Q1. 设矩阵$A=\begin{bmatrix}1 & 4 & 7\\ 2 & 5 & 8\\ 3 & 6 & 9\end{bmatrix}$,请利用 MATLAB 函数计算矩阵$A$的 1-范数，2-范数，$\infty-$范数，Frobenius 范数以及核范数。

答：代码如下：

```
A = reshape(1:9,3,3);
N1 = norm(A,1)                 %1-范数输出 N1 = 24
N2 = norm(A,2)                 %2-范数输出 N2 = 16.8481
NI = norm(A,inf)               %∞-范数输出 NI = 18
NF = norm(A,'fro')             %Frobenius范数输出 NF = 16.8819
[U S V] = svd(A);
NN = sum(diag(S))          %奇异值都是非负的，核范数输出 NN = 17.9165
```

Q2. 证明：若A为实对称半正定矩阵，则$\|A\|_* = \mathrm{trace}(A)$

证：当A为实对称矩阵时，A必然可以正交对角化，即∃正交阵Q,使得$A = Q\Lambda Q^{-1} = Q\Lambda Q^\top$

此时，$A^\top A = (Q\Lambda Q^\top)^\top Q\Lambda Q^\top = Q\Lambda^\top Q^\top Q\Lambda Q^\top = Q\Lambda^\top (Q^\top Q)\Lambda Q^\top = Q\Lambda\Lambda Q^\top = Q(\Lambda^2)Q^\top$
这里，$Q^\top Q = I$是由正交阵定义获得，Λ是对角阵所以其转置等于本身。由此可见$A^\top A$也可以正交对角化为对角阵Λ^2。因为对角化后的对角阵必然表示矩阵特征值，因此$A^\top A$的特征值对应为A的特征值的平方。

由于A的半正定性，可知其特征值非负，故奇异值$\sqrt{\lambda_i(A^\top A)}$对应等于特征值$\lambda_i(A)$，再根据

特征值性质（来自特征多项式韦达定理），$\mathrm{trace}(A) = \sum_i \lambda_i(A) = \sum_i \sqrt{\lambda_i(A^\top A)} = \|A\|_*$■

Q3. 习题 4 第 10 题，使用 MATLAB 函数 `A\b`,`inv(A)*b` 与 `rref` 分别得到了什么结果，为什么？请解释原因。并且将线性方程组的通解表示出来。
求矩阵$Ax = b$的解，其中A为四阶魔方阵,b为4×1的全 1 列向量

答：(1) `A\b` 求解

```
A = magic(4);
b = ones(4,1);
s1 = A\b
In W10Q2 (line 3)
警告: 矩阵接近奇异值，或者缩放错误。结果可能不准确。RCOND =  4.625929e-18。
s1 =

    0.0282
    0.0257
    0.0331
    0.0306
```

该结果的出线原因可能是方程组有无穷多解或本身无解
回代A*s1可见解是正确的

(2) `inv(A)*b` 求解

```
s2 = inv(A)*b
```

```
In W10Q2 (line 4)
警告: 矩阵接近奇异值，或者缩放错误。结果可能不准确。RCOND =  4.625929e-18。
s2 =

    0.0938
   -0.1250
    0.3750
    0.0313
```

回代A*s2发现解是错误的

(3) `rref` 观察与通解的表示

`[R,C]=rref([A,b])`   %利用行阶梯型进行观察，发现系数矩阵与增广矩阵等秩，但都小于4，可见该线性方程组存在无穷组解。前三列构成了线性独立列。第四列完成了对应齐次方程组的解的表示。若解表示为$[x_1,x_2,x_3,x_4]^{\top}$，则对应齐次方程的解满足$x_1=-x_4,x_2=-3x_4,x_3=3x_4$.最后一列为其中一个原非齐次方程组的一个特解。

```
R =
    1.0000         0         0    1.0000    0.0588
         0    1.0000         0    3.0000    0.1176
         0         0    1.0000   -3.0000   -0.0588
         0         0         0         0         0
C =
     1     2     3
```

因此通解也可以表示为：

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = c \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.0588 \\ 0.1176 \\ -0.0588 \\ 0 \end{bmatrix}$$

注意得到此通解表达式需要获取其中一个对应齐次方程组的非零特解ξ，以及一个非齐次线性方程组的非零特解\η。ξ事实上可以使用阶梯型结果自行写出，亦可以使用MATLAB函数`null(A)`获取。而η则可以通过`A\b`或`rref`阶梯型的最后一列来代替。当然，ξ不是唯一的，只要比例正确即可。η更不是唯一的，只要与某个非齐次特解相差ξ的若干倍即可。

Q4. 仿照今天课件雅可比迭代法的方法，完成高斯-塞德尔迭代法的代码编写，观察迭代收敛情况。(可用\计算 B 与 f)

```
rng default
A=rand(400,400)+5e2*eye(400);
x=rand(400,1);b=A*x;
```

答：

```
rng default
A=rand(400,400)+5e2*eye(400);
x=rand(400,1);
b=A*x;
M=tril(A);                  %M为下三角矩阵(含对角元)
N = M-A;                    %N为不含对角元的上三角部分
B = M\N;                    %上下三角矩阵的\运算是很快的
f = M\b;
```

```
x_old = zeros(400,1);
err = 1e12;                %假设初始误差较大，必须要进行至少一次迭代
iter = 0;
while(err>1e-6)            %相邻两步误差小于1×10^-6则停止迭代
    iter = iter + 1;
    x_new = B*x_old + f;          %高斯-塞德尔迭代法的本质步骤
    err = norm(x_new-x_old);
    x_old = x_new;
end
iter                    %迭代次数
```

```
iter =
     8
```

```
err = norm(x_new-x) %最终求解的误差
```

```
err =
   7.0906e-08
```

对于本例，高斯-塞德尔迭代法在误差水平相当的情况下，收敛比雅可比迭代法更快，所需迭代次数更少。