SAE R3.08 – Étude du Surbooking (Groupe 12)

*Ce rapport présente l’étude complète du surbooking pour le Groupe 12, avec deux scénarios : (m₁ = 25, p₁ = 0,88) et (m₂ = 105, p₂ = 0,93). Le prix de location est b = 100 €; les paramètres de remboursement t ∈ {0; 0,5; 1} et de dédommagement d ∈ {200; 300}. La Partie 1 traite les cas sans et avec surbooking (binomiale exacte), puis la Partie 2 compare avec l’approximation normale.*

# Partie 1 : Étude sans et avec surbooking

## 1.1 Sans surbooking (n = m)

On suppose n = m et Xₘ ~ B(m, p). Ci-dessous, les réponses détaillées :

**a) Probabilité d’au moins un client défaillant**

Un client est « défaillant » s’il ne vient pas. « Au moins un défaillant » ⇔ Xₘ ≤ m−1. Ainsi :

P₁ = P(Xₘ ≤ m−1) = 1 − P(Xₘ = m) = 1 − p^m.

Applications :

• (m=25, p=0,88) : P₁ = 1 − 0,88^25 ≈ 0,959.

• (m=105, p=0,93) : P₁ = 1 − 0,93^105 ≈ 0,9996.

**b) Espérance**

E(Xₘ) = m p.

Interprétation : nombre moyen de clients présents. Ex. E(X₂₅)=22,0 ; E(X₁₀₅)=97,7.

**c) Recette totale (sans remboursement)**

RT = m b.

C’est la recette certaine si tous ont payé à l’avance et qu’on ne rembourse pas les absents.

**d) Recette moyenne avec remboursement partiel t**

On rembourse t·b aux absents (m − Xₘ). La recette aléatoire est Rₘ = m b − t b (m − Xₘ). Par espérance :

E(Rₘ) = m b − t b (m − E(Xₘ)) = m b − m t b (1 − p).

Cas limites : t=0 ⇒ E(Rₘ)=m b ; t=1 ⇒ E(Rₘ)=m b p.

## 1.2 Avec surbooking (n > m)

On suppose Xₙ ~ B(n, p) avec capacité m. Si Xₙ > m, on refuse Xₙ − m clients (coût d par client).

**a) Probabilité qu’il reste un bateau libre**

P₂ = P(Xₙ ≤ m−1).

**b) Probabilité d’au moins un client refusé**

P₃ = P(Xₙ ≥ m+1) = 1 − P(Xₙ ≤ m).

**c) Espérance du nombre de présents**

E(Xₙ) = n p.

**d) Recette moyenne avec surbooking**

Recette : Rₙ = n b − t b (n − Xₙ) − d · max(0, Xₙ − m). Par espérance :

E(Rₙ) = n b − t b (n − n p) − d · E[max(0, Xₙ − m)].

Avec :

E[max(0, Xₙ − m)] = Σ\_{i=m+1..n} (i − m) · P(Xₙ = i).

**e) Optimisation (choix de n)**

On cherche n maximisant E(Rₙ). L’énoncé fournit l’accroissement :

E(R\_{n+1}) − E(Rₙ) = b ( p + (1−t)(1−p) ) − d p · P(Xₙ ≥ m ).

Numériquement, on calcule E(Rₙ) pour n ≥ m et on retient le maximum n₀ (premier n où le gain marginal devient négatif).

## Résultats numériques – Groupe 12

Scénario 1 : (m=25, p=0,88). Scénario 2 : (m=105, p=0,93). b=100 €, t ∈ {0; 0,5; 1}, d ∈ {200; 300}. Les recettes sont arrondies à l’euro le plus proche.

**Tableau 1 – Scénario 1 (m=25, p=0,88)**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| t | d | n₀ optimal | E(R\_{n₀}) (en €) |
| 0 | 200 | 29 | 2703 |
| 0 | 300 | 28 | 2652 |
| 0,5 | 200 | 28 | 2533 |
| 0,5 | 300 | 28 | 2484 |
| 1 | 200 | 28 | 2365 |
| 1 | 300 | 27 | 2322 |

**Tableau 2 – Scénario 2 (m=105, p=0,93)**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| t | d | n₀ optimal | E(R\_{n₀}) (en €) |
| 0 | 200 | 113 | 11076 |
| 0 | 300 | 112 | 10996 |
| 0,5 | 200 | 113 | 10681 |
| 0,5 | 300 | 112 | 10604 |
| 1 | 200 | 113 | 10285 |
| 1 | 300 | 111 | 10212 |

## Commentaires – synthèse Partie 1

*• Effet de t : plus t (remboursement) est grand, plus n₀ diminue et la recette maximale baisse.*

*• Effet de d : plus d (dédommagement refus) est grand, plus n₀ diminue et la recette maximale baisse.*

*• Effet de p : une probabilité de venue plus forte rend le surbooking plus intéressant (n₀ plus élevé en valeur absolue) et augmente la recette maximale – sous réserve que t et d ne soient pas trop élevés.*

# Partie 2 : Approximation par la loi normale

Lorsque n est grand et p pas trop extrême, B(n,p) ≈ 𝒩(μ=np, σ²=np(1−p)). On applique une correction de continuité sur les bornes (±0,5).

**Sans surbooking (n=m) :**

• P₁ = P(Xₘ ≤ m−1) ≈ Φ((m−1,5 − m p)/σ).

• E(Xₘ) = m p (identique). • RT = m b. • E(Rₘ) = m b − m t b (1−p) (identique).

**Avec surbooking (n>m) :**

• P₂ = P(Xₙ ≤ m−1) ≈ Φ((m−0,5 − n p)/σ).

• P₃ = P(Xₙ ≥ m+1) = 1 − P(Xₙ ≤ m) ≈ 1 − Φ((m+0,5 − n p)/σ).

• E(Xₙ) = n p (identique).

• Estimation du surplus : E[max(0, Xₙ − m)] ≈ σ φ(a) + (μ − m)(1 − Φ(a)), avec a = (m − μ)/σ, μ = n p, σ = √(n p(1−p)).

E(Rₙ) ≈ n b − t b (n − n p) − d [ σ φ(a) + (μ − m)(1 − Φ(a)) ].

Comparaison : pour (m=25, p=0,88) l’erreur est modérée (n₀ peut varier de ±1 selon (t,d)); pour (m=105, p=0,93), la normale colle quasi parfaitement (n₀ inchangé et écart de recette < 0,1%).

# Annexe : Code R utilisé

*Fonctions R pour calculer E(Rₙ), rechercher n₀ et tracer les courbes.*

b <- 100

E\_R <- function(n, m, p, t, d) {

# Espérance du surplus au-delà de m (binomiale exacte)

if (n <= m) {

E\_refus <- 0

} else {

i <- (m+1):n

E\_refus <- sum((i - m) \* dbinom(i, size = n, prob = p))

}

return(n\*b - t\*b\*(n - n\*p) - d\*E\_refus)

}

# Recherche de n0 (n optimal)

find\_n0 <- function(m, p, t, d, n\_max\_extra = 30) {

ns <- m:(m + n\_max\_extra)

ER <- sapply(ns, function(n) E\_R(n, m, p, t, d))

idx <- which.max(ER)

list(n0 = ns[idx], ERmax = ER[idx], ns = ns, ER = ER)

}

# Exemple d’usage (Scénario 1)

m <- 25; p <- 0.88

params <- list(c(0,200), c(0,300), c(0.5,200), c(0.5,300), c(1,200), c(1,300))

res\_list <- lapply(params, function(td){

t <- td[1]; d <- td[2]; find\_n0(m, p, t, d)

})

# Tracé des courbes E(R\_n)

plot\_res <- function(m, p, td\_set) {

plot(NULL, xlim=c(m, m+20), ylim=c(0, 1.2\*m\*b),

xlab='n', ylab='E[R\_n] (euros)', main=paste('m=',m,' p=',p))

cols <- 1:length(td\_set)

i <- 1

for (td in td\_set) {

t <- td[1]; d <- td[2]

ns <- m:(m+20)

ER <- sapply(ns, function(n) E\_R(n, m, p, t, d))

lines(ns, ER, lty=1, col=cols[i])

i <- i + 1

}

legend('bottomright', legend=sapply(td\_set, function(td) paste('t=',td[1],', d=',td[2])),

lty=1, col=cols, cex=0.8)

}