# Derivate

Berardo

Questo è un piccolo richiamo sulle derivate, in particolare come si calcolano e un paio di derivazioni.

Partiamo dalla definizione:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Usando questa espressione calcoliamo la derivata della funzione $f(x) = x$:

$$f(x) = x \Rightarrow f'(x) = \frac{df}{dx} = 1$$

Infatti

$$\lim_{h\to 0} \frac{x+h-x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = 1$$

Le due notazioni $f'(x)$ sono equivalenti $\frac{df}{dx}$, e vengono usate entrambe, in base al contesto.

Un po' meno semplice, la derivata di $f(x) = x^2$:

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} \\ = \lim_{h\to 0} \frac{2xh + h^2}{h} &= \lim_{h\to 0} 2x + h = 2x\end{aligned}$$

Di seguito riporto le regole per alcune funzioni elementari:

$$\begin{gathered} f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = nx^{n-1} \\ f(x) = \sin(x) \Rightarrow f'(x) = \cos(x) \\ f(x) = \cos(x) \Rightarrow f'(x) = -\sin(x) \\ f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x \\ f(x) = \log(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x} \end{gathered}$$

Da notare che dalla prima equazione si deduce anche che per $n = 0$:

$$f(x) = x^0 = 1 \Rightarrow f'(x) = 0x^{-1} = 0$$

Inoltre vale anche per $n < 0$:

$$f(x) = x^{-1} = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = -1x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

e frazionari:

$$f(x) = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Infine, le regole per le combinazioni di funzioni. Una costante moltiplicata per una funzione:

$$f(x) = Cf(x) \Rightarrow f'(x) = Cf'(x)$$

Esempio:

$$f(x) = 5x^2 \Rightarrow f'(x) = 5 \cdot 2x = 10x$$

La derivata della somma è la somma delle derivate:

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$$

Esempio:

$$(x^2 + \log(x))' = \left(2x + \frac{1}{x}\right) = \frac{2x^2 + 1}{x}$$

La derivata del prodotto è più complicata:

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Esempio:

$$x\log(x) = 1 \cdot \log(x) + x\frac{1}{x} = \log(x) + 1$$

Ultima regola, la funzione di funzione:

$$(f(g(x))) = f'(g(x))g'(x)$$

Qui l'altra notazione diventa più comoda:

$$\frac{d}{dx}f(g(x)) = \frac{df}{dg}\frac{dg}{dx}$$

Esempio:

$$\frac{d}{dx}(\sin(\log(x))) = \cos(\log(x))\frac{1}{x}$$

In pratica faccio la derivata della funzione più esterna con l'altra funzione come variabile, e poi la derivata della seconda funzione. Usiamo le ultime due regole per calcolare la derivata di $\tan(x)$. Prima riscrivo:

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \sin(x)\cos^{-1}(x)$$

La derivata:

$$f'(x) = \cos(x)\cos^{-1}(x) + \sin(x)(-1)\cos^{-2}(x)(-1)\sin(x) = 1 + \tan^2(x)$$

Oppure:

$$1 + \tan^2(x) = 1 + \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}$$