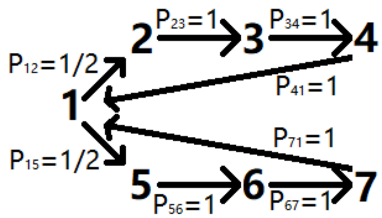
题目3.2.2：

问题一：不能直接根据$N(t)$的马氏性直接证明$X(t)$的马氏性。

反例：考虑在$\{1,2,3,4,5\}$上的马氏链X_n（其中$X_0=1$），



令$Y_n=I(X_n\neq 3)I(X_n\neq 6)X_n=\begin{cases}0 & ,X_n=3\text{或}6\\ X_n & ,\text{其它}\end{cases}$

此时$P(Y_3=5|Y_2=0,Y_1=2,Y_0=1)=P(X_3=5|X_2\in\{3,6\},X_1=2,X_0=1)=1$

但是$P(Y_3=5|Y_2=0,Y_1=5,Y_0=1)=P(X_3=5|X_2\in\{3,6\},X_1=5,X_0=1)=0$

这就说明X_n的马氏性并不代表Y_n具有马氏性。

同理原题目中$N(t)$的马氏性并不能直接推出$X(t)$的马氏性

问题二：$P(N(t_n)\in A|N(t_{n-1})\in B)\neq\sum_{j\in A}\sum_{i\in B}P(N(t_n)=j|N(t_{n-1})=i)$

这是没有问题的：

$$P(X\in A|Y\in B)=\sum_{i\in A}P(X=i|Y\in B)$$

但这个是**错误**的：

$$P(X\in A|Y\in B)=\sum_{i\in B}P(X\in A|Y=i)$$

问题三：最后的转移概率，是$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda t)^{2n}}{(2n)!}e^{-\lambda t}$而不是$\sum_{n=2k}^{\infty}\frac{(\lambda t)^{n}}{n!}e^{-\lambda t}$

参考答案：

【更改记号】为避免等式超长，这里用N_t代替$N(t)$、用X_t代替$X(t)$。

记$\mathbb{N}_{odd}:=\{1,3,\dots,2n-1,\dots\},\mathbb{N}_{even}:=\{0,2,\dots,2n,\dots\}$

记$f(x):=\begin{cases}0 & x\in\mathbb{N}_{even}\\ 1 & x\in\mathbb{N}_{odd}\end{cases}\qquad x\in\mathbb{N}_0$

因此$0 \le t_0 < t_1 < \cdots < t_{n+1}$

$$
\begin{aligned}
& P(X_{t_{n+1}} = j | X_{t_n} = i, X_{t_{n-1}} = i_{n-1}, \ldots, X_{t_0} = i_0) \\
= \ & P(|X_{t_{n+1}} - X_{t_n}| = |j-i| \, | \, |X_{t_n} - X_{t_{n-1}}| = |i - i_{n-1}|, \ldots, |X_{t_1} - X_{t_0}| = |i_1 - i_0|, X_{t_0} = i_0) \\
= \ & P(f(N_{t_{n+1}} - N_{t_n}) = |j-i| \, | \, f(N_{t_n} - N_{t_{n-1}}) = |i - i_{n-1}|, \ldots, |f(N_{t_1} - N_{t_0})| = |i_1 - i_0|, f(N_{t_0}) = 1 - i_0 \\
& \text{【利用}N(t_{n+1}-t_n)\text{与}X_{t_{n+1}} - X_{t_n}\text{的关系；最后用}1-i_0\text{是因为当}x\text{为偶数时}f(x)=0\text{ 而不是1】} \\
= \ & P(f(N_{t_{n+1}} - N_{t_n}) = |j-i|)\text{【利用独立增量性】}
\end{aligned}
$$

同时

$$
\begin{aligned}
& P(X_{t_{n+1}} = j | X_{t_n} = i) \\
= \ & P(|X_{t_{n+1}} - X_{t_n}| = |j-i| \, | \, X_{t_n} = i) \\
= \ & P(f(N_{t_{n+1}} - N_{t_n}) = |j-i| \, | \, f(N_{t_n}) = 1 - i)\text{【同上，最后用}1-i\text{是因为当}x\text{为偶数时}f(x)=0\text{ 而不是1】} \\
= \ & P(f(N_{t_{n+1}} - N_{t_n}) = |j-i|)\text{【还是独立增量性】}
\end{aligned}
$$

因此

$$
P(X_{t_{n+1}} = j | X_{t_n} = i, X_{t_{n-1}} = i_{n-1}, \ldots, X_{t_0} = i_0) = P(X_{t_{n+1}} = j | X_{t_n} = i) = P(f(N_{t_{n+1}} - N_{t_n}) = |j-i|)
$$

而

$$
\begin{aligned}
& P(f(N_{t_{n+1}} - N_{t_n}) = k) \\
= \ & \begin{cases} P(N_{t_{n+1}} - N_{t_n} \in \mathbb{N}_{even}) & ,k=0 \\ P(N_{t_{n+1}} - N_{t_n} \in \mathbb{N}_{odd}) & ,k=1 \end{cases} \\
= \ & \begin{cases} \displaystyle\sum_{m=0}^{\infty} \frac{[\lambda(t_{n+1}-t_n)]^{2m}}{(2m)!} e^{-\lambda(t_{n+1}-t_n)} & ,k=0 \\ \displaystyle\sum_{m=0}^{\infty} \frac{[\lambda(t_{n+1}-t_n)]^{2m+1}}{(2m+1)!} e^{-\lambda(t_{n+1}-t_n)} & ,k=1 \end{cases} \\
= \ & \begin{cases} \dfrac{1+e^{-2\lambda(t_{n+1}-t_n)}}{2} & ,k=0 \\ \dfrac{1-e^{-2\lambda(t_{n+1}-t_n)}}{2} & ,k=1 \end{cases}
\end{aligned}
$$

因此【还是利用$X_0 = X(0) = 1$】

$$P(X_t = i) = P(X_t = i|X_0 = 1) = \begin{cases} \dfrac{1+e^{-2\lambda t}}{2} & ,k=0 \\ \dfrac{1-e^{-2\lambda t}}{2} & ,k=1 \end{cases}$$

题目3.2.3：

问题一、X_t是随机变量而不是常数!

已经在第四周《出现的问题与参考答案》（题目2.3.6问题二）已经举出过反例。这里就不再重复。

问题二、独立增量性**不能只证明**$Z_{t_1} - Z_{t_0}$与Z_{t_0}独立!

独立增量性要求的是$Z_{t_n} - Z_{t_{n-1}}, \ldots, Z_{t_1} - Z_{t_0}, Z_{t_0}$**相互独立**! 概率论已经给出过反例，$A, B, C$两两独立，不代表它们相互独立! 这里也一样。

参考答案：

(a)先证明Z_t的独立增量性，

考虑$0 \le t_0 < t_1 < \cdots < t_n$，

现在证明$Z_{t_n}-Z_{t_{n-1}},\ldots,Z_{t_1}-Z_{t_0},Z_{t_0}$相互独立。

$$
\begin{aligned}
& P(Z_{t_n}-Z_{t_{n-1}}=i_n,\ldots,Z_{t_1}-Z_{t_0}=i_1,Z_{t_0}=i_0) \\
= \;& P(\bigcap_{k=1}^{n}\{Z_{t_k}-Z_{t_{k-1}}=i_k\},Z_{t_0}=i_0)\text{【简化式子】} \\
= \;& \sum_{j_n=j_{n-1}}^{\infty}\cdots\sum_{j_1=j_0}^{\infty}\sum_{j_0=0}^{\infty}P(\bigcap_{k=1}^{n}\{Z_{t_k}-Z_{t_{k-1}}=i_k,X_{t_k}-X_{t_{k-1}}=j_k-j_{k-1}\},Z_{t_0}=i_0,X_{t_0}=j_0) \\
& \text{【记}l_0=j_0,l_k=l_{k-1}+j_k,k\geq 1\text{】} \\
= \;& \sum_{j_n=j_{n-1}}^{\infty}\cdots\sum_{j_1=j_0}^{\infty}\sum_{j_0=0}^{\infty}P(\bigcap_{k=1}^{n}\{\sum_{m=l_{k-1}+1}^{l_k}Y_m=i_k,X_{t_k}-X_{t_{k-1}}=j_k-j_{k-1}\},\sum_{m=1}^{l_0}Y_m=i_0,X_{t_0}=j_0) \\
& \text{【此时}l_k,t_k\text{都是常数，可以利用独立性】} \\
= \;& \sum_{j_n=j_{n-1}}^{\infty}\cdots\sum_{j_1=j_0}^{\infty}\sum_{j_0=0}^{\infty}\left[\left(\prod_{k=1}^{n}P(\sum_{m=l_{k-1}+1}^{l_k}Y_m=i_k,X_{t_k}-X_{t_{k-1}}=j_k-j_{k-1})\right)P(\sum_{m=1}^{l_0}Y_m=i_0,X_{t_0}=j_0)\right] \\
& \text{【利用}Y_m\text{的同分布性】} \\
= \;& \sum_{j_n-j_{n-1}=0}^{\infty}\cdots\sum_{j_1-j_0=0}^{\infty}\sum_{j_0=0}^{\infty}\left[\left(\prod_{k=1}^{n}P(\sum_{m=1}^{j_k-j_{k-1}}Y_m=i_k,X_{t_k}-X_{t_{k-1}}=j_k-j_{k-1})\right)P(\sum_{m=1}^{j_0}Y_m=i_0,X_{t_0}=j_0)\right] \\
= \;& \left[\prod_{k=1}^{n}\sum_{j_k-j_{k-1}=0}^{\infty}P(\sum_{m=1}^{j_k-j_{k-1}}Y_m=i_k,X_{t_k}-X_{t_{k-1}}=j_k-j_{k-1})\right]\left[\sum_{j_0=0}^{\infty}P(\sum_{m=1}^{j_0}Y_m=i_0,X_{t_0}=j_0)\right] \\
= \;& \left[\prod_{k=1}^{n}\sum_{j_k-j_{k-1}=0}^{\infty}P(\sum_{m=1}^{X_{t_k}-X_{t_{k-1}}}Y_m=i_k,X_{t_k}-X_{t_{k-1}}=j_k-j_{k-1})\right]\left[\sum_{j_0=0}^{\infty}P(\sum_{m=1}^{X_{t_0}}Y_m=i_0,X_{t_0}=j_0)\right] \\
= \;& \left[\prod_{k=1}^{n}P(\sum_{m=1}^{X_{t_k}-X_{t_{k-1}}}Y_m=i_k)\right]P(\sum_{m=1}^{X_{t_0}}Y_m=i_0) \\
= \;& \left[\prod_{k=1}^{n}P(Z_{t_k}-Z_{t_{k-1}}=i_k)\right]P(Z_{t_0}=i_0)
\end{aligned}
$$

因此Z_t有独立增量性，此时

$$\begin{aligned}
& P(Z_{t_{n+1}}=i_{n+1}|Z_{t_n}=i_n,\ldots,Z_{t_1}=i_1,Z_{t_0}=i_0) \\
= & P(Z_{t_{n+1}}-Z_{t_n}=i_{n+1}-i_n|Z_{t_n}-Z_{t_{n-1}}=i_n-i_{n-1},\ldots,Z_{t_1}-Z_{t_0}=i_1-i_0,Z_{t_0}=i_0) \\
= & P(Z_{t_{n+1}}-Z_{t_n}=i_{n+1}-i_n) \\
= & P(Z_{t_{n+1}}-Z_{t_n}=i_{n+1}-i_n|Z_{t_n}=i_n) \\
= & P(Z_{t_{n+1}}=i_{n+1}|Z_{t_n}=i_n)
\end{aligned}$$

因此$\{Z_t : t \geq 0\}$是马氏链。

(b)从上面的证明可以看出

$$\begin{aligned}
& P(Z_{t_{n+1}}=j|Z_{t_n}=i) \\
= & P(Z_{t_{n+1}}-Z_{t_n}=j-i) \\
= & \sum_{k=0}^{\infty} P(\sum_{l=1}^{k} Y_l=j-i, X_{t_n}-X_{t_{n-1}}=k) \\
= & \sum_{k=0}^{\infty}\left(P(\sum_{l=1}^{k} Y_l=j-i)P(X_{t_n}-X_{t_{n-1}}=k)\right) \\
= & \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{[\lambda(t_n-t_{n-1})]^k e^{-\lambda(t_n-t_{n-1})}}{k!}P(\sum_{l=1}^{k} Y_l=j-i)\right)
\end{aligned}$$

注意到

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left|\frac{[\lambda(t_n-t_{n-1})]^k e^{-\lambda(t_n-t_{n-1})}}{k!}P(\sum_{l=1}^{k} Y_l=j-i)\right| \leq \sum_{k=0}^{\infty}\frac{[\lambda(t_n-t_{n-1})]^k e^{-\lambda(t_n-t_{n-1})}}{k!}=1$$

因此求和与求导可以交换顺序。

故当$i \neq j$时【注意$P(\sum_{l=1}^{0} Y_l=j-i)=0$】

$$\begin{aligned}
& q_{ij} \\
= & \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}P(\sum_{l=1}^{k} Y_l=j-i)\right)'_{t=0} \\
= & \lambda P(Y_1=j-i)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& q_{ii} \\
= \; & \left(1 - e^{-\lambda t}\right)'_{t=0} - \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!} P(\sum_{l=1}^{k} Y_l = 0) \right)'_{t=0} \\
= \; & \lambda P(Y_1 \neq 0)
\end{aligned}
$$