题目3.3.4：

问题一、$P(\tau_1 < 4|X_0 = 1) \neq P(\tau_1 \leq 3|X_0 = 1)$

如果这是离散时间马氏链的话，这个是对的。但是这是**连续**时间马氏链!

实际上，$P(\tau_1 < 4|X_0 = 1) \neq P(\tau_1 \leq 4|X_0 = 1)$(可以直接用不用证明，下面的参考答案就当这个不存在)。

参考答案：

$$\begin{aligned} & P(\tau_1 < 4, X_{\tau_1} = 2|X_0 = 1) \\ = & \lim_{t \to 4^-} P(\tau_1 \leq t, X_{\tau_1} = 2|X_0 = 1) \\ = & \lim_{t \to 4^-} (1 - e^{-3t})/3 \text{【定理3.3.4的公式】} \\ = & (1 - e^{-12})/3 \end{aligned}$$

向前向后方程的等价形式：

问题一、不少同学只证明了其中一边的证明。

既然证明等价，就需要证明⇒和⇐都成立。

如果只证明了“⇒”，那么你还需要证明若$p_{ij}(t) = \sum_{k \neq i} \int_0^t q_{ik} e^{-q_i(t-s)} p_{kj}(s) ds + e^{-q_i t} \delta_{ij}$成立则有$P^{'}(t) = QP(t)$。

如果只证明了“⇐”，那么你还需要证明若$P^{'}(t) = QP(t)$成立则有$p_{ij}(t) = \sum_{k \neq i} \int_0^t q_{ik} e^{-q_i(t-s)} p_{kj}(s) ds + e^{-q_i t} \delta_{ij}$。

【当然还有向前方程的情况】

问题二、不能使用“第一次分解”。

首先是“第一次分解”中$P(\tau_1 = t) = 0, \forall t > 0$。如果想用概率密度的形式，还需要进一步说明为什么可以这么用。

其次是$P(X_{tau_1+s} = j|X_{tau_1} = k) = P(X_s = j|X_0 = k)$并不一定成立。

参考答案：

【备注】向前方程与向后方程的证明类似，因此这里就只证明向后方程。

【引理】若$\sum_{k \neq i} q_{ik} p_{kj}(t)$收敛，则$\sum_{k \neq i} q_{ik} p_{kj}(s)$在$[0, t]$上一致收敛。

【引理证明】

注意到$p_{jj}(s) = P(X_s = j|X_0 = j) \geq P(\tau_1 \geq s|X_0 = j) = e^{-q_j s}$

因此$\inf\{p_{jj}(s) : s \in [0, t]\} \geq e^{-q_j t} > 0$。

记$M = [\inf\{p_{jj}(s) : s \in [0,t]\}]^{-1}$，

因此$s \in [0,t], p_{jj}(t) = \sum_{k\in E} p_{jk}(s)p_{kj}(t-s) \geq p_{jj}(s)p_{jj}(t-s) \geq p_{jj}(s)/M$

因此$\forall s \in [0,t], q_{ik}p_{kj}(s) \leq Mq_{ik}p_{kj}(t)$

根据M判断法由$\sum_{k\neq i} q_{ik}p_{kj}(t)$收敛知$\sum_{k\neq i} q_{ik}p_{kj}(s)$ 在$[0,t]$上一致收敛。

【引理完毕】

“⇒”：对$p_{ij}(t)e^{q_it}$求积分

$$
\begin{aligned}
& p_{ij}(t)e^{q_it} - p_{ij}(0)e^{q_i*0} \\
= & \int_0^t d(p_{ij}(s)e^{q_is}) \\
= & \int_0^t p_{ij}^{'}(s)e^{q_is} + q_ip_{ij}(s)e^{q_is}ds \\
= & \int_0^t \sum_{k\in E} q_{ik}p_{kj}(s)e^{q_is} + q_ip_{ij}(s)e^{q_is}ds \\
= & \int_0^t \sum_{k\neq i} q_{ik}p_{kj}(s)e^{q_is}ds \\
= & \sum_{k\neq i}\int_0^t q_{ik}e^{q_is}p_{kj}(s)ds
\end{aligned}
$$

【备注】最后一个等号（积分与求和交换顺序）是因为

$$q_{ik}p_{kj}(s)e^{q_is} \leq e^{q_it}q_{ik}p_{kj}(s)$$

而根据引理知$\sum_{k\neq i} q_{ik}p_{kj}(s)$一致收敛，

根据阿贝尔判断法知$q_{ik}p_{kj}(s)e^{q_is}$在$[0,t]$上一致收敛。

再由$\forall k \neq i, q_{ik}p_{kj}(s)e^{q_is}$在$[0,t]$上连续知积分与求和可以交换顺序。

【备注完毕】

因此移项得

$$p_{ij}(t) = \sum_{k\neq i}\int_0^t q_{ik}e^{-q_i(t-s)}p_{kj}(s)ds + e^{-q_it}\delta_{ij}$$

“$\Leftarrow$”：

$$
\begin{aligned}
& p_{ij}^{'}(t) \\
= \quad & d(\sum_{k\neq i}\int_0^t q_{ik}e^{-q_i(t-s)}p_{kj}(s)ds - e^{-q_it}\delta_{ij})/dt \\
= \quad & d(\int_0^t\sum_{k\neq i} q_{ik}e^{-q_i(t-s)}p_{kj}(s)ds)/dt + e^{-q_it}q_i\delta_{ij} \\
= \quad & \sum_{k\neq i} q_{ik}p_{kj}(t) - q_i\int_0^t\sum_{k\neq i} q_{ik}e^{-q_i(t-s)}p_{kj}(s)ds + e^{-q_it}q_i\delta_{ij} \\
= \quad & \sum_{k\neq i} q_{ik}p_{kj}(t) - q_i\sum_{k\neq i}\int_0^t q_{ik}e^{-q_i(t-s)}p_{kj}(s)ds + e^{-q_it}q_i\delta_{ij} \\
= \quad & \sum_{k\neq i} q_{ik}p_{kj}(t) - q_ip_{ij}(t) \\
= \quad & \sum_{k\in E} q_{ik}p_{kj}(t)
\end{aligned}
$$

【备注】第二、第四个等号(求和与积分交换顺序)的理由和上面的证明一样。

不过这里$\sum_{k\neq i} q_{ik}p_{kj}(s)$并不是默认成立。还是利用之前引理的证明方法（同样的放缩），如果$\sum_{k\neq i} q_{ik}p_{kj}(t)$发散，那么$\forall s\geq t, \sum_{k\neq i} q_{ik}p_{kj}(s)$ 发散，从而导出$\forall s\geq t, p_{ij}(s)=\infty$，矛盾。