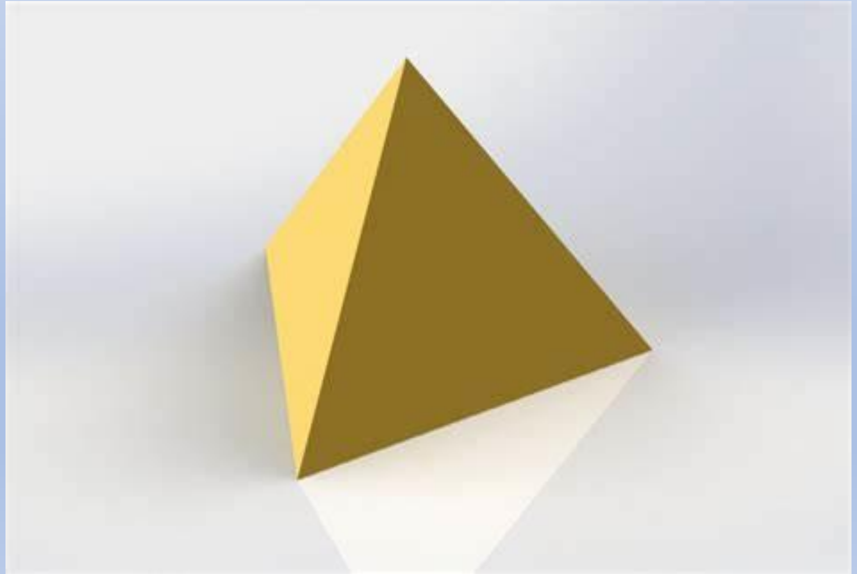
1.4 单纯形方法

- 1.4.1 单纯形法一般讨论
- 1.4.2 求初始可行解——两阶段方法



回顾

- 考虑标准形式的LP问题

$$\min f = c^T x$$

$$\begin{cases} Ax & = & b \\ x & \geq & 0 \end{cases}$$

不失一般性，不妨设 $B = \begin{bmatrix} P_1 & P_2 & \cdots & P_m \end{bmatrix}$ 是一个基. 基变量为 $x_1, \cdots, x_m$，非基变量为 $x_{m+1}, x_{m+2}, \cdots, x_n$.

目标函数和基变量可以由非基变量表示为：

$$\begin{cases} f + (c_B^T B^{-1} N - c_N^T) x_N & = & c_B^T B^{-1} b \\ x_B + B^{-1} N x_N & = & B^{-1} b \end{cases}$$

$$
\begin{cases}
f + 0.x_1 + 0.x_2 + \cdots + 0.x_m + b_{0(m+1)}x_{m+1} + \cdots + b_{0n}x_n = b_{00} \\
x_1 + b_{1(m+1)}x_{m+1} + \cdots + b_{1n}x_n = b_{10} \\
x_2 + b_{2(m+1)}x_{m+1} + \cdots + b_{2n}x_n = b_{20} \\
\cdots \\
x_m + b_{m(m+1)}x_{m+1} + \cdots + b_{mn}x_n = b_{m0}
\end{cases}
$$

单纯形表

		x_1	x_2	$\cdots$	x_m	x_{m+1}	$\cdots$	x_n
f	b_{00}	0	0	$\cdots$	0	$b_{0(m+1)}$	$\cdots$	b_{0n}
x_1	b_{10}	1	0	$\cdots$	0	$b_{1(m+1)}$	$\cdots$	b_{1n}
x_2	b_{20}	0	1	$\cdots$	0	$b_{2(m+1)}$	$\cdots$	b_{2n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$
x_m	b_{m0}	0	0	$\cdots$	1	$b_{m(m+1)}$	$\cdots$	b_{mn}

1.4.1 单纯形方法一般性讨论

假设 $b_{i0} \geq 0, \forall 1 \leq i \leq m$, 那么 $x = (b_{10}, b_{20}, \cdots, b_{m0}, 0, \cdots, 0)^T$ 是(LP)问题一个基础可行解.

1. 若 $b_{0j} \leq 0, \forall m+1 \leq i \leq n$, 那么目标函数 f 在 x 处取到极 小值 $f_{\min} = b_{00}$.

		x_1	x_2	$\cdots$	x_m	x_{m+1}	$\cdots$	x_n
f	b_{00}	0	0	$\cdots$	0	$b_{0(m+1)}$	$\cdots$	b_{0n}
x_1	b_{10}	1	0	$\cdots$	0	$b_{1(m+1)}$	$\cdots$	b_{1n}
x_2	b_{20}	0	1	$\cdots$	0	$b_{2(m+1)}$	$\cdots$	b_{2n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$
x_m	b_{m0}	0	0	$\cdots$	1	$b_{m(m+1)}$	$\cdots$	b_{mn}

≥ 0

2. 若存在 $m+1 \leq k \leq n$ 满足 $b_{0k} > 0$ 且 $b_{ik} \leq 0, 1 \leq i \leq m$, 那么(LP)问题无最优解.

		x_1	x_2	$\cdots$	x_m	$\cdots$	x_k	$\cdots$
f	b_{00}	0	0	$\cdots$	0	$\cdots$	b_{0k} > 0	$\cdots$
x_1	b_{10}	1	0	$\cdots$	0	$\cdots$	b_{1k}	$\cdots$
x_2	b_{20}	0	1	$\cdots$	0	$\cdots$	b_{2k} ≤ 0	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_m	b_{m0}	0	0	$\cdots$	1	$\cdots$	b_{mk}	$\cdots$

≥ 0

理由：考虑$x = x(\lambda) = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T, \lambda \geq 0$, 这里 $x_i = \begin{cases} b_{i0} - b_{ik}\lambda & \text{if } 1 \leq i \leq m \\ \lambda & \text{if } i = k \\ 0 & \text{if } m+1 \leq i \neq k \leq n \end{cases}$

当 $\lambda \to +\infty$, $\quad f(x(\lambda)) = b_{00} - b_{0k}\lambda \to -\infty.$

3. 若存在 $m+1 \leq k \leq n$ 满足 $b_{0k} > 0$, 且 $\{b_{ik}, 1 \leq i \leq m\}$ 有正数. 那么考察

$$\theta = \min\{\frac{b_{i0}}{b_{ik}} | b_{ik} > 0, 1 \leq i \leq m\} = \frac{b_{r0}}{b_{rk}}$$

那么把基变量 x_r 调整为非基变量，同时把非基变量x_k调整为基变量. 此时新的基为

$$B' = [P_1, \cdots, P_{r-1}, P_k, P_{r+1}, \cdots, P_m]$$

在单纯形表上，最左列x_r 被x_k 替换，同时做初等行变换，使得x_k 所在列变为标准单位向量.

		x_1	x_2	$\cdots$	x_m	$\cdots$	x_k	$\cdots$
f	b_{00}	0	0	$\cdots$	0	$\cdots$	b_{0k} > 0	$\cdots$
x_1	b_{10}	1	0	$\cdots$	0	$\cdots$	b_{1k}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	0	1	$\cdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$ some > 0	$\vdots$
x_r	b_{r0}	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\cdots$	b_{rk}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$ ≥ 0				$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$
x_m	b_{m0}	0	0	$\cdots$	1	$\cdots$	b_{mk}	$\cdots$

$\frac{b_{r0}}{b_{rk}} = \theta$

例1 求线性规划问题的最优解

$$\min f = -5x_1 + x_2$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 & \leq & 2 \\ -3x_1 + x_2 & \leq & 0 \\ x_1 \geq 0, x_2 & \geq & 0 \end{cases}$$

解：把问题化成标准形式:

$$\min f = -5x_1 + x_2$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 & = & 2 \\ -x_1 + x_2 + x_4 & = & 0 \\ x_i \geq 0 & & i = 1, 2, 3, 4 \end{cases}$$

取基 $B_1 = \begin{bmatrix} P_3 & P_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, 有

		x_1	x_2	x_3	x_4
f	0	5	-1	0	0
x_3	2	1	-1	1	0
x_4	0	-3	1	0	1

$$b_{01} = 5 > 0$$

$$\begin{aligned}\theta &= \min\{\frac{b_{10}}{b_{11}}\} \\ &= \min\{\frac{2}{1}\} \\ &= \frac{2}{1}\end{aligned}$$

调整基变量和非基变量：

$$x_3 \leftrightarrow x_1$$

$$B_2 = [P_1 \quad P_4]$$

$T(B_2)$

		x_1	x_2	x_3	x_4
f	-10	0	4 > 0	-5	0
x_1	2	1	-1 ≤ 0	1	0
x_4	6	0	-2	3	1

做初等行变换，使得单纯形表中新的基变量x_1所在列为标准单位向量：

$r_0 - 5r_1$

$r_2 + 3r_1$

无最优解！

例2 求线性规划问题的最优解

$$\max f = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 & \leq & 20 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 & \leq & 20 \\ x_i \geq 0, i & = & 1, 2, 3, 4 \end{cases}$$

解：把问题化成标准形式:

$$\min f' = -x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 4x_4$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 + x_5 & = & 20 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_6 & = & 20 \\ x_i \geq 0, i & = & 1, \cdots, 6 \end{cases}$$

$T(B_1)$

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
f'	0	1	2	3	4	0	0
x_5	20	1	2	2	3	1	0
x_6	20	2	1	3	2	0	1

$T(B_2)$

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
f'	$-\frac{80}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{4}{3}$	0
x_4	$\frac{20}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	0
x_6	$\frac{20}{3}$	$\frac{4}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{5}{3}$	0	$-\frac{2}{3}$	1

$$b_{04} = 4 > 0$$

$$\begin{aligned} \theta &= \min\{\frac{b_{10}}{b_{14}}, \frac{b_{20}}{b_{24}}\} \\ &= \min\{\frac{20}{3}, \frac{20}{2}\} \\ &= \frac{20}{3} \end{aligned}$$

调整基变量和非基变量：

$$x_5 \leftrightarrow x_4$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} P_4 & P_6 \end{bmatrix}$$

做初等行变换，使得单纯形表中新的基变量x_4所在列为标准单位向量：

$$\frac{1}{3}r_1$$

$$r_0 - 4r_1$$

$$r_2 - 2r_1$$

$T(B_2)$

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
f'	$-\frac{80}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{4}{3}$	0
x_4	$\frac{20}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	0
x_6	$\frac{20}{3}$	$\frac{4}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{5}{3}$	0	$-\frac{2}{3}$	1

$$b_{03} = \frac{1}{3} > 0$$

$$\theta = \min\{\frac{b_{10}}{b_{13}}, \frac{b_{20}}{b_{23}}\} = \frac{\frac{20}{3}}{\frac{5}{3}}$$

调整基变量和非基变量：

$$x_6 \leftrightarrow x_3$$

$$B_3 = \begin{bmatrix} P_4 & P_3 \end{bmatrix}$$

做初等行变换，使得单纯形表中新的基变量x_3所在列为标准单位向量:

$$\frac{3}{5}r_2$$

$$r_0 - \frac{1}{3}r_2$$

$$r_1 - \frac{2}{3}r_1$$

$T(B_3)$

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
f'	-28	$-\frac{3}{5}$	$-\frac{3}{5}$ ≤ 0	0	0	$-\frac{6}{5}$	$-\frac{1}{5}$ ≤ 0
x_4	4	$-\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$	0	1	$\frac{3}{5}$	$-\frac{2}{5}$
x_3	4	$\frac{4}{5}$	$-\frac{1}{5}$	1	0	$-\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$

$$f_{\max} = -f'_{\min} = 28$$

在基变量和非基变量的调换中，可能会有多种选择，造成在单纯形表迭代中，某些可行基重复出现，从而算法不能有限终止. Bland法则对这些选择做了约定.

定理1 对于标准形式的(LP)问题，在Bland法则下，单纯形方法经过有限步迭代后，必然可以得到问题的最优解或者判定无最优解.

1.4.2 求初始可行解 — 两阶段方法

- 单纯形方法需要从一个基础可行解出发, i.e. 找到一个基 B , 满足 $B^{-1}b = (b_{01}, b_{02}, \cdots, b_{0m})^T \geq 0.$

- 线性规划问题一定有基础可行解，等价的，可行解集R一定有顶点. 但当问题的规模比较大，如何有效地找到一个基础可行解?

给定标准形式的线性规划问题(LP)：

$$\min f = c^T x$$

$$\begin{cases} Ax & = & b \\ x & \geq & 0 \end{cases}$$

不妨假设 $b \geq 0.$ 考虑辅助的线性规划问题(LP_0)：

$$\min Z = y_1 + y_2 + \cdots + y_m$$

$$\begin{cases} Ax + y & = & b \\ x \geq 0, \quad y & \geq 0 \end{cases}$$

这里辅助量 $y = (y_1, y_2, \cdots, y_m)^T$

注意到如果原问题的可行解集 R 非空，那么在线性映射下

$$\varphi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^{n+m},\qquad (x_1,x_2,\cdots,x_n)^T\mapsto(x_1,x_2,\cdots,x_n,0,\cdots,0)^T$$

有:

$$\varphi(R)\subseteq R'$$

从而

a. $Z_{\min}\leq\min\limits_{(x,y)\in\varphi(R)}Z=0.$

b. 若 R' 有极点 $(a_1,a_2,\cdots,a_n,0,\cdots 0)^T$, 那么 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T$ 是 R 的极点.

求初始可行解算法

考虑(LP)问题的辅助问题 (LP_0) , 求得最优解$(\bar{x}, \bar{y})^T$, 对应的基为B.

I. 若$Z_{\min} > 0$, (LP)问题无可行解.

II. 若$Z_{\min} = 0$, 有 $\bar{y}_1 = \bar{y}_2 = \cdots = \bar{y}_m = 0.$

1. 若最优基 B 对应得基变量均为x 变量，此时基变量为(LP)问题的一个可行基变量.
2. 若 B对应的基变量含变量 y_r.
   - ① 若T(B) 中，非基变量x在y_r所在行的系数均为0, 那么（LP）问题第r个方程是多余的. 可从T(B)删去多余的 y_r 行.
   - ② 若T(B) 中，非基变量x在 y_r所在行的系数不全为0, 例如$b_{rk} \neq 0$, 那么可以用非基变量x_k将 y_r置换出.

II-2经过有限步操作，可以达到II-1的情形.

例3 求线性规划问题的最优解

$$\max f = 2x_1 - x_2 + x_3$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 & \leq & 8 \\ 4x_1 - x_2 + x_3 & \geq & 2 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 & \geq & 4 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 & \geq & 0 \end{cases}$$

解：该问题的标准形式是

$$\min f' = -2x_1 + x_2 - x_3$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 & = & 8 \\ 4x_1 - x_2 + x_3 - x_5 & = & 2 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_6 & = & 4 \\ x_i \geq 0, & i = & 1, \cdots, 6 \end{cases}$$

注 $B = \begin{bmatrix} P_4 & P_5 & P_6 \end{bmatrix}$是基，但不是可行基！

考虑辅助问题

$$\min Z = y_1 + y_2 + y_3$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 + y_1 & = & 8 \\ 4x_1 - x_2 + x_3 - x_5 + y_2 & = & 2 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_6 + y_3 & = & 4 \\ x_i \geq 0, y_j \geq 0, i = 1, \cdots, 6, & j = & 1, 2, 3. \end{cases}$$

取基 $B_1 = [P_7 \quad P_8 \quad P_9]$

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	y_1	y_2	y_3
Z	14	7	3	-2	1	-1	-1	0	0	0
y_1	8	1	1	-2	1	0	0	1	0	0
y_2	2	4	-1	1	0	-1	0	0	1	0
y_3	4	2	3	-1	0	0	-1	0	0	1

$T(B_1)$

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	y_1	y_2	y_3
Z	14	7	3	-2	1	-1	-1	0	0	0
y_1	8	1	1	-2	1	0	0	1	0	0
y_2	2	4	-1	1	0	-1	0	0	1	0
y_3	4	2	3	-1	0	0	-1	0	0	1

$T(B_2)$

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	y_1	y_2	y_3
Z	$\frac{21}{2}$	0	$\frac{19}{4}$	$-\frac{15}{4}$	1	$\frac{3}{4}$	-1	0	$-\frac{7}{4}$	0
y_1	$\frac{15}{2}$	0	$\frac{5}{4}$	$-\frac{9}{4}$	1	$\frac{1}{4}$	0	1	$-\frac{1}{4}$	0
x_1	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	0	0	$\frac{1}{4}$	0
y_3	3	0	$\frac{7}{2}$	$-\frac{3}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	-1	0	$-\frac{1}{2}$	1

$T(B_2)$

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	y_1	y_2	y_3
Z	$\frac{21}{2}$	0	$\frac{19}{4}$	$-\frac{15}{4}$	1	$\frac{3}{4}$	-1	0	$-\frac{7}{4}$	0
y_1	$\frac{15}{2}$	0	$\frac{5}{4}$	$-\frac{9}{4}$	1	$\frac{1}{4}$	0	1	$-\frac{1}{4}$	0
x_1	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	0	0	$\frac{1}{4}$	0
y_3	3	0	$\frac{7}{2}$	$-\frac{3}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	-1	0	$-\frac{1}{2}$	1

$T(B_3)$

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	y_1	y_2	y_3
Z	$\frac{45}{7}$	0	0	$-\frac{12}{7}$	1	$\frac{1}{14}$	$-\frac{5}{14}$	0	$-\frac{15}{14}$	$-\frac{19}{14}$
y_1	$\frac{45}{7}$	0	0	$-\frac{12}{7}$	1	$\frac{1}{14}$	$\frac{5}{14}$	1	$-\frac{1}{14}$	$-\frac{5}{14}$
x_1	$\frac{5}{7}$	1	0	$\frac{1}{7}$	0	$-\frac{3}{14}$	$-\frac{1}{14}$	0	$\frac{3}{14}$	$\frac{1}{14}$
x_2	$\frac{6}{7}$	0	1	$-\frac{3}{7}$	0	$\frac{1}{7}$	$-\frac{2}{7}$	0	$-\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$

$T(B_3)$

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	y_1	y_2	y_3
Z	$\frac{45}{7}$	0	0	$-\frac{12}{7}$	1	$\frac{1}{14}$	$-\frac{5}{14}$	0	$-\frac{15}{14}$	$-\frac{19}{14}$
y_1	$\frac{45}{7}$	0	0	$-\frac{12}{7}$	1	$\frac{1}{14}$	$\frac{5}{14}$	1	$-\frac{1}{14}$	$-\frac{5}{14}$
x_1	$\frac{5}{7}$	1	0	$\frac{1}{7}$	0	$-\frac{3}{14}$	$-\frac{1}{14}$	0	$\frac{3}{14}$	$\frac{1}{14}$
x_2	$\frac{6}{7}$	0	1	$-\frac{3}{7}$	0	$\frac{1}{7}$	$-\frac{2}{7}$	0	$-\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$

$T(B_4)$

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	y_1	y_2	y_3
Z	6	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	1	0	$-\frac{3}{14}$	0	-1	$-\frac{3}{2}$
y_1	6	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	1	0	$-\frac{1}{2}$
x_1	$\frac{14}{7}$	1	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$
x_5	6	0	7	-3	0	1	-2	0	-1	2

$T(B_4)$

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	y_1	y_2	y_3
Z	6	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	1	0	$-\frac{3}{14}$	0	-1	$-\frac{3}{2}$
y_1	6	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	1	0	$-\frac{1}{2}$
x_1	$\frac{14}{7}$	1	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$
x_5	6	0	7	-3	0	1	-2	0	-1	2

$T(B_5)$

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	y_1	y_2	y_3
Z	0	0	0	0	0	0	$-\frac{5}{7}$	-1	-1	-1
x_4	6	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	1	0	$-\frac{1}{2}$
x_1	$\frac{14}{7}$	1	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$
x_5	6	0	7	-3	0	1	-2	0	-1	2

$B_5 = \begin{bmatrix} P_1 & P_4 & P_5 \end{bmatrix}$
为原问题的一个可行基.

有了可行基 $B_5 = \begin{bmatrix} P_1 & P_4 & P_5 \end{bmatrix}$，再回到原问题(标准形式)

$$\min f' = -2x_1 + x_2 - x_3$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 & = & 8 \\ 4x_1 - x_2 + x_3 - x_5 & = & 2 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_6 & = & 4 \\ x_i \geq 0, & i = & 1, \cdots, 6 \end{cases}$$

此时对应 B_5的基础可行解为 $x = (2, 0, 0, 6, 6, 0)^T$.

用单纯形法即可求得最优值或着判定无解. 这就是两阶段方法.