题目3.1.1：

根据泊松过程的定义，对于充分小的t，有

$$0 \le P(N(t+1)-N(1)=2) \le P(N(t+1)-N(1)\ge 2)=o(t)$$

因此$\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{P(N(t+1)-N(1)=2)}{t}=0$

【注1】由于题目3.1.2、题目3.1.3、题目3.1.5均可利用题目题目3.1.4，所以这里优先解决题目3.1.4。

题目3.1.4：

$$\begin{aligned}
& P(N(s)=k|N(t)=n) \\
= & \left[P(N(t)=n|N(s)=k)P(N(s)=k)\right]/P(N(t)=n) \\
= & \left[P(N(t)-N(s)=n-k|N(s)=k)P(N(s)=k)\right]/P(N(t)=n)\text{【这步不能跳】} \\
= & \left[P(N(t)-N(s)=n-k)P(N(s)=k)\right]/P(N(t)=n) \\
= & \left[\frac{(\lambda(t-s))^{n-k}e^{-\lambda(t-s)}}{(n-k)!}\frac{(\lambda s)^k e^{-\lambda s}}{k!}\right]/\frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!} \\
= & C_n^k\left(\frac{s}{t}\right)^k\left(1-\frac{s}{t}\right)^{n-k} \qquad 0\le k\le n
\end{aligned}$$

题目3.1.3：

$$\begin{aligned}
& P(X_1\le s|N(t)=1) \\
= & P(N(s)\ge 1|N(t)=1) \\
= & 1-P(N(s)=0|N(t)=1) \\
= & 1-(1-\frac{s}{t})\text{【利用题目3.1.4】} \\
= & \frac{s}{t}
\end{aligned}$$

【注2】由于题目3.1.2与题目3.1.5重合度很高，所以合起来写

题目3.1.2与题目3.1.5：

3.1.5(1)计算$E(N(t)N(s+t))$**：**

$$\begin{aligned} & E(N(t)N(s+t)) \\ = & E\left(N(t)(N(s+t)-N(t))+(N(t))^2\right) \\ = & E\left(N(t)(N(s+t)-N(t))\right)+E\left((N(t))^2\right) \text{【这步不能跳】} \\ = & E(N(t))E(N(s+t)-N(t))+(E(N(t)))^2+var(N(t)) \\ = & \lambda^2 st+\lambda^2 t^2+\lambda t \end{aligned}$$

3.1.2(a)计算$cov(N(t),N(s+t))$**：**

$$\begin{aligned} & cov(N(t),N(s+t)) \\ = & E(N(t)N(s+t))-E(N(t))E(N(s+t)) \\ = & \lambda^2 st+\lambda^2 t^2+\lambda t-\lambda^2 t(s+t) \\ = & \lambda t \end{aligned}$$

3.1.2(b)与3.1.5(2)计算$E(N(s+t)|N(s))$**与**$E(N(s)|N(s+t))$**：**

$$\begin{aligned} & E(N(s+t)|N(s)=n) \\ = & E(N(s+t)-N(s)|N(s)=n)+n \text{【这步不能跳】} \\ = & E(N(s+t)-N(s))+n \\ = & \lambda t+n \end{aligned}$$

根据题目3.1.4，可以直接得出$E(N(s)|N(s+t)=n)=\dfrac{ns}{s+t}$

3.1.5(3)证明当$0\le s\le t$**时，**$P(N(s)\le N(t))=1$**：**

$$P(N(s)\le N(t))=P(N(t)-N(s)\ge 0)=P(N(t-s)\ge 0)=1$$

3.1.2(c)与3.1.5(4)证明$\forall\varepsilon>0,\lim\limits_{s\to 0^+}P(N(t+s)-N(t)>\varepsilon)=0$**：**

对于充分小的s，有

$$P(N(t+s)-N(t)\ge 2)=o(s),P(N(t+s)-N(t)=1)=\lambda s+o(s)$$

此时$P(N(t+s)-N(t)=0)=1-\lambda s+o(s)$

因此$\lim\limits_{s\to 0^+} P(N(t+s)-N(t)=0)=1$，

因此$\lim\limits_{s\to 0^+} P(N(t+s)-N(t)>\varepsilon)=0$