

单调队列优化多重背包

sjzez czy

2019.2.20

目录

1	模型描述	2
2	解法	2
3	代码实现	2
4	参考资料	4

1 模型描述

有 n 种物品，第 i 种物品有 c_i 个，每个价值为 v_i ，单价 w_i

现在有 m 块钱，需要买价格之和不超过 m 块钱的物品，使得价值之和最大

2 解法

设 $f_{i,j}$ 表示考虑了前 i 种物品，还剩 j 块钱的最大价值之和，有转移：

$$f_{i,j} = \max_{k=0}^{c_i} (f_{i-1,j-k \cdot w_i} + k \cdot v_i)$$

考虑在模 w_i 剩余系下做这个背包，即设 $j = a \cdot w_i + b$ ，有转移：

$$f_{i,j} = \max_{k=0}^{c_i} (f_{i-1,(a-k)w_i+b} + k \cdot v_i)$$

设 $t = a - k$ ，有转移：

$$\begin{aligned} f_{i,j} &= \max_{k=0}^{c_i} (f_{i-1,t \cdot w_i + b} + (a - t) \cdot v_i) \\ &= \max_{k=0}^{c_i} (f_{i-1,t \cdot w_i + b} - t \cdot v_i) + a \cdot v_i \end{aligned}$$

同时有约束：

$$\begin{cases} a - t \geq 0 \\ k \leq c_i \Rightarrow k = a - t \leq c_i \end{cases}$$

即：

$$a - c_i \leq t \leq a$$

于是可以先枚举 b ，然后枚举 a ，最后单调队列枚举 t

时间复杂度为 $O(nm)$

3 代码实现

```
1 #include <bits/stdc++.h>
2 using namespace std;
3 typedef long long ll;
4 const int N = 110, M = 4e4 + 10, Q = 1e6 + 10;
5 int f[N][M], n, m;
6 int que[Q], l, r, que_val[Q];
```

```

7 void add(int pos, int value, int weight, int count) {
8     for(int b = 0 ; b <= min(m, weight - 1) ; ++ b) {
9         l = 1, r = 0;
10        for(int a = 0, t = 0 - count ; a * weight + b <= m ; ++ a) {
11            // t in [a - count, a]
12            int j = a * weight + b;
13            while(l <= r && que[l] < a - count) ++ l;
14            while(t <= a) {
15                if(t * weight + b >= 0) {
16                    int val = f[pos - 1][t * weight + b] - t * value;
17                    while(l <= r && que_val[r] <= val) -- r;
18                    ++ r;
19                    que[r] = t;
20                    que_val[r] = val;
21                }
22                ++ t;
23            }
24            if(l <= r) {
25                f[pos][j] = max(f[pos][j], que_val[l] + a * value);
26            }
27        }
28    }
29    for(int j = 0 ; j < m ; ++ j) {
30        assert(f[pos][j] <= f[pos][j + 1]);
31    }
32 }
33 int main() {
34     cin >> n >> m;
35     for(int i = 1 ; i <= n ; ++ i) {
36         int v, w, c;
37         cin >> v >> w >> c;
38         add(i, v, w, c);
39     }
40     cout << f[n][m] << endl;
41 }

```

4 参考资料

lvzelong2014 《bzoj4182: Shopping 树上多重背包 + 点分治》