第四周作业问题：

题目2.3.6：

出现的问题一：对R_n理解出错

$$X_1 = 1, X_2 = 2, X_3 = 2, X_4 = 4, X_5 = 3$$

	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5
错误的理解：	1	2	2	4	4
正确的理解：	1	2	4	未知	未知

出现的问题二：如果$\{T_n : n = 1, 2, \dots\}$是随机变量/停时，$\{X_{T_n}\}$不一定是马氏链，更不一定独立
很多同学令$R_n = X_{T_n}$，然后利用马氏性/独立同分布性去证明，其实这时错误的，下面给一个反例：

$$T_1 = 1, T_2 = 2, T_3 = \min\{n \geq 3 : X_n = X_{T_1}\}$$

显然X_{T_3}与X_{T_1}并不独立，显然马氏性也不成立。

参考答案：

首先要说明一点，R_n的取值范围为$\mathbb{N}_0 \bigcup \{$不存在$\}$【例如$\forall n, X_n = 1$时，R_2等不存在】。

为了避免出现R_n不存在这种情况，这里要求$\forall N, \sum\limits_{l=0}^{N} \alpha_l < 1$，因为

$$\begin{aligned}
& P(R_n\text{不存在}) \\
\leq\ & P(\exists N, \forall k, X_k \leq N) \\
\leq\ & \sum_{N=0}^{+\infty} P(\forall k, X_k \leq N) \\
=\ & \sum_{N=0}^{+\infty} \lim_{k \to +\infty} P(X_1 \leq N, \dots, X_k \leq N) \\
=\ & \sum_{N=0}^{+\infty} \lim_{k \to +\infty} \prod_{m=1}^{k} P(X_m \leq N) \\
=\ & \sum_{N=0}^{+\infty} \lim_{k \to +\infty} (\sum_{l=0}^{N} \alpha_l)^k \\
=\ & 0
\end{aligned}$$

在此基础上，我们来证明马氏性。

假设$i_1 < i_2 < \cdots < i_n$，当$n \geq 2$时

$$
\begin{aligned}
& P(R_n = i_n, R_{n-1} = i_{n-1}, \cdots, R_1 = i_1) \\
= \; & P(\exists m_n > m_{n-1}, X_{m_n} = i_n, \forall k \in (m_n, m_{n-1}), X_k \leq i_{n-1}, \ldots, \exists m_2 > 1, X_{m_2} = i_2, \forall k \in (m_2, 1), X_k \leq i_1, X_1 = i_1) \\
= \; & \sum_{k_n = k_{n-1}+1}^{+\infty} \cdots \sum_{k_2=2}^{+\infty} P(X_{k_n} = i_n, \forall k \in (k_n, k_{n-1}), X_k \leq i_{n-1}, \ldots, X_{k_2} = i_2, \forall k \in (k_2, 1), X_k \leq i_1, X_1 = i_1) \\
= \; & \sum_{k_n = k_{n-1}+1}^{+\infty} \cdots \sum_{k_2=2}^{+\infty} \left[\alpha_{i_n} (\sum_{l=0}^{i_{n-1}} \alpha_l)^{k_n - k_{n-1} - 1} * \cdots * \alpha_{i_2} (\sum_{l=0}^{i_1} \alpha_l)^{i_2 - 2} * \alpha_{i_1} \right] \\
= \; & \frac{\alpha_{i_n}}{\sum\limits_{l=i_{n-1}+1}^{+\infty} \alpha_l} * \cdots * \frac{\alpha_{i_2}}{\sum\limits_{l=i_1+1}^{+\infty} \alpha_l} * \alpha_{i_1}
\end{aligned}
$$

因此

$$
\begin{aligned}
& P(R_n = i_n | R_{n-1} = i_{n-1}, \cdots, R_1 = i_1) \\
= \; & P(R_n = i_n, R_{n-1} = i_{n-1}, \cdots, R_1 = i_1) / P(R_{n-1} = i_{n-1}, \cdots, R_1 = i_1) \\
= \; & \frac{\alpha_{i_n}}{\sum\limits_{l=i_{n-1}+1}^{+\infty} \alpha_l}
\end{aligned}
$$

另一方面，

$$
\begin{aligned}
& P(R_n = i_n, R_{n-1} = i_{n-1}) \\
= \; & \sum_{i_{n-2} = i_{n-3}+1}^{i_{n-1}-1} \cdots \sum_{i_2 = i_1+1}^{i_{n-1}-(n-3)} \sum_{i_1=0}^{i_{n-1}-(n-2)} P(R_n = i_n, R_{n-1} = i_{n-1}, \cdots, R_1 = i_1) \\
= \; & \sum_{i_{n-2} = i_{n-3}+1}^{i_{n-1}-1} \cdots \sum_{i_2 = i_1+1}^{i_{n-1}-(n-3)} \sum_{i_1=0}^{i_{n-1}-(n-2)} \frac{\alpha_{i_n}}{\sum\limits_{l=i_{n-1}+1}^{+\infty} \alpha_l} * \cdots * \frac{\alpha_{i_2}}{\sum\limits_{l=i_1+1}^{+\infty} \alpha_l} * \alpha_{i_1} \\
= \; & \frac{\alpha_{i_n}}{\sum\limits_{l=i_{n-1}+1}^{+\infty} \alpha_l} \sum_{i_{n-2} = i_{n-3}+1}^{i_{n-1}-1} \cdots \sum_{i_2 = i_1+1}^{i_{n-1}-(n-3)} \sum_{i_1=0}^{i_{n-1}-(n-2)} \frac{\alpha_{i_{n-1}}}{\sum\limits_{l=i_{n-2}+1}^{+\infty} \alpha_l} * \cdots * \frac{\alpha_{i_2}}{\sum\limits_{l=i_1+1}^{+\infty} \alpha_l} * \alpha_{i_1}
\end{aligned}
$$

而

$$\begin{aligned}
& P(R_{n-1}=i_{n-1}) \\
= & \sum_{i_{n-2}=i_{n-3}+1}^{i_{n-1}-1} \cdots \sum_{i_2=i_1+1}^{i_{n-1}-(n-3)} \sum_{i_1=0}^{i_{n-1}-(n-2)} P(R_{n-1}=i_{n-1},\cdots,R_1=i_1) \\
= & \sum_{i_{n-2}=i_{n-3}+1}^{i_{n-1}-1} \cdots \sum_{i_2=i_1+1}^{i_{n-1}-(n-3)} \sum_{i_1=0}^{i_{n-1}-(n-2)} \frac{\alpha_{i_{n-1}}}{\sum\limits_{l=i_{n-2}+1}^{+\infty}\alpha_l} * \cdots * \frac{\alpha_{i_2}}{\sum\limits_{l=i_1+1}^{+\infty}\alpha_l} * \alpha_{i_1}
\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}
& P(R_n=i_n|R_{n-1}=i_{n-1}) \\
= & P(R_n=i_n,R_{n-1}=i_{n-1})/P(R_{n-1}=i_{n-1}) \\
= & \frac{\alpha_{i_n}}{\sum\limits_{l=i_{n-1}+1}^{+\infty}\alpha_l} \\
= & P(R_n=i_n|R_{n-1}=i_{n-1},\cdots,R_1=i_1)
\end{aligned}$$

因此$\{R_n\}$为马尔可夫链，其转移概率为

$$P_{ij}=\begin{cases} 0 & j\le i \\ \dfrac{\alpha_j}{\sum\limits_{k=i+1}^{+\infty}\alpha_k} & j>i \end{cases}$$

【备注】上述要求$\forall N, \sum\limits_{l=0}^{N}\alpha_l<1$来保证$R_n$必定存在。然而当这个条件不成立的时候，必存在$n$使$R_n$不存在。这里就直接给出转移概率，有兴趣的同学可以思考一下怎么做。

这里假设N满足$\sum_{l=0}^{N}\alpha_l = 1$且$\alpha_N > 0$，$R_n$的取值为$\{0,1,2,\ldots,N\}\bigcup\{$不存在$\}$。

$$P_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq N, \text{且} j \leq i \text{或} j = \text{不存在} \\ \dfrac{\alpha_j}{\sum\limits_{k=i+1}^{N}\alpha_k} & i \neq N, \text{且} j > i \\ 1 & i = N, \text{且} j = \text{不存在} \\ 0 & i = N, \text{且} j \in \{0,1,2,\ldots,N\} \end{cases}$$