第二十章　重 积 分

§1 重积分的概念

1．证明性质（4），性质（6）．

证明　性质（4）为单调性：若 f 与 g 都在 D 可积,且在 D 的每点 P 都有 $f(P)\le g(P)$，则 $\iint\limits_D f(P)d\sigma \le \iint\limits_D g(P)d\sigma$.

事实上, f 与 g 的 Rimann 和有以下关系:

$$\sum_{i=1}^{n} f(p_i)\Delta\sigma_i \le \sum_{i=1}^{n} g(p_i)\Delta\sigma_i ,$$

令 $d=\max\limits_{1\le i\le n}\{\Delta\sigma_i\text{的直径}\}\to 0$, 按积分的定义，

$$\iint\limits_D f(p)d\sigma = \lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(p_i)\Delta\sigma_i \le \lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n} g(p_i)\Delta\sigma_i = \iint\limits_D g(p)d\sigma .$$

性质(6)为积分中值定理: 设 D 是有界闭区域(因而是连通的)，$f(P)$ 在 D 上连续，则存在 $P_0\in D$，使得 $\iint\limits_D f(P)d\sigma = f(P_0)|D|$，其中 $|D|$ 表示 D 的面积.

事实上，设 M 与 m 是连续函数 $f(P)$ 在有界闭区域 D 上的最大值与最小值，即：$\forall P\in D$，$m\le f(P)\le M$. 所以，$m|D|\le \iint\limits_D f(p)d\sigma \le M|D|$，即 $m\le \dfrac{\iint\limits_D f(P)d\sigma}{|D|}\le M$.

由有界闭区域上的连续函数的介值定理，存在 $P_0\in D$，使得 $f(P_0)=\dfrac{\iint\limits_D f(P)d\sigma}{|D|}$，即 $\iint\limits_D f(p)d\sigma = f(p_0)|D|$.

2．证明有界闭区域上的连续函数必可积.

证 明　在有界闭区域 D 上的连续函数 $f(P)$ 必定是一致连续的，故 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall P_1,P_2\in D$,只要 $r(p_1,p_2)<\delta$,就有 $|f(P_1)-f(P_2)|<\dfrac{\varepsilon}{2|D|}$，$|D|$ 表示 D 的面积.

把 D 分成 n 个区域 $\Delta\sigma_1,\Delta\sigma_2,\cdots,\Delta\sigma_n$, 使 $d=\max\limits_{1\le i\le n}\{\Delta\sigma_i\}<\delta$, 显然 $f(P)$ 在 $\Delta\sigma_i$ 上的振幅 $\omega_i\le\dfrac{\varepsilon}{2|D|}$.　所以 $\sum\limits_{i=1}^{n}\omega_i\Delta\sigma_i\le\dfrac{\varepsilon}{2|D|}\cdot|D|=\dfrac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$.　　故 $f(P)$ 在 D 上可积.

3．设Ω是可度量的平面图形或空间立体,f,g在Ω上连续，证明:

(1) 若在Ω上$f(p)\geq 0$,且$f(p)\not\equiv 0$,则$\int_{\Omega} f(p)d\Omega>0$;

(2) 若在Ω的任何区域$\Omega'\subset\Omega$上,有$\int_{\Omega'} f(p)d\Omega=\int_{\Omega'} g(p)d\Omega$,则在$\Omega$上有，$f(p)\equiv g(p)$.

证明：不妨设Ω是可度量的平面图形，f,g在Ω上连续.

(1) 若在Ω上$f(p)\geq 0$,且$f(p)\not\equiv 0$,则存在一点$P_0\in\Omega$，使$f(p_0)\geq 0$.

由于f在Ω上连续，因而对$\varepsilon={f(P_0)}/{2}>0,\exists\delta>0,\forall P\in\Omega,r(P,P_0)\leq\frac{\delta}{2}$，就有

$|f(P)-f(P_0)|<\dfrac{f(P_0)}{2}$，即有$f(P)>\dfrac{f(P_0)}{2}$. 由可加性，有

$$\int_{\Omega} f(P)d\Omega=\int_{r(P,P_0)\leq\frac{\delta}{2}} f(P)d\Omega+\int_{\Omega-\{r(P,P_0)\leq\frac{\delta}{2}\}} f(P)d\Omega$$

$$\geq\int_{r(P,P_0)\leq\frac{\delta}{2}} f(P)d\Omega\geq\frac{f(P_0)}{2}\int_{r(P,P_0)\leq\frac{\delta}{2}} d\Omega$$

$$=\frac{f(p_0)}{2}\pi(\frac{\delta}{2})^2=\frac{\pi\delta^2}{8}f(p_0)>0.$$

(2) 若在Ω上$f(P)\not\equiv g(P)$，即$\exists P_0\in\Omega$，使$f(P_0)\neq g(P_0)$. 不妨设$f(P_0)>g(P_0)$，

由此得$f(P_0)-g(P_0)>0$. 由于f,g在Ω上连续，因而函数$f(P)-g(P)$在Ω上连续，因而在P_0

连续,故对$\varepsilon=\dfrac{f(P_0)-g(P_0)}{2}>0$，$\exists\delta>0$，当$r(P,P_0)\leq\dfrac{\delta}{2}$时，有

$$|f(P)-g(P)-(f(P_0)-g(P_0))|<\frac{f(P_0)-g(P_0)}{2}.$$

即有 $|f(P)-g(P)|>\dfrac{f(P_0)-g(P_0)}{2}$. 设$\Omega'=\{P:r(P,P_0)\leq\frac{\delta}{2}\}\subset\Omega$，这时

$$\int_{\Omega'}[f(P)-g(P)]d\Omega\geq\frac{f(P_0)-g(P_0)}{2}(\frac{\delta}{2})^2\pi>0.$$

即 $\int_{\Omega'} f(p)d\Omega>\int_{\Omega'} g(p)d\Omega$，矛盾. 所以在$\Omega$上$f(P)\equiv g(P)$.

4．设$f(x)$在$[a,b]$可积，$g(y)$在$[c,d]$可积,则$f(x)g(y)$在矩形区域$D=[a,b]\times[c,d]$上可积,且

$$\iint_D f(x)g(y)dxdy=\int_a^b f(x)dx\int_c^d g(y)dy.$$

证明: 用平行坐标轴的直线网 $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b,\ c=y_0<y_1<y_2<\cdots<y_m=d$,

将 D 分为 $m\times n$ 个小矩形 $\Delta\sigma_{ij}=[x_{i-1},x_i]\times[y_{j-1},y_j]$. 记 $f(x)g(y)$ 在 $\Delta\sigma_{ij}$ 的上下确界分别为 M_{ij},m_{ij}，任取 $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$, 则

$$m_{ij}\Delta y_j\le\int_{y_{j-1}}^{y_j}f(\xi_i)g(y)dy\le M_{ij}\Delta y_j,\qquad i=1,2,\cdots,n,\ j=1,2,\cdots,m.$$

对 j 求和得

$$\sum_{j=1}^{m}m_{ij}\Delta y_j\le\int_c^d f(\xi_i)g(y)dy\le\sum_{j=1}^{m}M_{ij}\Delta y_j,\qquad i=1,2,\cdots,n.$$

乘以 Δx_i 后再对 i 求和，得

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}m_{ij}\Delta x_i\Delta y_j\le\sum_{i=1}^{n}\int_c^d f(\xi_i)g(y)dy\Delta x_i\le\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}M_{ij}\Delta x_i\Delta y_j,$$

当 $\lambda=\max\limits_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le m}}\{\sigma_{ij}\text{的直径}\}\to 0$ 时，$\lambda'=\max\limits_{1\le i\le n}\{\Delta x_i\}\to 0$. 由于 $f(x)g(y)$ 在矩形区域 $D=[a,b]\times[c,d]$ 上可积,上式左右两端当 $\lambda\to 0$ 时有公共极限值 $\iint\limits_D f(x)g(y)dxdy$.因此由夹迫性

$$\lim_{\lambda'\to 0}\sum_{i=1}^{n}(\int_c^d f(\xi_i)g(y)dy)\Delta x_i=\iint_D f(x)g(y)dxdy.$$

由定积分的定义即得

$$\int_a^b(\int_c^d f(x)g(y)dy)dx=\iint_D f(x)g(y)dxdy.$$

即

$$\iint_D f(x)g(y)dxdy=\int_a^b dx\int_c^d f(x)g(y)dy=\int_a^b(f(x)\int_c^d g(y)dy)dx=\int_a^b f(x)dx\int_c^d g(y)dy.$$

5．若 $|f(x,y)|$ 在 D 上可积,那么 $f(x,y)$ 在在 D 上是否可积?考察函数

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & \text{若}x,y\text{都是有理数}\\ -1, & \text{若}x,y\text{至少有一个是无理数}\end{cases}$$

在 $[0,1]\times[0,1]$ 上的积分.

解: 若 $|f(x,y)|$ 在 D 上可积,那么 $f(x,y)$ 在 D 上不一定可积.

事实上，用题所给的函数 $f(x,y)$, $|f(x,y)|\equiv 1,(x,y)\in[0,1]\times[0,1]$, 因而 $\iint\limits_D|f(x,y)|dxdy=|D|=1$, 即 $|f(x,y)|$ 在 D 上可积.

但 $f(x,y)$ 在分割 Δ 下的积分和为

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i = \begin{cases} \sum_{i=1}^{n}\Delta\sigma_i, & (\xi_i,\eta_i)\in\Delta\sigma_i\text{为有理点} \\ \sum_{i=1}^{n}(-1)\Delta\sigma_i. & (\xi_i,\eta_i)\in\Delta\sigma_i\text{为非有理点} \end{cases}$$

$$=\begin{cases} |D|, & (\xi_i,\eta_i)\in\Delta\sigma_i\text{为有理点} \\ -|D|, & (\xi_i,\eta_i)\in\Delta\sigma_i\text{为非有理点} \end{cases}$$

因而$\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$ 不存在，即$f(x,y)$在$D=[0,1]\times[0,1]$上不可积.

6. 设$D=[0,1]\times[0,1]$，$f(x,y)=\begin{cases} 1, & x\text{是有理数} \\ 0, & x\text{是无理数} \end{cases}$ 证明$f(x,y)$在D上不可积.

证明: 用任意曲线网将$D=[0,1]\times[0,1]$分成有限个可求积的区域:$\Delta\sigma_1,\Delta\sigma_2,\cdots,\Delta\sigma_n$.

取$(\xi_i,\eta_i)\in\Delta\sigma_i$，$\xi_i$为有理数，则积分和$\sigma=\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i=\sum\limits_{i=1}^{n}\Delta\sigma_i=1$,这时

$$\lim_{\lambda\to 0}\sigma=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i=1.$$

而取$(\xi_i,\eta_i)\in\Delta\sigma_i$，$\xi_i$为无理数，则积分和$\sigma=\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i=\sum\limits_{i=1}^{n}0\cdot\Delta\sigma_i=0$,这时

$$\lim_{\lambda\to 0}\sigma=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i=0.$$

因而积分和$\sigma=\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)$当$\lambda\to 0$的极限不存在，因而函数$f(x,y)$在$D$上不可积.

§2 重积分化累次积分

1. 计算下列二重积分:

(1). $\iint\limits_D (y-2x)dxdy,\quad D=[3,5]\times[1,2]$

(2). $\iint\limits_D \cos(x+y)dxdy,\quad D=[0,\frac{\pi}{2}]\times[0,\pi]$

(3). $\iint\limits_D xye^{x^2+y^2}dxdy,\quad D=[a,b]\times[c,d]$

(4). $\iint\limits_D \frac{x}{1+xy}dxdy,\quad D=[0,1]\times[0,1]$

解: (1) 原式$=\int_3^5 dx\int_1^2 (y-2x)dy=\int_3^5(\frac{7}{2}-2x)dx=-10$;

(2) 原式 $=\int_0^{\pi/2}dx\int_0^{\pi}\cos(x+y)dy=\int_0^{\pi/2}(\sin(x+\pi)-\sin x)dx=-2$;

(3) 原式 $=\int_a^b xe^{x^2}dx\cdot\int_c^d ye^{y^2}dy=\frac{1}{2}e^{x^2}\Big|_a^b\cdot\frac{1}{2}e^{y^2}\Big|_c^d=\frac{1}{4}(e^{b^2}-e^{a^2})(e^{d^2}-e^{c^2})$;

（4）原式 $=\int_0^1 xdx\int_0^1\frac{dy}{1+xy}=\int_0^1\ln(1+x)dx=x\ln(1+x)\Big|_0^1-\int_0^1\frac{xdx}{1+x}=\ln 2-1+\ln(1+x)\Big|_0^1$

. $=2\ln 2-1$

2. 将二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ 化为不同顺序累次积分.

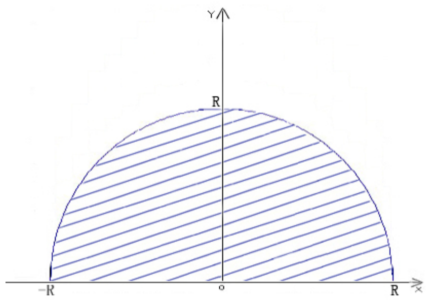
(1) D 由 x 轴与 $x^2+y^2=r^2(y>0)$ 所围成;

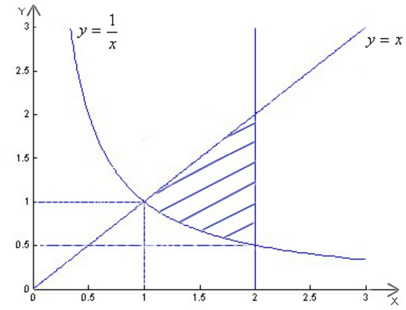
(2) D 由 $y=x,x=2$ 及 $y=\dfrac{1}{x}(x>0)$ 所围成;

(3) D 由 $y=x^3,y=2x^3,y=1$ 和 $y=2$ 所围成;

(4) $D=\{(x,y)\,\|x|+|y|\le 1\}$

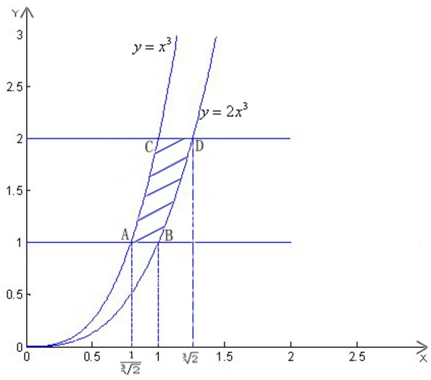
解：(1) $\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int_{-r}^{r}dx\int_0^{\sqrt{r^2-x^2}}f(x,y)dy=\int_0^r dy\int_{-\sqrt{r^2-y^2}}^{\sqrt{r^2-y^2}}f(x,y)dx$

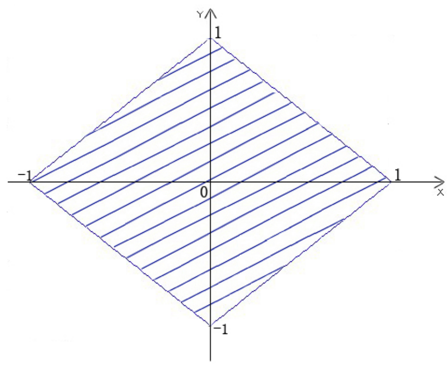




(2) $\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int_1^2 dx\int_{\frac{1}{x}}^{x}f(x,y)dy=\int_{\frac{1}{2}}^{1}dy\int_{\frac{1}{y}}^{2}f(x,y)dx+\int_1^2 dy\int_y^2 f(x,y)dx$.

(3) $\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int_{\frac{1}{\sqrt[3]{2}}}^{1}dx\int_1^{2x^2}f(x,y)dy+\int_1^{\sqrt[3]{2}}dx\int_{x^2}^{2}f(x,y)dy=\int_1^2 dy\int_{\frac{\sqrt[3]{y}}{\sqrt[3]{2}}}^{\sqrt[3]{y}}f(x,y)dx$.





(4) $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int_{-1}^{0} dx \int_{-(1+x)}^{1+x} f(x,y)dy + \int_{0}^{1} dx \int_{-1+x}^{1-x} f(x,y)dy$

$$= \int_{-1}^{0} dy \int_{-(1+y)}^{1+y} f(x,y)dx + \int_{0}^{1} dy \int_{-1+y}^{1-y} f(x,y)dx .$$

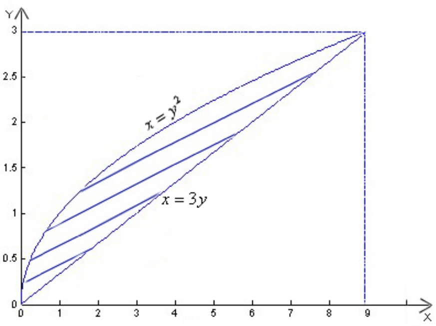
3. 改变下列累次积分的次序.

(1) $\int_0^2 dy \int_{y^2}^{3y} f(x,y)dx$;

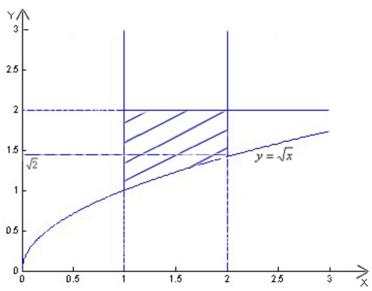
(2) $\int_1^2 dx \int_{\sqrt{x}}^{2} f(x,y)dy$;

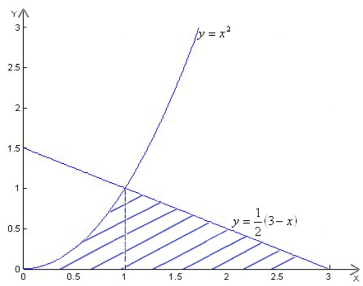
(3) $\int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x,y)dy + \int_1^3 dx \int_0^{\frac{1}{2}(3-x)} f(x,y)dy$.

解：(1) 原式= $\int_0^4 dx \int_{\frac{x}{3}}^{\sqrt{x}} f(x,y)dy + \int_4^6 dx \int_{\frac{x}{3}}^{2} f(x,y)dy$.



(2) 原式= $\int_1^{\sqrt{2}} dy \int_1^{y^2} f(x,y)dx + \int_{\sqrt{2}}^{2} dy \int_1^{2} f(x,y)dx$.





(3) 原式= $\int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{3-2y} f(x,y)dx$.

4. 设 $f(x,y)$ 在所积分的区域 D 上连续，证明：$\int_a^b dx \int_a^x f(x,y)dy = \int_a^b dy \int_y^b f(x,y)dx$.

证明: 先画出 D 的草图如右,则

$$\int_a^b dx \int_a^x f(x,y)dy = \iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int_a^b dy \int_y^b f(x,y)dx .$$

5. 计算下列二重积分:

(1) $\iint\limits_D x^m y^k dxdy (m,k>0)$, D 是由 $y^2 = 2px (p>0), x = \frac{p}{2}$ 围城的区域;

(2) $\iint\limits_D xdxdy$, D 是由 $y=0, y=\sin x^2, x=0$ 和 $x=\sqrt{\pi}$ 围城的区域;

(3) $\iint\limits_D \sqrt{x}dxdy$, $D: x^2+y^2 \le x$;

(4) $\iint\limits_D |xy|dxdy$, $D: x^2+y^2 \le a^2$;

(5) $\iint\limits_D (x+y)dxdy$, D 由 $y=e^x, y=1, x=0, x=1$ 所围成;

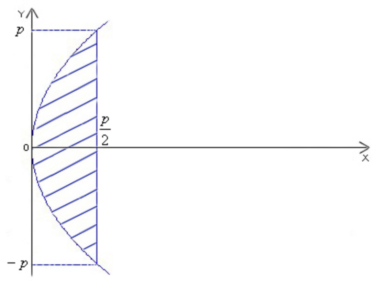
(6) $\iint\limits_D x^2y^2dxdy$, D 由 $x=y^2, x=0, x=2, y=2+x$ 所围成;

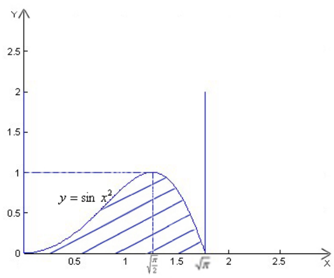
(7) $\iint\limits_D e^{x+y}dxdy$, D 由 $(2,2),(2,3),(3,1)$ 为顶点的三角形;

(8) $\iint\limits_D \sin nxdxdy$, D 由 $y=x^2, y=4x, y=4$ 所围成;

解:（1）原式$=\int_{-p}^{p}dy\int_{\frac{y^2}{2p}}^{\frac{p}{2}}x^my^kdx=\dfrac{1}{(m+1)2^{m+1}p^{m+1}}\int_{-p}^{p}(p^{2(m+1)}-y^{2(m+1)})y^kdy$

$$=\frac{p^{m+k+2}}{(m+1)2^{m+1}}[1-(-1)^{k+1}][\frac{1}{k+1}-\frac{1}{2(m+1)+k+1}]=\frac{p^{m+k+2}[1-(-1)^{k+1}]}{2^m(k+1)(2m+k+3)}.$$

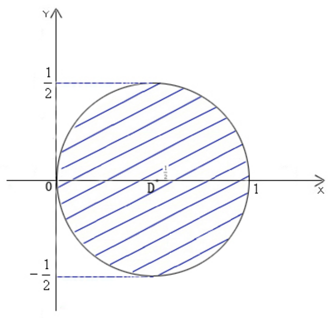


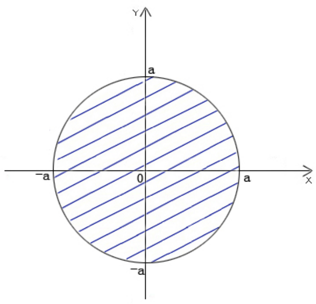


（2）原式$=\int_0^{\sqrt{\pi}}xdx\int_0^{\sin x^2}dy=\int_0^{\sqrt{\pi}}x\sin x^2dx=\dfrac{1}{2}\int_0^{\sqrt{\pi}}\sin x^2d(x^2)$

$$=-\frac{1}{2}\cos x^2\Big|_0^{\sqrt{\pi}}=-\frac{1}{2}(\cos\pi-\cos 0)=1.$$

(3) 原式$=\int_0^1\sqrt{x}dx\int_{-\sqrt{x-x^2}}^{\sqrt{x-x^2}}dy=2\int_0^1 x\sqrt{1-x}dx=2\int_0^1(1-x^2)x(-2x)dx=4\int_0^1(x^2-x^4)dx=\dfrac{8}{15}$.



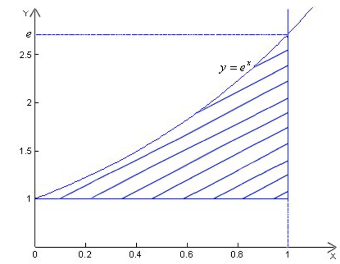


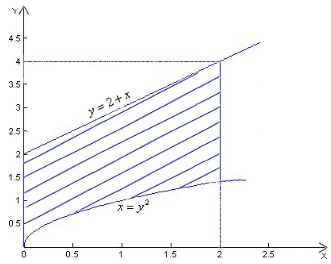
(4) 原式= $4\iint\limits_{D_1}|xy|dxdy \qquad D_1: x^2+y^2\le a^2, x,y\ge 0$

$$=4\int_0^a xdx\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} ydy = 2\int_0^a x(a^2-x^2)dx = 2\left(\frac{a^2x^2}{2}-\frac{1}{4}x^4\right)\Big|_0^a = \frac{a^4}{2}.$$

(5) 原式=$\int_0^1 dx\int_1^{e^x}(x+y)dy = \int_0^1 (xe^x+\tfrac{1}{2}e^{2x}-x-\tfrac{1}{2})dx$

$$=[\tfrac{1}{4}e^{2x}+(x-1)e^x-\tfrac{1}{2}x(x+1)]\Big|_0^1 = \tfrac{1}{4}(e^2-1).$$

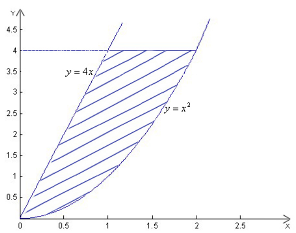




(6) 原式=$\int_0^2 x^2dx\int_{\sqrt{x}}^{2+x} y^2dy = \tfrac{1}{3}\int_0^2 x^2[(2+x)^3 - x\sqrt{x}]dx$

$$=\tfrac{1}{3}(\tfrac{8}{3}x^3+3x^4+\tfrac{6}{5}x^5+\tfrac{1}{6}x^6-\tfrac{2}{9}x^{\frac{9}{2}})\Big|_0^2 = 40\frac{16}{45}-\frac{32}{27}\sqrt{2}.$$

(7) 原式=$\int_2^3 e^xdx\int_{4-x}^{7-2x} e^ydy = \int_2^3 e^x(e^{7-2x}-e^{4-x})dx = \int_2^3 (e^{7-x}-e^4)dx = e^5$.



(8) 当$n=0$时，显然$\iint\limits_D \sin nxdxdy = 0$.

当$n\ne 0$，则

$$\iint\limits_D \sin nxdxdy = \int_0^4 dy\int_{\frac{y}{4}}^{\sqrt{y}} \sin nxdx = -\frac{1}{n}\int_0^4 \cos(n\sqrt{y})dy + \frac{1}{n}\int_0^4 \cos\frac{ny}{4}dy$$

$$=-\frac{1}{n}\int_0^4 \cos(n\sqrt{y})dy + \frac{4}{n^2}\sin n = -\frac{2}{n}\int_0^2 t\cos ntdt + \frac{4}{n^2}\sin n$$

$$=\frac{4\sin n}{n^2}(1+\frac{2}{n}\sin n - 2\cos n).$$

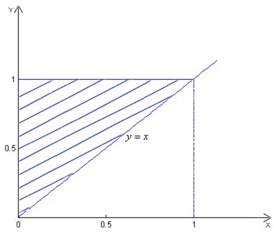
6. 求下列二重积分:

(1). $I=\int_0^1 dx\int_x^1 e^{-y^2}dy$.

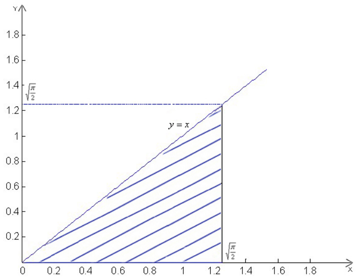
(2). $I=\int_0^1 dx\int_x^1 x^2e^{-y^2}dy$

(3). $I=\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}dy\int_y^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}y^2\sin x^2dx$

解：（1）$I=\int_0^1 e^{-y^2}dy\int_0^y dx=\int_0^1 ye^{-y^2}dy=-\frac{1}{2}e^{-y^2}\Big|_0^1=\frac{1}{2}(1-e^{-1})$



（1）（2）题图



（3）题图

(2). $I=\int_0^1 e^{-y^2}dy\int_0^y x^2dx=\frac{1}{3}\int_0^1 y^3e^{-y^2}dy\overset{y^2=t}{=}\frac{1}{6}\int_0^1 te^{-t}dt=\frac{1}{6}(1-\frac{2}{e})$.

(3). $I=\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}\sin x^2dx\int_0^x y^2dy=\frac{1}{3}\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}x^3\sin x^2dx\overset{x^2=t}{=}\frac{1}{6}\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\sin tdt=\frac{1}{6}$.

7. 设 y 轴将有界区域 D 分成对称的两部分 D_1 和 D_2,证明:

(1) 若 $f(x,y)$ 关于 x 轴为奇函数,即 $f(-x,y)=-f(x,y)$,则

$$\iint_D f(x,y)dxdy=0;$$

(2) 若 $f(x,y)$ 关于 x 轴为偶函数,即 $f(-x,y)=f(x,y)$,则

$$\iint_D f(x,y)dxdy=2\iint_{D_1}f(x,y)dxdy=2\iint_{D_2}f(x,y)dxdy.$$

证明: (1) 设 $f(x,y)$ 关于 x 轴为奇函数,即 $f(-x,y)=-f(x,y)$,则由于 y 轴将有界区域 D 分成对称的两部分 D_1 和 D_2,不妨设

$$D_1: 0\le x\le b,\quad \varphi(x)\le y\le\psi(x),$$

则由对称性,知

$$D_2: -b\le x\le 0,\quad \varphi(x)\le y\le\psi(x),$$

且 $\varphi(x),\psi(x)$ 在 $[-b,b]$ 上是偶函数,因此

$$\begin{aligned}&\iint_D f(x,y)dxdy=\iint_{D_1}f(x,y)dxdy+\iint_{D_2}f(x,y)dxdy\\&=\int_0^b dx\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)}f(x,y)dy+\int_{-b}^0 dx\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)}f(x,y)dy\\&=\int_0^b dx\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)}f(x,y)dy-\int_b^0 dt\int_{\varphi(-t)}^{\psi(-t)}f(-t,y)dy\\&=\int_0^b dx\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)}f(x,y)dy-\int_0^b dx\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)}f(x,y)dy.\end{aligned}$$

(2) 同样,若 $f(x,y)$ 关于 x 轴为偶函数,即 $f(-x,y)=f(x,y)$,则

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\iint_{D_1} f(x,y)dxdy+\iint_{D_2} f(x,y)dxdy$$

$$=\int_0^b dx\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy+\int_{-b}^0 dx\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy$$

$$=\int_0^b dx\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy-\int_b^0 dt\int_{\varphi(-t)}^{\psi(-t)} f(-t,y)dy$$

$$=\int_0^b dx\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy+\int_0^b dt\int_{\varphi(t)}^{\psi(t)} f(t,y)dy$$

$$=2\iint_{D_1} f(x,y)dxdy=2\iint_{D_2} f(x,y)dxdy.$$

8. 计算下列三重积分:

(1) $\iiint_V (x+y+z)dxdydz$, $V: x^2+y^2+z^2\le a^2$;

解: 原式= $\iiint_V (x+y+z)dxdydz=\int_{-a}^a dx\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} dy\int_{-\sqrt{a^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} (x+y+z)dz$

$$=2\int_{-a}^a dx\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} (x+y)\sqrt{a^2-x^2-y^2}dy=4\int_{-a}^a xdx\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{a^2-x^2-y^2}dy$$

$$=4\int_{-a}^a x\left(\frac{a^2-x^2}{2}\arcsin\frac{y}{\sqrt{a^2-x^2}}+\frac{y}{2}\sqrt{a^2-x^2-y^2}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dx$$

$$=2\int_{-a}^a x(a^2-x^2)dx=0.$$

(2) $\iiint_V zdxdydz$, V 由曲面 $z=x^2+y^2, z=1, z=2$ 所围成.

解: $\forall z\in[1,2]$,用平行于 Oxy 平面的平面 $Z=z$ 去截 V,得一圆面 $D_z: x^2+y^2\le z^2$,

而它的面积为 πz^2,因此有

$$\iiint_V zdxdydz=\int_1^2 zdz\iint_{D_z} dxdy=\int_1^2 \pi z^3dz=\frac{15}{4}\pi.$$

(3) $\iiint_V (1+x^4)dxdydz$, V 由曲面 $x^2=z^2+y^2, x=2, x=4$ 所围成.

解: $\forall x\in[2,4]$,用平行于 oyz 平面的平面 $X=x$ 去截 V,得一圆面: $D_x: y^2+z^2\le x^2$,而它的面积为 πx^2,因此有

$$\iiint_V (1+x^4)dxdydz=\int_2^4 (1+x^4)dx\iint_{D_x} dydz=\int_2^4 \pi x^2(1+x^4)dx=\frac{7064}{3}\pi.$$

(4) $\iiint_V x^3yzdxdydz$, V 由曲面 $x^2+y^2+z^2=1, x=0, y=0, z=0$ 所围成的位于第一卦限的有界区域.

解: $\iiint\limits_V x^3yzdxdydz=\int_0^1 x^3dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}} ydy\int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} zdz$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 x^3dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}} y(1-x^2-y^2)dy$$

$$=\frac{1}{8}\int_0^1 x^3(1-x^2)^2dx=\frac{1}{16}\int_0^1 t(1-t)^2dt=\frac{1}{192}.$$

(5) $\iiint\limits_V xy^2z^3dxdydz$,V 由曲面 $z=xy, y=x, z=0, x=1$ 所围成.

解: $\iiint\limits_V xy^2z^3dxdydz=\int_0^1 xdx\int_0^x y^2dy\int_0^{xy} z^3dz=\frac{1}{4}\int_0^1 x^5dx\int_0^x y^6dy=\frac{1}{364}.$

(6) $\iiint\limits_V y\cos(x+z)dxdydz$,V 是由 $y=\sqrt{x}, y=0, z=0, x+z=\frac{\pi}{2}$ 所围成的区域.

解: $\iiint\limits_V y\cos(x+z)dxdydz=\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx\int_0^{\frac{\pi}{2}-x} dz\int_0^{\sqrt{x}} y\cos(x+z)dy$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx\int_0^{\frac{\pi}{2}-x} x\cos(x+z)dz=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x(1-\sin x)dx$$

$$=\frac{1}{2}(\frac{1}{2}x^2+x\cos x-\sin x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{2}.$$

9. 改变下列累次积分的次序.

(1) $\int_0^1 dx\int_0^{1-x} dy\int_0^{x+y} f(x,y,z)dz$

解：原式$=\int_0^1 dy\int_0^{1-y} dx\int_0^{x+y} f(x,y,z)dz$

$$=\int_0^1 dx\int_0^x dz\int_0^{1-x} f(x,y,z)dy$$

$$=\int_0^1 dy\int_0^y dz\int_0^{1-y} f(x,y,z)dx$$

$$=\int_0^1 dz\int_0^z dx\int_0^{1-x} f(x,y,z)dy+\int_0^1 dz\int_z^1 dx\int_0^{1-x} f(x,y,z)dy$$

$$=\int_0^1 dz\int_0^z dx\int_{z-y}^{1-y} f(x,y,z)dx+\int_0^1 dz\int_z^1 dx\int_0^{1-y} f(x,y,z)dx.$$

(2) $\int_0^1 dx\int_0^1 dy\int_0^{x^2+y^2} f(x,y,z)dz$

解：原式$=\int_0^1 dy\int_0^1 dx\int_0^{x^2+y^2} f(x,y,z)dz$

$$=\int_0^1 dy\int_0^{y^2} dz\int_0^1 f(x,y,z)dx+\int_0^1 dy\int_{y^2}^{1+y^2} dz\int_{\sqrt{z-y^2}}^1 f(x,y,z)dx$$

$$=\int_0^1 dz\int_{\sqrt{z}}^1 dy\int_0^1 f(x,y,z)dx+\int_0^1 dz\int_0^{\sqrt{z}} dy\int_{\sqrt{z-y^2}}^1 f(x,y,z)dx+\int_1^2 dz\int_{\sqrt{z-1}}^1 dy\int_{\sqrt{z-y^2}}^1 f(x,y,z)dx$$

$$=\int_0^1 dx\int_0^{x^2}dz\int_0^1 f(x,y,z)dy+\int_0^1 dx\int_{x^2}^{1+x^2}dz\int_{\sqrt{z-x^2}}^1 f(x,y,z)dy$$

$$=\int_0^1 dz\int_{\sqrt{z}}^1 dx\int_0^1 f(x,y,z)dy+\int_0^1 dz\int_0^{\sqrt{z}}dx\int_{\sqrt{z-y^2}}^1 f(x,y,z)dy+\int_1^2 dz\int_{\sqrt{z-1}}^1 dx\int_{\sqrt{z-y^2}}^1 f(x,y,z)dy .$$

(3) $\int_1^2 dx\int_0^1 dy\int_{1-x-y}^0 f(x,y,z)dz=\int_0^1 dy\int_1^2 dx\int_{1-x-y}^0 f(x,y,z)dz$

解：原式$=\int_0^1 dy\int_1^2 dx\int_{1-x-y}^0 f(x,y,z)dz$

$$=\int_{-1}^0 dz\int_{-z}^0 dy\int_1^2 f(x,y,z)dx+\int_{-1}^0 dz\int_0^{-z}dy\int_{1-y-z}^2 f(x,y,z)dx+\int_{-2}^{-1}dz\int_{-1-z}^1 dy\int_{1-y-z}^2 f(x,y,z)dx$$

$$=\int_0^1 dy\int_{-y}^0 dz\int_1^2 f(x,y,z)dx+\int_0^1 dy\int_{-1}^{-y}dz\int_{1-y-z}^2 f(x,y,z)dx+\int_0^1 dy\int_{-1-y}^{-1}dz\int_{1-y-z}^2 f(x,y,z)dx$$

$$=\int_1^2 dx\int_{1-x}^0 dz\int_0^1 f(x,y,z)dy+\int_1^2 dx\int_{-1}^{1-x}dz\int_{1-x-z}^1 f(x,y,z)dy+\int_1^2 dx\int_{-x}^{-1}dz\int_{1-x-z}^1 f(x,y,z)dy$$

$$=\int_{-1}^0 dz\int_{1-z}^2 dx\int_0^1 f(x,y,z)dy+\int_{-1}^0 dz\int_1^{1-z}dx\int_{1-x-z}^1 f(x,y,z)dy+\int_{-2}^{-1}dz\int_{-z}^2 dx\int_{1-x-z}^1 f(x,y,z)dy$$

(4) $\int_{-1}^1 dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}dy\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 f(x,y,z)dz=\int_{-1}^1 dy\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}dx\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 f(x,y,z)dz$

解：原式$=\int_{-1}^1 dy\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}dx\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 f(x,y,z)dz$

$$=\int_{-1}^1 dx\int_{|x|}^1 dz\int_{-\sqrt{z^2-x^2}}^{\sqrt{z^2-x^2}}f(x,y,z)dy=\int_0^1 dz\int_{-z}^z dx\int_{-\sqrt{z^2-x^2}}^{\sqrt{z^2-x^2}}f(x,y,z)dy$$

$$=\int_{-1}^1 dy\int_{|y|}^1 dz\int_{-\sqrt{z^2-y^2}}^{\sqrt{z^2-y^2}}f(x,y,z)dx=\int_0^1 dz\int_{-z}^z dy\int_{-\sqrt{z^2-y^2}}^{\sqrt{z^2-y^2}}f(x,y,z)dx .$$

10. 求下列立体之体积.

(1) V 由 $x^2+y^2+z^2\le r^2, x^2+y^2+z^2\le 2rz$ 所确定.

解： $V=\iint\limits_D(\sqrt{r^2-x^2-y^2}-(r-\sqrt{r^2-x^2-y^2})dxdy$

$$=\iint\limits_D(2\sqrt{r^2-x^2-y^2}-r)dxdy$$

由 $x^2+y^2+z^2\le r^2, x^2+y^2+z^2\le 2rz$ 联立,得

$D: x^2+y^2\le\frac{3}{4}r^2$,采用极坐标,有

$$V=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}r}(2\sqrt{r^2-\rho^2}-r)\rho d\rho=\int_0^{2\pi}\tfrac{5}{24}r^3 d\theta=\frac{5}{12}r^3\pi .$$

(2) V 由 $z\ge x^2+y^2, y\ge x^2, z\le 2$ 所确定.

解： $V=\iint\limits_D(2-x^2-y^2)dxdy=\int_{-1}^1 dx\int_{x^2}^{\sqrt{2-x^2}}(2-x^2-y^2)dy$

$$=2\int_0^1[\tfrac{2}{3}(2-x^2)\sqrt{2-x^2}-x^2(2-x^2)+\tfrac{1}{3}x^6]dx=\frac{\pi}{2}+\frac{52}{105}.$$

(3) V 是由坐标平面及 $x=2, y=3, x+y+z=4$ 所围成的角柱体$(z=0)$.

解： $V=\iint\limits_D(4-x-y)dxdy=\int_0^2dy\int_0^2(4-x-y)dx+\int_2^3dy\int_0^{4-y}(4-x-y)dx$

$$=\int_0^2(6-2y)dy+\int_2^3\tfrac{1}{2}(4-y)^2dy=9\frac{1}{6}.$$

§3 重积分的变量代换

1.用极坐标变换将 $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ 化为累次积分.

(1) $D:x^2+y^2\le a^2,y\ge 0$;

解: $\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int_0^{\pi}d\theta\int_0^a f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$.

(2) $D:a^2\le x^2+y^2\le b^2,x\ge 0$;

解: $\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_a^b f(x\cos\theta,y\sin\theta)rdr$.

(3) $D:x^2+y^2\le ay,a>0$;

解: $\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int_0^{\pi}d\theta\int_0^{a\sin\theta}f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$.

(4) $D:0\le x\le a,0\le y\le a$;

解: $\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\iint\limits_{D_1}f(x,y)dxdy+\iint\limits_{D_2}f(x,y)dxdy$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^{a/\cos\theta}f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{a/\sin\theta}f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr.$$

2.用极坐标变换计算下列二重积分.

(1) $\iint\limits_D\sin\sqrt{x^2+y^2}dxdy$, $D:\pi^2\le x^2+y^2\le 4\pi^2$;

解: $\iint\limits_D\sin\sqrt{x^2+y^2}dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_{\pi}^{2\pi}r\sin rdr=-6\pi^2$.

(2) $\iint\limits_D(x+y)dxdy$, D 是 $x^2+y^2\le x+y$ 的内部;

解: $\iint\limits_D(x+y)dxdy=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}d\theta\int_0^{\sin\theta+\cos\theta}r(\sin\theta+\cos\theta)rdr=\frac{1}{3}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}(\sin\theta+\cos\theta)^4d\theta$

$$=\tfrac{4}{3}\int_0^{\pi}\sin^4\theta d\theta=\tfrac{1}{3}\int_0^{\pi}(\tfrac{3}{2}-2\cos2\theta+\tfrac{1}{2}\cos4\theta)d\theta=\frac{\pi}{2}.$$

(3) $\iint\limits_D(x^2+y^2)dxdy$, D 由双曲线 $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)(x\ge 0)$ 围成;

解：$\iint\limits_{D}(x^2+y^2)dxdy=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^{\sqrt{a\cos\theta}}r^3dr=\frac{a^2}{4}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 2\theta d\theta$

$$=\frac{a^2}{8}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}(1+\cos 4\theta)d\theta=\frac{\pi}{16}a^2$$

(4) $\iint\limits_{D}xdxdy$，D 由 Archimedes 螺线 $r=\theta$ 和半射线 $\theta=0,\theta=\frac{\pi}{2}$ 围成；

解：$\iint\limits_{D}xdxdy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\theta}r^2\cos\theta dr=\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\theta^3\cos\theta d\theta$

$$=\frac{1}{3}(\theta^3\sin\theta+3\theta^2\cos\theta-6\theta\sin\theta-6\cos\theta)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\pi(\frac{\pi^2}{24}-1)+2$$

（5）$\iint\limits_{D}xydxdy$，D 由对数螺线 $r=e^{\theta}$ 和半射线 $\theta=0,\theta=\frac{\pi}{2}$ 围成。

解：$\iint\limits_{D}xydxdy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{e^{\theta}}r^3\cos\theta\sin\theta dr=\frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{4\theta}\sin 2\theta d\theta=-\frac{1}{40}(e^{2\pi}+1)$

3.在下列积分中引入新变量 u,v，将它们化为累次积分：

（1）$\int_0^2 dx\int_{1-x}^{2-x}f(x,y)dy$，若 $u=x+y,v=x-y$；

解：$x=\frac{u+v}{2},y=\frac{u-v}{2}$

$$J(u,v)=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{vmatrix}=-\frac{1}{2}\neq 0$$

$$\therefore\int_0^2 dx\int_{1-x}^{2-x}f(x,y)dy=\frac{1}{2}\int_1^2 du\int_{-u}^{4-u}f(\frac{u+v}{2},\frac{u-v}{2})dv.$$

（2）$\int_a^b dx\int_{\alpha x}^{\beta x}f(x,y)dy\quad(0<a<b,0<\alpha<\beta)$，若 $u=x,v=\frac{y}{x}$；

解：在变换 $u=x,v=\frac{y}{x}$ 下，区域 $D=\{a\le x\le b,\alpha x\le y\le\beta x\}$ 变为 $\Delta=\{a\le u\le b,\alpha\le v\le\beta\}$。变换的 Jacobi 行列式为

$$J(u,v)=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}1 & 0\\ v & u\end{vmatrix}=u>0$$

$$\therefore\int_a^b dx\int_{\alpha x}^{\beta x}f(x,y)dy=\int_a^b udu\int_{\alpha}^{\beta}f(u,v)dv$$

(3) $\iint\limits_{D}f(x,y)dxdy$，其中 $D=\{(x,y)\big|\sqrt{x}+\sqrt{y}\le\sqrt{a},x\ge 0,y\ge 0\}$，若 $x=u\cos^4 v,y=u\sin^4 v$;

解：在变换 $x=u\cos^4 v, y=u\sin^4 v$ 下，区域 D 变为 $\Delta=[0,a]\times[0,\frac{\pi}{2}]$.变换的 Jacobi 行列式

$$J(u,v)=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\cos^4 v & -4u\cos^3 v\sin v\\ \sin^4 v & 4u\sin^3 v\cos v\end{vmatrix}=4u\sin^3 v\cos^3 v\neq 0$$

于是 $\iint\limits_D f(x,y)dxdy=4\int_0^a udu\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3 v\sin^3 vf(u\cos^4 v,u\sin^4 v)dv$.

（4）$\iint\limits_D f(x,y)dxdy$，其中 $D=\{(x,y)\big|x+y\le a, x\ge 0, y\ge 0\}(a\succ 0)$，若 $x+y=u, y=uv$

解：在变换 $x+y=u, y=uv$ 下，区域 D 变为 $\Delta=\{0\le u\le a, 0\le v\le 1\}$

$$J(u,v)=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}1-v & -u\\ v & u\end{vmatrix}=u$$ 仅在 $u=0, 0\le v\le 1$ 上等于 0，在其他地方 $J(u,v)\neq 0$.

$$\therefore\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int_0^a udu\int_0^1 f(u(1-v),uv)dv$$

4.作适当的变量代换，求下列积分：

（1）$\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy,\ D$ 是由 $x^4+y^4=1$ 围成的区域；

解：作极坐标变换 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$，并由对称性

$$\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy=8\iint\limits_{D_1}(x^2+y^2)dxdy,$$

其中 $D_1=\{(x,y): x^4+y^4\le 1, 0\le x\le 1, 0\le y\le x\}$，而

$$\iint\limits_{D_1}(x^2+y^2)dxdy=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^{\frac{1}{\sqrt[4]{\cos^4\theta+\sin^4\theta}}}r^3dr=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos^4\theta+\sin^4\theta}d\theta=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sec^4\theta}{1+\tan^4\theta}d\theta$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1+\tan^2\theta}{1+\tan^4\theta}d\tan\theta=\frac{1}{4}\int_0^1\frac{1+t^2}{1+t^4}dt=\frac{1}{4}\int_0^1\frac{1+\frac{1}{t^2}}{t^2+\frac{1}{t^2}}dt=\frac{1}{4}\int_0^1\frac{d(t-\frac{1}{t})}{(t-\frac{1}{t})^2+2}=\frac{1}{4\sqrt{2}}\arctan\frac{t-\frac{1}{t}}{\sqrt{2}}\Big|_0^1=\frac{\pi}{8\sqrt{2}}$$

$$\therefore\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy=\frac{\pi}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi .$$

(2) $\iint\limits_D (x+y)dxdy,\ D$ 由 $y=4x^2, y=9x^2, x=4y^2, x=9y^2$ 围成；

解：画出 D 的图形，根据 D 的特点，作变换 $T^{-1}: u=\frac{y^2}{x}, v=\frac{x^2}{y},$

它把 D 一一的映设为正方形区域 $\Delta=[4,9]\times[4,9]$

由 $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}-\dfrac{y^2}{x^2} & \dfrac{2y}{x} \\ \dfrac{2x}{y} & -\dfrac{x^2}{y^2}\end{vmatrix}=-3$，所以 $J(u,v)=\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=-\dfrac{1}{3}$.

而 $x+y=\sqrt[3]{uv^2}+\sqrt[3]{u^2v}=\sqrt[3]{uv}(\sqrt[3]{v}+\sqrt[3]{u})$.

$$\therefore \iint_D (x+y)dxdy=\frac{1}{3}\int_4^9 du\int_4^9(\sqrt[3]{uv^2}+\sqrt[3]{u^2v})dv$$

$$=\frac{3}{10}(9^3+4^3-108\sqrt[3]{12}-72\sqrt[3]{18})$$
$$=\frac{3}{10}(793-108\sqrt[3]{12}-72\sqrt[3]{18}).$$

（3）$\iint_D xydxdy,\ D$ 由 $xy=2,xy=4,y=x,y=2x$ 围成

解：作变换，$u=xy,v=\dfrac{y}{x}$.则在变换下，D 变为 $[2,4]\times[1,2]$，

由 $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix} y & x \\ -\dfrac{y}{x^2} & \dfrac{1}{x}\end{vmatrix}=2\dfrac{y}{x}=2v$，所以 $J(u,v)=\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\dfrac{1}{2v}$。

$$\therefore \iint_D xydxdy=\int_2^4 du\int_1^2\frac{u}{2v}dv=\int_2^4 udu\int_1^2\frac{1}{2v}dv=3\ln 2.$$

5.利用二重积分求由下列曲面围成的立体的体积：

（1）$z=xy,x^2+y^2=a^2,z=0;$

解：$V=\iint_D xydxdy$， 其中 $D:x^2+y^2\le a^2$，用对称性

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^a r^3\cos\theta\sin\theta dr=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\sin\theta d\theta\int_0^a r^3dr=\frac{1}{2}a^4$$

（2）$z=\dfrac{h}{R}\sqrt{x^2+y^2},z=0,x^2+y^2=R^2;$

解：$V=\iint_D\dfrac{h}{R}\sqrt{x^2+y^2}dxdy,\qquad D:x^2+y^2\le R^2$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^R\frac{h}{R}r^2dr=\frac{2\pi h}{R}\bullet\frac{1}{3}R^3=\frac{2}{3}\pi R^2h.$$

（3）球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 与圆柱面 $x^2+y^2=ax(a>0)$ 的公共部分；

解：$V=2\iint_D\sqrt{a^2-x^2-y^2}dxdy,$ 其中 $D:x^2+y^2=ax$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{a\cos\theta}r\sqrt{a^2-r^2}dr=\frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}a^3(\cos^3\theta-1)d\theta$$

$$=\frac{2}{3}a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\frac{\cos3\theta+3\cos\theta}{4})d\theta=a^3(\frac{\pi}{3}+\frac{4}{9});$$

（4）$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}(z>0);$

解：$V=4\iint\limits_D\left[c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}-c\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}\right]dxdy$ 　其中$D:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le\frac{1}{2}(x\ge0,y\ge0)$

作变换 $x=ar\cos\theta,y=br\sin\theta$， 则 D变为$0\le r\le\frac{\sqrt{2}}{2},0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$

$$J(r,\theta)=\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=\begin{vmatrix}a\cos\theta & -ar\cos\theta\\ b\sin\theta & br\sin\theta\end{vmatrix}=abr$$

$$\therefore V=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}c(\sqrt{1+r^2}-r)abrdr=4abc\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}(\sqrt{1+r^2}-r)rdr$$

$$=2\pi abc\bullet\frac{1}{6}(2-\sqrt{2})=\frac{\pi}{3}(2-\sqrt{2})abc.$$

（5）$z^2=\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9},2z=\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9};$

解：显然 $V=\iint\limits_D\left[\sqrt{\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}}-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\right)\right]dxdy,D:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\le4$

作广义极坐标变换 $x=2r\cos\theta,y=3r\sin\theta$，则$D$变为

$0\le r\le2,0\le\theta\le2\pi$， $J(u,v)=6r$

$$\therefore V=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2(r-\frac{1}{2}r^2)\bullet6rdr=8\pi.$$

（6）$z=x^2+y^2,z=x+y.$

解：$V=\iint\limits_D[(x+y)-(x^2+y^2)]dxdy$， 其中$D:x^2+y^2\le x+y$

即$(x-\frac{1}{2})^2+(y-\frac{1}{2})^2\le\frac{1}{2}$

作广义极坐标变换 $x-\frac{1}{2}=r\cos\theta,y-\frac{1}{2}=r\sin\theta$，则$D$变为$0\le r\le\frac{\sqrt{2}}{2},0\le\theta\le2\pi$

变换的 Jacobi 行列式为：$J(r,\theta)=\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=r$

$$\therefore V=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}(\frac{1}{2}-r^2)rdr=\frac{\pi}{8}.$$

6.求曲线$\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2=\frac{xy}{c^2}$所围的面积.

解：设曲线$\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2=\frac{xy}{c^2}$所围的区域为$D$，则面积$|D|=\iint\limits_D d\sigma=2\iint\limits_{D_1}dxdy$，

其中$D_1:\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2=\frac{xy}{c^2}$在第一象限部分.

作变换$x=ar\cos\theta,y=br\sin\theta$，则$J(r,\theta)=\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=\begin{vmatrix}a\cos\theta & -ar\cos\theta\\ b\sin\theta & br\sin\theta\end{vmatrix}=abr$，

区域D变为$0\le r\le\frac{\sqrt{ab}}{c}\sqrt{\sin\theta\cos\theta},0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$.

$$\therefore |D|=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\frac{\sqrt{ab}}{c}\sqrt{\sin\theta\cos\theta}}abrdr=ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{ab}{c^2}\sin\theta\cos\theta d\theta=\frac{a^2b^2}{2c^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2\theta d\theta=\frac{a^2b^2}{2c^2}.$$

7.用柱坐标变换计算下列三重积分：

（1）$\iiint\limits_V(x^2+y^2)^2dxdydz$，$V$由曲面$z=(x^2+y^2)^2,z=4,z=16$围成.

解：$\iiint\limits_V(x^2+y^2)^2dxdydz,=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_2^4dr\int_4^{16}r^5dz=16128\pi$

（2）$\iiint\limits_V(\sqrt{x^2+y^2})^3dxdydz$，$V$由曲面$x^2+y^2=9,x^2+y^2=16,z^2=x^2+y^2,z\ge0$围成.

解：$\iiint\limits_V(\sqrt{x^2+y^2})^3dxdydz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_3^4dr\int_0^r r^4dz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_3^4r^5dr=1122\frac{1}{3}\pi$.

8.用球坐标变换计算下列三重积分：

（1）$\iiint\limits_V(x+y+z)dxdydz,V:x^2+y^2+z^2\le R^2$;

解：原式$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^R(\rho\cos\theta\sin\varphi+\rho\sin\theta\sin\varphi+\rho\cos\varphi)\rho^2\sin\varphi d\rho$

$$=\frac{R^2}{4}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}(\cos\theta\sin\varphi+\sin\theta\sin\varphi+\cos\varphi)d\varphi$$

$$=\frac{\pi}{8}R^4\int_0^{2\pi}(\cos\theta+\sin\theta)d\theta=\frac{\pi}{8}R^4\bullet0=0$$

（2）$\iiint\limits_V(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^5dxdydz$，$V$由$x^2+y^2+z^2=2z$围成

解：原式$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{2\cos\varphi}\rho^5\rho^2\sin\varphi d\varphi=2^6\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cos^8\varphi d\varphi=\frac{64}{9}\pi$

（3）$\iiint\limits_V x^2dxdydz$，$V$ 由 $x^2+y^2=z^2, x^2+y^2+z^2=8$ 围成.

解：原式$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_0^{2\sqrt{2}}\rho^2\cos^2\theta\sin^2\varphi\cdot\rho^2\sin\varphi d\rho$

$$+\int_0^{2\pi}d\theta\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi}d\varphi\int_0^{2\sqrt{2}}\rho^2\cos^2\theta\sin^2\varphi\cdot\rho^2\sin\varphi d\rho$$

$$=\frac{64}{15}(4\sqrt{2}-5)\pi+\frac{64}{15}(4\sqrt{2}-5)\pi=\frac{128}{15}(4\sqrt{2}-5)\pi$$

9.作适当的变量代换，求下列三重积分：

（1）$\iiint\limits_V x^2y^2zdxdydz$，$V$ 由 $z=\frac{x^2+y^2}{a}, z=\frac{x^2+y^2}{b}, xy=c, xy=d, y=\alpha x, y=\beta x$

围成的立体，其中 $0<a<b, 0<c<d, 0<\alpha<\beta$;

解：　作变换 $u=\frac{x^2+y^2}{z}, v=xy, w=\frac{y}{x}$，则变换把 V 变为

$$\Delta: a\le u\le b, c\le v\le d, \alpha\le w\le\beta.$$

逆变换为 $x=\sqrt{\frac{v}{w}}, y=\sqrt{wv}, z=\frac{v(1+w^2)}{uw}$.

$$\therefore\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}=\begin{vmatrix}\frac{2x}{z} & \frac{2y}{z} & -\frac{x^2+y^2}{z^2}\\ y & x & 0\\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} & 0\end{vmatrix}=-\frac{x^2+y^2}{z^2}\cdot\frac{2y}{x}=-2v(1+w^2)$$

$$\therefore J(u,v,w)=-\frac{1}{2v(1+w^2)}$$

$$\iiint\limits_V x^2y^2zdxdydz=\iiint\limits_\Delta\frac{v^3(1+w^2)}{uw}\cdot\frac{1}{2v(1+w^2)}dudvdw$$

$$=\iiint\limits_\Delta\frac{v^2}{2uw}dudvdw=\frac{1}{2}\int_a^b\frac{du}{u}\cdot\int_c^d v^2dv\cdot\int_\alpha^\beta\frac{dw}{w}=\frac{d^3-c^3}{6}\ln\frac{b}{a}\ln\frac{\beta}{\alpha}.$$

(2) $\iiint\limits_V x^2y^2zdxdydz$，$V$ 同（1）;

解：变换同（1），则

$$\iiint\limits_V x^2y^2zdxdydz=\iiint\limits_\Delta \frac{\sqrt{v^3}}{2u\sqrt{w}}\cdot dudvdw \quad =\frac{1}{2}\int_a^b\frac{1}{u}du\int_c^d\sqrt{v^3}dv\int_\alpha^\beta\frac{1}{\sqrt{w}}dw$$

$$=\frac{2}{5}(d^2\sqrt{d}-c^2\sqrt{c})(\sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha})\ln\frac{b}{a}$$

（3）$\iiint\limits_V y^4dxdydz$，$V$ 由 $x=az^2,x=bz^2(z>0,0<a<b),x=\alpha y,x=\beta y(0<\alpha<\beta),$

以及 $x=h(h>0)$ 围成；

解：作变换：$u=\dfrac{x}{z^2},v=\dfrac{x}{y},w=x,$ 则变换把 V 变为 $\Delta:a\le u\le b,\alpha\le v\le\beta,0\le w\le h$；

变换后 $\dfrac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}=\begin{vmatrix}\dfrac{1}{z^2} & 0 & -\dfrac{2x}{z^3}\\ \dfrac{1}{y} & -\dfrac{x}{y^2} & 0\\ 1 & 0 & 0\end{vmatrix}=-\dfrac{2x^2}{y^2z^3}=-\dfrac{2u^{\frac{3}{2}}v^2}{w^{\frac{3}{2}}}$

$$\therefore J(u,v,w)=-\frac{w^{\frac{3}{2}}}{2u^{\frac{3}{2}}v^2}$$

逆变换为 $x=w,y=\dfrac{w}{v},z=\sqrt{\dfrac{w}{u}}$

$$\iiint\limits_V y^4dxdydz=\iiint\limits_\Delta\frac{w^4}{v^4}\cdot\frac{w^{\frac{3}{2}}}{2u^{\frac{3}{2}}v^2}dudvdw$$

$$=\frac{1}{2}\int_a^b u^{-\frac{3}{2}}du\int_\alpha^\beta v^{-6}dv\int_0^h w^{\frac{11}{2}}dw$$

$$=\frac{2h^6}{65}\sqrt{h}(\frac{1}{\sqrt{a}}-\frac{1}{\sqrt{b}})(\frac{1}{\alpha^5}-\frac{1}{\beta^5})$$

（4）$\iiint\limits_V e^{\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}}}dxdydz$，$V$ 由 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 围成；

解：作广义球坐标变换 $x=ar\cos\theta\sin\varphi,y=br\sin\theta\sin\varphi,z=cr\cos\varphi$，在变换下，曲面方程化为 $r=1$，则 V 变为：$\Delta=\{(r,\theta,\varphi)\,|\,0\le\theta\le 2\pi,0\le\varphi\le\pi,0\le r\le 1\}$

而 $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)}=-abcr^2\sin\varphi$

$$\therefore \iiint_V e^{\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}}} dxdydz = \iiint_\Delta e^r abcr^2 \sin\varphi drd\theta d\varphi$$

$$= abc\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin\varphi d\varphi \int_0^1 r^2 e^r dr = abc \cdot 2\pi \cdot 2(e-2)$$

$$= 4\pi(e-2)abc$$

（5） $\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} z^2 dz = \iiint_V z^2 dxdydz$ ，其中 V 由曲面 $x^2+y^2+z^2=2$ 及 $x^2+y^2=z^2(z\ge 0)$ 围成.

解：作柱坐标变换，得

$$\iiint_V z^2 dxdydz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 rdr \int_r^{\sqrt{2-r^2}} z^2 dz$$

$$= 2\pi\int_0^1 \frac{1}{3}[(2-r^2)^{\frac{3}{2}} - r^3]dr = \frac{\pi^2}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}(\pi+2)$$

10．求下列各曲面所围立体之体积：

（1） $z = x^2+y^2, z = 2(x^2+y^2), y = x, y = x^2;$

解：$V = \iint_D (2(x^2+y^2)-(x^2+y^2))dxdy,$ 其中 $D: y = x$ 与 $y = x^2$ 所交的平面区域.

$$\therefore V = \iint_D (x^2+y^2)dxdy$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}} r^3 dr = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^4\theta}{\cos^8\theta} d\theta$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^4\theta(1+\tan^2\theta)d\tan\theta = \frac{3}{35}$$

（2） $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1(x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0, a>0, b>0, c>0).$

解：$V = \iint_D c\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^2} dxdy,$ 其中 $D: \frac{x}{a}+\frac{y}{b}\le 1, x\ge 0, y\ge 0$.

令 $x = ar\cos^2\varphi, y = br\sin^2\varphi,$ 则 $J(r,\varphi) = abr\sin 2\varphi$

$$\therefore V = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 abc\sin 2\varphi\sqrt{1-r^2} dr$$

$$= abc\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\varphi \int_0^1 r\sqrt{1-r^2} dr = \frac{1}{3}abc .$$

§4 曲面面积

1. 求下列曲面的面积：

（1）$z=axy$ 包含在圆柱 $x^2+y^2=a^2$ 内的部分；

解：$S=\iint\limits_D\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy=\iint\limits_D\sqrt{1+a^2(x^2+y^2)}dxdy, D:x^2+y^2\le a^2$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a\sqrt{1+a^2r^2}\cdot rdr=\frac{2\pi}{3a}\left(1+a^4\right)^{\frac{3}{2}}$$

（2）锥面 $x^2+y^2=\frac{1}{3}z^2$ 与平面 $x+y+z=2a(a>0)$ 所界部分的表面；

解： 锥面与平面的交线在 Oxy 平面上的射影为：

$3(x^2+y^2)=(2a-x-y)^2$，即 $x^2+y^2-xy+2a(x+y)=2a^2$

作转轴变换 $x=\frac{x'-y'}{\sqrt{2}}, y=\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}$，则射影方程变为 $\frac{\left(x'+\frac{4a}{\sqrt{2}}\right)^2}{12a^2}+\frac{y'^2}{4a^2}=1$

这是以 $2\sqrt{3}a, 2a$ 为两个半轴的椭圆，因而其面积为 $\pi\cdot(2\sqrt{3}a)(2a)=4\sqrt{3}\pi a^2$。锥面与平面所截部分的表面由截面和截出的锥面两部分组成.对于 $z=2a-x-y, z=\sqrt{3(x^2+y^2)}$，分别有：

$$\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}=\sqrt{3} \qquad 与 \quad \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}=2$$

于是，物体的表面积 $S=\iint\limits_D\sqrt{3}dxdy+\iint\limits_D 2dxdy$，$D$：曲线 $x^2+y^2-xy+2a(x+y)=2a^2$ 所围平面区域，即椭圆域.

$$\therefore S=\iint\limits_D(2+\sqrt{3})dxdy=(2+\sqrt{3})\left|D\right|=(2+\sqrt{3})\cdot4\sqrt{3}\pi a^2=4\pi(3+2\sqrt{3})a^2.$$

（3）锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $z^2=2x$ 所截部分；

解：锥面与柱面交线在 Oxy 平面上的射影为 $x^2+y^2=2x$，故由

$$z_x=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},z_y=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\Rightarrow\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}=\sqrt{2}$$

$$S=\iint_D\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy=\iint_D\sqrt{2}dxdy,\quad (D:x^2+y^2\le 2x)$$

$$=\sqrt{2}\left|D\right|=\sqrt{2}\pi\ .$$

(4)曲面$z=\sqrt{2xy}$被平面$x+y=1,x=1$及$y=1$所截下的部分.

解：$z_x=\frac{y}{\sqrt{2xy}},z_y=\frac{x}{\sqrt{2xy}},\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}=\sqrt{1+\frac{x^2+y^2}{2xy}}=\frac{x+y}{\sqrt{2xy}}$

$\therefore S=\iint_D\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy=\iint_D\frac{x+y}{\sqrt{2xy}}dxdy,\quad D$:由$x+y=1,x=1$及$y=1$三条平面直线围成的区域.

因此 $S=\int_0^1dx\int_{1-x}^1\frac{x+y}{\sqrt{2xy}}dy=\frac{\sqrt{2}}{8}(16-5\pi)$

2．求螺旋面$x=r\cos\varphi,y=r\sin\varphi,z=h\varphi(0<r<a,0<\varphi<2\pi)$的面积。

解：$\frac{\partial x}{\partial r}=\cos\varphi,\frac{\partial x}{\partial\varphi}=-r\sin\varphi,\frac{\partial y}{\partial r}=\sin\varphi,\frac{\partial y}{\partial\varphi}=r\cos\varphi,\frac{\partial z}{\partial r}=0,\frac{\partial z}{\partial\varphi}=h$

$\therefore E=\left|r_u\right|^2=\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2=1$，$G=\left|r_v\right|^2=\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)^2=r^2+h^2$，

$$F=(r_u\cdot r_v)=\frac{\partial x}{\partial r}\cdot\frac{\partial x}{\partial\varphi}+\frac{\partial y}{\partial r}\cdot\frac{\partial y}{\partial\varphi}+\frac{\partial z}{\partial r}\cdot\frac{\partial z}{\partial\varphi}=0$$

$$S=\iint_D\sqrt{EG-F^2}drd\varphi=\iint_D\sqrt{r^2+h^2}drd\varphi$$

$$=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^a\sqrt{r^2+h^2}dr=\pi\left(a\sqrt{r^2+h^2}+h^2\ln\left(a+\sqrt{a^2+h^2}\right)-h^2\ln h\right)$$

3．求环面$x=\left(b+a\cos\psi\right)\cos\varphi,y=\left(b+a\cos\psi\right)\sin\varphi,z=a\sin\psi(0<a\le b)$被两条经线$\varphi=\varphi_1,\varphi=\varphi_2$,和两条纬线$\psi=\psi_1,\psi=\psi_2$所围成部分的面积，并求出整个环面的面积.

解：$\frac{\partial x}{\partial\varphi}=-(b+a\cos\psi)\sin\varphi,\quad\frac{\partial x}{\partial\psi}=-a\sin\psi\cos\varphi,\quad\frac{\partial y}{\partial\varphi}=(b+a\cos\psi)\cos\varphi,$

$\frac{\partial y}{\partial\psi}=-a\sin\psi\sin\varphi,\quad\frac{\partial z}{\partial\varphi}=0,\quad\frac{\partial y}{\partial\psi}=a\cos\psi$

$$\therefore E=\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)^2=(b+a\cos\psi)^2, G=\left(\frac{\partial x}{\partial\psi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\psi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\psi}\right)^2=a^2,$$

$$F=\frac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial x}{\partial\psi}+\frac{\partial y}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial y}{\partial\psi}+\frac{\partial z}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial z}{\partial\psi}=0$$

$$\therefore\sqrt{EG-F^2}=a(b+a\cos\psi)$$

于是 $S=\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}d\varphi\int_{\psi_1}^{\psi_2}a(b+a\cos\psi)d\psi=a(\varphi_2-\varphi_1)[b(\psi_2-\psi_1)+a(\sin\psi_2-\sin\psi_1)]$

整个环面的面积为$\int_0^{2\pi}d\varphi\int_{-\pi}^{\pi}a(b+a\cos\psi)d\psi=4\pi^2ab$.

§5 重积分的物理应用

1．求下列均匀密度的平面薄板的质心.

（1）求椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1, y\ge 0$；

解：由对称性，质心为$(0,\overline{y})$，设密度为ρ（＝常数）

而$\iint\limits_D\rho dxdy=\rho\left|D\right|=\rho.\frac{\pi}{2}ab=\frac{\pi}{2}\rho ab$

$$\iint\limits_D y\rho dxdy=\rho\int_0^{\pi}d\theta\int_0^1 br\sin\theta\bullet abrdr=\frac{2}{3}ab^2\rho$$

$\therefore\overline{y}=\dfrac{\frac{2}{3}ab^2\rho}{\frac{\pi}{2}ab\rho}=\dfrac{4}{3\pi}$ 即质心$(0,\frac{4}{3\pi})$；

（2）高为 h，底分别为 a 和 b 的等腰梯形；

解：以两底重点直线为 y 轴正向，以其中一底中点为原点，该底边为 x 轴建立直角坐标系，由对称性，质心为$(0,\overline{y})$

而$\iint\limits_D\rho dxdy=\frac{1}{2}\rho h(a+b)$

$$\iint\limits_D y\rho dxdy=\rho\int_0^h ydy\int_{\frac{a-b}{2h}y-\frac{a}{2}}^{\frac{b-a}{2h}y+\frac{a}{2}}xdx=\frac{a+2b}{b}h^2\rho$$

$$\therefore \bar{y} = \frac{\frac{a+2b}{b}h^2\rho}{\frac{1}{2}(a+b)h\rho} = \frac{a+2b}{3(a+b)}h$$

（3）$r = a(1+\cos\varphi)(0 \le \varphi \le \pi)$ 所界的薄板.

解：由对称性，质心为 $(\bar{x}, 0)$

$$\iint_D \rho dxdy = 2\rho\int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{a(1+\cos\varphi)} r d\varphi = \frac{3}{2}\pi a^2 \rho$$

$$\iint_D x\rho dxdy = 2\rho\int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{a(1+\cos\varphi)} r^2 \cos\varphi d\varphi = \frac{5}{4}\pi a^3 \rho$$

$$\therefore \bar{x} = \frac{\frac{5}{4}\pi a^3 b}{\frac{3}{2}\pi a^2 b} = \frac{5}{6}a$$ 即质心为 $(\frac{5}{6}a, 0)$

（4）$ay = x^2, x+y = 2a(a>0)$ 所界的薄板。

解：设质心坐标为 $(\bar{x}, \bar{y})$ ，则由

$$\begin{cases} ay = x^2 \\ x+y = 2a \end{cases}$$ 解出交点 (a, a)，$(-2a, 4a)$

而 $$\iint_D \rho dxdy = \rho\int_{-2a}^{a} dx \int_{x^2/a}^{2a-x} dy = \frac{9}{2}a^2\rho$$

$$\iint_D \rho x dxdy = \rho\int_{-2a}^{a} x dx \int_{x^2/a}^{2a-x} dy = -\frac{9}{4}a^3\rho$$

$$\iint_D \rho y dxdy = \rho\int_{-2a}^{a} dx \int_{x^2/a}^{2a-x} y dy = \frac{36}{5}a^3\rho$$

$$\therefore \bar{x} = \frac{-\frac{9}{4}a^3\rho}{\frac{9}{2}a^2\rho} = -\frac{1}{2}a \qquad \bar{y} = \frac{\frac{36}{5}a^3\rho}{\frac{9}{2}a^2\rho} = \frac{8}{5}a$$

即质心为 $(-\frac{a}{2}, \frac{8}{5}a)$.

2．求下列密度均匀物体的质心，（设体密度为 ρ ）

（1）$z \le 1 - x^2 - y^2, z \ge 0$；

解：由对称性，质心坐标为 $(0, 0, \bar{z})$，

而 $\iiint\limits_V \rho dxdydz = \rho|V| = \frac{2}{3}\pi\rho$

$$\iiint\limits_V \rho z dxdydz = \rho\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\int_0^1 r\cos\varphi \bullet r^2\sin\varphi dr = \frac{1}{4}\pi\rho$$

$$\bar{z} = \frac{\frac{1}{4}\pi\rho}{\frac{2}{3}\pi\rho} = \frac{3}{8}$$

即质心坐标为 $(0,0,\frac{3}{8})$.

（2）由坐标系平面与 $x+2y-z=1$ 所围的四面体；

解： $\iiint\limits_V \rho dxdydz = \rho|V| = \frac{1}{12}\rho$

$$\iiint\limits_V \rho x dxdydz = \rho\int_0^1 xdx\int_0^{\frac{1-x}{2}} dy\int_{x+2y-z}^0 dz = \frac{1}{48}\rho$$

$$\iiint\limits_V \rho y dxdydz = \rho\int_0^1 dx\int_0^{\frac{1-x}{2}} ydy\int_{x+2y-z}^0 dz = \frac{1}{96}\rho$$

$$\iiint\limits_V \rho z dxdydz = \rho\int_0^1 dx\int_0^{\frac{1-x}{2}} dy\int_{x+2y-z}^0 zdz = -\frac{1}{48}\rho$$

$$\therefore \bar{x} = \frac{\frac{1}{48}\rho}{\frac{1}{12}\rho} = \frac{1}{4}, \quad \bar{y} = \frac{\frac{1}{96}\rho}{\frac{1}{12}\rho} = \frac{1}{8}, \quad \bar{z} = \frac{-\frac{1}{48}\rho}{\frac{1}{12}\rho} = -\frac{1}{4}$$

即质心坐标为 $(\frac{1}{4},\frac{1}{8},-\frac{1}{4})$.

（3）$z^2 = x^2+y^2$，$x+y=a$，$x=0, y=0, z=0$ 围成的立体；

解： $\iiint\limits_V \rho dxdydz = \rho\int_0^a dx\int_0^{a-x} dy\int_0^{x^2+y^2} dz = \frac{1}{6}a^4\rho$

$$\iiint\limits_V \rho x dxdydz = \rho\int_0^a xdx\int_0^{a-x} dy\int_0^{x^2+y^2} dz = \frac{1}{15}a^5\rho$$

$$\iiint\limits_V \rho y dxdydz = \rho\int_0^a dx\int_0^{a-x} ydy\int_0^{x^2+y^2} dz = \frac{1}{15}a^5\rho$$

$$\iiint\limits_V \rho z dxdydz = \rho\int_0^a dx\int_0^{a-x} dy\int_0^{x^2+y^2} zdz = \frac{7}{90}a^6\rho$$

$$\therefore \bar{x}=\frac{\frac{1}{15}a^5\rho}{\frac{1}{6}a^4\rho}=\frac{2}{5}a,\quad \bar{y}=\frac{\frac{1}{15}a^5\rho}{\frac{1}{6}a^4\rho}=\frac{2}{5}a,\quad \bar{z}=\frac{\frac{7}{90}a^6\rho}{\frac{1}{6}a^4\rho}=\frac{7}{15}a^2$$

所以质心坐标为$(\frac{2}{5}a,\frac{2}{5}a,\frac{7}{15}a)$.

（4）$z^2=x^2+y^2(z\ge 0)$ 和平面 $z=h$ 围成的立体；

解：由对称性：$\bar{x}=\bar{y}=0$

$$\iiint_V \rho dxdydz=\rho|V|=\frac{1}{3}\pi h^3\rho$$

$$\iiint_V \rho zdxdydz=\rho\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^h rdr\int_r^h zdz=\frac{1}{4}\pi h^3\rho$$

$$\therefore \bar{z}=\frac{\frac{1}{4}\pi h^4\rho}{\frac{1}{3}\pi h^3\rho}=\frac{3}{4}h$$

质心坐标为$(0,0,\frac{3}{4}h)$.

（5）半球壳$a^2\le x^2+y^2+z^2\le b^2, z\ge 0$

解： 由对称性：$\bar{x}=\bar{y}=0$

$$\iiint_V \rho dxdydz=\rho|V|=\frac{2}{3}\pi(b^3-a^3)\rho$$

$$\iiint_V \rho zdxdydz=\rho\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cos\varphi d\varphi\int_a^b r^3dr=\frac{1}{2}\pi(b^4-a^4)\rho$$

$$\therefore z=\frac{3}{4}\frac{(b^4-a^4)}{(b^3-a^3)}$$

质心坐标为$\left(0,0,\dfrac{3(b^4-a^4)}{4(b^3-a^3)}\right)$.

3．求下列密度均匀的平面薄板的转动惯量

（1）边长为 a 和 b，且夹角为φ得平行四边形，关于底边 b 得转动惯量；

解：以一个顶点为坐标原点，底边b为x轴建立坐标系，设密度为常数ρ，则要求得就是该平行四边形薄板对x轴的转动惯量I_x.

任给面积微元$d\sigma$，台灯x轴的转动惯量为$dI_x=\rho y^2 d\sigma$

因此D对$y=0$的转动惯量为$I_x=\iint\limits_D \rho y^2 d\sigma=\rho\int_0^{a\sin\varphi} y^2 dy\int_{\cot\varphi\cdot y}^{\cot\varphi\cdot y+b} dx=\frac{1}{3}a^3 b\rho\sin^3\varphi$

(2) $y=x^2, y=1$所围平面图形关于直线$y=-1$的转动惯量.

解：任给面积微元$d\sigma$,它对$y=-1$的转动惯量为$dI=\rho(y+1)^2 d\sigma$

因此平面图形D关于$y=-1$的转动惯量为

$$I=\iint\limits_D \rho(y+1)^2 d\sigma=\rho\int_0^1 (y+1)^2 dy\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} dx=\frac{368}{105}\rho.$$

4.求由下列曲面所界均匀体的转动惯量;

(1) $z=x^2+y^2, x+y=\pm 1, x-y=\pm 1, z=0$关于$z$轴的转动惯量;

解： $$I_z=\iiint\limits_V \rho(x^2+y^2)dxdydz=\rho\left(\int_{-1}^{0} dx\int_{-(1+x)}^{1+x} dy\int_0^{x^2+y^2}\left(x^2+y^2\right)dz+\int_0^1 dx\int_{-(1-x)}^{1-x} dy\int_0^{x^2+y^2}\left(x^2+y^2\right)dz\right)$$

$$=\frac{14}{45}\rho.$$

(2) 长方体关于它的一棱的转动惯量;

解：以长方体的一顶点为坐标原点, 三条相邻坐标轴建立直角坐标系, 把长方体放置在第一卦限, 设三条棱长a,b,c. 则关于长为a的棱的转动惯量(x轴)为

$$I_x=\iiint\limits_V \rho(y^2+z^2)dxdydz=\rho\int_0^c dz\int_0^b (y^2+z^2)dy\int_0^a dx$$

$$=\frac{1}{3}abc(b^2+c^2)\rho.$$

(3) 圆筒$a^2\le x^2+y^2\le b^2$， $-h\le y\le h$关于x轴和z轴的转动惯量。

解： $$I_x=\iiint\limits_V \rho(y^2+z^2)dxdydz=\rho\int_0^{2\pi} d\theta\int_a^b rdr\int_{-h}^{h}(r^2\sin^2\theta+z^2)dz$$

$$=\frac{\pi}{6}(b^2-a^2)h\left[3(b^2+a^2)+4h^2\right]\rho$$

$$I_z=\iiint\limits_V \rho(x^2+y^2)dxdydz=\rho\int_0^{2\pi} d\theta\int_a^b r^3 dr\int_{-h}^{h} dz$$

$$=\pi h(b^4-a^4)\rho$$

5. 设球体$x^2+y^2+z^2\le 2x$上各点的密度等于该点到坐标原点的距离，求这球的质量。

解： $m=\iiint\limits_V \rho(x,y,z)dxdydz$， V: $x^2+y^2+z^2\le 2x$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{2cos\theta\sin\varphi}\rho^3 sin\varphi d\rho \qquad （\rho(\mathrm{x},y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}）$$

$$=\frac{7}{5}\pi$$

6. 求均匀薄片 $\mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2\le\mathrm{R}^2,\mathrm{z}=0$ 对 z 轴上一点 $(0,0,\mathrm{c})$ $(\mathrm{c}>0)$ 处单位质点的引力。

解：由对称性，$F_x=F_y=0$

$$F_z=\iint\limits_D k\frac{\rho c}{\left(x^2+y^2+c^2\right)^{\frac{3}{2}}}dxdy$$

$$=k\rho c\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^k\frac{rdr}{\left(r^2+a^2\right)^{3/2}}$$

$$=2\pi kc\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{\sqrt{R^2+c^2}}\right)\rho$$

其中 ρ 为均匀薄片的密度，因此引力大小为 $2\pi kc\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{\sqrt{R^2+c^2}}\right)\rho$，方向向下。（k 为引力常数）

7．求均匀柱体 $x^2+y^2\le a^2,0\le z\le h$ 对于 $(0,0,c)$ $(c>h)$ 处单位质点的引力。

解：由对称性，$F_x=F_y=0$

$F_z=\iiint\limits_V k\frac{-z+c}{r^3}\rho dxdydz$，$\rho$ 为密度，$r=\sqrt{x^2+y^2+(z-c)^2}$，做极坐标变换，有

$$F_z=k\rho\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a\alpha d\alpha\int_0^h\frac{-z+c}{\left(\sqrt{\alpha^2+(z-c)^2}\right)^3}dz$$

$$=2\pi k\left(\sqrt{a^2+(c-h)^2}+h-\sqrt{a^2+c^2}\right)\rho$$

因此引力大小为 $2\pi k\left(\sqrt{a^2+(c-h)^2}+h-\sqrt{a^2+c^2}\right)\rho$，方向向下。