Ingénieur civil - informatique

**INFO-H-3000 : Recherche opérationnelle**

# Tournées de véhicules sécurisés pour la récupération de l'argent des caisses communales ; le cas Bruxellois


Auteurs :

MANGUNZA MUAMBA Rhodney,

SY Mohamed

Professeurs et/ou superviseurs :

DE SMET Yves,

DEJAEGERE Gilles


2021-2022

# Table des matières

# 1 Introduction

Dans le cadre du corps de Recherche Opérationnelle, les étudiants de BA3 en section informatique de l'Ecole Polytechnique de Bruxelles doivent modéliser un problème de tournées de véhicules sécurisés pour la récupération de l'argent des caisses communales. Pour ce faire, le langage informatique Python et le logiciel Pycharm ont été utilisés.

## 1.1 Description du problème

Chaque mois, trois camions partent de la Banque Nationale et parcourent les 19 communes de Bruxelles pour récolter le montant de chacune des caisses communales. L'objectif est de modéliser ce problème et de proposer un itinéraire pour chacun de ces dits camions. Les chemins conseillés doivent cependant répondre à deux critères :

— La distance totale parcourue (et donc la distance parcourue par chaque camion respectivement) doit être minimale

— Le risque doit être minimisé également

## 1.2 Données du problème

### 1.2.1 Indices de commune

Afin de faciliter l'implémentation des données dans le code informatique, il a été décidé d'attribuer un indice à chacune des communes à visiter.

| Indice | Ville | Nombre d'habitants | montant (en €) |
|---|---|---|---|
| 0 | Banque Nationale | Aucun | Aucun |
| 1 | Anderlecht | 121394 | 84975.8 |
| 2 | Auderghem | 34937 | 24455.9 |
| 3 | Berchem-Saint-Agathe | 25288 | 17701.6 |
| 4 | Bruxelles | 187686 | 131380.2 |
| 5 | Etterbeek | 48223 | 33756.1 |
| 6 | Evere | 43481 | 30436.7 |
| 7 | Forest | 56271 | 39389.7 |
| 8 | Ganshoren | 25202 | 17641.4 |
| 9 | Ixelles | 86917 | 60841.9 |
| 10 | Jette | 52604 | 36822.8 |
| 11 | Koekelberg | 21997 | 15397.9 |
| 12 | Molenbeek | 97102 | 67971.4 |
| 13 | Saint-Gilles | 48498 | 33948.6 |
| 14 | Saint-Josse-ten-Noode | 26809 | 18766.3 |
| 15 | Schaerbeek | 130270 | 91189 |
| 16 | Uccle | 84647 | 59252.9 |
| 17 | Watermael-Boisfort | 25190 | 17633 |
| 18 | Woluwé-Saint-Pierre | 42106 | 40913.6 |
| 19 | Woluwé-Saint-Lambert | 58448 | 29474.2 |

TABLE 1.1: Tableau d'indices

### 1.2.2 Distances entre communes

Si l'on souhaite calculer la distance totale parcourue, il est d'abord nécessaire de connaître les distances qu'un camion réalise entre deux communes. Ces données ont été encodées dans une matrice appelée *matrice de distances*. Les indices de deux communes forment un couple ligne/colonne qui permet de retrouver la distance qui les sépare dans la matrice.

```
0
11.4, 0
6.1, 13.9, 0
3.0, 9.1, 5.5, 0
6.7, 3.7, 9.6, 4.5, 0
9.5, 8.9, 10.9, 5.6, 7.3, 0
4.1, 12.4, 12.9, 6.4, 7.0, 10.5, 0
16.4, 14.2, 1.5, 6.9, 9.9, 22.4, 14.3, 0
4.5, 5.9, 9.6, 5.2, 2.4, 6.7, 5.0, 8.4, 0
5.8, 13.1, 3.0, 6.9, 8.9, 9.7, 16.0, 1.8, 9.4, 0
4.0, 11.3, 3.1, 5.1, 7.0, 8.0, 9.7, 2.4, 7.5, 2.2, 0
3.1, 11.8, 3.6, 2.9, 7.6, 7.5, 6.2, 4.2, 5.0, 3.2, 1.7, 0
2.7, 9.8, 9.9, 4.1, 4.3, 7.9, 3.1, 8.7, 2.5, 9.1, 7.3, 4.4, 0
5.7, 7.9, 6.6, 1.9, 3.9, 4.1, 6.9, 5.4, 3.2, 5.8, 4.0, 3.3, 4.6, 0
7.1, 9.1, 7.5, 3.2, 6.2, 2.5, 8.4, 6.4, 6.2, 5.4, 5.0, 4.4, 6.0, 2.5, 0
5.4, 10.0, 12.7, 7.8, 7.6, 11.6, 2.6, 14.9, 6.1, 13.8, 13.0, 7.7, 4.0, 7.5, 9.8, 0
10.1, 3.3, 15.2, 10.8, 5.1, 11.2, 9.3, 14.0, 5.9, 14.4, 12.6, 11.9, 7.3, 9.0, 11.3, 7.5, 0
10.5, 4.2,12.2, 7.3, 4.0, 4.9, 11.8, 11.1, 6.3, 11.4, 9.7, 10.0, 7.9, 5.6, 6.8, 10.2, 6.7, 0
9.1, 2.9, 12.5, 7.9, 4.0, 5.7, 10.7, 11.4, 5.5, 11.7, 10.0, 10.2, 7.8, 6.1, 7.0, 12.6, 5.4, 1.3, 0
```

FIGURE 1.1: Matrice des distances

### 1.2.3 Montant des caisses communales

Le calcul du risque se fait sur base de la quantité d'argent transportée par un camion. Puisque l'on sait qu'une commune reçoit 0.7 € par habitant, déterminer le montant rangé dans une caisse se fait en multipliant ces 70 centimes par le nombre de résidents. Les valeurs trouvées sont alors portées dans la quatrième colonne du tableau d'indices.

A ce stade-ci du rapport, il est déjà possible d'observer qu'Anderlecht, Bruxelles et Schaerbeek sont les trois communes les plus peuplées.

Les informations sur la population par commune ont été trouvées : `https://www.ibz.rrn.fgov.be/fileadmin/user_upload/fr/pop/statistiques/population-bevolking-20220101.pdf`

#### Montant total

Le montant total amené à la Banque Nationale se calcule en sommant la valeur des montants de chaque caisse communale.

# 2 Modélisation

## 2.1 Variables

Les variables choisies découlent directement des données fournies au chapitre 1 :

— $d_{ij}$ : une variable de réel qui représente la distance entre la commune i et la commune j. Ses indices donnent également sa position dans la matrice d'indices. Si i ou j = 0, il s'agit de la distance entre une commune et la Banque Nationale.
avec $i, j \in I$

— $m_k$ : une variable de type réel qui représente le montant dans la caisse de la commune k.
avec $k \in I$

— $c_l$ : une variable de type booléen qui représente le camion que l'on prend en compte.
avec $l \in \{1, 2, 3\}$

où I représente l'ensemble des indices de la table des indices {0,1,2, ..., 19}

## 2.2 Fonctions économiques

### 2.2.1 Minimiser la distance totale parcourue

Pour un camion $c_l$, sa distance parcourue $d_l$ se modélise sous la forme :

$$d_l = c_l \sum d_{ij} \tag{2.1}$$

Il suffit alors de sommer la $d_1, d_2, d_3$ pour obtenir la distance totale parcourue, qui est à minimiser :

$$min \sum_{l=1}^{3} d_l \tag{2.2}$$

### 2.2.2 Minimiser le risque

Dans le cadre de ce rapport, le risque encouru par un camion est modélisé comme la distance qu'il parcourt, pondérée par le montant qu'il transporte en cours de trajet. Le risque $r_l$ encouru par le camion l s'exprime comme :

$$r_l = c_l \sum_{k=1}^{n} m_k d_l \tag{2.3}$$

Le risque total, à minimiser, n'est que la somme de $r_1, r_2 et r_3$

$$min \sum_{l=1}^{3} r_l \tag{2.4}$$

## 2.3 Contraintes

### 2.3.1 Un camion ne peut transporter plus de la moitié du montant total à récupérer

Pour un camion donné :

$$\sum m_k < 0.5 \cdot m_{tot} \tag{2.5}$$

où $m_{tot}$ est une constante représentant le montant total récupéré par les 3 camions. En additionant tous les montants figurant dans le tableau d'indices, on obtient alors une valeur de 851 949 € à rapporter à la Banque Nationale.

### 2.3.2 Les 3 communes les plus peuplées ne peuvent pas figurer sur l'itinéraire d'un même camion

Il est interdit pour un camion de passer par Bruxelles, Anderlecht et Schaerbeek. Cela s'écrit comme suit :

$$c_l \cdot (\sum_{j \in I}^{n} d_{1j} + d_{4j} + d_{15j} + \sum_{i,j \in I, i,j \neq 1,4,15}^{n} d_{ij}) = 0 \tag{2.6}$$

## 2.4 Hypothèses

### 2.4.1 Hypothèses liées aux distances

Il a été considéré que le chemin adopté par un véhicule pour aller d'un point A à un point B était identique au chemin pour aller du point B vers le point A. La présence de potentielles rues à sens unique, barrages ou tout autre changement qui pourrait faire différer les distances dans un sens ou dans l'autre a donc été négligée. Cette simplication permet la réécriture de la matrice des distances sous la forme d'une matrice triangulaire puisque ses éléments $d_{ij}$ et $d_{ji}$ seront toujours égaux. Réduire le nombre de valeurs à parcourir fait considérablement diminuer la durée d'exécution de notre algorithme.

### 2.4.2 Hypothèses liées aux chemins parcourus par les camions

**Le trajet effectué par un camion est unique :** Autrement dit, deux camions ne passent pas par la même commune.

**Tous les camions commencent et terminent leur chemin par la Banque Nationale :** Leur itinéraire est donc un cycle.

**Chaque camion passe par une et une seule des 3 communes les plus peuplées :** Bruxelles, Anderlecht et Schaerbeek sont attribuées au hasard entre les 3 camions, de sorte à ce que chacun d'entre eux ne passe que par une seule de ces 3 communes et satisfassent la deuxième contrainte.

**Les 3 camions sont dans l'obligation de passer par au moins 6 communes chacun :** Cette décision garantit la satisfaction de la première contrainte.

# 3
# Recherches de solution

## 3.1 Trajet

Un trajet est défini comme une combinaison possible de 6 ou 7 indices. Ce que nous considérons comme une solution est donc un ensemble de trois trajets, chacun faisant référence à un camion différent.
**exemple :**
Une solution possible pourrait être l'ensemble :

$$(0, 15, 5, 6, 19, 17, 2, 0),$$
$$(0, 4, 18, 7, 16, 13, 9, 0),$$
$$(0, 1, 10, 3, 11, 12, 8, 14, 0)$$

Qui, en remplaçant chaque indice par sa commune équivalente dans le tableau d'indices, se lirait comme :

Camion1 : Banque Nationale → Schaerbeek → Etterbeek → Evere → Woluwé-Saint-Lambert →Watermael-Boisfort → Auderghem → Banque Nationale
Camion2 : Banque Nationale → Bruxelles → Woluwé-Saint-Pierre → Forest → Uccle → Saint-Gilles → Ixelles → Banque Nationale
Camion3 : Banque Nationale → Anderlecht → Jette → Berchem-Saint-Agathe → Koekelberg → Molenbeek → Ganshoren → Saint-Josse-ten-Noode → Bruxelles → Banque Nationale

### 3.1.1 Génération d'une solution de base

Pour une configuration donnée, les combinaisons d'indices possibles sont générées au hasard. Les seules solutions gardées sont celles qui vérifient les contraintes. Il est donc nécessaire de s'assurer que les indices 1,4 et 15 soient répartis entre les 3 camions, en plus du fait que le montant dans chacun d'entre eux doit être inférieur à 425 974,5 €.

### 3.1.2 Génération des solutions suivantes

L'algorithme travaille ensuite sur chacune des solutions de base en permutant l'ordre d'un itinéraire pour un camion durant 5 itérations. A chacune d'entre elles, le nouvel arrangement fournit de meilleurs résultats, c'est-à-dire une distance totale et un risque réduits en comparaison avec l'itération précédente.

## 3.2 Optimisation des solutions

### 3.2.1 Algorithme de Bellman-Kalaba

La méthode mentionnée plus haut fait lentement converger la solution proposée vers sa solution optimale. Une manière d'accélérer le processus est de recourir à l'algorithme de Bellman-Kalaba. A partir d'un point de départ fixé et un nombre de communes fourni à visiter, cet algorithme nous assure de trouver le chemin le plus court possible.

La Banque Nationale est l'endroit de départ des 3 camions, comme mentionné dans l'énoncé. A partir de ce point de démarrage, on cherche la commune qui est la plus proche, celle-ci deviendra le premier lieu par lequel passera le camion. Ceci fait, on cherche ensuite la commune la plus proche de celle qui vient d'être fixée et ainsi de suite jusqu'à ce que le camion soit passé par toutes les communes proposées.

### 3.2.2 Algorithme génétique

L'algorithme de Bellman-Kalaba ne peut s'appliquer que sur les communes d'un même trajet. Afin d'augmenter l'ensemble de solution, un autre algorithme est employé sur les 3 trajets d'une même solution. Les communes de deux itinéraires de deux camions sont permutées entre elles à plusieurs reprises afin de voir s'il n'existe pas de meilleure combinaison possible.

## 3.3 Implémentation dans python

Le programme commence par générer une liste de listes qui fera office de matrice de distances. Chaque liste qui la compose représente une commune, tandis que les valeurs contenues à l'intérieur expriment sa distance avec les autres.

Le tableau d'indices, lui, est stocké dans une liste. Comme spécifier au chapitre 1, un couple de deux éléments de ce tableau fournit les indices nécessaires pour retrouver une valeur dans la matrice de distances.

Les montants à récupérer dans chaque commune sont stockés dans une troisième liste appelée *liste de montants.*

Les fonctions écrites par la suite permettent de créer des *matrices de chemins*, c'est-à-dire des matrices dont les 3 lignes sont le trajet effectué par chacun des camions. Au moment de sa création, le code vérifie que la première contrainte est vérifiée en calculant le montant par véhicule. Si l'un d'entre eux s'avère supérieur au montant total, la matrice n'est pas enregistrée et une autre est générée. Ce processus se repète jusqu'à ce que 200 matrices satisfont la condition. Concernant la deuxième contrainte, celle-ci est constamment vérifiée par le fait que nous nous sommes arrangés pour que chaque camion ne passe que par une et une seule des communes les plus peuplées. Cette répartition est cependant aléatoire.

Pour une matrice de chemins donnée, le programme calcule ensuite la distance parcourue par chaque camion et additionne ces dernières pour avoir la distance totale. La même opération se produit afin de déterminer le risque.

Après cela, les éléments de chaque ligne des matrices sont permutés entre eux afin de générer d'autres matrices dont les distances et les risques sont inférieurs à ceux trouvés auparavant. A la 5ème permutation, l'algorithme de Bellman-Kalaba est appliqué afin d'obtenir les itinéraires les plus courts possibles dans les configurations données.

Pour terminer, les couples distances/risques sont portés en abscisse et en ordonnée respectivement.

# 4 Discussion

## 4.1 Résultats

Les résultats ont proprement été encodés dans le fichier csv transmis en annexe. Chaque ligne du fichier est une liste qui contient 3 éléments. Le premier est une autre liste contenant les itinéraires de chaque camion sous forme d'indices. Les 2 autres sont dans l'ordre la distance totale et le risque.

### 4.1.1 Observations

On constate que pour la plupart des solutions trouvées, les camions ont tendance à retourner à la Banque Nationale via les mêmes communes : Ganshoren, Auderghem, Woluwé-Saint-Pierre, Watermael-Boisfort, Jette et Saint-Gilles. Parmi toutes celles citées, seules deux d'entre elles sont voisines à la commune de Bruxelles, où se trouve le point d'arrivée.

On remarque également que les camions passent souvent en premier par les communes les plus peuplées de la ville et Molenbeek. Les 4 font partie des communes les plus proches de la commune de Bruxelles. Les meilleurs itinéraires ont donc tout intérêt à passer d'abord par les communes voisines et les plus proches de Bruxelles avant de s'éloigner, puis de revenir.

## 4.2 Limites des hypothèses

**La distance entre une commune i et j est indépendante du sens de parcours :** Cette situation n'est pas vérifie pour toutes les distances inter-communales. La maison de Schaerbeek, en particulier, est entourée par un rond-point qui pourrait rendre la distance plus longue pour un sens de parcours donné. Dans ce cas-ci, employé une matrice triangulaire pour la matrice des distances n'est plus possible. Le temps de calcul se verrait donc prolonger.

**Les 3 camions passent par au moins 6 communes chacun :** Avec cette hypothèses, deux camions passent par 6 communes et un par 7. Rajouter des communes sur un itinéraire et les supprimer sur un autre pourrait avoir une influence sur la distance totale ainsi que sur le risque où le montant total transporté par un camion pourrait nettement augmenter.

# 5 Conclusion

Notre modélisation s'avère encore trop simple pour fidèlement représenter la réalité. Il aurait fallu remplacer la matrice des distances actuelles par une matrice 19 x 19 afin d'avoir une idée plus proche de ce qui est réellement faisable.

L'algorithme de Bellman-Kalaba aurait pu être remplacé par l'algorithme de Dijkstra si nous avions vérifié que toutes les hypothèses liées à cette méthode étaient vérifiées. Bellman-Kalaba nous assurait de trouver une solution optimale dans tous les cas.