第九周作业问题：

题目2.4.1

问题一：假设$\widetilde{f}_{ii}^{(n)} = f_{ii}^{(nd)}$，用的时候却是$\widetilde{f}_{ij}^{(n)} = f_{ij}^{(nd)}$。

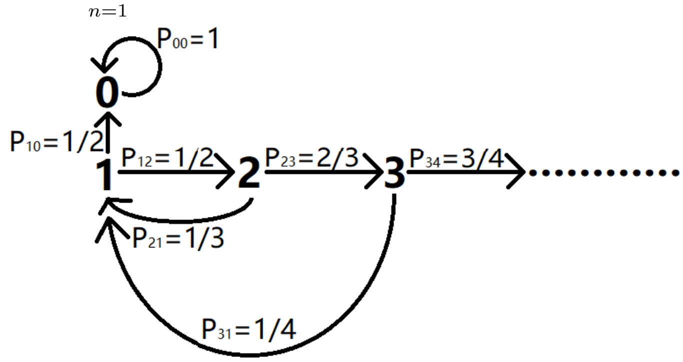
很多人在用数学归纳法的时候，假设$\widetilde{f}_{ii}^{(n)} = f_{ii}^{(nd)}$，但是在对$\widetilde{f}_{ii}^{(n+1)}$做展开的时候，用的却是$\sum\limits_{k\neq j} p_{ik}^{(d)} \widetilde{f}_{kj}^{(n)} = \sum\limits_{k\neq j} p_{ik}^{(d)} f_{kj}^{(nd)}$，与假设不符。

问题二：题目并没有要求i是常返!!!

题目并没有要求i是常返！实际上，当i非常返的时候，也是正确的。

还有些同学认为，非常返必有$m_{ii} = \infty$，这也是错误的，反而很多时候是错误的。最显然的反例，就是状态1是吸收态，$p_{21} = 1$，此时$p_{22}^{(n)} = 0, \forall n \in \mathbb{N}^+$。

期中考写零常返的定义时，有些人没有写出$\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_{ii}^{(n)} = 1$，这里就给出一个反例，非常返也是可以有$\sum\limits_{n=1}^{\infty} n f_{ii}^{(n)} = \infty$。



如图所示，转移概率为$p_{ij} = \begin{cases} \frac{i}{i+1} & ,i \geq 1\text{且}j = i+1 \\ \frac{1}{2} & ,i = 1\text{且}j = 0 \\ \frac{1}{i+1} & ,i \geq 2\text{且}j = 1 \\ 1 & ,i = j = 0 \\ 0 & ,\text{其它} \end{cases}$

此时可以算出

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_{11}^{(n)} \leq 1 - P(\forall n \geq 1, X_n = 0 | X_0 = 1) = \frac{1}{2} < 1$$

因此状态1非常返。

同时

$$f_{11}^{(n)}=(\prod_{m=1}^{n-1}\frac{m}{m+1})\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n(n+1)},n\geq 2$$

此时

$$\sum_{n=1}^{\infty}nf_{11}^{(n)}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n+1}=\infty$$

总结：不能单纯通过$\sum\limits_{n=1}^{\infty}nf_{ii}^{(n)}<\infty$判断$i$为正常返，也不能单纯通过$\sum\limits_{n=1}^{\infty}nf_{ii}^{(n)}=\infty$判断$i$为零常返。

题目2.4.1的答案：

方法一：

由于状态i的周期为d，若$d\nmid m$，则

$$P(X_m\neq i|X_0=i)=1-P(X_m=i|X_0=i)=1-p_{ii}^{(m)}=1$$

因此

$$\begin{aligned}&\widetilde{f}_{ii}^{(n)}\\=\;&P(X_{nd}=i,X_{md}\neq i\quad\forall m\in[1,n-1]|X_0=i)\\=\;&P(X_{nd}=i,X_m\neq i\quad\forall m\in[1,nd-1]|X_0=i)\text{【}d\nmid m\text{时}P(X_m\neq i|X_0=i)=1\text{】}\\=\;&f_{ii}^{(nd)}\end{aligned}$$

方法二：

由于状态i的周期为d，知$\forall m\in[1,d-1]$均有$p_{ii}^{(m)}=0$，

因此$\widetilde{f}_{ii}^{(1)}=\widetilde{p}_{ii}^{(1)}=p_{ii}^{(d)}=\sum\limits_{m=1}^{d}f_{ii}^{(m)}p_{ii}^{(d-m)}=f_{ii}^{(d)}$。

假设对于$k\leq n$有$\widetilde{f}_{ii}^{(k)}=f_{ii}^{(kd)}$，

由于状态i的周期为d，知$\forall d\nmid m$均有$p_{ii}^{(m)}=0$，

因此

$$
\begin{aligned}
& \widetilde{p}_{ii}^{(n+1)} \\
= & \sum_{m=1}^{n+1} \widetilde{f}_{ii}^{(m)} \widetilde{p}_{ii}^{(n+1-m)} \text{【} p_{ii}^{(n)} \text{与} f_{ii}^{(n)} \text{的关系】} \\
= & \widetilde{f}_{ii}^{(n+1)} + \sum_{m=1}^{n} f_{ii}^{(md)} p_{ii}^{((n+1-m)d)} \text{【数学归纳】} \\
= & \widetilde{f}_{ii}^{(n+1)} + \sum_{m=1}^{(n+1)d-1} f_{ii}^{(m)} p_{ii}^{((n+1)d-m)} \text{【} d \nmid m \text{时} p_{ii}^{(m)} = 0 \text{】} \\
= & \widetilde{f}_{ii}^{(n+1)} + p_{ii}^{((n+1)d)} - f_{ii}^{((n+1)d)} \text{【} p_{ii}^{(n)} \text{与} f_{ii}^{(n)} \text{的关系】} \\
= & \widetilde{p}_{ii}^{(n+1)} + \widetilde{f}_{ii}^{(n+1)} - f_{ii}^{((n+1)d)}
\end{aligned}
$$

因此$\widetilde{f}_{ii}^{(n+1)} = f_{ii}^{((n+1)d)}$。

书本P43的32题：

该马氏链**不一定**不可约，平稳分布**不一定**唯一。

反例：

取$m = 3, p_0 = p_2 = 0.5, p_1 = p_3 = 0$，此时转移概率矩阵为

$$
\begin{pmatrix} p_0 & p_1 & p_2 & p_3 \\ p_3 & p_0 & p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 & p_0 & p_1 \\ p_1 & p_2 & p_3 & p_0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0.5 \end{pmatrix}
$$

显然$\forall n, p_{01}^{(n)} = 0$，因此该马氏链可约，

而$\pi = (0.5 \quad 0 \quad 0.5 \quad 0)$和$\pi = (0 \quad 0.5 \quad 0 \quad 0.5)$都是平稳分布。

答案：

令$A := \{n : p_n > 0, n = 1, 2, \ldots, m\}, d = \gcd(A, m+1)$

有$\lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \begin{cases} d/(m+1) & , d | i-j \\ 0 & , d \nmid i-j \end{cases}$

过程：

$p_{ij} > 0$当且仅当$i = j$或$\exists k \in A, m+1 | i-j+k$。

因此$p_{ij}^{(n)} > 0$当且仅当存在$a_k \in \mathbb{N}_0$满足$\sum\limits_{k\in A} a_k \le n$且$m+1 | i-j+\sum\limits_{k\in A} a_k k$，

因此$\exists n \in \mathbb{N}^+, p_{ij}^{(n)} > 0$当且仅当存在$a_k \in \mathbb{N}_0$满足$m+1 | i-j+\sum\limits_{k\in A} a_k k$。

根据初等数论的知识【对于正整数集$\{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$，$\exists N, \forall n \ge N, \exists c_m \in \mathbb{N}_0$使$\sum\limits_{k=1}^{m} c_m b_m = n * \gcd(b_1, b_2, \ldots, b_m)$】

可知$\exists n \in \mathbb{N}^+, p_{ij}^{(n)} > 0$当且仅当$d | i-j$，

所以当$d \nmid i-j$时，$\lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = 0$。

记$C_l = \{j | d | j-l, j = 0, 1, \ldots, m\}, l = 0, 1, \ldots, d-1$，

考虑限制在C_l上的马氏子链，显然其为不可约马氏链，

且由$p_{ii} = p_0 > 0$知非周期性。

显然$\pi_i = d/(m+1), \forall i \in C_l$为该马氏子链的平稳分布，

根据讲义P25的定理2.4.1知$\lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = d/(m+1), \forall i, j \in C_l$。

综上有$\lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \begin{cases} d/(m+1) & , d | i-j \\ 0 & , d \nmid i-j \end{cases}$