



EXAMEN 3

Matemáticas discretas

Descripción breve

El presente documento muestra los ejercicios explicados y resueltos del examen 3

ANDRADE SALAZAR MARTIN JOSUE | 219737144

Maestría en Ingeniería de Software

Explique el problema del bibliotecario diabólico utilizando notación de conjuntos:

El problema del bibliotecario diabólico puede ser explicado utilizando la notación de conjuntos de la siguiente manera:

Imagina que tenemos un conjunto L que representa todos los libros posibles en la biblioteca. Cada libro en esta biblioteca se identifica mediante un número entero único. Entonces, el conjunto L puede ser expresado como:

$$L=\{1,2,3,4,\dots\}$$

Ahora, el bibliotecario diabólico plantea la pregunta:

"¿Existe un libro que contiene toda la información sobre todos los demás libros, incluido el propio libro?".

Podemos representar este libro especial como un subconjunto B de L que contiene toda la información sobre los libros en L , incluido B mismo. Matemáticamente, podemos definir B como:

$$B=\{b \in L : b \text{ contiene información sobre todos los libros en } L\} \quad B=\{b \in L : b \text{ contiene información sobre todos los libros en } L\}$$

La paradoja surge cuando consideramos si B pertenece o no a L :

1. Si B pertenece a L ($B \in L$), entonces B debe contener información sobre sí mismo. Sin embargo, esto conduce a una contradicción, ya que, si B contiene información sobre sí mismo, entonces debe contener información sobre sí mismo no conteniendo información sobre sí mismo, lo cual es imposible.
2. Si B no pertenece a L ($B \notin L$), entonces el bibliotecario diabólico podría ofrecer este libro especial a cualquiera que lo solicite, ya que no está en la biblioteca. Pero esto plantea la pregunta de cómo el bibliotecario diabólico puede ofrecer un libro que supuestamente no está en la biblioteca.

En resumen, la paradoja del bibliotecario diabólico destaca las limitaciones de la autorreferencia y la autocontención en la teoría de conjuntos, y nos desafía a reflexionar sobre las implicaciones de la autorreferencia en la lógica y la matemática.

Explique la diferencia entre las tres versiones del algoritmo que prueba los números primos, utilizando notación de complejidad. Elabore un programa en Python que compare el rendimiento (número de ejecuciones y tiempo) de los tres algoritmos con los números de prueba 13, 641 y 997.

1. Algoritmo 1:

- Este algoritmo prueba si un número nn es primo iterativamente probando divisores potenciales desde 2 hasta $n-1$.
- Comienza con $t=1$ y luego aumenta t en uno hasta que encuentre un divisor de nn o t sea igual a $n-1$.
- Si encuentra un divisor t de nn , imprime que t es un divisor propio de nn . Si no, imprime que nn es primo.

2. Algoritmo 2:

- Similar al primer algoritmo, pero en lugar de probar todos los números desde 2 hasta $n-1$, prueba solo hasta la mitad del valor de nn .
- Esto se debe a que, si nn tiene un divisor mayor que su mitad, también debe tener un divisor más pequeño que su mitad. Por lo tanto, no es necesario probar más allá de la mitad de nn .
- Este algoritmo es un poco más eficiente que el primero, ya que reduce la cantidad de pruebas necesarias a la mitad.

3. Algoritmo 3:

- Este algoritmo es similar a los anteriores, pero en lugar de probar divisores potenciales hasta $n-1$ o $n/2$, prueba hasta la raíz cuadrada de nn .
- Esto se debe a que, si un número tiene un divisor mayor que su raíz cuadrada, entonces también debe tener un divisor menor que su raíz cuadrada. Por lo tanto, es suficiente probar hasta la raíz cuadrada de nn .
- Este algoritmo es aún más eficiente que los anteriores, ya que reduce aún más la cantidad de pruebas necesarias.

Link del código en Python:
https://drive.google.com/file/d/15jnJiazVGPL4SpX_zFINY-S6shTkfg5l/view?usp=sharing

Explique e implemente el Python el algoritmo de Euclides para encontrar el máximo común divisor de 3 números.

El algoritmo de Euclides para encontrar el máximo común divisor (MCD) de dos números se basa en el principio de que el MCD de dos números no cambia si se resta el número más pequeño del más grande. Aquí está la explicación del algoritmo:

Paso 1: Dados dos números enteros, denotémoslos como a y b , donde $a > b$.
Paso 2: Calculamos el residuo de la división de a por b , Denotemos este residuo como r .
Paso 3: Si $r = 0$, entonces b es el MCD de a y b , Terminamos el algoritmo.
Paso 4: Si $r \neq 0$, actualizamos los valores de la siguiente manera $a = b$, $b = r$ y repetimos desde el paso 2.
Paso 5: Repetimos los pasos 2 – 4 hasta que obtengamos el residuo de 0

El algoritmo de Euclides reduce continuamente el problema de encontrar el MCD de dos números al problema de encontrar el MCD de un número más pequeño y el residuo de la división del número más grande por el más pequeño. Esto se repite hasta que el residuo de la división es 0, momento en el que el último número más pequeño se convierte en el MCD de los dos números originales.

Link del programa en Python:
<https://drive.google.com/file/d/1nXJgy65FKZkWI3u9ULflym8JjLr9i0C1/view?usp=sharing>

Explique el principio del palomar (pigeonhole principle) con notación de conjuntos, y elabore un programa en Python que lo ejemplifique.

El principio del palomar, también conocido como el principio del cajón, establece que, si intentamos colocar más palomas en un número finito de cajones que el número de cajones disponibles, entonces al menos un cajón contendrá más de una paloma.

En términos de conjuntos, si tenemos dos conjuntos finitos A y B , donde el conjunto A tiene más elementos que el conjunto B , entonces cualquier función que mapee los elementos de A a los elementos de B será necesariamente no inyectiva, es decir, habrá al menos un elemento en B que está asociados con más de un elemento en A .

Por ejemplo: Si tenemos más elementos para asignar que lugar donde asignarlos, entonces al menos un lugar recibirá más de un elemento.

Link del programa en Python:
https://drive.google.com/file/d/1_grJ6UfFlcoDSnUbJWMiCsyZXvbBlkYo/view?usp=sharing

Explique (1) con sus palabras, (2) con notación de conjuntos, y (3) ejemplifique los siguientes términos: intervalo de enteros; n-secuencia; serie; k-permutaciones en un n-conjunto; el teorema de la banana mala.

1. Explicación con mis palabras:

Intervalo de enteros: Un intervalo de enteros es un conjunto de números enteros que se encuentran entre dos valores específicos. Estos valores pueden ser límites inferior y superior o un límite inferior y la longitud del intervalo.

N-secuencia: Una n-secuencia es una secuencia de elementos donde el número de elementos está determinado por el valor de n . Cada elemento de la secuencia puede estar determinado por una fórmula o regla específica.

Serie: Una serie es la suma de los términos de una secuencia. Puede ser finita o infinita, dependiendo de si la secuencia de la que se deriva es finita o infinita.

K-permutaciones en un n-conjunto: Las k-permutaciones en un n-conjunto se refieren a la cantidad de formas diferentes en que se pueden ordenar k elementos seleccionados de un conjunto de n elementos.

El teorema de la banana mala: Este parece ser un término inventado o malinterpretado. No parece haber un teorema conocido con ese nombre en matemáticas. Podría ser una referencia humorística o una mezcla de términos.

2. Explicación con notación de conjuntos:

Intervalo de enteros: Un intervalo de enteros se puede representar utilizando la notación de conjuntos como $\{x \mid a \leq x \leq b\}$, donde a y b son los límites inferior y superior del intervalo, respectivamente.

N-secuencia: Una n-secuencia puede representarse como $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ donde a_i denota el i -ésimo término de la secuencia.

Serie: Una serie puede representarse como $\sum_{i=1}^n a_i$ donde a_i son los términos de la secuencia y n es el número de término en la serie.

K-permutaciones en un n-conjunto: Las k-permutaciones en un n-conjunto pueden representarse como $P(n, k)$ donde n es el número total de elementos en el conjunto y k es el número de elementos seleccionados para la permutación.

El teorema de la banana mala: No hay una notación de conjuntos para este término, ya que no parece ser un concepto matemático establecido.

3. Ejemplificación:

Intervalo de enteros: El intervalo de enteros entre 1 y 5 sería {1,2,3,4,5}.

N-secuencia: Una n-secuencia puede ser {2,4,6,8,10} sin $n = 5$, ya que cada término se obtiene multiplicando el término anterior por 2.

Serie: La serie para la n-secuencia anterior sería $2+4+6+8+10=30$.

K-permutaciones en un n-conjunto: Si tenemos un conjunto de letras {a,b,c}, las 2-permutaciones en este conjunto serían $P(3,2) = 3 \times 2 = 6$, y las permutaciones serían {ab,ac,ba,bc,ca,cb}.

Teorema de la banana mala: Este término no parece ser válido en matemáticas.

Explique y ejemplifique qué es una secuencia geométrica.

Una secuencia geométrica es una sucesión de números en la que cada término se obtiene multiplicando el término anterior por una constante fija llamada razón. Es decir, una secuencia geométrica $\{a_n\}$ se define por la relación:

$$A_n = a_{n-1} \times r$$

Donde a_n es el término n-ésimo de la secuencia, a_{n-1} es el término anterior, y r es la razón común o constante de la secuencia. Las secuencias geométricas pueden ser crecientes, si la razón r es mayor que 1, o decrecientes, si la razón r es menor que 1. Si la razón r es igual a 1, la secuencia es constante.

Por ejemplo: Considera la secuencia geométrica {2,6,28,54,162}. Para encontrar el siguiente término de la secuencia, multiplicamos el término por la razón común, que en este caso es 3. Entonces:

$$162 \times 3 = 486$$

Por lo tanto, el siguiente término de la secuencia es 486