题目3.6.3：

问题、无论是利用命题3.6.1来证明不可约性，还是利用定理3.6.3来证明稳定分布，都是假定Q是**保守全稳定**而且Q**过程唯一**。两个条件缺一不可。

定理3.6.2(b)：

$\lim\limits_{t\to\infty} p_{ii}(t)$**的存在性是要说明的！**

问题一、一致连续性并不能推出$\lim\limits_{t\to\infty} p_{ii}(t)$的存在性。简单的反例就是$\sin(t)$在$[0,+\infty)$上一致收敛但$\lim\limits_{t\to\infty}\sin(t)$不存在。

问题二、对任意h，$\lim\limits_{n\to\infty} p_{ii}(nh)$的存在性并不能推出$\lim\limits_{t\to\infty} p_{ii}(t)$的存在性。简单的反例：

$f(t)=\begin{cases}0 & t\text{为有理数}\\ 1 & t\text{为无理数}\end{cases}$，$\forall t_0>0$都有$\lim\limits_{n\to\infty} f(nt_0)=\begin{cases}0 & t\text{为有理数}\\ 1 & t\text{为无理数}\end{cases}$，但$\lim\limits_{t\to\infty} f(t)$不存在。

参考答案：定理3.2.2已经证明$\lim\limits_{t\to\infty} p_{ii}(t)$的存在性。

【如果不记得这个是哪个定理，只需说明(但一定要说)“由定理知$\lim\limits_{t\to\infty} p_{ii}(t)$存在”。】

因此$\forall h>0,\ \lim\limits_{n\to\infty} p_{ii}(nh)=\lim\limits_{t\to\infty} p_{ii}(t)$

因此$\forall h>0,\ \lim\limits_{n\to\infty} p_{ii}(nh)>0$当且仅当$\lim\limits_{t\to\infty} p_{ii}(t)>0$

再由定理2.5.1【离散时间马氏链中，非/零常返状态当且仅当$\lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}(nh)=0$】知

$\forall h>0$，连续时间马氏链正常返当且仅当$h-$骨架链正常返。

思考题、

参考答案：

【注】假设Q过程唯一，不唯一我暂时还没想出答案。

对于任意$i\neq j$，若$q_{ij}>0$，

则由$\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{p_{ij}(t)}{t}=q_{ij}$知$\exists\delta_{ij}>0,\forall t\in(0,\delta_{ij}),\dfrac{p_{ij}(t)}{t}\geq\dfrac{q_{ij}}{2}$即$p_{ij}(t)\geq\dfrac{q_{ij}t}{2}>0$

一、当$i=j$时，由定理3.2.1知$\forall t>0,p_{ij}(t)>0$

二、当$i\neq j$时，

若$\exists t_0,p_{ij}(t_0)>0$，则由命题3.6.1【用到$Q$过程唯一】知$i\xrightarrow{Q}j$，

即$\exists i_0,\ldots,i_n\in E$使$q_{i_k i_{k+1}}>0,k=0,1,\ldots,n-1$，其中$i_0=i,i_n=j$。

令$\delta=\min\{\delta_{i_0i_1},\ldots,\delta_{i_{n-1}i_n}\}$，

当$t\in(0,\delta)$时，由上面的证明知$p_{i_k i_{k+1}}(t)>0,k=0,1,\ldots,n-1$

因此$p_{ij}(nt)\geq\prod\limits_{k=0}^{n-1}p_{i_k i_{k+1}}(t)>0$

也就是$\forall t\in(0,n\delta),p_{ij}(t)>0$。

再由引理3.6.1知$\forall t>0,p_{ij}(t)>0$。