R3.08 Probabilites

Info 2025/26

SAE R3.08 Probabilités

Etude du surbooking par un club de voile

Un club de voile assure la location journalière de m bateaux. Le club propose n bateaux à la réservation (n ≥ m) un jour donné. On suppose que les n bateaux sont réservés et les locations payées. Le prix de la location s'élève à b €. Mais seule une proportion p (0 < p < 1) de clients se présentent alors au club le jour prévu pour prendre possession du bateau.

Du point de vue du club, la présence ou non d'un client au club le jour prévu est une épreuve de Bernoulli et les clients représentent des répétitions identiques et indépendantes de cette épreuve.

Xn est la variable aléatoire qui donne le nombre de clients se présentant au club.

Partie 1

1. Sans surbooking

On suppose dans cette partie que n= m et Xm ~ B(m; p).

1. ﻿﻿﻿﻿On s'intéresse à la probabilité Pı qu'il y ait au moins un client défaillant. Préciser n1 tel que P1 = P (Xm ≤ n1) et calculer P1.
2. ﻿﻿﻿﻿Déterminer l'espérance E (Xm). Interpréter.
3. ﻿﻿﻿﻿Quel est le montant de la recette totale RT associée à la location de tous les bateaux du club?
4. ﻿﻿﻿﻿La compagnie décide de rembourser les clients défaillants en appliquant sur le prix de la location un taux t € [0,1. Le remboursement est alors tb €. La recette du jour est alors Rm = mb-tb (m - Xm). Quelles est la recette moyenne E (Rm) du jour?

2. Avec surbooking

On suppose dans cette partie que n > m et Xn ~ B (n; p) (la capacité restant de m bateaux). Si un client ayant réservé un bateau arrive au club pour prendre possession du bateau alors qu'il n'y a plus de bateaux disponibles, le club lui verse un dédommagement de d €.

a On s'intéresse à la probabilité Pz qu'il y ait au moins un bateau qui ne prendra pas

l'eau.

Préciser n2 tel que P2 = P (Xn ≤ n2).

1. ﻿﻿﻿﻿On s'intéresse à la probabilité P3 qu'il y ait au moins un client se présentant au club et ne pouvant pas prendre possession du bateau réservé. Préciser n3 tel que P3 = P (Xn ≥ n3).
2. ﻿﻿﻿﻿Déterminer l'espérance E (Xn).
3. ﻿﻿﻿﻿Déterminer la recette moyenne E (Rn) du jour. Indication :

• Rn = nb - tb (n- Xn) - dmax (0, Xn - m)

R308 M6

• E (max(0, An - m)) = 2 (i-m)P(X. = i),

ou encore E (max(0, X, - m)) = LiP(X,=m+ i).

(e) Le club souhaite maximiser en moyenne, et donc en espérance, sa recette Rn.

On démontre Vn ≥ 1 E (Rn+1) - E (Rn) = b (p+ (1 -t) (1 - p) - apP (An ≥ m).

On en déduit

p+ (1-t) (1 -P)

• si

alors la suite (E (Rn)) est croissante.

p+（1ー5）（1P）

alors la suite (E (Bn)) atteint un maximum E (Rno).

Application numérique

p+ (1 -t) (1-P)

i. Vérifier que la condition (C) :

est vérifiée.

P

ii. Calculer alors E (Rn) pour n ≥ m et n assez grand pour pouvoir déterminer le nombre optimal no de bateaux loués, ainsi que la recette maximale E (Rn.) associée.

Expliquer le calcul : formule, code, implémentation...

Représenter graphiquement E (Rn) en fonction de n ≥ m. Interpréter le graphique.

Si possible, les représentations graphiques seront regroupées sur un même graphique pour les différentes valeurs de t et de d. Mettre une légende.

Partie 2

Reprendre les calculs en utilisant la loi normale si cette loi peut être appliquée. Comparer alors les résultats obtenus. Expliquer.

Si possible, les représentations graphiques seront regroupées sur un même graphique pour les différentes valeurs de t et de d pour chaque couple de valeur dans chacune des parties 1 et 2. Mettre une légende.

Indication

Dans E (Rn) = nb - tnb(1 - p) - d

1

(i - m)P(Xn = i) peut être

remplacé par

(x-m)f (x) dx avec f(x) =

(х - пр)?

m+1-0,5

2np(1-p)

Sources : En passant par hasard... de Gilles Pagès et Claude Bouzitat - Vuibert

≥ (i - m)P(Xn = i),

n+0,5

Consignes

Les prix en euros seront arrondis à l'euro le plus proche. Les autres résultats numériques seront présentés avec trois chiffres significatifs. Les autres réponses que celles demandées dans les tableaux et les graphiques seront précisés à la suite de l'ensemble des tableaux.

Commenter les résultats obtenus.

L'application R pourra être utilement utilisée. En particulier les fonctions dbinom, pinom, pnorm et integrate (cf document de référence sur R).

Le travail sera réalisé par groupes de trois étudiants d'un même groupe TP. Les groupes d'alternants traitent uniquement la partie 1.

auront pour nom : Nom1

Un rapport de SAE sera rédigé avec LibreOffice Writer et les deux fichiers déposés sur Arche

\_ Nom2\_Nom3\_SAE.odt et Nom1\_Nom2\_Nom3.

\_ SAE.pdf.

Les fichiers R. (ou autre application) seront également déposés sur Arche et nommés de la même

façon.

Ne pas zipper les fichiers. Préciser les noms des étudiants au début du rapport.

Il s'agit d'un rapport qui précisera les réponses aux questions posées avec la syntaxe mathématique (utiliser l'éditeur de formules, sauf indication contraire) et le code R ou autre application à préciser. En particulier, les tableaux seront mis en forme suivant les indications données dans l'énoncé et les documents de référence accessibles sur Arche. Les graphiques seront intégrés au rapport.

Application numérique

1. ﻿﻿b = 100 €; t € {0;0, 5; 1} ; d € {200; 300};
2. ﻿﻿dans le groupe i, deux couples de valeurs sont donnés pour m et p: (mil, Pil) et (mi2, Pi2).

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Groupe i | Mi1 | Pi2 | Mi2 | Pi2 |
| 1 | 20 | 0,85 | 100 | 0,90 |
| 2 | 21 | 0,85 | 101 | 0,90 |
| 3 | 22 | 0,85 | 102 | 0,90 |
| 4 | 20 | 0,86 | 100 | 0,91 |
| 5 | 21 | 0,86 | 101 | 0,91 |
| 6 | 22 | 0,86 | 102 | 0,91 |
| 7 | 23 | 0,87 | 103 | 0,92 |
| 8 | 24 | 0,87 | 104 | 0,92 |
| 9 | 25 | 0,87 | 105 | 0,92 |
| 10 | 23 | 0,88 | 103 | 0,93 |
| 11 | 24 | 0,88 | 104 | 0,93 |
| 12 | 25 | 0,88 | 105 | 0,93 |
| 13 | 23 | 0,89 | 103 | 0,94 |
| 14 | 24 | 0,89 | 104 | 0,94 |
| 15 | 25 | 0,89 | 105 | 0,94 |
| 16 | 26 | 0,90 | 106 | 0,95 |
| 17 | 27 | 0,90 | 107 | 0,95 |
| 18 | 28 | 0,90 | 108 | 0,95 |
| 19 | 17 | 0,91 | 106 | 0,86 |
| 20 | 18 | 0,91 | 107 | 0,86 |
| 21 | 19 | 0,91 | 108 | 0,86 |
| 22 | 14 | 0,92 | 106 | 0,87 |
| 23 | 15 | 0,92 | 107 | 0,87 |
| 24 | 16 | 0,92 | 108 | 0,87 |

