第十一周作业问题：

题目2.5.1：

问题一、不能利用平稳分布去证明。

实际上，平稳分布存在是等价于正常返状态存在，不能一开始就假设平稳分布存在。

答案：

假设该马氏链不存在正常返状态，则$\forall i,j\in E,\lim\limits_{n\to\infty}p_{ij}^{(n)}=0$，

因此对于固定的$i_0\in E$有$\sum\limits_{j\in E}(\lim\limits_{n\to\infty}p_{i_0j}^{(n)})=0$，

但同时$\sum\limits_{j\in E}(\lim\limits_{n\to\infty}p_{i_0j}^{(n)})=\lim\limits_{n\to\infty}(\sum\limits_{j\in E}p_{i_0j}^{(n)})=\lim\limits_{n\to\infty}1=1$，矛盾。

所以该马氏链存在正常返状态。

题目2.5.2、题目2.5.3、P43的28题

本质上都是，先通过转移概率矩阵证明马氏链非周期不可约，然后通过$\pi=\pi P$求出平稳分布π（利用定理可以知道该马氏链正常返，不需要利用定义去证明正常返性）。再利用π_i与$\mu_i,m_{ii},\lim\limits_{n\to\infty}p_{ji}^{(n)}$ 的关系求出答案。

问题一、还是$\pi=\pi P$和$\pi^T=P\pi^T$分不清楚。

如果你求出来的$\pi_i=1/n$，在很多情况下(第九周作业是特别情况)就是你对平稳分布理解错误。

备注：题目2.5.3计算过于复杂，考试等是不会出现这么复杂的计算的。

题目2.6.1：

注意：若$f_{ij}=1$且j为正常返，则$m_{ij}=\infty$是**可能发生**的。

问题一、不能直接利用$m_{jj}=\sum\limits_{k\neq j}p_{ik}m_{kj}+f_{ij}$去证明$m_{ij}<\infty$

假如$p_{ik}=0$，那么即使$m_{kj}=\infty$，也不能说明$m_{jj}=\infty$。

问题二、不能利用引理2.6.1(或者说$i\xrightarrow{A}j$并**不成立**)

如果利用引理2.6.1，需要对A做定义：$A_{ik}=\begin{cases}p_{ik} & ,k\neq j\\ 0 & ,k=j\end{cases}$

而此时利用定义可知$i\xrightarrow{A}j$并**不成立**。

问题三、最小非负解也**可能**为$+\infty$

问题四、对最小非负解的理解有误。

对于固定的j，

m_{ij},m_{jj}**并不是**$x_i=\sum\limits_{k\neq j}p_{ik}x_k+p_{ij}$的最小非负解!

$(m_{ij},i\in E)$才是最小非负解。

方程的解x并不是只有一维!

问题五、对级数收敛理解错误。

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=\infty$**并不代表**$\exists\delta,N,\forall n\geq N,a_n\geq\delta$。

经典的反例就是$\sum\limits_{n=1}^{\infty}1/n=\infty$但$\lim\limits_{n\to\infty}1/n=0$。

答案:

方法一【相对简单】:

对于固定的j，其为正常返。

由于$\sum\limits_{k\neq j}p_{ik}m_{kj}+f_{ij}=m_{jj}<\infty$，

因此若$p_{jk}^{(1)}>0$，则$m_{kj}<\infty$。

假设对于n，$\forall k\in E$满足$p_{jk}^{(n)}>0$有$m_{kj}<\infty$，

则对于$n+1$，若$k\in E$满足$0<p_{jk}^{(n+1)}=\sum\limits_{k_0\in E}p_{jk_0}^{(n)}p_{k_0k}$，

那么$\exists k_0\in E$满足$p_{jk_0}^{(n)}>0$(此时$m_{k_0j}<\infty$)且$p_{k_0k}>0$，

由于$\sum\limits_{k\neq j}p_{k_0k}m_{kj}+f_{ij}=m_{k_0j}<\infty$知$m_{kj}<\infty$。

因此$\forall k\in E$，若$\exists n$使$p_{jk}^{(n)}>0$，则$m_{kj}<\infty$。

由该马氏链不可约知$\forall i\in E,m_{ij}<\infty$。

由j的任意性知$\forall i,j\in E,m_{ij}<\infty$

方法二【相对复杂】:

若$i=j$，由正常返性知$m_{ij}<\infty$。

对于$i\neq j$，

由不可约性可知$\exists n\in\mathbb{N}^+,p_{ij}^{(n)}>0$。

注意到$p_{ij}^{(n)}=\sum\limits_{k_1\in E}\cdots\sum\limits_{k_{n-1}\in E}P(X_n=j,X_{n-1}=k_{n-1},\ldots,X_1=k_1|X_0=i)$，

因此存在$l_1,\ldots,l_{n-1}\in E$使$P(X_n=j,X_{n-1}=l_{n-1},\ldots,X_1=l_1|X_0=i)>0$。

记$l_n=j,N=\min\{m=0,1,\ldots,n|l_m=j\}$，则

$$\begin{aligned}
&P(X_n=j,X_{n-1}=l_{n-1},\ldots,X_{N+1}=l_{N+1}|X_N=j)P(X_N=j,X_{N-1}=l_{N-1},\ldots,X_1=l_1|X_0=i)\\
=\;&P(X_n=j,X_{n-1}=l_{n-1},\ldots,X_1=l_1|X_0=i)\\
>\;&0
\end{aligned}$$

因此$P(X_N=j,X_{N-1}=l_{N-1},\ldots,X_1=l_1|X_0=i)>0$，其中$l_m\neq j,m=1,2,\ldots,N-1$。

记$l_0=i,M=\max\{m=0,1,\ldots,N|l_m=i\}$，则

$$\begin{aligned}
& P(X_{N-M}=j,X_{N-M-1}=l_{N-1},\ldots,X_1=l_{M+1}|X_0=i)P(X_M=i,X_{M-1}=l_{M-1},\ldots,X_1=l_1|X_0=i)\\
= & P(X_N=j,X_{N-1}=l_{N-1},\ldots,X_{M+1}=l_{M+1}|X_M=i)P(X_M=i,X_{M-1}=l_{M-1},\ldots,X_1=l_1|X_0=i)\\
= & P(X_N=j,X_{N-1}=l_{N-1},\ldots,X_1=l_1|X_0=i)\\
> & 0
\end{aligned}$$

因此$p_{ij}^{'}:=P(X_{N-M}=j,X_{N-M-1}=l_{N-1},\ldots,X_1=l_{M+1}|X_0=i)>0$，其中$l_m\neq i$且$l_m\neq j,m=1,2,\ldots,N-M-1$。

同时当$m>N-M$时，$f_{ii}^{(m)}\geq p_{ij}^{'}f_{ji}^{(m-N+M)}$，

因此

$$\begin{aligned}
& m_{ii}\\
= & \sum_{m=1}^{\infty}mf_{ii}^{(m)}\\
\geq & \sum_{m=N-M+1}^{\infty}mf_{ii}^{(m)}\\
\geq & \sum_{m=N-M+1}^{\infty}mp_{ij}^{'}f_{ji}^{(m-N+M)}\\
\geq & \sum_{m=N-M+1}^{\infty}(m-N+M)p_{ij}^{'}f_{ji}^{(m-N+M)}\\
= & p_{ij}^{'}\sum_{m=1}^{\infty}mf_{ji}^{(m)}\\
= & p_{ij}^{'}m_{ji}
\end{aligned}$$

由$p_{ij}^{'}>0$及$m_{ii}<\infty$知$m_{ji}<\infty$。

P44的题目34：

问题一、不少同学证明用第二迭代法求出的是原方程的解，就认为是最小非负解

把解带进方程，等号两边相等，**只能**证明是方程的解，而**不一定**是最小解!

答案：

记$f^{(0)}=0,f^{(n+1)}:=Af^{(n)}+g$；

利用数学归纳法知$f^{(n+1)}=\sum\limits_{m=0}^{n}A^m g$，

因此$f^*=\lim\limits_{n\to\infty}f^{(n+1)}=\sum\limits_{m=0}^{\infty}A^m g$。

记$\widetilde{f}^{(1)}=g_1,\widetilde{f}^{(n+1)}:=A\widetilde{f}^{(n)}+g_{n+1}$；

利用数学归纳法知$\widetilde{f}^{(n)}=\sum\limits_{k=1}^{n}A^{n-k}g_k$，

因此$\sum\limits_{m=1}^{n}\widetilde{f}^{(m)}=\sum\limits_{m=1}^{n}\sum\limits_{k=1}^{m}A^{m-k}g_k=\sum\limits_{k=1}^{n}(\sum\limits_{m=k}^{n}A^{m-k})g_k=\sum\limits_{k=1}^{n}(\sum\limits_{m=0}^{n-k}A^m)g_k$

因此$\sum\limits_{m=1}^{\infty}\widetilde{f}^{(m)}=\sum\limits_{k=1}^{\infty}(\sum\limits_{m=0}^{\infty}A^m)g_k=\sum\limits_{m=0}^{\infty}A^m g=f^*$。

P44的题目35：

答案：

取$g_{n,i}=nf_{ij}^{(n)}$，利用第二迭代法，

令$y_i^{(1)}=g_{1,i}=\frac{1*(1+1)}{2}f_{ij}^{(1)},y_j^{(n+1)}=\sum\limits_{k\neq j}p_{ik}y_k^{(n)}+g_{n+1,i}$

利用数学归纳法可得$y_i^{(n)}=\frac{n(n+1)}{2}f_{ij}^{(n)}$，

因此最小非负解$f_i^*=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{2}f_{ij}^{(n)}$