第一章 线性规划简介

- 1.5 对偶线性规划
- 1.6 对偶单纯形方法
- 1.7 灵敏度分析简介

1.5 对偶线性规划

$$\text{(LP)} \quad \min f = c^T x \quad \begin{cases} Ax & \geq & b \\ x & \geq & 0 \end{cases}$$

$\Longleftrightarrow$ 对偶

$$\text{(DP)} \quad \max g = y^T b \quad \begin{cases} y^T A & \leq & c^T \\ y & \geq & 0 \end{cases}$$

原问题（求极小）	对偶问题（求极大）
n个变量 m个约束条件 第k个约束取$\geq$ 第k个约束取$=$ 第i个变量x_i无符号约束 第i个变量 $x_i \geq 0$	n 个约束条件 m 个变量 第k个变量$y_k \geq 0$ 第k个变量 y_k无符号约束 第i个约束取$=$ 第i个约束取$\leq$

表1.5-1

例1. 写出线性规划问题的对偶问题.

$$\min f = 4x_1 + 6x_2 - 5x_3$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 5x_3 & \geq & 2 \\ -3x_1 + x_2 - 4x_3 & = & -1 \\ x_1 \geq 0, x_3 & \geq & 0 \end{cases}$$

解：该问题的对偶问题为

$$\max g = 2y_1 - y_2$$

$$\begin{cases} y_1 - 3y_2 & \leq & 4 \\ -y_1 + y_2 & = & 6 \\ 5y_1 - 4y_2 & \leq & -5 \\ y_1 \geq 0 \end{cases}$$

例2. 写出线性规划问题的对偶问题.

$$\max f = 3x_1 + x_2 - 2x_3$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 & = & 8 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 & \geq & 9 \\ x_1 \geq 0, x_2 & \geq & 0 \end{cases}$$

解：该问题等价于

$$\max f = 3x_1 + x_2 - 2x_3$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 & = & 8 \\ -2x_1 - x_2 + 3x_3 & \leq & -9 \\ x_1 \geq 0, x_2 & \geq & 0 \end{cases}$$

对偶问题为

$$\min g = 8y_1 - 9y_2$$

$$\begin{cases} y_1 - 2y_2 & \geq & 3 \\ -2y_1 - y_2 & \geq & 1 \\ -y_1 + 3y_2 & = & -2 \\ y_2 \geq 0 \end{cases}$$

例3. 某企业生产两种产品 A_1, A_2 , 需要利用三种原材料 B_1, B_2, B_3. 原材料的月供应量，生产一吨产品所消耗的原材料数量以及单位产品价格如下表所示. 设生产的产品 A_1, A_2 均可在市场销售.

1. 企业应如何安排月生产计划，才能使总收益最大?

2. 假设另一个公司想从该企业购买三种原材料，那么应该如何制定原材料价格，才能使双方获益?

	A_1	A_2	原料月供应量（吨)
B_1	1	1	150
B_2	2	3	240
B_3	3	2	300
单位产品价格(万元/吨)	2.4	1.8	

表1.5-2

解：1. 假设该企业每月生产 A_1, A_2 为 x_1, x_2 吨. 为使总收益最大，需求解线性规划问题

$$\max f = 2.4x_1 + 1.8x_2$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 & \leq & 150 \\ 2x_1 + 3x_2 & \leq & 240 \\ 3x_1 + 2x_2 & \leq & 300 \\ x_1 \geq 0, x_2 & \geq & 0 \end{array}\right.$$

2. 假设另一家公司以每吨y_1, y_2, y_3 万元购买全部的原料 B_1, B_2, B_3, 有

$$\min g = 150y_1 + 240y_2 + 300y_3$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} y_1 + 2y_2 + 3y_3 & \geq & 2.4 \\ y_1 + 3y_2 + 2y_3 & \geq & 1.8 \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 & \geq & 0 \end{array}\right.$$

两个问题为对偶问题!

1.5.2 对偶线性规划的性质

(1) 对称性：对偶问题的对偶是原问题 .

(2) 弱对偶定理: 若 x_0 是原问题的可行解, y_0 是对偶问题的可行解. 那么 $c^T x_0 \geq y_0^T b$, 即 $f(x_0) \geq g(y_0)$

证明： y_0 满足 $y_0^T A \leq c^T$. 因为 $x_0 \geq 0$，所以 $y_0^T A x_0 \leq c^T x_0$ ，有 $y_0^T b \leq c^T x_0$.

(3) 无界性定理：若原问题(对偶问题)有可行解，但无最优解，则其对偶问题(原问题)无可行解.

$(2) \Rightarrow (3)$

(4) 最优性定理: 若原问题(LP)和对偶问题(DP)有可行解 x_0 和 y_0， 且 $c^T x_0 = y_0^T b$, 那么 x_0 和 y_0分别是(LP)和(DP)的最优解.

证明：任取(LP)的可行解 x . 由弱对偶性定理，$c^T x \geq y_0^T b = c^T x_0.$ 所以 x_0 是(LP)的最优解.

(5) 强对偶定理：若原问题有最优解，那么对偶问题也有最优解, 且目标函数最优值相等.

证明：(LP)问题有最优解，所以存在可行基 B, 对应的基础可行解为 $x_0 = (x_B^T, x_N^T)^T$, 满足 $x_N = 0, x_B = B^{-1}b \geq 0.$ (LP)最优值为: $c^T x_0 = c_B^T x_B = c_B^T B^{-1} b.$

令 $y_0 = (B^{-1})^T c_B$, 有: $y_0^T A = c_B^T B^{-1} A \leq c^T$ (不等式对应单纯性表T(B)目标函数行变量的系数)，所以 y_0 是(DP)的可行解, 对应的函数值 $y_0^T b = c^T x_0.$

例4.已知线性规划问题

$$\max f = x_1 + x_2$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 & \leq & 2 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 & \leq & 1 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 & \geq & 0 \end{cases}$$

试用对偶理论证明上述线性规划问题无最优解.

证明：对偶问题为

$$\min g = 2y_1 + y_2$$

$$\begin{cases} -y_1 - 2y_2 & \geq & 1 \\ y_1 + y_2 & \geq & 1 \\ y_1 - y_2 & \geq & 0 \\ y_1 \geq 0, y_2 & \geq & 0 \end{cases}$$

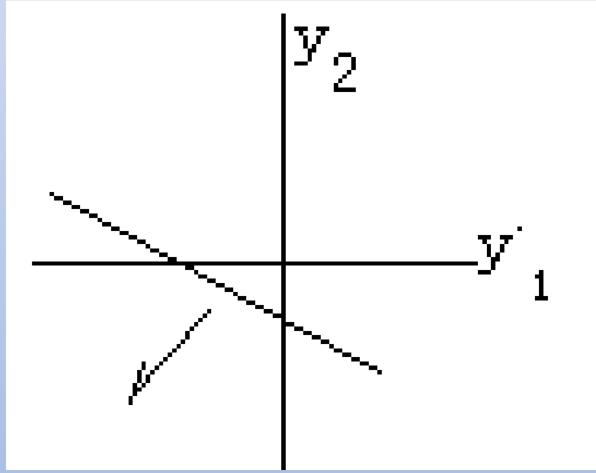

图1.5-1

由第1个约束条件和非负条件，可知对偶问题无可行解. 故原问题虽然有可行解, 但无最优解.

1.6 对偶单纯形法

定义：考虑(LP)问题：

$$\min f = c^T x$$

$$\begin{cases} Ax &= b \\ x &\geq 0 \end{cases}$$

假设B是一个基，并且满足条件：$c_B^T B^{-1} A - c^T \leq 0.$ 那么得到(DP)问题

$$\max g = y^T b$$

$$\left\{ \; y^T A \leq c^T \right.$$

的一个可行解：$y = (B^{-1})^T c_B$. 我们称B为问题(LP)的一个对偶可行基.

注：由定义，若B是标准形式(LP)问题的一个对偶可行基，那么

- B给出(DP)问题的一个可行解.

- 在单纯形表T(B)中(以 $B = [P_1 \quad P_2 \quad \cdots \quad P_m]$ 为例)， $b_{0i} \le 0, i = 1, 2, \cdots, n.$

		x_1	x_2	$\cdots$	x_m	x_{m+1}	$\cdots$	x_n	
f	b_{00}	0	0	$\cdots$	0	$b_{0(m+1)}$	$\cdots$	b_{0n}	≤ 0
x_1	b_{10}	1	0	$\cdots$	0	$b_{1(m+1)}$	$\cdots$	b_{1n}	
x_2	b_{20}	0	1	$\cdots$	0	$b_{2(m+1)}$	$\cdots$	b_{2n}	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	
x_m	b_{m0}	0	0	$\cdots$	1	$b_{m(m+1)}$	$\cdots$	b_{mn}	

而系数 $b_{j0}, j = 1, 2, \cdots, m$ 的符号不定. 我们称 $b_{j0}, j = 1, 2, \cdots, m$ 为*对偶单纯形法的检验数*.

对偶单纯形法算法:

0. 取定(LP)问题的一个对偶可行基 $B=[P_{i_1} \quad P_{i_2} \quad \cdots \quad P_{i_m}]$. 在表T(B)中有：$b_{0j}\leq 0, j=1,2,\cdots,n$

1. 如果 $b_{i0}\geq 0, i=1,2,\cdots,m$，那么问题在

$$\begin{cases} x_{j_i} & = & b_{i0}, & i=1,2,\cdots,m \\ x_j & = & 0, & j\neq j_1,\cdots,j_m \end{cases}$$

取到最优值，算法终止. 否则，转至2.

2. 如果存在 $b_{r0}<0 (0\leq r\leq m)$ ， 而 $b_{rj}\geq 0, j=1,2,\cdots,n$，那么(LP)无可行解. 算法终止. 否则，转至3.

3. 设 $\theta = \min\{\frac{b_{0i}}{b_{ri}} | b_{ri} < 0, 1 \le i \le n\} = \frac{b_{0k}}{b_{rk}}$ ，取 b_{rk} 为旋转元，转至4.

4. 取基$B' = [P_{i_1}, \quad \cdots \quad P_{i_{r-1}}, \quad P_k, \quad P_{i_{r+1}}, \quad \cdots \quad P_{i_m}]$. 做初等行变换，把 b_{rk}所在第k列变为标准单位向量:

$$\begin{cases} b'_{rj} & = & \frac{b_{rj}}{b_{rk}}, & j = 0, 1, \cdots, n \\ b'_{ij} & = & b_{ij} - \frac{b_{rj}}{b_{rk}} b_{ik}, & 0 \le j \le n, 0 \le i \ne r \le m \end{cases}$$

得到单纯形表$T(B')$. 返回步骤1.

例5. 用对偶单纯形法求解

$$\min f = 3x_1 + 4x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 & \geq & 5 \\ 3x_1 + x_2 & \geq & 6 \\ x_1 + x_2 & \geq & 4 \\ x_1 \geq 0, x_2 & \geq & 0 \end{cases}$$

解：标准形式为

$$\min f = 3x_1 + 4x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 & = & 5 \\ 3x_1 + x_2 - x_4 & = & 6 \\ x_1 + x_2 - x_5 & = & 4 \\ x_i \geq 0, i & = & 1, 2, \cdots, 5 \end{cases}$$

$B = [P_3 \quad P_4 \quad P_5]$为基，但不是可行基. 此时非基变量 x_1, x_2, 下 $f - 3x_1 - 4x_2 = 0$, 系数均为负，故B是对偶可行基.

$T(B_1)$

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
f	0	-3	-4	0	0	0
x_3	-5	-1	-2	1	0	0
x_4	-6	-3	-1	0	1	0
x_5	-4	-1	-1	0	0	1

$T(B_2)$

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
f	6	0	-3	0	-1	0
x_3	-3	0	$-\frac{5}{3}$	1	$-\frac{1}{3}$	0
x_1	2	1	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	0
x_5	-2	0	$-\frac{2}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	1

$b_{20} = -6 < 0$

$$\begin{aligned}\theta &= \min\{\frac{b_{01}}{b_{21}}, \frac{b_{02}}{b_{22}}\} \\ &= \min\{\frac{-3}{-3}, \frac{-4}{-1}\} \\ &= \frac{-3}{-3}\end{aligned}$$

$B_2 = [P_3 \quad P_1 \quad P_5]$

做初等行变换，使得单纯形表中新的基变量 x_1所在列为标准单位向量：

$-\frac{1}{3}r_2$

$r_0 + 3r_2$

$r_1 + r_2$

$r_3 + r_2$

$T(B_2)$

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
f	6	0	-3	0	-1	0
x_3	-3	0	$-\frac{5}{3}$	1	$-\frac{1}{3}$	0
x_1	2	1	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	0
x_5	-2	0	$-\frac{2}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	1

$T(B_3)$

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
f	$\frac{57}{5}$	0	0	$-\frac{9}{5}$	$-\frac{2}{5}$	0
x_2	$\frac{9}{5}$	0	1	$-\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$	0
x_1	$\frac{7}{5}$	1	0	$\frac{1}{5}$	$-\frac{2}{5}$	0
x_5	$-\frac{4}{5}$	0	0	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	1

$$b_{10} = -3 < 0$$

$$\begin{aligned}\theta &= \min\{\frac{b_{02}}{b_{12}}, \frac{b_{04}}{b_{14}}\} \\ &= \min\{\frac{-3}{-\frac{5}{3}}, \frac{-1}{-\frac{1}{3}}\} \\ &= \frac{-3}{-\frac{5}{3}}\end{aligned}$$

$$B_3 = [P_2 \quad P_1 \quad P_5]$$

做初等行变换，使得单纯形表中新的基变量x_2所在列为标准单位向量：

$$-\frac{3}{5}r_1$$
$$r_0 + 3r_1$$
$$r_2 - \frac{1}{3}r_1$$
$$r_3 + \frac{2}{3}r_1$$

$T(B_3)$

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
f	$\frac{57}{5}$	0	0	$-\frac{9}{5}$	$-\frac{2}{5}$	0
x_2	$\frac{9}{5}$	0	1	$-\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$	0
x_1	$\frac{7}{5}$	1	0	$\frac{1}{5}$	$-\frac{2}{5}$	0
x_5	$-\frac{4}{5}$	0	0	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	1

$T(B_4)$

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
f	13	0	0	-1	0	-2
x_2	1	0	1	-1	0	1
x_1	3 ≥ 0	1	0	1	0	-2
x_4	4	0	0	2	1	-5

$$b_{30} = -\frac{4}{5} < 0$$

$$\begin{aligned}\theta &= \min\{\frac{b_{03}}{b_{33}}, \frac{b_{04}}{b_{34}}\} \\ &= \min\{\frac{-\frac{9}{5}}{-\frac{2}{5}}, \frac{-\frac{2}{5}}{-\frac{1}{5}}\} \\ &= \frac{-\frac{2}{5}}{-\frac{1}{5}}\end{aligned}$$

$$B_4 = [P_2 \quad P_1 \quad P_4]$$

做初等行变换，使得单纯形表中新的基变量x_4 所在列为标准单位向量：

$-5r_3$

$r_0 + \frac{2}{5}r_3$

$r_1 - \frac{1}{5}r_3$

$r_2 + \frac{2}{5}r_3$

$f_{\min} = 13$

从以上求解过程可以看到对偶单纯形法有以下优点：

● 初始解可以是非可行解，只要检验数都为负数时就可以进行基的变换，这时不需要加入人工变量, 而进形两阶段方法，因此有时可以简化计算.

●当变量多于约束条件，对这样的线性规划问题用对偶单纯形法计算可以减少计算工作量. 因此对变量较少，而约束条件很多的线性规划问题，可先将它变换成对偶问题，再用对偶单纯形法求解.

1.7 灵敏度分析简介

考虑线性规划问题

$$\min f = c^T x$$

$$\begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

现实问题中，涉及的系数 a_{ij}, b_i, c_i 都是变量. 例如随市场供需的变化，原料的供应，生产工艺的改进等，这些量会随时间变化.

问题：这些系数在什么范围内波动，可以保持最优解或最优基不变?

这类问题的研究称为灵敏度分析.

两个简单情形:

情形I. 假设 A, c 保持不变, $\bar{b} = b + (0, \cdots, \Delta b_k, \cdots, 0)^T$ ，即仅第k个分量发生扰动 $\bar{b_k} = b_k + \Delta b_k$. 假设原问题已经找到最优基B, 那么 Δb_k 在什么范围内变化，可以保证B仍然是问题的最优基?

观察到: b 的变化，不会影响B作为问题的基，且单纯形表T(B)中的检验数 $b_{0i}, 1 \leq i \leq n$ 保持不变
($c_B^T B^{-1} A - c^T$ 不变). 故B是否是仍是最优基，取决于 $B^{-1}\bar{b} \geq 0$ 是否仍然成立.

$$B^{-1}\bar{b} = B^{-1}b + B^{-1}\Delta b = B^{-1}b + B^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \Delta b_k \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \geq 0$$

这会引入m个关于 Δb_k 的不等式.

例6. 假设某工厂使用原料B_1, B_2 生产三种产品A_1, A_2, A_3. 原料每月的供应量, 生产每万件产品需要原料的数量，以及每万件产品的价格如表所示.

(1) 该厂应如何安排每月的生产，使总收益最大?
(2) 假设原料B_1 的供应量$b_1 = 180$ 发生波动. 求波动Δb_1 的范围，使(1)所得的最优基保持不变.

原料	A_1	A_2	A_3	**原料月供应量（吨）**
B_1	4	3	1	180
B_2	2	6	3	200
价格(万/万件)	12	5	4	

表1.5-3

解 （1）设生产 A_i 的数量为 x_i . 需要求解问题为:

$$\max f = 12x_1 + 5x_2 + 4x_3$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + x_3 & \leq & 180 \\ 2x_1 + 6x_2 + 3x_3 & \leq & 200 \\ x_1 \geq 0, x_2 & \geq & 0 \end{cases}$$

由单纯形法求得最优基 $B = \begin{bmatrix} P_1 & P_3 \end{bmatrix}$，单纯形表

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
f'	-584	0	$-\frac{29}{5}$	0	$-\frac{14}{5}$	$-\frac{2}{5}$
x_1	34	1	$\frac{3}{10}$	0	$\frac{3}{10}$	$-\frac{1}{10}$
x_3	44	0	$\frac{9}{5}$	1	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$

当 $x_1 = 34, x_2 = 0, x_3 = 44$，$f_{\max} = 584.$

(2) 要求

$$B^{-1}\bar{b} = B^{-1}b + B^{-1}\begin{bmatrix}\Delta b_1 \\ 0\end{bmatrix} \geq 0$$

注意到

$$B^{-1}b = \begin{bmatrix}34 \\ 44\end{bmatrix} \qquad B^{-1} = \begin{bmatrix}\frac{3}{10} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5}\end{bmatrix}$$

得到线性不等式

$$\begin{cases} 34 + \frac{3}{10}\Delta b_1 & \geq & 0 \\ 44 - \frac{1}{5}\Delta b_1 & \geq & 0 \end{cases}$$

所以当 $-113\frac{1}{3} \leq \Delta b_1 \leq 220$，$B = \begin{bmatrix}P_1 & P_3\end{bmatrix}$ 仍然是最优基.

情形II. 假设新的约束条件被加入，其余条件保持不变. 如何从原问题的最优基得到新问题的最优基?

例7. 在例6中，假设生产原料B_3由原先不限量，变为每月至多150吨. 该厂应如何安排每月生产，使总收益最大?

表1.5-4

原料	A_1	A_2	A_3	**原料月供应量（吨）**
B_1	4	3	1	180
B_2	2	6	3	200
B_3	2	3	2	150
价格(万/万件)	12	5	4	

解：新问题的标准形式

$$\min f' = -12x_1 - 5x_2 - 4x_3$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 & = & 180 \\ 2x_1 + 6x_2 + 3x_3 + x_5 & = & 200 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_6 & = & 150 \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, & \cdots, & 6 \end{cases}$$

$T(B)$

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
f'	-584	0	$-\frac{29}{5}$	0	$-\frac{14}{5}$	$-\frac{2}{5}$
x_1	34	1	$\frac{3}{10}$	0	$\frac{3}{10}$	$-\frac{1}{10}$
x_3	44	0	$\frac{9}{5}$	1	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$

$B = [P_1 \quad P_3]$

扩充

$T(B')$

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
f'	-584	0	$-\frac{29}{5}$	0	$-\frac{14}{5}$	$-\frac{2}{5}$	0
x_1	34	1	$\frac{3}{10}$	0	$\frac{3}{10}$	$-\frac{1}{10}$	0
x_3	44	0	$\frac{9}{5}$	1	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	0
x_6	-6	0	$-\frac{6}{5}$	0	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{3}{5}$	1

$B' = [P_1 \quad P_3 \quad P_6]$

B' 是基，不是可行基，但是对偶可行基!

$T(B')$

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
f'	-584	0	$-\frac{29}{5}$	0	$-\frac{14}{5}$	$-\frac{2}{5}$	0
x_1	34	1	$\frac{3}{10}$	0	$\frac{3}{10}$	$-\frac{1}{10}$	0
x_3	44	0	$\frac{9}{5}$	1	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	0
x_6	-6	0	$-\frac{6}{5}$	0	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{3}{5}$	1

$$B' = [P_1 \quad P_3 \quad P_6]$$

对偶单纯形法

$T(B'')$

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
f'	-580	0	-5	0	$-\frac{8}{3}$	0	$-\frac{2}{5}$
x_1	35	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{6}$
x_3	40	0	1	1	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$
x_5	10	0	2	0	$\frac{1}{3}$	1	$-\frac{5}{3}$

$$B'' = [P_1 \quad P_3 \quad P_5]$$

$x_1 = 35, x_2 = 0, x_3 = 40$

$$f_{\max} = 580$$