

第七周作业问题：

题目：不可约齐次马氏链的不变分布是唯一的

问题一：用不变(平稳)分布的唯一性证明不变(平稳)分布的唯一性。

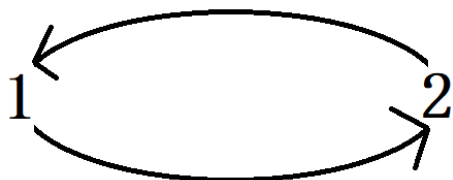
不少同学在证明的过程中都用到“根据不变(平稳)分布的唯一性可知”，而题目的目的就是证明不变(平稳)分布的唯一性，典型的用结论证明结论。这个是错误的！

问题二：误以为 $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j$

实际上：

情况一：周期 $d > 1$ 中 $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)}$ 不存在

举个例子，

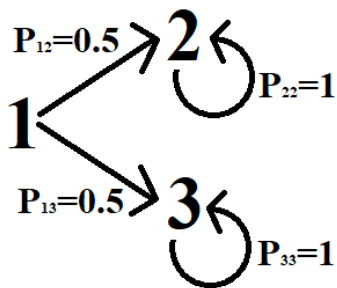


其中 $p_{12}^{(2n)} = 1, p_{12}^{(2n-1)} = 0$,

此时 $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{12}^{(n)} = 0$ 而 $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} p_{12}^{(n)} = 1$, 因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{12}^{(n)}$ 不存在!

情况二：可约马氏链，即使存在不变分布 π ，也可能出现 $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} \neq \pi_j$

举个例子，



可以验证 $\pi(i) = I(i = 2)$ 是不变分布，但此时显然 $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{33}^{(n)} = 1 \neq \pi(3)$

问题三：在证明非常返不存在不变分布的时候， $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = 0$ 推出 $\pi_j = 0$ 是有前提的！
极限与求和交换顺序是有条件的！

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i \in E} \pi_i p_{ij}^{(n)} = \sum_{i \in E} \lim_{n \rightarrow \infty} \pi_i p_{ij}^{(n)}$ 并不一定成立！

要证明其成立，必须用到 $\sum_{i \in E} \pi_i = 1$ ，然后利用M-判断法证明一致收敛性，之后才能交换顺序。

参考答案：

见讲义P24的引理2.4.1(c)的证明【大家要弄明白这个引理的证明!】，

可以知若存在不变分布 π, ν 必有 $\pi = c\nu$ ，

而 $\sum_{i \in E} \pi(i) = \sum_{i \in E} \nu(i) = 1$ 知 $c = 1$ 。