带权二分学习笔记

sjzez czy

2019.2.14

摘要

在一类最优化问题中，常有"恰好为 k 个"之类的个数限制，如果直接通过动态规划解决的话，时间复杂度为 $O(nk)$ 左右，但在某些时候是可以根据函数的特殊性质降至 $O(n \log k)$

关键字：带权二分、凸函数、斜率、动态规划

目录

1 框架

设某个最优化模型如下：

给定 n 个物品，从中选择 m 个物品使得收益最大

设 $g(x)$ 表示恰好选择 x 个物品所得到的最大收益，目标是求出 $g(m)$，如果它是一个凸函数的话，则可以进行凸优化，为了简便起见，假设最优化的是最大收益，且 $g(x)$ 上凸

那么可以得到 $g'(x)$ 是一个单调递减的函数，且 $g(x)$ 的最大值在 $g'(x)=0$ 处取到，假设这个值为 x_0

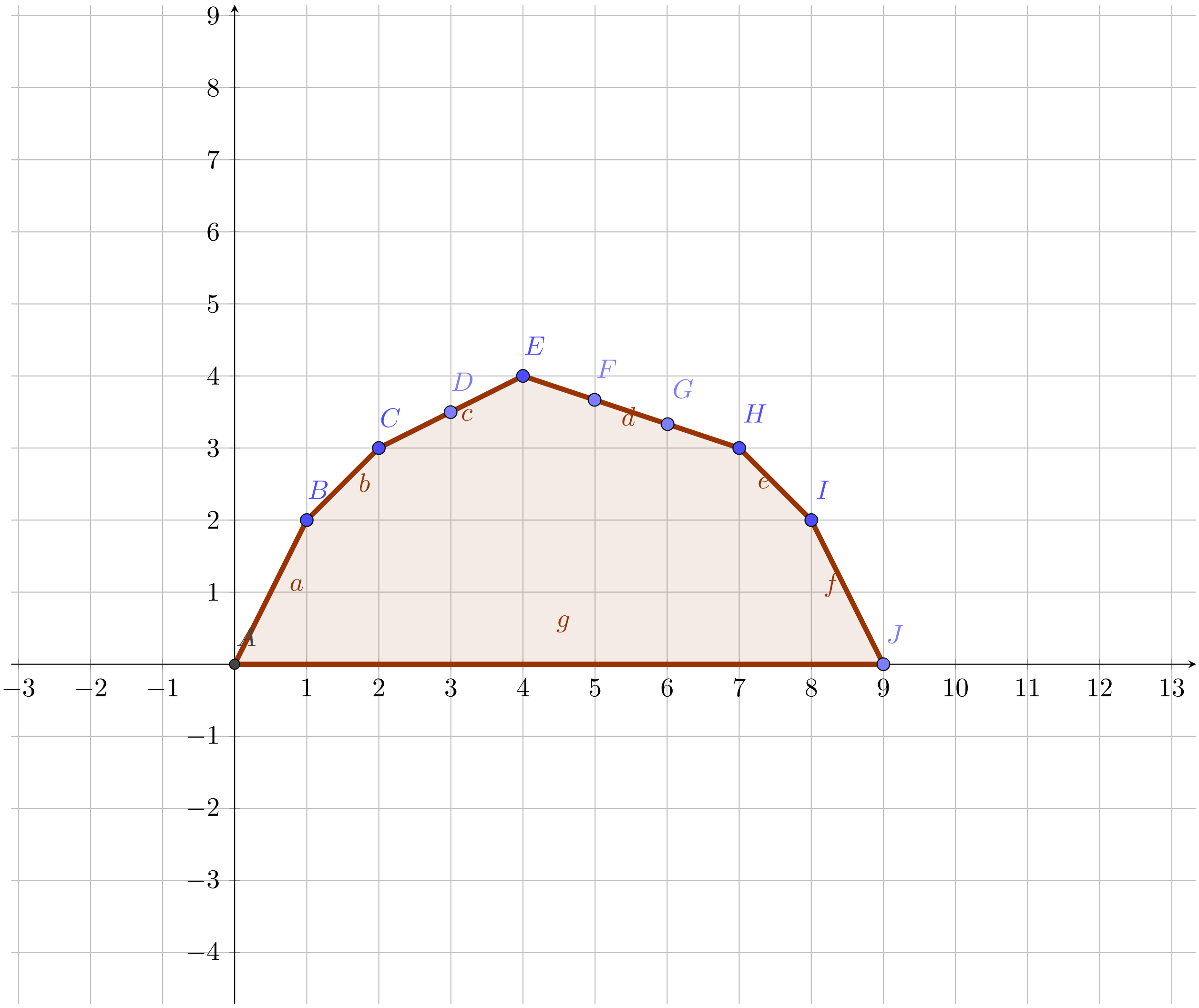
那么可以二分一个权 k，表示每选择一个物品，那么会额外付出代价 k，构造函数 $f(x)=g(x)-kx$，由于 $g(x)$ 和 $-kx$ 都是凸的，因此 $f(x)$ 依旧是凸的，即 $f'(x)=0$ 的时候 $f(x)$ 取得最大值

假设 $f(x)$ 在 $f'(x)=g'(x)-k=0 \Leftrightarrow g'(x)=k$ 的时候取得最大值，此时 x 为 x_1

由于 $g'(x)$ 是单调函数，所以随着 k 的变化 x_1 随着单调变化，即随着 k 变小，x_1 也会变大

换而言之，实际上是用一条斜率为 k 的直线来切这个 $g(x)$ 构成的凸包

于是可以二分 k 来得到 x_1，从而适当调整 k 的取值



2 模型 A

设某个最优化模型如下:

> 给定 n 个物品，从中选择 m 个物品使得收益最大，其中 $g(x)$ 上凸

那么二分的 k 的取值范围是 $(-\infty,\infty)$，在 $x_1 \le m$ 的时候记录 k，同时将 k 往小调整，否则将 k 往大调整

输出答案的时候用最后一次记录的 k 进行计算

3 模型 B

设某个最优化模型如下:

> 给定 n 个物品，从中选择 **最多** m 个物品使得收益最大，其中 $g(x)$ 上凸

由于是"最多"的限制，因此不能再像之前一样设置二分边界了，此时应该设为 $[0,\infty)$

此时当 $m \le x_0$ 的时候，最优解斜率在二分边界之内，因此可行，当 $m > x_0$ 的时候，最优解应在 $x = x_0$ 处取到，此时最优解的斜率为 0，依然在二分边界之内

4 例题

种树 A

种树 B