简要题解

sjzez czy

2019.1.23

目录

1 【51nod 1172】Partial Sums V2

1.1 题目大意

给定一个序列（长度不超过 50000），求做 $k(k \le 10^9)$ 次前缀和后的序列结果，序列的每个元素对 10^9+7 取模

1.2 算法讨论

对于形式幂级数 $A(x)$，以及实数 p 来说，有下式成立：

$$F(x) = A(x)^p \Rightarrow A(x)F'(x) = pF(x)A'(x)$$

对于一个序列 $\{a_n\}$ 来说，求一次前缀和相当于把 $A(x)$ 变为 $\frac{A(x)}{1-x}$
若做 k 次前缀和，相当于乘上 $\frac{1}{(1-x)^k}$，由于乘法具有结合律，只需要考虑后式即可
令 $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n = \frac{1}{(1-x)^k}$，则有：

$$\begin{aligned}
&F(x) = \frac{1}{(1-x)^k} = (1-x)^{-k} \\
\Rightarrow&(1-x)F'(x) = -kF(x)(-1) = kF(x) \\
\Rightarrow&\sum_{n=0}^{\infty} f_{n+1}(n+1)x^n - \sum_{n=1}^{\infty} f_n n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} k f_n x^n
\end{aligned}$$

即：

$$\begin{cases}
f_0 = F(0) = 1 \\
f_{0+1}(0+1) = kf_0 \Rightarrow f_1 = k \\
f_{n+1}(n+1) - f_n n = kf_n \quad (n \ge 1)
\end{cases}$$

最后一个即：

$$\begin{aligned}
f_{n+1} &= \frac{(k+n)f_n}{n+1} && (n \ge 1) \\
\Rightarrow f_n &= \frac{(k+n-1)f_{n-1}}{n} && (n \ge 2)
\end{aligned}$$

因此可以 $O(n)$ 计算出 $\{f_n\}$ 后，再计算 $A(x) \times F(x)$ 即可

于是问题转化为了，给定两个序列，求其卷积，其中序列长度不超过 50000，运算在模 10^9+7 意义下

如果使用分治乘法，时间复杂度为 $O(n^{1.59})$，代入数据可得跑的过去

1.3 时间复杂度

$$O(n \log n)$$

1.4 空间复杂度

$$O(n)$$

2 【mioj 118】Grizzly and GCD

2.1 题目大意

给定 n, a, b，保证 $\gcd(a, b) = 1$，且 $1 < n, a, b < 10^5$，求下式在模 $10^9 + 7$ 意义下的值：

$$\sum_{m=0}^{n} [2 \nmid \binom{n}{m}] \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i-1} \gcd(a^i - b^i, a^j - b^j)$$

2.2 算法讨论

发现这就是个二合一，首先 $[2 \nmid \binom{n}{m}] = [n \& m = m]$，之后考虑计算后面那个式子需要用到一个结论，即：

$$\gcd(a, b) = 1 \Rightarrow \gcd(a^i - b^i, a^j - b^j) = a^{\gcd(i,j)} - b^{\gcd(i,j)}$$

于是就相当于求：

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i-1} \left(a^{\gcd(i,j)} - b^{\gcd(i,j)}\right)$$

也就是相当于求：

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i-1} a^{\gcd(i,j)} \\ = & \sum_{d=1}^{n} a^d \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{d} \rfloor} \sum_{j=1}^{i-1} [\gcd(i, j) = 1] \\ = & \sum_{d=1}^{n} a^d \left(-1 + \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{d} \rfloor} \phi(i) \right) \end{aligned}$$

直接暴力就好了

2.3 时间复杂度

$$O(n)$$

2.4 空间复杂度

$$O(n)$$