简要题解

sjzez czy

2019.1.23

目录

1 【51nod 1172】Partial Sums V2

1.1 题目大意

给定一个序列（长度不超过 50000），求做 $k(k \le 10^9)$ 次前缀和后的序列结果，序列的每个元素对 10^9+7 取模

1.2 算法讨论

对于形式幂级数 $A(x)$，以及实数 p 来说，有下式成立：

$$F(x) = A(x)^p \Rightarrow A(x)F'(x) = pF(x)A'(x)$$

对于一个序列 $\{a_n\}$ 来说，求一次前缀和相当于把 $A(x)$ 变为 $\frac{A(x)}{1-x}$

若做 k 次前缀和，相当于乘上 $\frac{1}{(1-x)^k}$，由于乘法具有结合律，只需要考虑后式即可

令 $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n = \frac{1}{(1-x)^k}$，则有：

$$\begin{aligned} &F(x) = \frac{1}{(1-x)^k} = (1-x)^{-k} \\ \Rightarrow &(1-x)F'(x) = -kF(x)(-1) = kF(x) \\ \Rightarrow &\sum_{n=0}^{\infty} f_{n+1}(n+1)x^n - \sum_{n=1}^{\infty} f_n n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} k f_n x^n \end{aligned}$$

即：

$$\begin{cases} f_0 = F(0) = 1 \\ f_{0+1}(0+1) = kf_0 \Rightarrow f_1 = k \\ f_{n+1}(n+1) - f_n n = kf_n \quad (n \ge 1) \end{cases}$$

最后一个即：

$$\begin{aligned} f_{n+1} &= \frac{(k+n)f_n}{n+1} && (n \ge 1) \\ \Rightarrow f_n &= \frac{(k+n-1)f_{n-1}}{n} && (n \ge 2) \end{aligned}$$

因此可以 $O(n)$ 计算出 $\{f_n\}$ 后，再计算 $A(x) \times F(x)$ 即可

于是问题转化为了，给定两个序列，求其卷积，其中序列长度不超过 50000，运算在模 10^9+7 意义下

如果使用分治乘法，时间复杂度为 $O(n^{1.59})$，代入数据可得跑的过去

1.3 时间复杂度

$$O(n\log n)$$

1.4 空间复杂度

$$O(n)$$

2 【mioj 118】Grizzly and GCD

2.1 题目大意

给定 n,a,b，保证 $\gcd(a,b)=1$，且 $1<n,a,b<10^5$，求下式在模 10^9+7 意义下的值：

$$\sum_{m=0}^{n}[2\nmid\binom{n}{m}]\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i-1}\gcd(a^i-b^i,a^j-b^j)$$

2.2 算法讨论

发现这就是个二合一，首先 $[2\nmid\binom{n}{m}]=[n\&m=m]$，之后考虑计算后面那个式子需要用到一个结论，即：

$$\gcd(a,b)=1\Rightarrow\gcd(a^i-b^i,a^j-b^j)=a^{\gcd(i,j)}-b^{\gcd(i,j)}$$

于是就相当于求：

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i-1}\left(a^{\gcd(i,j)}-b^{\gcd(i,j)}\right)$$

也就是相当于求：

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i-1}a^{\gcd(i,j)}\\=&\sum_{d=1}^{n}a^d\sum_{i=1}^{\lfloor\frac{n}{d}\rfloor}\sum_{j=1}^{i-1}[\gcd(i,j)=1]\\=&\sum_{d=1}^{n}a^d\left(-1+\sum_{i=1}^{\lfloor\frac{n}{d}\rfloor}\phi(i)\right)\end{aligned}$$

直接暴力就好了

2.3 时间复杂度

$$O(n)$$

2.4 空间复杂度

$$O(n)$$

3 【CCPC-Wannafly Winter Camp Day4 (Div1, onsite)】置置置换

3.1 题目大意

给定 n，求有多少个 $1 \sim n$ 的全排列，满足 $\forall 2 \le i \le n$，若 $2 \mid i$，则 $a_{i-1} > a_i$，否则 $a_{i-1} < a_i$

其中 $1 \le n \le 1000$，答案对 $10^9 + 7$ 取模

3.2 算法讨论

设 f_n 表示 $1 \sim n$ 的满足条件的全排列的个数，则：

$$\begin{cases} f_0 = 1 \\ f_1 = 1 \\ f_n = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} f_i f_{n-1-i} [2|i] \quad (n \ge 1) \end{cases}$$

意义就是考虑第 n 个数是必须放到偶数位置上，也就是说 n 左侧必须要有偶数个数字

3.3 时间复杂度

$$O(n^2)$$

3.4 空间复杂度

$$O(n^2)$$

4 【CCPC-Wannafly Winter Camp Day4 (Div1, onsite)】咆咆咆哮

4.1 题目大意

wls 手上有 n 张牌，每张牌他都可以选择召唤一个攻击力为 a_i 的生物，或者使得场上所有生物的攻击力加 b_i

请问如何抉择，使得场攻（场上生物攻击力的总和）最高

wls 可以任意选择出这 n 张牌的顺序

其中 $1 \le n \le 10^5, 0 \le a_i, b_i \le 10^6$

4.2 算法讨论

首先最优决策一定是先召唤若干个生物，然后一直给它们加 $buff$

设 $f(x)$ 表示召唤出 x 个生物时的最大攻击力，即有 $n-x$ 个 $buff$

由于某些原因，$f(x)$ 是一个关于 x 的单峰函数，也就是可以三分

考虑 $f(x)$ 怎么求，假设已经决定了一些卡片是召唤，一些是加 $buff$，考虑一张召唤的卡片 i 和一张加 $buff$ 的卡片 j 进行交换后答案更有的条件：

$$a_j + b_i \times x > a_i + b_j \times x$$

那么按照 $a_i - a_i \times x$ 降序排序后，前 x 个卡片用于召唤，后 $n-x$ 个卡片用于加 $buff$ 就好了

4.3 时间复杂度

$$O(n \log^2 n)$$

4.4 空间复杂度

$$O(n)$$