运筹学

主讲：宋雷，副教授

中山大学

参考书:

运筹学通论（第三版）， 魏权龄 胡显佑 严颖 编著， 中国人民大学出版社

教学计划: 第1， 2， 4， 5， 7， 9 章

成绩评定（暂定）: 课后作业 3次(30%)+期末闭卷考试(30%)+论文报告(40%)

第一章：线性规划简介

- 1.1 基本概念
- 1.2 线性规划问题解的性质
- 1.3 单纯形表
- 1.4 单纯形方法
- 1.5 对偶线性规划
- 1.6 对偶单纯型方法
- 1.7 对偶线性规划的应用

1.1 基本概念

1.1.1 线性规划问题的一般形式

例 1 某工厂在计划期内要安排生产 Ⅰ、 Ⅱ 两种产品，已知生产单位产品所需的设备台时及A、B两种原材料的消耗，如表所示。

资源　　产 品	I	II	拥有量
设　　备	1	2	8台时
原材料 A	4	0	16 kg
原材料 B	0	4	12 kg

每生产一件产品I可获利2元，每生产一件产品II可获利3元。该工厂应该如何安排生产才能获利最大？

- 设 x_1, x_2分别表示计划生产I,II产品的数量，称它们为决策变量.

- 生产x_1, x_2的数量多少，受资源拥有量的限制，这是约束条件,即$x_1 + 2x_2 \leq 8; 4x_1 \leq 16; 4x_2 \leq 12$

- 生产的产品不能是负值,即$x_1, x_2 \geq 0$.

- 如何安排生产，使利润最大,这是目标.

得到本问题的数学模型为:

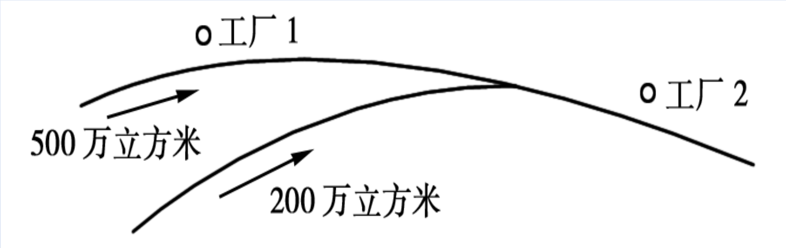
目标函数： $\max z = 2x_1 + 3x_2$

约束条件: $\begin{cases} x_1 + 2x_2 & \leq & 8 \\ 4x_1 & \leq & 16 \\ 4x_2 & \leq & 12 \\ x_1, x_2 & \geq & 0 \end{cases}$

这就是一个最简单的线性规划模型。

1.1 基本概念

例 2 靠近某河流有两个化工厂(见图1-1)，流经第一化工厂的河流流量为每天500万立方米，在两个工厂之间有一条流量为每天200万立方米的支流.



⑩图1-1

化工厂1每天排放含有某种有害物质的工业污水2万立方米，化工厂2每天排放的工业污水为1.4万立方米. 从化工厂1排出的污水流到化工厂2前，有20%可自然净化. 根据环保要求，河流中工业污水的含量应不大于0.2%. 因此两个工厂都需处理一部分工业污水. 化工厂1处理污水的成本是1000元/万立方米, 化工厂2处理污水的成本是800元/万立方米. 问:

在满足环保要求的条件下，每厂各应处理多少工业污水，使两个工厂处理工业污水的总费用最小.

1.1 基本概念

建模型之前的分析和计算

设：

化工厂1每天处理的污水量为x_1万立方米；
化工厂2每天处理的污水量为x_2万立方米

经第2工厂前的水质要求：

$$\frac{2-x_1}{500} \leq \frac{2}{1000}$$

经第2工厂后的水质要求：

$$\frac{0.8(2-x_1)+(1.4-x_2)}{700} \leq \frac{2}{1000}$$

得到本问题的数学模型为：

目标函数： $\min z = 1000x_1 + 800x_2$

约束条件：

$$
\begin{aligned}
x_1 &\geq 1 \\
0.8x_1 + x_2 &\geq 1.6 \\
x_1 &\leq 2 \\
x_2 &\leq 1.4 \\
x_1, x_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

1.1 基本概念

上述两个问题具有的共同特征：

- 每一个线性规划问题都用一组决策变量 $(x_1, x_2, \cdots x_n)$ 表示某一方案，这组决策变量的值代表一个具体方案. 一般这些变量的取值是非负且连续的；
- 都有关于各种资源和资源使用情况的技术数据，创造新价值的数据；$a_{ij}; c_j \ (i = 1, \cdots m; j = 1, \cdots n)$
- 存在可以量化的约束条件，这些约束条件可以用一组线性等式或线性不等式来表示；
- 都有一个达到某一目标的要求，可用决策变量的线性函数(称为目标函数)来表示. 按问题的要求不同，要求目标函数实现最大化或最小化.

线性规划模型的一般形式

目标函数

$$\max(\min) z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

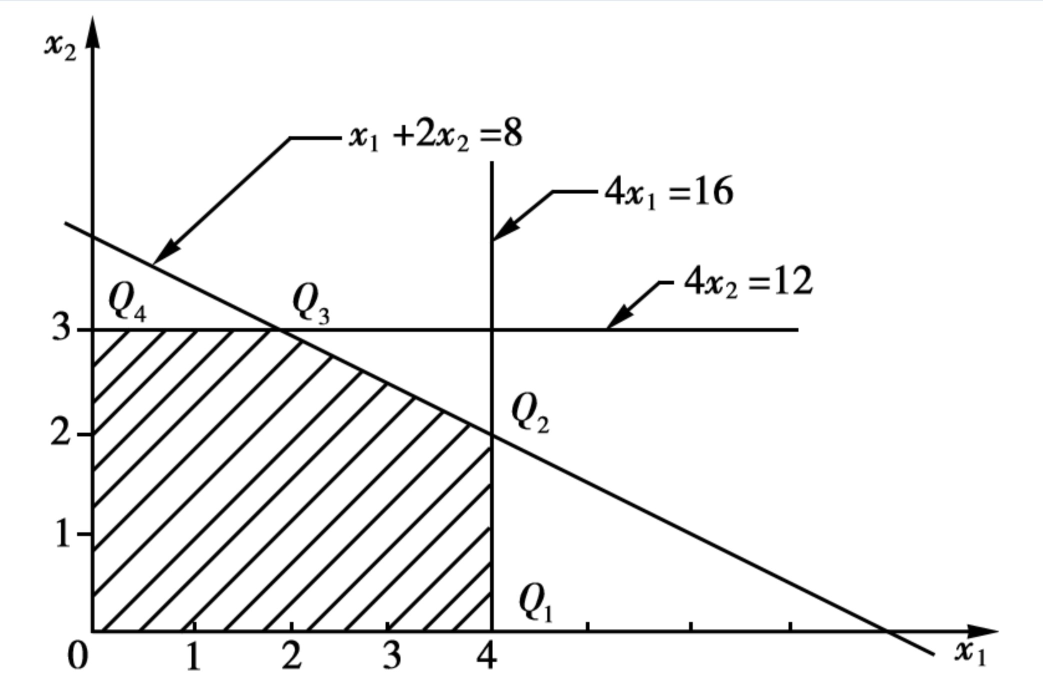
约束条件

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1n}x_n & \leq (=, \geq) & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots a_{2n}x_n & \leq (=, \geq) & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots a_{mn}x_n & \leq (=, \geq) & b_m \\ x_j \geq 0, \quad \text{for } j = 1, 2, & \cdots, n \end{cases}$$

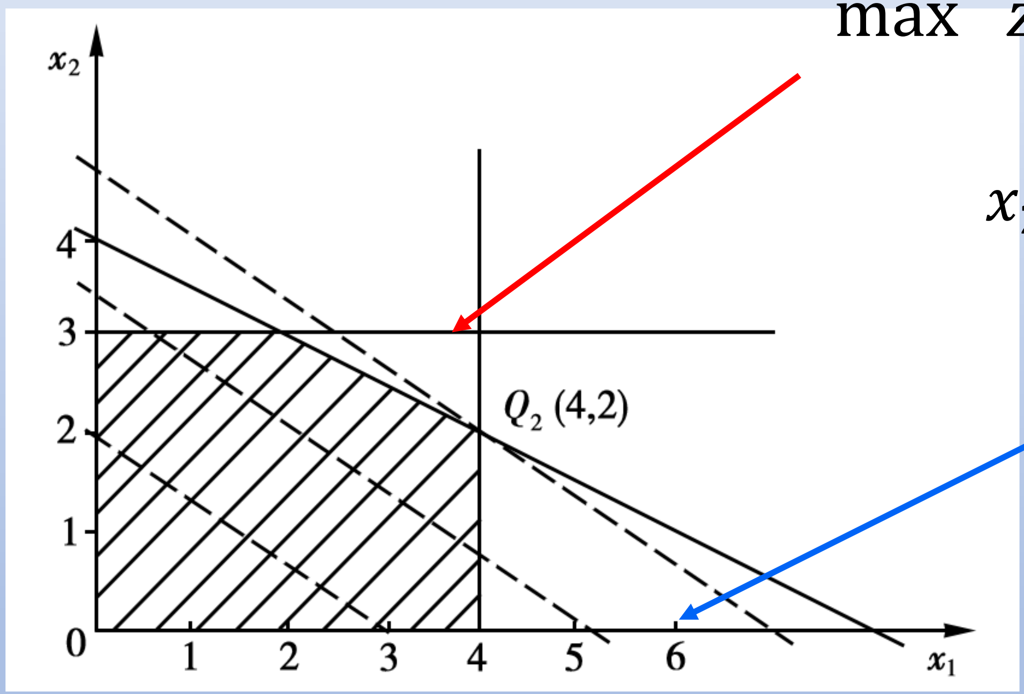
1.1 基本概念

1.1.2 图解法

例1是一个二维线性规划问题，因而可用作图法直观地进行求解。



$$
\max \quad z = 2x_1 + 3x_2
$$
$$
\begin{cases}
x_1 + 2x_2 \leq 2 \\
4x_1 \qquad\quad \leq 16 \\
\qquad 4x_2 \leq 12 \\
x_1, x_2 \geq 0
\end{cases}
$$



$$\max \quad z = 2x_1 + 3x_2$$

$$x_2 = -\frac{2}{3}x_1 + \frac{z}{3}$$

表示一簇平行线

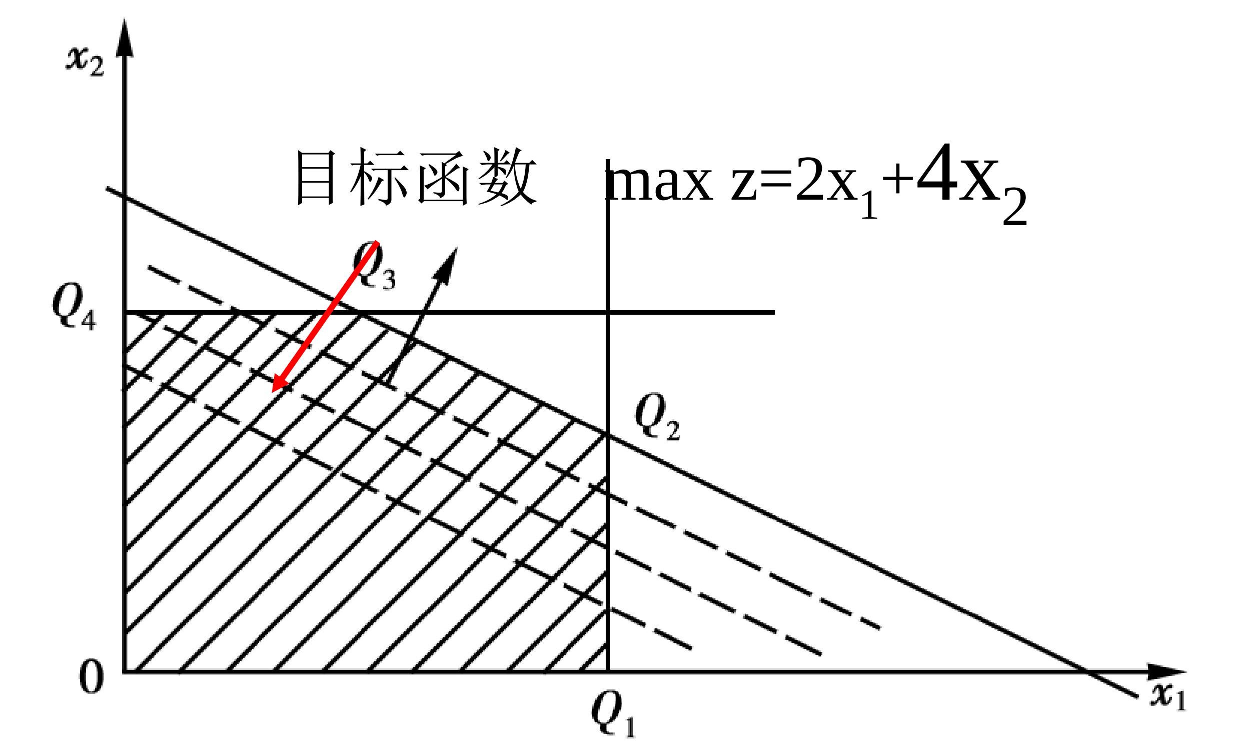
⑩目标值在（4，2）点，达到最大值14

通过图解法，可观察到线性规划的解可能出现的几种情况：

（1）无穷多最优解(多重最优解)，见图1-2。

（2）无界解，见图1-3。

（3）无可行解，见图1-4。



⑩图1-2 无穷多最优解（多重最优解）

$$\max \quad z = x_1 + x_2$$

$$\begin{cases} -2x_1 + \ x \ \le 4 \\ \quad x_1 - x_2 \le 2 \\ \quad x_1, x_2 \ge o \end{cases}$$

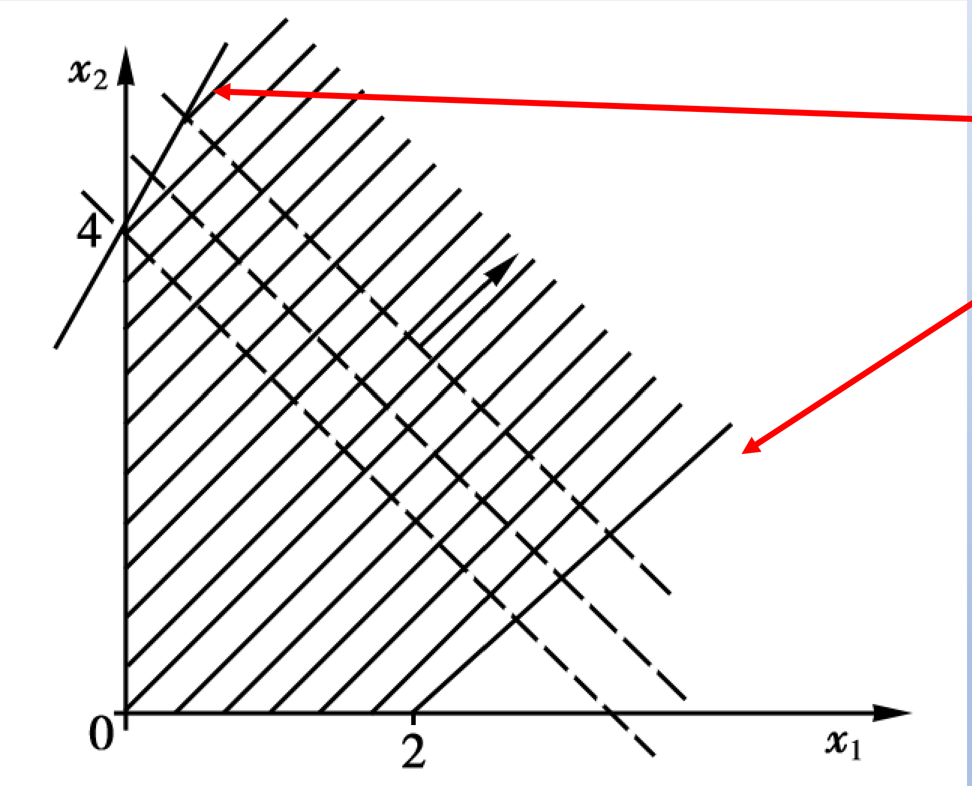


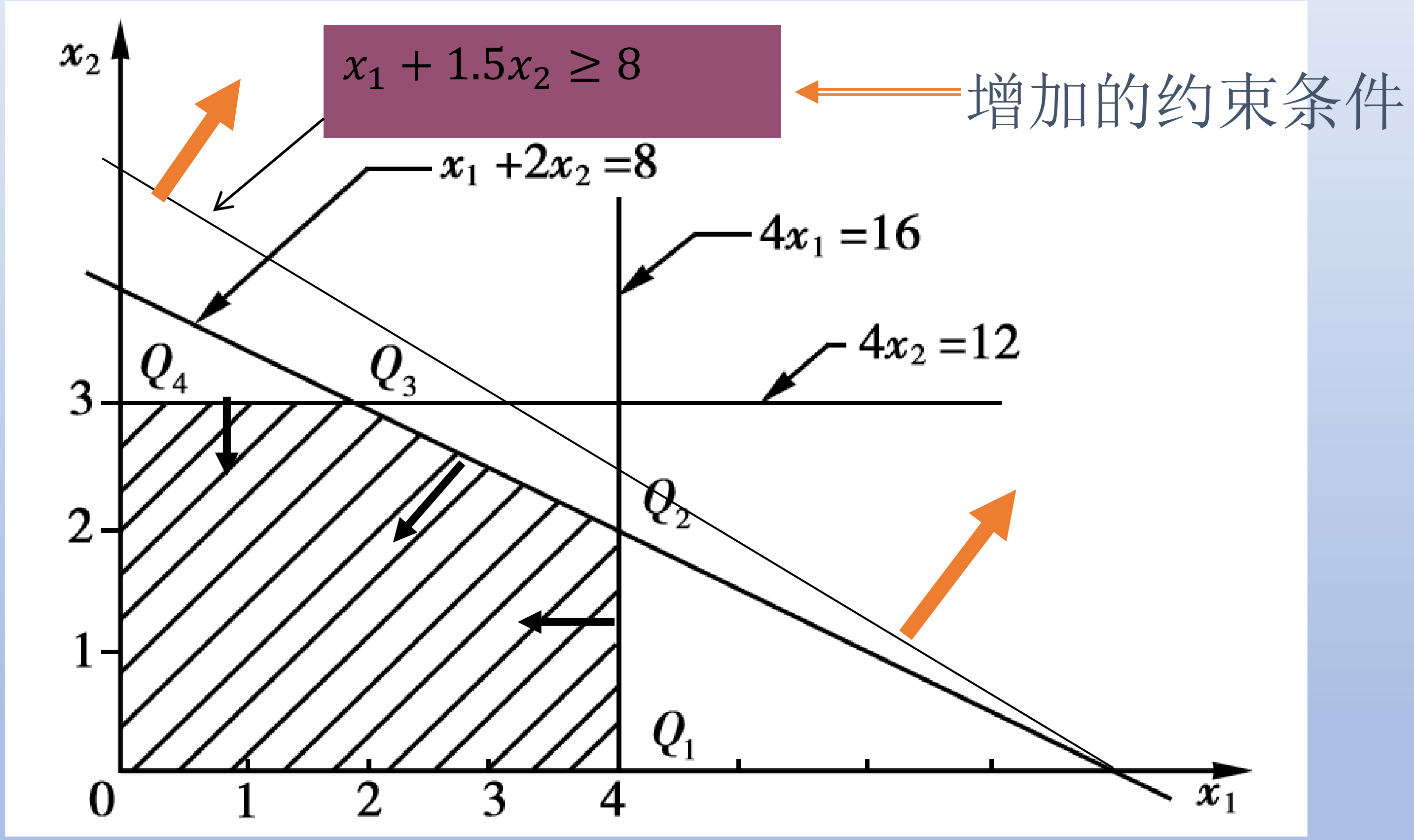
图1-3 无界解

无可行解的情形

当存在相互矛盾的约束条件时，线性规划问题的可行解集为空集. 例如, 如果在例1的数学模型中增加一个约束条件:

$$x_1 + 1.5x_2 \geq 8$$

则该问题的可行解集即为**空集**，即无可行解.



$x_1 + 1.5x_2 \geq 8$
增加的约束条件
$x_1 + 2x_2 = 8$
$4x_1 = 16$
$4x_2 = 12$
x_2
x_1
Q_1
Q_2
Q_3
Q_4
0
1
2
3
4

图1-4 不存在可行域

1.2.1 线性规划问题的标准型式

目标函数: $$\min f = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots c_nx_n$$

约束条件: $$\left\{\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \cdots & & \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots a_{mn}x_n & = & b_m \\ x_j \geq 0, \quad \text{for } j = 1, 2, & \cdots, & n \end{array}\right.$$

1.2.1 线性规划问题的标准型式

⑩线性规划问题的几种表示形式

用矩阵形式表示的标准形式线性规划

目标函数: $\min f = c^T x$

约束条件: $\begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$

这里,

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

将一般线性规划问题转化为标准形式：

(1) 若要求目标函数实现最大化即 $\max z = c^T x$, 则只需令$z' = -z$, 于是求 $\min z' = -c^T x$.

(2) 约束条件为不等式. 分两种情况讨论:

●若约束条件为“≤”型不等式，则可在不等式左端加入非负的松弛变量, 把原“≤”型不等式变为等式约束;

●若约束条件为“≥”型不等式，则可在不等式左端减去一个非负的剩余变量(也称松弛变量), 把不等式约束条件变为等式约束.

(3) 若存在取值无约束的变量x_k，可令 $x_k = x_k' - x_k''$, $x_k', x_k'' \geq 0$.

例3 将例1的数学模型化为标准形式的线性规划.
例1的数学模型在加入了松弛变量后变为

$$\max z = 2x_1 + 3x_2 \ \Rightarrow \qquad \min z' = -2x_1 - 3x_2$$

$$\begin{cases} x_1 & + & 2x_2 & \le & 8 \\ 4x_1 & & & \le & 16 \\ & & 4x_2 & \le & 12 \\ x_1 & , & x_2 & \ge & 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & & & & & = & 8 \\ 4x_1 & & & & & + & x_4 & & & = & 16 \\ & & 4x_2 & & & & & + & x_5 & = & 12 \\ x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & , & x_5 & \ge & 0 \end{cases}$$

例4 将下述线性规划问题化为标准形式线性规划

$$\max f = 3x_1 - 2x_2 + x_3$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 & \leq & 10 \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 & \geq & 2 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, & x_3 & \text{no restriction} \end{cases}$$

解：

(1) 用$x_4 - x_5$替换x_3, 其中$x_4, x_5 \geq 0$;

(2) 在第一个约束不等式左端加入松弛变量x_6;

(3) 在第二个约束不等式左端减去剩余变量x_7;

(4) 令 $f' = -f$，将求 $\max f$ 改为求 $\min f'$

即可得到该问题的标准型.

例4 的标准型形式为：

$$\min f' = -3x_1 + 2x_2 - x_3' + x_3''$$

$$\begin{cases} 2x_1 & + & x_2 & + & x_3' & - & x_3'' & + & x_4 & & & = & 10 \\ 3x_1 & + & 4x_2 & - & x_3' & + & x_3'' & & & - & x_5 & = & 2 \\ x_1 & \geq 0, & x_2 & \geq 0, & x_3' & \geq 0, & x_3'' & \geq 0, & x_4 & \geq 0, & x_5 & \geq & 0 \end{cases}$$

1.2 线性规划问题解的性质

1. 2. 2 线性规划问题解的概念

- 1.可行解
- 2.基
- 3.基可行解
- 4.可行基

1.2.2 线性规划问题的解的概念

1. 可行解

- 定义
  - 满足约束条件(1), (2)式的解$X=(x_1,x_2,\ \ldots,\ x_n)^T$ ，称为线性规划问题的**可行解,** 其中使目标函数达到最小值的可行解称为**最优解.**

$$\min f=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j & = & b_i, & i=1,2,\cdots,m & (1) \\ x_j & \geq & 0, & j=1,2,\cdots,n & (2) \end{cases}$$

2. 基，基向量，基变量

系数矩阵A中的任何$m \times m$阶非奇异子矩阵$B(|B| \neq 0)$,称为问题(LP)的一个基.

不妨设:

$$B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{bmatrix} = [P_1, \quad P_2, \quad \cdots \quad p_m]$$

$P_j(j = 1, 2, \cdots, m)$ 为基向量,

$x_j(j = 1, 2, \cdots, m)$ 为基变量.

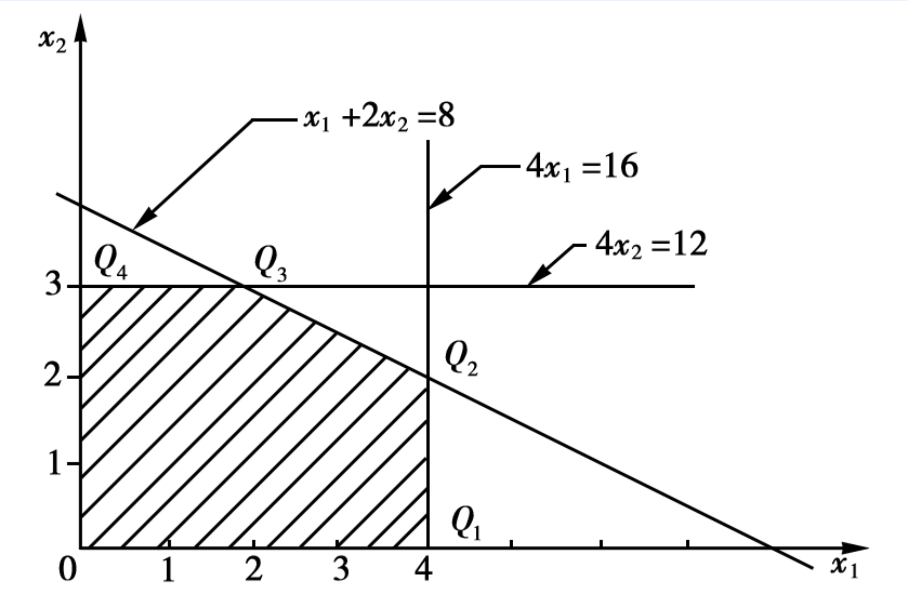
3. 基础可行解

设 $x_B=(x_1,x_2,\cdots,x_m)^T$是线性规划问题的基变量，

$x_N=(x_{m+1},x_{m+2},\cdots,x_n)^T$是非基变量.

称 $x_B=B^{-1}b, x_N=0$ 为对应基 B 的**基础解.**

若$x_B=B^{-1}b\geq 0$, 则称该基础解为一个基础可行解. 显然, 基础可行解的非零分量的数目不大于m，并且都是非负的.



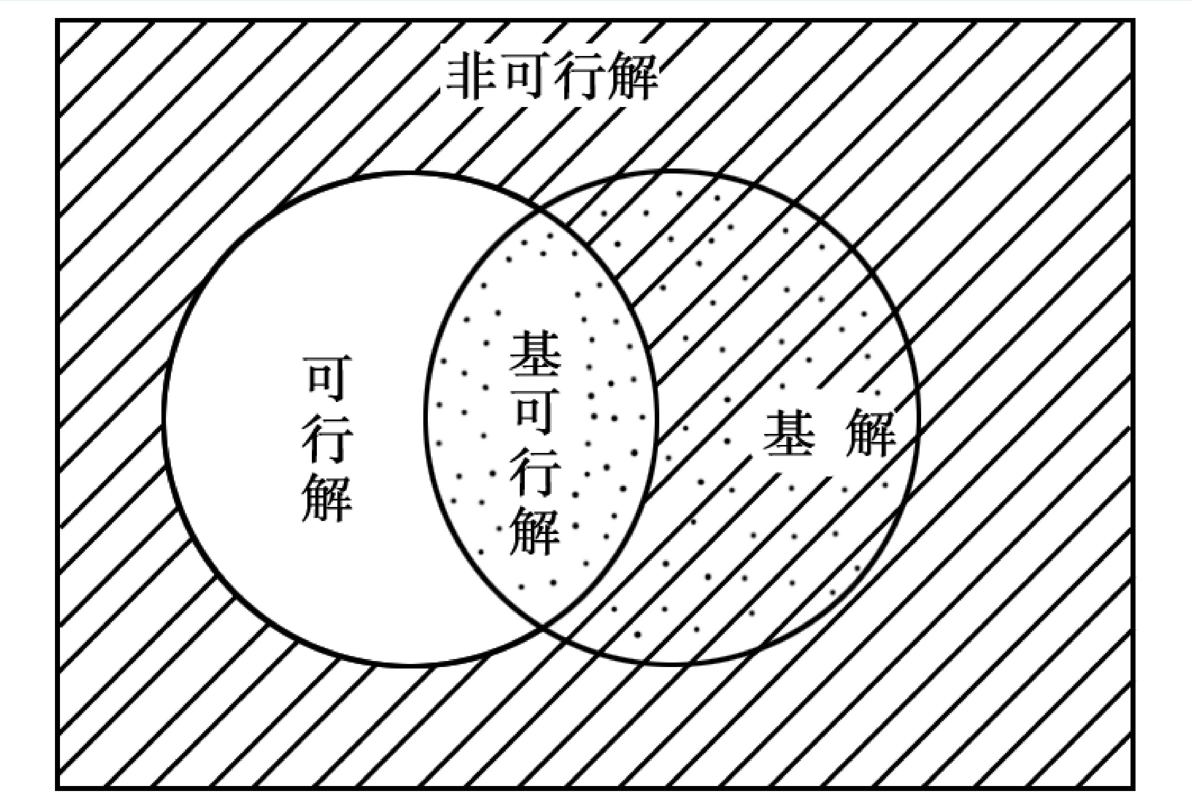
$0, Q_1, Q_2, Q_3, Q_4$
是基可行解

4 可行基

- 对应于基可行解的基, 称为可行基.
- 约束方程组(1)具有的基解的数目最多是C_n^m个, 一般基可行解的数目要小于基解的数目.
- 以上提到了几种解的概念, 它们之间的关系可用下图表明.

说明：当基解中的非零分量的个数小于m时，该基解是退化解.
在以下讨论时，假设不出现退化的情况.

不同解之间的关系



凸集相关基本概念

1. 凸集
2. 凸组合
3. 顶点

1.凸集

- 定义
  - 设K是n维欧氏空间的一点集，若任意两点$X^{(1)}\in K$，$X^{(2)}\in K$的连线上的所有点$\alpha X^{(1)}+(1-\alpha)X^{(2)}\in K$，$(0\leq\alpha\leq 1)$，则称$K$为凸集。

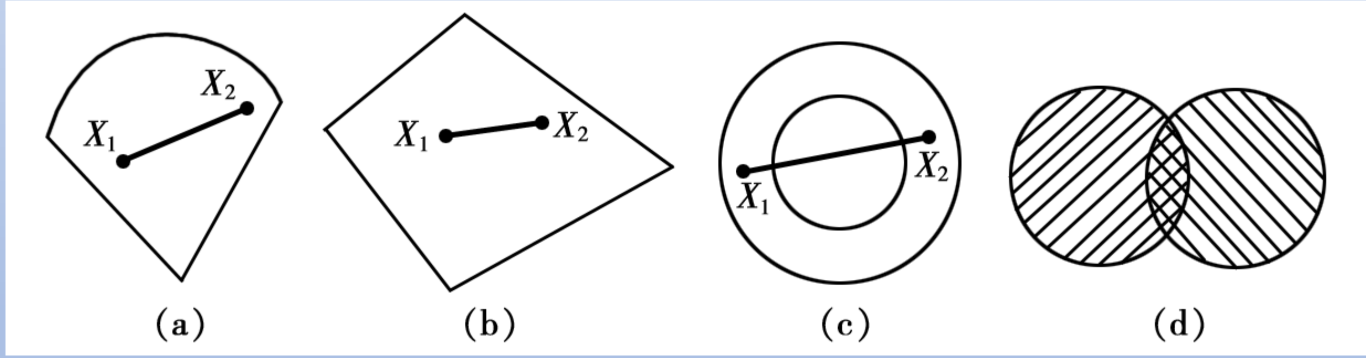
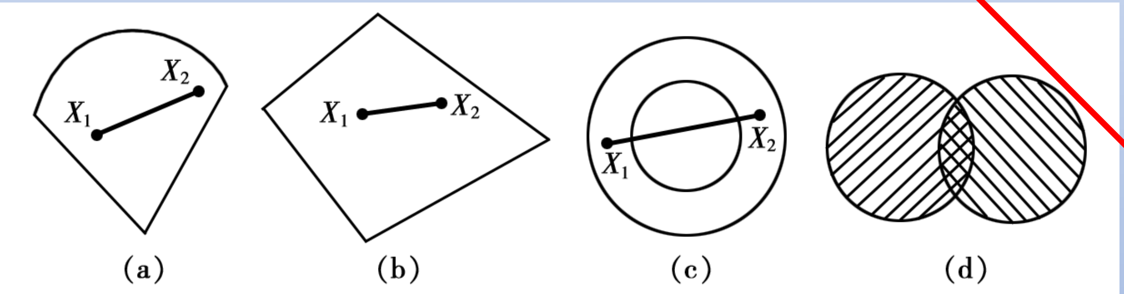
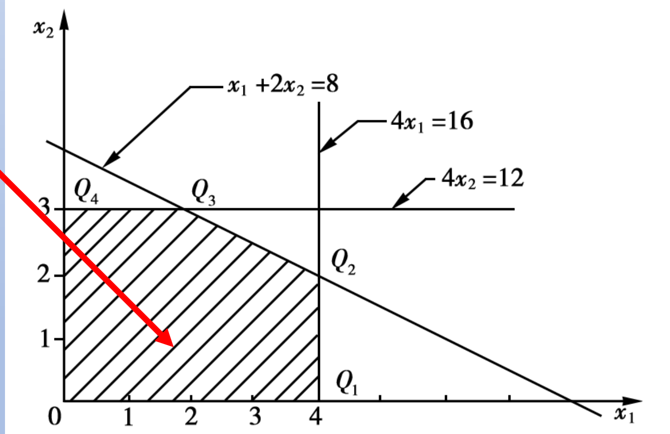


图1-5

- 实心圆，实心球体，实心立方体等都是凸集，圆环不是凸集. 从直观上讲，凸集没有凹入部分，其内部没有空洞. 图1-5中的(a)(b)是凸集，(c)不是凸集.
- 图1-2中的阴影部分是凸集.
- 任何两个凸集的交集是凸集，见图1-5(d)





2. 凸组合

- 设$X^{(1)}$，$X^{(2)}$，…，$X^{(k)}$是n维欧氏空间E^n中的k个点．若存在μ_1，μ_2，…，μ_k，且$0\leq\mu_i\leq 1$，$i=1,2,\ldots$，k

$$\sum_{i=1}^{k}\mu_i = 1$$

使 $X=\mu_1 X^{(1)}+\mu_2 X^{(2)}+\ldots+\mu_k X^{(k)}$

则称X为$X^{(1)}$，$X^{(2)}$，…，$X^{(k)}$的一个凸组合（当$0<\mu_i<1$时，称为严格凸组合）．

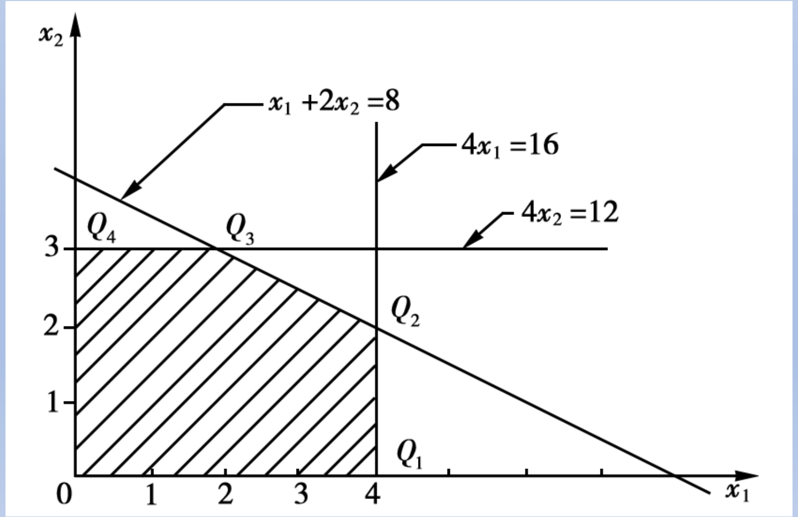
3. 顶点

- 设K是凸集，$X\in K$. 若X不能用不同的两点$X^{(1)}\in K$和$X^{(2)}\in K$的线性组合表示为

$$X=\alpha X^{(1)}+(1-\alpha)X^{(2)},\quad (0<\alpha<1)$$

则称X为K的一个顶点(或极点).

图中的0，$Q_{1,2,3,4}$都是顶点.



几个定理

- **定理1** 若线性规划问题存在可行解，则其可行解集合

$$R=\{x|Ax=b, x\geq 0\}$$

是凸集.

几个定理

- **定理2** 线性规划问题的基础可行解X对应于可行解集R的顶点.
- **引理 1** 线性规划问题的可行解$X=(x_1,x_2,\dots,\ x_n)^T$为基可行解的充要条件是：$X$的正分量所对应的系数列向量是线性独立的.

定理证明：不失一般性，假设基可行解X的前m个分量为正。

故

$$\sum_{j=1}^{m} P_j x_j = b$$

现分两步来讨论，分别用反证法.

(1) 若X不是基可行解，则它一定不是可行解集R的顶点.

根据引理1，若X不是基可行解，则其正分量所对应的系数列向量P_1，P_2，…，P_m线性相关，即存在一组不全为零的数α_i, i=1,2,…,m，使得

$$\alpha_1 P_1+\alpha_2 P_2+\ldots+\alpha_m P_m=0 \qquad (1\text{-}9)$$

用一个数$\mu > 0$乘(1-9)式再分别与(1-8)式相加和相减，得

$$(x_1-\mu\alpha_1)P_1+(x_2-\mu\alpha_2)P_2+\ldots+(x_m-\mu\alpha_m)P_m=b$$

$$(x_1+\mu\alpha_1)P_1+(x_2+\mu\alpha_2)P_2+\ldots+(x_m+\mu\alpha_m)P_m=b$$

所以

$$X^1=(x_1-\mu a_1, x_2-\mu a_2, \cdots, x_m-\mu a_m, 0, \cdots, 0)^T \in R$$

$$X^2=(x_1+\mu a_1, x_2+\mu a_2, \cdots, x_m+\mu a_m, 0, \cdots, 0)^T \in R$$

$$X=\frac{1}{2}X^1+\frac{1}{2}X^2$$

（2）若X不是R的顶点，则它一定不是基础可行解.

因X 不是可行可行解集R的顶点，故在R中可找到不同的两点

$$X^{(1)}=(x_1^{(1)},x_2^{(1)},\ldots,x_n^{(1)})^{\mathrm{T}}$$

$$X^{(2)}=(x_1^{(2)},x_2^{(2)},\ldots,x_n^{(2)})^{\mathrm{T}}$$

使得 $X=\alpha X^{(1)}+(1-\alpha)\, X^{(2)}$， $0<\alpha<1$

设X是基可行解，对应的向量组$P_1 \ldots P_m$线性独立，故当$j>m$时，有$x_j=x_j^{(1)}=x_j^{(2)}=0$。由于$X^{(1)}$，$X^{(2)}$是R的两点，因而满足

$$\sum_{j=1}^{m} P_j x_j^{(1)} = b \quad 与 \quad \sum_{j=1}^{m} P_j x_j^{(2)} = b$$

将两式相减，得 $$\sum_{j=1}^{m} P_j \left(x_j^{(1)} - x_j^{(2)}\right) = 0$$

因$X^{(1)}\neq X^{(2)}$，所以上式中的系数不全为零，故向量组$P_1, P_2,\ldots, P_m$线性相关，与假设矛盾，即X不是基可行解.

几个定理

- **引理2**　若K是有界凸集，则任何一点$X\in K$可表示为K的顶点的凸组合.

  本引理的证明从略，用以下例子说明本引理的结论.

- **例5**　设X是三角形中任意一点，$X^{(1)}$，$X^{(2)}$和$X^{(3)}$是三角形的三个顶点，试用三个顶点的坐标表示X(见图1-6)

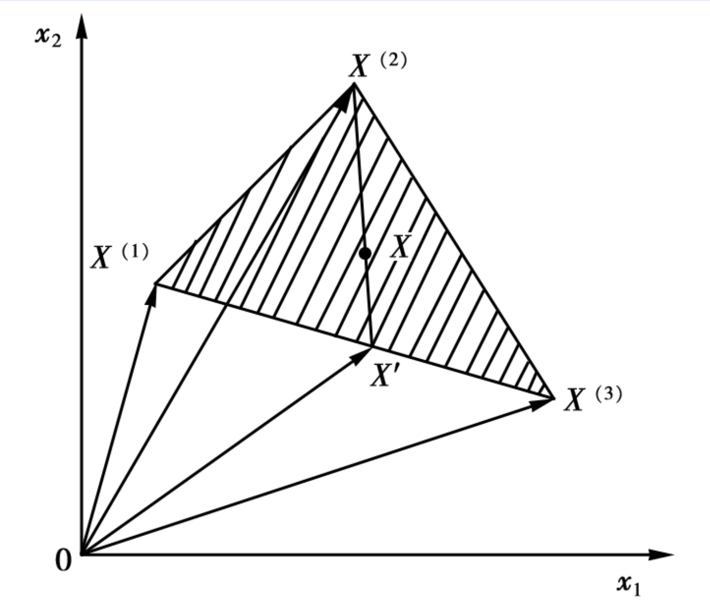


图1-6

几个定理

- **定理 3** 若可行解集R有界，则线性规划问题的目标函数一定可以在其R的顶点上达到最优.

证： 设$X^{(1)},X^{(2)}$，…，$X^{(k)}$是R的顶点. 若$X^{(0)}$不是顶点，且目标函数在$X^{(0)}$处达到最优 $z^* = c^T X^{(0)}$.

因$X^{(0)}$不是顶点，由引理2，它可以由R的顶点线性表示为

$$X^{(0)} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i X^{(i)}, \alpha_i > 0, \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1.$$

代入目标函数得

$$c^T X^{(0)} = c^T \sum_{i=1}^{k} \alpha_i X^{(i)} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i c^T X^{(i)}.$$

在所有的顶点中必然能找到某一个顶点$X^{(m)}$，使 $c^T X^{(m)}$ 是所有 $c^T X^{(i)}$ 中最小者. 有

$$c^T X^{(0)} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i c^T X^{(i)} \geq \sum_{i=1}^{k} \alpha_i c^T X^{(m)} = c^T X^{(m)}$$

根据假设 $c^T X^{(0)}$ 是最小值，所以只能有 $c^T X^{(0)} = c^T X^{(m)}$.

即目标函数在顶点$X^{(m)}$处也取到最小值. 证毕

几个定理

有时，目标函数可能在多个顶点处达到最大，这时在这些顶点的凸组合上也达到最大值，这时线性规划问题有无限多个最优解。

假设

$\hat{X}^{(1)}$，$\hat{X}^{(2)}$，…，$\hat{X}^{(k)}$

是目标函数达到最小值的顶点. 则对这些顶点的凸组合，有

$$\hat{X} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \hat{X}^{(i)}, \quad \alpha_i > 0, \quad \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1$$

$$c^T \hat{X} = c^T \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \hat{X}^{(i)} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i c^T \hat{X}^{(i)}.$$

设

$$c^T \hat{X}^{(i)} = m, i = 1, 2, \cdots, k$$

于是

$$c^T \hat{X} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i m = m.$$

另外，若可行域为无界，则可能无最优解，也可能有最优解，若有最优解，也必定在某顶点上得到.

定理 4 若线性规划问题有最优解，则必有基础最优解, 即目标函数一定可以在R的某个顶点上达到最优.

基本结论

- 线性规划问题的所有可行解构成的集合是凸集(也可能为无界域)，它们有有限个顶点，线性规划问题的每个基可行解对应可行解集的一个顶点。
- 若线性规划问题有最优解，必在某顶点上得到. 顶点数目是有限的，若采用“枚举法”找所有基可行解，然后一一比较，最终必然能找到最优解. 但当n, m较大时，这种办法是低效的，所以要继续讨论如何有效寻找最优解的方法. 本课程将主要介绍单纯形法。