复杂网络动力学基础 #2

班级：计试 91
姓名：施劲松
学号：2193512032

10/23/2022

1 问题 1

1.1 问题描述

试求 ER 随机网络 $G_{N,p}$ 在 $N = 3000$，并在：

1. $c = 0.5, z = 1.0$
2. $c = 1.0, z = 1.0$
3. $c = 1.0, z = 1.5$
4. $c = 10, z = 1.0$

四种情况下的谱密度图，给出实验过程、结果及相关分析。

1.2 实验原理

随机网络是由一些节点通过随机连接而组成的一种复杂网络。其构成有两种等价方法：

1. ER 模型
2. 二项式模型

其中 ER 模型为给定 N 个节点，最多可存在 $N(N-1)/2$ 条边，从这些边中随机选择 M 条边就可以得到一个随机网络，它一共可以产生 $C^M_{N(N-1)/2}$ 种可能的随机网络，且产生每种随机网络的概率均相同。

随机网络中节点的度分布是遵循 Possion 分布的，有平均度满足：

$$< k >= p(N-1) \approx pN \quad (N \to \infty)$$

准确来说，对于某个节点 v_i，其度分布 K 满足二项分布，即：

$$K \sim B(N-1, p)$$

网络频谱是其邻接矩阵 A 的特征值的集合。一个有 N 个节点的网络必有 N 个特征值 λ_j，从而定义其谱密度为：

$$\rho(\lambda) = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\delta(\lambda - \lambda_j)$$

其中，

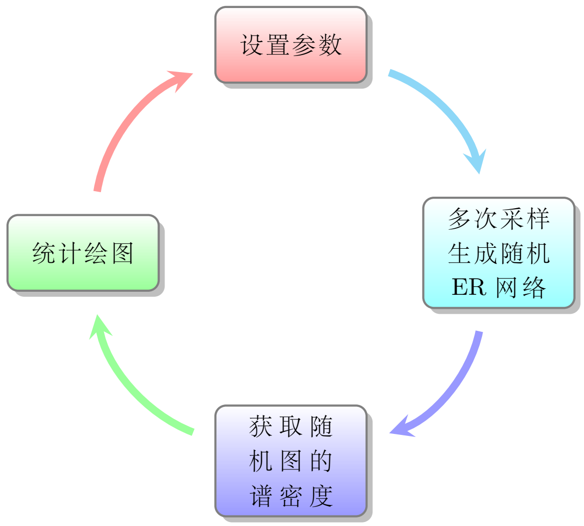
$$\delta(x) = \begin{cases} +\infty, x = 0 \\ 0, x \neq 0 \end{cases} \quad , \int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)\mathrm{d}x = 1$$

而对于连接概率为 $p(N) = cN^{-z}$ 的随机网络 $G_{N,p}$ 的特征谱，其平均度为 $< k >= Np = cN^{1-z}$。当 $0 \le z < 1$ 时，随机网络中将出现无限聚类体，且当 $N \to \infty$ 时，$< k > \to \infty$。此时，随机网络的频谱密度呈现半圆形分布，并有：

$$\rho(\lambda) = \begin{cases} \frac{\sqrt{4Np(1-p)-\lambda^2}}{2\pi Np(1-p)}, |\lambda| < 2\sqrt{Np(1-p)} \\ 0, otherwise \end{cases}$$

1.3 求解过程

利用 `python` 随机生成 ER 网络进行采样，而后获取邻接矩阵的特征值，计算谱密度。由于采用 Monte-Carlo 的随机采样，为了使不用的采样具有可加性，将谱密度绘成直方图，使得每个特征值都能落向唯一一个区间，方便统计绘图。循环采样，其流程图表示如下：



1.4 实验结果与分析

实验得到的结果图 1.4。可以看到：

- 当 $z > 1$ 时，谱密度图度偏离半圆形结构，这是由于当 $N \to \infty$ 时，$< k > \to 0$，此时 $\rho(\lambda)$ 的奇数阶矩 $\mathrm{M}_p = 0$，这意味着要回到原始节点的路径只能是沿着来时的相同节点返回，网络具有树状结构；
- 当 $z = 1, c \leq 1$ 时，图像仍不为半圆形，这是因为当 $N \to \infty$ 时，节点平均度 $< k > \approx c$，且 $c \leq 1$，那么网络基本也为树状结构；
- 当 $z < 1, c > 1$ 时，谱密度的奇数矩 $\mathrm{M}_p \gg 0$，网络结构则发生了显著变化，出现“环”与“分支”，几乎任何结点都属于无限聚类体，谱密度呈现半圆形分布。

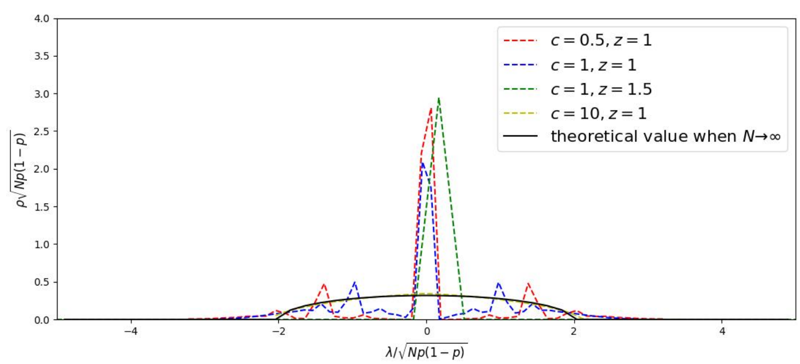


图 1.4.1: 问题 1： 谱密度图

本实验还绘出了 $z<1, c>1, N\to\infty$ 时的谱密度理论分布曲线（$\rho' = \frac{\sqrt{4-\lambda'^2}}{2\pi}(\rho' = \sqrt{Np(1-p)}\rho, \lambda' = \lambda/\sqrt{Np(1-p)})$，即图 1.4 中黑色曲线）可见其与 $z=1.5, c=10$ 图像（图 1.4 中黄色曲线）基本重合，验证了分析的正确性。

2 问题 2

2.1 问题描述

试绘制 WS 小世界网络的度分布 $P(k)$ 图。初始网络为规则网络，选取最近邻耦合网络，其中，节点总数 $N=1000$，耦合数 $K=6$，n 为未重连的边数，$\widetilde{n}$ 为重连的边数，随机化重连概率分别为 $p=0,0.1,0.2,0.4,0.6,0.9,1.0$。理论近似计算公式如下：

$$P(k) \approx \sum_{n=0}^{\min\{k-K/2,K/2\}} C_{K/2}^{n}(1-p)^{n}p^{K/2-n}\frac{(pK/2)^{k-K/2-n}}{(k-K/2-n)!}e^{-pK/2}$$

试分析度分布公式 $P(k)$, 它的未重连边数 n 的求和区间如果选取 $\max(k-K, \frac{K}{2})$，结果又如何？当 $k\geq K/2$ 时，k 最大值可为多少？请给出实验过程、结果及相关分析。要求每个节点的度值 $k \geq K/2$ 且保证节点的连通性不被破坏。

2.2 实验原理

小世界的概念，简单地说就是用来描述这样一个事实：尽管一些网络系统具有很大的尺寸，但其中任意两个节点之间却有一个相对较小的距离。小世界模型是介于规则网络和随机网络之间的网络。WS 小世界模型基于两个人（Watts 和 Strogatz）的假设，模型从一个完全的规则网络出发，以一定的概率将网络中的连接打乱重连。具体的构造方法如下：

1. 构造规则图。例如考虑一个含有 N 个节点的最近邻耦合网络，它们围成一个环，其中每个节点都与它左右两侧的各 $K/2$ 个节点相连，耦合数 K 是偶数；
2. 随机化重连。将上面规则图中的每条边以概率 p 随机地重新连接，即：将边的一个端点保持不变，而另一个端点以概 p 与网络的其余 $(N-K-1)$ 个节点随机连接。其中规定：任意两个不同的节点之间至多只能有一条边（无重边）。

最后得到的网络称为 WS 模型网络。

度分布公式如下：

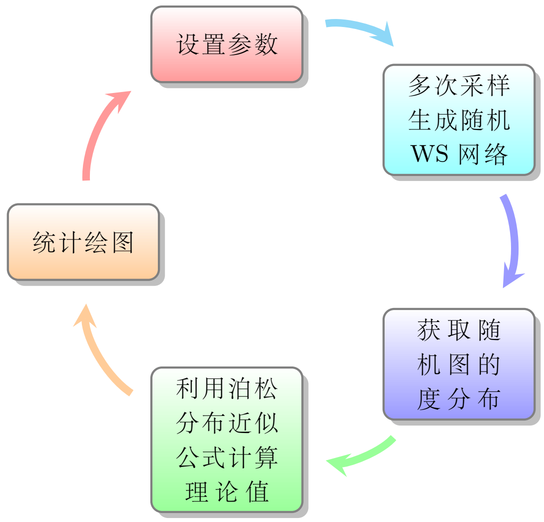
$$P(k) = \sum_{n=0}^{\min(k-K/2,K/2)} C_{K/2}^{n}\binom{k-K/2-n}{k/2}p^{k-2n}(1-p)^{K+2n-k} \tag{1}$$

注意到当 $N\to\infty$ 时，可以用泊松分布近似：

$$P(k) = \sum_{n=0}^{\min(k-K/2,K/2)} C_{K/2}^{n}(1-p)^{n}p^{K/2-n}\frac{(pK/2)^{k-K/2-n}}{(k-K/2-n)!}e^{-pK/2} \tag{2}$$

2.3 求解过程

本实验使用随机采样的方式完成，并用度分布公式进行验证。循环采样，流程图如下：



2.4 实验结果与分析

实验结果为图 2.4。与实验指导书给出的几乎相同。另外图中对应颜色的 △ 为利用公式计算的结果，可以发现与随机模拟得到的曲线几乎无异，这就验证了实验及公式的正确性。

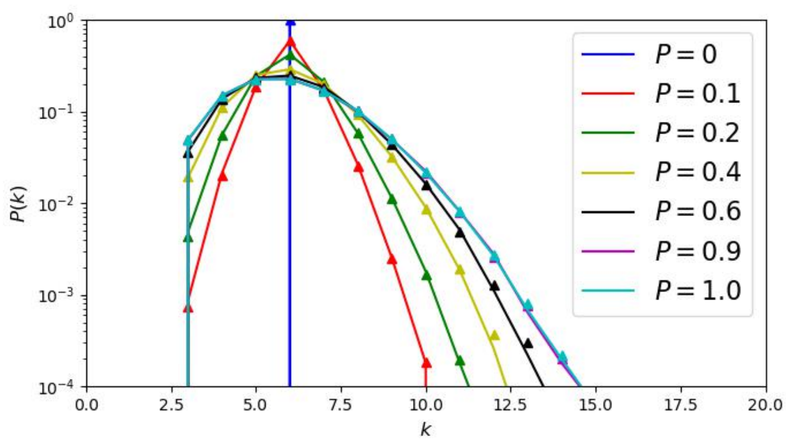


图 2.4.1: 问题 2：WS 模型度分布图

思考题：

1. 它的未重连边数 n 的求和区间如果选取 $\max(k-K,\frac{K}{2})$，结果又如何？在代码中调整参数绘制图 1，可见只有在 $k<K/2$ 时有变化，这是因为当 $k<K/2$ 时，$P(k)$ 计算时只有 $n=0$ 时有贡献，所以在 $k<K/2$ 有值。而注意到当 $n>K/2$ 时 $C_{K/2}^n=0$，所以当 $n>K/2$ 无贡献，同理在 $n>k-K/2$ 时亦无贡献，故：$n\leq\min\{k-K/2,K/2\}$，更改上界并无意义。

2. 当 $k\geq K/2$ 时，k 最大值可为多少？答：为 $N-1$，不过此发生的概率极小。

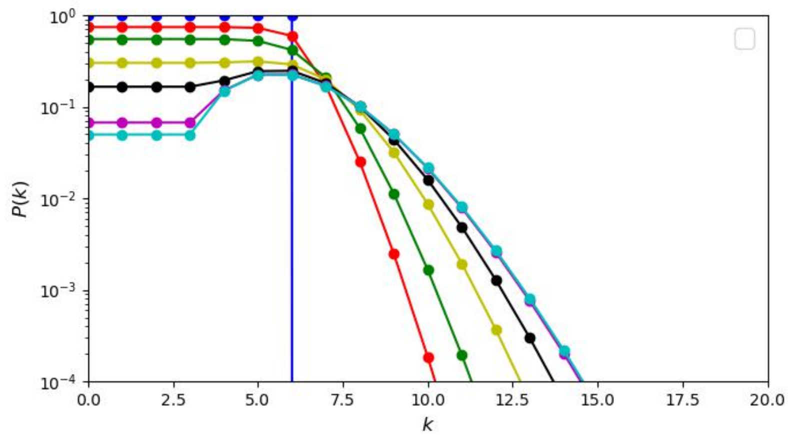


图 2.4.2: 思考题 1：调整上界重绘度分布

3 感想与建议

复杂网络动力学的学习是网络科学研究中极为重要的一个环节，通过课上课下的学习我对其认知已有一个初步的轮廓，通过本次实验，我更进一步地了解了一些复杂网络中的重要概念与标度，对介数、特征向量中心性以及 PageRank 的作用都有了更深的理解。对今后的学习提供了莫大的帮助。

另外我觉得实验的数据可以加强，实验指导书可以只放一两个简单例子供同学校验。验收可用些强数据，方便检验是否是真正实现了正确的算法，例如用一些随机的种子生成数据是十分方便有效的。

4 源码

问题 1 见：`./src/task_1.cpp`。

问题 2 见：`./src/task_2.py`。

5 运行

对于问题 1，请确保安装了 GNU GCC，而后在 `bash/zsh` 输入：

```
$ g++ task_1.cpp -o task_1
$ ./task_1
```

编译运行，实验数据在源码最下方。若是 Windows 用户，在 `cmd` 中输入：

```
> g++ task_1.cpp -o task_1
> .\task_1.exe
```

对于问题 2，请确保安装了 `python3` 以及依赖包 `numpy`（可使用 conda 或 pip 安装），conda 安装命令并运行方法：

```
$ conda create -n lab1 numpy
$ conda activate lab1
```

```
$ python3 task_2.py
```

另外，源码采用 utf-8 编码，若开启编辑器中文乱码，请切换至 utf-8 编码重新打开。