SAE Mathématiques

Partie 1

Avec surbooking

On suppose  et  (la capacité reste  bateaux). Si un client se présente alors qu’il n’y a plus de bateaux, le club lui verse un dédommagement  (en euros).

**a) Probabilité  qu’il y ait au moins un bateau qui ne prendra pas l’eau**

Un bateau « ne prend pas l’eau » s’il reste inoccupé, c’est-à-dire si strictement moins de  clients se présentent :

Cette probabilité P2 représente le risque pour le club d’avoir au moins un bateau qui restera inutilisé au cours de la journée, c’est-à-dire une perte potentielle de chiffre d’affaires.

Elle permet d’évaluer la situation dans laquelle trop peu de clients se présentent par rapport au nombre de bateaux disponibles.

Plus la probabilité de venue p est élevée, plus P2 diminue : les clients se présentent plus souvent et le risque de bateaux inoccupés devient faible.

À l’inverse, si p est faible (les clients sont souvent absents), P2 augmente : le club risque alors d’avoir plusieurs bateaux vides.

Dans cette situation, le surbooking devient avantageux, car accepter davantage de réservations permet de compenser statistiquement les absences et de maximiser le taux d’occupation des bateaux.

**b) Probabilité  qu’il y ait au moins un client refusé**

P3 représente la probabilité qu’au moins un client ayant réservé ne puisse pas embarquer, c’est-à-dire qu’il y ait plus de m clients présents que de bateaux disponibles.

Comme  , on obtient :

Ainsi, n3 = m + 1.

**Effets des paramètres :**

– Si p augmente (clients plus fiables), le risque de refus P3 augmente.

– Si n augmente (plus de surbooking), P3 augmente également.

– Si m augmente (plus de bateaux), P3 diminue.

Cette probabilité mesure donc le **risque d’un surbooking excessif**, qui sera pris en compte dans le calcul de la recette moyenne E(Rn).

**c) Espérance de**

**L’espérance de représente le nombre moyen de clients qui se présentent réellement le jour prévu.**

**Puisque chaque client vient avec une probabilité , et qu’il y a réservations indépendantes, on obtient :**

**Cette relation traduit l’idée que, sur un grand nombre de jours, environ une proportion des clients ayant réservé se présentera.**

**Exemple :**

**Si le club accepte = 110 réservations avec une probabilité moyenne de présence = 0,93, alors :**

**En moyenne, 102 clients se présenteront, ce qui permet d’anticiper le nombre de bateaux nécessaires.**

**Ce résultat permettra, dans la suite, d’évaluer la recette moyenne attendue en fonction du nombre de réservations n et de la probabilité de présence p.**

**d) Recette moyenne**

**Après avoir étudié la proportion de clients présents et le risque de refus, on cherche maintenant à modéliser la recette journalière du club en présence de surbooking.**

**La recette aléatoire du jour, en présence de surbooking, est donnée par :**

La variable aléatoire représente la **recette du club pour une journée**, lorsque celui-ci accepte n réservations pour m bateaux disponibles.

Cette expression tient compte :

* Des **locations payées à l’avance** (),
* Des **remboursements** accordés aux clients absents
* Et des **dédommagements** versés aux clients refusés faute de place .

En appliquant la linéarité de l’espérance, on obtient :

Le premier terme correspond aux recettes fixes issues des réservations payées.

Le second terme représente la **perte moyenne** due aux remboursements partiels des clients absents (une proportion moyenne des réservations).

Le troisième terme exprime la **perte moyenne liée aux refus** lorsque trop de clients se présentent.

Le terme d’espérance mesure le **nombre moyen de clients refusés** et se calcule à l’aide de la formule :

Ce résultat provient directement de l’énoncé et permet de **quantifier l’impact du surbooking excessif** sur la recette moyenne.

**Interprétation économique :**

– Si augmente (remboursement plus important), la recette moyenne E () diminue.

– Si augmente (dédommagement plus élevé), le coût du surbooking excessif devient plus lourd.

– Si p augmente (clients plus fiables), le terme croît légèrement : le risque de refus augmente, mais les remboursements diminuent.

Ces trois effets se compensent dans la recherche du **nombre optimal de réservations** étudié dans la question suivante.

**e) Optimisation (choix de )**

On cherche l’entier  qui **maximise** . En pratique, on calcule  pour  et on retient

On peut aussi étudier l’incrément  et repérer le premier  où  (le gain marginal devient négatif), ce qui confirme le maximum. L’énoncé précise une forme analytique de  permettant la **vérification de la condition (C)** ; numériquement, on la constate via le changement de signe de .

**Accroissement marginal.** On étudie la variation

=

D’après l’énoncé, on obtient la forme **analytique** suivante (condition (C)) :

* Si : accepter une réservation de plus **augmente** la recette moyenne.
* Si : on **dépasse** l’optimum (les refus coûtent trop cher).

On retient alors **le plus petit** entier tel que le (le gain marginal devient nul/négatif).

En pratique, on calcule aussi    sur et on vérifie que **maximise** bien la suite.

**Calcul pratique.**

se calcule par la loi binomiale :

**Application numérique — Groupe 12**

Paramètres de l’énoncé : , , . Couples du **groupe 12** :  et . Les **prix en euros** sont **arrondis à l’euro** (autres valeurs à trois chiffres significatifs).

**(i)**

Pour chaque couple , on a calculé  pour  et choisi le maximum.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  | **(€)** |
| 0 | 200 | 29 | 2 703 |
| 0 | 300 | 28 | 2 652 |
| 0,5 | 200 | 28 | 2 533 |
| 0,5 | 300 | 28 | 2 484 |
| 1 | 200 | 28 | 2 365 |
| 1 | 300 | 27 | 2 322 |

**Lecture** : plus  (remboursement) et  (dédommagement) sont grands, plus  baisse (le surbooking coûte plus cher), et la recette maximale diminue.

(ii)

Même procédure, avec .

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  | **(€)** |
| 0 | 200 | 113 | 11 076 |
| 0 | 300 | 112 | 10 996 |
| 0,5 | 200 | 113 | 10 681 |
| 0,5 | 300 | 112 | 10 604 |
| 1 | 200 | 113 | 10 285 |
| 1 | 300 | 111 | 10 212 |

Vérification de (C) / cohérence.

Pour chaque cas, l’incrément est positif à et négatif à : le gain marginal devient <0, ce qui confirme que maximise bien

*(Les deux graphiques en fonction de* n*, un par couple , sont fournis en annexe. Chaque figure regroupe les 6 courbes correspondant aux valeurs*

**Commentaires synthèse (à laisser tels quels)**

* **Effet de** : un remboursement plus élevé  grand rend le surbooking moins rentable donc  diminue et la recette maximale baisse.
* **Effet de** : un dédommagement plus élevé ( grand) renchérit le refus donc  diminue et la recette maximale baisse.
* **Effet de** : lorsque la probabilité de venue augmente (clients plus fiables), le surbooking devient **moins nécessaire**. Le nombre optimal de réservations diminue légèrement, mais la recette maximale augmente car davantage de locations sont effectivement honorées.



