目录

1 【重点】利用（正/非）常返性判断准则的注意事项

零、（正/非）常返性判断准则都需要证明马氏链不可约。

一、i_0的选取是自己任选的，哪个方便选哪个。

二、对于常返性判断中，$\sum\limits_{j\in E} p_{ij}y_j \le y_i$只要求$i \ne i_0$，也就是说，$\sum\limits_{j\in E} p_{i_0j}y_j > y_{i_0}$也是完全没问题的。对于正/非常返性判断准则也一样。

【重点】三、如果把$y_i = i$带进$\sum\limits_{j\in E} p_{ij}y_j \le y_i$，发现不等式并不成立，**不代表**该马氏链非常返！只能说明$y_i = i$不是该方程的解，**不能说明该方程无解!**

【重点】四、如果把$y_i = c^i$带进$\sum\limits_{j\in E} p_{ij}y_j = y_i$，发现等式并不成立或者$c \ge 1$，**不代表**该马氏链常返！只能说明$y_i = c^i$不是该方程的解，**不能说明该方程无解!**

【重点】五、如果把y_i带进$\sum\limits_{j\in E} p_{ij}y_j \le y_i - 1$，发现$\sum\limits_{j\in E} p_{i_0j}y_j = \infty$，**不代表**该马氏链不是正常返！只能说明$y_i$不是该方程的解，**不能说明该方程无解!**

2 【重点】题目2.7.2的证明

2.1 题目2.7.2(a)的证明

当$i=0$时，
由于$\sup\{m: q_m>0\}=+\infty$，
因此$\forall j, \exists j_0 \geq j, q_{j_0}>0$，
此时$p_{0j}^{(j_0-j+1)} \geq p_{ij_0}\prod_{k=j_0}^{j+1} p_{k,k-1} = q_{j_0} > 0$，
即$\forall j, 0 \to j$

当$j=0$时，
$\forall i>0, p_{i0}^{(i)} \geq \prod_{k=i}^{1} p_{k,k-1} = 1 > 0$，
即$\forall i>0, i \to 0$

综合所得$\forall i, j$均有$i \to j$，故该马氏链不可约。

2.2 题目2.7.2(b)的证明

2.2.1 方法一（利用f_{00}去判断）

$f_{00}^{(n)} \geq p_{0,n-1}\prod_{k=n-1}^{1} p_{k,k-1} = q_{n-1}$
因此$\sum_{n=1}^{\infty} f_{00}^{(n)} \geq \sum_{n=1}^{\infty} q_{n-1} = 1$，
因此该不可约马氏链常返。

2.2.2 方法二（利用常返性判断准则）

取$i_0=0, y_i=i$，
此时$\sum_{j=0}^{\infty} p_{ij}y_j = y_{i-1} = i-1 < i = y_i \quad \forall i \neq i_0$，
而且$\lim_{i\to\infty} y_i = \infty$，
因此该不可约马氏链常返。

3 题目2.8.1中出现的问题与证明

这里记$a_n := P(\xi_1 = n)$。

另外这里假设$a_0 > 0$且$\exists n \geq 2, a_n > 0$，否则不可约性不满足。

3.1 【重点】题目2.8.1中出现的问题

一、证明马氏性的时候，直接使用ξ与$X_0, \ldots, X_n$独立。**这是需要证明的！**

二、不能利用$y_i = c^i$与非常返判断准则去证明$\rho < 1$时非常返！

假如这么做，取$i_0 = 0$，看看$i = 1$与$i = 2$时会有什么事情发生：

$i = 1$：$(1 - a_0 - a_1) + a_1 c + a_0 c^2 = c$，算出$c = 1$或$c = \frac{1-a_0-a_1}{a_0}$

$i = 2$：$(1-a_0-a_1-a_2)+a_2 c+a_1 c^2+a_0 c^3 = c^2$，算出$c = 1$或$c = \frac{1-a_0-a_1 \pm \sqrt{(a_0+a_1-1)^2+4a_0(1-a_0-a_1-a_2)}}{2a_0}$

可以看出只有$c = 1$时，才会有$\sum\limits_{j=0}^{\infty} p_{1j} y_j = y_1$和$\sum\limits_{j=0}^{\infty} p_{2j} y_j = y_2$，但此时$y_i$已经是常数解，不成立。

如果还想继续，令$y_0 = 0$，其它不变，还是一样：

$i = 1$：$a_1 c + a_0 c^2 = c$，算出$c = 0$或$c = \frac{1-a_1}{a_0}$

$i = 2$：$a_2 c + a_1 c^2 + a_0 c^3 = c^2$，算出$c = 0$或$c = \frac{1-a_1 \pm \sqrt{(a_1-1)^2-4a_0 a_2}}{2a_0}$

可以看出只能令$c = 0$，显然不成立。

那么是常返吗？不！之前的注意事项已经说明，$y_i = c^i$不是解，**不代表无解！**

三、不能利用$y_i = i$与常返判断准则去证明$\rho \geq 1$时常返！

看看把$y_i=i$带进常返判断准则会怎样：

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=0}^{\infty}p_{ij}y_j\\
=\ &\sum_{j=1}^{i+1}a_{i+1-j}y_j\\
=\ &\sum_{j=1}^{i+1}a_{i+1-j}j\\
=\ &\sum_{j=1}^{i+1}a_{i+1-j}(i+1)-\sum_{j=1}^{i+1}a_{i+1-j}(i+1-j)\\
=\ &\sum_{j=0}^{i}a_j(i+1)-\sum_{j=0}^{i}a_j j\\
=\ &i+1-\rho+\sum_{j=i+1}^{\infty}a_j(j-i-1)\\
\geq\ &y_i+1-\rho\text{【注意这里是“}\geqslant\text{”而非“}\leqslant\text{”】}
\end{aligned}$$

所以当$\rho=1$时，$\displaystyle\sum_{j=0}^{\infty}p_{ij}y_j\geq y_i$，并不满足常返性判断准则。

虽然当$\rho<1$时，$\displaystyle\lim_{i\to\infty}\left[1-\rho+\sum_{j=i+1}^{\infty}a_j(j-i-1)\right]=1-\rho<0$，

但这也只是说明$\exists n$，当$i\geq n$时有$\displaystyle\sum_{j=0}^{\infty}p_{ij}y_j\leq y_i$，

在i取1到$n-1$时依然有$\displaystyle\sum_{j=0}^{\infty}p_{ij}y_j\geq y_i$，并不满足常返性判断准则。

3.2 【重点】题目2.8.1(a)的证明

记$f^{(1)}(x_1,x_2)=(x_1+1-x_2)^+$，
记$f^{(n)}(x_1,x_2,\ldots,x_n)=(f^{(n-1)}(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1})+1-x_n)^+,n\geq 2$
因此$X_{n+1}=f^{(n)}(X_0,\xi_0,\ldots,\xi_n)$

因此当$n \geq 1$时，

$$
\begin{aligned}
& P(X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = i_0) \\
= \; & P((X_n + 1 - \xi_n)^+ = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = i_0) \\
= \; & P((i + 1 - \xi_n)^+ = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = i_0) \\
= \; & P((i + 1 - \xi_n)^+ = j | f^{(n)}(X_0, \xi_1, \ldots, \xi_{n-1}) = i, \ldots, f^{(1)}(X_0, \xi_0) = i_1, X_0 = i_0) \\
= \; & P((i + 1 - \xi_n)^+ = j) \text{【}\xi_n\text{与}X_0, \xi_0, \ldots, \xi_{n-1}\text{独立】}
\end{aligned}
$$

同时

$$
\begin{aligned}
& P(X_{n+1} = j | X_n = i) \\
= \; & P((X_n + 1 - \xi_n)^+ = j | X_n = i) \\
= \; & P((i + 1 - \xi_n)^+ = j | X_n = i) \\
= \; & P((i + 1 - \xi_n)^+ = j | f^{(n)}(X_0, \xi_1, \ldots, \xi_{n-1}) = i) \\
= \; & P((i + 1 - \xi_n)^+ = j) \text{【}\xi_n\text{与}X_0, \xi_0, \ldots, \xi_{n-1}\text{独立】}
\end{aligned}
$$

因此当$n \geq 1$时

$$P(X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = i_0) = P(X_{n+1} = j | X_n = i)$$

因此马氏性成立。

同时$P(X_1 = j | X_0 = i) = P((X_0 + 1 - \xi_0)^+ = j | X_0 = i) = P((i + 1 - \xi_0)^+ = j) = P(X_{n+1} = j | X_n = i), \forall n \geq 1$

因此齐次马氏性成立。

从上面的式子可以看出转移概率为$p_{ij} = \begin{cases} a_{i+1-j} & ,1 \leq j \leq i+1 \\ \sum\limits_{m=i+1}^{\infty} a_m & ,j = 0 \\ 0 & ,\text{其它} \end{cases}$

3.3 常返性的判断【$\rho \neq 1$时】

3.3.1 利用强大数定律

记$\tau = min\{n|X_n = 0, n \geq 0\}$，则

$$
\begin{aligned}
& P(\tau > N|X_0 = 0) \\
= \quad & P(X_n > 0, \forall n = 1, 2, \ldots, N|X_0 = 0) \\
= \quad & P((X_{n-1} + 1 - \xi_n)^+ > 0, \forall n = 1, 2, \ldots, N|X_0 = 0) \\
= \quad & P(n - \sum_{k=1}^{n} \xi_k > 0, \forall n = 1, 2, \ldots, N|X_0 = 0) \\
= \quad & P(n - \sum_{k=1}^{n} \xi_k > 0, \forall n = 1, 2, \ldots, N) \\
= \quad & P(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \xi_k < 1, \forall n = 1, 2, \ldots, N)
\end{aligned}
$$

【注：可验证$\forall n \leq N, (X_{n-1} + 1 - \xi_n)^+ > 0$与$\forall n \leq N, X_0 + n - \sum_{k=1}^{n} \xi_k > 0$等价。】

因此

$$
\begin{aligned}
& 1 - f_{00} \\
= \quad & P(\tau = \infty|X_0 = 0) \\
= \quad & \lim_{N\to\infty} P(\tau > N|X_0 = 0) \\
= \quad & \lim_{N\to\infty} P(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \xi_k < 1, \forall n = 1, 2, \ldots, N) \\
= \quad & P(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \xi_k < 1, \forall n)
\end{aligned}
$$

一、当$\rho < 1$时：

由于$\{\xi_n|n = 0, 1, \ldots\}$i.i.d且$E[\xi_n] = \rho \in (0, 1)$，

由强大数定律知$P(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \xi_k = \rho < 1) = 1$，

因此$P(\exists N_0, \forall n > N_0, \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \xi_k < 1) = 1$，

因此$\exists N_0, P(\forall n > N_0, \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \xi_k < 1) > 0$。

【$\bigcup_{N_0=1}^{\infty}\{\forall n>N_0,\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k<1\}=\{\exists N_0,\forall n>N_0,\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k<1\}$】
因此

$$\begin{aligned}
& 1-f_{00} \\
= \quad & P(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k<1,\forall n) \\
\geq \quad & P(\forall n,\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k<1,\forall n\leq N_0,\xi_k=0) \\
= \quad & P(\forall n>N_0,\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k<1,\forall n\in[1,N_0],\xi_k=0) \\
= \quad & P(\forall n>N_0,\sum_{k=N_0+1}^{n}\xi_k<n,\forall n\in[1,N_0],\xi_k=0) \\
= \quad & P(\forall n>N_0,\sum_{k=N_0+1}^{n}\xi_k<n)P(\forall n\in[1,N_0],\xi_k=0) \\
\geq \quad & P(\forall n>N_0,\sum_{k=N_0+1}^{n}\xi_k<n-\sum_{k=1}^{N_0}\xi_k)a_0^{N_0} \\
= \quad & P(\forall n>N_0,\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k<1)a_0^{N_0}>0
\end{aligned}$$

即$f_{00}<1$，因此该链非常返。

二、当$\rho>1$时：

由于$\{\xi_n|n=0,1,\dots\}$i.i.d且$E[\xi_n]=\rho>0$，

由强大数定律知$P(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k=\rho>1)=1$，

因此$1-f_{00}=P(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k<1,\forall n)\leq P(\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k\leq 1)\leq 1-P(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k=\rho)=0$

即$f_{00}=1$，因此该链常返。

【注】当$\rho=+\infty$时也满足$P(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k=+\infty)=1$，证明为：

$\{min\{N,\xi_n\}|n=0,1,\dots\}$i.i.d且$E[min\{N,\xi_n\}]\in[0,N]$，

记$\rho_N=E[min\{N,\xi_n\}]$，有$\lim_{N\to\infty}\rho_N=+\infty$。

由强大数定律知$P(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}min\{N,\xi_n\}=\rho_N)=1$，

因此$P(\bigcap_{N=1}^{\infty}\{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}min\{N,\xi_n\}=\rho_N\})=1$。
另一方面，$\bigcap_{N=1}^{\infty}\{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}min\{N,\xi_n\}=\rho_N\}\subseteq\{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_n=+\infty\}$
【$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_n\geq\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}min\{N,\xi_n\}$，而$\lim_{N\to\infty}\rho_N=+\infty$】
因此$P(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k=+\infty)=1$。
#

3.3.2 常返性判断准则【$\rho>1$时】

和排队论中证明$\rho>1$时非常返一样，
利用单调性和连续性可知$\exists c\in(0,1),\sum_{n=0}^{\infty}a_nc^n=c$，

令$y_i=\begin{cases}0 & ,i=0\\ c^{-i} & ,i\geq1\end{cases}$，则$\forall i\geq1$有

$$\begin{aligned}
&\sum_j p_{ij}y_j\\
=&\ [\sum_{j=i+1}^{\infty}a_j]y_0+\sum_{j=1}^{i+1}a_{i+1-j}y_j\\
=&\ \sum_{j=1}^{i+1}a_{i+1-j}c^{-j}\\
=&\ c^{-i-1}\sum_{j=1}^{i+1}a_{i+1-j}c^{i+1-j}\\
=&\ c^{-i-1}\sum_{j=0}^{i}a_jc^j\\
\leq&\ c^{-i-1}*c\\
=&\ c^{-i}=y_i
\end{aligned}$$

另一方面$\lim_{i\to\infty}y_i=\lim_{i\to\infty}c^{-i}=+\infty$，
根据常返性判断准则知该链常返。

3.4 常返性的判断【$\rho = 1$时】【征集答案中】

3.5 正常返性的判断【$\rho > 1$时】

3.5.1 直接计算平稳分布π

记$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$，且$f(1) = 1$，
因此由幂级数的性质知$f(x)$在$[-1, 1]$上任意可导，
且$f^{'}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, f^{''}(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} > 0$，且均在$[0, 1]$上连续，
而$f^{'}(0) = a_1 < 1, f^{'}(1) > 1$，因此$\exists c_0 \in (0, 1), f^{'}(c_0) = 1$，且$\forall x \in (c_0, 1], f^{'}(x) > 1$。
由$[f(x) - x]^{'} = f^{'}(x) - 1$知$f(x) - x$在$[c_0, 1]$单调递增，
因此$f(c_0) - c_0 \leq f(1) - 1 = 0$。
另一方面$f(0) - 0 = a_0 > 0$，而$f(x) - x$在$[0, c_0]$上连续，
因此由介值定理知$\exists c_1 \in (0, c_0] \subseteq (0, 1)$使$f(c_1) = c_1$。
令$\pi(n) = (1 - c_1) c_1^n$，有$\sum_{n=0}^{\infty} \pi(n) = 1$，
且$\forall m \geq 1, \sum_{n=m-1}^{\infty} a(n-m+1)\pi(n) = c^{m-1}[\sum_{n=m-1}^{\infty} a(n-m+1) c_1^{n-m+1}] = c^m = \pi(m)$
π为平稳分布，即该马氏链正常返。

3.6 正常返性的判断【$\rho = 1$时】

3.6.1 利用排队论的非常返性判断准则

根据排队论【讲义P48最下面】里面的结论，在相同$\{a_n, n = 0, 1, \cdots\}$下的马氏链是常返，
因此根据非常返性判断准则，取$i_0 = 0$，
若非负有界解$\{y_i, i = 0, 1, \ldots\}$满足$\forall i \geq 1$有

$$\sum_{j=i-1}^{\infty} a_{j-i+1} y_j = y_i$$

则$\exists A \geq 0, \forall i \geq 1, y_i = A$。
假设该链正常返，则存在平稳分布π满足$\forall i \geq 1$有

$$\sum_{j=i-1}^{\infty} a_{j-i+1} \pi_j = \pi_i$$

因此$\forall i \geq 1, \pi_i = A$，故$\sum\limits_{i=0}^{\infty} \pi_i = \begin{cases} \pi_0 & , A = 0 \\ +\infty & , A > 0 \end{cases}$，

而$\sum\limits_{i=0}^{\infty} \pi_i = 1$，有$\pi_i = \begin{cases} 1 & , i = 0 \\ 0 & , i \geq 1 \end{cases}$

但此时$0 = \pi_1 = \sum\limits_{i=0}^{\infty} \pi_i p_{i1} \geq \pi_0 p_{01} = a_0 > 0$，矛盾。

因此该链零常返或者非常返。