回顾

- 线性规划问题(LP)的标准形式:

目标函数: $$\min f = c^T x$$

约束条件: $$\begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

这里,

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

回顾

- 一般线性规划问题可以转换为标准形式
- 解的特点：可行解集R是凸集. 如果有最优解，一定可以在R的极点上达到.
- 设决策变量个数n, 满足的线性方程个数为m. 总可以进一步假设：

  (i) $n > m$

  (ii) 系数矩阵A 是行满秩的，即 $\mathrm{rank}(A) = m$
- 若 $P_{i_1}, P_{i_2}, \cdots, P_{i_m}, i_1 < i_2 < \cdots < i_m$ 线性无关，称 $x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_m}$ 为*基变量*，其余 $n-m$ 个变量为*非基变量*. 基变量可由非基变量通过 $Ax = b$ 线性表示. 若非基变量都取0, 对应的基变量均 ≥ 0 ，得到的向量称为一个*基础可行解*. 基础可行解与R的极点一一对应.

1.3.1 例子

- 例1 求线性规划问题的最优解

$$\min f = -3x_1 - 5x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 & = & 10 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 & \geq & 0 \end{cases}$$

解：不妨取 x_3 为基变量($P_3 = (1)$ 显然线性无关), x_1, x_2 为非基变量.
有基础可行解 $x^1 = (0,0,10)^T$. 目标函数和基变量在用基变量表示为：

$$\begin{cases} f & = & -3x_1 - 5x_2 \\ x_3 & = & 10 - x_1 - 2x_2 \end{cases}$$

f 表达式中 x_1, x_2 的系数都是负值，所以 f 在 x^1 不可能取极小.

保持 $x_2 = 0$, 增大 x_1 直到 $x_3 = 10 - x_1 - 2x_2$ 减为0, 得到可行解 $x^2 = (10, 0, 0)^T$

这也是基础可行解.

新的基变量为 x_1, 非基变量为 x_2, x_3 . 在该非基变量下,

$$x_1 = 10 - 2x_2 - x_3$$

目标函数为

$$f = -3(10 - 2x_2 - x_3) - 5x_2 = -30 + x_2 + 3x_3$$

由于 f 表达式中变量系数均为非负, f 在 x^2 处取到极小值.

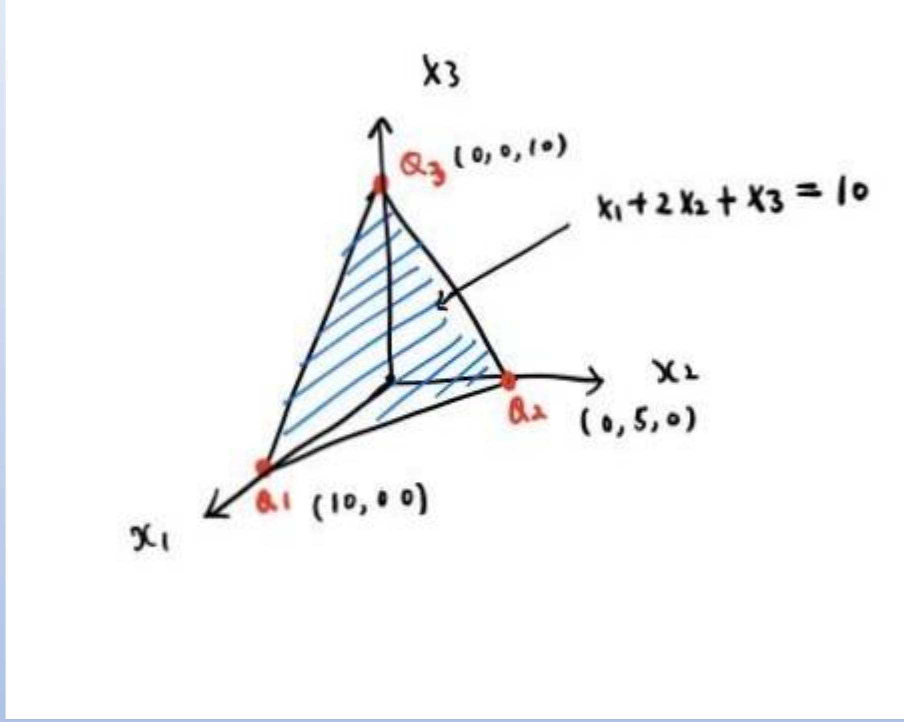

图1.3-1

例2 求线性规划问题的最优解

$$\max f = 20x_1 + 15x_2$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 & \leq & 180 \\ 3x_1 + 3x_2 & \leq & 135 \\ x_1 \geq 0, x_2 & \geq & 0 \end{cases}$$

解： Step 0. 把问题化成标准形式:

$$\min f' = -20x_1 - 15x_2$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + x_3 & = & 180 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_4 & = & 135 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 & \geq & 0, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

Step 1: 确定基变量、非基变量.

系数矩阵
$$A=\begin{bmatrix}5 & 2 & 1 & 0\\ 3 & 3 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}P_1 & P_2 & P_3 & P_4\end{bmatrix}$$

取基
$$B_1=\begin{bmatrix}P_3 & P_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

对应的基础解 $x^1=\begin{pmatrix}x_1^1 & x_2^1 & x_3^1 & x_4^1\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}0 & 0 & 180 & 135\end{pmatrix}^T$

是可行解（每个分量非负），故B_1是一个可行基. x_3, x_4 是基变量, x_1, x_2 是非基变量.

Step 2: 把目标表函数和基变量用非基变量表示, 判定目标函数是否在基础可行解处取到极小值.

在非基变量 x_1, x_2 下，目标函数和基变量可表示为:

$$\min f' = -20x_1 - 15x_2$$

$$\begin{cases} x_3 & = & 180 - 5x_1 - 2x_2 \\ x_4 & = & 135 - 3x_1 - 3x_2 \end{cases}$$

在 $x^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 180 & 135 \end{pmatrix}^T$，$f'$ 取不到最小!

Step 3: 增大某一非基变量，保持其余非基变量为0，直到某基变量变为零. 调整基变量和非基变量.

这里我们持续增大 x_1 , 而保持 $x_2 = 0$. 为保证 $x_3, x_4 \geq 0$ ， 需要

$$\begin{cases} x_3 & = & 180 - 5x_1 \geq 0 \\ x_4 & = & 135 - 3x_1 \geq 0 \end{cases}$$

取$x_1^2=\min\{\frac{180}{5},\frac{135}{3}\}=\frac{180}{5}=36$ ，$x_2^2=x_2^1=0$ ，有：

$$\begin{cases} x_3^2 & = & 180-5(36)-2(0)=0 \\ x_4^2 & = & 135-3(36)-3(0)=27 \end{cases}$$

所以 $x^2=\begin{pmatrix}x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}36 & 0 & 0 & 27\end{pmatrix}^T$ 是可行解. 其非零分量对应的系数矩阵的列向量

$$P_1=\begin{bmatrix}5 & 3\end{bmatrix}^T \qquad P_4=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}^T$$

线性无关，所以 x^2 还是基础可行解.

(LP) 问题新的基 $B_2=\begin{bmatrix}P_1 & P_4\end{bmatrix}$ ，基变量为 x_1,x_4 ，非基变量为 x_2,x_3 .

重复Step 2 – Step 3, 直到目标函数取到极小值.

$$\begin{cases} x_1 = 36 - \frac{2}{5}x_2 - \frac{1}{5}x_3 \\ x_4 = 27 - \frac{9}{5}x_2 + \frac{3}{5}x_3 \end{cases}$$

目标函数

$$f' = -20x_1 - 15x_2 = -20(36 - \frac{2}{5}x_2 - \frac{1}{5}x_3) - 15x_2 = -720 - 7x_2 + 4x_3$$

观察：这里x2的系数为负，所以 f' 在 x^2 取不到极小值.

保持 $x_3 = 0$, 增大 x_2 满足$x_1, x_4 \geq 0$. 当 $x_2^3 = \min\{\frac{36}{\frac{2}{5}}, \frac{27}{\frac{9}{5}}\} = \frac{27}{\frac{9}{5}} = 15,$

$$x_1^3 = 36 - \frac{2}{5}(15) = 30, x_4^3 = 27 - \frac{9}{5}(15) = 0$$

得到基础可行解

$$x^3 = \begin{pmatrix} x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 & x_4^3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 30 & 15 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T$$

新的基变量是 x_1, x_2， 非基变量是 x_3, x_4 . 在非基变量下, 目标函数，基变量表示为

$$\min f' = -825 + \frac{5}{3}x_3 + \frac{35}{9}x_4$$

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_1 & = & 30 - \frac{1}{3}x_3 + \frac{2}{9}x_4 \\ x_2 & = & 15 + \frac{1}{3}x_3 - \frac{5}{9}x_4 \end{array}\right.$$

新的表达式中, 变量 x_3, x_4 系数均非负，所以 f' 在 x^3 处取到极小值 $f'_{\min} = -825$.

原线性规划问题在$(x_1, x_2) = (30, 15)$ 处, $f_{\max} = 825$.

1.3.2 单纯形表

- 考虑标准形式的LP问题

$$\min f = c^T x$$

$$\begin{cases} Ax & = & b \\ x & \geq & 0 \end{cases}$$

不失一般性，不妨设 $B = \begin{bmatrix} P_1 & P_2 & \cdots & P_m \end{bmatrix}$ 是一个基. 基变量为 $x_1, \cdots, x_m$, 非基变量为 $x_{m+1}, x_{m+2}, \cdots, x_n$.

目标函数和基变量可以由非基变量表示为:

$$\begin{cases} f + (c_B^T B^{-1} N - c_N^T) x_N & = & c_B^T B^{-1} b \\ x_B + B^{-1} N x_N & = & B^{-1} b \end{cases}$$

直观的有

$$\begin{cases} f + 0.x_1 + 0.x_2 + \cdots + 0.x_m + b_{0(m+1)}x_{m+1} + \cdots + b_{0n}x_n = b_{00} \\ x_1 + b_{1(m+1)}x_{m+1} + \cdots + b_{1n}x_n = b_{10} \\ x_2 + b_{2(m+1)}x_{m+1} + \cdots + b_{2n}x_n = b_{20} \\ \cdots \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ x_m + b_{m(m+1)}x_{m+1} + \cdots + b_{mn}x_n = b_{m0} \end{cases}$$

单纯形表

		x_1	x_2	$\cdots$	x_m	x_{m+1}	$\cdots$	x_n
f	b_{00}	0	0	$\cdots$	0	$b_{0(m+1)}$	$\cdots$	b_{0n}
x_1	b_{10}	1	0	$\cdots$	0	$b_{1(m+1)}$	$\cdots$	b_{1n}
x_2	b_{20}	0	1	$\cdots$	0	$b_{2(m+1)}$	$\cdots$	b_{2n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$
x_m	b_{m0}	0	0	$\cdots$	1	$b_{m(m+1)}$	$\cdots$	b_{mn}

表1.3-1

例2 (revisited)

$$\min f' = -20x_1 - 15x_2$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + x_3 & = & 180 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_4 & = & 135 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 & \geq & 0, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 180 \\ 135 \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{bmatrix}^T \qquad c = \begin{bmatrix} -20 & -15 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

取基 $B_1 = \begin{bmatrix} P_3 & P_4 \end{bmatrix}$，有单纯形表

		x_1	x_2	x_3	x_4
f'	0	20	15	0	0
x_3	180	5	2	1	0
x_4	135	3	3	0	1

T_1

这里 $b_{01}=20>0, b_{02}=15>0$ ，基础可行解 $x^1=(0,0,180,135)^T$ 处，目标函数 $f'=0$ 不是极小.

取基 $B_2=\begin{bmatrix}P_1 & P_4\end{bmatrix}$ ，

$$\begin{cases} f'+7x_2-4x_3 & = & -720 \\ x_1+\frac{2}{5}x_2+\frac{1}{5}x_3 & = & 36 \\ \frac{9}{5}x_2-\frac{3}{5}x_3+x_4 & = & 27 \end{cases}$$

有单纯形表

		x_1	x_2	x_3	x_4
f'	-720	0	7	-4	0
x_1	36	1	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	0
x_4	27	0	$\frac{9}{5}$	$-\frac{3}{5}$	1

T_2

这里 $b_{03}=-4<0$ ，但$b_{02}=7>0$ ，基础可行解 $x^2=(36,0,0,27)^T$ 处，目标函数 $f'=-720$ 不是极小.

目标：研究在不同基下，单纯形表的演化. 当表中目标函数所在行系数$b_{0i}\leq 0$ ，$1\leq i\leq n$ ，目标函数取到极小值.

T_1

		x_1	x_2	x_3	x_4
f'	0	20	15	0	0
x_3	180	5	2	1	0
x_4	135	3	3	0	1

T_2

		x_1	x_2	x_3	x_4
f'	-720	0	7	-4	0
x_1	36	1	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	0
x_4	27	0	$\frac{9}{5}$	$-\frac{3}{5}$	1

$$b_{01} = 20 > 0$$

$$\begin{aligned}\theta &= \min\{\frac{b_{10}}{b_{11}}, \frac{b_{20}}{b_{21}}\} \\ &= \min\{\frac{180}{5}, \frac{135}{3}\} \\ &= \frac{180}{5}\end{aligned}$$

调整基变量和非基变量：

$$x_3 \leftrightarrow x_1$$

做初等行变换，使得单纯形表中新的基变量 x_1 所在列为标准单位向量：

1. $\frac{1}{5}r_3$
2. $r_2 - 20r_3$
3. $r_4 - 3r_3$

T_2

		x_1	x_2	x_3	x_4
f'	-720	0	7	-4	0
x_1	36	1	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	0
x_4	27	0	$\frac{9}{5}$	$-\frac{3}{5}$	1

T_3

		x_1	x_2	x_3	x_4
f'	-825	0	0	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{35}{9}$
x_1	30	1	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{9}$
x_2	15	0	1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{5}{9}$

$b_{02} = 7 > 0$

$$\begin{aligned}\theta &= \min\{\frac{b_{10}}{b_{12}}, \frac{b_{20}}{b_{22}}\} \\ &= \min\{\frac{36}{\frac{2}{5}}, \frac{27}{\frac{9}{5}}\} \\ &= \frac{27}{\frac{9}{5}}\end{aligned}$$

调整基变量和非基变量:

$$x_4 \leftrightarrow x_2$$

做初等行变换，使得单纯形表中新的基变量x_2所在列为标准单位向量:

1. $\frac{5}{9} r_4$
2. $r_2 - 7 r_4$
3. $r_3 - \frac{2}{5} r_4$

在新的单纯性表中， f' 所在行的系数均非正. 所以在基础可行解

$$x^3 = (30, 15, 0, 0)^T$$

处，f' 取到极小值:

$$f'_{\min} = -825.$$