**P72的12题、**

**问题：**主要问题在于积分与求和、取极限等交换顺序是需要条件的，要说明原因才能交换顺序（甚至不能交换顺序）。

**参考答案：【不涉及无穷求和交换顺序，使用经典的$\varepsilon$-$\delta$语言。】**

**第(1)问、**

由$\forall t \geq 0, P_{ij}(t) \geq 0$知$\forall t \geq 0, e^{-\lambda t} P_{ij}(t) \geq 0$

因此$P_{ij}(\lambda) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-\lambda t} P_{ij}(t) dt \geq 0$

**第(2)问、**

设$\{j_n\}$是$E$的一个排序，因此$\forall n$,

$$\sum_{k=1}^{n} P_{ij}(\lambda) = \lambda \sum_{k=1}^{n} \int e^{-\lambda t} P_{ij}(t) dt = \lambda \int e^{-\lambda t} [\sum_{k=1}^{n} P_{ij}(t)] dt \leq \lambda \int e^{-\lambda t} dt = 1$$

因此$\lambda \displaystyle\sum_{j \in E} P_{ij}(\lambda) \leq 1$

**第(3)问、**

【注】由于$e^{-\lambda t} P_{ij}(t)$在一致有界，因此黎曼积分与勒贝格积分相等，这里统一使用勒贝格积分。

当$\lambda = \mu$时显然成立，

当$\lambda \neq \mu$不妨假设$\lambda > \mu$，

$\forall \varepsilon > 0$(不妨假设$\varepsilon < 1$)，取$\delta_1 = -\ln(\varepsilon)/\lambda, \delta_1 = -\ln(\varepsilon)/\mu$,

记$S_0 = [0, \delta_1] \times [0, \delta_2]$。

设$\{k_n\}$是$E$的一个排序，

$\forall t, s \in [0, \infty), \displaystyle\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{\infty} p_{ik}(t) p_{kj}(s) = p_{ij}(t+s)$

令$S_n := \{(t,s) \in S_0 : p_{ij}(t+s) - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} p_{ik}(t) p_{kj}(s) \leq \varepsilon\}$

有$S_n \nearrow S_0$，

因此$\exists n_0, \forall n \geq n_0, \mu_{Leb}(S_0 \setminus S_n) \leq \varepsilon$

当$n \geq n_0$时

$$
\begin{aligned}
& |(\lambda-\mu)\sum_{k=1}^{n}\int_0^\infty e^{-\lambda t}P_{ik}(t)dt\int_0^\infty e^{-\mu s}P_{kj}(s)ds - P_{ij}(\lambda)+P_{ij}(\mu)| \\
= \ & |(\lambda-\mu)\int_{[0,\infty)\times[0,\infty)} e^{-\lambda t-\mu s}[\sum_{k=1}^{n}P_{ik}(t)P_{kj}(s)]dtds - P_{ij}(\lambda)+P_{ij}(\mu)| \\
\leq \ & |(\lambda-\mu)\int_{S_0} e^{-\lambda t-\mu s}P_{ij}(t+s)dtds - P_{ij}(\lambda)+P_{ij}(\mu)| \\
& +|(\lambda-\mu)\int_{S_0} e^{-\lambda t-\mu s}[\sum_{k=1}^{n}P_{ik}(t)P_{kj}(s)-P_{ij}(t+s)]dtds| \\
& +|(\lambda-\mu)\int_{[0,\infty)\times[0,\infty)\setminus S_0} e^{-\lambda t-\mu s}[\sum_{k=1}^{n}P_{ik}(t)P_{kj}(s)]dtds| \\
\leq \ & |(\lambda-\mu)\int_{[0,\infty)\times[0,\infty)} e^{-\lambda t-\mu s}P_{ij}(t+s)dtds - P_{ij}(\lambda)+P_{ij}(\mu)| + |(\lambda-\mu)\int_{[0,\infty)\times[0,\infty)\setminus S_0} e^{-\lambda t-\mu s}P_{ij}(t+s)dtds| \\
& +|(\lambda-\mu)\int_{S_n} e^{-\lambda t-\mu s}[\sum_{k=1}^{n}P_{ik}(t)P_{kj}(s)-P_{ij}(t+s)]dtds| + |(\lambda-\mu)\int_{S_n\setminus S_0} e^{-\lambda t-\mu s}[\sum_{k=1}^{n}P_{ik}(t)P_{kj}(s)-P_{ij}(t+s)]dtds| \\
& +|(\lambda-\mu)\int_{[0,\infty)\times[0,\infty)\setminus S_0} e^{-\lambda t-\mu s}P_{ij}(s+t)dtds| \\
\leq \ & |(\lambda-\mu)\int_0^{+\infty} e^{-\lambda(t+s)}P_{ij}(s+t)d(s+t)\int_{s+t}^{\infty} e^{-(\mu-\lambda)s}ds - P_{ij}(\lambda)+P_{ij}(\mu)| + 2(\lambda-\mu)\int_{[0,\infty)\times[0,\infty)\setminus S_0} e^{-\lambda t-\mu s}dtds \\
& +|(\lambda-\mu)\int_{S_n} \varepsilon e^{-\lambda t-\mu s}dtds| + |(\lambda-\mu)\int_{S_n\setminus S_0} P_{ij}(t+s)dtds| \\
\leq \ & |P_{ij}(\lambda)-P_{ij}(\mu)-P_{ij}(\lambda)+P_{ij}(\mu)| + 2(\lambda-\mu)e^{-\lambda\delta_1-\mu\delta_2} + (\lambda-\mu)\varepsilon + (\lambda-\mu)\mu_{Leb}(S_0\setminus S_n) \\
\leq \ & 4(\lambda-\mu)\varepsilon
\end{aligned}
$$

因此$(\lambda-\mu)\sum_{k\in E}P_{ik}(\lambda)P_{kj}(\mu) = P_{ij}(\mu)-P_{ij}(\lambda)$

**第(4)问、**

对于固定的$i, j$，

$\forall\varepsilon > 0$(不妨假设$\varepsilon < 1$)，$\exists\delta_0 > 0, \forall t \in [0, \delta_0], |p_{ij}(t) - \delta_{ij}| < \varepsilon$

当$\lambda \geq -\ln(\varepsilon)/\delta_0$时，有

$$
\begin{aligned}
& |\lambda P_{ij}(\lambda) - \delta_{ij}| \\
= \ & |\lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} P_{ij}(t) dt - \delta_{ij}| \\
= \ & |\int_0^\infty e^{-t} P_{ij}(t/\lambda) dt - \delta_{ij}| \\
\leq \ & |\int_0^{\lambda\delta_0} e^{-t}\delta_{ij} dt - \delta_{ij}| + |\int_0^{\lambda\delta_0} e^{-t}(P_{ij}(t/\lambda) - \delta_{ij}) dt| + |\int_{\lambda\delta_0}^\infty e^{-t} P_{ij}(t/\lambda) dt| \\
\leq \ & e^{-\lambda\delta_0}\delta_{ij} + \int_0^{\lambda\delta_0} e^{-t}|P_{ij}(t/\lambda) - \delta_{ij}| dt + \int_{\lambda\delta_0}^\infty e^{-t} dt \\
\leq \ & e^{-\lambda\delta_0}\delta_{ij} + \varepsilon + e^{-\lambda\delta_0} \\
\leq \ & 3\varepsilon
\end{aligned}
$$

因此$\lim\limits_{\lambda\to\infty} \lambda P_{ij}(\lambda) = \delta_{ij}$

**第(5)问、**

对于固定的$i, j$，

$\forall \varepsilon > 0$(不妨假设$\varepsilon < 1$)，$\exists \delta_0 > 0, \forall t \in (0,\ \delta_0], |\dfrac{p_{ij}(t) - \delta_{ij}}{t} - q_{ij}| < \varepsilon$

此时$\forall t \in [0, \delta_0], |p_{ij}(t) - \delta_{ij} - q_{ij}t| \leq \varepsilon t$

同时由于$\lim\limits_{\lambda\to\infty} \lambda e^{-\lambda\delta_0} = 0, \lim\limits_{\lambda\to\infty} e^{-\lambda\delta_0} = 0$，

因此$\exists \lambda_1, \forall \lambda \geq \lambda_1$有$[(\delta_0 + 1)q_{ij} + 1 - \varepsilon\delta_0]\lambda e^{-\lambda\delta_0} \leq \varepsilon$，

同时$\exists \lambda_2, \forall \lambda \geq \lambda_2$有$(\delta_{ij} - \varepsilon)e^{-\lambda\delta_0} \leq \varepsilon$

当$\lambda \geq \max\{\lambda_1, \lambda_2\}$时，有

$$
\begin{aligned}
& |\lambda(\lambda p_{ij}(\lambda) - \delta_{ij}) - q_{ij}| \\
= \ & |\lambda \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} p_{ij}(t) dt - \lambda\delta_{ij} - q_{ij}| \\
= \ & |\lambda \int_0^{\infty} e^{-t} p_{ij}(t/\lambda) dt - \lambda\delta_{ij} - q_{ij}| \\
\leq \ & |\lambda \int_0^{\lambda\delta_0} e^{-t}(p_{ij}(t/\lambda) - \delta_{ij} - q_{ij}t/\lambda)dt| + |\lambda \int_0^{\lambda\delta_0} e^{-t}(\delta_{ij} + q_{ij}t/\lambda)dt - \lambda\delta_{ij} - q_{ij}| + |\lambda \int_{\lambda\delta_0}^{\infty} e^{-t} p_{ij}(t/\lambda)dt| \\
\leq \ & \lambda \int_0^{\lambda\delta_0} e^{-t}|p_{ij}(t/\lambda) - \delta_{ij} - q_{ij}t/\lambda|dt + |\lambda\left(-q_{ij}/\lambda e^{-t}t - (q_{ij}/\lambda + \delta_{ij})e^{-t}\right)\Big|_0^{\lambda\delta_0} - \lambda\delta_{ij} - q_{ij}| + \lambda \int_{\lambda\delta_0}^{\infty} e^{-t} dt \\
\leq \ & \lambda \int_0^{\lambda\delta_0} \varepsilon e^{-t} t/\lambda dt + (\delta_0 + 1) q_{ij} \lambda e^{-\lambda\delta_0} + \delta_{ij} e^{-\lambda\delta_0} + \lambda e^{-\lambda\delta_0} \\
= \ & \varepsilon(1 - e^{-\lambda\delta_0}\lambda\delta_0 - e^{-\lambda\delta_0}) + (\delta_0 + 1) q_{ij} \lambda e^{-\lambda\delta_0} + \delta_{ij} e^{-\lambda\delta_0} + \lambda e^{-\lambda\delta_0} \\
= \ & \varepsilon + [(\delta_0 + 1) q_{ij} + 1 - \varepsilon\delta_0]\lambda e^{-\lambda\delta_0} + (\delta_{ij} - \varepsilon) e^{-\lambda\delta_0} \\
\leq \ & 3\varepsilon
\end{aligned}
$$

**附加题、**

一般在作业等遇到证明$Q$-过程唯一，只需证明$Q$保守全稳定，且$\sup\limits_{i\in E} q_i < \infty$即可。

**不过为日后的研究着想，其它方法也要掌握!**

而且在这道题里面，$s = +\infty$时上面并不适用，这里就只给出$s = +\infty$这种情况。

**参考答案：**

显然$Q$保守全稳定。

令$\omega_n = n + 1, c = \mu, b = \mu + \lambda$，则

$$\sum_{m=0}^{\infty} q_{nm}\omega_m = \lambda(n+2) + (n\mu)n - (n\mu + \lambda)(n+1) = -\mu n + \lambda \leq c\omega_n + b, \forall n \geq 1$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} q_{0m}\omega_m = 2\lambda - \lambda = \lambda \leq c\omega_0 + b$$

同时

$$|q_{nn}| = n\mu + \lambda \leq b\omega_n, \forall n \geq 1$$

$$|q_{00}| = \lambda \leq b\omega_0$$

根据定理3.5.2知$Q$过程唯一。