第二章

条件概率与统计独立性

本章要点

一、条件概率

问题的提出：

1. 10个人摸彩，有3张中彩.
   问：第1个人中彩的概率为多少？
   第2个人中彩的概率为多少？

2. 10个人摸彩，有3张中彩.
   问：已知第1个人没摸中，
   第2个人中彩的概率为多少？

例2.1.1

假定生男生女是等可能。若已知某一个家庭有俩孩子，求这个家庭有一个男孩，一个女孩的概率；若已知这个家庭至少一个女孩，求这家有一个男孩，一个女孩的概率。

例2.1.1

假定生男生女是等可能。若已知某一个家庭有俩孩子，求这个家庭有一个男孩，一个女孩的概率；若已知这个家庭至少一个女孩，求这家有一个男孩，一个女孩的概率。

解：设A 表示“这个家庭有一个男孩，一个女孩”；B 表示“这个家庭至少一个女孩”。于是，所求概率分别$P(A), P(A|B)$.
由题意知样本空间和事件分别可表示为

$$\Omega = \{(男,男),(男,女),(女,男),(女,女)\};$$

$$A = \{(男,女),(女,男)\};$$

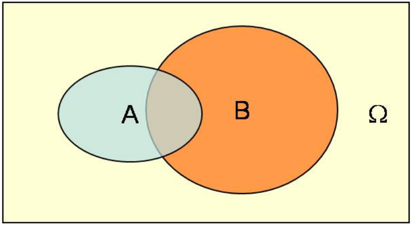
$$B = \{(男,女),(女,男),(女,女)\};$$

所以有$P(A) = \frac{1}{2}$ $P(A|B) = \frac{2}{3}$

注意

求解例2.1.1中$P(A|B)$过程可进行如下转换

$$P(A|B) = \frac{2}{3} = \frac{2/4}{3/4} = \frac{P(AB)}{P(B)}$$



条件概率的概念

定义2.1.1

设$(\Omega, \mathcal{F}, P)$是一个概率空间，$B \in \mathcal{F}$，而且$P(B) > 0$，则对任意$A \in \mathcal{F}$，记

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)},$$

并称$P(A|B)$为事件B发生条件下事件A发生的条件概率。

条件概率的概念

定义2.1.1

设$(\Omega, \mathcal{F}, P)$是一个概率空间，$B \in \mathcal{F}$，而且$P(B) > 0$，则对任意$A \in \mathcal{F}$，记

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)},$$

并称$P(A|B)$为事件B发生条件下事件A发生的条件概率。

以后，若出现条件概率$P(A|B)$时，都假定$P(B) > 0$。

例2.1.2

体检发现，某地区自然人群中，每10万人内平均有40人患原发性肝癌，有34人甲胎球蛋白含量高，有32人患原发性肝癌又出现甲胎球蛋白含量高。现从这一地区随机抽查一人，发现其甲胎球蛋白量高，求其患原发性肝癌的概率有多大？若在这个人群中，已知一人患原发性肝癌，求该人甲胎球蛋白含量高的概率？

例2.1.2

体检发现，某地区自然人群中，每10万人内平均有40人患原发性肝癌，有34人甲胎球蛋白含量高，有32人患原发性肝癌又出现甲胎球蛋白含量高。现从这一地区随机抽查一人，发现其甲胎球蛋白量高，求其患原发性肝癌的概率有多大？若在这个人群中，已知一人患原发性肝癌，求该人甲胎球蛋白含量高的概率？

解:设A表示“所抽的人患原发性肝癌”

B表示“所抽的人甲胎球蛋白含量高”

于是，所求概率分别为$P(A|B), P(B|A)$

由题设知

$P(A) = 0.0004$，$P(B) = 0.00034$，$P(AB) = 0.00032$

$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = 0.9412$，$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = 0.8$

条件概率是概率

条件概率$P(A|B)$满足概率的三条公理。

条件概率是概率

条件概率$P(A|B)$满足概率的三条公理。

条件概率具有概率的一切性质，譬如:

1. $P(A|B) \geq 0$,
2. $P(\Omega|B) = 1$,
3. $P(\sum_{i=1}^{\infty} A_i|B) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i|B)$,
4. $P(\bar{A}|B) = 1 - P(A|B)$,
5. $P(A \cup B|C) = P(A|C) + P(B|C) - P(AB|C)$.

注意点

$$P(\Omega|B) = 1; \quad P(B|\Omega) \neq 1;$$

注意点

$$P(\Omega|B) = 1; \quad P(B|\Omega) \neq 1;$$

$$P(A|\Omega) = P(A); \quad P(A|A) = 1;$$

注意点

$$P(\Omega|B) = 1; \quad P(B|\Omega) \neq 1;$$

$$P(A|\Omega) = P(A); \quad P(A|A) = 1;$$

$$P(A|\bar{B}) \neq P(\bar{A}|B), \quad P(A|\bar{B}) \neq 1 - P(A|B)$$

注意点

$$P(\Omega|B) = 1; \quad P(B|\Omega) \neq 1;$$

$$P(A|\Omega) = P(A); \quad P(A|A) = 1;$$

$$P(A|\bar{B}) \neq P(\bar{A}|B), \quad P(A|\bar{B}) \neq 1 - P(A|B)$$

一般总有$P(A|B) \geq P(AB)$成立,但$P(A|B)$与$P(A)$不可比。

条件概率的三大公式

1. 乘法公式
2. 全概率公式
3. 贝叶斯公式

1.乘法公式

1. 若$P(B)>0$,则$P(AB)=P(B)P(A|B)$;
   若$P(A)>0$,则$P(AB)=P(A)P(B|A)$.

1.乘法公式

1. 若$P(B)>0$,则$P(AB)=P(B)P(A|B)$;
   若$P(A)>0$,则$P(AB)=P(A)P(B|A)$.
2. 若$P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$,则
   $P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)\cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1})$

1.乘法公式

1. 若$P(B)>0$,则$P(AB)=P(B)P(A|B)$;
   若$P(A)>0$,则$P(AB)=P(A)P(B|A)$.
2. 若$P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$,则
   $P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)\cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1})$

注2.1.1

n个事件的概率乘法公式并不只有上面这种形式。事实上，对于n个事件，这样形式的公式一定有$n!$个。

乘法公式的应用

乘法公式主要用于求几个事件同时发生的概率.

例2.1.3

一批零件共有*100*个，其中*10*个不合格品。从中一个一个不放回取出，求第三次才取出不合格品的概率。

乘法公式的应用

乘法公式主要用于求几个事件同时发生的概率.

例2.1.3

一批零件共有100个，其中10个不合格品。从中一个一个不放回取出，求第三次才取出不合格品的概率。

解：记A_i=“第i次取出的是不合格品”

B_i=“第i次取出的是合格品”，目的求$P(B_1B_2A_3)$。

用乘法公式,

$$P(B_1B_2A_3) = P(B_1)P(B_2|B_1)P(A_3|B_1B_2) = \frac{90}{100} \times \frac{89}{99} \times \frac{10}{98}.$$

例2.1.4

波利亚(Polya)罐模型:罐中有b只黑球及r只红球，随机取出一只，把原球放回，并加进与抽出球同色的球c只，再摸第二次，这样下去共摸了n次，问前面的n_1次出现黑球，后面的$n_2 = n - n_1$次出现红球的概率是多少？

例2.1.4

波利亚(Polya)罐模型:罐中有b只黑球及r只红球，随机取出一只，把原球放回，并加进与抽出球同色的球c只，再摸第二次，这样下去共摸了n次，问前面的n_1次出现黑球，后面的$n_2 = n - n_1$次出现红球的概率是多少？

解：以A_k表示第k次取球时取到黑球，即需要计算交事件的概率$P(A_1 \cdots A_{n_1}\overline{A_{n_1+1}} \cdots \overline{A_n})$;

A_k表示第k次摸出黑球这一事件，则

$$P(A_1) = \frac{b}{b+r}, \quad P(A_2|A_1) = \frac{b+c}{b+r+c},$$

$$P(A_3|A_1A_2) = \frac{b+2c}{b+r+2c}, \cdots,$$

$$P(A_{n_1}|A_1A_2\cdots A_{n_1-1}) = \frac{b+(n_1-1)c}{b+r+(n_1-1)c},$$

$$P(\overline{A_{n_1+1}}|A_1A_2\cdots A_{n_1}) = \frac{r}{b+r+n_1c},$$

$$P(\overline{A_{n_1+2}}|A_1A_2\cdots A_{n_1}\overline{A_{n_1+1}}) = \frac{r+c}{b+r+(n_1+1)c},$$

$$P(\overline{A_n}|A_1A_2\cdots A_{n_1}\overline{A_{n_1+1}}\cdots\overline{A_{n-1}}) = \frac{r+(n_2-1)c}{b+r+(n-1)c}.$$

因此

$$P(A_1A_2\cdots A_{n_1}\overline{A_{n_1+1}}\cdots\overline{A_n}) = \frac{b}{b+r}\cdot\frac{b+c}{b+r+c}\cdot\frac{b+2c}{b+r+2c}\cdots\frac{b+(n_1-1)c}{b+r+(n_1-1)c}\cdot \frac{r}{b+r+n_1c}\cdot\frac{r+c}{b+r+(n_1+1)c}\cdot\frac{r+(n_2-1)c}{b+r+(n-1)c}.$$

因此

$P(A_1A_2\cdots A_{n_1}\overline{A_{n_1+1}}\cdots\overline{A_n}) = \frac{b}{b+r}\cdot\frac{b+c}{b+r+c}\cdot\frac{b+2c}{b+r+2c}\cdots\frac{b+(n_1-1)c}{b+r+(n_1-1)c}\cdot\frac{r}{b+r+n_1c}\cdot\frac{r+c}{b+r+(n_1+1)c}\cdot\frac{r+(n_2-1)c}{b+r+(n-1)c}$.

所求概率为

$$P = \frac{\prod_{k=0}^{n_1-1}(b+kc)\times\prod_{k=0}^{n_2-1}(r+kc)}{\prod_{k=0}^{n-1}(b+r+kc)}.$$

因此

$P(A_1A_2\cdots A_{n_1}\overline{A_{n_1+1}}\cdots\overline{A_n}) = \frac{b}{b+r}\cdot\frac{b+c}{b+r+c}\cdot\frac{b+2c}{b+r+2c}\cdots\frac{b+(n_1-1)c}{b+r+(n_1-1)c}\cdot\frac{r}{b+r+n_1c}\cdot\frac{r+c}{b+r+(n_1+1)c}\cdot\frac{r+(n_2-1)c}{b+r+(n-1)c}.$

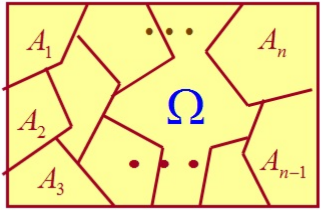
所求概率为

$$P = \frac{\prod_{k=0}^{n_1-1}(b+kc)\times\prod_{k=0}^{n_2-1}(r+kc)}{\prod_{k=0}^{n-1}(b+r+kc)}.$$

这个模型曾被波利亚用来作为描述传染病的数学模型。这是一个很一般的模型，特别取$c=0$，则是有放回摸球，$c=-1$ 则是不放回摸球。

二、全概率公式

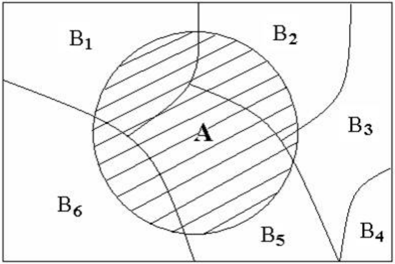
若$A_1, A_2, \ldots,$两两互斥，且$\Omega = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$，
则称$A_1, A_2, \ldots,$为Ω的一个分割。



若事件$B_1, B_2, \ldots,$是样本空间Ω的一组分割，且$P(B_i) > 0$，则

$$A = \sum_{i=1}^{\infty} AB_i,$$

$$P(A) = \sum_{i=1}^{\infty} P(AB_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i)P(A|B_i).$$



注意点

1. 全概率公式用于求复杂事件的概率。
2. 使用全概率公式关键在于寻找另一组事件来“分割”样本空间。
3. 全空间可以由有限个A_i来分割,即$A_1, A_2, \ldots, A_n$,

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_iB)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i).$$

4. 全概率公式最简单的形式:

$$P(B)=P(A)P(B|A)+P(\bar{A})P(B|\bar{A}).$$

例2.1.5

设10件产品中有3件不合格品，从中不放回地取两次，每次一件，求取出的第二件为不合格品的概率。

例2.1.5

设10件产品中有3件不合格品，从中不放回地取两次，每次一件，求取出的第二件为不合格品的概率。

解：设$A=$“第一次取得不合格品”，

$B=$“第二次取得不合格品”。

由全概率公式得:

$$
\begin{aligned}
P(B) &= P(A)P(B|A)+P(\bar{A})P(B|\bar{A}) \\
&= \frac{3}{10}\times\frac{2}{9}+\frac{7}{10}\times\frac{3}{9}=\frac{3}{10}.
\end{aligned}
$$

例2.1.6

设播种用小麦种子中混有一等，二等，三等，四等四个等级的种子，分别各占95.5%，2%，1.5%，1%，用一等，二等，三等，四等种子长出的穗含50颗以上麦粒的概率分别为0.5，0.15，0.10，0.05。求这批种子所结的穗含有50 颗以上麦粒的概率。

例2.1.6

设播种用小麦种子中混有一等，二等，三等，四等四个等级的种子，分别各占95.5%，2%，1.5%，1%，用一等，二等，三等，四等种子长出的穗含50颗以上麦粒的概率分别为0.5，0.15，0.10，0.05。求这批种子所结的穗含有50 颗以上麦粒的概率。

解：设从这批种子中任选一颗是一等，二等，三等，四等种子的事件分别是A_1, A_2, A_3, A_4，则它们构成互斥完备事件群，又设B表示任选一颗种子所结的穗含有50粒以上麦粒这一事件，于是，由题设条件有

$$P(A_1) = 95.5\%, P(A_2) = 2\%, P(A_3) = 1.5\%, P(A_4) = 1\%,$$

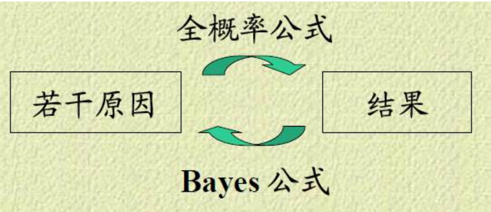
$$P(B|A_1) = 0.5, P(B|A_2) = 0.15, P(B|A_3) = 0.10, P(B|A_4) = 0.05.$$

则由全概率公式：

$$P(B) = \sum_{i=1}^{4} P(A_i)P(B|A_i) = 0.4825.$$

三、贝叶斯公式

- 乘法公式是求“几个事件同时发生”的概率；
- 全概率公式是求“最后结果”的概率；
- 贝叶斯公式是已知“最后结果”，求“原因”的概率。



已知“结果”,求“原因”

例2.1.7

某人从甲地到乙地，乘飞机(A_1)、火车(A_2)、汽车(A_3)迟到(B)的概率分别为0.1、0.2、0.3，他等可能地选择这三种交通工具。若已知他最后迟到了，求他分别是乘飞机、火车、汽车的概率。

已知“结果”,求“原因”

例2.1.7

某人从甲地到乙地，乘飞机(A_1)、火车(A_2)、汽车(A_3)迟到(B)的概率分别为0.1、0.2、0.3，他等可能地选择这三种交通工具。若已知他最后迟到了，求他分别是乘飞机、火车、汽车的概率。

已知：$P(A_1)=P(A_2)=P(A_3)=1/3$ $(A_1,A_2,A_3$是Ω的一个分割$)$, $P(B|A_1)=0.1$, $P(B|A_2)=0.2$, $P(B|A_3)=0.3$。

求: $P(A_i|B)=?$

已知“结果”,求“原因”

例2.1.7

某人从甲地到乙地，乘飞机(A_1)、火车(A_2)、汽车(A_3)迟到(B)的概率分别为0.1、0.2、0.3，他等可能地选择这三种交通工具。若已知他最后迟到了，求他分别是乘飞机、火车、汽车的概率。

已知：$P(A_1)=P(A_2)=P(A_3)=1/3$ $(A_1,A_2,A_3$是Ω的一个分割$)$, $P(B|A_1)=0.1$, $P(B|A_2)=0.2$, $P(B|A_3)=0.3$。

求：$P(A_i|B)=?$

$$P(B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)+P(A_3)P(B|A_3)=0.2.$$

$$P(A_1|B)=\frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(B)}=\frac{1}{6}.$$

贝叶斯（Bayes）公式

若事件$A_1, A_2, \ldots,$是样本空间Ω的一个分割，且$P(B) > 0$，则

$$
\begin{aligned}
P(A_i|B) &\xlongequal{\text{条件概率定义}} \frac{P(A_iB)}{P(B)} \\
&\xlongequal{\text{乘法公式}} \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{P(B)} \\
&\xlongequal{\text{全概率公式}} \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{j=1}^{\infty} P(A_j)P(B|A_j)}
\end{aligned}
$$

Bayes公式是英国哲学家Bayes于1763年首先提出的，是先验概率与后验概率转化工具。
经过多年的发展和完善，Bayes公式以及由此发展起来的一整套理论与方法，已经形成为概率统计中的贝叶斯统计。

Bayes公式是英国哲学家Bayes于1763年首先提出的，是先验概率与后验概率转化工具。

经过多年的发展和完善，Bayes公式以及由此发展起来的一整套理论与方法，已经形成为概率统计中的贝叶斯统计。

Bayes公式的意义：

先验概率：当不知道某信息(事件B)时，我们对各事件$A_1, A_2, \ldots,$发生的可能性大小的认识为：$P(A_1), P(A_2), \ldots$。

后验概率：当知道某信息(事件B)已经发生时，我们对各事件$A_1, A_2, \ldots,$发生的可能性大小的要重新认识：$P(A_1|B), P(A_2|B), \ldots$。

例2.1.8

假定用血清甲胎球蛋白诊断肝癌：$P(\text{阳性}|\text{患者}) = 0.95, P(\text{阴性}|\text{健康者}) = 0.90$；已知自然人群中，$P(\text{患者}) = 0.0004$。现随机抽查一人，血清甲胎球蛋白诊断结果为阳性，求其患肝癌的概率有多大？

例2.1.8

假定用血清甲胎球蛋白诊断肝癌：$P(\text{阳性}|\text{患者}) = 0.95, P(\text{阴性}|\text{健康者}) = 0.90$；已知自然人群中，$P(\text{患者}) = 0.0004$。现随机抽查一人，血清甲胎球蛋白诊断结果为阳性，求其患肝癌的概率有多大？

解：A:诊断结果阳性，C:的确患有肝癌，则

$$P(C) = 0.0004, P(A|C) = 0.95, P(\bar{A}|\bar{C}) = 0.90.$$

$$P(C|A) = \frac{P(C)P(A|C)}{P(C)P(A|C) + P(\bar{C})P(A|\bar{C})}$$

$$= \frac{0.0004 \times 0.95}{0.0004 \times 0.95 + 0.9996 \times 0.1} = 0.0038$$

例2.1.8

假定用血清甲胎球蛋白诊断肝癌：$P(\text{阳性}|\text{患者}) = 0.95, P(\text{阴性}|\text{健康者}) = 0.90$；已知自然人群中，$P(\text{患者}) = 0.0004$。现随机抽查一人，血清甲胎球蛋白诊断结果为阳性，求其患肝癌的概率有多大？

解：A:诊断结果阳性，C:的确患有肝癌，则

$$P(C) = 0.0004, P(A|C) = 0.95, P(\bar{A}|\bar{C}) = 0.90.$$

$$P(C|A) = \frac{P(C)P(A|C)}{P(C)P(A|C) + P(\bar{C})P(A|\bar{C})}$$

$$= \frac{0.0004 \times 0.95}{0.0004 \times 0.95 + 0.9996 \times 0.1} = 0.0038$$

Why?

过去的经验或知识 $P(C)=0.0004$ (先验概率)	+	新信息 A	⇨	修正过去认识 $P(C\|A)=0.0038$ (后验概率)

过去的经验或知识 $P(C)=0.0004$ (先验概率)	+	新信息 A	⇒	修正过去认识 $P(C\|A)=0.0038$ (后验概率)

后验概率小关键原因在于先验概率（人群中感染比例）非常小。

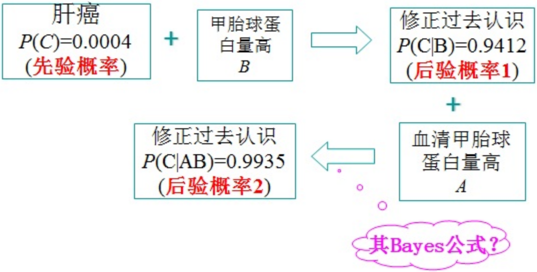
过去的经验或知识 $P(C)=0.0004$ (先验概率)	+	新信息 A	⇨	修正过去认识 $P(C\|A)=0.0038$ (后验概率)

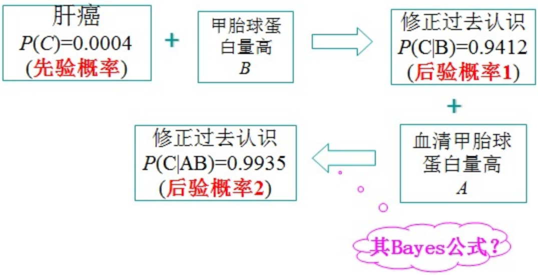
后验概率小关键原因在于先验概率（人群中感染比例）非常小。

如果我们的检查对象是一个肝癌可疑人群，比如甲胎球蛋白量高者，其先验概率提高为例2.1.2中的0.9412，则

$$P(C|A)=\frac{P(C)P(A|C)}{P(C)P(A|C)+P(\bar{C})P(\bar{A}|\bar{C})}$$

$$=\frac{0.9412\times 0.95}{0.9412\times 0.95+0.0588\times 0.1}=0.9935.$$


肝癌
P(C)=0.0004
(先验概率)
+
甲胎球蛋
白量高
B
修正过去认识
P(C|B)=0.9412
(后验概率1)
+
血清甲胎球
蛋白量高
A
修正过去认识
P(C|AB)=0.9935
(后验概率2)
其Bayes公式？



原以为不太可能的事，会因某些事件的发生而变得可能，或者原以为有可能的事，因某些事件的发生而变得不太可能。贝叶斯公式从数量上描述了这种变化。

例2.1.9

若发报机以0.7和0.3的概率发出信号0和1（譬如分别用低电平和高电平表示），由于随机干扰的影响，当发出信号0时，接收机不一定收到0，而是以概率0.8和0.2收到信号0和1；同样地，当发报机发出信号1时，接收机以概率0.9和0.1收到信号1和0.其关系如图9所示.

求：当接收机收到信号0时，发报机是发出信号0的概率。

例2.1.9

若发报机以0.7和0.3的概率发出信号0和1（譬如分别用低电平和高电平表示），由于随机干扰的影响，当发出信号0时，接收机不一定收到0，而是以概率0.8和0.2收到信号0和1；同样地，当发报机发出信号1时，接收机以概率0.9和0.1收到信号1和0.其关系如图9所示.

求：当接收机收到信号0时，发报机是发出信号0的概率。

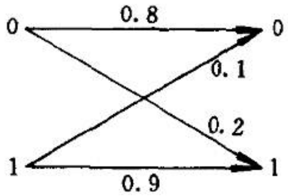


图 9

解：把发报机发出信号0记为事件A_0,发出信号1记为事件A_1,接收机收到信号0记为事件B,我们要求的是$P(A_0|B)$.

由于$P(A_0)=0.7,P(A_1)=0.3,P(B|A_0)=0.8,P(B|A_1)=0.1,$

用贝叶斯公式

$$P(A_0|B)=\frac{P(A_0)P(B|A_0)}{P(A_0)P(B|A_0)+P(A_1)P(B|A_1)}$$

$$=\frac{0.7\times 0.8}{0.7\times 0.8+0.3\times 0.1}=\frac{56}{59}.$$

事件独立性

一、两个事件的独立性

二、多个事件的独立性

三、事件独立性与概率的计算

四、试验的独立性

一、两个事件的独立性

直观说法：对于两事件，若其中任何一个事件的发生不影响另一个事件的发生，则这两事件是独立的。

$$
\begin{aligned}
&\Longleftrightarrow P(A|B) = P(A) \\
&\Longleftrightarrow \frac{P(AB)}{P(B)} = P(A) \\
&\Longleftrightarrow P(AB) = P(A)P(B)
\end{aligned}
$$

定义2.2.1

若事件A与B满足：$P(AB) = P(A)P(B)$,
则称A与B是统计独立的，简称A与B独立。

定义2.2.1

若事件A与B满足：$P(AB)=P(A)P(B)$,
则称A与B是统计独立的，简称A与B独立。

推论2.2.1

A、B为两个独立事件，若$P(B)>0$,则$P(A|B)=P(A)$。

定义2.2.1

若事件A与B满足：$P(AB)=P(A)P(B)$,
则称A与B是统计独立的，简称A与B独立。

推论2.2.1

A、B为两个独立事件，若$P(B)>0$,则$P(A|B)=P(A)$。

推论2.2.2

若事件A与B独立，则A与$\bar{B}$独立、$\bar{A}$与B独立、$\bar{A}$与$\bar{B}$独立。

例2.2.1

有a只黑球，b只白球．每次随机从中取出一球，取后放回．求：

1. 在已知第一次摸得黑球的条件下，第二次摸出黑球的概率。
2. 第二次摸出黑球的概率。

例2.2.1

有a只黑球，b只白球．每次随机从中取出一球，取后放回．求：

1. 在已知第一次摸得黑球的条件下，第二次摸出黑球的概率。
2. 第二次摸出黑球的概率。

解：令A=“第一次取出黑球”，B=“第二次取出黑球”。

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{a^2/(a+b)^2}{a/(a+b)} = \frac{a}{a+b},$$

$$P(B) = P(AB) + P(\bar{A}B) = \frac{a^2}{(a+b)^2} + \frac{ab}{(a+b)^2} = \frac{a}{a+b}.$$

例2.2.2

有a只黑球，b只白球。每次随机从中取出一球，取后不放回。求：

1. 在已知第一次摸得黑球的条件下，第二次摸出黑球的概率。
2. 第二次摸出黑球的概率。

例2.2.2

有a只黑球，b只白球。每次随机从中取出一球，取后不放回。求：

1. 在已知第一次摸得黑球的条件下，第二次摸出黑球的概率。
2. 第二次摸出黑球的概率。

解：令A=“第一次取出黑球”,B=“第二次取出黑球”。

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{a(a-1)/[(a+b)(a+b-1)]}{a/(a+b)}=\frac{a-1}{a+b-1},$$

$$\begin{aligned}P(B)&=P(AB)+P(\bar{A}B)\\&=\frac{a(a-1)}{(a+b)(a+b-1)}+\frac{ab}{(a+b)(a+b-1)}=\frac{a}{a+b}.\end{aligned}$$

多个事件的独立性

定义2.2.2

对于三个事件A,B,C,若下列四个等式同时成立，则称它们相互独立。

(1) $P(AB)=P(A)P(B)$,

(2) $P(BC)=P(B)P(C)$,

(3) $P(AC)=P(A)P(C)$,

(4) $P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$。

多个事件的独立性

定义2.2.2

对于三个事件A,B,C,若下列四个等式同时成立，则称它们相互独立。

(1) $P(AB) = P(A)P(B)$,

(2) $P(BC) = P(B)P(C)$,

(3) $P(AC) = P(A)P(C)$,

(4) $P(ABC) = P(A)P(B)P(C)$。

若只满足前面三式，称A,B,C两两独立。

思考：两两独立⇔相互独立？

例2.2.3

伯恩斯坦反例：一个均匀的正四面体，其第一面染成红色，第二面染成白色，第三面染成黑色，而第四面同时染成红、白、黑三色。现在以A,B,C分别记投一次四面体出现红、白、黑颜色朝下的事件。

由于在四面体中至少有两面有红色，则

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{2},$$

又有

$$P(AB) = P(BC) = P(AC) = \frac{1}{4}.$$

（即A,B,C两两独立）但

$$P(ABC) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{8} = P(A)P(B)P(C),$$

从而A,B,C不互相独立。

互相独立$\Rightarrow$两两独立

互相独立$\not\Leftarrow$两两独立

一些结论

若A、B、C相互独立，则

1. $A\bigcup B$与C独立；
2. $A\bigcap B$与C独立；
3. $A-B$与C独立。

定义2.2.3

如果n个事件$A_1, A_2, \dots, A_n$满足下列等式

$$
\begin{cases}
P(A_iA_j) = P(A_i)P(A_j), \quad 1 \le i < j \le n; \\
P(A_iA_jA_k) = P(A_i)P(A_j)P(A_k), \quad 1 \le i < j < k \le n; \\
\vdots \\
P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_m}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_m}), \\
1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_m \le n; \\
\vdots \\
P(A_1A_2\cdots A_n) = P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n).
\end{cases}
$$

则这n个事件总体相互独立，简称相互独立。

定义2.2.3

如果n个事件$A_1, A_2, \ldots, A_n$满足下列等式

$$\begin{cases} P(A_iA_j) = P(A_i)P(A_j), \quad 1 \leq i < j \leq n; \\ P(A_iA_jA_k) = P(A_i)P(A_j)P(A_k), \quad 1 \leq i < j < k \leq n; \\ \vdots \\ P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_m}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_m}), \\ 1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_m \leq n; \\ \vdots \\ P(A_1A_2\cdots A_n) = P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n). \end{cases}$$

则这n个事件总体相互独立，简称相互独立。

共有$C_n^2 + C_n^3 + \cdots + C_n^n = 2^n - n - 1$ 个等式成立。

性质2.2.1

设n个事件$A_1, A_2, \ldots, A_n$是相互独立的，则其中任意m个事件$A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_m}$ 也是相互独立的，其中$1 \leq m \leq n$，$i_1, i_2, \ldots, i_m$是$1, 2, \ldots, n$的一个选排列。

注2.2.1

1. 上面性质改成任意个对立事件也成立；
2. 称无穷多个事件相互独立，如果其中任意有限多个事件都相互独立。

事件独立性与概率的计算

一、相互独立事件至少发生其一的概率的计算

若n个事件$A_1, A_2, \ldots, A_n$是相互独立的，则由于

$$\overline{A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n} = \bar{A}_1 \bar{A}_2 \cdots \bar{A}_n,$$

因此

$$\begin{aligned} & P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = 1 - P(\overline{A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n}) \\ = & \quad 1 - P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 \cdots \bar{A}_n) \\ = & \quad 1 - P(\bar{A}_1) P(\bar{A}_2) \cdots P(\bar{A}_n). \end{aligned}$$

例2.2.4

假若每个人的血清中含有肝炎病毒的概率为0.4%，混合100个人的血清，求此血清中含有肝炎病毒的概率。

例2.2.4

假若每个人的血清中含有肝炎病毒的概率为0.4%，混合100个人的血清，求此血清中含有肝炎病毒的概率。

$$
\begin{aligned}
& P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{100}) = 1 - P(\overline{A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{100}}) \\
= \;& 1 - P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 \cdots \bar{A}_{100}) \\
= \;& 1 - P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2) \cdots P(\bar{A}_{100}) = 1 - (1 - 0.004)^{100} \approx 0.33.
\end{aligned}
$$

二、在可靠性理论中的应用

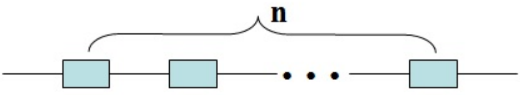
对于一个元件，它能正常工作的概率r，称为它的可靠性。元件组成系统，系统正常工作的概率称为该系统的可靠性。

二、在可靠性理论中的应用

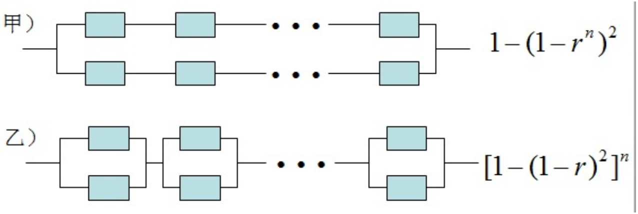
对于一个元件，它能正常工作的概率r，称为它的可靠性。元件组成系统，系统正常工作的概率称为该系统的可靠性。

例2.2.5

如果构成系统的每个元件的可靠性均为r，$0 < r < 1$,且各元件能否正常工作是相互独立的，试求下列系统的可靠性：



r^n



$$P(G_1) = P(G_2) = r^n,$$

$$R_{甲} = 1 - P(\bar{G}_1\bar{G}_2) = 1 - P(\bar{G}_1)P(\bar{G}_2) = 1 - (1 - r^n)^2 = r^n(2 - r^n).$$

$$\begin{aligned} R_{甲} &= P(G_1 \cup G_2) = P(G_1) + P(G_2) - P(G_1G_2) \\ &= P(G_1) + P(G_2) - P(G_1)P(G_2) = 2r^n - r^{2n}. \end{aligned}$$

$$R_{乙} = [(1 - (1 - r)^2]^n = (2r - r^2)^n = r^n(2 - r)^n.$$

由于当$n \geq 2$时，总有$(2-r)^n > 2-r^n$，所以$R_{甲} < R_{乙}$。即乙系统比甲系统可靠。

由于当$n \geq 2$时，总有$(2-r)^n > 2-r^n$，所以$R_{甲} < R_{乙}$。即乙系统比甲系统可靠。

令$f(r) = (2-r)^n - (2-r^n)$。

当$n = 1$时，当$r \in [0,1]$时,$f(r) = 0$。

当$n = 2$时，当$r \in [0,1)$时,$f(r) = 4 - 4r + r^2 - 2 + r^2 = 2 - 4r + 2r^2 = 2(1-r)^2 > 0$。

当$n > 2$时，当$r = 0$时，$f(0) = 2^n - 2 > 0$; 当$r = 1$时，$f(1) = 1 - 1 = 0$. 当$r \in (0,1)$时，

$$f'(r) = -n(2-r)^{n-1} + nr^{n-1} = n(r^{n-1} - (2-r)^{n-1}) < 0.$$

所以$f(r) > f(1) = 0$.

复合试验与试验的独立性

所谓试验相互独立，就是其中一试验所得到的结果，对其它各试验取得其可能结果的概率都没有影响。

若试验E_1的任一结果与试验E_2的任一结果都是相互独立的事件，则称这两个试验相互独立，或称独立试验.

设试验E_1的样本空间是$\Omega_1 = \{\omega^{(1)}\}$，试验$E_2$的的样本空间是$\Omega_2 = \{\omega^{(2)}\}, \ldots, E_n$ 的样本空间是$\Omega_n = \{\omega^{(n)}\}$，为了描述这$n$ 次试验，应构造复合试验E，它表示依次进行试验。

其样本点为$\omega = \{\omega^{(1)}, \omega^{(2)}, \ldots, \omega^{(n)}\}$。

这样的样本空间记作

$$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \cdots \times \Omega_n.$$

例2.2.6

若试验E_1是掷一枚硬币，Ω_1={正，反}，
试验E_2是从装有红白黑三球的袋子中摸出一球，Ω_2={红，白，黑}，
则复合试验E 表示先掷一枚硬币再摸出一球，它相应的样本空间$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$
由下列6个样本点构成：（正，红），（正，白），（正，黑），（反，红），（反，白），（反，黑）。

“与第k次试验有关的事件”：
这种事件发生与否仅与第k次试验的结果有关。因此判断某一样本点是否属于这个事件，只需察看它的第k个分量。

定义2.2.4

以$\mathcal{A}_k$记为与第k次实验有关的事件全体。若对于任意的$A^{(1)} \in \mathcal{A}_1, A^{(2)} \in \mathcal{A}_2, \ldots, A^{(n)} \in \mathcal{A}_n$均成立

$$P(A^{(1)}A^{(2)}\cdots A^{(n)}) = P(A^{(1)})P(A^{(2)})\cdots P(A^{(n)}),$$

则称试验$E_1, E_2, \ldots, E_n$是相互独立的。

思考：

在例2.2.6中，试验E_1与试验E_2是否相互独立?

是否还可以构造其它相互独立的试验?

例如:

1. n次有放回摸球所构成的n个试验是相互独立的;
2. n次不放回摸球所构成的n个试验不独立。

重复独立试验

研究“在同样条件下重复试验”的数学模型，其满足：

1. $\Omega_1 = \Omega_2 = \cdots = \Omega_n$;
2. 有关事件的概率保持不变;
3. 各次试验是相互独立的。

例如: 投n个硬币或进行n次有放回摸球。

伯努利试验与直线上的随机游动

一、伯努利概型

二、伯努利概型中的一些分布

三、直线上的随机游动

四、推广的伯努利试验和多项分布

一. 伯努利(Bernoulli)概型

在实践中，人们总是关心实验中某一事件A是否发生。例如产品质量抽样检测中注意的是否抽到的次品，在掷硬币试验中注意的是否出现正面等。这种问题归结在以下模型下：

事件域取为:$\mathcal{F}=\{\varnothing, A, \bar{A}, \Omega\}$

并称试验出现事件A为“成功”，反之称为“失败”。

这种只有两个结果的试验为伯努利(Bernoulli)试验。

如果随机试验E只有两个结果:A和$\bar{A}$,其中$P(A) = p$, $P(\bar{A}) = q$, $p \geq 0, q \geq 0, p + q = 1$，则称$E$为Bernoulli 试验。

n重伯努利试验

n重伯努利试验（E^n）:n次独立重复的伯努利试验.

n重伯努利试验

n重伯努利试验（E^n）:n次独立重复的伯努利试验.

n重伯努利试验的特点:

1. 每次试验最多出现两个可能结果之一，A或$\bar{A}$;
2. A在每次试验中出现的概率p保持不变;
3. 各次试验相互独立;
4. 共进行了n次试验。

n重伯努利试验的样本点$\omega = (\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n)$,$\{\omega_i\} = A$或$\bar{A}$, 表示第$i$次试验$A$是否发生。
n重独立重复的伯努里试验共有2^n 个样本点。事件域就是样本空间的任意子集。

n重伯努利试验的样本点$\omega=(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n)$,$\{\omega_i\}=A$或$\bar{A}$, 表示第$i$次试验$A$是否发生。

n重独立重复的伯努里试验共有2^n 个样本点。事件域就是样本空间的任意子集。

事件$(A_1,A_2,\cdots,A_{n-1},\bar{A}_n)$,可简记做$A_1A_2\cdots A_{n-1}\bar{A}_n$

$$P(A_1A_2\cdots A_{n-1}\bar{A}_n)=pp\cdots pq.$$

n重伯努利试验的样本点$\omega = (\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n)$,$\{\omega_i\} = A$或$\bar{A}$, 表示第$i$次试验$A$是否发生。

n重独立重复的伯努里试验共有2^n 个样本点。事件域就是样本空间的任意子集。

事件$(A_1, A_2, \cdots, A_{n-1}, \bar{A}_n)$,可简记做$A_1A_2\cdots A_{n-1}\bar{A}_n$

$$P(A_1A_2\cdots A_{n-1}\bar{A}_n) = pp\cdots pq.$$

一般事件的概率由它所包含的样本点的概率求和得到。

- 伯努利试验是一种非常重要的概率模型，它是“在同样条件下进行重复试验”的一种数学模型，特别在讨论某事件出现的频率时常用这种模型。
- 在历史上，伯努利概型是概率论中最早研究的模型之一，也是得到最多研究的模型之一，在理论上具有重要的意义。
- 另一方面，它有着广泛的应用，在我们这门课程中，一些较为深入的结果也是结合伯努利概型进行讨论的。

独立重复的Bernoulli 试验中三个重要问题：

1. n次试验中A恰好发生k 次的概率是多少？
2. 到第k次试验A才首次发生的概率是多少？
3. 一直不停试验，A最终发生的概率是多少？

二、伯努利概型中的一些分布

1.伯努利(Bernoulli)分布

- 只进行一次伯努利试验。
- 概率:$P(A)=p,\ P(\bar{A})=q,\ p\geq 0, q\geq 0, p+q=1$。
- 这种概率分布称为伯努利分布。
- 伯努利概型中最简单的情形。

2.二项(BINOMIAL)分布

在n重Bernoulli试验中,事件A恰好发生k次的概率为

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} (q = 1 - p, k = 0, 1, 2, \cdots, n).$$

2.二项(BINOMIAL)分布

在n重Bernoulli试验中,事件A恰好发生k次的概率为

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} (q = 1 - p, k = 0, 1, 2, \cdots, n).$$

分析：前k次A发生：

$$P(A_1 A_2 \cdots A_k \bar{A}_{k+1} \bar{A}_{k+2} \cdots \bar{A}_n) = p^k q^{n-k}.$$

A发生k次共有C_n^k种选择方法。

2.二项(BINOMIAL)分布

在n重Bernoulli试验中,事件A恰好发生k次的概率为

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} (q = 1 - p, k = 0, 1, 2, \cdots, n).$$

分析：前k次A发生：

$$P(A_1 A_2 \cdots A_k \bar{A}_{k+1} \bar{A}_{k+2} \cdots \bar{A}_n) = p^k q^{n-k}.$$

A发生k次共有C_n^k种选择方法。

注2.3.1

$$\sum_{k=0}^{n} P_n(k) = 1.$$

二项分布

记n重伯努利试验中A出现k次的概率为$b(k;n,p)$，则，

$$b(k;n,p)=C_n^k p^k q^{n-k}.$$

称$b(k;n,p)$决定的概率分布为二项分布,且有

$$\sum_{k=0}^{n} b(k;n,p)=\sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k}=(p+q)^n=1.$$

例2.3.1

设一批产品中有a件是次品,b件是正品。现有放回地从中抽取了n件产品。求:事件A=$\{n$件产品中恰有k件次品$\}$的概率，$(k = 0, 1, 2, \cdots, n)$。

例2.3.1

设一批产品中有a件是次品,b件是正品。现有放回地从中抽取了n件产品。求:事件A=$\{n$件产品中恰有k件次品$\}$的概率，$(k=0,1,2,\cdots,n)$。

解：n重伯努利分布，$p=\dfrac{a}{a+b}$。

$$b(k;n,p)=C_n^k p^k q^{n-k}=C_n^k(\frac{a}{a+b})^k(\frac{b}{a+b})^{n-k}.$$

3. 几何(Geometric)分布

讨论伯努利试验中首次成功出现在第k次的概率,有

$$P(\bar{A}_1\bar{A}_2\cdots\bar{A}_{k-1}A_k)=q^{k-1}p.$$

记

$$g(k;p)=q^{k-1}p, k=1,2,\cdots$$

为几何级数的一般项，故称$g(k;p)$为几何分布。

$$\sum_{k=1}^{\infty}g(k;p)=\sum_{k=1}^{\infty}q^{k-1}p=p\frac{1}{1-q}=1$$

注：伯努利试验中首次成功之前失败的次数为l次的概率

$$g^*(l;p)=q^l p,\quad l=0,1,2,\cdots.$$

例2.3.2

一个人要开门，共有n把钥匙，其中仅有一把钥匙开门，这人在第s次(有放回)试开时才首次成功的概率是多少？

例2.3.2

一个人要开门，共有n把钥匙，其中仅有一把钥匙开门，这人在第s次(有放回)试开时才首次成功的概率是多少？

分析：

n重伯努利试验,$p=\frac{1}{n}$.

第s次首次成功的概率：

$$g(s;\frac{1}{n})=(\frac{n-1}{n})^{s-1}\times\frac{1}{n}.$$

4. 帕斯卡(Pascal)分布与负二项(negative-binomial)分布

- 记C_k ={第r次成功发生在第k次}
- 记$f(k;r,p) = P(C_k)$
- C_k ={前$k-1$次成功$r-1$次,且第k次成功}

4. 帕斯卡(Pascal)分布与负二项(negative-binomial)分布

- 记C_k ={第r次成功发生在第k次}
- 记$f(k;r,p)=P(C_k)$
- C_k ={前$k-1$次成功$r-1$次,且第k次成功}

$$P(C_k)=C_{k-1}^{r-1}p^{r-1}q^{k-r}\cdot p=C_{k-1}^{r-1}p^r q^{k-r}.$$

$$f(k;r,p)=C_{k-1}^{r-1}p^r q^{k-r},\quad k=r,r+1,\ldots.$$

称$f(k;r,p)$为帕斯卡分布。当$r=1$时,为几何分布。

令$l=k-r$,即第r次成功之前失败的次数。

$$f(k;r,p)=C_{k-1}^{r-1}p^r q^{k-r}=C_{r+l-1}^{r-1}p^r q^l=C_{-r}^{l}(-1)^l p^r q^l.$$

$$\sum_{k=r}^{\infty}f(k;r,p)=\sum_{l=0}^{\infty}C_{-r}^{l}(-1)^l p^r q^l=p^r(1-q)^{-r}=1.$$

伯努利试验中第r次成功之前失败的次数为l次的概率

$$f^*(l;r,p)=C_{l+r-1}^{r-1}p^r(1-p)^l=C_{-r}^{l}(-1)^l p^r q^l,l=0,1,2,\ldots.$$

称此概率分布为负二项分布。

牛顿二项式

正整数k,任意实数a,

$$C_{-a}^{k} = (-1)^k C_{a+k-1}^{k}.$$

牛顿二项式

正整数k,任意实数a,

$$C_{-a}^{k} = (-1)^k C_{a+k-1}^{k}.$$

对任意实数a, 有牛顿二项式

$$(1+x)^a = \sum_{r=0}^{\infty} C_a^r x^r.$$

分赌注问题

甲、乙两赌徒按某种方式下注赌博，先胜t局者将赢得全部赌注，但进行到甲胜r局、乙胜s局$(r < t, s < t)$时，因故不得不中止，试问如何分配这些赌注才公平合理？

分赌注问题

甲、乙两赌徒按某种方式下注赌博，先胜t局者将赢得全部赌注，但进行到甲胜r局、乙胜s局$(r < t, s < t)$时，因故不得不中止，试问如何分配这些赌注才公平合理？

建议：

1. 用$r : s$来分配
2. 用最终甲乙取胜的概率$P_{甲}$：$P_{乙}$来分配

分析

- 甲若想获胜，需要再胜$n = t - r$局
- 乙若想获胜，需要再胜$m = t - s$局
- 对每一局，记A={甲胜},$P(A) = p, P(\bar{A}) = q = 1 - p$
- 甲若想获胜，当甲再胜n局时，乙再胜的局数$k < m$局，即A的第n次出现发生在第$n + k$次$(k < m)$试验

$$P_{甲} = \sum_{k=0}^{m-1} C_{n+k-1}^{n-1} p^n q^k.$$

或$\bar{A}$的第m次出现发生在第$m + k$次$(k \geq n)$试验。

$$P_{甲} = \sum_{k=n}^{\infty} C_{m+k-1}^{k} p^k q^m.$$

易证:再赌$n+m-1$局可以决定胜负

甲若想获胜,必须在$n+m-1$局中至少胜n次

根据二项分布:

$$P_{\text{甲}} = \sum_{k=n}^{n+m-1} C_{n+m-1}^{k} p^k q^{n+m-1-k}.$$

可以证明上述三个答案是一致的。

例2.3.3

巴拿赫(Banach)火柴盒问题

数学家的左、右衣袋中各自放有一盒装有N根火柴的火柴盒，每次抽烟时任取一盒用一根。求发现一盒用光时，另一盒还有r根的概率。

例2.3.3

巴拿赫(Banach)火柴盒问题

数学家的左、右衣袋中各自放有一盒装有N根火柴的火柴盒，每次抽烟时任取一盒用一根。求发现一盒用光时，另一盒还有r根的概率。

解：看作$p=\frac{1}{2}$的伯努利试验。要左边空而右边剩r根，应该是左边摸过$N+1$次，而右边$N-r$次，它的概率为：

$$f(2N-r+1;N+1,\frac{1}{2})=C_{2N-r}^{N}(\frac{1}{2})^{2N-r+1}.$$

对于右边先空的情况可同样考虑，因此所求的概率为

$$u_r=2\cdot f(2N-r+1;N+1,\frac{1}{2})=C_{2N-r}^{N}2^{-2N+r}.$$

小概率事件发生概率为1

假定随机事件A在一次试验中发生概率是p（无论多小，只需$p > 0$），如果不停地独立重复进行试验，那么事件A最终发生概率为1。

小概率事件发生概率为1

假定随机事件A在一次试验中发生概率是p（无论多小，只需$p>0$），如果不停地独立重复进行试验，那么事件A最终发生概率为1。

证明：记$D_k=\{A在第k次试验中发生\}, k=1,2,\ldots$. 由于是独立试验，所以这些$D_k$相互独立。因此它们的对立事件$\{A在第k次试验中没有发生\}$也相互独立。我们只需要证明

$$P(\bigcup_{k=1}^{\infty} D_k)=1.$$

小概率事件发生概率为1

$$P(\bigcup_{k=1}^{\infty} D_k) = 1 - P(\bigcap_{k=1}^{\infty} \bar{D}_k) = 1 - \prod_{k=1}^{\infty} P(\bar{D}_k) = 1 - \prod_{k=1}^{\infty}(1-p) = 1.$$

小概率事件发生概率为1

$$P(\bigcup_{k=1}^{\infty} D_k) = 1 - P(\bigcap_{k=1}^{\infty} \bar{D}_k) = 1 - \prod_{k=1}^{\infty} P(\bar{D}_k) = 1 - \prod_{k=1}^{\infty}(1-p) = 1.$$

因为随机事件A每次试验时发生的概率$p > 0$,即$1 - p < 1$. 所以当不停独立重复试验时，无论每次发生的概率有多小，这个随机事件最终会发生概率为1。

小概率事件发生概率为1

$$P(\bigcup_{k=1}^{\infty} D_k) = 1 - P(\bigcap_{k=1}^{\infty} \bar{D}_k) = 1 - \prod_{k=1}^{\infty} P(\bar{D}_k) = 1 - \prod_{k=1}^{\infty} (1-p) = 1.$$

因为随机事件A每次试验时发生的概率$p > 0$,即$1 - p < 1$. 所以当不停独立重复试验时，无论每次发生的概率有多小，这个随机事件最终会发生概率为1。

有志者，事竟成。

有关小概率事件的认识

- 一般认为发生概率≤ 0.05的一个随机事件就可以称为是小概率事件。

有关小概率事件的认识

- 一般认为发生概率≤ 0.05的一个随机事件就可以称为是小概率事件。
- 假如只做一次试验，那么一个小概率事件在这次试验里是不应该发生的。

有关小概率事件的认识

- 一般认为发生概率≤ 0.05的一个随机事件就可以称为是小概率事件。
- 假如只做一次试验，那么一个小概率事件在这次试验里是不应该发生的。
- 如果不停重复试验，只要它不是概率为0事件，最终这个事件都会发生概率为1。

例2.3.4

某人每次射击的命中率是0.001，计算在2500次独立射击中他至少打中一次目标的概率。

例2.3.4

某人每次射击的命中率是0.001，计算在2500次独立射击中他至少打中一次目标的概率。

解：射击过程是参数$p = 0.001$的2500重Bernoulli试验，至少打中一次目标的概率是

$$p = \sum_{k=1}^{2500} C_{2500}^{k} 0.001^{k} 0.999^{2500-k} = 1 - 0.999^{2500} \approx 0.918018.$$

例2.3.4

某人每次射击的命中率是*0.001*，计算在*2500*次独立射击中他至少打中一次目标的概率。

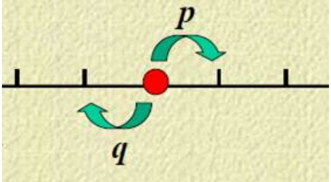
解：射击过程是参数$p = 0.001$的2500重Bernoulli试验，至少打中一次目标的概率是

$$p = \sum_{k=1}^{2500} C_{2500}^{k} 0.001^{k} 0.999^{2500-k} = 1 - 0.999^{2500} \approx 0.918018.$$

同理，5000次射击中至少打中一次目标的概率是0.993279.

三.直线上的随机游动

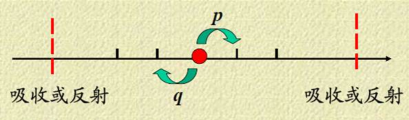
考虑x轴上的一个质点，在时刻$t=0$时，它处于初始位置a（a是整数），以后每隔单位时间，分别以概率p及概率$q=1-p$向正的或负的方向移动一个单位。用这种方式描述的质点的运动称为随机游动。



当$p=q=\frac{1}{2}$时，随机游动称为对称的，这时质点向左或向右移动的可能性相等。

若质点可以在整个数轴的整数点上游动，则称这种随机游动为无限制随机游动。

若在d点设有一个吸收壁，质点一到达这点即被吸收而不再游动，因而整个游动就结束，这种随机游动称为在d点有吸收壁的随机游动。在一个随机游动中可以具有不止一个吸收壁。



在随机游动模型中，我们所关心的是质点在时刻$t = n$时的位置。

1. 无限制随机游动

有无穷赌本的赌徒在n局后的输赢

假定质点在时刻0从原点出发，以S_n记它在时刻$t=n$的位置。为了使质点在时刻$t=n$时位于k（k可以是负整数,$-n\le k\le n$），必须且只须在前n次游动中向右移动的次数比向左移动的次数多k次。

若以x记它在n次游动中向右移动的次数,y记向左移动的次数，则

$$\begin{cases} x - y = k \\ x + y = n \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{n+k}{2} \\ y = \frac{n-k}{2} \end{cases}$$

因为x是整数，所以k必须与n具有相同的奇偶性。

$$\begin{cases} x-y=k \\ x+y=n \end{cases} \qquad \begin{cases} x=\frac{n+k}{2} \\ y=\frac{n-k}{2} \end{cases}$$

因为x是整数，所以k必须与n具有相同的奇偶性。

事件$\{S_n=k\}$（赌徒在n局后赢￥k）发生相当于要求在前n次游动中有$x=\frac{n+k}{2}$次向右,$y=\frac{n-k}{2}$次向左，利用二项分布可得

$$P\{S_n=k\}=C_n^{\frac{n+k}{2}}q^{\frac{n-k}{2}}p^{\frac{n+k}{2}}.$$

当k与n奇偶性相反时，$P\{S_n=k\}=0$.

赌徒在n局后赢的概率

n为偶数($n=2m$)时，

$$\sum_{k=1}^{n} P\{S_n=k\} = \sum_{i=1}^{m} P\{S_n=2i\}$$
$$= \sum_{i=1}^{m} C_{2m}^{m+i} q^{m-i} p^{m+i} = \sum_{l=m+1}^{2m} b(l;2m,p).$$

n为奇数($n=2m+1$)时，

$$\sum_{k=1}^{n} P\{S_n=k\} = \sum_{i=0}^{m} P\{S_n=2i+1\}$$
$$= \sum_{i=0}^{m} C_{2m+1}^{m+i+1} q^{m-i} p^{m+i+1} = \sum_{l=m+1}^{2m+1} b(l;2m+1,p).$$

赌徒在n局后赢的概率

所以，

$$\sum_{k=1}^{n} P\{S_n = k\} = \sum_{l=\lfloor \frac{n}{2} \rfloor+1}^{n} b(l; n, p).$$

特别地,$p = q = 0.5$时，$\sum_{k=1}^{n} P\{S_n = k\} = 0.5.$

2. 两端带有吸收壁的随机游动

有穷赌本的赌徒的输赢

开始时，甲赌徒有赌本a元，乙赌徒有赌本b元。每次赌注是1元，甲赢的概率是p，乙赢的概率是$q = 1 - p$，双方一方输光游戏停止。

2. 两端带有吸收壁的随机游动

有穷赌本的赌徒的输赢

开始时，甲赌徒有赌本a元，乙赌徒有赌本b元。每次赌注是1元，甲赢的概率是p，乙赢的概率是$q=1-p$，双方一方输光游戏停止。

假定质点在时刻$t=0$时，位于$x=a$。

$x=0$与$x=a+b$为两端吸收点的随机游动。

记$q_0(n)=P\{$质点从$x=n$出发被0点吸收$\}$;

$p_{a+b}(n)=P\{$质点从$x=n$出发被$a+b$点吸收$\}$.

2. 两端带有吸收壁的随机游动

q递归关系：

$$q_0(n) = pq_0(n+1) + qq_0(n-1), 1 \le n \le a+b-1;$$

$$\text{初值：}\ q_0(0) = 1, q_0(a+b) = 0.$$

2. 两端带有吸收壁的随机游动

q递归关系：

$$q_0(n) = pq_0(n+1) + qq_0(n-1), 1 \leq n \leq a+b-1;$$

$$\text{初值：}\ q_0(0) = 1, q_0(a+b) = 0.$$

p递归关系：

$$p_{a+b}(n) = pp_{a+b}(n+1) + qp_{a+b}(n-1), 1 \leq n \leq a+b-1;$$

$$\text{初值：}\ p_{a+b}(0) = 0, p_{a+b}(a+b) = 1.$$

齐次二阶差分方程

$$af(n+2)+bf(n+1)+cf(n)=0, \text{两个初值}.$$

$\Longrightarrow$解出$ax^2+bx+c=0$的两个根x_1, x_2。

- 当$x_1=x_2$，则$f(n)=(c_1+c_2n)x_1^n$;
- 当$x_1\neq x_2$，则$f(n)=c_1x_1^n+c_2x_2^n$;

根据差分方程初值解出待定系数c_1, c_2.

方程$px^2 - x + q = 0$的根显然为$x = \frac{1\pm\sqrt{1-4pg}}{2p} = \frac{1\pm|p-q|}{2p}$。

方程$px^2-x+q=0$的根显然为$x=\frac{1\pm\sqrt{1-4pg}}{2p}=\frac{1\pm|p-q|}{2p}$。

(1) 如果$p=q=0.5$，则重根$x_1=x_2=1$，递归关系的通解为$f(n)=c_1+c_2 n$。

方程$px^2-x+q=0$的根显然为$x=\frac{1\pm\sqrt{1-4pg}}{2p}=\frac{1\pm|p-q|}{2p}$。

(1) 如果$p=q=0.5$，则重根$x_1=x_2=1$，递归关系的通解为$f(n)=c_1+c_2n$。

q递归初值$q_0(0)=1, q_0(a+b)=0$解出$c_1=1, c_2=-\dfrac{1}{a+b}$，

即$q_0(n)=\dfrac{a+b-n}{a+b}$；

方程$px^2 - x + q = 0$的根显然为$x = \frac{1\pm\sqrt{1-4pg}}{2p} = \frac{1\pm|p-q|}{2p}$。

(1) 如果$p = q = 0.5$，则重根$x_1 = x_2 = 1$，递归关系的通解为$f(n) = c_1 + c_2 n$。
q递归初值$q_0(0) = 1, q_0(a+b) = 0$解出$c_1 = 1, c_2 = -\dfrac{1}{a+b}$，
即$q_0(n) = \dfrac{a+b-n}{a+b}$；
p递归初值$p_{a+b}(0) = 0, p_{a+b}(a+b) = 1$解出$c_1 = 0, c_2 = \dfrac{1}{a+b}$，即$p_{a+b}(n) = \dfrac{n}{a+b}$.

方程$px^2 - x + q = 0$的根显然为$x = \frac{1\pm\sqrt{1-4pg}}{2p} = \frac{1\pm|p-q|}{2p}$。

(1) 如果$p = q = 0.5$，则重根$x_1 = x_2 = 1$，递归关系的通解为$f(n) = c_1 + c_2 n$。

q递归初值$q_0(0) = 1, q_0(a+b) = 0$解出$c_1 = 1, c_2 = -\dfrac{1}{a+b}$，

即$q_0(n) = \dfrac{a+b-n}{a+b}$；

p递归初值$p_{a+b}(0) = 0, p_{a+b}(a+b) = 1$解出$c_1 = 0, c_2 = \dfrac{1}{a+b}$，即$p_{a+b}(n) = \dfrac{n}{a+b}$.

甲有赌本a，乙有赌本b，公平赌博中甲输光概率为$b/(a+b)$，甲赢光乙的概率$a/(a+b)$，必居其一。

(2) 如果$p \neq q$，则根$x_1 = 1, x_2 = \frac{q}{p} \equiv r$，递归关系的通解为$f(n) = c_1 + c_2 r^n$。

(2) 如果$p \neq q$，则根$x_1 = 1, x_2 = \frac{q}{p} \equiv r$，递归关系的通解为$f(n) = c_1 + c_2 r^n$。

q递归初值$q_0(0) = 1, q_0(a+b) = 0$.即$\begin{cases} c_1 + c_2 = 1, \\ c_1 + c_2 r^{a+b} = 0. \end{cases}$

解出$c_1 = \dfrac{-r^{a+b}}{1 - r^{a+b}}, c_2 = \dfrac{1}{1 - r^{a+b}}$，即$q_0(n) = \dfrac{r^n - r^{a+b}}{1 - r^{a+b}}$；

(2) 如果$p \neq q$，则根$x_1 = 1, x_2 = \frac{q}{p} \equiv r$，递归关系的通解为$f(n) = c_1 + c_2 r^n$。

q递归初值$q_0(0) = 1, q_0(a+b) = 0$.即$\begin{cases} c_1 + c_2 = 1, \\ c_1 + c_2 r^{a+b} = 0. \end{cases}$

解出$c_1 = \frac{-r^{a+b}}{1 - r^{a+b}}, c_2 = \frac{1}{1 - r^{a+b}}$，即$q_0(n) = \frac{r^n - r^{a+b}}{1 - r^{a+b}}$；

p递归初值$p_{a+b}(0) = 0, p_{a+b}(a+b) = 1$即$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0, \\ c_1 + c_2 r^{a+b} = 1. \end{cases}$

解出$c_1 = \frac{1}{1 - r^{a+b}}, c_2 = \frac{-1}{1 - r^{a+b}}$，即$p_{a+b}(n) = \frac{1 - r^n}{1 - r^{a+b}}$.

(2) 如果$p \neq q$，则根$x_1 = 1, x_2 = \frac{q}{p} \equiv r$，递归关系的通解为$f(n) = c_1 + c_2 r^n$。

q递归初值$q_0(0) = 1, q_0(a+b) = 0$.即$\begin{cases} c_1 + c_2 = 1, \\ c_1 + c_2 r^{a+b} = 0. \end{cases}$

解出$c_1 = \dfrac{-r^{a+b}}{1 - r^{a+b}}, c_2 = \dfrac{1}{1 - r^{a+b}}$，即$q_0(n) = \dfrac{r^n - r^{a+b}}{1 - r^{a+b}}$；

p递归初值$p_{a+b}(0) = 0, p_{a+b}(a+b) = 1$即$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0, \\ c_1 + c_2 r^{a+b} = 1. \end{cases}$

解出$c_1 = \dfrac{1}{1 - r^{a+b}}, c_2 = \dfrac{-1}{1 - r^{a+b}}$，即$p_{a+b}(n) = \dfrac{1 - r^n}{1 - r^{a+b}}$.

甲有赌本a，乙有赌本b，不公平赌博中甲输光概率为$q_0(a)$，甲赢光乙的概率$p_{a+b}(a)$；必居其一。

四、推广的伯努利试验与多项(MULTINOMIAL)分布

二项分布可以容易地推广到n次重复独立试验且每次试验可能有若干个结果的情形。

把每次试验的可能结果记为$A_1, A_2, \ldots, A_r$，而

$P(A_i) = p_i, i = 1, 2, \ldots, r$且$p_1 + p_2 + \cdots + p_r = 1, p_i \geq 0$。

当$r = 2$时，我们得到伯努利试验。

不难导出：在n次试验中A_1出现k_1次，A_2出现k_2次，$\cdots$，A_r出现k_r次的概率为

$$\frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_r!} p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_r^{k_r}$$

这里，$k_i \geq 0$,且$k_1 + k_2 + \cdots + k_r = n$

上式称为多项分布，它是二项分布的推广，二项分布中的很多结果都能平行地推广到多项分布的场合。

例2.3.5

平面上的随机游动

一质点从平面上某点出发，等可能的向上、下、左及右方向移动，每次移动的距离为1，求经过$2n$次移动后回到出发点的概率。

例2.3.5

平面上的随机游动

一质点从平面上某点出发，等可能的向上、下、左及右方向移动，每次移动的距离为1，求经过$2n$次移动后回到出发点的概率。

解：这可以归结为上述推广的伯努利试验的问题。分别以事件A_1, A_2, A_3, A_4表示质点向上，下，左，右移动一格，则$p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = \frac{1}{4}$。

若要在$2n$次移动后回到原来的出发点，则向左移动的次数与向右移动的次数应该相等，向上移动的次数与向下移动的次数也应该相等。而总移动次数为$2n$，故所求的概率为

$$
\begin{aligned}
P &= \sum_{k+m=n} \frac{(2n)!}{(k!)^2(m!)^2}(\frac{1}{4})^{2n} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{(2n)!}{(k!)^2[(n-k)!]^2}(\frac{1}{4})^{2n} \\
&= (\frac{1}{4})^{2n}\frac{(2n)!}{(n!)^2}\sum_{k=0}^{n}\left[\frac{n!}{k!(n-k)!}\right]^2 \\
&= (\frac{1}{4})^{2n} C_{2n}^{n}\sum_{k=0}^{n}(C_n^k)^2 \\
&= (\frac{1}{4})^{2n}(C_{2n}^{n})^2 .
\end{aligned}
$$

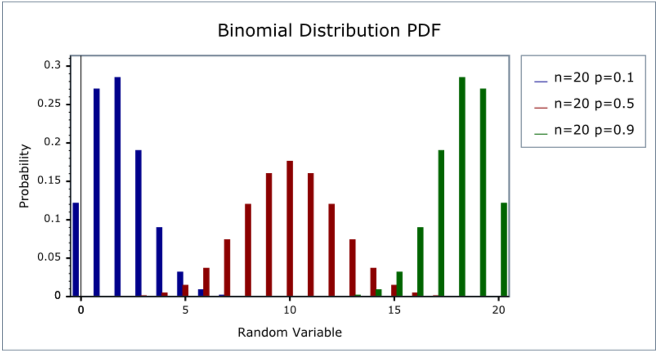
四、二项分布与泊松分布

1.二项分布

$$b(k;n,p) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = b(n-k;n,1-p).$$

1.二项分布

$$b(k;n,p)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}=b(n-k;n,1-p).$$



1.二项分布

表 2.4.1 二项分布数值表

k	$b(k;20,p)$			k	$b(k;20,p)$		
	$p_1=0.1$	$p_2=0.3$	$p_3=0.5$		$p_1=0.1$	$p_2=0.3$	$p_3=0.5$
0	0.1216	0.0008	—	11	—	0.0120	0.1602
1	0.2702	0.0068	—	12	—	0.0039	0.1201
2	0.2852	0.0278	0.0002	13	—	0.0010	0.0739
3	0.1901	0.0716	0.0011	14	—	0.0002	0.0370
4	0.0898	0.1304	0.0046	15	—	—	0.0148
5	0.0319	0.1789	0.0148	16	—	—	0.0046
6	0.0089	0.1916	0.0370	17	—	—	0.0011
7	0.0020	0.1643	0.0739	18	—	—	0.0002
8	0.0004	0.1144	0.1201	19	—	—	—
9	0.0001	0.0654	0.1602	20	—	—	—
10	—	0.0308	0.1762				

例2.4.1

（血清的试验）设在家畜中感染某种疾病是概率是0.3，新发现了一种血清可能对预防此病有效，为此对20只健康的动物注射这种血清。若注射后只有一只动物受感染，我们应对此种血清的作用作何评价？

例2.4.1

（血清的试验）设在家畜中感染某种疾病是概率是0.3，新发现了一种血清可能对预防此病有效，为此对20只健康的动物注射这种血清。若注射后只有一只动物受感染，我们应对此种血清的作用作何评价？

假如该种血清毫无价值，那么注射后的动物受感染的概率还是0.3，则这20只动物中有k只受感染的概率为$b(k;20,0.3)$，发生只有一只动物受感染或更好的情况（无动物受感染）的概率为

$$b(0;20,0.3)+b(1;20,0.3)=0.0008+0.0068=0.0076.$$

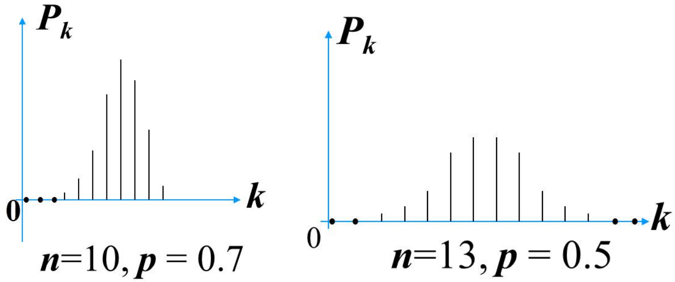
这个概率如此之小，所以我们不能认为血清毫无价值。

二项分布 $b(k;n,p)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$

对于固定 n 及 p，当 k 增加时，概率 $b(k;n,p)$ 先是随之增加直至达到最大值，随后单调减少。

当 $(n+1)p$ 不为整数时，$b(k;n,p)$ 在 $k=\lfloor (n+1)p \rfloor$ 达到最大值；

当 $(n+1)p=m$ 为整数时，$b(k;n,p)$ 在 $k=m$ 和 $k=m-1$ 达到最大值；



证明：

$$\frac{b(k;n,p)}{b(k-1;n,p)} = \frac{(n-k+1)p}{kq} = 1 + \frac{(n+1)p-k}{kq}$$

当$k < (n+1)p$时，$b(k;n,p) > b(k-1;n,p)$
当$k = (n+1)p$时，$b(k;n,p) = b(k-1;n,p)$
当$k > (n+1)p$时，$b(k;n,p) < b(k-1;n,p)$

因为$(n+1)p$不一定是整数，而二项分布中的k只取整数值，所以存在整数m，使得$(n+1)p-1 < m \leq (n+1)p$，而且当k从0变到n时，$b(k;n,p)$起先单调上升，当$k=m$时达到极大值，后来又单调下降。但若$(n+1)p = m$，则这时$b(m;n,p) = b(m-1;n,p)$ 同时达到极大值。

例2.4.2

设每颗子弹打中飞机的概率为0.01，问在500发子弹中打中飞机的最可能次数是多少？并求其相应的概率。

例2.4.2

设每颗子弹打中飞机的概率为0.01，问在500发子弹中打中飞机的最可能次数是多少？并求其相应的概率。

解：这是伯努利概型，打中飞机子弹数服从二项分布，$n = 500, p = 0.01, (n+1)p = 5.01, \lfloor (n+1)p \rfloor = 5$.所以最可能成功次数为5，相应概率为

$$b(5; 500, 0.01) = C_{500}^{5}(0.01)^5(0.99)^{495} \approx 0.17635.$$

例2.4.2

设每颗子弹打中飞机的概率为0.01，问在500发子弹中打中飞机的最可能次数是多少？并求其相应的概率。

解：这是伯努利概型，打中飞机子弹数服从二项分布，$n = 500, p = 0.01, (n+1)p = 5.01, \lfloor (n+1)p \rfloor = 5$.所以最可能成功次数为5，相应概率为

$$b(5; 500, 0.01) = C_{500}^{5}(0.01)^5(0.99)^{495} \approx 0.17635.$$

直接计算比较麻烦,近似计算公式?

例2.4.3

保险事业是最早使用概率论的部门之一，保险公司为了决定保险金数额，估算公司的利润和破产的风险，需要计算各种各样的概率。下面是典型问题之一，根据生命表知道，某年龄段保险者里，一年中每个人死亡的概率为0.005，现在有10000个这类人参加人寿保险，试求在未来一年中在这些保险者里面，

(1)有40个人死亡的概率；

(2)死亡人数不超过70个的概率。

解：

(1) $b(40;10000,0.005)=C_{10000}^{40}(0.005)^{40}(0.995)^{9960}$.

解：

(1) $b(40;10000,0.005)=C_{10000}^{40}(0.005)^{40}(0.995)^{9960}$.

(2)

$$P\{\mu\leq 70\}=\sum_{K=0}^{70}b(k;10000,0.005)$$

$$=\sum_{k=0}^{70}C_{10000}^{k}(0.005)^{k}(0.995)^{10000-k}.$$

解：

(1) $b(40; 10000, 0.005) = C_{10000}^{40}(0.005)^{40}(0.995)^{9960}$.

(2)

$$P\{\mu \leq 70\} = \sum_{K=0}^{70} b(k; 10000, 0.005)$$

$$= \sum_{k=0}^{70} C_{10000}^{k}(0.005)^{k}(0.995)^{10000-k}.$$

直接计算比较麻烦,近似计算公式?

2.二项分布的泊松(Poisson)逼近

定义2.4.1

$$p(k;\lambda)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, k=0,1,2,\ldots,$$

称为泊松分布，$\lambda>0$称为它的参数。

定理2.4.1

泊松定理（二项分布的泊松近似）

设$\lambda > 0$是一常数，n是正整数，若$np_n \to \lambda$，则对任一固定的非负整数k,有

$$\lim_{n\to\infty} C_n^k p_n^k (1-p_n)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}.$$

定理2.4.1

泊松定理（二项分布的泊松近似）

设$\lambda > 0$是一常数，n是正整数，若$np_n \to \lambda$，则对任一固定的非负整数k,有

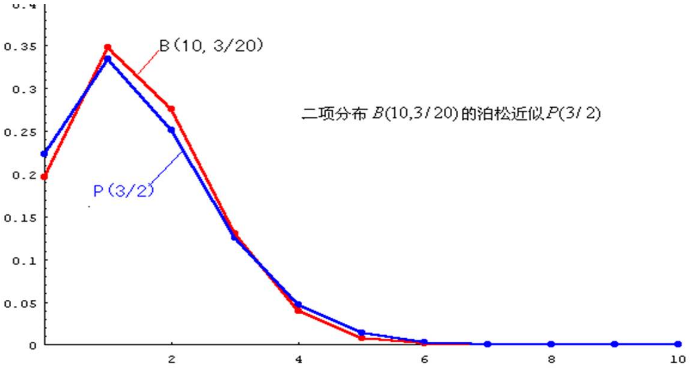
$$\lim_{n\to\infty} C_n^k p_n^k (1-p_n)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

证明：记$\lambda_n = np_n$，则$b(k;n,p)$可写成

$$\frac{\lambda_n^k}{k!} \times (1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\cdots(1-\frac{k-1}{n})(1-\frac{\lambda_n}{n})^{n-k} \to \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

泊松定理表明：泊松分布是二项分布的极限分布，当n很大，p很小(一般$p \leq 0.1$)时，二项分布就可近似看成是参数$\lambda = np$的泊松分布，即$b(k; n, p) \approx \frac{(np)^k}{k!} e^{-np}$。

泊松定理表明：泊松分布是二项分布的极限分布，当n很大，p很小(一般$p \leq 0.1$)时，二项分布就可近似看成是参数$\lambda = np$ 的泊松分布，即$b(k; n, p) \approx \frac{(np)^k}{k!} e^{-np}$。



$$b(k;n,p) \approx \frac{(np)^k}{k!} e^{-np}.$$

$$b(k;n,p) \approx \frac{(np)^k}{k!} e^{-np}.$$

用二项分布的泊松近似计算前面的例2.4.2和例2.4.3：

$$b(5;500,0.01) = C_{500}^{5}(0.01)^5(0.99)^{495} \approx 0.17635.$$

$$b(5;500,0.01) \approx \frac{5^5}{5!} e^{-5} = 0.17547.$$

$$b(40;10000,0.005) \approx \frac{50^{40}}{40!} e^{-50} = 0.0215.$$

二项分布的性质

性质2.4.1

1. $b(k;n,p)=b(n-k;n,1-p)$,
   特别地，$p=0.5$时，$b(k;n,p)=b(n-k;n,p)$，即为对称分布。

2. 固定n,p, $b(k;n,p)$对于k具有单峰性。$m=\lfloor(n+1)p\rfloor$为最可能成功次数。

3. 若$np_n\to\lambda$,

$$\lim_{n\to\infty} b(k;n,p_n)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}.$$

3.泊松分布

1. 作为二项分布的极限分布出现;

3.泊松分布

1. 作为二项分布的极限分布出现；
2. 法国数学家西莫恩·德尼·泊松（Siméon-Denis Poisson）命名的，他在1838年时发表；

3.泊松分布

1. 作为二项分布的极限分布出现；
2. 法国数学家西莫恩・德尼・泊松（Siméon-Denis Poisson）命名的，他在1838年时发表；
3. 这个分布却在更早些时候由贝努里家族的一个人描述过。

3.泊松分布

近数十年来，泊松分布日益显示其重要性,成为概率论中最重要的几个分布之一。泊松分布在管理科学、运筹学以及自然科学的某些问题中都占有重要的地位。

3.泊松分布

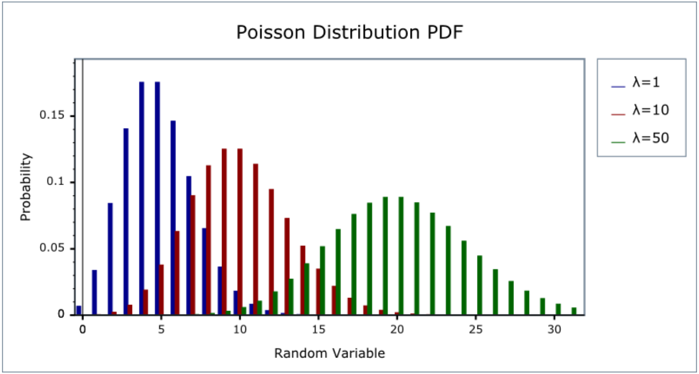
近数十年来，泊松分布日益显示其重要性,成为概率论中最重要的几个分布之一。泊松分布在管理科学、运筹学以及自然科学的某些问题中都占有重要的地位。

1. 在大量的重复试验中稀有事件出现的次数近似服从泊松分布，如意外事故，非常见病，大的自然灾害。
2. 排队问题：在一段时间内窗口等待服务的顾客数。
3. 放射源衰变产生的粒子数。

3.泊松分布

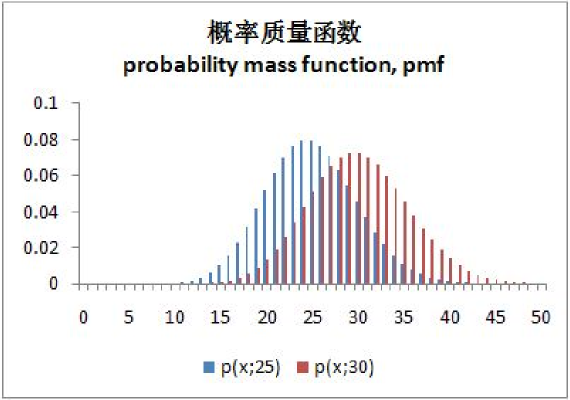
图形特点

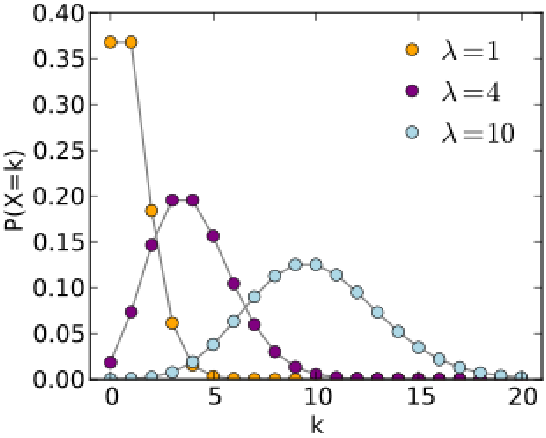
$$p(k;\lambda)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},k=0,1,2,\ldots.$$



注：$\lambda=5,\lambda=10,\lambda=20.$

3.泊松分布


概率质量函数
probability mass function, pmf
0.1
0.08
0.06
0.04
0.02
0
0 5 10 15 20 25 30 35 40 45 50
p(x;25) p(x;30)


0.40
0.35
0.30
0.25
0.20
0.15
0.10
0.05
0.00
P(X=k)
0
5
10
15
20
k
λ=1
λ=4
λ=10

3.泊松分布

$$\frac{P(X=k)}{P(X=k-1)}=\frac{\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}}{\frac{\lambda^{k-1}e^{-\lambda}}{(k-1)!}}=\frac{\lambda}{k}.$$

3.泊松分布

$$\frac{P(X=k)}{P(X=k-1)} = \frac{\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}}{\frac{\lambda^{k-1} e^{-\lambda}}{(k-1)!}} = \frac{\lambda}{k}.$$

故当λ为整数时，$k=\lambda$或$\lambda-1$时，概率最大；

当λ不为整数时，$k=\lfloor\lambda\rfloor$时，概率最大。

泊松过程

1. $N(t)$记在$[0,t]$(或长度为t的时间区间中)中事件发生的次数。

泊松过程

1. $N(t)$记在$[0,t]$(或长度为t的时间区间中)中事件发生的次数。
2. $P_k(t)$记在长度为t的时间区间中事件发生k次的概率，即$P_k(t)=P[N(t)=k]$。

泊松过程

假定随机事件流$N(t)$满足如下三个条件：

(I) 平稳性

在$[t_0, t_0+t)$中事件发生的次数只与时间间隔长度t有关而与时间的起点t_0无关。

泊松过程

假定随机事件流$N(t)$满足如下三个条件：

(I) 平稳性

在$[t_0, t_0+t)$中事件发生的次数只与时间间隔长度t有关而与时间的起点t_0无关。

(II) 独立增量性（无后效性）

在$[t_0, t_0+t)$中发生k次事件与时刻t_0以前发生的事件独立。

泊松过程

(III) 普通性

$$P\{N(t+\Delta t)-N(t)=1\}=\lambda\Delta t+o(\Delta t).$$

即在充分小的时间间隔内发成一次事件的概率与时间间隔成正比；

$$P\{N(\Delta t)\geq 2\}=1-P_0(\Delta t)-P_1(\Delta t)=o(\Delta t).$$

即在充分小的时间间隔内，事件最多发生1次。

则$N(t)$为Poisson过程。

$$P_k(t)=P[N(t)=k]=\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t},\quad k=0,1,2,\ldots.$$

- 平稳性表示了它的概率规律不随时间的推移而改变。
- 独立增量性表明互不相交的时间区间内过程进行的相互独立性。
- 普通性表明，在同一时间瞬间，事件发生两次或两次以上实际上是不可能的。

单调函数的性质

性质1. 设$f(x)$ 是定义在区间$[a,b]$上的单调函数，则$f(x)$的不连续点的全体至多是可数集。

性质2. $f(x)$ 是定义在区间$[a,b]$上的单调函数，则$f(x)$在$[a,b]$上是Riemann 可积的，因而也是Lebesgue 可积的。

性质3. 设$f(x)$ 是定义在区间$[a,b]$上的单调增加的实值函数。则$f(x)$在$[a,b]$上几乎处处可导。其导数$f'(x)$在$[a,b]$上Lebesgue 可积并且成立

$$\int_a^b f'(x)dx \le f(b) - f(a).$$

产生泊松分布的机制分析

下面我们来求$P_k(t)$

对$\Delta t > 0$，考虑$[0, t + \Delta t)$中发生k次事件的概率$P_k(t + \Delta t)$。

产生泊松分布的机制分析

下面我们来求$P_k(t)$

对$\Delta t>0$，考虑$[0,t+\Delta t)$中发生k次事件的概率$P_k(t+\Delta t)$。

由独立增量性及全概率公式

$$P_k(t+\Delta t)=P_k(t)P_0(\Delta t)+P_{k-1}(t)P_1(\Delta t)+\cdots+P_0(t)P_k(\Delta t), \tag{1}$$

（$k\geq 0$，$n\geq 1$，假定$P_{-n}(t)=0$）

因为$\{N(t+\Delta t)=0\}=\{N(t)=0, N(t+\Delta t)-N(t)=0\}$，故

$$\begin{aligned}
P_0(t+\Delta t) &= P(N(t+\Delta t)=0) \\
&= P(N(t)=0, N(t+\Delta t)-N(t)=0) \\
&= P(N(t)=0)P(N(t+\Delta t)-N(t)=0) \\
&= P_0(t)P_0(\Delta t).
\end{aligned}$$

因为$\{N(t+\Delta t)=0\}=\{N(t)=0, N(t+\Delta t)-N(t)=0\}$，故

$$\begin{aligned}
P_0(t+\Delta t) &= P(N(t+\Delta t)=0) \\
&= P(N(t)=0, N(t+\Delta t)-N(t)=0) \\
&= P(N(t)=0)P(N(t+\Delta t)-N(t)=0) \\
&= P_0(t)P_0(\Delta t).
\end{aligned}$$

（需要多一个条件：$P(N(t+\Delta t)-N(t)=1)=\lambda\Delta t+o(\Delta t)$.）

因为$\{N(t+\Delta t)=0\}=\{N(t)=0, N(t+\Delta t)-N(t)=0\}$，故

$$\begin{aligned} P_0(t+\Delta t) &= P(N(t+\Delta t)=0) \\ &= P(N(t)=0, N(t+\Delta t)-N(t)=0) \\ &= P(N(t)=0)P(N(t+\Delta t)-N(t)=0) \\ &= P_0(t)P_0(\Delta t). \end{aligned}$$

（需要多一个条件：$P(N(t+\Delta t)-N(t)=1)=\lambda\Delta t+o(\Delta t)$.）一方面，$P_0(\Delta t)=P(N(t+\Delta t)-N(t)=0)=1-\lambda\Delta t+o(\Delta t)$，代入上式，

$$\frac{P_0(t+\Delta t)-P_0(t)}{\Delta t}=-\lambda P_0(t)+\frac{o(\Delta t)}{\Delta t}.$$

$P_0(t)$表示在长度为t的时间间隔中没有事件发生的概率。如果$t' > t$，则随机事件$\{N(t') = 0\}$的发生必然导致随机事件$\{N(t) = 0\}$，所以$\{N(t') = 0\} \subset \{N(t) = 0\}$，因此$P_0(t') - P_0(t) = P(N(t') = 0) - P(N(t) = 0) \leq 0.$

因此它关于t单调下降，所以$P_0(t)$几乎处处可导。

令$\Delta \to 0$，得

$$P_0'(t) = -\lambda P_0(t).$$

$P_0(t)$表示在长度为t的时间间隔中没有事件发生的概率。如果$t' > t$，则随机事件$\{N(t') = 0\}$的发生必然导致随机事件$\{N(t) = 0\}$，所以$\{N(t') = 0\} \subset \{N(t) = 0\}$，因此$P_0(t') - P_0(t) = P(N(t') = 0) - P(N(t) = 0) \leq 0.$
因此它关于t单调下降，所以$P_0(t)$几乎处处可导。
令$\Delta \to 0$，得

$$P_0'(t) = -\lambda P_0(t).$$

这是一阶线性常系数微分方程。由初始条件$P_0(0) = P(N(0) = 0) = 1$，可得

$$P_0(t) = e^{-\lambda t}.$$

因此，当$\Delta t \to 0$时，我们有

$$P_0(\Delta t) = e^{-\lambda \Delta t} = 1 - \lambda \Delta t + o(\Delta t);$$

因此，当$\Delta t \to 0$时，我们有

$$P_0(\Delta t) = e^{-\lambda \Delta t} = 1 - \lambda \Delta t + o(\Delta t);$$

$$P_1(\Delta t) = 1 - P_0(\Delta t) - P[N(\Delta t) \geq 2] = \lambda \Delta t + o(\Delta t);$$

因此，当$\Delta t \to 0$时，我们有

$$P_0(\Delta t) = e^{-\lambda \Delta t} = 1 - \lambda \Delta t + o(\Delta t);$$

$$P_1(\Delta t) = 1 - P_0(\Delta t) - P[N(\Delta t) \geq 2] = \lambda \Delta t + o(\Delta t);$$

$$\sum_{l=2}^{\infty} P_{k-l}(t) P_l(\Delta t) \leq \sum_{l=2}^{\infty} P_l(\Delta t) = P[N(\Delta t) \geq 2] = o(\Delta t).$$

因此，当$\Delta t \to 0$时，我们有

$$P_0(\Delta t) = e^{-\lambda \Delta t} = 1 - \lambda \Delta t + o(\Delta t);$$

$$P_1(\Delta t) = 1 - P_0(\Delta t) - P[N(\Delta t) \geq 2] = \lambda \Delta t + o(\Delta t);$$

$$\sum_{l=2}^{\infty} P_{k-l}(t) P_l(\Delta t) \leq \sum_{l=2}^{\infty} P_l(\Delta t) = P[N(\Delta t) \geq 2] = o(\Delta t).$$

故由(1)式得：

$$P_k(t + \Delta t) = P_k(t) \cdot (1 - \lambda \Delta t) + P_{k-1}(t) \cdot \lambda \Delta t + o(\Delta t).$$

因此

$$\frac{P_k(t+\Delta t)-P_k(t)}{\Delta t}=\lambda[P_{k-1}(t)-P_k(t)]+\frac{o(\Delta t)}{\Delta t},\quad k\geq 1.$$

因此

$$\frac{P_k(t+\Delta t)-P_k(t)}{\Delta t}=\lambda[P_{k-1}(t)-P_k(t)]+\frac{o(\Delta t)}{\Delta t},\quad k\geq 1.$$

令$\Delta t\to 0$，得$P_k'(t)=\lambda[P_{k-1}(t)-P_k(t)],\quad k\geq 1.$

因此

$$\frac{P_k(t+\Delta t)-P_k(t)}{\Delta t}=\lambda[P_{k-1}(t)-P_k(t)]+\frac{o(\Delta t)}{\Delta t},\quad k\geq 1.$$

令$\Delta t\to 0$，得$P_k'(t)=\lambda[P_{k-1}(t)-P_k(t)],\quad k\geq 1.$

$$[e^{\lambda t}P_k(t)]'=\lambda e^{\lambda t}P_{k-1}(t),\quad k\geq 1.$$

因此

$$\frac{P_k(t+\Delta t)-P_k(t)}{\Delta t}=\lambda[P_{k-1}(t)-P_k(t)]+\frac{o(\Delta t)}{\Delta t},\quad k\geq 1.$$

令$\Delta t\to 0$，得$P_k'(t)=\lambda[P_{k-1}(t)-P_k(t)],\quad k\geq 1.$

$$[e^{\lambda t}P_k(t)]'=\lambda e^{\lambda t}P_{k-1}(t),\quad k\geq 1.$$

由于已知$P_0(t)=e^{-\lambda t}$，故有$[e^{\lambda t}P_1(t)]'=\lambda e^{\lambda t}P_0(t)=\lambda$，
初始条件$P_1(0)=0$,得$P_1(t)=\lambda te^{-\lambda t}$，
这样下去，利用初始条件$P_k(0)=0$, 可解得一切

$$P_k(t)=\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t},\quad k=0,1,2,\ldots.$$

这正是参数为λt的泊松分布。

例2.4.4

假定服务器在长度t分钟的时间内被攻击的次数近似服从$Poi(2t)$，问3分钟内至少被攻击一次与5分钟内至少被两次攻击哪一个更可能出现？

例2.4.4

假定服务器在长度t分钟的时间内被攻击的次数近似服从$Poi(2t)$，问3分钟内至少被攻击一次与5分钟内至少被两次攻击哪一个更可能出现？

解：3分钟内被攻击次数服从参数为6的Poisson分布，因此$1-p(0;6) \approx 0.997521$;

5分钟内被攻击次数服从参数为10的Poisson分布，因此$1-p(0;10)-p(1;10) \approx 0.999501$;

即更可能出现5分钟里至少被两次攻击。

二项分布与Poisson分布的尾概率

1.两类Euler积分

Gamma积分

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx, \quad \forall \alpha > 0.$$

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha), \Gamma(1) = 1, \Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}.$$

$$\Gamma(a,b) : f(x) = \frac{1}{\Gamma(a)b^a} x^{a-1} e^{-x/b}, \quad x \geq 0.$$

Beta积分

$$B(\alpha,\beta)=\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx,\quad \forall\alpha>0,\beta>0.$$

$$B(\alpha,\beta)=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}.$$

$$\beta(a,b):f(x)=\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}x^{a-1}(1-x)^{b-1},\quad 0\le x\le 1.$$

2.Poisson分布的尾概率

对任意正整数r，

$$\sum_{k=r}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=\frac{1}{(r-1)!}\int_0^{\lambda}x^{r-1}e^{-x}dx.$$

$\Gamma(r,1)$在λ处的分布函数值。

3.二项分布的尾概率

对任意正整数r，

$$\sum_{k=r}^{n}C_n^kp^kq^{n-k}=rC_n^r\int_0^{p}x^{r-1}(1-x)^{n-r}dx.$$

$\beta(r,n-r+1)$在p处的分布函数值。

补充：二阶常系数线性差分方程

标准形式：

$$y_{t+2} + ay_{t+1} + by_t = f(t). \tag{2}$$

其中$t = 0, 1, 2, \ldots,$常数$b \neq 0$，函数$f(t)$当$t = 0, 1, 2, \ldots,$时有定义。

如果当$t = 0, 1, 2, \ldots,$时有$f(t) \equiv 0$，则称方程

$$y_{t+2} + ay_{t+1} + by_t = 0 \tag{3}$$

为二阶常系数齐次线性差分方程。

否则，称为二阶常系数非齐次线性差分方程。

(3)称为(2)对应的齐次线性差分方程。

二阶常系数齐次差分线性方程解的性质

$$y_{t+2} + a y_{t+1} + b y_t = 0.$$

1. 方程(3)的任意两个解的和仍是(3)的解；
2. 方程(3)的任意一个解的常数倍仍是(3)的解。

定理2.4.2

如果$y_1(t), y_2(t)$是方程(3)的两个解，则

$$y_t = C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t)$$

也是(3)的解。

如果$\frac{y_1(t)}{y_2(t)}$不恒为常数（称线性无关），则上式为(3)的通解。

二阶常系数非齐次线性差分方程解的性质及求解法

$$y_{t+2}+ay_{t+1}+by_t=f(t).$$

$$y_{t+2}+ay_{t+1}+by_t=0.$$

1. 方程(2)的任意一个解加上方程(3)的任意一个解是(2)的解；
2. 方程(2)的任意两个解之差是(3)的解。

定理2.4.3

设$\bar{y}_t$是方程(2)的一个特解，$y_c(t)$是(3)的通解，那么方程(2)的通解为

$$y_t=y_c(t)+\bar{y}_t.$$

二阶常系数齐次线性差分方程的解法

$$y_{t+2} + ay_{t+1} + by_t = 0.$$

下面来寻找方程(3)的形如$\bar{y}_t = \lambda^t (\lambda \neq 0)$的特解。
将$\bar{y}_t = \lambda^t$带入方程(3)，得$(\lambda^2 + a\lambda + b)\lambda^t = 0$,
而$\lambda^t \neq 0$，于是有

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0. \tag{4}$$

代数方程(4)称为差分方程(3)的特征方程，它的根称为特征根（或特征值）.

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0.$$

记$\Delta = a^2 - 4b.$

情形1

若$\Delta > 0$，则特征方程(4)有两个相异的实根。

$$\lambda_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{\Delta}}{2},$$

得到方程(3)的两个特解$\bar{y_1}(t) = \lambda_1^t, \bar{y_2}(t) = \lambda_2^t$。

而$\frac{\bar{y_1}(t)}{\bar{y_2}(t)} = (\frac{\lambda_1}{\lambda_2})^t$不恒等于$C$，故它们线性无关，因此(3)的通解为

$$y_c(t) = C_1\lambda_1^t + C_2\lambda_2^t.$$

情形2

若$\Delta=0$，则特征方程(4)有两个相等的实根

$$\lambda_{1,2}=\frac{-a}{2},$$

只得到方程(3)的一个特解$\bar{y_1}(t)=(-\frac{a}{2})^t$,直接验证可知$\bar{y_2}(t)=t(-\frac{a}{2})^t$ 也是方程(3)的一个特解，且$\bar{y_1}(t),\bar{y}(t)$线性无关，于是(3)的通解为

$$y_c(t)=(C_1+C_2t)(-\frac{a}{2})^t.$$

情形3

若$\Delta < 0$，则特征方程(4)有一对共轭复根

$$\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i,$$

可以证明，$\bar{y}_1(t) = r^t \cos \omega t, \bar{y}_2(t) = r^t \sin \omega t$,是(3)的解，且线性无关，所以方程(3)的通解为

$$y_c(t) = r^t(C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t),$$

其中$r = \sqrt{b}, \omega = \arctan(\frac{-\sqrt{4b-a^2}}{a})$.

小结

$$y_{t+2} + ay_{t+1} + by_t = 0.$$

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0.$$

小结

$$y_{t+2} + ay_{t+1} + by_t = 0.$$

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0.$$

特征根的情况	通解的表达式
实根 $r_1 \neq r_2$	$y_c(t) = C_1\lambda_1^t + C_2\lambda_2^t$
实根 $r_1 = r_2 = -\frac{a}{2}$	$y_c(t) = (C_1 + C_2 t)(-\frac{a}{2})^t$
复根 $r_{1,2} = \alpha \pm \beta i$	$y_c(t) = r^t(C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x)$

$$r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = \sqrt{b}, \omega = \arctan\frac{\beta}{\alpha} = \arctan(\frac{-\sqrt{4b - a^2}}{a}).$$

例2.4.5

求差分方程$y_{t+2} - 5y_{t+1} + 6y_t = 0$的通解。

例2.4.5

求差分方程$y_{t+2}-5y_{t+1}+6y_t=0$的通解。

解：特征方程为$\lambda^2-5\lambda+6=0$。
特征根为$\lambda_1=2,\lambda_2=3$。
故所求通解为$y_c(t)=C_1 2^t+C_2 3^t$。

例2.4.5

求差分方程$y_{t+2}-5y_{t+1}+6y_t=0$的通解。

解：特征方程为$\lambda^2-5\lambda+6=0$。
特征根为$\lambda_1=2,\lambda_2=3$。
故所求通解为$y_c(t)=C_1 2^t+C_2 3^t$。

例2.4.6

求差分方程$y_{t+2}-4y_{t+1}+4y_t=0$的通解。

例2.4.5

求差分方程$y_{t+2}-5y_{t+1}+6y_t=0$的通解。

解：特征方程为$\lambda^2-5\lambda+6=0$。

特征根为$\lambda_1=2, \lambda_2=3$。

故所求通解为$y_c(t)=C_1 2^t+C_2 3^t$。

例2.4.6

求差分方程$y_{t+2}-4y_{t+1}+4y_t=0$的通解。

解：特征方程为$\lambda^2-4\lambda+4=0$。

解得$\lambda_{1,2}=2$。

故所求通解为$y_c(t)=(C_1+C_2 t)2^t$。

例2.4.7

求差分方程$y_{t+2}-y_{t+1}+y_t=0$的通解。

例2.4.7

求差分方程$y_{t+2} - y_{t+1} + y_t = 0$的通解。

解：特征方程为$\lambda^2 - \lambda + 1 = 0$。

$\Delta = -3 < 0$,

故所求通解为$y_c(t) = C_1 \cos\left(\frac{\pi}{3}t\right) + C_2 \sin\left(\frac{\pi}{3}t\right)$。

$y_c(t) = r^t\left[C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)\right],$

$$r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = \sqrt{b}, \omega = \arctan\frac{\beta}{\alpha} = \arctan\left(\frac{-\sqrt{4b - a^2}}{a}\right).$$