# PARTIE 1.2 – AVEC SURBOOKING

Le club de voile décide d’accepter un nombre de réservations supérieur au nombre de bateaux disponibles afin de compenser les absences des clients. On suppose que : n > m et Xₙ suit une loi binomiale : Xₙ ~ B(n, p). Chaque client paie à l’avance un prix de location b = 100 €. S’il ne se présente pas, le club lui rembourse une fraction t·b, et s’il ne peut embarquer faute de bateau, il reçoit un dédommagement d. Les valeurs des paramètres sont : t ∈ {0, 0.5, 1} et d ∈ {200, 300}. Les couples de paramètres pour le groupe 12 sont : (m₁,p₁) = (25, 0.88) et (m₂,p₂) = (105, 0.93).

## a) Probabilité P₂ : au moins un bateau reste inoccupé

Il reste au moins un bateau vide lorsque moins de m clients se présentent : P₂ = P(Xₙ ≤ m − 1) = Σ(i=0→m−1) [C(n,i)·pⁱ·(1−p)ⁿ⁻ⁱ]. On a donc n₂ = m − 1. Cette probabilité mesure le risque d’avoir des bateaux inoccupés. Plus p est élevé, plus ce risque est faible, et plus le surbooking est justifié.

## b) Probabilité P₃ : au moins un client est refusé

Lorsqu’il y a plus de m clients présents, certains ne peuvent pas embarquer : P₃ = P(Xₙ ≥ m + 1) = Σ(i=m+1→n) [C(n,i)·pⁱ·(1−p)ⁿ⁻ⁱ]. On a donc n₃ = m + 1. Cette probabilité correspond au risque qu’un client, bien qu’ayant réservé, ne puisse embarquer. Elle croît avec n : plus le surbooking est fort, plus ce risque augmente.

## c) Espérance E(Xₙ)

Pour une loi binomiale : E(Xₙ) = n·p. Cette espérance correspond au nombre moyen de clients présents. Exemple : pour n = 110 et p = 0.93, on obtient E(Xₙ) = 102.3.

## d) Recette moyenne E(Rₙ)

La recette journalière dépend du nombre de réservations n, du taux de remboursement t et du dédommagement d. La recette aléatoire est donnée par : Rₙ = n·b − t·b·(n − Xₙ) − d·max(0, Xₙ − m). En prenant l’espérance : E(Rₙ) = n·b − t·b·n·(1 − p) − d·E[max(0, Xₙ − m)] avec : E[max(0, Xₙ − m)] = Σ(i=m+1→n) [(i−m)·C(n,i)·pⁱ·(1−p)ⁿ⁻ⁱ]. Lecture économique : n·b → recettes payées à l’avance, −t·b·n(1−p) → remboursements moyens des absents, −d·E[max(0, Xₙ − m)] → coût moyen des refus.

## e) Maximisation de la recette moyenne

Le club cherche le nombre n₀ de réservations maximisant E(Rₙ). Condition (C) : E(Rₙ₊₁) − E(Rₙ) = b·[p + (1 − t)(1 − p)] − d·p·P(Xₙ ≥ m). Si le résultat est positif, augmenter n reste rentable. Si le résultat devient négatif, la recette décroît.

### (ii) Application numérique – Groupe 12

Paramètres : b = 100 €, t ∈ {0, 0.5, 1}, d ∈ {200, 300}.

Cas 1 : (m,p) = (25, 0.88)

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| t | d | n₀ | E[Rₙ₀] (€) |
| 0 | 200 | 29 | 2703 |
| 0 | 300 | 28 | 2652 |
| 0.5 | 200 | 28 | 2533 |
| 0.5 | 300 | 28 | 2484 |
| 1 | 200 | 28 | 2365 |
| 1 | 300 | 27 | 2322 |

Cas 2 : (m,p) = (105, 0.93)

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| t | d | n₀ | E[Rₙ₀] (€) |
| 0 | 200 | 113 | 11076 |
| 0 | 300 | 112 | 10996 |
| 0.5 | 200 | 113 | 10681 |
| 0.5 | 300 | 112 | 10604 |
| 1 | 200 | 113 | 10285 |
| 1 | 300 | 111 | 10212 |

Analyse économique :  
- Quand t augmente, les remboursements sont plus élevés, donc la recette moyenne diminue et n₀ baisse.  
- Quand d augmente, les refus coûtent plus cher, donc le surbooking optimal diminue.  
- Quand p augmente, les absences sont plus rares, donc le surbooking devient moins utile.  
  
Synthèse :  
Cas 1 (25, 0.88) : n₀ ≈ 28–29, E[Rₙ₀] ≈ 2650 €, surbooking plus fort.  
Cas 2 (105, 0.93) : n₀ ≈ 112–113, E[Rₙ₀] ≈ 11000 €, surbooking modéré.  
  
Conclusion : Le modèle met en évidence un équilibre optimal entre réservations et capacité. Trop peu de réservations → bateaux vides ; trop de réservations → refus coûteux. Les graphiques montrent une croissance puis une décroissance de E[Rₙ] selon n, et confirment que le surbooking optimal dépend de p, t et d.