Московский Государственный Университет имени
М.В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики

Отчёт по теоретическому заданию в рамках курса «Суперкомпьютерное моделирование и технологии» Двумерная задача Дирихле для уравнения Пуассона в криволинейной области, этап 2

Муравицкая Екатерина Ярославовна
616 группа
Вариант 6

Москва 2024

Содержание

1 Введение **2**

2 Математическая постановка задачи **2**

3 Метод фиктивных областей **2**

4 Разностная схема решения задачи **3**

5 Вычисление коэффициентов **4**

6 Метод решения системы линейных алгебраических уравнений **4**

7 Использование MPI **5**

8 Результаты работы **6**

1 Введение

Задача представляет вычисление приближенного решения двумерной задачи Дирихле для уравнения Пуассона. Разработан параллельный код программы с использованием библиотеки MPI. Задание выполнено на языке С на ПВС Московского университета IBM Polus.

2 Математическая постановка задачи

В области $D \subset R^2$ ограниченной контуром γ рассматривается дифференциальное уравнение Пуассона:

$$-\Delta u = f(x, y)$$

в котором оператор Лапласа

$$\Delta = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

Функция $f(x, y)$ известна и равна 1 в области D. Для выделения единственного решения дополняется граничным условием Дирихле:

$$u(x, y) = 0, (x, y) \in \gamma$$

Область D является квадратом с отсеченной вершиной, соответствующий системе неравенств: $(x, y) : |x| + |y| < 2, y < 1$.

3 Метод фиктивных областей

Для приближенного решения задачи предлагается воспользоваться методом фиктивных областей. Пусть область D принадлежит прямоугольнику $\Pi = \{(x, y) : A_1 < x < B_1, A_2 < y < B_2\}$.

Для данной области D возьмем прямоугольник, такой что: $\Pi = \{(x, y) : -2 < x < 2, -2 < y < 1\}$.

Обозначим через $\overline{D}, \overline{\Pi}$ замкание области D и прямоугольника Π соответственно, через Γ - границу прямоугольника. Разность множеств

$$\hat{D} = \Pi \backslash D$$

называется фиктивной областью. Выберем и зафиксируем малое $\epsilon > 0$.

В прямоугольнике Π рассматривается задача Дирихле:

$$-\frac{\partial}{\partial x}(k(x, y)\frac{\partial v}{\partial x}) - \frac{\partial}{\partial y}(k(x, y)\frac{\partial v}{\partial y}) = F(x, y)$$

$$v(x, y) = 0, (x, y) \in \Gamma$$

с кусочно-постоянным коэффициентом

$$k(x,y) = \begin{bmatrix} 1, (x,y) \in D, \\ 1/\epsilon, (x,y) \in \hat{D} \end{bmatrix.$$

и правой частью

$$F(x,y) = \begin{bmatrix} f(x,y), (x,y) \in D \\ 0, (x,y) \in \hat{D} \end{bmatrix.$$

Требуется найти непрерывную в $\overline{\Pi}$ функцию $v(x,y)$, удовлетворяющую дифференциальному уравнению задачи всюду в $\Pi \backslash \gamma$, равную нулю на границе Γ прямоугольника, и такую, чтобы вектор потока

$$W(x,y) = -k(x,y)(\frac{\partial x}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial y})$$

имел непрерывную нормальную компоненту на общей части криволинейной границы области D и прямоугольника Π.

4 Разностная схема решения задачи

Краевую задачу предлагается решать численно методо конечных разностей. В замыкании прямоугольника $\overline{\Pi}$ определяется равномерная прямоугольная сетка $\overline{\omega}_h = \overline{\omega}_1 * \overline{\omega}_2$, где

$$\overline{\omega}_1 = \{x_i = A_1 + ih_1, i = \overline{0, M}\}, \overline{\omega}_2 = \{y_j = A_2 + jh_2, j = \overline{0, N}\}$$

, где

$$h_1 = (B_1 - A_1)/M, h_2 = (B_2 - A_2)/N.$$

Через ω_h обозначим множество внутренних узлов сетки $\overline{\omega}_h$, т.е. множество узлов сетки прямоугольника, не лежащих на границе $Gamma$.

Дифференциальное уравнение задачи во всех внутренних узлах точках сетки аппроксимируется разностным уравнением

$$-\frac{1}{h_1}(a_{i+1j}\frac{w_{i+1j} - w_{ij}}{h_1} - a_{ij}\frac{w_{ij} - w_{i-1j}}{h_1}) - \frac{1}{h_2}(b_{ij+1}\frac{w_{ij+1} - w_{ij}}{h_2} - b_{ij}\frac{w_{ij} - w_{ij-1}}{h_2}) = F_{ij}, (*)$$

$i = \overline{1, M-1}, j = \overline{1, N-1}$ в котором коэффициенты

$$a_{ij} = \frac{1}{h_2}\int_{y_j - 1/2}^{y_j + 1/2} k(x_{i-1/2}, t)dt, b_{ij} = \frac{1}{h_1}\int_{x_i - 1/2}^{x_i + 1/2} k(t, y_{j-1/2})dt$$

при всех $i = \overline{1, M}, j = \overline{1, N}$. Здесь полуцелые узлы

$$x_{i \pm 1/2} = x_i \pm 0.5h_1, y_{j \pm 1/2} = y_j \pm 0.5h_2$$

Правая часть разностного уравнения

$$F_{ij} = \frac{1}{h_1 h_2} \iint_{\Pi_{ij}} F(x,y)dxdy,$$

$$\Pi_{ij} = \{(x,y) : x_{i-1/2} <= x <= x_{i+1/2}, y_{j-1/2} <= y <= y_{j+1/2}$$

при всех $i = \overline{1,M}, j = \overline{1,N}$.

5 Вычисление коэффициентов

Из замечания в описании задания следует аналитический алгорит вычисления коэффициентов a_{ij}, b_{ij}, F_{ij}.

При вычислении a_{ij} необходимо посчитать интеграл $\int_{y_j-1/2}^{y_j+1/2} k(x_{i-1/2}, t)dt$. По построению прямоугольника П, легко видеть, что этот интеграл равен длине отрезка $[y_j - 1/2, y_j + 1/2]$ внутри области D (квадрат с отсеченной вершиной) + $1/\epsilon$ * длину вне области D.

Для этого необходимо определить точку пересечения (если она есть) данного отрезка с одной из боковых граней фигуры, затем вычислить длину вне и внутри фигуры. Аналогично для b_{ij}.

Для вычисления F_{ij} надо посчитать интеграл $\iint_{\Pi_{ij}} F(x,y)dxdy$. Также из замечания следует, что этот интеграл равен площади прямоугольника $\Pi_{ij} = \{(x,y) : x_{i-1/2} \leq x \leq x_{i+1/2}, y_{j-1/2} \leq y \leq y_{j+1/2}$ внутри квадрата с отсеченной вершиной. Для этого необходимо найти пересечение (если оно есть) прямоугольника с боковой стороной фигуры и посчитать площадь образованной трапеции, треугольника или пятигранника/шестигранника внутри исходной фигуры.

Для данных алгоритмов были найдены уравнения боковых сторон, левая-верхняя, правая-верхняя, левая-нижняя и правая-нижняя соответсвенно:

$$y = 2 + x,$$

$$y = 2 - x,$$

$$y = -2 - x,$$

$$y = -2 + x,$$

с помощью которых находятся пересечения боковых сторон с вертикальными или горизонтальными линиями.

6 Метод решения системы линейных алгебраических уравнений

Приближенное решение разностной схемы может быть получено итерационным методом скорейшего спуска. Этот метод позволяет получить последовательность сеточных функций $w^{(k)} \in H, k = 1, 2, \ldots,$ сходящуюся по норме пространства H к решения разностной схемы.

Метод является одношаговым. Итерация $w^{(k+1)}$ вычисляется по итерации $w^{(k)}$ согласно равенствам:

$$w_{ij}^{(k+1)} = w_{ij}^{(k)} - \tau_{k+1} r_{ij}^{(k)},$$

где невязка $r^{(k)} = Aw^k - B$, итерационный параметр

$$\tau_{k+1} = \frac{\left(r^{(k)}, r^{(k)}\right)}{\left(Ar^{(k)}, r^{(k)}\right)}.$$

В качестве условия остановки алгоритма было использовано неравенство

$$||w^{(k+1)} - w^{(k)}|| < \delta,$$

где δ - положительное число, определяющее точность итерационного метода.

7 Использование MPI

Решение задачи было написано на языке программирования C, используя распараллеливание с помощью библиотеки MPI.

Для запуска программы необходимо в параметрах командной строки указать требуемое число процессов.

Компиляция программы происходит с помощью команды: mpixlc -lm main.c.

Командная строка mpisubmit.pl -n 2 ./a.out 2 запустит программу с 2 процессами. Для последовательного исполнения: mpisubmit.pl ./a.out 1.

Размер сетки и точность алгоритма задается в коде программы (переменные M, N, delta соответственно).

Общий алгоритм работы программы следующий:

1. инициализация нужных матриц и переменных;
2. подсчет матриц коэффициентов a_{ij}, b_{ij}, F_{ij};
3. вычисление приближенного решения w методом скорейшего спуска;
   (a) подсчет r
   (b) отправка граничных значений r
   (c) получение граничных значений r
   (d) подсчет итерационного параметра τ
   (e) подсчет w
   (f) отправка граничных значений w
   (g) получение граничных значений w
4. подсчет нормы как максимум из всех $|r_{ij}|$;

5. если норма больше заданной точности, возвращаемся на пункт 3.

При завершении программа выводит затраченное время и число итераций.

Суть распараллеливания вычислений заключается в разбиении области на n число подобластей, где n соответствует числу процессов. В результате чего n областей считаются одновременно.

Мы выбираем области так, чтобы они делили сетку пополам, но при этом захватывали доп. строку/столбец из смежной области. Таким образом, для сетки 40x40 и для 2 процессов мы разделим область горизонтально с 0 по 20 индекс и с 19 по 39 индекс матрицы.

Данный массив, состоящий из строки/столбца из соседней области, будет передаваться между областями с помощью средств MPI.

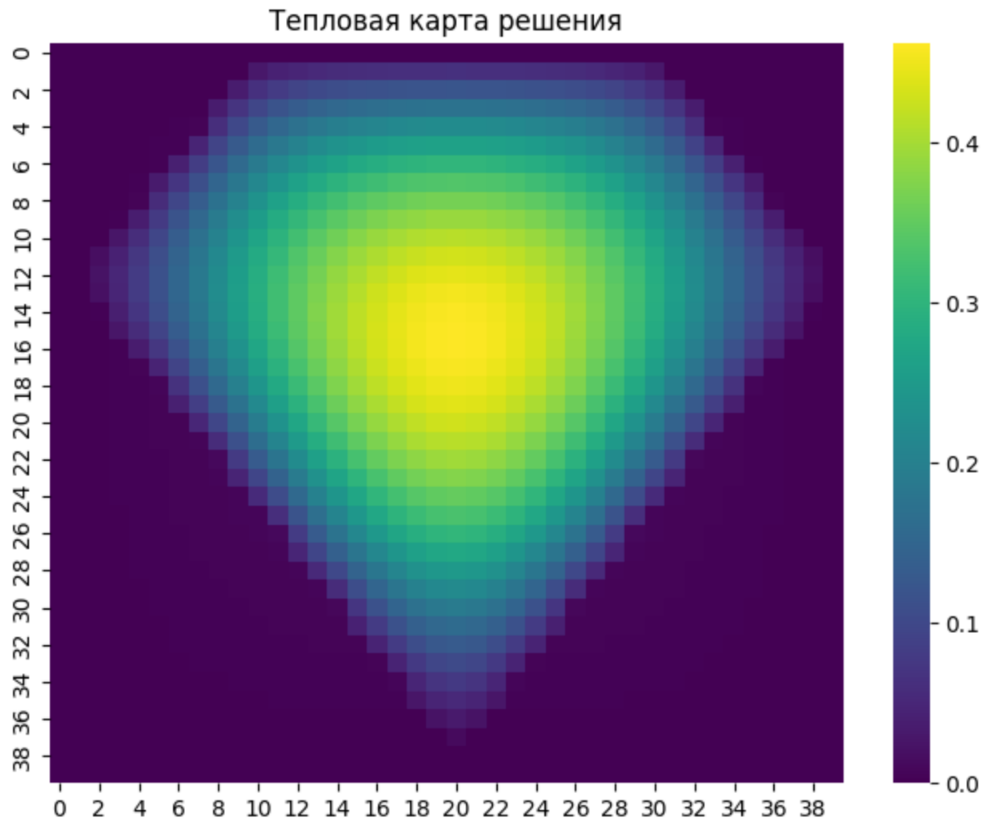
8 Результаты работы

Были проведены расчеты с сеткой размера 40x40 для 1, 2 и 4 процессов. Во всех экспериментах точность бралась равной $1e-6$. Результаты приведены в таблице:

Количество процессов	Число точек сетки (M × N)	Число итераций	Время решения (с)	Ускорение
1	40 × 40	20154	2.678385	1
2	40 × 40	20154	1.526929	1.526929
4	40 × 40	20154	0.868502	3.083913

Таблица 1. Таблица с результатами расчётов

Рисунок приближенного решения для сетки 40 на 40:


Тепловая карта решения
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4