一类通过生成函数求线性递推式的方法

sjzez czy

2019.1.22

摘要

在一类低阶卷积递推中，常用方法是多项式开根来优化递推，但在某些特殊情况下，可以实现线性递推来求解，使得时间复杂度变为线性

关键字：卷积、形式幂级数、生成函数、多项式开根

目录

1 定义

1.1 卷积

对于一个矩阵 $\{a_{n,m}\}$，定义其 n 阶卷积 $\{c_k\}$ 为：

$$c_k = \sum_{\sum_{j=1}^{n} p_j = k} \prod_{i=1}^{n} a_{i,p_i}$$

1.2 卷积递推

定义一个序列 $\{f_k\}$ 是关于 $g_k, h_k, \{a_{u,v}\}$ 的 u 阶卷积递推，意味着：

$$f_k = g_k + h_k \sum_{\sum_{j=1}^{u} p_j = k} \prod_{i=1}^{u} a_{i,p_i}$$

1.3 形式幂级数

对于一个序列 $\{a_n\}$，定义它的形式幂级数 $A(x)$ 为：

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

在这里，并不关注 x 的取值，只是用它的一个形式，但如果将其转化为封闭形式后，需要保证 $a_0 = A(0)$ 成立

在本文中，不加区分形式幂级数与生成函数的区别，形式幂级数拥有一些常见的算术运算方式

1.3.1 相等

定义 $A(x) = B(x)$，意味着：

$$\forall n \geq 0, a_n = b_n$$

1.3.2 加法

定义 $C(x) = A(x) + B(x)$，意味着：

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n$$

1.3.3 乘法

定义 $C(x) = A(x) \times B(x)$，意味着：

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \sum_{i+j=n} a_i \times b_j$$

2 引理

2.1 形式幂级数的导数

由于 x^n 的导数为 nx^{n-1}，由此可得对于形式幂级数 $A(x)$ 来说，它的导数为:

$$A'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}(n+1)x^n$$

于是可以推出如下结论:

$$\begin{aligned}
&F(x) = A(x)^p \\
\Rightarrow &F'(x) = pA(x)^{p-1}A'(x) \\
\Rightarrow &A(x)F'(x) = pA(x)^p A'(x) \\
\Rightarrow &A(x)F'(x) = pF(x)A'(x)
\end{aligned}$$

同时可以得知，如果已知 $F(0)$ 和 $F'(x)$，可以还原出 $F(x)$

2.2 形式幂级数的二次卷积

考虑形如如下的一类递推:

$$f_k = g_k + h_k \sum_{i+j=k} f_i f_j$$

在进行一些整理后，它们的形式幂级数可以写作:

$$A(x)F^2(x) + B(x)F(x) + C(x) = 0$$

若其为二次方程，则通过二次方程求根公式，可以得到:

$$F(x) = \frac{-B(x) \pm \sqrt{B^2(x) - 4A(x)C(x)}}{2A(x)}$$

在确定完正负号后，可以化作:

$$2A(x)F(x) = -B(x) \pm \sqrt{B^2(x) - 4A(x)C(x)}$$

因此只需要考虑一类形如 $\sqrt{A(x)}$ 的生成函数即可

当 $A(x), B(x), C(x)$ 均为低阶多项式时，可以进行一些化简后，得到 $\{f_n\}$ 的线性递推式

设 $F(x) = \sqrt{A(x)}$，则有:

$$\begin{cases} F'(x) = \frac{A'(x)}{2\sqrt{A(x)}} = \frac{A'(x)}{2}G(x) \\ G'(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{A(x)}}\right)' = -\frac{A'(x)}{2A(x)}G(x) \end{cases}$$

即:

$$\begin{cases} A'(x)G(x) = -2G'(x)A(x) \\ 2F'(x) = A'(x)G(x) \end{cases}$$

展开后可以得到:

$$\begin{cases} A'(x)\sum_{n=0}^{\infty} g_n x^n = -2A(x)\sum_{n=0}^{\infty} g_{n+1}(n+1)x^n \\ \sum_{n=0}^{\infty} 2f_{n+1}(n+1)x^n = A'(x)\sum_{n=0}^{\infty} g_n x^n \end{cases}$$

在依次进行线性递推后，可以得到 $\{f_n\}$

3 实例

3.1 Large Schröder numbers

已知 **Large Schröder numbers** 的形式幂级数为 $F(x) = \frac{1-x-\sqrt{1-6x+x^2}}{2x}$，求其线性递推式

设 $G(x) = \sqrt{1-6x+x^2}$

3.1.1 求 $G(x)$

因为:

$$\begin{aligned} &(1-6x+x^2)G'(x) = \frac{1}{2}G(x)(1-6x+x^2)' \\ \Rightarrow &(1-6x+x^2)G'(x) = G(x)(x-3) \\ \Rightarrow &\sum_{n=0}^{\infty} g_{n+1}(n+1)x^n - \sum_{n=1}^{\infty} 6g_n n x^n + \sum_{n=2}^{\infty} g_{n-1}(n-1)x^n = \sum_{n=1}^{\infty} g_{n-1}x^n - \sum_{n=0}^{\infty} 3g_n x^n \end{aligned}$$

于是有:

$$\begin{cases} g_0 = G(0) = 1 \\ g_{0+1}(0+1) = -3g_0 \\ g_{1+1}(1+1) - 6g_1 1 = g_{1-1} - 3g_1 \\ g_{n+1}(n+1) - 6g_n n + g_{n-1}(n-1) = g_{n-1} - 3g_n \quad (n \geq 2) \end{cases}$$

那么:

初值

$$\begin{cases} g_0 = 1 \\ g_1 = -3g_0 = -3 \\ 2g_2 - 6g_1 = g_0 - 3g_1 \Rightarrow g_2 = -4 \end{cases}$$

其它情况

$$\begin{aligned} g_{n+1}(n+1) + (3-6n)g_n + g_{n-1}(n-2) = 0 && (n \geq 2) \\ \Rightarrow g_{n+1} = \frac{(6n-3)g_n + g_{n-1}(2-n)}{n+1} && (n \geq 2) \\ \Rightarrow g_n = \frac{(6n-9)g_{n-1} + (3-n)g_{n-2}}{n} && (n \geq 1) \end{aligned}$$

3.1.2 求 $F(x)$

因为 $2xF(x) = 1 - x - G(x)$，则有:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2f_{n-1}x^n = 1 - x - g_0 - g_1x - \sum_{n=2}^{\infty} g_nx^n$$

那么:

初值

$$2f_{1-1} = -1 - g_1 \Rightarrow f_0 = 1$$

其它情况

$$\begin{aligned} 2f_{n-1} = -g_n && (n \geq 2) \\ \Rightarrow f_n = -\frac{g_{n+1}}{2} && (n \geq 1) \end{aligned}$$

3.2 Motzkin numbers

已知 **Motzkin numbers** 的形式幂级数为 $F(x) = \frac{1-x-\sqrt{1-2x-3x^2}}{2x^2}$，求其线性递推式

3.3 Catalan numbers

已知 **Catalan numbers** 的形式幂级数为 $F(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$，求其线性递推式

参考文献

[1] 生成函数及应用, ACdreamer

[2] 迷思：寻找母函数运算的组合意义（一）, EntropyIncreaser