

## **CAPÍTULO III: MÉTODOS DE SIMULACIÓN**

### **3.1 Técnicas de simulación y evaluación de errores en simulación**

#### **3.1.1 Tipos de simulación**

La tarea de ejecutar simulaciones proporciona la penetración y una comprensión profunda de los procesos físicos que se están modelando. Un ejemplo simple de una simulación implica lanzar una bola en el aire. La bola se puede decir que “simula” un misil, por ejemplo. Es decir, experimentando con las bolas que se lanzan que comienzan en diversas alturas iniciales y los vectores iniciales de la velocidad, puede ser dicho que se está simulando la trayectoria de un misil. Esta clase de simulación se conoce como simulación análoga puesto que implica un modelo físico de una bola. *Una simulación* de computadora, por otra parte, es una simulación donde un programa es el modelo de simulación. Se construye una simulación computarizada del misil construyendo un programa que sirva para modelar las ecuaciones del movimiento para los objetos en vuelo. Si se mira al sistema físico que está bajo estudio como exacto, entonces se pueden crear aproximaciones de ese modelo como si se tuvieran diversos niveles de abstracción.

El modelo físico es el sistema bajo estudio. Es decir, se intenta estudiar un misil en vuelo creando una simulación de ella. Una forma de simular este sistema es crear una versión más pequeña del sistema. Una bala es realmente un misil miniatura - por lo tanto, se pueden estudiar los misiles en vuelo disparando balas en lugar de otro misil. Las balas son, después de todo, mucho más baratas que los misiles cuando viene la experimentación. Se puede entonces contestar a preguntas sobre la simulación del misil por después de este procedimiento general:

- Obtenga la pregunta que se contestará o el problema que se solucionará en un dominio dado - tal como la teoría de comunicaciones. Por ejemplo, se puede preguntar que tan eficiente resulta un sistema al enfrentar un crecimiento inesperado de abonados
- Traduzca la pregunta y el problema al modelo de la simulación. Entonces se traduce el problema antedicho a un modelo de la escala pequeña usando un modelo del sistema. Esto implica correctamente la reducción de todos los aspectos del problema. Esto no es trivial, y muchos fenómenos físicos no son invariantes a la operación del escalamiento.
- Encienda o ejecute el modelo del sistema.

- Mida la eficiencia del sistema ante las condiciones presentadas.
- Escale la respuesta de nuevo al dominio del sistema original.
- Proporcione la respuesta a la pregunta original.

Estos seis pasos reflejan el método general de simulación con relación a problemas *de la predicción*. El modelo análogo toma algunas libertades con respecto a modelar el sistema físico. La invariación de la escala es una de tales libertades. Se puede ver ya la necesidad de escoger un modelo que proporcione todos los servicios y propiedades para validar *correctamente* el comportamiento verdadero del sistema.

Las primeras computadoras electrónicas eran *análogas* en comparación con *digital*. El uso primario de una computadora análoga es simular un sistema físico que se pueda modelar como un sistema de ecuaciones diferenciales. Los dispositivos electrónicos tales como amplificadores operacionales cuando están utilizados conjuntamente con los resistores y los condensadores funcionan como los integradores y los diferenciadores. Esto significa que uno puede simular un sistema de ecuaciones creando un programa de simulación en una computadora análoga. El tipo más abstracto de modelo de la simulación es el modelo digital, en el cual un programa de computadora permite que se ejecute el modelo. Nuestro interés está en modelos digitales puesto que son los más flexibles y pueden ser programados fácilmente.

La simulación es una metodología aplicada en que se describe el comportamiento de sistemas complejos usando modelos matemáticos o simbólicos. Nuestro modelo sirve como una hipótesis para mostrar cómo un sistema realmente se comporta bajo ciertas condiciones de tiempo o funcionamiento. Se puede también simular sistemas no verdaderos variando algunos parámetros, condiciones iniciales y asunciones sobre nuestro modelo.

### 3.1.2 Tipos de modelos de simulación

Los modelos de simulación se pueden clasificar atendiendo a diferentes criterios:

1. Según el instante temporal que representa:

- *Estáticos*: representan a un sistema en un instante determinado.
- *Dinámicos*: representan a un sistema evolucionando en el tiempo.

2. Según la aleatoriedad de sus variables de estado:

- *Deterministas*: la representación del sistema no contiene ninguna variable aleatoria.

- *Estocásticos o aleatorios*: la representación del sistema contiene al menos una variable de estado no determinista.

3. Según el modo en que evolucionan sus variables de estado:

- *Discretos o de eventos discretos*: si las variables de estado del modelo varían dentro de un conjunto contable de instantes de tiempo.
- *Continuos*: si las variables de estado varían en un tiempo continuo.

### **3.2 Simulación de Montecarlo**

#### **3.2.1 Introducción a los métodos de Monte Carlo**

Los métodos numéricos conocidos como métodos de Monte Carlo son métodos estadísticos de la simulación que utiliza secuencias de números aleatorios para realizar la modelación de los sistemas que están siendo analizados. Los métodos de Monte Carlo se han utilizado por siglos, pero solamente en las últimas décadas pasadas la técnica ha ganado el estatus de un método numérico capaz de tratar las aplicaciones más complejas.

Los métodos estadísticos de la simulación se pueden poner en contraste con los métodos numéricos convencionales de discretización, que se aplican típicamente a las ecuaciones diferenciales ordinarias o parciales que describen un cierto sistema físico o matemático. En muchas aplicaciones de Monte Carlo, el proceso físico se simula directamente, y no hay necesidad de encontrar las ecuaciones diferenciales que describen el comportamiento del sistema. El único requisito es que el sistema físico (o matemático) sea descrito por las funciones de densidad de probabilidad (pdf), que serán discutidas más detalladamente adelante en este capítulo. Por ahora, se asume que el comportamiento de un sistema se puede describir por los pdf. Una vez que se conocen los pdf, la simulación de Monte Carlo puede proceder a realizar un muestreo aleatorio del mismo, entonces, se realizan ensayos múltiples de la simulación y se toma el resultado deseado de un promedio sobre el número de las observaciones. En muchas aplicaciones prácticas, uno puede predecir el error estadístico (la varianza) en este resultado medio, y por lo tanto, encontrar una estimación del número de los ensayos de la simulación de Monte Carlo que son necesarios alcanzar un error dado.

Se requiere de una manera rápida y eficaz de generar los números aleatorios para realizar la simulación, éstos números deben estar distribuidos uniformemente en el intervalo  $[0,1]$ . Los resultados de estas muestras aleatorias, o los ensayos, se deben acumular o registrar de una manera apropiada para producir el resultado deseado, pero la característica esencial de Monte Carlo es el uso de las técnicas de muestreo aleatorio

para llegar a una solución del problema físico. En contraste, un acercamiento numérico convencional de la solución comenzaría con el modelo matemático del sistema físico, individualizando las ecuaciones diferenciales y después solucionando un conjunto de las ecuaciones algebraicas para el estado desconocido del sistema.

Se debe tener presente sin embargo que esta descripción general de los métodos de Monte Carlo puede no funcionar directamente en algunas aplicaciones. Los métodos de Monte Carlo están utilizados para simular procesos aleatorios o estocásticos, puesto que éstos se pueden describir fácilmente por los pdf. Sin embargo, muchas aplicaciones de Monte Carlo no tienen ningún contenido estocástico evidente, pero, en estos, uno puede plantear una solución en términos de los pdf realizando una discretización o aleatorización del sistema, aunque esta transformación puede parecerse artificial, este paso de progresión permite que el sistema sea tratado como un proceso estocástico con el fin de realizar la simulación y por lo tanto poder emplear los métodos de Monte Carlo para simular el sistema.

### 3.2.2 Componentes importantes de un algoritmo de Monte Carlo

Una vez que se conocen los conceptos básicos que abarca la simulación de Monte Carlo, se describen brevemente los componentes principales de un método de Monte Carlo. Una comprensión de estos componentes proporcionará un fundamento para que se construya una aplicación propia de simulación basado en los métodos de Monte Carlo. Los componentes primarios de un método de la simulación de Monte Carlo son los siguientes:

- ***Las funciones de distribución de la probabilidad (pdf)*** - el sistema físico ( o matemático) se debe describir por un conjunto de los pdf
- ***Generador del número aleatorio*** - una fuente de los números aleatorios distribuidos uniformemente en el intervalo de la unidad debe estar disponible.
- ***Regla del muestreo*** - una prescripción para hacer un muestreo de los pdf especificados, si se asume que la disponibilidad de números aleatorios en el intervalo de unidad, debe ser dada.
- ***Anotar (o registrar)*** - los resultados, se debe acumular en cuentas las cantidades de interés.
- ***Valoración del error*** - una estimación del error estadístico (varianza) en función del número de ensayos y de otras cantidades debe ser determinada.

- **Técnicas de la reducción de la varianza** - métodos para reducir la varianza en la solución estimada para reducir el tiempo de cómputo para la simulación de Monte Carlo
- **Paralelización y vectorización** - algoritmos para permitir que los métodos de Monte Carlo sean puestos en ejecución eficientemente en configuraciones avanzadas del ordenador.

### 3.3 Revisión de probabilidades

Para tener una visión completa de los métodos de Monte Carlo y su utilización, se va a realizar un breve estudio de probabilidades debido a que todo el proceso de simulación se basa en el muestreo aleatorio de las funciones de densidad probabilísticas, por lo tanto, se verá cómo realizar este muestreo y las técnicas necesarias para lograr encontrar los resultados deseados.

#### 3.3.1 Espacios de muestra, resultados, y acontecimientos

Se refiere al proceso físico o matemático del sistema que va a ser analizado por medio de la simulación como experimento, el cual tiene un número (posiblemente infinito) dado de resultados, a los cuales se asignarán probabilidades de ocurrencia. El espacio de muestra  $\mathcal{S}$  del experimento es la colección de todos los resultados posibles  $\mathcal{S}$ . Así, si se realiza el experimento, su resultado se asegura que estará en el espacio de muestra  $\mathcal{S}$ . También se describe una realización del experimento como ensayo, y por la definición dada, un ensayo tendrá un resultado  $s$  en el espacio de muestra  $\mathcal{S}$ . El experimento puede dar lugar a la ocurrencia de un acontecimiento *específico*  $E_k$ . Un acontecimiento se puede ver como consecuencia del resultado (o de los resultados) del experimento.

A un acontecimiento  $E_k$  se asigna una probabilidad  $P_k$  que también se denota  $P(E_k)$ , o la probabilidad del acontecimiento  $E_k$ . La cantidad  $P_k$  debe satisfacer las características dadas a continuación para ser una probabilidad verdadera.

- $0 \leq P_k \leq 1$
- Si  $E_k$  es seguro que ocurra,  $P_k = 1$ .
- Si  $E_k$  es seguro que no ocurra,  $P_k = 0$ .
- Si eventos  $E_i$  y  $E_j$  son mutuamente exclusivos, entonces:

$$P(E_i \text{ y } E_j) = 0$$

$$P(E_i \text{ o } E_j) = P_i + P_j$$

- Si eventos  $E_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , son mutuamente exclusivos y exhaustivos (Uno de los  $N$  eventos es seguro que ocurra), entonces la sumatoria de todas las probabilidades de los eventos será igual a 1.

### 3.3.2 Probabilidades condicionales, comunes y marginales

Ahora se considera un experimento que consista en dos partes en la cual, cada parte conduce a la ocurrencia de acontecimientos específicos. Se definen los acontecimientos que se presentan de la primera parte del experimento como  $F_i$  y con probabilidad  $f_i$  y los acontecimientos de la segunda parte como  $G_j$  con probabilidad  $g_j$ . La combinación de los acontecimientos  $F_i$  y  $G_j$  se puede denominar como un acontecimiento compuesto, denotado por el par ordenado  $E_{ij} = (F_i, G_j)$ . La probabilidad común  $p_{ij}$  se define como la probabilidad que la primera parte del experimento conduzca al acontecimiento  $F_i$  y la segunda parte del experimento conduzca al acontecimiento  $G_j$ . Así, la probabilidad común  $p_{ij}$  es la probabilidad de que ocurra el acontecimiento  $E_{ij}$  compuesto (es decir, la probabilidad que ambos acontecimientos  $F_i$  y  $G_j$  ocurran).

Cualquier probabilidad común se puede descomponer en factores que son el producto de una probabilidad marginal y de una probabilidad condicional:

$$p_{ij} = p(i) p(j|i) \quad (1)$$

donde  $p_{ij}$  es la probabilidad común,  $p(i)$  es la probabilidad marginal (la probabilidad de que el acontecimiento  $F_i$  ocurra, sin importar lo que ocurra con el acontecimiento  $G_j$ ), y  $p(j|i)$  es la probabilidad condicional. Observe que la probabilidad marginal para que ocurra el acontecimiento  $F_i$  es simplemente la probabilidad que ocurra el acontecimiento  $F_i$ , o  $p(i) = f_i$ . Ahora se asume que hay  $J$  acontecimientos mutuamente exclusivos  $G_j$ ,  $j = 1, \dots, J$  por lo tanto, la identidad siguiente es evidente:

$$p(i) = \sum_{k=1}^J p_{ik} \quad (2)$$

Usando la ecuación (2), se manipula fácilmente la ecuación (1) para obtener la expresión siguiente para la probabilidad común

$$p_{ij} = p_{ij} \left( \frac{\sum_{k=1}^J p_{ik}}{J} \right) = p(i) \left( \frac{p_{ij}}{\sum_{k=1}^J p_{ik}} \right) \quad (3)$$

Usando la ecuación (1), la ecuación (3) conduce a la expresión siguiente para la probabilidad condicional:

$$p(j|i) = \frac{p_{ij}}{\sum_{k=1}^J p_{ik}} \quad (4)$$

Es importante observar que la probabilidad común  $p_{ij}$ , la probabilidad marginal  $p(i)$  y la probabilidad condicional  $p(j|i)$  son todas probabilidades legítimas, por lo tanto satisfacen las características dadas para que sean reales.

Si los acontecimientos  $F_i$  y  $G_j$  son independientes, entonces la probabilidad de una que uno ocurra no afecta la probabilidad de que otro ocurra, por lo tanto:

$$p_{ij} = f_i g_j \quad (5)$$

Usando la ecuación (4), la ecuación (5) conduce inmediatamente a

$$p(j|i) = g_j \quad (6)$$

para los acontecimientos independientes  $F_i$  y  $G_j$ . Esta última ecuación refleja el hecho de que la probabilidad de que ocurra el acontecimiento  $G_j$  es independiente de si ha ocurrido el acontecimiento  $F_i$ .

### 3.3.3 Variables Aleatorias

Las variables aleatorias son unas herramientas importantísimas en el análisis de sistemas por medio de técnicas de simulación, debido a que permiten la cuantificación de procesos aleatorios, y facilitan manipulaciones numéricas, tales como la definición de la desviación esperada y estándar.

Se defina una variable aleatoria como un número verdadero  $x_i$  que se asigne a un acontecimiento  $F_i$ , así, uno puede esencialmente decir que la variable aleatoria  $x_i$  ocurre con probabilidad  $p_i$ .

#### 3.3.3.1 Valor de la expectativa, varianza y funciones de variables aleatorias

Ahora que se ha asignado un número al resultado de un acontecimiento, se puede definir un valor promedio para la variable aleatoria sobre los acontecimientos posibles. Este valor medio se llama el valor de la expectativa para la variable aleatoria  $x$  y tiene la definición siguiente:

$$\text{Valor de la expectativa o valor esperado} = E(x) = \bar{x} = \sum_i p_i x_i \quad (7)$$

Uno puede definir una función de una variable aleatoria que también será una variable aleatoria. Es decir, dada la variable aleatoria  $x$  entonces la función  $g(x)$  es también una variable aleatoria, y se puede definir el valor de la expectativa de  $g(x)$  como:

$$E[g(x)] = \bar{g} = \sum_i p_i g(x_i) \quad (8)$$

El valor de la expectativa de una combinación lineal de variables aleatorias es simplemente la combinación lineal de sus valores respectivos de expectativas;

$$E[ag(x) + bh(x)] = aE[g(x)] + bE[h(x)] \quad (9)$$

El valor de la expectativa es simplemente el primer momento de la variable aleatoria, significando que uno está encontrando el promedio de la variable aleatoria misma. Así el valor esperado es el valor medio del primer momento de la variable aleatoria. Los momentos superiores de las variables aleatorias tienen un significado valioso para el análisis de procesos aleatorios, el promedio del cuadrado de la variable aleatoria conduce a una cantidad importante conocida como varianza. Se puede definir los momentos más altos de la variable aleatoria  $x$  como sigue:

$$E(x^n) = \overline{x^n} \quad (10)$$

También se definen los momentos centrales que expresan la variación de la variable aleatoria sobre su medio.

$$n^{\text{ésimo}} \text{ momento central} = \overline{(x - \bar{x})^n} \quad (11)$$

El primer momento central es cero. El segundo momento central es la varianza:

$$\text{Varianza} = \text{var}(x) \equiv \sigma^2(x) = \overline{(x - \bar{x})^2} = \sum_i p_i (x_i - \bar{x})^2 \quad (12)$$

Se muestra directamente la identidad importante siguiente:

$$\sigma^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2 \quad (13)$$

También se encuentra útil la raíz cuadrada de la varianza, que es la desviación estándar, y se representa matemáticamente como sigue:

$$\text{Desviación estándar} = \sigma(x) = [\text{var}(x)]^{1/2} \quad (14)$$

### 3.3.3.2 Varianza de una combinación lineal

El medio de una combinación lineal de variables aleatorias es la combinación lineal de los medios, según lo mostrado en la ecuación (9).



$$\sigma^2(ag + bh) = a^2\sigma^2(g) + b^2\sigma^2(h) + 2ab[\overline{gh} - \bar{g}\bar{h}] \quad (15)$$

Se considera el valor medio del producto de dos variables aleatorias:

$$E(xy) = \sum_{i,j} p_{ij} x_i y_j \quad (16)$$

Ahora si  $x$  y  $y$  son variables aleatorias independientes, entonces

$$p_{ij} = p_i q_j, \quad (17)$$

donde  $q_j$  es la probabilidad de que la variable aleatoria  $y_j$  ocurra. Pero si la ecuación (17) se inserta en la ecuación (16), se encuentra:

$$\begin{aligned} E(xy) &= \sum_{i,j} p_{ij} x_i y_j = \sum_{i,j} p_i q_j x_i y_j \\ &= \sum_i p_i x_i \sum_j q_j y_j = E(x)E(y) \end{aligned} \quad (18)$$

Así, si dos variables aleatorias son independientes, el valor de la expectativa de su producto es el producto de sus valores de expectativa. Ahora considere el caso de la variación de una combinación lineal de variables aleatorias dada en la ecuación (15), observe que si las variables aleatorias  $g$  y  $h$  son independientes, la ecuación (18) cuando está insertada en la ecuación (15) rinde la expresión siguiente:

$$\sigma^2[ag(x) + bh(x)] = a^2\sigma^2(g) + b^2\sigma^2(h) \quad (19)$$

### 3.3.3.3 Coeficiente de covarianza y de correlación

La cancelación del último término de la ecuación (15) para variables aleatorias independientes motiva el concepto de la covarianza.

$$\text{Covarianza} = \text{COV}(x, y) = \overline{xy} - \bar{x}\bar{y} \quad (20)$$

Si  $x$  y  $y$  son independientes, entonces  $\text{COV}(x, y) = 0$ . Sin embargo, es posible tener  $\text{COV}(x, y) = 0$  incluso si  $x$  y  $y$  no son independientes. Debe ser observado que la covariación puede ser negativa. Una cantidad relacionada que se presenta a menudo en análisis estadístico es el coeficiente de correlación, que es una medida conveniente del grado al cual se correlacionan dos variables aleatorias, y se define como sigue:

$$\text{Coeficiente de correlación} = \rho(x, y) = \text{COV}(x, y) / [\sigma^2(x)\sigma^2(y)]^{1/2} \quad (21)$$

Se muestra fácilmente que  $-1 \leq \rho(x, y) \leq 1$

### 3.3.3.4 Variables Aleatoria Continuas

Se ha considerado hasta ahora solamente variables aleatorias discretas, es decir, un número específico  $x_i$  se asigna al acontecimiento  $E_i$  pero, ¿qué si los acontecimientos no se pueden enumerar por números enteros. Las definiciones antedichas para variables aleatorias discretas se pueden generalizar fácilmente al caso continuo. Primero, si hay un rango continuo de valores, tales como un ángulo entre 0 y  $2\pi$  entonces la probabilidad de conseguir exactamente un ángulo específico es cero, porque hay un número infinito de los ángulos a elegir, y sería imposible elegir exactamente el ángulo correcto. Sin embargo, se puede hablar de la probabilidad de una variable aleatoria que adquiere un valor dentro de un intervalo dado. Para hacer esto, se define una función de densidad de probabilidad, o el pdf.

#### 3.3.4 Función de densidad de probabilidad (pdf)

El significado del pdf  $f(x)$  es que  $f(x) dx$  es la probabilidad de que la variable aleatoria esté en el intervalo  $(x, x + dx)$  escrito como:

$$\text{prob}(x < x' < x + dx) \equiv P(x < x' < x + dx) = f(x) dx \quad (22)$$

Ésta es una definición operacional de  $f(x)$ , puesto que  $f(x) dx$  no tiene unidades (es una probabilidad), entonces  $f(x)$  tiene unidades de las variables aleatorias inversas, dependiendo de las unidades de  $x$ . La figura 3.1 muestra un pdf típico  $f(x)$  e ilustra la interpretación de la probabilidad de encontrar la variable aleatoria dentro de  $(x, x + dx)$  con el área bajo la curva  $f(x)$  de  $x$  a  $x + dx$ .

Se puede también determinar la probabilidad de encontrar la variable aleatoria en alguna parte en el intervalo finito  $[a, b]$

$$\text{prob}(a \leq x \leq b) \equiv P(a \leq x \leq b) = \int_a^b f(x') dx' \quad (23)$$

cuál, por supuesto, está bajo el área de la curva  $f(x)$   $x = a$  a  $x = b$

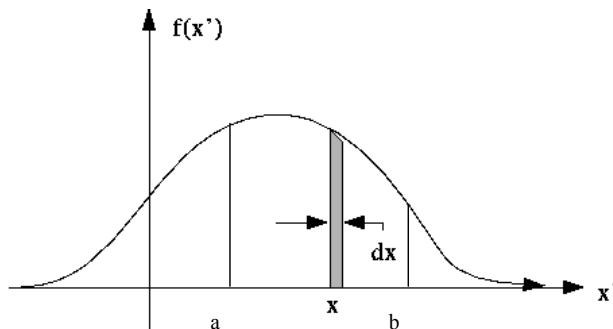


Figura 3.1, Típica función de distribución de probabilidad

Ya que  $f(x)$  es una densidad de probabilidad, debe ser positiva para todos los valores de la variable aleatoria  $x$ . Además, la probabilidad de encontrar la variable aleatoria en alguna parte en el eje verdadero debe ser la unidad. Pues, como resulta, estas dos condiciones son las únicas condiciones necesarias para que  $f(x)$  sea un pdf legítimo, y se resumen abajo.

$$f(x) \geq 0, \quad -\infty < x < \infty \quad (24)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x') dx' = 1 \quad (25)$$

Observe que estas restricciones no son muy rigurosas, y en hecho permiten que uno aplique los métodos de Monte Carlo para solucionar los problemas que no tienen ninguna aleatoriedad evidente. Planteando una aplicación determinada en términos de las funciones que obedecen estas condiciones relativamente suaves, uno puede tratarlas mientras que los pdf quizás emplean las técnicas de gran alcance de la simulación de Monte Carlo para solucionar la aplicación original. Ahora se define una cantidad importante, relacionada con el pdf, que se conoce como la función de distribución acumulativa, o el cdf.

#### 3.3.4.1 Función de distribución acumulativa (cdf)

Para que se pueda asegurar que ocurra un evento dentro del intervalo que se está imponiendo, se debe hacer que el valor de la variable aleatoria  $x'$  sea mayor que el valor de  $x$ , que es el instante en el que se produce un evento, por lo tanto, si se descarta el intervalo o los valores de la variable aleatoria en la que no se producen acontecimientos, Se puede definir un cdf como la función de distribución acumulativa de la probabilidad que la variable aleatoria  $x'$  sea menor que o igual a  $x$

$$\begin{aligned} \text{CDF} &\equiv \text{prob}(x' \leq x) \equiv F(x) \\ &= \int_{-\infty}^x f(x') dx' \end{aligned} \quad (26)$$

Observe que puesto que  $f(x) \geq 0$  y el integral de  $f(x)$  se normaliza a la unidad,  $F(x)$  obedece las condiciones siguientes:

$F(x)$  es el aumento monótono

$$F(-\infty) = 0$$

$$F(+\infty) = 1$$

La figura 3.2 ilustra un cdf representativo. Observe la dependencia de  $F(x)$  cuando  $x \rightarrow \pm\infty$ . Ya que  $F(x)$  es la integral indefinida de  $f(x)$ ,  $f(x) = F'(x)$ . El cdf se puede también definir para un pdf discreto; sin embargo, esto no se verá hasta que se discuta el tema del muestreo de una distribución discreta.

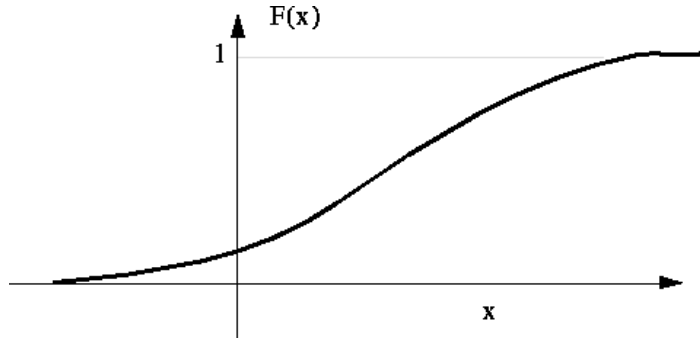


Figura 3.2 Función representativa de distribución acumulativa

### 3.3.4.2 Valor y variación de la expectativa para los pdf continuos

Se puede definir el valor medio de la expectativa y variación para un pdf continuo, constante con nuestras definiciones anteriores para un pdf discreto:

$$E(x) \equiv \mu \equiv \bar{x} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x') x' dx' \quad (27)$$

$$\text{var}(x) \equiv \sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x') (x' - \mu)^2 dx' \quad (28)$$

De manera semejante, si se define una función  $g(x)$  de valor real  $x$  de la variable aleatoria, se obtienen fácilmente las expresiones siguientes para la media y la variación  $g$  de un pdf continuo:

$$E(g) \equiv \bar{g} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x') g(x') dx' \quad (29)$$

$$\text{var}(g) \equiv \sigma^2(g) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x') [g(x') - \bar{g}]^2 dx' \quad (30)$$

Es importante tener presente que las cantidades  $\bar{x}$  y  $\bar{g}$  son medios verdaderos, las características del pdf  $f(x)$  y la función  $g(x)$ .

### 3.3.4.3 Ejemplos de los pdf continuos

#### Distribución Exponencial

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0, \quad \lambda > 0 \quad (31)$$

Esta distribución puede describir un número de fenómenos físicos. La distribución exponencial es caracterizada por el solo parámetro  $\lambda$  y uno puede mostrar fácilmente que el medio y la variación para la distribución exponencial están dados cerca:

$$\mu = \frac{1}{\lambda} \quad (32)$$

$$\sigma^2 = \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 \quad (33)$$

La figura 3.3 ilustra la distribución exponencial. Observe que es la desviación estándar de la distribución exponencial

$$\sigma = \frac{1}{\lambda} \quad (34)$$

Se aprenderá más adelante que se puede asociar la desviación estándar a una clase de desviación prevista del medio, significando eso para la distribución exponencial, se esperaría que la mayoría de las muestras  $x$  cayeran dentro  $1/\lambda$  de  $\mu$  aunque el rango real de muestras  $x$  es infinito. Uno puede ver esto computando la probabilidad que una muestra de la distribución exponencial cae dentro  $\sigma/2$  del medio  $\mu$ :

$$\text{prob} \left( \mu - \frac{\sigma}{2} \leq x \leq \mu + \frac{\sigma}{2} \right) = \int_{\frac{1}{2\lambda}}^{\frac{3}{2\lambda}} \lambda e^{-\lambda x} dx = 0.83 \quad (35)$$

Por lo tanto el 83% de las muestras de la distribución exponencial se pueden esperar que caigan dentro de una mitad de una desviación de estándar del medio, aunque algunas de las muestras estarán lejos del medio, ya que  $0 \leq x < \infty$

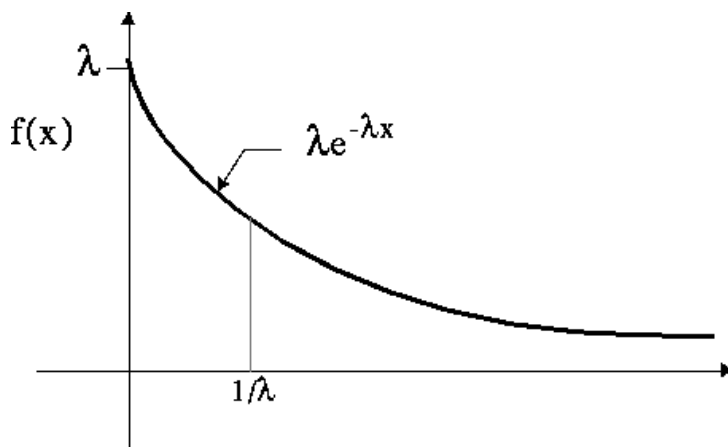


Figura 3.3 Pdf exponencial

**Distribución (Normal) Gaussiana:**

El segundo ejemplo es quizás el pdf más importante de la probabilidad y de la estadística: la distribución *gaussiana* o *normal*.

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi\sigma)^{1/2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x < \infty \quad (36)$$

Esto es una distribución de dos parámetros ( $\sigma$  y  $\mu$ ), y puede ser mostrado que  $\mu$  es el medio de la distribución y  $\sigma^2$  es la variación. La figura 3.4 ilustra el pdf gaussiano

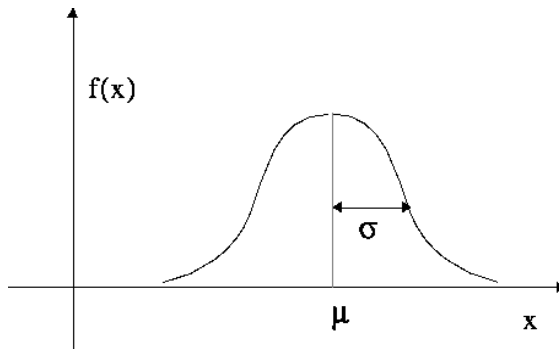


Figura 3.4 Distribución de probabilidad Gaussiana (Normal)

Se procede a calcular la probabilidad de que una muestra de la distribución Gaussiana caerá dentro de una sola desviación de estándar  $\sigma$  del medio  $\mu$

$$P(\mu - \sigma \leq x \leq \mu + \sigma) = .6826 \quad (37)$$

Semejantemente, la probabilidad que la muestra está dentro de dos desviaciones de estándar (dentro de “ $2\sigma$ ”) del medio es

$$P(\mu - 2\sigma \leq x \leq \mu + 2\sigma) = .9544 \quad (38)$$

Por lo tanto el 68% de las muestras, en promedio, caerán dentro de una  $\sigma$  y sobre el 95% de las muestras caerán dentro de dos  $\sigma$  del medio  $\mu$

La distribución Gaussiana será encontrada con frecuencia en este curso, no sólo porque es un pdf fundamental para muchas aplicaciones físicas y matemáticas, sino que también porque desempeña un papel central en la valoración de errores con la simulación de Monte Carlo.

**Distribución De Cauchy**

$$f(x) = \frac{a}{a^2 + x^2}, \quad -\infty < x < \infty \quad (39)$$

Esta distribución es una pdf interesante, porque en sentido estricto, no existe su medio y su variación es infinita. Dada nuestra definición del medio,

$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{a}{a^2 + x^2} dx \quad (40)$$

se encuentra que esta integral no existe porque los integrales separados para  $x > 0$  y  $x < 0$  no existen. Sin embargo, si se permite una integración del valor principal, donde los límites se toman simultáneamente, se ve que la integral para  $x < 0$  cancela la integral para  $x > 0$  y el medio es cero, de acuerdo con una interpretación gráfica de este pdf, según lo representado en la figura 3.5. Sin embargo, si se intenta computar la variación, se encuentra:

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 \frac{a}{a^2 + x^2} dx \quad (41)$$

el cual es un integral ilimitado. Así, si se muestrea de la distribución de Cauchy y se procura predecir el fragmento al cual las muestras caerán cerca al medio, se falla. Observe que la distribución de Cauchy es un pdf legítimo, porque satisface las características de un pdf dado en la ecuación (24) y en la ecuación (25), a saber,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a}{a^2 + x^2} dx = 1 \quad (42)$$

$$f(x) = \frac{a}{a^2 + x^2} \geq 0, \quad \text{all } x \quad (43)$$

pero su variación es infinita y su medio hace necesario una definición más general de la integración.

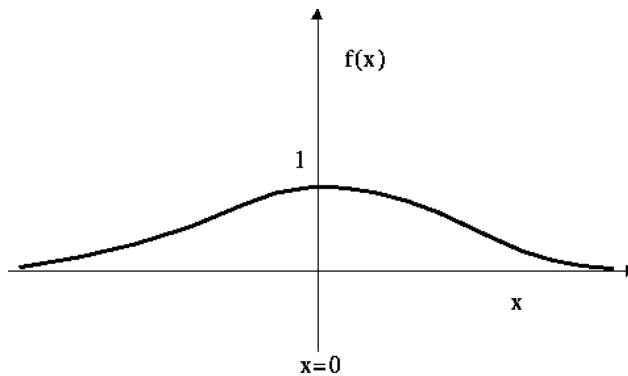


Figura 3.5 Función de distribución de probabilidad de Cauchy

Éstos han sido ejemplos de un pdf de una sola variable aleatoria, o pdf univariable. Ahora se consideran los pdf bivariantes, que generalizan fácilmente a los pdf multivariantes. Las distribuciones bivariantes son necesarias para un número de asuntos importantes en Monte Carlo, incluyendo el muestreo de los pdf multidimensionales y del análisis del muestreo del rechazo.

### 3.3.5 Muestreo de funciones de distribución de probabilidad

Según lo descrito anteriormente, una simulación de Monte Carlo consiste en algún sistema físico o matemático que se pueda describir en términos de las funciones de distribución de probabilidad, o pdf. Estos pdf, suplidos quizás por cómputos adicionales, describen la evolución del sistema total. La meta del método de Monte Carlo es simular el sistema físico por el muestreo aleatorio de estos pdf y realizar los cómputos suplementarios necesarios para describir la evolución del sistema tratado. Esencialmente, la física y las matemáticas son substituidas por el muestreo aleatorio de los estados posibles del pdf que describen el sistema. Ahora se presta atención a cómo se obtiene realmente muestras aleatorias de los pdf arbitrarios.

En esta sección se considerará el muestreo de los pdf continuos y discretos. La tabla 1 resume las características importantes de ambos tipos de pdf.

Propiedad	Continua $f(x)$	Discreta $\{p_i\}$
Positividad	$f(x) \geq 0, \text{ toda } x$	$p_i > 0, \text{ toda } i$
Normalización	$\int_{-\infty}^{\infty} f(x') dx' = 1$	$\sum_{j=1}^N p_j = 1$
Interpretación	$f(x)dx$ $\text{prob}(x \leq x' \leq x + dx)$	$p_i = \text{prob}(i) = \text{prob}(x_j = x_i)$
Media	$\bar{x} = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$	$\bar{x} = \sum_{j=1}^N x_j p_j$
Varianza	$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{x})^2 f(x)dx$	$\sigma^2 = \sum_{j=1}^N (x_j - \bar{x})^2 p_j$

Tabla 1 Características más importantes de los pdf discretos y continuos

Ahora se discute cómo obtener una muestra escogida aleatoria  $x$  de un pdf continuo

#### 3.3.5.1 Pdf continuos equivalentes

Es conveniente expresar un pdf discreto como un pdf continuo usando las funciones delta. Esto hará la discusión que sobreviene más fácil seguir y simplifica muchas de las manipulaciones para los pdf discretos. Dado un pdf discreto  $\{p_i\}$  se asocia el acontecimiento  $i$  a la variable aleatoria discreta  $x_i$  y entonces se define a un pdf continuo equivalente como sigue:

$$f(x) = \sum_{i=1}^N p_i \delta(x - x_i) \quad (44)$$



Aquí  $\delta(x - x_i)$  es la función delta y satisface las características siguientes:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_i) dx = 1 \quad (45)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x - x_i) dx = f(x_i) \quad (46)$$

Usando estas características, se muestra directamente que el medio y la variación del pdf continuo equivalente, según lo definido en la ecuación (44), son idénticos al medio y la variación del pdf discreto original. Se comienza con la definición del medio del pdf continuo equivalente:

$$\bar{x} = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x \left[ \sum_{i=1}^N p_i \delta(x - x_i) \right] dx \quad (47)$$

Ahora se toma la sumatoria fuera del integral y se utiliza la ecuación (46),

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} x p_i \delta(x - x_i) dx = \sum_{i=1}^N x_i p_i \quad (48)$$

que es el medio verdadero para el pdf discreto.

Mucho del material que sigue, se mantiene para los pdf discretos y continuos, y esta equivalencia será útil en esta discusión.

### 3.3.5.2 Transformación de los pdf

Es necesario realizar una transformación previa de un pdf para poder realizar el muestreo, porque así, se facilita el proceso de generar un número aleatorio que sirve para muestrear de la función nueva encontrada y encontrar directamente el valor buscado.

Para tener una discusión completa del muestreo, se necesitan explicar las reglas de la transformación para los pdf. Es decir, dado un pdf  $f(x)$  uno define una nueva variable  $y = y(x)$  y la meta es encontrar el pdf  $g(y)$  que describe la probabilidad que la variable aleatoria  $y$  ocurre.

Primero, se necesita restringir la transformación  $y = y(x)$  para que sea una transformación única, porque debe haber una relación de 1 a 1 entre  $x$  y  $y$  para poder indicar que un valor dado de  $x$  corresponde inequívocamente a un valor de  $y$ . Dado que  $y(x)$  tiene una relación de 1 a 1, este puede ser un aumento monótono o una disminución monótona, puesto que cualquier otro comportamiento daría lugar a una

función múltiplemente valorada  $y(x)$ , por lo tanto, la función que resulta de la transformación es un cdf.

Primero se asume que la transformación  $y(x)$  es un aumento monótono, que resulta en  $dy/dx > 0$  para toda  $x$ . Físicamente, la transformación matemática debe conservar la probabilidad, es decir, la probabilidad de la variable aleatoria  $x'$  de ocurrir en  $dx$  alrededor  $x$  debe ser igual que la probabilidad de la variable aleatoria  $y'$  de ocurrir en  $dy$  alrededor  $y$  ya que si  $x$  ocurre, la relación de 1 a 1 entre  $x$  y  $y$  hace necesario que  $y$  aparezca. Pero por la definición de los pdf  $f(x)$  y  $g(y)$

$$\begin{aligned} f(x) dx &= \text{prob}(x \leq x' \leq x + dx) \\ g(y) dy &= \text{prob}(y \leq y' \leq y + dy) \end{aligned}$$

La transformación física implica que estas probabilidades deben ser iguales. La figura 3.6 ilustra esto para una transformación de ejemplo  $y = y(x)$

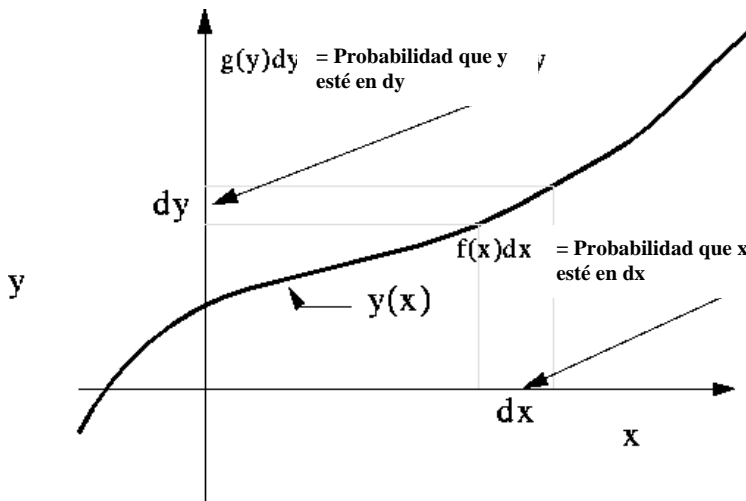


Figura 3.6 Transformación de pdfs

$$f(x) dx = g(y) dy \quad (49)$$

y uno puede entonces resolver para  $g(y)$

$$g(y) = f(x) / [dy/dx] \quad (50)$$

Esto se mantiene para la función de aumento monótona  $y(x)$ . Es fácil mostrar que para una función que disminuye monótonamente  $y(x)$  donde  $dy/dx < 0$  para todo valor de  $x$ , el hecho  $g(y)$  que debe ser positivo que (por la definición de la probabilidad) conduce a la expresión siguiente para  $g(y)$

$$g(y) = f(x) / [-dy/dx] \quad (51)$$

Combinando ambos casos conducen a la siguiente regla simple para transformar los pdf:

$$g(y) = f(x) / |dy/dx| \quad (52)$$

### 3.3.5.3 Muestreo vía la inversión del cdf

Ya que la variable aleatoria  $x$  y el cdf  $F(x)$  tienen una relación de 1 a 1, uno puede muestrear  $x$  al muestrear primero  $y = F(x)$  y después resolver para  $x$  al invertir  $F(x)$  o  $x = F^{-1}(y)$ . Pero se sabe que el cdf está distribuido uniformemente en  $[0,1]$ , lo cual se denota como  $U[0,1]$ . Por lo tanto, se utiliza simplemente un generador de números aleatorios que produzca  $U[0,1]$  números, para generar una muestra  $\xi$  del cdf  $F(x)$ . Entonces el valor de  $x$  es determinado por la inversión,  $x = F^{-1}(\xi)$ . Esto se representa gráficamente en la figura 3.7. La inversión no es siempre posible, pero en muchos casos importantes lo contrario se obtiene fácilmente.

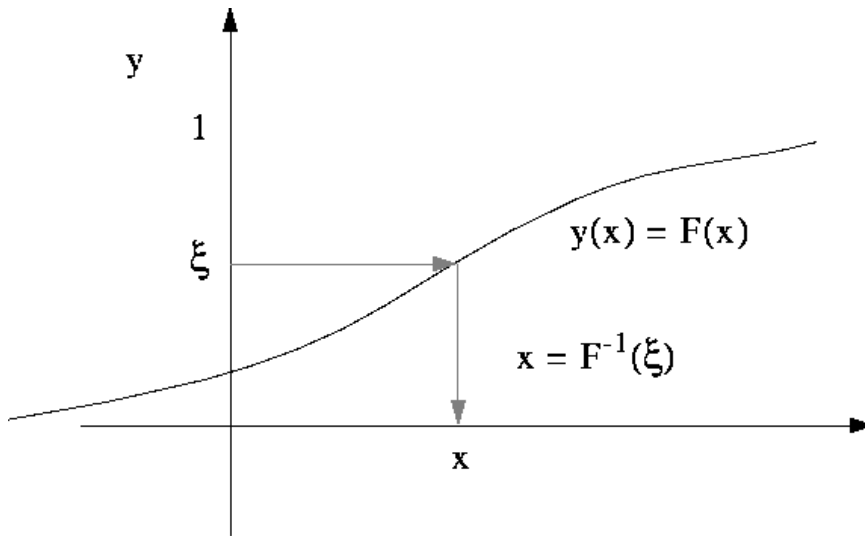


Figura 3.7 Muestreo empleando la inversa de un cdf

A continuación se resumen los pasos para una conversión por medio de inversión de un cdf.

Paso 1.

Haga un muestreo de un número aleatorio  $\xi$  de  $U[0,1]$

Paso 2.

Compárese  $\xi$  con el cdf:  $F(x) = \xi$

Paso 3.

Invierta el cdf y soluciónelo para  $x$ :  $x = F^{-1}(\xi)$

De esta manera, se ha encontrado una forma de realizar el muestreo aleatorio que es la base de la simulación de Monte Carlo. Para nuestro caso particular, la generación y el muestreo aleatorio simularán el comportamiento impredecible del tráfico dentro de los sistemas de telecomunicaciones.

Ahora se va a continuar nuestro estudio con la revisión de otra herramienta muy importante para el análisis de los sistemas de comunicaciones que es la teoría de colas de espera.

### **3.4 Teoría de colas**

#### **3.4.1 Introducción**

Una de las herramientas matemáticas más poderosas para realizar análisis cuantitativos de sistemas de comunicaciones, redes de ordenadores, etc. es la teoría de colas de espera. Esta técnica se desarrolló primeramente para analizar el comportamiento estadístico de los sistemas de conmutación telefónica, sin embargo, desde entonces, también ha sido aplicada para resolver muchos problemas de redes, tal como lo es el comportamiento del tráfico.

#### **3.4.2 Sistemas de colas**

Se pueden utilizar sistemas de colas de espera para modelar procesos en los cuales los clientes van llegando, esperan su turno para recibir el servicio, reciben el servicio y luego se marchan. Ejemplos de sistemas de colas de espera se encuentran en las cajas registradoras de los supermercados, en las ventanillas despachadoras de boletos y en las salas de espera de los consultorios médicos. Los sistemas de colas de espera pueden definirse mediante cinco componentes:

- La función de densidad de probabilidad del tiempo entre llegadas.
- La función de densidad de probabilidad del tiempo de servicio.
- El número de servidores.
- La disciplina de ordenamiento en las colas.
- El tamaño máximo de las colas.

Conviene notar explícitamente que sólo se están considerando sistemas con un número infinito de clientes (es decir, la existencia de una larga cola no reduce la población de clientes a tal grado que se reduzca materialmente la velocidad de entradas o de servicio).

La densidad de probabilidad del tiempo entre llegadas describe el intervalo de tiempo entre llegadas consecutivas. Se podría imaginar que se coloca a una persona para observar la llegada de los clientes. A cada llegada, el observador registraría el tiempo transcurrido desde que ocurrió la llegada previa. Después de que hubiese transcurrido un tiempo suficientemente largo de estar registrando las muestras, las listas de números podría clasificarse y agruparse: es decir, tantos tiempos entre llegadas de 0.1 segundos, tantos de 0.2 seg., etc. Esta densidad de probabilidad caracteriza el proceso de llegadas, el cual es descrito por una función de distribución de probabilidad o pdf.

Cada cliente requiere de cierta cantidad de tiempo proporcionado por el servidor, el tiempo de servicio requerido varia entre un cliente y otro. Para analizar un sistema de colas de espera, deben conocerse tanto la función de densidad de probabilidad del tiempo de servicio, como la función de densidad del tiempo entre llegadas.

La cantidad de servidores no necesita explicarse. Muchos bancos, por ejemplo, tienen una sola cola larga para todos sus clientes y, cada vez que un cajero se libera, el cliente que se encuentra al frente de la cola se dirige a dicha caja. A este sistema se le denomina sistema de cola multiservidor. En otros bancos, cada cajero o cajera, tiene su propia cola particular. En este caso se tendrá un conjunto de colas independientes de un solo servidor, y no un sistema multiservidor.

La disciplina de ordenamiento de una cola describe el orden según el cual los clientes van siendo tomados de la cola de espera. Los supermercados utilizan el método del primero en llegar es el primero en ser servido. En las salas de urgencia de los hospitales se utiliza, más a menudo, el criterio de primero el que esté más grave, no el primero en llegar es el primero en ser atendido. En un entorno amistoso de oficina, ante la fotocopidora, se despacha primero al que tenga menor trabajo.

No todos los sistemas de colas de espera poseen una capacidad infinita de recepción de clientes. Cuando demasiados clientes quieren hacer cola, pero sólo existe un número finito de lugares en cola de espera, algunos de estos clientes se pierden o son rechazados.

Aquí se centrará exclusivamente en sistemas de capacidad infinita con un solo servidor y una disciplina de al primero en llegar se le despacha primero. Para estos sistemas se utiliza ampliamente, en la literatura sobre colas de espera, la notación  $A/B/m$ , en donde  $A$  es la densidad de probabilidad de tiempo entre llegadas,  $B$  es la densidad de probabilidad de tiempo de servicio y  $m$  es el número de servidores. Las densidades de probabilidad  $A$  y  $B$  son escogidas a partir del conjunto:

- M - densidad de probabilidad exponencial
- D - todos los clientes tienen el mismo valor
- G - general ( es decir, densidad de probabilidad arbitraria o definida por el usuario)

La hipótesis de utilizar una probabilidad de tiempo entre llegadas exponencial es totalmente razonable para cualquier sistema que maneja una gran cantidad de clientes independientes. En semejantes condiciones, la probabilidad de que lleguen exactamente  $n$  clientes, durante un intervalo de longitud  $t$ , estará dada por la ley de Poisson:

$$P_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}$$

en la cual  $\lambda$  es la velocidad media de llegadas.

Ahora se demostrará que las llegadas de Poisson generan una densidad de probabilidad de tiempo entre llegadas de tipo exponencial. La probabilidad,  $a(t)\delta t$ , de que un intervalo entre llegadas se encuentre entre  $t$  y  $t+\delta t$ , es exactamente la probabilidad de que no existan llegadas durante un tiempo  $t$ , multiplicada por la probabilidad de que exista una sola llegada en el intervalo infinitesimal  $\delta t$ :

$$a(t)\Delta t = P_0(t)P_1(\Delta t)$$

donde

$$P_0(t) = e^{-\lambda t}, P_1(\Delta t) = \lambda \Delta t e^{-\lambda \Delta t}$$

En el límite  $\delta t \rightarrow 0$  y el factor exponencial en  $P_1$  se acercan a la unidad, por lo tanto

$$a(t)dt = \lambda e^{-\lambda t} dt$$

Nótese que la integración de la ecuación anterior, entre 0 y  $\infty$ ; es igual a 1, al ser una probabilidad.

Aunque la hipótesis de una densidad de probabilidad de tiempo entre llegadas de tipo exponencial es normalmente razonable, en términos generales es más difícil defender la hipótesis de que los tiempos de servicios sean también de carácter exponencial. Sin embargo, para las situaciones en las cuales mientras más grande sea el tiempo de servicio, menor será su probabilidad de ocurrir, el modelo M/M/1 puede ser una aproximación adecuada.

Ahora se estudia con más detenimiento el proceso de Poisson:

### 3.4.3 Proceso de Poisson

El proceso de llegada de Poisson es el más usado en el diseño de los modelos de colas. Este ha sido muy difundido para el tráfico de redes telefónicas así como para la evaluación del desempeño de sistemas de conmutación en general. Se utilizan tres enunciados básicos para definir el proceso de llegada de Poisson.

Considérese un pequeño intervalo de tiempo  $\delta t$  ( $\delta t \rightarrow 0$ ), separando los tiempos  $t$  y  $t + \delta t$ , como se muestra en la figura 3.8. Entonces:

1. La probabilidad de una llegada en el intervalo  $\delta t$  se define como  $\lambda \delta t \ll 1$ , siendo  $\lambda$  una constante de proporcionalidad especificada.
2. La probabilidad de cero llegadas en  $\delta t$  es  $1 - \lambda \delta t + O(\delta t)$ .
3. Las llegadas son procesos sin memoria: cada llegada (evento) en un intervalo de tiempo es independiente de eventos en intervalos previos o futuros.

Con esta última definición, en el proceso de Poisson la probabilidad de un evento en el tiempo  $t + \delta t$  depende de la probabilidad en el tiempo de sólo  $\tau$ . Nótese que de acuerdo con los enunciados 1 y 2, queda excluido el caso de más de una llegada u ocurrencia de un evento en el intervalo  $\delta t$  ( $\delta t \rightarrow 0$ ), al menos a  $O(\delta t)$ . Si ahora se toma un intervalo finito  $T$  (como se muestra en la figura 3.9) mayor, se encuentra la probabilidad  $p(k)$  de  $k$  llegadas en  $T$  dada como:

$$P(k) = (\lambda T)^k e^{-\lambda T} / k! \quad k=0,1,2,\dots \quad (53)$$

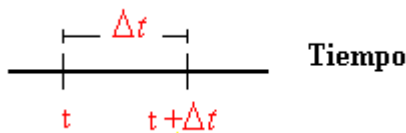


Figura 3.8 Intervalo de tiempo usado en la definición del proceso de Poisson.

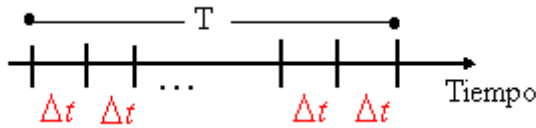


Figura 3.9 Derivación de la distribución de Poisson en función de una distribución aleatoria de llegadas

Esta se conoce como la distribución de Poisson. Esta distribución está debidamente normalizada:

$$\sum_{k=0}^{\infty} p(k) = 1$$

en la cual, el valor esperado está dado por

$$E(k) = \sum_{k=0}^{\infty} k p(k) = \lambda T \quad (54)$$

La varianza:

$$\sigma_k^2 \equiv E[k - E(k)]^2 = E(k^2) - E^2(k) \quad \text{resulta ser}$$

$$\sigma_k^2 = E(k) = \lambda T \quad (55)$$

El parámetro  $\lambda$ , definido inicialmente como una constante de proporcionalidad (véase el enunciado 1 para el proceso de Poisson), resulta ser un parámetro de velocidad:

$$\lambda = E(k)/T$$

de la ecuación (53). Este representa entonces la tasa de promedio de llegadas de Poisson.

De las ecuaciones (53) y (54) se desprende que la desviación estándar  $\sigma_k$  de la distribución, normalizada al valor promedio  $E(K)$ , tiende a cero conforme  $\lambda T$  aumenta:  $\sigma_k/E(k) = 1/\sqrt{\lambda T}$ . Esto implica que para valores grandes de  $\lambda T$ , la distribución se encuentra concentrada alrededor de valores muy cercanos al valor promedio  $\lambda T$ . De esta forma, si se mide el número (aleatorio) de llegadas  $n$  en un intervalo  $T$  grande ("grande" implica  $\lambda T \gg 1$ , o  $T \gg 1/\lambda$ ),  $n/T$  sería la buena estimación de  $\lambda$ . Nótese también que  $p(0) = e^{-\lambda T}$ . Conforme  $\lambda T$  aumenta y la distribución alcanza valores alrededor de  $E(k) = \lambda T$ , la probabilidad de no llegadas en el intervalo  $T$  se aproxima exponencialmente a cero con  $T$ .

Ahora considérese un intervalo grande de tiempo, y señálense los intervalos en los que ocurre un evento (llegada) Poisson. Se obtiene una secuencia aleatoria de puntos como la demostrada en la figura 3.10. El tiempo entre las llegadas sucesivas se representa con el símbolo  $\tau$ . Es evidente que  $\tau$  es una variable aleatoria positiva con distribución continua. En la estadística de Poisson,  $\tau$  es una variable aleatoria de distribución exponencial; es decir, su función de densidad de probabilidad  $f_\tau(\tau)$  está dada por

$$f_\tau(\tau) = \lambda e^{-\lambda \tau} \quad \tau \geq 0 \quad (56)$$

Esta distribución exponencial entre llegadas se esboza en la figura 3.11. En procesos de llegada de Poisson, el tiempo entre las llegadas es más bien pequeño, y la probabilidad entre dos eventos (llegadas) sucesivos disminuye en forma exponencial con el tiempo  $\tau$ .



Después de un cálculo simple se ve que el valor medio  $E(\tau)$  de esta distribución exponencial es

$$E(\tau) = \int_0^{\infty} \tau f_{\tau}(\tau) d\tau = 1/\lambda \quad (57)$$

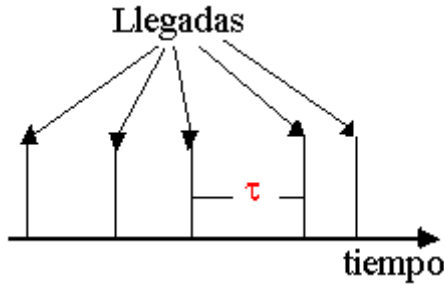


Figura 3.10 Llegadas de Poisson

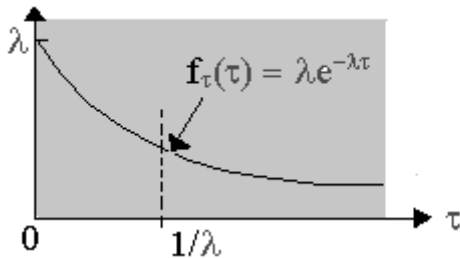


Figura 3.11 Distribución exponencial entre llegadas  
mientras que la varianza está dada por

$$\sigma_{\tau}^2 = 1/\lambda^2 \quad (58)$$

El tiempo promedio entre llegadas resulta el esperado, ya que si la tasa de llegadas es  $\lambda$ , el tiempo entre ellas debería ser  $1/\lambda$ . El hecho de que la estadística del proceso de Poisson de lugar a una distribución exponencial entre llegadas se deduce con facilidad de la distribución de Poisson de la ecuación (53). Considérese el diagrama de tiempo de la figura 3.12. Como muestra, sea  $\tau$  la variable aleatoria que representa el tiempo transcurrido desde un origen arbitrario hasta el tiempo de la primera llegada. Tómese cualquier valor  $x$ . No ocurren llegadas en el intervalo  $(0, x)$  si, y sólo si,  $\tau > x$ . La probabilidad de que  $\tau > x$  es exactamente la probabilidad de que no ocurran llegadas en  $(0, x)$ ; es decir,

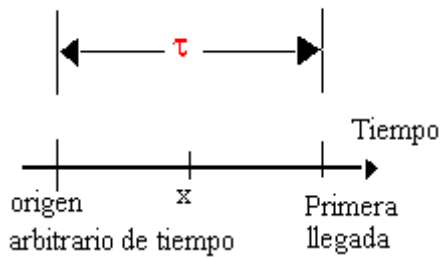


Figura 3.12 Derivación de la distribución exponencial

$$P(\tau > x) = \text{prob.}(\text{número de llegadas en } (0, x) = 0) = e^{-\lambda x}$$

de la ecuación (53). Entonces la probabilidad de que  $\tau \leq x$  es

$$P(\tau \leq x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

que es justamente la distribución acumulativa de probabilidad o cdf  $F_{\tau}(x)$  de la variable aleatoria  $\tau$ . Por tanto, se tiene

$$F_{\tau}(x) = 1 - e^{-\lambda x} \quad (59)$$

de donde sigue la función de densidad de probabilidad  $f_{\tau}(x) = dF_{\tau}(x)/dx = \lambda e^{-\lambda x}$ .

La cercana relación entre el proceso de llegada de Poisson y el tiempo entre llegadas con distribución exponencial puede aplicarse después de discutir las propiedades de la distribución exponencial del tiempo de servicio. Así, considérese una cola con usuarios (paquetes o llamadas) en espera de servicio. Céntrese la atención en la salida de la cola y señálese el tiempo en que un usuario completa el servicio. Esto se muestra de manera esquemática en la figura 3.13. Sea  $r$ , como se muestra, la variable aleatoria que representa el tiempo entre cumplimiento de servicio. También puede ser el tiempo de servicio si el siguiente usuario es atendido tan pronto como el que está en servicio abandona el sistema. En particular, tómese el caso en que  $r$  tiene distribución exponencial, con un valor promedio  $E(r) = 1/\mu$ . Entonces

$$f_r(r) = \mu e^{-\mu r} \quad r \geq 0 \quad (60)$$

Pero al comparar las figuras 3.13 y 3.10 es evidente que si  $r$ , el tiempo entre cumplimientos de servicio, tiene distribución exponencial, entonces los tiempos de terminación deben representar por sí mismos un proceso de Poisson. El proceso de servicio es completamente análogo al proceso de llegada. Sobre esta base, la probabilidad de un cumplimiento en el intervalo  $(t, t + \delta t)$

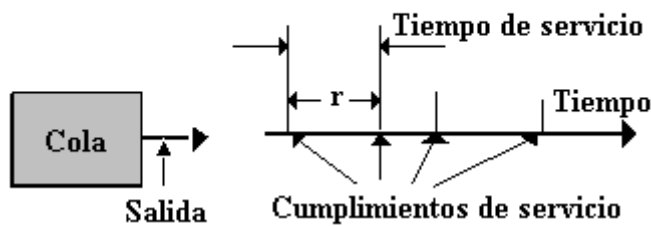


Figura 3.13 Cumplimientos de servicio a la salida de una cola

es  $\mu\delta t + 0(\delta t)$ , mientras que la probabilidad de no cumplimiento o de no llegadas para el intervalo  $(t, t + \delta t)$  es  $1 - \mu\delta t + 0(\delta t)$ , independientemente de los cumplimientos pasados o futuros. El modelo de servicio con distribución exponencial tiene implícita la propiedad de independencia de los enunciados para el proceso de Poisson. Antes de proseguir el proceso de formación de las colas, se incluye una propiedad más al proceso de Poisson. Supóngase que se mezclan  $m$  flujos de Poisson independientes, de tasas arbitrarias de llegada  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ , respectivamente. Entonces el flujo compuesto es en sí un flujo de

Poisson, con parámetro de llegada  $\lambda + \sum_{i=1}^n \lambda_i$ .

Esta es una propiedad muy útil, y constituye una de las razones por las que a menudo se usan modelos de procesos de llegadas de Poisson para las llegadas. En el contexto de redes de conmutación de paquetes y conmutación de circuitos, esta situación ocurre al combinar estadística de paquetes y llamadas de varias fuentes de datos (terminales y teléfonos), cada una de las cuales genera paquetes o llamadas (según el caso) con cierta tasa de Poisson.

### 3.4.4 Colas M/M/1

Se considera en primer lugar una cola infinita donde llegan por término medio  $\lambda$  Clientes por unidad de tiempo, y son servidos por término medio  $\mu$  clientes por segundo. La cola puede encontrarse en los estados  $\{1, 2, 3, 4, \dots, K\}$ . El número de transiciones  $K \rightarrow K+1$  es entonces  $\lambda p_K$  y el número de transiciones  $K \rightarrow K-1$  es  $\mu p_K$ :

$$\begin{array}{ccccccc}
 -\lambda p_0 \rightarrow & & -\lambda p_1 \rightarrow & & -\lambda p_2 \rightarrow & & \dots \\
 0 & & 1 & & 2 & & \dots \\
 \leftarrow \mu p_1 & & \leftarrow \mu p_2 & & \leftarrow \mu p_3 & & 
 \end{array}$$

En el equilibrio, el número de transiciones en uno y otro sentido ha de ser igual, por término medio, sin importar si la cola se encuentre vacía permanentemente o crezca

sin límite. Por tanto, si  $p_k$  es la probabilidad estacionaria de que el sistema se encuentre en el estado  $k$ :

$$\begin{aligned}\lambda p_0 &= \mu p_1 \\ \lambda p_1 &= \mu p_2 \\ \lambda p_2 &= \mu p_3 \\ &\dots\dots \\ \lambda p_{k-1} &= \mu p_k\end{aligned}\quad (61)$$

Resolviendo la primera para  $p_1$  se puede encontrar  $p_2$  de la segunda, que se puede sustituir en la tercera para encontrar  $p_3$  y así sucesivamente, obteniendo el resultado general:

$$p_k = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k p_0 \quad (62)$$

Falta por encontrar  $p_0$  para lo cual se sirve de la condición:

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k p_0 = p_0 \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k = 1 \quad (63)$$

Como se supone que el ritmo medio de servicio es mayor que el ritmo medio de llegada:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k = \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{\mu}} \quad (64)$$

Finalmente:

$$p_k = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) = (1 - \rho) \rho^k \quad (65)$$

El número medio de clientes en la cola no es otro que :

$$\bar{N} = \sum_{k=0}^{\infty} k p_k = (1 - \rho) \sum_{k=0}^{\infty} k \rho^k \quad (66)$$

Se sabe que:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \rho^k = \frac{1}{1 - \rho} \quad (67)$$

Derivando la expresión anterior y multiplicando ambos lados por  $\rho$  se obtiene:

$$\sum_{k=0}^{\infty} k \rho^k = \frac{\rho}{(1 - \rho)^2} \quad (68)$$

En definitiva:

$$\bar{N} = \frac{\rho}{1-\rho} \quad (69)$$

Obsérvese que cuando el ritmo de llegada se aproxima al ritmo de servicio la cola crece indefinidamente. Por otra parte, si llegan  $\lambda$  clientes a la cola por término medio, y esta tiene la longitud que se acaba de encontrar, el tiempo  $T^-$  viene dado por:

$$\bar{T} = \frac{\bar{N}}{\lambda} = \frac{1}{\mu - \rho} \quad (70)$$

Se supone ahora que el número de clientes en la cola es finito, de manera que aquellos que encuentran la cola llena son rechazados. Sea  $M$  el número máximo de clientes en cola. En este caso:

$$\begin{aligned} \lambda p_0 &= \mu p_1 \\ \lambda p_1 &= \mu p_2 \\ \lambda p_2 &= \mu p_3 \\ &\dots\dots \\ \lambda p_{M-1} &= \mu p_M \end{aligned} \quad (71)$$

de donde:

$$p_k = \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^k p_0 \quad (72)$$

Ahora sin embargo la condición de normalización, al extenderse la suma sobre un número finito de estados, es distinta. Se encuentra que:

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^M \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^k} = \frac{1-\rho}{1-\rho^{M+1}} \quad (73)$$

El número medio de clientes en la cola es:

$$\bar{N} = \sum_{k=0}^M k p_k = p_0 \sum_{k=0}^M k \rho^k \quad (74)$$

Se sabe que:

$$\sum_{k=0}^M \rho^k = \frac{1-\rho^{M+1}}{1-\rho} \quad (75)$$

Derivando esta expresión respecto a  $\rho$  y multiplicando por  $\rho$ , se puede sustituir ya en (74), resolviendo el problema.

### 3.5 Bases del análisis de la varianza

Supónganse  $k$  muestras aleatorias independientes, de tamaño  $n$ , extraídas de una única población normal. A partir de ellas existen dos maneras independientes de estimar la varianza de la población  $\sigma^2$ :

1) Una llamada *varianza dentro de los grupos* (ya que sólo contribuye a ella la varianza dentro de las muestras), o *varianza de error*, o *cuadrados medios del error*, y habitualmente representada por *MSE* (Mean Square Error) o *MSW* (Mean Square Within) que se calcula como la media de las  $k$  varianzas muestrales (cada varianza muestral es un estimador centrado de  $\sigma^2$  y la media de  $k$  estimadores centrados es también un estimador centrado y más eficiente que todos ellos). *MSE* es un cociente: al numerador se le llama *suma de cuadrados del error* y se representa por *SSE* y al denominador *grados de libertad* por ser los términos independientes de la suma de cuadrados.

2) Otra llamada *varianza entre grupos* (sólo contribuye a ella la varianza entre las distintas muestras), o *varianza de los tratamientos*, o *cuadrados medios de los tratamientos* y representada por *MSA* o *MSB* (Mean Square Between). Se calcula a partir de la varianza de las medias muestrales y es también un cociente; al numerador se le llama *suma de cuadrados de los tratamientos* (se le representa por *SSA*) y al denominador  $(k-1)$  grados de libertad.

*MSA* y *MSE*, estiman la varianza poblacional en la hipótesis de que las  $k$  muestras provengan de la misma población. La distribución muestral del cociente de dos estimaciones independientes de la varianza de una población **normal** es una *F* con los grados de libertad correspondientes al numerador y denominador respectivamente, por lo tanto se puede contrastar dicha hipótesis usando esa distribución.

Si basándose en este contraste se rechaza la hipótesis de que *MSE* y *MSA* estimen la misma varianza, se puede rechazar la hipótesis de que las  $k$  medias provengan de una misma población.

Aceptando que las muestras provengan de poblaciones con la misma varianza, este rechazo implica que las medias poblacionales son distintas, de modo que con un único contraste se contrasta la igualdad de  $k$  medias.

Existe una tercera manera de estimar la varianza de la población, aunque no es independiente de las anteriores. Si se consideran las  $kn$  observaciones como una única muestra, su varianza muestral también es un estimador centrado de  $\sigma^2$ :

Se suele representar por  $MST$ , se le denomina *varianza total* o *cuadrados medios totales*, es también un cociente y al numerador se le llama *suma de cuadrados total* y se representa por  $SST$ , y el denominador  $(kn - 1)$  grados de libertad.

Los resultados de un anova se suelen representar en una tabla como la siguiente:

Fuente de variación	G.L.	$SS$	$MS$	$F$
Entre grupos Tratamientos	$k-1$	$SSA$	$SSA/(k-1)$	$MSA/MSE$
Dentro Error	$(n-1)k$	$SSE$	$SSE/k(n-1)$	
Total	$kn-1$	$SST$		

Y el cociente  $F$  se usa para realizar el contraste de la hipótesis de medias iguales. La región crítica para dicho contraste es  $F > F_{\alpha(k-1, (n-1)k)}$

### 3.5.1 Reducción de la Varianza

Un método para reducir el tamaño del intervalo de confianza es el de incrementar la duración que se va a emplear en la simulación, ya que mientras más iteraciones sean ejecutadas, más cercana a la realidad estará la respuesta que produce la simulación. Pero la meta de la simulación es de alcanzar valores de varianza aceptables en la menor cantidad de iteraciones posibles, es decir, mejorar la eficiencia del modelo.

La forma más simple, más conocida y empleada es el uso de números aleatorios antitéticos. Como ya se conoce, la simulación trabaja en base a un generador de números aleatorios entre 0 y 1, el número generado se le llamará  $r$ . Este valor  $r$  es entonces transformado en un valor aleatorio cualquiera que sea necesitado. Ya que  $r$  es un número aleatorio entre 0 y 1, también lo será  $s$  si se define a  $s$  como  $s = 1 - r$ . Ahora, se supone que se realizan dos ciclos de simulación, una emplea las variables aleatorias  $r_1, r_2, \dots, r_m$  y la

otra emplea  $1 - r_1, 1 - r_2, \dots, 1 - r_m$ . Estas simulaciones no son independientes, por lo tanto, cuando una de ellas emplea un número aleatorio grande, la otra tiene un número pequeño. Si se hace que  $x_1$  sea el valor estadístico del primer ciclo de simulación, y  $y_1$  el valor del segundo ciclo, entonces  $x_1$  y  $y_1$  están correlacionados negativamente. Los dos tienen un valor esperado  $\mu$ . Por lo tanto, se puede estimar  $\mu$  con  $(x_1 + y_1)/2$ .

Se supone que se repite este proceso  $n$  veces. Si se hace que  $x_i = (x_i + y_i)/2$ , entonces  $\bar{Z}$  es una estimación sin desplazamiento de  $\mu$ .

Se recuerda que  $\text{Var}(x + y) = \text{Var}(x) + \text{Var}(y) + 0.5\text{Cov}(x, y)$ ,  
 entonces, si la covarianza entre  $x_i$  y  $y_i$  es negativa, entonces  $z$  tenderá a tener una  
 varianza más pequeña que cualquiera de  $x$  o  $y$ . Ya que las variables antitéticas tienden a  
 dar covarianzas negativas, esto ayudará a obtener mejores estimaciones.