

一类通过生成函数求线性递推式的方法

sjzez czy

2019.1.22

摘要

在一类低阶卷积递推中，常用方法是多项式开根来优化递推，但在某些特殊情况下，可以实现线性递推来求解，使得时间复杂度变为线性

关键字：卷积、形式幂级数、生成函数、多项式开根

目录

1	定义	3
1.1	卷积	3
1.2	卷积递推	3
1.3	形式幂级数	3
1.3.1	相等	3
1.3.2	加法	3
1.3.3	乘法	3
2	引理	4
2.1	形式幂级数的导数	4
2.2	形式幂级数的幂次	4
3	实例	4
3.1	Large Schröder numbers	4
3.1.1	求 $G(x)$	4
3.1.2	求 $F(x)$	5
3.2	Motzkin numbers	5
3.2.1	求 $G(x)$	6
3.2.2	求 $F(x)$	6
3.3	Catalan numbers	6
3.3.1	求 $G(x)$	7
3.3.2	求 $F(x)$	7

1 定义

1.1 卷积

对于一个矩阵 $\{a_{n,m}\}$, 定义其 n 阶卷积 $\{c_k\}$ 为:

$$c_k = \sum_{\sum_{j=1}^n p_j = k} \prod_{i=1}^n a_{i,p_i}$$

1.2 卷积递推

定义一个序列 $\{f_k\}$ 是关于 $g_k, h_k, \{a_{u,v}\}$ 的 u 阶卷积递推, 意味着:

$$f_k = g_k + h_k \sum_{\sum_{j=1}^u p_j = k} \prod_{i=1}^u a_{i,p_i}$$

1.3 形式幂级数

对于一个序列 $\{a_n\}$, 定义它的形式幂级数 $A(x)$ 为:

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

在这里, 并不关注 x 的取值, 只是用它的一个形式, 但如果将其转化为封闭形式后, 需要保证 $a_0 = A(0)$ 成立

在本文中, 不加区分形式幂级数与生成函数的区别, 形式幂级数拥有一些常见的算术运算方式

1.3.1 相等

定义 $A(x) = B(x)$, 意味着:

$$\forall n \geq 0, a_n = b_n$$

1.3.2 加法

定义 $C(x) = A(x) + B(x)$, 意味着:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n$$

1.3.3 乘法

定义 $C(x) = A(x) \times B(x)$, 意味着:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \sum_{i+j=n} a_i \times b_j$$

2 引理

2.1 形式幂级数的导数

由于 x^n 的导数为 nx^{n-1} ，由此可得对于形式幂级数 $A(x)$ 来说，它的导数为：

$$A'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}(n+1)x^n$$

同时可以得知，如果已知 $F(0)$ 和 $F'(x)$ ，可以还原出 $F(x)$

2.2 形式幂级数的幂次

通过形式幂级数的导数，可以得出如下结论：

$$\begin{aligned} F(x) &= A(x)^p \\ \Rightarrow F'(x) &= pA(x)^{p-1}A'(x) \\ \Rightarrow A(x)F'(x) &= pA(x)^pA'(x) \\ \Rightarrow A(x)F'(x) &= pF(x)A'(x) \end{aligned}$$

3 实例

3.1 Large Schröder numbers

已知 **Large Schröder numbers** 的形式幂级数为 $F(x) = \frac{1-x-\sqrt{1-6x+x^2}}{2x}$ ，求其线性递推式
设 $G(x) = \sqrt{1-6x+x^2}$

3.1.1 求 $G(x)$

因为：

$$\begin{aligned} (1-6x+x^2)G'(x) &= \frac{1}{2}G(x)(1-6x+x^2)' \\ \Rightarrow (1-6x+x^2)G'(x) &= G(x)(x-3) \\ \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} g_{n+1}(n+1)x^n - \sum_{n=1}^{\infty} 6g_n nx^n + \sum_{n=2}^{\infty} g_{n-1}(n-1)x^n &= \sum_{n=1}^{\infty} g_{n-1}x^n - \sum_{n=0}^{\infty} 3g_n x^n \end{aligned}$$

于是有：

$$\begin{cases} g_0 = G(0) = 1 \\ g_{0+1}(0+1) = -3g_0 \\ g_{1+1}(1+1) - 6g_1 \cdot 1 = g_{1-1} - 3g_1 \\ g_{n+1}(n+1) - 6g_n n + g_{n-1}(n-1) = g_{n-1} - 3g_n \quad (n \geq 2) \end{cases}$$

那么:

初值

$$\begin{cases} g_0 = 1 \\ g_1 = -3g_0 = -3 \\ 2g_2 - 6g_1 = g_0 - 3g_1 \Rightarrow g_2 = -4 \end{cases}$$

其它情况

$$\begin{aligned} g_{n+1}(n+1) + (3-6n)g_n + g_{n-1}(n-2) &= 0 \quad (n \geq 2) \\ \Rightarrow g_{n+1} &= \frac{(6n-3)g_n + g_{n-1}(2-n)}{n+1} \quad (n \geq 2) \\ \Rightarrow g_n &= \frac{(6n-9)g_{n-1} + (3-n)g_{n-2}}{n} \quad (n \geq 1) \end{aligned}$$

3.1.2 求 $F(x)$

因为 $2xF(x) = 1 - x - G(x)$, 则有:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2f_{n-1}x^n = 1 - x - g_0 - g_1x - \sum_{n=2}^{\infty} g_nx^n$$

那么:

初值

$$2f_{1-1} = -1 - g_1 \Rightarrow f_0 = 1$$

其它情况

$$\begin{aligned} 2f_{n-1} &= -g_n \quad (n \geq 2) \\ \Rightarrow f_n &= -\frac{g_{n+1}}{2} \quad (n \geq 1) \end{aligned}$$

3.2 Motzkin numbers

已知 **Motzkin numbers** 的形式幂级数为 $F(x) = \frac{1-x-\sqrt{1-2x-3x^2}}{2x^2}$, 求其线性递推式
 设 $G(x) = \sqrt{1-2x-3x^2}$

3.2.1 求 $G(x)$

$$\begin{aligned}
G(x) &= \sqrt{1-2x-3x^2} \\
\Rightarrow (1-2x-3x^2)G'(x) &= \frac{1}{2}G(x)(-2-6x) \\
\Rightarrow (-1+2x+3x^2)G'(x) &= (1+3x)G(x) \\
\Rightarrow (-1+2x+3x^2) \sum_{n=0}^{\infty} g_{n+1}(n+1)x^n &= (1+3x) \sum_{n=0}^{\infty} g_n x^n \\
\Rightarrow - \sum_{n=0}^{\infty} g_{n+1}(n+1)x^n + \sum_{n=1}^{\infty} 2g_n n x^n + \sum_{n=2}^{\infty} 3g_{n-1}(n-1)x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} g_n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} 3g_{n-1}x^n
\end{aligned}$$

可以得出：

$$\begin{cases}
g_0 = G(0) = 1 \\
-g_{0+1}(0+1) = g_0 \Rightarrow g_1 = -1 \\
-g_{1+1}(1+1) + 2g_1 1 = g_1 + 3g_{1-1} \Rightarrow g_2 = -2 \\
-g_{n+1}(n+1) + 2g_n n + 3g_{n-1}(n-1) = g_n + 3g_{n-1} \quad (n \geq 2)
\end{cases}$$

最后一个即：

$$\begin{aligned}
&-g_{n+1}(n+1) + 2g_n n + 3g_{n-1}(n-1) = g_n + 3g_{n-1} \quad (n \geq 2) \\
\Rightarrow &-g_{n+1}(n+1) + (2n-1)g_n + (3n-6)g_{n-1} = 0 \quad (n \geq 2) \\
\Rightarrow &g_n = \frac{(2n-3)g_{n-1} + (3n-9)g_{n-2}}{n} \quad (n \geq 3)
\end{aligned}$$

3.2.2 求 $F(x)$

因为：

$$\begin{aligned}
2x^2 F(x) &= 1-x-G(x) \\
\Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} 2f_{n-2}x^n &= (1-g_0) - (g_1+1)x - \sum_{n=2}^{\infty} g_n x^n
\end{aligned}$$

可以得出：

$$\begin{aligned}
2f_{n-2} &= -g_n \quad (n \geq 2) \\
\Rightarrow f_n &= -\frac{g_{n+2}}{2} \quad (n \geq 0)
\end{aligned}$$

3.3 Catalan numbers

已知 **Catalan numbers** 的形式幂级数为 $F(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$ ，求其线性递推式

设 $G(x) = \sqrt{1-4x}$

3.3.1 求 $G(x)$

$$\begin{aligned} G(x) &= \sqrt{1-4x} \\ \Rightarrow (1-4x)G'(x) &= \frac{1}{2}G(x)(-4) \\ \Rightarrow (4x-1) \sum_{n=0}^{\infty} g_{n+1}(n+1)x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} 2g_n x^n \\ \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} 4g_n n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} g_{n+1}(n+1)x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} 2g_n x^n \end{aligned}$$

可以得出：

$$\begin{cases} g_0 = G(0) = 1 \\ -g_{0+1}(0+1) = 2g_0 \Rightarrow g_1 = -2 \\ 4g_n n - g_{n+1}(n+1) = 2g_n \quad (n \geq 1) \end{cases}$$

最后一个即：

$$\begin{aligned} 4g_n n - g_{n+1}(n+1) &= 2g_n \quad (n \geq 1) \\ \Rightarrow g_{n+1} &= \frac{(4n-2)g_n}{n+1} \quad (n \geq 1) \\ \Rightarrow g_n &= \frac{(4n-6)g_{n-1}}{n} \quad (n \geq 2) \end{aligned}$$

3.3.2 求 $F(x)$

因为：

$$\begin{aligned} 2xF(x) &= 1 - G(x) \\ \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} 2f_{n-1}x^n &= 1 - \sum_{n=0}^{\infty} g_n x^n \end{aligned}$$

可以得出：

$$\begin{aligned} 2f_{n-1} &= -g_n \quad (n \geq 1) \\ \Rightarrow f_n &= -\frac{g_{n+1}}{2} \quad (n \geq 0) \end{aligned}$$

参考文献

[1] [生成函数及应用](#), ACdreamer

[2] [迷思：寻找母函数运算的组合意义（一）](#), EntropyInceaser