一类通过生成函数求线性递推式的方法

sjzez czy

2019.1.22

摘要

在一类低阶卷积递推中，常用方法是多项式开根来优化递推，但在某些特殊情况下，可以实现递推来求解，使得时间复杂度变为线性

关键字：卷积、形式幂级数、生成函数、多项式开根

目录

1 定义

1.1 卷积

对于一个矩阵 $\{a_{n,m}\}$，定义其 n 阶卷积 $\{c_k\}$ 为：

$$c_k = \sum_{\sum_{j=1}^{n} p_j = k} \prod_{i=1}^{n} a_{i,p_i}$$

1.2 卷积递推

定义一个序列 $\{f_k\}$ 是关于 $g_k, h_k, \{a_{u,v}\}$ 的 u 阶卷积递推，意味着：

$$f_k = g_k + h_k \sum_{\sum_{j=1}^{u} p_j = k} \prod_{i=1}^{u} a_{i,p_i}$$

1.3 形式幂级数

对于一个序列 $\{a_n\}$，定义它的形式幂级数 $A(x)$ 为：

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

在这里，并不关注 x 的取值，只是用它的一个形式，但如果将其转化为封闭形式后，需要保证 $a_0 = A(0)$ 成立

在本文中，不加区分形式幂级数与生成函数的区别，形式幂级数拥有一些常见的算术运算方式

1.3.1 相等

定义 $A(x) = B(x)$，意味着：

$$\forall n \geq 0, a_n = b_n$$

1.3.2 加法

定义 $C(x) = A(x) + B(x)$，意味着：

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n$$

1.3.3 乘法

定义 $C(x) = A(x) \times B(x)$，意味着：

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \sum_{i+j=n} a_i \times b_j$$

2 引理

2.1 形式幂级数的导数

由于 x^n 的导数为 nx^{n-1}，由此可得对于形式幂级数 $A(x)$ 来说，它的导数为:

$$A'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}(n+1)x^n$$

同时可以得知，如果已知 $F(0)$ 和 $F'(x)$，可以还原出 $F(x)$

2.2 形式幂级数的幂次

通过形式幂级数的导数，可以得出如下结论:

$$\begin{aligned}
&F(x) = A(x)^p \\
\Rightarrow &F'(x) = pA(x)^{p-1}A'(x) \\
\Rightarrow &A(x)F'(x) = pA(x)^p A'(x) \\
\Rightarrow &A(x)F'(x) = pF(x)A'(x)
\end{aligned}$$

3 实例

3.1 Large Schröder numbers

已知 **Large Schröder numbers** 的形式幂级数为 $F(x) = \frac{1-x-\sqrt{1-6x+x^2}}{2x}$，求其递推式

设 $G(x) = \sqrt{1-6x+x^2}$

3.1.1 求 $G(x)$

因为:

$$\begin{aligned}
&(1-6x+x^2)G'(x) = \frac{1}{2}G(x)(1-6x+x^2)' \\
\Rightarrow &(1-6x+x^2)G'(x) = G(x)(x-3) \\
\Rightarrow &\sum_{n=0}^{\infty} g_{n+1}(n+1)x^n - \sum_{n=1}^{\infty} 6g_n n x^n + \sum_{n=2}^{\infty} g_{n-1}(n-1)x^n = \sum_{n=1}^{\infty} g_{n-1}x^n - \sum_{n=0}^{\infty} 3g_n x^n
\end{aligned}$$

于是有:

$$
\begin{cases}
g_0 = G(0) = 1 \\
g_{0+1}(0+1) = -3g_0 \\
g_{1+1}(1+1) - 6g_1 1 = g_{1-1} - 3g_1 \\
g_{n+1}(n+1) - 6g_n n + g_{n-1}(n-1) = g_{n-1} - 3g_n \quad (n \geq 2)
\end{cases}
$$

那么:

初值

$$
\begin{cases}
g_0 = 1 \\
g_1 = -3g_0 = -3 \\
2g_2 - 6g_1 = g_0 - 3g_1 \Rightarrow g_2 = -4
\end{cases}
$$

其它情况

$$
\begin{aligned}
& g_{n+1}(n+1) + (3-6n)g_n + g_{n-1}(n-2) = 0 && (n \geq 2) \\
\Rightarrow & g_{n+1} = \frac{(6n-3)g_n + g_{n-1}(2-n)}{n+1} && (n \geq 2) \\
\Rightarrow & g_n = \frac{(6n-9)g_{n-1} + (3-n)g_{n-2}}{n} && (n \geq 1)
\end{aligned}
$$

3.1.2 求 $F(x)$

因为 $2xF(x) = 1 - x - G(x)$，则有:

$$
\sum_{n=1}^{\infty} 2f_{n-1}x^n = 1 - x - g_0 - g_1 x - \sum_{n=2}^{\infty} g_n x^n
$$

那么:

初值

$$
2f_{1-1} = -1 - g_1 \Rightarrow f_0 = 1
$$

其它情况

$$
\begin{aligned}
& 2f_{n-1} = -g_n && (n \geq 2) \\
\Rightarrow & f_n = -\frac{g_{n+1}}{2} && (n \geq 1)
\end{aligned}
$$

3.2 Motzkin numbers

已知 **Motzkin numbers** 的形式幂级数为 $F(x) = \frac{1-x-\sqrt{1-2x-3x^2}}{2x^2}$，求其递推式

设 $G(x) = \sqrt{1-2x-3x^2}$

3.2.1 求 $G(x)$

$$
\begin{aligned}
&G(x) = \sqrt{1-2x-3x^2} \\
\Rightarrow &(1-2x-3x^2)G'(x) = \frac{1}{2}G(x)(-2-6x) \\
\Rightarrow &(-1+2x+3x^2)G'(x) = (1+3x)G(x) \\
\Rightarrow &(-1+2x+3x^2)\sum_{n=0}^{\infty} g_{n+1}(n+1)x^n = (1+3x)\sum_{n=0}^{\infty} g_n x^n \\
\Rightarrow &-\sum_{n=0}^{\infty} g_{n+1}(n+1)x^n + \sum_{n=1}^{\infty} 2g_n n x^n + \sum_{n=2}^{\infty} 3g_{n-1}(n-1)x^n = \sum_{n=0}^{\infty} g_n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} 3g_{n-1}x^n
\end{aligned}
$$

可以得出:

$$
\begin{cases}
g_0 = G(0) = 1 \\
-g_{0+1}(0+1) = g_0 \Rightarrow g_1 = -1 \\
-g_{1+1}(1+1) + 2g_1 1 = g_1 + 3g_{1-1} \Rightarrow g_2 = -2 \\
-g_{n+1}(n+1) + 2g_n n + 3g_{n-1}(n-1) = g_n + 3g_{n-1} \qquad (n \geq 2)
\end{cases}
$$

最后一个即:

$$
\begin{aligned}
&-g_{n+1}(n+1) + 2g_n n + 3g_{n-1}(n-1) = g_n + 3g_{n-1} && (n \geq 2) \\
\Rightarrow &-g_{n+1}(n+1) + (2n-1)g_n + (3n-6)g_{n-1} = 0 && (n \geq 2) \\
\Rightarrow &g_n = \frac{(2n-3)g_{n-1} + (3n-9)g_{n-2}}{n} && (n \geq 3)
\end{aligned}
$$

3.2.2 求 $F(x)$

因为:

$$
\begin{aligned}
&2x^2F(x) = 1 - x - G(x) \\
\Rightarrow &\sum_{n=2}^{\infty} 2f_{n-2}x^n = (1-g_0) - (g_1+1)x - \sum_{n=2}^{\infty} g_n x^n
\end{aligned}
$$

可以得出:

$$
\begin{aligned}
&2f_{n-2} = -g_n && (n \geq 2) \\
\Rightarrow &f_n = -\frac{g_{n+2}}{2} && (n \geq 0)
\end{aligned}
$$

3.3 Catalan numbers

已知 **Catalan numbers** 的形式幂级数为 $F(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$，求其递推式

设 $G(x)=\sqrt{1-4x}$

3.3.1 求 $G(x)$

$$
\begin{aligned}
&G(x)=\sqrt{1-4x}\\
\Rightarrow&(1-4x)G'(x)=\frac{1}{2}G(x)(-4)\\
\Rightarrow&(4x-1)\sum_{n=0}^{\infty}g_{n+1}(n+1)x^n=\sum_{n=0}^{\infty}2g_nx^n\\
\Rightarrow&\sum_{n=1}^{\infty}4g_nnx^n-\sum_{n=0}^{\infty}g_{n+1}(n+1)x^n=\sum_{n=0}^{\infty}2g_nx^n
\end{aligned}
$$

可以得出：

$$
\begin{cases}
g_0=G(0)=1\\
-g_{0+1}(0+1)=2g_0\Rightarrow g_1=-2\\
4g_nn-g_{n+1}(n+1)=2g_n\quad(n\geq 1)
\end{cases}
$$

最后一个即：

$$
\begin{aligned}
&4g_nn-g_{n+1}(n+1)=2g_n &&(n\geq 1)\\
\Rightarrow&g_{n+1}=\frac{(4n-2)g_n}{n+1} &&(n\geq 1)\\
\Rightarrow&g_n=\frac{(4n-6)g_{n-1}}{n} &&(n\geq 2)
\end{aligned}
$$

3.3.2 求 $F(x)$

因为：

$$
\begin{aligned}
&2xF(x)=1-G(x)\\
\Rightarrow&\sum_{n=1}^{\infty}2f_{n-1}x^n=1-\sum_{n=0}^{\infty}g_{nx^n}
\end{aligned}
$$

可以得出：

$$
\begin{aligned}
&2f_{n-1}=-g_n &&(n\geq 1)\\
\Rightarrow&f_n=-\frac{g_{n+1}}{2} &&(n\geq 0)
\end{aligned}
$$

参考文献

[1] 生成函数及应用, ACdreamer

[2] 迷思：寻找母函数运算的组合意义（一）, EntropyIncreaser