第五周作业问题：

题目2.3.5：

主要的问题是，有一部分同学只证明了$p_{11}^{(3n)} > 0$，这只能说明周期是1或者3。

要证明周期是3，还需要验证$p_{11}^{(3n+1)} = 0$和$p_{11}^{(3n+2)} = 0$。

附加题：

注意点：

其实新的马氏链的不可约性需要用到原马氏链的非周期性，

若原马氏链的周期> 1，那么新的马氏性必定不是不可约链。（证明略）

举个简单的例子：

$$
\begin{aligned}
\widetilde{P}_{(1,1)(1,2)}^{(2n)} &= P_{11}^{(2n)} P_{12}^{(2n)} = 0 \\
\widetilde{P}_{(1,1)(1,2)}^{(2n+1)} &= P_{11}^{(2n+1)} P_{12}^{(2n+1)} = 0
\end{aligned}
$$

因此新的马氏链不是不可约链。

问题一：定义错！

有不少同学，把非周期的定义（甚至连不可约的定义）都写错！这是非常严重的问题，这些基础的定义一定要记清楚！

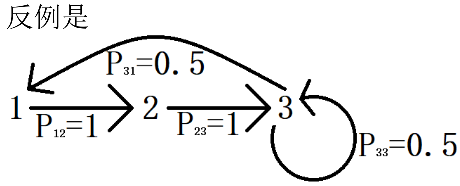
非周期的定义**不是**$p_{ii} > 0$！在不可约链中，非周期是$\{n : p_{ii}^{(n)} > 0\}$的**最大公约数**是1！

问题二：$p_{ij}^{(n)} > 0$并不能推出$p_{ij}^{(mn)} > 0$。

很多同学在证明的时候说，$\exists n, p_{ik}^{(n)} > 0$，且$\exists m, p_{jl}^{(m)} > 0$。令$N = mn$(或$n$与$m$的最小公倍数)，有$p_{ik}^{(N)} > 0$且$p_{jl}^{(N)} > 0$。

这个是**错误**的！

反例是



取$i = 1, j = 1, k = 2, l = 3, n = 1, m = 2$，

显然有$p_{ij}^{(n)} = p_{12}^{(1)} = 1 > 0$且$p_{jl}^{(m)} = p_{13}^{(2)} = 1 > 0$，
令$N = mn = 2$，此时$p_{ij}^{(N)} = p_{12}^{(2)} = 0$。

只有在$i = j$时，才能保证$p_{ij}^{(n)} > 0 \Rightarrow p_{ij}^{(mn)} > 0$!
问题三：$d((i,j))$理解错误
如果单从定义去考虑，

$$\begin{aligned} d((i,j)) &= \gcd\{n : p_{ii}^{(n)} > 0 \text{且} p_{jj}^{(n)} > 0\} \\ d(i) &= \gcd\{n : p_{ii}^{(n)} > 0\} \\ d(j) &= \gcd\{n : p_{jj}^{(n)} > 0\} \end{aligned}$$

注意到

$$\{n : p_{ii}^{(n)} > 0 \text{且} p_{jj}^{(n)} > 0\} = \{n : p_{ii}^{(n)} > 0\} \bigcap \{n : p_{jj}^{(n)} > 0\}$$

因此**只能推出：**

$$d(i)|d((i,j)) \text{且} d(j)|d((i,j))$$

而不是：

$$d((i,j))|d(i) \text{或者} d((i,j)) = d(i)d(j)$$

举个例子就明白：

$$\begin{aligned} A &:= \{2,4,6,8,\cdots,2n,\cdots\} \\ B &:= \{6,7,12,13,\cdots,6n,6n+1,\cdots\} \\ A \bigcap B &= \{6,12,18,\cdots,6n,\cdots\} \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} \gcd(A) &:= 2 \\ \gcd(B) &:= 1 \\ \gcd(A \bigcap B) &= 6 \end{aligned}$$

附加题参考答案：

不可约性的证明：

由于原链非周期不可约，

根据不可约的定义，知$\exists n_{ik}, p_{ik}^{(n_{ik})} > 0$；

根据非周期的定义，知$\exists n_1, n_2$满足$\gcd(n_1, n_2) = 1, p_{ii}^{(n_1)} > 0, p_{ii}^{(n_2)} > 0$。

根据数论的基本定理，可知$\exists N_i, \forall n \geq N_2, \exists m_1, m_2$使$m_1 n_1 + m_2 n_2 = n$，

此时$p_{ii}^{(n)} = p_{ii}^{(m_1 n_1 + m_2 n_2)} \geq p_{ii}^{(m_1 n_1)} p_{ii}^{(m_2 n_2)} \geq \left(p_{ii}^{(n_1)}\right)^{m_1} \left(p_{ii}^{(n_2)}\right)^{m_2} > 0$

因此令$N_{ik} = N_i + n_{ik}, \forall n \geq N_{ik}, p_{ik}^{(n)} \geq p_{ii}^{(n-n_{ik})} p_{ik}^{(n_{ik})} > 0$

同理$\exists N_{jl}, \forall n \geq N_{jl}, p_{jl}^{(n)} > 0$，

因此令$N = \max\{N_{ik}, N_{jl}\}, \forall n \geq N, \widetilde{P}_{(i,j)(k,l)} = p_{ik}^{(n)} p_{jl}^{(n)} > 0$

因此该链不可约。

非周期性的证明方法一：

和上述证明一样可知，$\exists M, \forall n \geq M, p_{ii}^{(n)} > 0$且$p_{jj}^{(n)} > 0$，

因此$\{n : \widetilde{P}_{(i,j)(i,j)}^{(n)} = p_{ii}^{(n)} p_{jj}^{(n)} > 0\} \supseteq \{n : n \geq M\}$

因此$d((i,j)) = \gcd\{n : \widetilde{P}_{(i,j)(i,j)}^{(n)} = p_{ii}^{(n)} p_{jj}^{(n)} > 0\} = 1$

非周期性的证明方法二：

由不可约性可知，

$$d((i,j)) = d((i,i)) = \gcd\{n : \widetilde{P}_{(i,i)(i,i)}^{(n)} = \left(p_{ii}^{(n)}\right)^2 > 0\} = \gcd\{n : p_{ii}^{(n)} > 0\} = 1$$