第二十一章　曲线积分与曲面积分

§1 第一型曲线积分与曲面积分

1. 对照定积分的基本性质写出第一型曲线积分和第一型曲面积分的类似性质。

解：第一型曲线积分的性质:

1°（线性性）设$\int_L f(x,y,z)ds$，$\int_L g(x,y,z)ds$存在，k_1,k_2是实常数，则

$\int_L [k_1 f(x,y,z)+k_2 g(x,y,z)]ds$存在，且

$$\int_L [k_1 f(x,y,z)+k_2 g(x,y,z)]ds = k_1\int_L f(x,y,z)ds + k_2\int_L g(x,y,z)ds;$$

2° $\int_L 1ds = l$,其中l为曲线 L 的长度;

3° (可加性)设L由L_1与L_2衔接而成，且L_1与L_2只有一个公共点，则$\int_L f(x,y,z)ds$存在

$\Leftrightarrow$ $\int_{L_1} f(x,y,z)ds$与$\int_{L_2} f(x,y,z)ds$均存在，且

$$\int_L f(x,y,z)ds = \int_{L_1} f(x,y,z)ds + \int_{L_2} f(x,y,z)ds;$$

4° (单调性)若$\int_L f(x,y,z)ds$与$\int_L g(x,y,z)ds$均存在，且在L上的每一点p都有$f(p)\le g(p)$,则$\int_L f(p)ds \le \int_L g(p)ds$;

5° 若$\int_L f(p)ds$存在，则$\int_L |f(p)|ds$亦存在，且

$$\left|\int_L f(p)ds\right| \le \int_L |f(p)|ds$$

6° （中值定理）设L是光滑曲线，$f(p)$在L上连续，则存在$p_0\in L$，使得

$$\int_L f(p)ds = f(p_0)l,\quad l\text{是}L\text{的长度};$$

第一型曲面积分的性质:

设S是光滑曲面，$\iint\limits_S f(p)ds$，$\iint\limits_S g(p)ds$均存在，则有

1°（线性性）设k_1,k_2是实常数，则$\iint\limits_S [k_1 f(p)+k_2 g(p)]ds$存在, 且

$$\iint\limits_S [k_1 f(p)+k_2 g(p)]ds = k_1\iint\limits_S f(p)ds + k_2\iint\limits_S g(p)ds;$$

2° $\int_S 1ds = s$, 其中s为S的面积;

3° (可加性)若S由S_1,S_2组成$S=S_1\cup S_2$，且S_1,S_2除边界外不相交，则$\iint\limits_S f(p)ds$存在

$\Leftrightarrow$ $\iint\limits_{S_1} f(p)ds$与$\iint\limits_{S_2} f(p)ds$均存在，且

$$\iint_S f(p)ds = \iint_{S_1} f(p)ds + \iint_{S_2} f(p)ds$$

4° (单调性)若在 S 上的的每一点 p 均有 $f(p) \le g(p)$, 则

$$\iint_S f(p)ds \le \iint_S g(p)ds;$$

5° $\iint_S |f(p)|ds$ 也存在，且 $\left|\iint_S f(p)ds\right| \le \iint_S |f(p)|ds$;

6° （中值定理）若 $f(p)$ 在 S 上连续，则存在 $p_0 \in S$,使得

$\iint_S f(p)ds = f(p_0)s$ ，其中 s 为 S 的面积。

2. 计算下列第一型曲线积分

(1) $\int_L (x^2 + y^2)ds$,其中 L 是以 $(0,0),(2,0),(0,1)$ 为顶点的三角形;

解： $L = L_1 + L_2 + L_3$

$L_1 : x = 0,\ \ 0 \le y \le 1$

$L_2 : y = 0,\ \ 0 \le x \le 2$

$L_3 : y = 1 - \dfrac{x}{2},\ \ 0 \le x \le 2$

所以 $\int_L (x^2 + y^2)ds = \int_{L_1} (x^2 + y^2)ds \int_{L_2} (x^2 + y^2)ds \int_{L_3} (x^2 + y^2)ds$

$$= \int_0^1 y^2 dy + \int_0^2 x^2 dx + \int_0^2 \left[x^2 + \left(1 - \frac{x}{2}\right)^2\right] \cdot \frac{\sqrt{5}}{2} dx$$

$$= 3 + \frac{5\sqrt{5}}{3}$$

(2) $\int_L \sqrt{x^2 + y^2}\, ds$,其中 L 是圆周 $x^2 + y^2 = ax$；$(a > 0)$

解：L 的参数方程为: $x = \dfrac{a}{2} + \dfrac{a}{2}\cos\theta; y = \dfrac{a}{2}\sin\theta,\ \ 0 \le \theta \le 2\pi$

则 $x' = -\dfrac{a}{2}\sin\theta, y' = \dfrac{a}{2}\cos\theta,\ \ ds = \sqrt{x'^2 + y'^2}\, d\theta = \dfrac{a}{2} d\theta$

所以 $\int_L \sqrt{x^2 + y^2}\, ds = \dfrac{a}{2}\int_0^{2\pi} \sqrt{\left[\dfrac{a}{2}(1 + \cos\theta)\right]^2 + \left(\dfrac{a}{2}\sin\theta\right)^2}\, d\theta = \dfrac{a^2}{2}\int_0^{2\pi} \left|\cos\dfrac{\theta}{2}\right| d\theta$

$$= \frac{a^2}{2}\left(\int_0^{\pi} \cos\frac{\theta}{2} d\theta - \int_{\pi}^{2\pi} \cos\frac{\theta}{2} d\theta\right) = 2a^2$$

(3) $\int_L xyzds$,其中 L 为螺线 $x = a\cos t, y = a\sin t, z = bt(0 \le a \le b)$，$0 \le t \le 2\pi$；

解： $x'=-a\sin t, y'=a\cos t, z'=b$

$$ds=\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}dt=\sqrt{a^2+b^2}dt$$

所以 $\int_L xyzds=\int_0^{2\pi} a^2bt\cos t\sin t\cdot\sqrt{a^2+b^2}dt$

$$=a^2b\sqrt{a^2+b^2}\int_0^{2\pi} t\cos t\sin tdt=\frac{a^2b\sqrt{a^2+b^2}}{2}\int_0^{2\pi} t\sin 2tdt$$

$$=-\frac{\pi}{2}a^2b\sqrt{a^2+b^2}$$

(4) $\int_L (x^2+y^2+z^2)ds$,其中 L 与(3)相同;

解： $\int_L (x^2+y^2+z^2)ds=\sqrt{a^2+b^2}\int_0^{2\pi}\left(a^2+b^2t^2\right)dt=\sqrt{a^2+b^2}\left(2\pi a^2+\frac{8\pi^3}{3}b^2\right)$

(5) $\int_L (x^{\frac{4}{3}}+y^{\frac{4}{3}})ds$,其中 L 为摆线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$;

解：L_1 的参数方程为: $x=a\cos^3 t, y=a\sin^3 t,\qquad 0\le t\le\frac{\pi}{2}$

则 $x'=-3a\cos^2 t\sin t, y'=3a\sin^2 t\cos t$

$ds=\sqrt{x'^2+y'^2}dt=3a\sin t\cos tdt$，由对称性

所以 $\int_L (x^{\frac{4}{3}}+y^{\frac{4}{3}})ds=4\int_{L_1}(x^{\frac{4}{3}}+y^{\frac{4}{3}})ds$

$$=3a^{\frac{7}{3}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos^2 2t)\sin 2tdt=4a^{\frac{7}{3}}.$$

(6) $\int_L y^2ds$,其中 L 为摆线的一拱, $x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t), 0\le t\le 2\pi$;

解： $x'=a(1-\cos t), y'=a\sin t, ds=2a\sin\frac{t}{2}dt$

所以 $\int_L y^2ds=2a^3\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^2\sin\frac{t}{2}dt=\frac{256}{15}a^3$

(7) $\int_L xyds$,其中 L 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 与平面 $x+y+z=0$ 的交线;

解： 注意到 L 关于 x,y,z 的对称性，有

$$\int_L xyds=\int_L yzds=\int_L zxds$$

所以 $\int_L xyds=\frac{1}{3}\int_L (xy+yz+zx)ds=\frac{1}{6}\int_L\left[(x+y+z)^2-(x^2+y^2+z^2)\right]ds$

$$=-\frac{1}{6}\int_L (x^2+y^2+z^2)ds=-\frac{a^2}{6}\int_L ds=-\frac{1}{3}\pi a^3$$

(8) $\int_L (xy+yz+zx)ds$,其中 L 同(7);

解：$\int_L (xy+yz+zx)ds = \frac{1}{2}\int_L \left[(x+y+z)^2 - (x^2+y^2+z^2)\right]ds$

$$= -\frac{a^2}{2}\int_L ds = -\pi a^3$$

(9) $\int_L xyzds$,其中 L 是曲线 $x=t, y=\frac{2}{3}\sqrt{2t^3}, z=\frac{1}{2}t^2 (0\le t\le 1)$；

解： $x'=1, y'=\sqrt{2}t^{\frac{1}{2}}, z'=t$

所以 $ds=\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}dt=\sqrt{1+2t+t^2}dt=(1+t)dt$

$$\int_L xyzds = \int_0^1 t\cdot\frac{2}{3}\sqrt{2}t^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{1}{2}t^2\cdot(1+t)dt = \frac{16\sqrt{2}}{143}$$

(10) $\int_L \sqrt{2y^2+z^2}ds$,其中 L 是 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 与 $x=y$ 相交的圆周;

解：L 的参数方程是 $\begin{cases} x=y \\ z=\pm\sqrt{a^2-2y^2} \end{cases}$， $-\frac{\sqrt{2}}{2}a\le y\le\frac{\sqrt{2}}{2}a$

$$ds=\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}dy=\frac{\sqrt{2}a}{\sqrt{a^2-2y^2}}dy,\quad 2y^2+z^2=a^2$$

所以 $\int_L \sqrt{2y^2+z^2}ds = 2a^2\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}a}\frac{dy}{\sqrt{\frac{a^2}{2}-y^2}} \underset{y=\frac{\sqrt{2}}{2}a\sin\theta}{=} 2a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta$ （令 $y=\frac{\sqrt{2}}{2}a\sin\theta$）

$$=\pi a^2$$

3. 计算下列第一型曲面积分:

(1) $\iint_S (x^2+y^2)ds$，其中 S 是立体 $\sqrt{x^2+y^2}\le z\le 1$ 的边界曲面;

解：$\iint_S (x^2+y^2)ds = \iint_{S_1}(x^2+y^2)ds + \iint_{S_2}(x^2+y^2)ds$

其中 S_1 是锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}, x^2+y^2\le 1$，而 S_2 是平面 $z=1, x^2+y^2\le 1$.

所以 S_1 与 S_2 在 xoy 面上的投影区域均为 $D: x^2+y^2\le 1$.

对 $\iint_{S_1}(x^2+y^2)ds$， $\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}=\sqrt{2}$

对 $\iint_{S_2}(x^2+y^2)ds$， $\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}=1$

所以$\iint\limits_{S_1}(x^2+y^2)ds=\iint\limits_{D}(x^2+y^2)\sqrt{2}dxdy=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r^3dr=\frac{\pi}{\sqrt{2}}$

$$\iint\limits_{S_2}(x^2+y^2)ds=\iint\limits_{D}(x^2+y^2)dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r^3dr=\frac{\pi}{2}$$

所以 $\iint\limits_{S}(x^2+y^2)ds=\frac{\pi}{2}(1+\sqrt{2})$

(2) $\iint\limits_{S}\frac{ds}{x^2+y^2}$,其中$S$为柱面$x^2+y^2=R^2$被平面$z=0$和$z=H$所截取的部分;

解：前半柱面S_1的方程为$x=\sqrt{R^2-y^2}$，$-R\le y\le R,\ \ 0\le z\le H$

所以$x'_y=-\frac{y}{\sqrt{R^2-y^2}}$，$x'_z=0,\ \ \sqrt{1+{x'_y}^2+{x'_z}^2}=\frac{R}{\sqrt{R^2-y^2}}$

后半柱面S_2的方程为$x=-\sqrt{R^2-y^2}$，$-R\le y\le R,\ \ 0\le z\le H$

所以$x'_y=\frac{y}{\sqrt{R^2-y^2}}$，$x'_z=0,\ \ \sqrt{1+{x'_y}^2+{x'_z}^2}=\frac{R}{\sqrt{R^2-y^2}}$

$$\iint\limits_{S}\frac{ds}{x^2+y^2}=\iint\limits_{S_1}\frac{ds}{x^2+y^2}+\iint\limits_{S_2}\frac{ds}{x^2+y^2}$$

$$=\iint\limits_{D_{yz}}\frac{1}{R^2}\cdot\frac{Rdydz}{\sqrt{R^2-y^2}}+\iint\limits_{D_{yz}}\frac{1}{R^2}\cdot\frac{Rdydz}{\sqrt{R^2-y^2}}\quad=\frac{2}{R}\cdot\pi H=2\pi\frac{H}{R}$$

(3) $\iint\limits_{S}\left|x^3y^2z\right|ds$,其中$S$是曲面$z=x^2+y^2$被平面$z=1$割下部分;

解：$\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}=\sqrt{1+4(x^2+y^2)},\qquad D_{xy}:x^2+y^2\le 1$

所以$\iint\limits_{S}\left|x^3y^2z\right|ds=\iint\limits_{D}\left|x^3y^2(x^2+y^2)\right|\cdot\sqrt{1+4(x^2+y^2)}dxdy$

$$=\int_0^{2\pi}\left|\cos^3\theta\sin^2\theta\right|d\theta\int_0^1 r^8\sqrt{1+4r^2}dr$$
$$=\frac{8}{15}\int_0^1 r^8\sqrt{1+4r^2}dr$$

(4) $\iint\limits_{S}z^2ds$, 其中S是螺旋面的一部分:$x=u\cos v,\quad y=u\sin v, z=v(0\le u\le a,0\le v\le 2\pi)$

解：$\begin{pmatrix}x_u & y_u & z_u\\ x_v & y_v & z_v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos v & \sin v & 0\\ -u\sin v & u\cos v & 1\end{pmatrix}$

所以 $E=x_u^2+y_u^2+z_u^2=1,\ \ G=x_v^2+y_v^2+z_v^2=u^2+1$

$$F = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v = 0$$

因此 $\iint\limits_S z^2 ds = \iint\limits_D v^2 \sqrt{EG - F^2} dudv = \int_0^{2\pi} v^2 dv \int_0^a \sqrt{1+u^2} du$

$$= \frac{4\pi^3}{3}[a\sqrt{a^2+1} + \ln(a + \sqrt{a^2+1})]$$

(5) $\iint\limits_S x^2 + y^2 ds$，$S$ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$

解：S 的参数方程为：

$$\begin{cases} x = R\cos\theta\sin\varphi \\ y = R\sin\theta\cos\varphi \\ \quad z = R\cos\varphi \end{cases}，\ 0 \le \theta \le 2\pi，\ 0 \le \varphi \le \pi$$

$$\begin{pmatrix} x_\theta & y_\theta & z_\theta \\ x_\varphi & y_\varphi & z_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -R\sin\theta\sin\varphi & R\cos\theta\sin\varphi & 0 \\ R\cos\theta\cos\varphi & R\sin\theta os\varphi & -R\sin\varphi \end{pmatrix}$$

$$E = x_\theta^2 + y_\theta^2 + z_\theta^2 = R^n \sin^2\varphi，\ G = R^2，\ F = 0$$

所以 $\iint\limits_S (x^2 + y^2) ds = \iint\limits_D R^2 \sin^2\varphi \sqrt{R^4 \sin\varphi} d\theta d\varphi$

$$= R^4 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin^3\varphi d\varphi = \frac{8\pi}{3} R^4$$

4. 设曲线 L 的方程为

$$x = e^t \cos t，\ y = e^t \sin t，\ z = e^t \quad (0 \le t \le t_0)，$$

它在每一点的密度与该点的矢经形成反比，且在点 $(1,0,1)$ 处为 1，求它的质量.

解： $\rho(x,y,z) = k(x^2 + y^2 + z^2)$，由 $\rho(1,0,1) = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{2}$

所以 $\rho(x,y,z) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)$

它的质量为：$M = \int_L \rho(x,y,z) ds = \frac{1}{2}\int_L (x^2 + y^2 + z^2) ds$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{t_0} (e^{2t} + e^{2t})\sqrt{3e^{2t}} dt$$

$$= \sqrt{3}\int_0^{t_0} e^{3t} dt = \frac{\sqrt{3}}{3}(e^{3t_0} - 1)$$

5. 设有一质量分布不均匀的半圆弧 $x = r\cos\theta$，$y = r\sin\theta$ $(0 \le \theta \le \pi)$，其线密度 $\rho = a\theta$ （a 为常数)，求它对原点 $(0,0)$ 处质量为 m 的质点的引力.

解：设引力 $\vec{F}$ 在 x 轴上的投影为 F_x，在 y 轴上的投影为 F_y.任取弧长微元 ds，它对原点处质量为 m 的质点的引力为

$$d\vec{F}=\frac{k\rho}{r^2}ds\cdot\vec{r}_0$$

其中 k 是引力常数，r_0 是向经的单位矢量 $\{-\cos\theta,-\sin\theta\}$，将 $\rho=a\theta$，$ds=rd\theta$

代入，得 $d\vec{F}$ 在 x,y 轴上的投影为

$$dF_x=\frac{ka}{r^2}\theta\cdot rd\theta(-\cos\theta)=\frac{ka}{r}\theta\cos\theta d\theta,$$

$$dF_y=\frac{ka\theta}{r^2}\cdot rd\theta(-\sin\theta)=\frac{-ka}{r}\theta\sin\theta d\theta$$

故 $$F_x=-\int_0^{\pi}\frac{ka}{r}\theta\cos\theta d\theta=\frac{ka}{2r}\pi$$

$$F_y=-\int\frac{ka}{r}\theta\sin\theta d\theta=-\frac{ka}{2r}\pi$$

所以 $\vec{F}$ 的大小为 $\sqrt{F_x^2+F_y^2}=\frac{ka}{2r}\pi\sqrt{2}$，方向为 $\left\{\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$

$=\left\{\cos\frac{\pi}{4},-\sin\frac{\pi}{4}\right\}=\left\{\cos(-\frac{\pi}{4}),\sin(-\frac{\pi}{4})\right\}$，即方向沿 x 轴顺时针旋转 $\frac{\pi}{4}$

6. 求螺线的一支 L：$x=a\cos t$，$y=a\sin t$，$z=\frac{h}{2\pi}t$ $(0\le t\le 2\pi)$ 对 x 轴的转动惯量 $I=\int_L(y^2+z^2)ds$. 设此螺线的线密度是均匀的.

解： 不妨设线密度为 1

$$I=\int_L(y^2+z^2)ds=\int_0^{2\pi}(a^2\sin^2 t+(\frac{h^2}{4\pi^2}t^2)\cdot\sqrt{a^2+\frac{h^2}{4\pi^2}}dt$$

$$=(\frac{a^2}{2}+\frac{2}{3}h^2)\sqrt{4\pi a^2+h^2}$$

7. 求抛物面壳 $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$，$0\le z\le 1$ 的质量，设此壳的密度 $\rho=z$.

解： $M=\iint\limits_S\rho ds=\iint\limits_S zds=\iint\limits_D\frac{1}{2}(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}dxdy=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}r^4dr=\frac{4\sqrt{2}}{5}\pi$

8. 计算球面三角形 $x\ \ +y^2+z^2=a^2$，$x>0$，$y>0,z>0$ 得围成的重心坐标，蛇线密度 $\rho=1$.

解： 由对称性，设重心坐标为 $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})=(t,t,t)$

$$\frac{3}{2}\pi a\cdot t=\int_L xds=\int_{L_1+L_2+L_3}xds$$

L_1：$x^2+y^2=a^2$，$z=0$；L_2：$y^2+z^2=a^2$，$x=0$；L_3：$x_2+z^2=a_2$，$y=0$

所以：$\int_{L_1} xds=\int_0^{\frac{\pi}{2}} a\cos\theta\cdot ad\theta=a^2$

$$\int_{L_2} xds=\int_0^{\frac{\pi}{2}} 0\cdot ad\theta=0$$

$$\int_{L_3} xds=\int_0^{\frac{\pi}{2}} a\cos\theta\cdot ad\theta=a^2$$

所以：$\int_L (y^2+z^{2ds})=2a^2$

所以：$t=2a^2\Big/\frac{3\pi}{2}a=\frac{4}{3\pi}a$，故重心坐标为$(\frac{4}{3\pi}a,\frac{4}{3\pi}a,\frac{4}{3\pi}a)$.

9. 求球壳$x^2+y^2+z^2=a^2\ (z\geq 0)$时$z$轴的转动惯量.

解：不妨设面密度为$\rho=1$，则均匀球壳$x^2+y^2+z^2=a^2\ (z\geq 0)$时$z$轴的转动惯量为：

$$I_z=\iint_S (x^2+y^2)\cdot\rho ds=\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2\sin^2\varphi\cdot a^2\sin\varphi d\varphi$$

$$=\frac{4}{3}\pi a^4$$

10. 求均匀球面$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}\ (x\geq 0,y\geq 0,x+y\leq a)$的重心坐标.

解：由对称性可设重心坐标为(k,k,l)，则可不妨设$\rho=1$

由于 $\iint_S x\rho ds=\iint_D x\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy=a\int_0^a dy\int_0^{a-z}\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dx$

$$=\frac{\pi a^3}{4}(1-\frac{\sqrt{2}}{2})$$

$$\iint_S z\rho ds=\iint_D \sqrt{a^2-x^2-y^2}\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy=\frac{1}{2}a^3$$

$$\iint_S \rho ds=\iint_D \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy=a\int_0^a dx\int_0^{a-x}\frac{dy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}=\frac{\pi a^2}{\sqrt{2}}(1-\frac{\sqrt{2}}{2})$$

所以 $k=\iint_S x\rho ds\Big/\iint_D \rho ds=\frac{\sqrt{2}}{4}a$

$$l=\iint_S z\rho ds\Big/\iint_D \rho ds=\frac{\sqrt{2}+1}{\pi}a$$

所以：重心坐标为$(\frac{\sqrt{2}}{4}a,\frac{\sqrt{2}}{4}a,\frac{\sqrt{2}+1}{\pi}a)$

11. 若曲线以极坐标给出：$\rho=\rho(\theta)$ $(\theta_1\le\theta\le\theta_2)$，试给出计算$\int_L f(x,y)ds$的公式，并用此公式计算下列曲线积分.

（1）$\int_L e^{\sqrt{x^2+y^2}}ds$，其中$L$是曲线$\rho=a$ $(0\le\theta\le\frac{\pi}{4})$；

（2）$\int_{LL}xds$，其中L是对称螺线$\rho=ae^{kv}$ $(k>0)$在圆$r\le a$内的部分.

解：因为$\rho=\rho(\theta)$

所以 $\begin{cases}x=\rho\cos\theta=\rho(\theta)\cos\theta\\ y=\rho\sin\theta=\rho(\theta)\sin\theta\end{cases}$， $\theta_1\le\theta\le\theta_2$

$$x'_\theta=\rho'(\theta)\cos\theta+\rho(\theta)(-\sin\theta)=\rho'(\theta\cos\theta-\rho(\theta)\sin\theta$$

$$y'_\theta=\rho'(\theta)\sin'\theta+\rho(\theta)\cos\theta$$

$$ds=\sqrt{x'^2_\theta+y'^2_\theta}d\theta=\sqrt{\rho'^2(\theta)+\rho^2(\theta)}$$

所以 $\int_L f(x,y)ds=\int_{\theta_1}^{\theta_2}f(\rho(\theta)\cos\theta,\rho(\theta)\sin\theta)\sqrt{\rho^2(\theta)+\rho'^2(\theta)}d\theta$

（1）L：$\rho=a$，故$ds=\sqrt{\rho^2+\rho'^2}d\theta=ad\theta$

$$\int_L e^{\sqrt{x^2+y^2}}ds=\int_0^{\frac{\pi}{4}}e^a ad\theta=\frac{\pi}{4}ae^a$$

（2）L：$\rho=ae^{k\theta}$ $(k>0)$在圆$r=a$内的部分

$\rho=ae^{k\theta}$与$r=a$的交点坐标为$(0,a)$

$$\rho'(\theta)=ake^{k\theta}$$

所以 $ds=ae^{k\theta}\sqrt{1+k^2}d\theta$

所以 $\int_L xds=\int_{-\infty}^0 ae^{k\theta}\cos\theta\cdot ae^{k\theta}\sqrt{1+k^2}d\theta$ $=a^2\sqrt{1+k^2}\int_{-\infty}^0 e^{2k\theta}\cos\theta d\theta=\frac{2a^2k\sqrt{k^2+1}}{4k^2+1}$

12. 求密度$\rho=\rho_0$的截圆锥面$x=r\cos\varphi$，$y=r\sin\varphi$，$z=r$ $(0\le\kappa\le2\pi,0<b\le r\le a)$对位于曲面顶点$(0,0,0)$的单位质点的引力〉当$b\to0$时，结果如何？

解：对应于半径r处取斜交为ds的锥面带，其面积为

$$ds=2\pi rds=2\sqrt{2}\pi rdr$$

它与顶点$(0,0,0)$的单位质点的引力在ox轴和oy轴上合力的射影显见为0.

而在oz轴上的射影为

$$dZ=\frac{k2\sqrt{2}\pi rdr\rho_0}{r^2+z^2}\cdot\frac{z}{\sqrt{r^2+z^2}}=\frac{k\pi\rho_0 dr}{r}$$

于是，截圆锥面吸引单位质点（在$(0,0,0)$处）的引力在坐标轴上的射影为

$$X=0,\qquad Y=0,\qquad Z=\int_a^b\frac{k\pi\rho_0 dr}{r}=k\pi\rho_0\ln\frac{a}{b}$$

当$b\to 0^+$时，由于$\ln\frac{a}{b}\to+\infty$，故在Z坐标轴上引力的射影趋于$+\infty$

13. 计算$F(t)=\iint\limits_S f(x,y,z)ds$，其中$S$是平面$x+y+z=t$，而

$$f(x,y,z)=\begin{cases}1-x^2-y^2-z^2, & 当x^2+y^2+z^2\le 1\\ 0, & 当x^2+y^2+z^2>1\end{cases}$$

解：显然，平面$x+y+z=\pm\sqrt{3}$是球面$x^2+y^2+z^2=1$的两个切平面，于是

$$f(x,y,z)=\begin{cases}1-x^2-y^2-z^2, & 若|t|\le\sqrt{3}\\ 0, & 若|t|>\sqrt{3}\end{cases}$$

由方程组

$$\begin{cases}x+y+z=t\\ x^2+y^2+z^2=1\end{cases}$$

得椭圆方程$x^2+y^2+xy-t(x+y)=\frac{1-t^2}{2}$，记其围成区域为$\Omega$，则

$$\begin{aligned}F(t)&=\iint\limits_\Omega\left\{1-x^2-y^2-[t-(x+y)]^2\right\}\sqrt{3}dxdy\\&=\sqrt{3}\iint\limits_\Omega\left[1-t^2-2(x^2+y^2)-2xy+2t(x+y)\right]dxdy\end{aligned}$$

作平移变换 $x=x'+\frac{t}{3},y=y'+\frac{t}{3}$

则椭圆方程变为$x'^2+y'^2+x'y'=\frac{1}{2}\left(1-\frac{t^2}{3}\right)$ (1)

Ω相应的区域为Ω'，而函数为$f=1-\frac{t^2}{3}-2(x'^2+y'^2)-2x'y'$，于是

$$F(t)=\sqrt{3}\iint\limits_{\Omega'}\left[1-\frac{t^2}{3}-2(x'^2+y'^2)-2x'y'\right]dx'dy'$$

再作旋转变换：$x' = \dfrac{x'' - y''}{\sqrt{2}}; y' = \dfrac{x'' + y''}{\sqrt{2}}$，则(1)变为标准方程

$$\frac{x''^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{1-\frac{t^2}{3}}\right)^2} + \frac{y''^2}{\left(\sqrt{1-\frac{t^2}{3}}\right)^2} = 1$$

记相应的区域为Ω''，而函数为$f = 1 - \dfrac{t^2}{3} - (3x''^2 + y''^2)$，

于是$F(t) = \sqrt{3}\iint\limits_{\Omega''}\left[1 - \dfrac{t^2}{3} - \left(3x''^2 + y''^2\right)\right]dx''dy''$

最后，作广义极坐标变换，即$x'' = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{1-\dfrac{t^2}{3}}r\cos\varphi, y'' = \sqrt{1-\dfrac{t^2}{3}}r\sin\varphi$

则有：$F(t) = \left(1 - \dfrac{t^2}{3}\right)\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \left(1 - \dfrac{t^2}{3}\right)\left(r - r^3\right)dr$

$$= \left(1 - \frac{t^2}{3}\right)^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \left(r - r^3\right)dr = \frac{\pi}{18}\left(3 - t^2\right)^2$$

其中$|t| \le \sqrt{3}$，而当$|t| > \sqrt{3}$时，则有$F(t) = 0.$

考虑到函数$u = F(t) \qquad \left(-\infty < t < +\infty\right)$，则

$$F(t) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{18}(3-t^2)^2, & \left|t \le \sqrt{3}\right| \\ 0, & |t| > \sqrt{3} \end{cases}$$

§2　第二型曲线积分与曲面积分

1. 计算下列第二型曲线积分:

(1) $\int_L (2a-y)dx+dy$，其中 L 为摆线 $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ $(0\le t\le 2\pi)$ 沿 t 增加的方向;

解：$\int_L (2a-y)dx+dy=\int_0^{2\pi}\{[2a-a(1-\cos t)]\cdot a\sin t+a(1-\cos t)\}dt$

$$=2\pi a(a+1)$$

(2) $\int_L \frac{-xdx+ydy}{x^2+y^2}$,其中 L 为圆周 $x^2+y^2=a^2$ 依逆时针方向;

解：L 的参数方程为：$x=a\cos\theta$, $y=a\sin\theta$，$0\le\theta\le 2\pi$

所以$\int_L \frac{-xdx+ydy}{x^2+y^2}=\int_0^{2\pi}\frac{-a\cos\theta\cdot(-a\sin\theta)+a\sin\theta\cdot a\cos\theta}{a^2}d\theta$

$$=\int_0^{2\pi}\sin\theta\cos\theta d\theta=0$$

(3) $\int_L xdx+ydy+zdz$,其中 L 为从 $(1,1,1)$ 到 $(2,3,4)$ 的直线段;

解：L 的参数方程为：$x=1+t$, $y=1+2t$, $z=1+3t$，$0\le t\le 1$

所以 $\int_L xdx+ydy+zdz=\int_0^1[(1+t)+2(1+2t)+3(1+3t)]dt=13$

(4) $\int_L (x^2-2xy)dx+(y^2-2xy)dy$,其中 L 为 $y=x^2$ 从 $(1,1)$ 到 $(-1,1)$ 的一段;

解：$\int_L (x^2-2xy)dx+(y^2-2xy)dy=\int_1^{-1}[(x^2-2x\cdot x^2)+(x^4-2x^3)\cdot 2x]dx=\frac{2}{15}$

(5) $\int_L ydx-xdy+(x^2+y^2)dz$,其中 L 为曲线 $x=e^t$, $y=e^{-t}$, $z=at$ 从 $(1,1,0)$ 到 (e,e^{-1},a);

解：$\int_L ydx-xdy+(x^2+y^2)dz=\int_0^1[e^{-t}\cdot e^t-e^t\cdot(-e^{-t})+(e^{2t}+e^{-2t})\cdot a]dt$

$$=\int_0^1[2+a(e^{2t}+e^{-2t})]dt$$

$$=2+\frac{a}{2}(e^2-e^{-2})$$

$$=2+a\sinh 2$$

(6) $\int_L (x^2+y^2)dx+(x^2-y^2)dy$,其中 L 为以 $A(1,0),B(2,0),C(2,1),D(1,1)$ 为顶点的正方形沿逆时针方向.

解：$L=\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{DA}$

其中 $\overline{AB}: y=0, 1\le x\le 2$, 起点对应 $x=1$;

$\overline{BC}: x=2, 0\le y\le 1$, 起点对应 $y=0$;

$\overline{CD}: y=1, 1\le x\le 2$, 起点对应 $x=2$;

$\overline{DA}: x=1, 0\le y\le 1$, 起点对应 $y=1$.

所以

$$\int_L (x^2+y^2)dx+(x^2-y^2)dy$$

$$=\int_1^2 x^2dx+\int_0^1(4-y^2)dy+\int_2^1(x^2+1)dx+\int_1^0(1-y^2)dy=2$$

2. 计算曲线积分 $\int_L (y^2-z^2)dx+(z^2-x^2)dy+(x^2-y^2)dz$.

(1) L 为球面三角形 $x^2+y^2+z^2=1, x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0$ 的边界线，从球的外侧看去，L 的方向为逆时针方向;

(2) L 是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 和柱面 $x^2+y^2=ax(a>0)$ 的交线位于 oxy 平面上方的部分，从 x 轴上 $(b,0,0)(b>a)$ 点看去，L 是顺时针方向.

解：(1) $L=L_1+L_2+L_3$

$L_1: x=0, z=\sqrt{1-y^2}, 0\le y\le 1$,起点对应 $y=1$;

$L_2: y=0, z=\sqrt{1-x^2}, 0\le x\le 1$,起点对应 $x=0$;

$L_3: z=0, y=\sqrt{1-x^2}, 0\le x\le 1$,起点对应 $x=1$.

所以 $\int_L (y^2-z^2)dx+(z^2-x^2)dy+(x^2-y^2)dz$

$$=\int_1^0\left[(1-y^2)+(-y^2)\cdot\frac{-2y}{2\sqrt{1-y^2}}\right]dy+\int_0^1\left[-(1-x^2)+x^2\cdot\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}\right]dx$$

$$+\int_1^0\left[(1-x^2)+(-x^2)\cdot\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}\right]dx$$

$$=0$$

(2) $L=L_1+L_2$,其中

$L_1: y=\sqrt{ax-x^2}, z=\sqrt{a^2-ax}, 0\le x\le a$, 起点 $x=a$;

$L_2: y=-\sqrt{ax-x^2}, z=\sqrt{a^2-ax}, 0\le x\le a$, 起点 $x=0$.

所以 $I=\int_L (y^2-z^2)dx+(z^2-x^2)dy+(x^2-y^2)dz$

$$=\int_{L_1}(y^2-z^2)dx+(z^2-x^2)dy+(x^2-y^2)dz+\int_{L_2}(y^2-z^2)dx+(z^2-x^2)dy+(x^2-y^2)dz$$

$$=\int_a^0\left[2ax-x^2-a^2+(a^2-ax-x^2)\frac{a-2x}{2\sqrt{ax-x^2}}+(2x^2-ax)\cdot\frac{-a}{2\sqrt{a^2-ax}}\right]dx$$

$$+\int_0^a\left[2ax-x^2-a^2+(a^2-ax-x^2)\frac{2x-a}{2\sqrt{ax-x^2}}+(2x^2-ax)\cdot\frac{-a}{2\sqrt{a^2-ax}}\right]dx$$

$$=\int_0^a(a^2-ax-x^2)\cdot\frac{2x-a}{\sqrt{ax-x^2}}dx$$

令 $\sqrt{\dfrac{a-x}{x}}=t$，则 $x=0$ 时，$t=+\infty$；$x=a$ 时，$t=0.$

$x=\dfrac{a}{1+t^2}$，　　$dx=-\dfrac{2at}{(1+t^2)^2}dt$，代入上式得

$$I=\int_{+\infty}^0 2a^3\left(\frac{1}{1+t^2}-\frac{3}{\left(1+t^2\right)^2}+\frac{1}{\left(1+t^2\right)^3}+\frac{2}{\left(1+t^2\right)^4}\right)dt$$

$$=-2a^3\left(\int_0^{+\infty}\frac{dt}{1+t^2}-3\int_0^{+\infty}\frac{1}{\left(1+t^2\right)^2}dt+\int_0^{+\infty}\frac{1}{\left(1+t^2\right)^3}dt+2\int_0^{+\infty}\frac{1}{\left(1+t^2\right)^4}dt\right)$$

$$=-2a^3(I_1-3I_2+I_3+2I_4)$$

其中　$I_n=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dt}{\left(1+t^2\right)^n}$，$n=1,2,3,4.$

由递推公式 $I_n=\dfrac{1}{2(n-1)}\cdot\dfrac{t}{(1+t^2)^{n-1}}\Bigg|_0^{+\infty}+\dfrac{2n-3}{2(n-1)}I_{n-1}=\dfrac{2n-3}{2(n-1)}I_{n-1}$

最后得　$I=-\dfrac{3}{2}\pi a^3$

3. 求闭曲线 L 上的第二型曲线积分 $\displaystyle\oint_L\frac{ydx-xdy}{x^2+y^2}$.

(1) L 为圆 $x^2+y^2=a^2$,逆时针方向;

(2) L 为椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, 顺时针方向;

(3) L 为以 $(0,0)$ 为中心, 边长为 a, 对边平行于坐标轴的正方形, 顺时针方向;

(4) L 是以 $(-1,-1),(1,-1),(0,1)$ 为顶点的三角形，顺时针方向.

解：(1) L 的参数方程为: $x = a\cos\theta,\ \ y = a\sin\theta,\ \ 0 \le \theta \le 2\pi$，起点对应 $\theta = 0$

所以 $\displaystyle\oint_L \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2} = \frac{1}{a^2}\int_0^{2\pi}\left[a\sin\theta\cdot(-a\sin\theta) - a\cos\theta\cdot a\cos\theta\right]d\theta$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta = -2\pi$$

(2) L 为椭圆，其参数方程为：$x = a\cos\theta,\ \ y = b\sin\theta,\ \ 0 \le \theta \le 2\pi,$ 起点对应 $\theta = 2\pi$. 所以

$$\oint_L \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2} = \int_{2\pi}^{0} \frac{b\sin\theta\cdot(-a\sin\theta) - a\cos\theta\cdot b\cos\theta}{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta}d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{ab}{a^2 + b^2\tan^2\theta}d(\tan\theta)$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{ab}{a^2 + b^2\tan^2\theta}d(\tan\theta)$$

$$= 4\arctan\left(\frac{b}{a}\tan\theta\right)\Bigg|_0^{\pi/2} = 2\pi$$

(3) $L = L_1 + L_2 + L_3 + L_4$，其中

$L_1: x = -\frac{a}{2},\ \ -\frac{a}{2} \le y \le \frac{a}{2}$，起点 $y = -\frac{a}{2}$;

$L_2: y = \frac{a}{2},\ \ -\frac{a}{2} \le x \le \frac{a}{2}$，起点 $x = -\frac{a}{2}$;

$L_3: x = \frac{a}{2},\ \ -\frac{a}{2} \le y \le \frac{a}{2}$，起点 $y = \frac{a}{2}$;

$L_4: y = -\frac{a}{2},\ \ -\frac{a}{2} \le x \le \frac{a}{2}$，起点 $x = \frac{a}{2}$.

所以 $\displaystyle\oint_L \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2} = \left(\int_{L_1} + \int_{L_2} + \int_{L_3} + \int_{L_4}\right)\frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2}$

$$= \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{\frac{a}{2}dy}{\frac{a^2}{4} + y^2} + \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{\frac{a}{2}dx}{x^2 + \frac{a^2}{4}} + \int_{\frac{a}{2}}^{-\frac{a}{2}} \frac{-\frac{a}{2}dy}{\frac{a^2}{4} + y^2} + \int_{\frac{a}{2}}^{-\frac{a}{2}} \frac{-\frac{a}{2}dx}{x^2 + \frac{a^2}{4}}$$

$$= 4\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{1}{1 + \left(\frac{2y}{a}\right)^2}d\left(\frac{2y}{a}\right) = 4\arctan\frac{2y}{a}\Bigg|_{-a/2}^{a/2} = 2\pi$$

(4) $L = L_1 + L_2 + L_3$，其中

$L_1: y = -1,\ \ -1 \le x \le 1$，起点 $x = 1$;

$L_2: y = 2x+1,\ \ -1 \le x \le 0,$ 起点 $x=-1;$

$L_3: y = -2x+1,\ \ 0 \le x \le 1,$ 起点 $x=0.$

所以 $\oint_L \frac{ydx - xdy}{x^2+y^2} = \left(\int_{L_1} + \int_{L_2} + \int_{L_3}\right)\frac{ydx - xdy}{x^2+y^2}$

$$= \int_1^{-1}\frac{-dx}{x^2+1} + \int_{-1}^{0}\frac{[(2x+1) - x\cdot 2]dx}{x^2+(2x+1)^2} + \int_0^1 \frac{[(-2x+1) - x\cdot(-2)]dx}{x^2+(-2x+1)^2}$$

$$= \frac{\pi}{2} + \int_{-1}^{0}\frac{dx}{5x^2+4x+1} + \int_0^1\frac{dx}{5x^2-4x+1}$$

$$= \frac{\pi}{2} + 2\arctan 2$$

4. 求力场 $\vec{F}$ 对运动的单位质点所作的功, 此质点沿曲线 L 从 A 点运动到 B 点:

(1) $\vec{F} = (x - 2xy^2, y - 2x^2y)$, L 为平面曲线 $y = x^2$, $A(0,0), B(1,1);$

(2) $\vec{F} = (x+y, xy)$, L 为平面曲线 $y = 1 - |1-x|$, $A(0,0), B(2,0);$

(3) $\vec{F} = (x-y, y-z, z-x)$, L 的矢量形式为 $\vec{r}(t) = t\vec{i} + t^2\vec{j} + t^3\vec{k}$, $A(0,0,0), B(1,1,1);$

(4) $\vec{F} = (y^2, z^2, x^2)$, L 的参数形式为 $x = \alpha\cos t, y = \beta\sin t, z = \gamma t$ (α, β, γ 为正数),

$A(\alpha,0,0), B(\alpha,0,2\pi\gamma)$.

解：(1) $W = \int_L \vec{F}\cdot\overrightarrow{ds} = \int_L (x-2xy^2)dx + (y-2x^2y)dy$

$$= \int_0^1 \left[(x-2x^3) + (x^2-2x^4)\cdot 2x\right]dx$$

$$= \frac{1}{6}$$

（2） $W = \int_L \vec{F}\cdot d\vec{s}$

$$= \int_L (x+y)dx + xydy$$

$$= \int_0^1 (2x+x^2)dx + \int_1^2 [2 + x(2-x)\cdot(-1)]dx$$

$$= \frac{8}{3}$$

（3） $W = \int_L \vec{F}d\vec{s} = \int_0^1 [(t-t^2) + (t^2-t^3)\cdot 2t + (t^3-t)\cdot 3t^2]dt$

$$= \frac{1}{60}$$

（4） $W = \int_L \vec{F}d\vec{s} = \int_L y^2dx + z^2dy + x^2dz$

$$=\int_0^{2\pi}[-\alpha\beta^2\sin^3 t+\beta\gamma t\cos t+\alpha^2\gamma\cos^2 t]dt$$

$$=\pi\alpha^2\gamma$$

5. 设P，Q，R 在L上连续，L为光滑弧段，弧长为l，证明$\left|\int_L Pdx+Qdy+Rdz\right|\le Ml$ 其中 $M=\max\limits_{(x,y,y,z)\in L}\left\{\sqrt{P^2+Q^2+R^2}\right\}$.

证明： 取弧长s作为参数，得L的本性方程

$$\begin{cases}x=x(s)\\ y=y(s)\\ z=z(s)\end{cases},\qquad 0\le s\le l$$

所以 $\left|\int_L Pdx+Qdy+Rdz\right|=\left|\int_0^l P(x(s),y(s),z(s))dx(s)+Q(x(s),y(s),z(s))dy(s)\right.$

$$\left.+R(x(s),y(s),z(s))dz(s)\right|$$

$$\le\int_0^l\left|P(x(s),y(s),z(s))dx(s)+Q(x(s),y(s),z(s))dy(s)+R(x(s),y(s),z(s))dz(s)\right|$$

$$\le\int_0^l\sqrt{P^2+Q^2+R^2\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}\le M\int_0^l ds=Ml$$

6. 设光滑闭曲线L在光滑曲面S上，S的方程为$z=f(x,y)$，曲线L在oxy平面上的投影曲线为l，函数$P(x,y,z)$在L上连续，证明：$\oint_L P(x,y,z)dx=\oint_l P(x,y,z(x,y))dx$

证明： 取x作为参数，则L：$x=x$, $y=y(x)$，$z=z(x,y(x))$

l：$x=x$, $y=y(x)$，$x_1\le x\le x_2$，起点时应$x=x_1$

所以 $\oint_L P(x,y,z)dx=\int_{x_1}^{x_2}P(x,y(x),z(x,y(x)))dx$

而 $\oint_l P(x,y,z(x,y))dx=\int_{x_1}^{x_2}P(x,y(x),z(x,y(x)))dx$

因此 $\oint_l P(x,y,z(x,y))dx=\oint_L P(x,y,z)dx$

7. 计算 $I=\int_L xyzdz$，其中L：$x^2+y^2+z^2=1$与$y=z$相交的圆，其方向按曲线依次经过1,2,7,8卦限.

解：L：$x^2+y^2+z^2=1$与$y=z$相交的圆，故方程为$\begin{cases}x^2+y^2=1\\ y=z\end{cases}$

令：$x=\cos\theta$，$y=\dfrac{1}{\sqrt2}\sin\theta$，则$z=\dfrac{1}{\sqrt2}\sin\theta$, $0\le\theta\le2\pi$，起点对应$\theta=0$.

从而

$$\int_L xyzdz=\int_0^{2\pi}\cos\theta\cdot\frac{1}{2}\sin^2\theta\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta d\theta=\frac{1}{2\sqrt{2}}\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\cos^2\theta d\theta \ =\frac{\pi}{16}\sqrt{2}$$

8. 计算下列第二曲面积分：

（1） $\iint\limits_S y(x-z)dydz+x^2dzdx+(y^2+xz)dxdy$，其中$S$为$x=y=z=0$，$x=y=z=a$，六个平面所围的正立方体边界的外侧；

解：$S=S_{上}+S_{下}+S_{左}+S_{右}+S_{前}+S_{后}$

而 $$\iint\limits_{S_{上}} y(x-z)dydz+x^2dzdx+(y^2+xz)dxdy=\iint\limits_{D_{xy}}(y^2+ax)dxdy$$

$$\iint\limits_{S_{下}} y(x-z)dydz+x^2dzdx+(y^2+xz)dxdy=-\iint\limits_{D_{xy}} y^2dxdy$$

$$\iint\limits_{S_{左}} y(x-z)dydz+x^2dzdx+(y^2+xz)dxdy=-\iint\limits_{D_{xz}} x^2dzdx$$

$$\iint\limits_{S_{右}} y(x-z)dydz+x^2dzdx+(y^2+xz)dxdy=\iint\limits_{D_{xz}} x^2dzdx$$

$$\iint\limits_{S_{左}} y(x-z)dydz+x^2dzdx+(y^2+xz)dxdy=\iint\limits_{D_{yz}} y(a-z)dydz$$

$$\iint\limits_{S_{后}} y(x-z)dydz+x^2dzdx+(y^2+xz)dxdy=\iint\limits_{D_{yz}}(-yz)dydz$$

所以 $$\iint\limits_S y(x-z)dydz+x^2dzdx+(y^2+xz)dxdy$$

$$=\left(\iint\limits_{S_{上}}+\iint\limits_{S}+\iint\limits_{S_{左}}+\iint\limits_{S_{右}}+\iint\limits_{S_{前}}+\iint\limits_{S_{后}}\right)dydz+x^2dzdx+(y^2+xz)dx$$

$$=\iint\limits_{D_{xy}} axdxdy+\iint\limits_{D_{yz}} aydydz$$

$$=a\int_0^a xdx\int_0^a dy+a\int_0^a ydy\int_0^a dz$$

$$=a^4$$

（2）$\iint\limits_S (x+y)dydz+(y+z)dzdx+(z+x)dxdy$，其中$S$是以质点为中心，边长为$2$的正立方体表面的外侧；

解: 同（1）把$S=S_{上}+S_{下}+S_{左}+S_{右}+S_{前}+S_{后}$

则 $\iint\limits_{S}(x+y)dydz+(y+z)dzdx+(z+x)dxdy$

$$=\left(\iint\limits_{S_{上}}+\iint\limits_{S}+\iint\limits_{S_{左}}+\iint\limits_{S_{右}}+\iint\limits_{S_{前}}+\iint\limits_{S_{后}}\right)(x+y)dydz+(y+z)dzdx+(z+x)dxdy$$

$$=2(\iint\limits_{D_{xy}}dxdy+\iint\limits_{D_{zx}}dzdx+\iint\limits_{D_{yz}}dydz)$$

$$=2\times 4\times 3=24$$

（3）$\iint\limits_{S}yzdx$，S 为 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 的上半部分的上侧；

解: $S=S_{左}+S_{右}$，其中

$S_{左}$：$y=-b\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}}$，$D_{xz}$：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\le 1$，左侧

$S_{右}$：$y=b\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}}$，$D_{xz}$：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\le 1$，右侧

所以 $\iint\limits_{S}yzdzdx=\iint\limits_{S_{左}}yzdzdx+\iint\limits_{S_{右}}yzdzdx$

$$=-\iint\limits_{D_{xz}}(-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}})\cdot zdzdx+\iint\limits_{D_{xz}}b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}}\cdot zdzdx$$

$$=2b\iint\limits_{D_{xz}}z\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}}dxdz$$

$$=2abc^2\int_0^{2\pi}\sin\theta d\theta\int_0^1 r^2\sqrt{1-r^2}=0$$

（4）$\iint\limits_{S}zdxdy+xdydz+ydzdx$，$S$ 为柱面 $x^2+y^2=1$ 被平面 $z=0$ 及 $z=3$ 所截部分的外侧；

解: 由于 S 在 xoy 平面上的投影为曲线 $x^2+y^2=1$，故 $\iint\limits_{S}zdxdy=0$

对于 $\iint\limits_{S}xdydz=\iint\limits_{S_{前}}xdydz+\iint\limits_{S_{后}}xdydz$

$$=\iint\limits_{D_{yz}}\sqrt{1-y^2}dydz-\iint\limits_{D_{yz}}(-\sqrt{1-y^2})dydz$$

$$=2\int_{-1}^{1}\sqrt{1-y^2}dy\int_0^3 dz=3\pi$$

而 $\iint\limits_{S}ydzdx=\iint\limits_{S_{左}}ydzdx+\iint\limits_{S_{右}}ydzdx$

$$=-\iint_{D_{zx}}(-\sqrt{1-x^2})dzdx+\iint_{D_{zx}}\sqrt{1-x^2}dzdx$$

$$=2\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}dx\int_0^3 dz=3\pi$$

所以 $\iint_S zdxdy+xdydz+ydzdx=6\pi$

（5） $\iint_S xydydz+yzdzdx+xzdxdy$， S 是由平面 $x=y=z=0$ 和 $x+y+z=1$ 所围的四面体表面的外侧；

解: 由积分表达式及 S 关于 x,y,z 的轮换对称性，知

$$\iint_S xydydz+yzdzdx+xzdxdy=3\iint_S xzdxdy$$

而 $S=S_1+S_2+S_3+S_4$，其中：

S_1： $z=0$，$0\le x+y\le 1,\quad 0\le x\le 1,$ 下侧；

S_2： $y=0$，$0\le x+z\le 1,\quad 0\le x\le 1,$ 左侧；

S_3： $x=0$，$0\le y+z\le 1,\quad 0\le y\le 1,$ 后侧；

S_4： $x+y+z=1$，$0\le x+y\le 1,\quad 0\le x\le 1,$ 上侧；

而在 S_1，S_2，S_3 上，$\iint_{S_i} xzdxdy$=0，（$i=1,2,3$）

$$\therefore\iint_S xzdxdy=\iint_{S_4} xzdxdy=\iint_{D_{xy}} x(1-x-y)dxdy=\int_0^1 xdx\int_0^{1-x}(1-x-y)dy=\frac{1}{24}$$

（6） $\iint_S x^3dydz+y^3dzdx+z^3dxdy$， S 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 的外侧；

解: 由对称性，知

$$\iint_S x^3dydz+y^3dzdx+z^3dxdy=3\iint_S z^3dxdy=3\left(\iint_{S_{上}} z^3dxdy+\iint_{S_{下}} z^3dxdy\right)$$

$$=3\left(\iint_{D_{xy}}(a^2-x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}dxdy-\iint_{D_{xy}}[-(a^2-x^2-y^2)^{\frac{1}{2}}]^3dxdy\right)$$

$$=6\iint_{D_{xy}}(a^2-x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}dxdy=\frac{12}{5}\pi a^5$$

（7） $\iint_S x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy$， S 为球面 $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$ 的外侧；

解: 先计算：

$$\iint_S z^2 dxdy = \iint_{S_上} z^2 dxdy + \iint_{S_下} z^2 dxdy$$

$$= \iint_{D_{xy}} [c + \sqrt{R^2 - (x-a)^2 - (y-b)^2}\,]^2 dxdy - \iint_{D_{xy}} [c - \sqrt{R^2 - (x-a)^2 - (y-b)^2}\,]^2 dxdy$$

$= 4c \iint_{D_{xy}} \sqrt{R^2 - (x-a)^2 - (y-b)^2}\, dxdy = \dfrac{8}{3}\pi R^3 c$，其中，$D_{xy}$：$(x-a)^2 + (y-b)^2 \le R^2$

同理可得：$\iint_S x^2 dydz = \dfrac{8}{3}\pi R^3 a$，$\iint_S y^2 dzdx = \dfrac{8}{3}\pi R^3 b$

$$\therefore \iint_S x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy = \frac{8}{3}\pi R^3 (a+b+c)$$

9. 设某流体的流速为$v = (k, y, 0)$，求单位时间从球面$x^2 + y^2 + z^2 = 4$的内部流过球面的流量。

解： 流量 $Q = \iint_S kdydz + ydzdx$

$= （\iint_{S_前} kdydz + \iint_{S_后} kdydz）+（\iint_{S_左} ydzdx + \iint_{S_右} ydzdx）$

$= （\iint_{D_{xy}} kdydz - \iint_{D_{xy}} kdydz）+（-\iint_{D_{zx}} (-\sqrt{4 - x^2 - y^2})dzdx + \iint_{D_{zx}} \sqrt{4 - x^2 - y^2}\, dzdx）$

$= 2\iint_{D_{zx}} \sqrt{4 - x^2 - y^2}\, dzdx$

$= \dfrac{32}{3}\pi$ （其中：D_{zx}：$z^2 + x^2 \le 4$）

10．设流体的流速为$v = (xy^5, 0, z^5 x^x)$，求穿过柱面$x^2 + y^2 = a^2$（$-h \le z \le h$）外侧的流量。

解： 流量 $Q = \iint_S xy^5 dydz + z^5 x^x dxdy$

$= \iint_{S_前} xy^5 dydz + \iint_{S_后} xy^5 dydz$

$= \iint_{D_{yz}} \sqrt{a^2 - y^2}\, y^5 dydz - \iint_{D_{yz}} -\sqrt{a^2 - y^2}\, y^5 dydz$

$= 2\iint_{D_{yz}} \sqrt{a^2 - y^2}\, y^5 dydz$ （其中：D_{yz}：$-a \le y \le a$，$-h \le z \le h$）

$= 2\int_{-a}^{a} y^5 \sqrt{a^2 - y^2}\, dy \int_{-h}^{h} dz = 0$