6. Préciser la somme des résidus :

$$\sum_{i=1}^{5} (y_i - (ax_i + b))^2$$

Exercice 2

En décembre 2006, 70 % des automobilistes disposent de la totalité des points de leur permis de conduire. On interroge au hasard 30 automobilistes.

1. Quelle est la probabilité que
   (a) 20 automobilistes disposent de la totalité des points de leur permis de conduire ?
   (b) 21 automobilistes disposent de la totalité des points de leur permis de conduire ?
   (c) 22 automobilistes disposent de la totalité des points de leur permis de conduire ?
2. En déduire la probabilité qu'entre 20 et 22 automobilistes disposent de la totalité des points de leur permis de conduire ?

On donnera le résultat exact et une valeur approchée de ces différentes probabilités.
Indication : la variable aléatoire X qui donne le nombre d'automobilistes disposant de la totalité des points de leur permis de conduire suit la loi binomiale $\mathfrak{B}(30,\ 0,7)$.

On procède à présent à une approximation suivant la loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma)$ avec $m = E(X)$ et $\sigma = \sqrt{V(X)}$.

1. Préciser m et σ.
2. Quelle est la probabilité que
   (a) 20 automobilistes disposent de la totalité des points de leur permis de conduire : $P(19,5 \leq X \leq 20,5)$?
   (b) 21 automobilistes disposent de la totalité des points de leur permis de conduire : $P(20,5 \leq X \leq 21,5)$?
   (c) 22 automobilistes disposent de la totalité des points de leur permis de conduire : $P(21,5 \leq X \leq 22,5)$?
   (d) entre 20 et 22 automobilistes disposent de la totalité des points de leur permis de conduire : $P(19,5 \leq X \leq 22,5)$?

Exercice 3

Les réponses aux questions de cet exercice seront données sous la forme de fractions irréductibles.

La loi conjointe du couple de variables aléatoires (X_1, X_2) est donnée par :

$X_1 \backslash X_2$	0	1	2	$P(X_1 = i)$
0	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{6}$	
1	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	
$P(X_2 = j)$				

1. Préciser
   (a) la loi marginale de X_1 : $P(X_1 = i)$, $0 \leq i \leq 1$.
   (b) la loi marginale de X_2 : $P(X_2 = j)$, $0 \leq j \leq 2$.

   On pourra reproduire et compléter le tableau.
2. Est-ce que X_1 et X_2 sont indépendantes ?
   Indication : on pourra comparer $P((X_1 = 0) \cap (X_2 = 1))$ et $P(X_1 = 0) P(X_2 = 1)$.
3. Préciser la loi de probabilité de $Y = X_1 X_2$.
4. Déterminer $E(X_1)$, $E(X_2)$, $E(X_1 X_2)$, $V(X_1)$ et $V(X_2)$.
5. En déduire $E(X_1 + X_2)$, $cov(X_1, X_2)$ et $V(X_1 + X_2)$.
   Indication : $E(X_1 + X_2) = E(X_1) + E(X_2)$, $cov(X_1, X_2) = E(X_1 X_2) - E(X_1)E(X_2)$ et $V(X_1 + X_2) = V(X_1) + V(X_2) + 2cov(X_1, X_2)$.

Exercice 4

Une réserve africaine compte 10 000 éléphants. Chaque éléphant consomme en moyenne $0,2$ tonne de végétaux chaque jour avec un écart-type de $0,025$ tonne.
On note X_i la variable aléatoire qui indique la masse de végétaux absorbée un jour donné par l'éléphant i $(1 \leq i \leq 10\,000)$.
On suppose que $X_i \sim \mathcal{N}\,(0,2;\ 0,025)$.
On note $S_{10\,000} = \displaystyle\sum_{i=1}^{10\ 000} X_i$ la variable aléatoire précisant la masse totale de végétaux absorbée par les éléphants.
$S_{10\ 000} \sim \mathcal{N}\left(0,2.10\,000;\ 0,025\sqrt{10\,000}\right) = \mathcal{N}\,(2\,000;\ 2,5)$.

1. Préciser la probabilité que la masse consommée soit
   (a) d'au plus 2 000 tonnes : $P\,(S_{10\,000} \leq 2\,000)$,
   (b) d'au moins 2 000 tonnes : $P\,(S_{10\,000} \geq 2\,000)$,
   (c) comprise entre 1 995 et 2 005 tonnes : $P\,(1\,995 \leq S_{10\,000} \leq 2\,005)$.
2. Une étude montre que la masse de végétaux qui peut être absorbée chaque jour par les éléphants de la réserve ne peut dépasser 1 500 tonnes. On veut donc déterminer le nombre maximal d'éléphants N pouvant vivre dans cette réserve.
   Pour ce faire, on note $S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$ la variable aléatoire précisant la masse totale de végétaux absorbée par n éléphants : $S_n \sim \mathcal{N}\,(0,2.n;\ 0,025\sqrt{n})$ et on définit N comme étant l'entier n le plus grand vérifiant $P\,(S_n \leq 1\,500) \geq 0,99$.
   Préciser N.

   Indication : on pourra poser $x = \sqrt{n}$ et résoudre l'inéquation associée.

Exercice 5

M. Otol joue au loto n fois (n entier strictement positif).
La probabilité de gagner au premier rang (gros lot) est p.

(a) Quelle est la probabilité P de gagner au moins deux fois au premier rang ?
   i. Calcul direct
      Préciser P en fonction de n et p (loi binomiale).
   ii. Calcul approché
      n est supposé assez grand et p assez petit pour faire une approximation suivant une loi de Poisson que l'on précisera. Préciser l'expression de P obtenue.
(b) Application numérique : $p = C_{49}^{6}$, $n = 4\ 462$.
   i. Calcul direct (loi binomiale).
   ii. Calcul approché (loi de Poisson).

   On donnera le résultat exact et une valeur approchée de ces différentes probabilités.