中国管理科学
*Chinese Journal of Management Science*
ISSN 1003-207X,CN 11-2835/G3

# 《中国管理科学》网络首发论文

题目：考虑消费者参照效应与策略行为的多产品动态定价
作者：刘海英，毕文杰
DOI：10.16381/j.cnki.issn1003-207x.2019.1248
网络首发日期：2020-05-14
引用格式：刘海英，毕文杰．考虑消费者参照效应与策略行为的多产品动态定价．中国管理科学. https://doi.org/10.16381/j.cnki.issn1003-207x.2019.1248

DOI：10.16381/j.cnki.issn1003-207x.2019.1248

# 考虑消费者参照效应与策略行为的多产品动态定价

刘海英 [1]，毕文杰 [2]

（1. 湖南财政经济学院会计学院，湖南 长沙 410205；
2. 中南大学商学院，湖南 长沙 410083）

**摘要**：在考虑客户同时表现出参照依赖和策略行为的场景下，本文构建了一个垄断厂商两阶段的多产品动态定价模型。该模型将易逝品的销售分为正常价格阶段和促销价格阶段，每个阶段又分为多期。客户分为短视型和策略型，其中策略型客户会根据两个阶段价格的差异和获得商品的概率，决定是在第一阶段和等到第二阶段购买商品。基于随机动态规划的结构属性和超模理论，得到了两个阶段稳态价格的解析解，并且证明最优价格路径是单调且随着初始参照价格变化而变化。最后，通过对两种产品的数值实验，分析了各种参数对最优稳态价格的影响。结果显示，零售商可以采取多产品联合定价策略，即基于商店水平的定价策略，并通过调整核心产品的比重来获得更高的利润。

**关键词**：动态定价；多产品定价；参照依赖；策略性顾客行为
**中图分类号**：F270　　　　**文献标识码**：A

## 1. 引言

易逝品或季节型产品的销售往往分为两个阶段：第一阶段是正常价格销售，第二阶段为季末的促销或者降价销售。与此对应，市场上的客户一般也分为短视型客户和策略型顾客两种，后者会根据效用最大化的原则选择在第一阶段购买，还是等到第二阶段降价后购买。当然，由于存在库存风险和其他不确定因素，如果延迟购买就无法保证能够得到产品。因此，顾客的策略性客户的行为对市场需求和公司利润都会产生很大的影响。Besanko和Winston[1]首先在动态定价中考虑了策略性行为。随后，考虑顾客策略性行为的动态定价模型引起广泛的关注。Aviv和Pazgal[2]研究了存在顾客策略行为的季节性产品动态定价问题，他们证明了当考虑消费者的策略性行为时，固定折扣策略优于临时性折扣策略。Levin等 [3] 研究了在双寡头市场上，消费者策略性行为对公司的定价策略和利润的影响。Mersereau和Zhang[4] 则考虑了在策略型消费者分布不确定情况下的动态定价模型。Su[5]分析了顾客以确定顺序到达，策略选择购买时机的定价问题。马鹏等[6]研究了消费者策略行为下，质量有差异产品的两阶段定价问题。李贺等[7]研究了存在策略消费行为风险的动态定价问题。李四杰和邵灵芝[8]探讨了消费者策略行为的供应商产品的三种升级策略。胡玉生等[9]研究了可加效用下，考虑销售商风险规避态度和消费者延迟购买行为的易逝品动态定价问题。官振中等[10]将消费者的策略性行为和历史价格影响相结合，描述了消费者在历史和预期价格影响下零售商的单产品动态定价策略。唐跃武等[11]基于报童模型，提出了考虑策略性消费者的生鲜农产品定价和库存决策模型。

另一方面，人类的行为经常受到前期行为的影响。当消费者再次购买商品时，他们会把当前的价格与由过去价格形成的一个内部标准进行比较，这个内部标准称为参照价格[12]。消费者将高于参照价格的定价视为“高价”，低于参照价格则视为“低价”。参照

---

**基金项目**:国家自然科学基金资助项目（71871231, 91646115, 71991465）；湖南省自然科学基金资助项目（2018JJ3012）.
**通讯作者简介**：毕文杰（1972--），男（汉族），湖南常德人，中南大学商学院，教授，研究方向：收益管理，E-mail:beenjoy@126.com.

价格对消费者需求的影响称为参照效应，前景理论[13]认为这是人们普遍存在的心理。因此，在考虑重复购买的动态定价问题时，有必要考虑参照效应。Popescu 和 Wu[14]探讨了参考价格为指数平滑模型的垄断厂商动态定价问题。Nasiry 和 Popescu[15] 研究了基于峰终规则的多期动态定价问题。Huh 等[16]则考虑了当消费者应用定价历史来制定购买决策时，公司的收益管理问题。Bi 等[17]考虑了消费者记忆为有限窗口的参照效应动态定价问题。Liu 等[18]研究了竞争环境下，具有参照效应的动态定价策略。周尔凤[19]等研究了两个寡头企业都采用广告承诺、都采用价格承诺，及一个企业采用广告承诺而另一个企业采用价格承诺等不同情形下的最优广告和价格决策，并以此分析了三种情形下参考价格效应对最优的广告投入及定价策略的影响。

上述文献分别考虑了顾客参照依赖和策略行为对动态定价的影响，而在现实中，消费者又往往同时表现出这两种行为，Popescu 和 Wu [14]也指出同时考虑两种行为是一个重要的研究方向。因此，本文中我们将同时考虑消费者的参照依赖和策略性行为。此外，我们还将问题扩展到多产品定价问题。多产品定价问题分为基于生产的多产品问题和基于需求的多产品问题。以前的多产品动态定价问题主要关注前者，例如 Gallego 和 Van Ryzin[20]等。而最近，主要研究热点是后者，即基于需求的多产品定价问题。对于多产品的参照价格形成机制，我们参照了 Calicchio 和 Krell[21]的研究。他们发现：核心产品的价格决定了顾客对整个商店产品的价格期望。基于这个结论，多产品的需求形成机制有两种：一是产品水平，即参照价格只受产品本身价格的影响。另一种是商店水平，即参照价格受多个核心产品的价格影响，而我们重点考虑第二种机制。

文章余下部分安排如下：下一节介绍两阶段多期多产品的动态定价模型并求解。第三节，我们通过对两种产品的数值实验，分析各参数对定价策略的影响。最后是结论和研究展望。

## 2. 多产品动态定价模型

### 2.1 假设和主要符号说明

市场上的垄断厂商采取两阶段多期方式出售易逝性或季节性产品。消费者根据产品两阶段的价格，用效用最大化的标准，选择在第一阶段还是第二阶段购买。

假设 1: 市场上存在两种类型的消费者—策略型和短视型，他们对产品 $j$ 的价值估计服从 $[v_L^j, v_H^j]$ 上的均匀分布。顾客总数为 $N$，策略型消费者的比例为 $\phi$ $(0 \le \phi \le 1)$.

1) 当消费者剩余大于零时，短视的消费者会立即购买。我们定义 $D_{m1}^j$ 为短视型消费者在第一阶段的需求，$D_{m2}^j$ 为第二阶段需求。

2) 策略型顾客会选择在第一阶段购买或延迟到第二阶段购买，选择的标准是消费者效用最大。策略型顾客能够预测产品在第二阶段的价格，并且知道在第二阶段能够得到产品 $j$ 的概率是 $\xi^j$。在第二阶段，若消费者剩余为正，策略型顾客会立即购买。我们定义 $D_{s1}^j$ 和 $D_{s2}^j$ 分别为策略型消费者在第一阶段和第二阶段的需求。

假设 2: 顾客的参照价格是基于商店水平的，即基于 $\boldsymbol{\lambda}^{\mathbf{T}}\mathbf{p}_{\mathbf{1,t}}$。其中 $\boldsymbol{\lambda} = \left(\lambda^1, \lambda^2, \ldots, \lambda^n\right)$ 非负，表示每个产品在消费者心中的权重，且 $\mathbf{1}^T\boldsymbol{\lambda} = 1$。$\mathbf{p}_{\mathbf{1,t}} = \left(p_{1,t}^1, p_{1,t}^2, \ldots, p_{1,t}^n\right)$ 是 t 时期第一阶段所有产品的价格向量。第一阶段顾客的参照价格 $r_{1,t}$ 为指数平滑规律：$r_{1,t} = r_t = \alpha r_{t-1} + (1-\alpha)\boldsymbol{\lambda}^{\mathbf{T}}\mathbf{p}_{\mathbf{1,t}}$，，$0 \le \alpha < 1$ 表示记忆参数。第二阶段的参考价格等于第一阶段产品的真实价格，$r_{2,t} = \boldsymbol{\lambda}^{\mathbf{T}}\mathbf{p}_{\mathbf{1,t}}$，

假设 3: 消费者是损失规避的并且他们购买产品 $j$ 的效用函数是线性的：

$$U^j(\mathbf{p} \mid r) = v^j - p^j + \eta\lambda^j(r - \boldsymbol{\lambda}^{\mathbf{T}}\mathbf{p}_{\mathbf{1,t}}),$$

其中 $v^j - p^j$ 为直接效用，$\eta\lambda^j(r - \boldsymbol{\lambda}^{\mathbf{T}}\mathbf{p}_{\mathbf{1,t}})$ 为参照效用，$v^j$ 表示消费者对产品 $j$ 的估值，$\eta$ 表示消费者损失规避系数，$\lambda^j$ 则表示产品 $j$ 在消费者心中的权重。

根据假设 1-3，消费者的效用函数和需求函数如命题 1。

命题 1: 若假设 1-3 成立, 那么消费者对于产品 $j$ 的两阶段需求函数为

$$D_1^j(\mathbf{p}, r) = a^j - b^j p_1^j + c\lambda^j\left(r - \boldsymbol{\lambda}^{\mathbf{T}}\mathbf{p}_{\mathbf{1}}\right) - \frac{\phi\xi^j}{1-\xi^j}\left(b^j\left(p_1^j - p_2^j\right) - c\lambda^j\left(\boldsymbol{\lambda}^{\mathbf{T}}\mathbf{p}_{\mathbf{1}} - \boldsymbol{\lambda}^{\mathbf{T}}\mathbf{p}_{\mathbf{2}}\right)\right) \tag{1}$$

$$D_2^j(\mathbf{p},r)=$$
$$\left(b^j+c\lambda^j\right)\left(\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\mathbf{p}_1-\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\mathbf{p}_2\right)-c\lambda^j\left(r-\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\mathbf{p}_1\right)+$$
$$\frac{\phi\xi^j}{1-\xi^j}\left(b^j\left(p_1^j-p_2^j\right)+c\lambda^j\left(\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\mathbf{p}_1-\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\mathbf{p}_2\right)\right) \tag{2}$$

其中 $\frac{Nv_H^j}{v_H^j-v_L^j}=a^j$，$\frac{N}{v_H^j-v_L^j}=b^j$，$\frac{\eta N}{v_H^j-v_L^j}=c^j$，$c=c^j$ 表示消费者的参照效应系数。

证明见附录.

根据上述命题，我们可以知道，与市场上仅有短视顾客相比，当市场上存在策略型顾客时，由于他们的等待行为，第一阶段的需求将会减少，而第二阶段的需求会增加，其增减值都为：

$$\Delta=\frac{\phi\xi^j}{1-\xi^j}\left(b^j\left(p_1^j-p_2^j\right)+c\lambda^j\left(\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\mathbf{p}_1-\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\mathbf{p}_2\right)\right)$$

，即顾客的策略性行为对两阶段的总需求没有影响。然而，由于他们的等待行为，第一阶段的需求和第二阶段的需求变化会随着 $\phi$ 增大而增大，即策略型消费者的比例增大,需求的变化也越大;并且当 $p_1^j-p_2^j$ 变大，即第二阶段的价格变化变大，需求的改变也越大。

## 2.2 多产品动态定价模型

我们假设垄断厂商的生产成本为零，结合之前的假设，动态定价问题为最大化所有时期的销售利润总和，即

$$\max\sum_{t=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{2}\gamma^{t-1}D_{i,t}^j(\mathbf{p}_t^j,r_t)\,p_i^j \tag{3}$$

其中 $\gamma$ 折现因子. 参照价格的更新机制为

$$r_{1,t}=r_t=\alpha r_{t-1}+(1-\alpha)\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\mathbf{p}_{1,t}\ ,$$
$$r_{2,t}=\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\mathbf{p}_{1,t}.$$

方程 (3) 的贝尔曼方程为

$$J\left(r_{t-1},\mathbf{p}_{\mathbf{t-1}}\right)=\max_{\mathbf{p}}\Pi\left(\mathbf{p}_t,r_t\right)+\gamma J\left(r_t,\mathbf{p}_{\mathbf{t}}\right) \tag{4}$$

其中

$$\Pi\left(\mathbf{p}_t,r_t\right)=\sum_{j=1}^{n}\mathbf{D}_1^{j\mathrm{T}}\mathbf{p}_1+\mathbf{D}_2^{j\mathrm{T}}\mathbf{p}_2\ ,$$

$$\mathbf{p}_{\mathbf{t}}=[\mathbf{p}_{\mathbf{1,t}},\mathbf{p}_{\mathbf{2,t}}]=[\,p_{1,t}^1,p_{2,t}^1,p_{1,t}^2,p_{2,t}^2,\ldots,p_{1,t}^n,p_{2,t}^n]$$

$\mathbf{T}$ 表示转置。

模型(4)利润函数为子模函数，根据 Miranda[22]，Stokey 和 Lucas[23]的理论，模型(3)仅存在一个稳态，且稳态满足如下条件。

**定理 1**：模型(3) 稳态价格 $\mathbf{p}^*$ 满足

$$\begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & \cdots & k_{1m}\\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & \cdots & k_{2m}\\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & \cdots & k_{3m}\\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & \cdots & k_{4m}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ k_{m1} & k_{m2} & k_{m3} & k_{m4} & \cdots & k_{mm} \end{pmatrix}\mathbf{p}^*=\begin{pmatrix} a^1\\ 0\\ a^2\\ 0\\ \vdots\\ 0 \end{pmatrix}$$
$$r^*=\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\mathbf{p}^* \tag{5}$$

其中，$m=2n$，在公式(5)的矩阵中 $k$ 满足

(1) 当 $j$ 是奇数，

$$k_{jj}=\frac{2\left(1-\xi^{\frac{j+1}{2}}+\phi\xi^{\frac{j+1}{2}}\right)\left(b^{\frac{j+1}{2}}+c\lambda^{\frac{j+1}{2}}\lambda^{\frac{j+1}{2}}\right)}{1-\xi^{\frac{j+1}{2}}}-\frac{(1-\alpha)\gamma}{1-\alpha\gamma}c\lambda^{\frac{j+1}{2}}-c\lambda^{\frac{j+1}{2}}\lambda^{\frac{j+1}{2}}$$

$$k_{ji}=-\left(\frac{2\phi\xi^{\frac{i}{2}}\left(b^{\frac{i}{2}}+c\lambda^{\frac{i}{2}}\lambda^{\frac{i}{2}}\right)}{1-\xi^{\frac{i}{2}}}+2c\lambda^{\frac{i}{2}}\lambda^{\frac{i}{2}}+b^{\frac{i}{2}}\right)+\frac{(1-\alpha)\gamma}{1-\alpha\gamma}c\lambda^{\frac{i}{2}},i=j+1.$$

，

(2) 当 $i$ 是奇数，

$$k_{ij}=c\lambda^{\frac{i+1}{2}}\lambda^{\frac{j+1}{2}}\left(2+\frac{\phi\xi^{\frac{j+1}{2}}}{1-\xi^{\frac{j+1}{2}}}+\frac{\phi\xi^{\frac{i+1}{2}}}{1-\xi^{\frac{i+1}{2}}}\right)-,$$
$$\frac{(1-\alpha)\gamma}{1-\alpha\gamma}c\lambda^{\frac{j+1}{2}}-c\lambda^{\frac{j+1}{2}}\lambda^{\frac{i+1}{2}},i\neq j$$

(3) 当 $i$ 和 $j$ 是偶数，

$$k_{ij}=-c\lambda^{\frac{j}{2}}\lambda^{\frac{i}{2}}\left(2+\frac{\phi\xi^{\frac{j}{2}}}{1-\xi^{\frac{j}{2}}}+\frac{\phi\xi^{\frac{i}{2}}}{1-\xi^{\frac{i}{2}}}\right),i\neq j$$

.

(4) 当 $i$ 是奇数，且 $j$ 为偶数，

$$k_{ij} = -c\lambda^{\frac{i+1}{2}}\lambda^{\frac{j}{2}}\left(2+\frac{\phi\xi^{\frac{i+1}{2}}}{1-\xi^{\frac{i+1}{2}}}+\frac{\phi\xi^{\frac{j}{2}}}{1-\xi^{\frac{j}{2}}}\right)+\frac{(1-\alpha)\gamma}{1-\alpha\gamma}c\lambda^{\frac{j}{2}}.$$

(5) 当 $j$ 是偶数,

$$k_{jj} = -\frac{2\left(1-\xi^{\frac{j}{2}}+\phi\xi^{\frac{j}{2}}\right)\left(b^{\frac{j}{2}}+c\lambda^{\frac{j}{2}}\lambda^{\frac{j}{2}}\right)}{1-\xi^{\frac{j}{2}}},$$

$$k_{ji} = \frac{2\phi\xi^{\frac{j}{2}}\left(b^{\frac{j}{2}}+c\lambda^{\frac{j}{2}}\lambda^{\frac{j}{2}}\right)}{1-\xi^{\frac{j}{2}}}+b^{\frac{j}{2}}+c\lambda^{\frac{j}{2}}\lambda^{\frac{j}{2}},$$

$$j = i+1.$$

证明见附录。

定理 1 表明，若消费者的参考价格更新机制符合指数平滑模型并且消费者表现出策略性行为，则垄断厂商的最优定价策略会收敛到一个稳态价格，且稳态价格受参照效应（初始参照价格 $r_0$ 和平滑指数 $\alpha$ ）和消费者策略性行为的影响（策略型消费者比例 $\phi$ ）。

根据超模理论(Smith 和 McCardle[24]，Topkis[25])，模型(5)在第一阶段的最优价格路径 $\{p_{1,t}^1, p_{1,t}^2, \dots, p_{1,t}^n\}$ 是单调的，$\boldsymbol{\lambda}^{\mathbf{T}}\mathbf{p}_{\mathbf{1,t}}$ 收敛于 $r^* = \boldsymbol{\lambda}^{\mathbf{T}}\mathbf{p}^*$，其中 $\mathbf{p}^*$ 表示稳态价格，$r^*$ 表示稳态参考价格，即：

当 $r_0 < r^*$，$\{p_{1,t}^1, p_{1,t}^2, \dots, p_{1,t}^n\}$ 随着时间递增；当 $r_0 > r^*$，$\{p_{1,t}^1, p_{1,t}^2, \dots, p_{1,t}^n\}$ 随着时间递减；当 $r_0 = r^*$，$\{p_{1,t}^1, p_{1,t}^2, \dots, p_{1,t}^n\}$ 是常数。

因此，我们得到，当初始参照价格 $r_0$ 较高时，最优定价策略类似于撇脂策略。垄断厂商设定高的初始价格，最优价格随着时间递减并总是低于参照价格( $p_t < r_t$ )。由于每个周期的价格都小于参照价格，消费者能够得到剩余，因此能够累积需求并增加当前利润。相反，当参照价格 $r_0$ 较低时，最优价格路径类似于渗透策略，即垄断厂商的最优价格随着时间递增并且总是高于参照价格( $p_t > r_t$ )。由于每个周期的价格均高于参照价格，消费者感知到损失，因此，负的参照依赖效应对当前利润造成了损失。但是当前期的高价将提高下一期的参照价格，进而可以增加下一期的利润，而增加的利润大于损失的利润，所以垄断厂商的总体利润还是会增加.

## 3. 数值分析与比较

### 3.1 模型参数与稳态价格

在本节中，我们将分析稳态价格是如何随参数的改变而改变的. 当我们分析一个参数时，其他参数不变. 我们假设垄断厂商销售两种产品且 $a = a^1 = a^2 = 100$，$b = b^1 = b^2 = 20$，$c = c^1 = c^2 = 10$，$\alpha = 0.5$，$\gamma = 0.95$，$\xi = \xi^1 = \xi^2 = 0.5$，$\lambda^1 = 0.6$，$\lambda^2 = 0.4$，$\phi = 0.6$，我们得到如下图形。

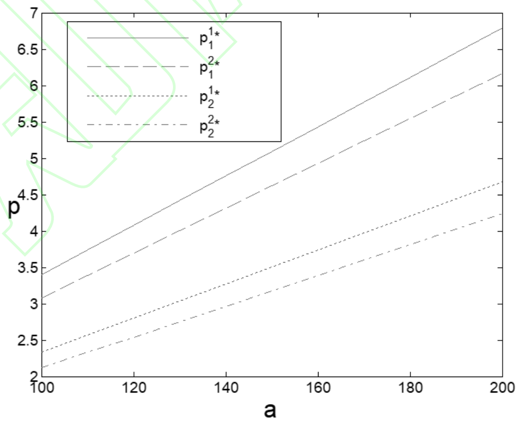


图 1 参数 $a$ 与稳态价格的关系

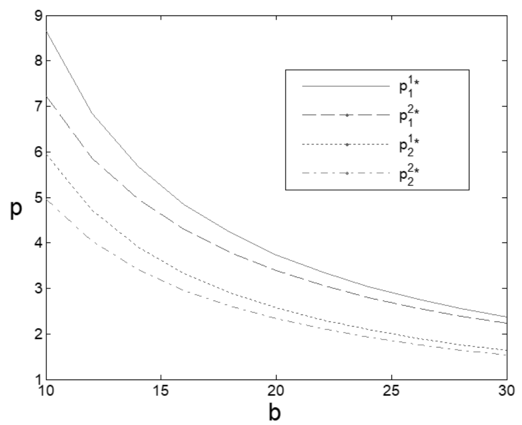


图 2 参数 $b$ 与稳态价格的关系

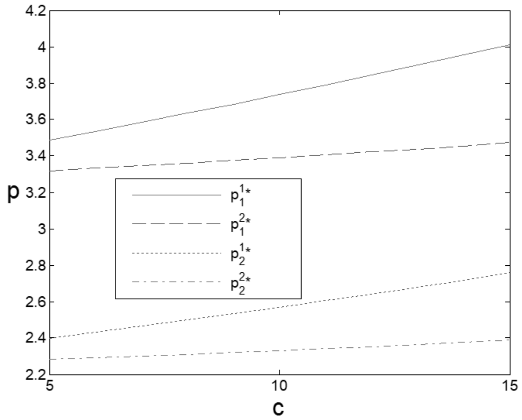


图 3 参数$c$与稳态价格的关系

图 1、图 2 和图 3 表明当$a$和$b$递增，两种产品的稳态价格均递减。当 $c$递增时，两种产品的价格递增。此外，当$a$ 和$b$固定时，价格随着参数$a$递增而递减。这是因为$a/b=V^H$， $a/c=V^H/\eta$ 反映了消费者对市场上产品的估值范围。消费者对产品估值范围越大，降价空间也越大。

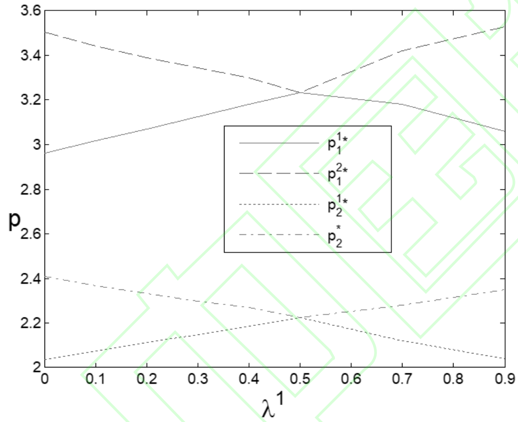


图 4 参数$\lambda^1$与稳态价格的关系

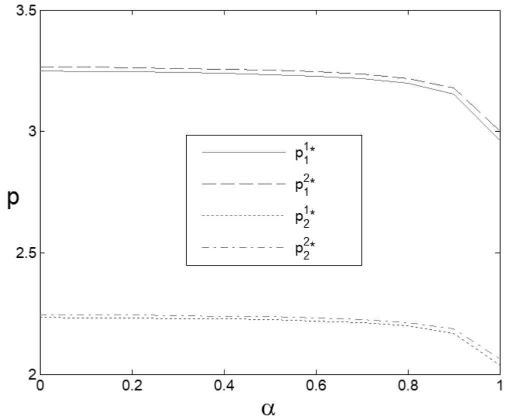


图 5 参数$\alpha$与稳态价格的关系

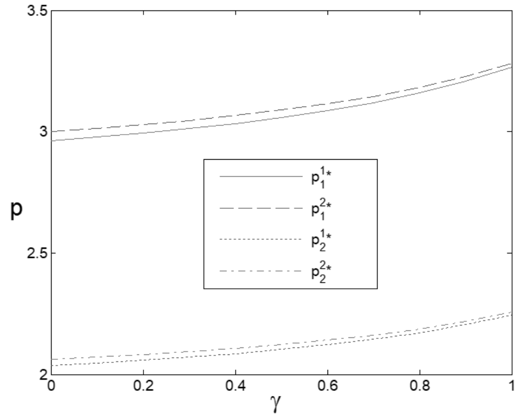


图 6 参数$\gamma$与稳态价格的关系

图 4 表明参数$\lambda$越小，产品的价格越高。当 $\lambda^1<0.5$ 且$\lambda^1$递增时,产品 1 的价格递增，而产品 2 的价格则递减。因此，垄断厂商可以通过为核心产品设定低价来降低消费者的参照价格，从而吸引更多的消费者购买产品。图 5 表明稳态价格随$\alpha$增加而递减，图 6 表明稳态价格随$\gamma$增加而递增。

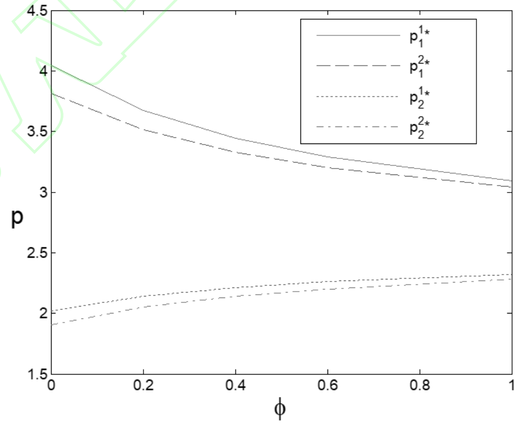


图 7 参数$\phi$与稳态价格的关系

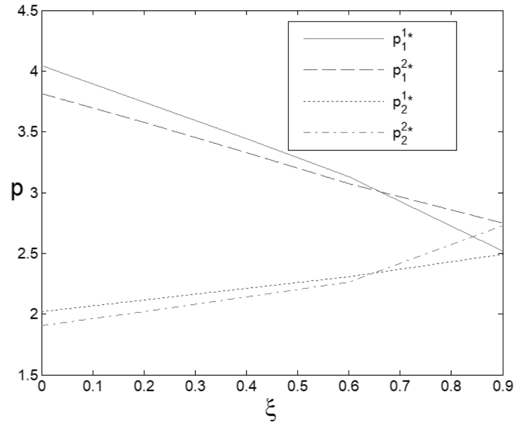


图 8 参数$\xi$与稳态价格的关系

图 7 和 8 表明，当 $\phi$ 和 $\xi$ 递增，第一阶段的稳态价格递减而第二阶段的稳态价格递增。即若市场上策略型消费者的比例越大或第二阶段的到产品的概率信念越强，那么产品的价格越低，且第二阶段的价格越接近第一阶段。因此，厂商能够通过减少第二阶段价格的降低范围来对抗消费者的策略性行为。

## 4. 结论

本文研究了基于参照价格和策略性行为的多产品动态定价问题。消费者的策略性行为将会影响需求函数，同时，参照价格是商店水平且更新机制为指数平滑模型。我们建立了一个两阶段多期的多产品动态定价模型，得到了稳态价格的解析解并分析了最优价格路径的性质。当初始参照价格高（低）时，最优价格策略类似于撇脂定价策略(渗透定价策略)。数值分析结果表明在两种产品的条件下，核心产品的最优价格低于非核心产品的价格。垄断厂商能够通过核心产品吸引顾客，并且从非核心产品获利。此外，联合定价增加的利润随着核心产品比重的增大而增大。公司能够通过增加核心产品的比重以获得更多利润。

当顾客选择产品时会表现出学习行为，并且他们的行为受到环境中的一些随机因素的影响，而这些点在本文中并没有考虑到，后续可以进一步研究。另外，竞争环境下存在消费者参照依赖和策略性行为的动态定价问题也值得研究。

## 附录

**命题 1 证明.**

(1) 短视消费者在第一阶段购买产品的效用为 $U_{m1}^{j}(\mathbf{p}_1 \mid r_1) = v^j - p_1^j + \eta\lambda^j(r_1 - \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\mathbf{p}_{1,t})$。若 $U_{m1}^{j} > 0$，短视型消费者会购买产品。短视型消费者的估值为 $v_{m1}^{j}(\mathbf{p}_1 \mid r) = p_1^j - \eta\lambda^j(r_1 - \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\mathbf{p}_{1,t})$，估值大于 $v_{m1}^{j}$ 的消费者将会在第一阶段购买。因此，短视型消费者在第一阶段的需求为 $D_{m1}^{j} = (1-\phi)N\dfrac{v_H^j - v_{m1}^j}{v_H^j - v_L^j}$。

策略型消费者在第一阶段购买产品的效用表示为 $U_{s1}^{j}(\mathbf{p}_1 \mid r_1) = v^j - p_1^j + \eta\lambda^j(r_1 - \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\mathbf{p}_{1,t})$，在第二阶段购买的效用为 $U_{s1'}^{j}(\mathbf{p}_2 \mid r_1) = \xi(v^j - p_2^j + \eta\lambda^j(r_1 - \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\mathbf{p}_{2,t}))$。通过比较 $U_{s1}^{j}$ 和 $U_{s1'}^{j}$ 的大小，顾客做出他们的购买决策。策略型消费者在第一阶段的估值 $v_{s1}^{j}(\mathbf{p} \mid r) = \dfrac{1}{1-\xi}(p_1^j - \eta\lambda^j(r_1 - \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\mathbf{p}_{1,t}) - \xi p_2^j + \xi\eta\lambda^j(r_1 - \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\mathbf{p}_{2,t}))$.

因此策略型消费者在第一阶段的需求为 $D_{s1}^{j} = \phi N\dfrac{v_H^j - v_{s1}^j}{v_H^j - v_L^j}$，而第一阶段总需求为

$$D_1^j(\mathbf{p}, r) = D_{m1}^j + D_{s1}^j = a^j - b^j p_1^j + c\lambda^j\left(r - \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\mathbf{p}_1\right) - \frac{\phi\xi^j}{1-\xi^j}\left(b^j\left(p_1^j - p_2^j\right) + c\lambda^j\left(\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\mathbf{p}_1 - \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\mathbf{p}_2\right)\right).$$

(2) 短视型消费者在第二阶段购买产品 $j$ 获得效用为：$U_{m2}^{j}(\mathbf{p}_2 \mid r_1) = v^j - p_2^j + \eta\lambda^j(r_2 - \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\mathbf{p}_{2,t})$. 如果 $U_{m2}^{j} > 0$，则消费者不会在第一阶段购买. 则该阶段的估值为：$v_{m2}^{j}(\mathbf{p}_2 \mid r) = p_2^j - \eta\lambda^j(r_2 - \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\mathbf{p}_{2,t})$，在第二阶段短视型消费者将会购买产品，如果估值在 $v_{m1}^j$ 和 $v_{m2}^j$ 之间. 短视消费者在第二阶段的需求为

$$D_{m2}^{j} = (1-\phi)N\frac{v_{m1}^j - v_{m2}^j}{v_H^j - v_L^j}.$$

策略型消费者第二阶段购买产品的效用为 $U_{s2}^{j}(\mathbf{p}_2 \mid r_1) = v^j - p_2^j + \eta\lambda^j(r_2 - \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\mathbf{p}_{2,t})$。若 $U_{s2}^{j} > 0$，消费者就不会在第一阶段而在第二阶段购买。该阶段的消费者估值为 $v_{s2}^{j}(\mathbf{p}_2 \mid r) = p_2^j - \eta\lambda^j(r_2 - \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\mathbf{p}_{2,t})$，若第二阶段的估值在 $v_{s1}^j$ 和 $v_{s2}^j$ 之间，策略型消费者将购买产品. 因此策略型消费者在第二阶段的需求为 $D_{s2}^{j} = \phi N\dfrac{v_{s1}^j - v_{s2}^j}{v_H^j - v_L^j}$. 假设 $r_{2,t} = \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\mathbf{p}_{1,t}$，则需求函数为：

$$
D_2^j(\mathbf{p},r)=D_{m2}^j+D_{s2}^j=\left(b^j+c\lambda^j\right)\left(\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\mathbf{p}_1-\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\mathbf{p}_2\right)
$$

$$
-c\lambda^j\left(r-\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\mathbf{p}_1\right)+
$$

$$
\frac{\phi\xi^j}{1-\xi^j}\left(b^j\left(p_1^j-p_2^j\right)+c\lambda^j\left(\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\mathbf{p}_1-\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\mathbf{p}_2\right)\right)
$$

**定理 1 证明**.

根据 Smith 和 McCardle[24]，Topkis[25] 的理论，模型(3)存在唯一稳态并且稳态满足下列均衡条件：

$$
\begin{aligned}
&\Pi_{\mathbf{p}_t}(\mathbf{p}_t,r_t)+\gamma\upsilon g_{\mathbf{p}_t}(r_t,\mathbf{p}_{1,t})=0\\
&\boldsymbol{\upsilon}=\Pi_{r_t}(r_t,\mathbf{p}_t)+\gamma\upsilon g_{rt}(r_t,\mathbf{p}_{1,t})\\
&r_{t+1}=g(r_t,\mathbf{p}_{1,t})=\alpha r_t+(1-\alpha)\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\mathbf{p}_{1,t}
\end{aligned}
\tag{6}
$$

$\Pi\left(\mathbf{p}_t,r_t\right)$ 对 $\mathbf{p}_t$ 和 $r_{1,t}$ 求偏微分有

$$
\Pi_{\mathbf{p}_t}(\mathbf{p}_t,r_{1,t})=\begin{pmatrix}
\frac{\partial\Pi(\mathbf{p}_t,r_{1,t})}{\partial p_{1,t}^1},\frac{\partial\Pi(\mathbf{p}_t,r_{1,t})}{\partial p_{2,t}^1},\\
\frac{\partial\Pi(\mathbf{p}_t,r_{1,t})}{\partial p_{1,t}^2},\frac{\partial\Pi(\mathbf{p}_t,r_{1,t})}{\partial p_{2,t}^2},\ldots,\\
\frac{\partial\Pi(\mathbf{p}_t,r_{1,t})}{\partial p_{1,t}^n},\frac{\partial\Pi(\mathbf{p}_t,r_{1,t})}{\partial p_{2,t}^n}
\end{pmatrix}
$$

$$
\Pi_{r_t}(r_t,\mathbf{p}_t)=\frac{\partial\Pi(\mathbf{p}_t,r_t)}{\partial r_t},
$$

$g(r_t,\mathbf{p}_{1,t})$ 对 $\mathbf{p}_t$ 和 $r_t$ 求偏微分得：

$$
g_{\mathbf{p}_{1,t}}(r_t,\mathbf{p}_{1,t})=
$$

$$
\left[(1-\alpha)\lambda^1,0,(1-\alpha)\lambda^2,0,\ldots,(1-\alpha)\lambda^n,0\right]
$$

$$
g_{r_t}(r_t,\mathbf{p}_{1,t})=\alpha .
$$

均衡条件等价于

$$
\begin{cases}
\frac{\partial\Pi(\mathbf{p}_t,r_t)}{\partial p_{1,t}^1}+\frac{\gamma(1-\alpha)}{1-\alpha\gamma}\cdot\frac{\partial\Pi(\mathbf{p}_t,r_t)}{\partial r_t}=0\\
\frac{\partial\Pi(\mathbf{p}_t,r_{1,t})}{\partial p_{2,t}^1}=0\\
\frac{\partial\Pi(\mathbf{p}_t,r_t)}{\partial p_{1,t}^2}+\frac{\gamma(1-\alpha)}{1-\alpha\gamma}\cdot\frac{\partial\Pi(\mathbf{p}_t,r_t)}{\partial r_t}=0\\
\frac{\partial\Pi(\mathbf{p}_t,r_{1,t})}{\partial p_{2,t}^2}=0\\
\vdots\\
\frac{\partial\Pi(\mathbf{p}_t,r_t)}{\partial p_{1,t}^n}+\frac{\gamma(1-\alpha)}{1-\alpha\gamma}\cdot\frac{\partial\Pi(\mathbf{p}_t,r_t)}{\partial r_t}=0\\
\frac{\partial\Pi(\mathbf{p}_t,r_{1,t})}{\partial p_{2,t}^n}=0
\end{cases}
\tag{7}
$$

而

$$
\frac{\partial\Pi(\mathbf{p}_t,r_t)}{\partial p_{1,t}^j}=a^j+c\lambda^j r_t-\frac{2\left(1-\xi^j+\phi\xi^j\right)\left(b^j+c\lambda^j\lambda^j\right)}{1-\xi^j}p_{1,t}^j+
$$

$$
\left(\frac{2\phi\xi^j\left(b^j+c\lambda^j\lambda^j\right)}{1-\xi^j}+2c\lambda^j\lambda^j+b^j\right)p_{2,t}^j
$$

$$
-\sum_{i=1,i\neq j}^{n}\begin{array}{l}
c\lambda^j\lambda^i\left(2+\frac{\phi\xi^j}{1-\xi^j}+\frac{\phi\xi^i}{1-\xi^i}\right)p_{1,t}^i+\\
\lambda^j\lambda^i\left(2+\frac{\phi\xi^j}{1-\xi^j}+\frac{\phi\xi^i}{1-\xi^i}\right)p_{2,t}^i
\end{array}
$$

$$
\frac{\partial\Pi(\mathbf{p}_t,r_t)}{\partial p_{2,t}^j}=\left(\frac{2\phi\xi^j\left(b^j+c\lambda^j\lambda^j\right)}{1-\xi^j}+b^j+2c\lambda^j\lambda^j\right)p_{1,t}^j-
$$

$$
\frac{2\left(1-\xi^j+\phi\xi^j\right)\left(b^j+c\lambda^j\lambda^j\right)}{1-\xi^j}p_{2,t}^j
$$

$$
+\sum_{i=1,i\neq j}^{n}\left\{\begin{array}{l}
c\lambda^j\lambda^i\left(2+\frac{\phi\xi^j}{1-\xi^j}+\frac{\phi\xi^i}{1-\xi^i}\right)p_{1,t}^i-\\
c\lambda^j\lambda^i\left(2+\frac{\phi\xi^i}{1-\xi^i}+\frac{\phi\xi^j}{1-\xi^j}\right)p_{2,t}^i-c\lambda^j r_t
\end{array}\right\},
$$

$$
\frac{\partial\Pi(\mathbf{p}_t,r_t)}{\partial r_t}=c\left(\sum_{j=1}^{n}\lambda^j p_{1,t}^j-\sum_{j=1}^{n}\lambda^j p_{2,t}^j\right).
$$

将上述结果代入方程(6)并假设 $r_t=\boldsymbol{\lambda}'\mathbf{p}_1$，则稳态价格 $\mathbf{p}^*$ 满足

$$\begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & \cdots & k_{12n} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & \cdots & k_{22n} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & \cdots & k_{32n} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & \cdots & k_{42n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{2n1} & k_{2n2} & k_{2n3} & k_{2n4} & \cdots & k_{2n2n} \end{pmatrix} \mathbf{p}^* = \begin{pmatrix} a^1 \\ 0 \\ a^2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

## 参考文献：


[1] Besanko D, Winston W L. Optimal price skimming by a monopolist facing rational consumers [J]. Management Science, 1990, 36(5): 555-567.
[2] Aviv Y, Pazgal A. Optimal pricing of seasonal products in the presence of forward-looking consumers[J]. Manufacturing & Service Operations Management, 2008, 10(3): 339-359.
[3] Levin Y, McGill J, Nediak M. Dynamic pricing in the presence of strategic consumers and oligopolistic competition [J]. Management Science, 2009, 55(1): 32-46.
[4] Mersereau A J, Zhang D. Markdown pricing with unknown fraction of strategic customers [J]. Manufacturing & Service Operations Management, 2012, 14(3): 355-370.
[5] Su X. Inter-temporal pricing with strategic customer behavior [J]. Management Science, 2007, 53(5) 726–741.
[6] 马鹏，杜宛京，王海燕. 顾客策略行为下差异产品两阶段定价模型研究[J].中国管理科学,2020, 28(2):136-144.
[7] 李贺, 张玉林, 仲伟俊. 考虑战略消费者行为风险的动态定价策略[J]. 管理科学学报，2012, 15(10): 11-25.
[8] 李四杰，邵灵芝.考虑消费者策略行为的供应商产品升级策略[J].中国管理科学,2018，26(4):1-10.
[9] 胡玉生,李金林,张文思,赵天.可加效用下基于消费者惰性的易逝品动态定价[J/OL].中国管理科学 :1-12[2020-03-22].https://doi.org/10.16381/j.cnki.issn1003-207x.2019.1060.
[10] 官振中, 任建标. 存在策略消费者的动态定价策略[J]. 系统工程理论实践，2014，34(8): 2018-2024.
[11] 唐跃武，范体军，刘莎.考虑策略性消费者的生鲜农产品定价和库存决策[J].中国管理科学, 2018,26(11):105-113.
[12] Mazumdar T, Raj S P, Sinha I. Reference price research: Review and propositions [J]. Journal of marketing, 2005, 69(4): 84-102.
[13] Kahneman, D, Tversky A. Prospect theory: An analysis of decision under risk. Econometrica, 1979,47(2) 263–291.
[14] Popescu I, Wu Y. Dynamic pricing strategies with reference effects [J]. Operations Research, 2007, 55(3): 413-429.
[15] Nasiry J, Popescu I. Dynamic pricing with loss-averse consumers and peak-end anchoring[J]. Operations research, 2011, 59(6): 1361-1368.
[16] Huh W T, Kachani S, Sadighian A. A two-stage multi-period negotiation model with reference price effect [J]. Journal of Revenue & Pricing Management, 2010, 9(5): 443-475.
[17] Bi W, Li G, Liu M. Dynamic pricing with stochastic reference effects based on a finite memory window [J]. International Journal of Production Research, 2017, 55(12):3331-3348.
[18] Liu H, Luo X, Bi W, et al. Dynamic pricing of network goods in duopoly markets with boundedly rational consumers [J]. Journal of Industrial and Management Optimization, 2017, 13(1):427-445.
[19] 周尔凤，张廷龙，倪蕾，方丹，方昶.竞争中的参考价格效应及承诺[J].中国管理科学，2018, 26 (8) : 5-85.
[20] Gallego G, Van Ryzin G. A multiproduct dynamic pricing problem and its applications to network yield management [J]. Operations Research, 1997, 45(1): 24-41.
[21] Calicchio N, Krell A. Price promotions in Latin American retailing [J]. McKinsey Quarterly, 2007, 43(4): 57–59..
[22] Miranda M J, Fackler P L. Applied Computational Economicsand Finance [M]. Cambridge, MIT Press, 2002.
[23] Stokey N L, Lucas R E, Prescott E C. Recursive methods in economic dynamics [M]. Boston, Harvard University Press, 1989.
[24] Smith, J E, McCardle K F. Structural properties of stochastic dynamic programs. Operations Research, 2002, 50(5): 796-809.
[25] Topkis M. Supermodularity and complementarity [M]. Princeton, Princeton university Press, 1998.


.

# Optimal Dynamic Pricing for Multi-products with Consumers' Reference Effects and Strategic Behavior


**LIU Hai-ying[1], BI Wen-jie[2]**

(1. Accounting School, Hunan University of Finance and Economics, Changsha, 410205, China;

2. Business School, Central South University, Changsha, 410083, China)



**Abstract：** Perishable or seasonal products generally have a normal price at the beginning stage and a significantly reduced or discounted price toward the ending stage. Therefore, the strategic consumers will have a choice - either to buy in the first stage for fresh products or wait to purchase the products at a discounted price in the second stage. In this paper, we considered the multi-product dynamic pricing taking into account the reference effect and the strategic consumers. Due to the presence of the reference effect, the consumers' utility function is a combination of the direct utility and the reference utility. On the other hand, the strategic consumers will choose between buying at the first stage or wait to buy at the second stage. This behavior will change the demand functions of the two stages. At the same time, the reference price is at store-level and it is being updated along with the change of the period by an exponential smoothing model. The price level of the whole store and the product's historical price will influence the current demand. Therefore, we have built a two-stage multi-period dynamic pricing model for multi-product. Based on supermodularity and complementarity theory, we have derived an analytical solution for the steady state prices, and we have also revealed the properties of the optimal price path. The monotonic convergence property of the steady state price suggests that when the initial reference price is higher or lower than steady state reference price, the optimal pricing strategy is similar to skimming pricing strategy (i.e., penetration pricing strategy).

Numerical results show that in the case of two products, the optimal price of the core product is lower than that of the non-core product. The monopolist can attract customers by emphasizing the core product, because the lower price of the core product can reduce the customers' reference price. Then the firm can get higher revenues from the non-core products. In addition, the combined profit obtained through pricing the two products together increase as the weight of the core product increases. So the monopolist can adopt the store-level pricing strategy instead of the product-level pricing strategy. In order to gain more profit, the firm can increase the weight of the core product by adjusting the proportions of different products and focusing on promotion. The results obtained from this paper can provide guidance for relevant studies and firms in practice. When consumers choose the product，they will show learning behavior and their behavior is influenced by some random factors in the environment and these two points should be a very interesting future research direction based on this paper.

**Key words：** dynamic pricing； multi-product pricing； reference-dependence； strategic customer behavior