Q1. 根据今天所学的差分方程的知识，手算差分方程$y_n = 2y_{n-2} - y_{n-1}, n \geq 3$, $y_1 = 1, y_2 = 2$的通项公式

答：此方程为典型的二阶常系数齐次线性差分方程。首先列出特征方程：

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$$

容易得到两个特征根为$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -2$,因此原方程的通解为$y_n = c_1 \cdot 1^n + c_2 \cdot (-2)^n$

代入初值条件，得到方程组$\begin{cases} c_1 - 2c_2 = 1 \\ c_1 + 4c_2 = 2 \end{cases}$,解得$c_1 = \frac{4}{3}, c_2 = \frac{1}{6}$

因此，本差分方程的解，即通项公式为$y_n = \frac{4}{3} + \frac{(-2)^n}{6}$

Q2. 利用改进的欧拉法解微分方程初值问题$y' = x + y, x \in [0,1], y(0) = 0$。同时提供真实函数的求解过程，并计算$y(1)$的误差

答：本微分方程为一阶常系数非齐次线性微分方程的初值问题，因此本身就有两种不同的方法求解（任选一种即可）：

方法一：容易得知对应齐次方程$y' = y$的通解为$ce^x$，使用常数变易法，可设$y(x) = u(x) \cdot e^x$，然后代入原方程，有$y'(x) = u'(x) \cdot e^x + u(x) \cdot e^x = x + u(x) \cdot e^x$，于是得$u'(x) = x \cdot e^{-x}$，$u(x) = -x \cdot e^{-x} - e^{-x} + C$.

综上，该微分方程的通解为$y = (-x \cdot e^{-x} - e^{-x} + C) \cdot e^x = C \cdot e^x - x - 1$，代入初值条件可得$C = 1$，故初值问题的真实解为$y(x) = e^x - x - 1$

方法二：本题还可以使用待定系数法$y' - y = x$，对应齐次通解$y = ce^x$，，0不是特征根，所以可以假设特解$y^* = Ax + B$，代入易得$A - (Ax + B) = x$，得到方程组$\begin{cases} -A = 1 \\ A - B = 0 \end{cases}$，解得$A = B = -1$，故微分方程通解$y(x) = ce^x - x - 1$

同理代入初值条件确定$c = 1$，故$y(x) = e^x - x - 1$

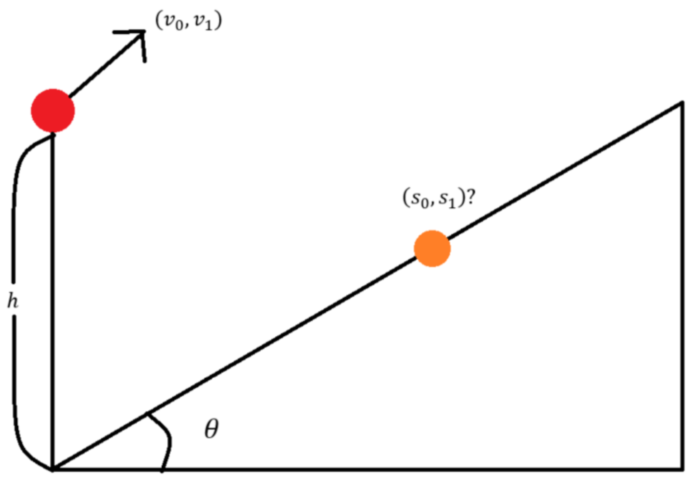
数值实验代码：

```
clear,d = 1e-5;                    %步长设定
tic;
x = 0:d:1;
y = zeros(1,length(x));             %x取点设定与y申请存储空间
yp = @(X,Y) X+Y;                   %导函数的匿名形式定义
y(1)=0;                            %初值条件
for i = 2:length(x)                %改进欧拉法的循环主体
    temp=y(i-1)+d*yp(x(i-1),y(i-1));
    y(i)=y(i-1)+d/2*(yp(x(i-1),y(i-1))+yp(x(i),temp));
end
toc;
err = abs(y(end)-(exp(1)-2))         %与y(1)真实值e-2进行误差分析
```

```
时间已过 0.215148 秒。
err =   4.5308e-11
```

Q3. 小球水平初速度$v_0 = 2m/s$，垂直初速度$v_1 = 2m/s$,高度$h = 10m$，重力加速度$g = -10m/s^2$，斜面倾角$\theta = 30°$,使用 MATLAB 构造微分方程组， 利用欧拉法同时模拟小球的

速度变化与运行轨迹（不得直接人工求解与代入速度与位移公式），然后结合斜面方程，计算出斜面落点坐标$(s_0, s_1)$，与降落时的速度$(v_0^*, v_1^*)$。(误差分析选做，真实值来自于抛物线的计算)




答：本问题为理想移动轨迹（抛物线轨迹）的计算与模拟问题：

根据抛物线的初始位置$(0,10)$,初始斜率$\frac{2}{2}=1$,并且易得在$\frac{2}{10}=0.2$秒后，垂直方向分量为 0，即$0.2$秒，或水平移动 0.4m 后斜率为 0.利用待定系数法$f(x)=Ax^2+Bx+C$

代入条件可知$C=10, f'(0)=B=1$，$f'(0.4)=2A\cdot 0.4+B=0$

解得$A=-1.25, B=1, C=10, f(x)=-1.25x^2+x+10$

显然斜面方程为$g(x)=\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot x$,求解$f(x)=g(x)$

两方程的右侧交点解得：$-1.25x^2+\left(1-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)x+10=0$，根为$\frac{\frac{\sqrt{3}}{3}-1-\sqrt{\left(1-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2+50)}}{-2.5}=3.0025$

对应函数值为$1.7335$,故真实值$(\overline{s_0}, \overline{s_1})=(3.0025, 1.7335)$

水平速度恒定为 2，根据斜率$f'(\overline{s_0})$ =对应速度$(\overline{v_0^*}, \overline{v_1^*})=(2,-13.0127)$

（如果同学选做了误差分析(分析了速度和距离的误差)，并且真实值工整书写了手算过程或符号运算程序模拟过程（含原理），可以考虑进行加分）

为了构造具有一般性的微分方程组（可自由添加空气阻力等），我们设水平与垂直位移为$s_x, s_y$，向右和向上为正方向，单位 m。而水平与垂直方向的速度为$v_x, v_y$，单位 m/s.（若欧拉法仅构造垂直方向方程组也不扣分，但不能在垂直方向的速度直接套$v_y=v_0-10t$）

同时根据简单的物理关系，我们可以列出如下的线性常微分方程组：

$$\begin{bmatrix} s_x \\ s_y \\ v_x \\ v_y \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_x \\ s_y \\ v_x \\ v_y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -10 \end{bmatrix}, \quad \text{初值条件} \begin{bmatrix} s_x \\ s_y \\ v_x \\ v_y \end{bmatrix}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

根据这个方程组，欧拉法的程序设计可以如下呈现($v_x$因为恒等于 2，所以亦可以不在算法中进行迭代更新，这里只是提供一种一般化的代码结构)：

```
%% 真实值的计算
clear
GTx = (sqrt((1-sqrt(1/3))^2+50)+1-sqrt(1/3))/2.5;
```

```matlab
%计算斜面交点sx真实值
GTy = -1.25*GTx^2+GTx+10;                %计算sy真实值
Slope = -2.5*GTx + 1;                   %计算交点处轨迹的斜率
GTvx = 2;                               %vx的真实值
GTvy = GTvx*Slope;                      %vy的真实值

%% 欧拉法数值模拟的准备工作
d = 1e-5;                                      %时间模拟的步长
t = 0:d:3;                            %欧拉法假设t从0到3进行模拟
%各变量申请存储空间, 设定初值
sx = zeros(1,length(t)); sx(1) = 0;
sy = zeros(1,length(t)); sy(1) = 10;
vx = zeros(1,length(t)); vx(1) = 2;
vy = zeros(1,length(t)); vy(1) = 2;
%% 欧拉法循环(此代码亦可以用矩阵形式整体完成, 但不易读)
for i = 2:length(t)
    sx(i) = sx(i-1) + vx(i-1)*d;
    sy(i) = sy(i-1) + vy(i-1)*d;
    vx(i) = vx(i-1);
    vy(i) = vy(i-1) -10*d;
    if(sy(i)<sx(i)/sqrt(3))
        break;
    end
end

%% 结果分析(时间、位置、速度取值可用break时, break上次, 或平均值)
fprintf('接触时间为%f秒\n',(i-1)*d);
fprintf('横坐标位置为%f米,误差%f米\n',sx(i),abs(sx(i)-GTx));
fprintf('纵坐标位置为%f米,误差%f米\n',sy(i),abs(sy(i)-GTy));
fprintf('横向速度为%f米/秒,误差%f米/秒\n',vx(i),abs(vx(i)-GTvx));
fprintf('纵向速度为%f米/秒,误差%f米/秒\n',vy(i),abs(vy(i)-GTvy));
```

输出结果: (本题如果采用图示方法展示误差(不是仅仅为了画图而画图, 而是展示了落点附近的真实曲线与近似位置), 效果清晰美观的, 可考虑优先加分)

**接触时间为1.501280秒**

**横坐标位置为3.002560米,误差0.000025米**

**纵坐标位置为1.733427米,误差0.000088米**

**横向速度为2.000000米/秒,误差0.000000米/秒**

**纵向速度为-13.012800米/秒,误差0.000125米/秒**