**Московский Государственный Университет имени**
**М.В. Ломоносова**
**Факультет вычислительной математики и кибернетики**

# Отчёт по теоретическому заданию в рамках курса «Суперкомпьютерное моделирование и технологии» Двумерная задача Дирихле для уравнения Пуассона в криволинейной области, этап 1

Муравицкая Екатерина Ярославовна
616 группа
Вариант 6

Москва 2024

# Содержание

# 1 Введение

Задача представляет вычисление приближенного решения двумерной задачи Дирихле для уравнения Пуассона. Задание выполнено на языке C на ПВС Московского университета IBM Polus.

# 2 Математическая постановка задачи

В области $D \subset R^2$ ограниченной контуром $\gamma$ рассматривается дифференциальное уравнение Пуассона:

$$-\Delta u = f(x, y)$$

в котором оператор Лапласа

$$\Delta = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

Функция $f(x, y)$ известна и равна 1 в области D. Для выделения единственного решения дополняется граничным условием Дирихле:

$$u(x, y) = 0, (x, y) \in \gamma$$

Область $D$ является квадратом с отсеченной вершиной, соответствующий системе неравенств: $(x, y) : |x| + |y| < 2, y < 1$.

# 3 Метод фиктивных областей

Для приближенного решения задачи предлагается воспользоваться методом фиктивных областей. Пусть область $D$ принадлежит прямоугольнику $\Pi = \{(x, y) : A_1 < x < B_1, A_2 < y < B_2\}$.

Для данной области $D$ возьмем прямоугольник, такой что: $\Pi = \{(x, y) : -2 < x < 2, -2 < y < 1\}$.

Обозначим через $\overline{D}, \overline{\Pi}$ замкание области $D$ и прямоугольника $\Pi$ соответственно, через $\Gamma$ - границу прямоугольника. Разность множеств

$$\hat{D} = \Pi \backslash D$$

называется фиктивной областью. Выберем и зафиксируем малое $\epsilon > 0$.

В прямоугольнике $\Pi$ рассматривается задача Дирихле:

$$-\frac{\partial}{\partial x}(k(x, y)\frac{\partial v}{\partial x}) - \frac{\partial}{\partial y}(k(x, y)\frac{\partial v}{\partial y}) = F(x, y)$$

$$v(x, y) = 0, (x, y) \in \Gamma$$

с кусочно-постоянным коэффициентом

$$k(x,y) = \begin{bmatrix} 1, (x,y) \in D, \\ 1/\epsilon, (x,y) \in \hat{D} \end{bmatrix}$$

и правой частью

$$F(x,y) = \begin{bmatrix} f(x,y), (x,y) \in D \\ 0, (x,y) \in \hat{D} \end{bmatrix}$$

Требуется найти непрерывную в $\overline{\Pi}$ функцию $v(x,y)$, удовлетворяющую дифференциальному уравнению задачи всюду в $\Pi \backslash \gamma$, равную нулю на границе $\Gamma$ прямоугольника, и такую, чтобы вектор потока

$$W(x,y) = -k(x,y)(\frac{\partial x}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial y})$$

имел непрерывную нормальную компоненту на общей части криволинейной границы области $D$ и прямоугольника $\Pi$.

# 4 Разностная схема решения задачи

Краевую задачу предлагается решать численно методо конечных разностей. В замыкании прямоугольника $\overline{\Pi}$ определяется равномерная прямоугольная сетка $\overline{\omega}_h = \overline{\omega}_1 * \overline{\omega}_2$, где

$$\overline{\omega}_1 = \{x_i = A_1 + ih_1, i = \overline{0,M}\}, \overline{\omega}_2 = \{y_j = A_2 + jh_2, j = \overline{0,N}\}$$

, где

$$h_1 = (B_1 - A_1)/M, h_2 = (B_2 - A_2)/N.$$

Через $\omega_h$ обозначим множество внутренних узлов сетки $\overline{\omega}_h$, т.е. множество узлов сетки прямоугольника, не лежащих на границе $Gamma$.

Дифференциальное уравнение задачи во всех внутренних узлах точках сетки аппроксимируется разностным уравнением

$$-\frac{1}{h_1}(a_{i+1j}\frac{w_{i+1j} - w_{ij}}{h_1} - a_{ij}\frac{w_{ij} - w_{i-1j}}{h_1}) - \frac{1}{h_2}(b_{ij+1}\frac{w_{ij+1} - w_{ij}}{h_2} - b_{ij}\frac{w_{ij} - w_{ij-1}}{h_2}) = F_{ij}, (*)$$

$i = \overline{1, M-1}, j = \overline{1, N-1}$ в котором коэффициенты

$$a_{ij} = \frac{1}{h_2}\int_{y_j - 1/2}^{y_j + 1/2} k(x_{i-1/2}, t)dt, b_{ij} = \frac{1}{h_1}\int_{x_i - 1/2}^{x_i + 1/2} k(t, y_{j-1/2})dt$$

при всех $i = \overline{1,M}, j = \overline{1,N}$. Здесь полуцелые узлы

$$x_{i\pm 1/2} = x_i \pm 0.5h_1, y_{j\pm 1/2} = y_j \pm 0.5h_2$$

Правая часть разностного уравнения

$$F_{ij} = \frac{1}{h_1 h_2} \iint_{\Pi_{ij}} F(x,y)dxdy,$$

$$\Pi_{ij} = \{(x,y) : x_{i-1/2} <= x <= x_{i+1/2}, y_{j-1/2} <= y <= y_{j+1/2}$$

при всех $i = \overline{1,M}, j = \overline{1,N}$.

## 5 Вычисление коэффициентов

Из замечания в описании задания следует аналитический алгорит вычисления коэффициентов $a_{ij}, b_{ij}, F_{ij}$.

При вычислении $a_{ij}$ необходимо посчитать интеграл $\int_{y_j-1/2}^{y_j+1/2} k(x_{i-1/2},t)dt$. По построению прямоугольника П, легко видеть, что этот интеграл равен длине отрезка $[y_j - 1/2, y_j + 1/2]$ внутри области $D$ (квадрат с отсеченной вершиной) $+\ 1/\epsilon$ * длину вне области $D$.

Для этого необходимо определить точку пересечения (если она есть) данного отрезка с одной из боковых граней фигуры, затем вычислить длину вне и внутри фигуры. Аналогично для $b_{ij}$.

Для вычисления $F_{ij}$ надо посчитать интеграл $\iint_{\Pi_{ij}} F(x,y)dxdy$. Также из замечания следует, что этот интеграл равен площади прямоугольника $\Pi_{ij} = \{(x,y) : x_{i-1/2} \leq x \leq x_{i+1/2}, y_{j-1/2} \leq y \leq y_{j+1/2}$ внутри квадрата с отсеченной вершиной. Для этого необходимо найти пересечение (если оно есть) прямоугольника с боковой стороной фигуры и посчитать площадь образованной трапеции, треугольника или пятигранника/шестигранника внутри исходной фигуры.

Для данных алгоритмов были найдены уравнения боковых сторон, левая-верхняя, правая-верхняя, левая-нижняя и правая-нижняя соответсвенно:

$$y = 2 + x,$$

$$y = 2 - x,$$

$$y = -2 - x,$$

$$y = -2 + x,$$

с помощью которых находятся пересечения боковых сторон с вертикальными или горизонтальными линиями.

## 6 Метод решения системы линейных алгебраических уравнений

Приближенное решение разностной схемы может быть получено итерационным методом скорейшего спуска. Этот метод позволяет получить последовательность сеточных функций $w^{(k)} \in H, k = 1, 2, \ldots$, сходящуюся по норме пространства H к решения разностной схемы.

Метод является одношаговым. Итерация $w^{(k+1)}$ вычисляется по итерации $w^{(k)}$ согласно равенствам:

$$w_{ij}^{(k+1)} = w_{ij}^{(k)} - \tau_{k+1} r_{ij}^{(k)},$$

где невязка $r^{(k)} = Aw^k - B$, итерационный параметр

$$\tau_{k+1} = \frac{\left(r^{(k)}, r^{(k)}\right)}{\left(Ar^{(k)}, r^{(k)}\right)}.$$

В качестве условия остановки алгоритма было использовано неравенство

$$||w^{(k+1)} - w^{(k)}|| < \delta,$$

где $\delta$ - положительное число, определяющее точность итерационного метода.

# 7 Использование OpenMP

Решение задачи было написано на языке программирования C, используя распараллеливание с помощью библиотеки OpenMP.

Для запуска программы необходимо в параметрах командной строки указать требуемое число OpenMP-нитей.

Например, команда gcc main.c -lm -fopenmp -o a.out && bsub -q normal -W 0:30 -o result -e resultErr -n 2 ./a.out - скомпилирует и запустит испольняемый файл a.out, в котором будет проведен эксперимент с 2 нитями. Размер сетки и точность алгоритма задается в коде программы (переменные M, N, delta соответственно), а также дублируется количество нитей.

Общий алгоритм работы программы следующий:

1. инициализация нужных матриц и переменных;
2. подсчет матриц коэффициентов $a_{ij}, b_{ij}, F_{ij}$;
3. вычисление приближенного решения $w$ методом скорейшего спуска;
4. подсчет итерационного параметра $\tau$ и нормы $||w^{(k+1)} - w^{(k)}||$;
5. если норма больше заданной точности, возвращаемся на пункт 3.

При завершении очередного эксперимента программа выводит число итераций и затраченное время. После завершения последнего эксперимента программа завершается.

В основном цикле метода скорейшего спуска написаны три двойных цикла for, итерирующиеся по i и j. Первый блок циклов вычисляет невязку r, второй блок циклов вычисляет произведение матрицы Ar (с помощью подставления r вместо w в уравнение), третий блок считает норму $||w^{(k+1)} - w^{(k)}||$ для проверки условия остановки. Все три блока циклов были распаралеллены с помощью директивы #pragma omp parallel for collapse(2) для развертывания вложенного цикла с указанием приватных и разделяемых переменных, а так же reduction для правильного расчета суммы внутри.

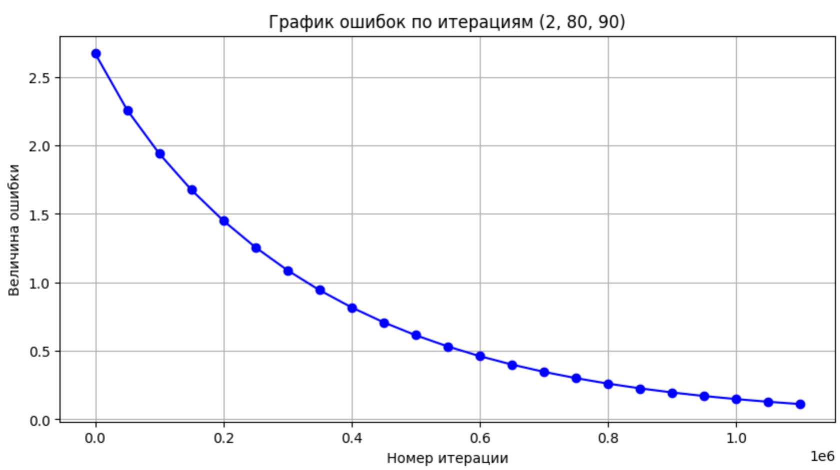
# 8 Результаты работы

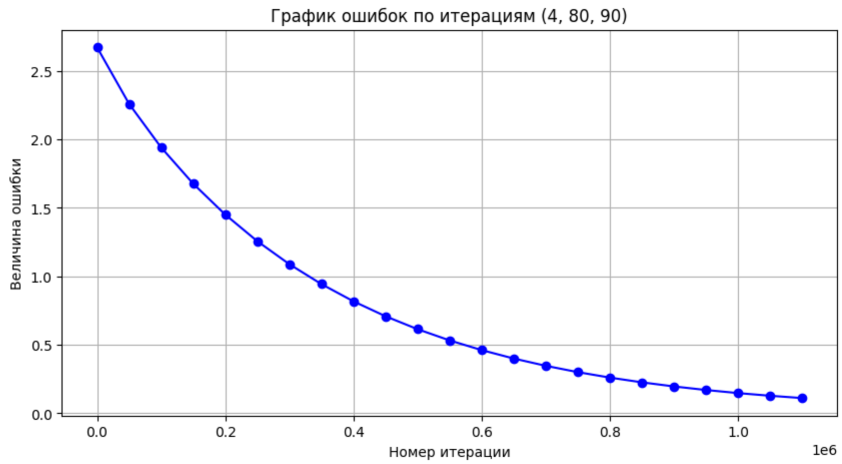
Были проведены расчеты с разными размерами сетки. Во всех экспериментах точность бралась равной $1e-7$. Результаты приведены в таблице:

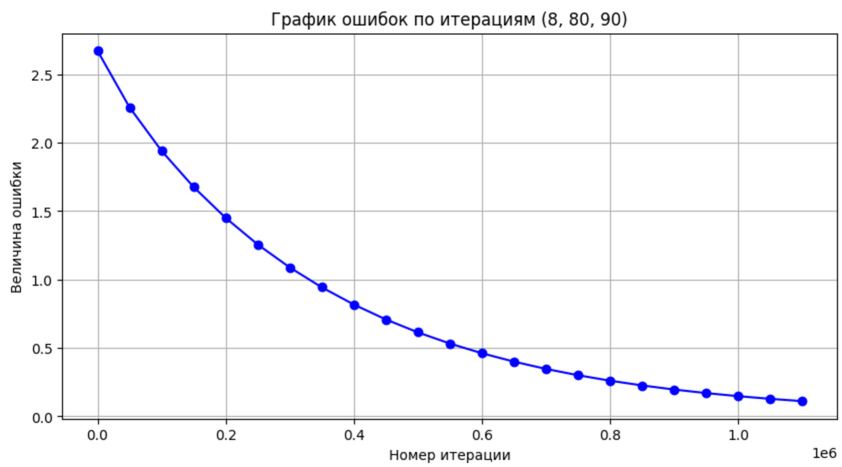
| Количество *OpenMP*-нитей | Число точек сетки (M × N) | Число итераций | Время решения (с) | Ускорение |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 80 × 90 | 1169687 | 785.909590 | 1.458028 |
| 4 | 80 × 90 | 1169687 | 625.576968 | 1.831715 |
| 8 | 80 × 90 | 1169687 | 423.302507 | 2.706997 |
| 16 | 80 × 90 | 1169687 | 274.971049 | 4.167271 |
| 4 | 160 × 180 | 3336901 | 5850.279298 | 1.846065 |
| 8 | 160 × 180 | 3336901 | 4355.450176 | 2.479651 |
| 16 | 160 × 180 | 3336901 | 1679.503207 | 6.430472 |
| 32 | 160 × 180 | 3336901 | 1054.274152 | 10.244014 |

**Таблица 1.** Таблица с результатами расчётов

Так же были проведены расчеты ошибок по итерациям и по области. Графики ошибок по итерациям приведены ниже:






Таким образом, график ошибки для разного количества нитей одинаковый. Построим график для сетки 160 на 180:

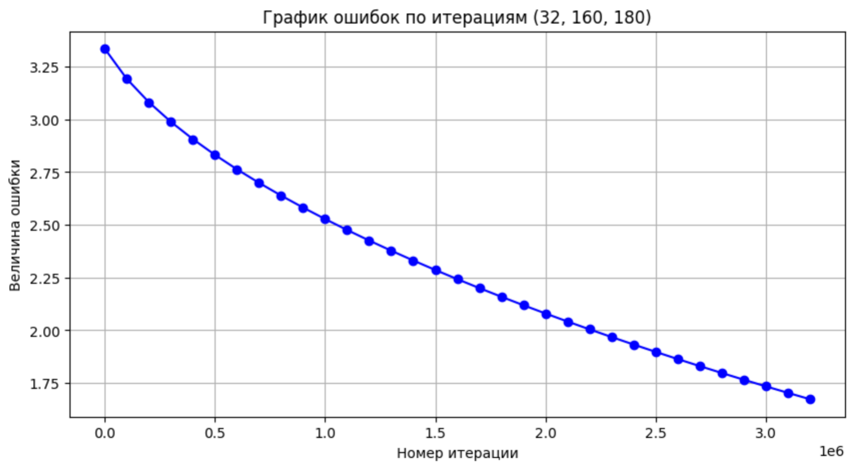



Рисунок приближенного решения для сетки 40 на 40: