■ Q1. 求$\sum_{k=0}^{\infty} x^k$的符号解，并进而用该符号解求$\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^k$，$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\pi}\right)^k$，$\sum_{k=0}^{\infty} 3^k$的准确值。

答:

```
syms x k
f=x^(k);
Z1=symsum(f,k,0,inf)
Z1 =
piecewise([1 <= x, Inf], [abs(x) < 1, -1/(x - 1)])
%piecewise 分段函数,可见收敛域为x ∈ (−1,1)

subs(Z1,x,{-1/sym(3),1/sym(pi),sym(3)})
ans =
[ 3/4, -1/(1/pi - 1), Inf]
```

Q2. (1) 通过符号计算求$y(t) = |\sin t|$的导数 。(2) 然后根据此结果，求$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0^-}$和$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=\frac{\pi}{2}}$。

答:

```
syms t
y=abs(sin(t))
dy=diff(y)                              %求 dy/dt
%d0_=limit(d,t,0,'left')                %这一句计算的的是导数极限并不是左导数
syms d positive
f_n = -sin(t);                          %用 abs(sin(t))会有 MATLAB 的 bug
df_n=limit((f_n-subs(f_n,t,t-d))/d,d,0);
d0_=limit((subs(f_n,t,0)-subs(f_n,t,-d))/d,d,0)  %求 0 点左导数
dpi_2=limit(dy,t,pi/2)                  %求 dy/dt|t=pi/2
y =
abs(sin(t))
dy =
sign(sin(t))*cos(t)
d0_ =
-1
dpi_2 =
0
```

Q3. 利用今天所学知识，采用符号计算方法（阶乘函数自行搜索），并最终使用符号对象函数 logical 验证

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!} = \mathrm{e}$$

答:

```
syms n
A = limit((1+1/n)^n,n,Inf);
```

```
B = limit(n/(factorial(n))^(1/n),n,Inf);
C = symsum(1/factorial(n),n,0,Inf);
Ae = logical(A==exp(sym(1)))
Be = logical(B==exp(sym(1)))
Ce = logical(C==exp(sym(1)))
%如果1不用sym括起来那么结果将是数值型的，得到的输出会是0，即有误差
%如果不用logical函数，双等号本身会构造一个恒等符号表达式，而不是做判断
```

```
Ae =
  logical
   1

Be =
  logical
   1
Ce =
  logical
   1
```

结果表明，三个极限（含级数的和）确实都等于常数e

Q4.　（附加，选做）(1)利用已学习的大学数学知识从理论上证明$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}=\mathrm{e}$

(2)设$a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $\mathrm{b_n}=\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$, $n\in\mathbb{N}_+$.

如 Q3 验证的结论，显然两个数列都是单调递增且收敛到常数e.的数列.利用这两次课所学知识，尝试对两个数组的前 300 项的取值进行绘图（plot），并通过绘图结果分析到底哪一个数列更加快速的收敛到常数e.

答：(1)除利用斯特林公式外，这里提供一种较为通俗的方法：考虑$\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$的对数，即

$$\ln\left(\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}\right)=\ln n-\frac{\ln n!}{n}=\frac{n\ln n-\sum_{k=1}^{n}\ln k}{n}=-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\ln\frac{k}{n}$$

考虑$[0,1]$的均匀n等分，即$x_0=0\le x_1=\frac{1}{n}\le x_2=\frac{2}{n}\le\cdots\le x_n=\frac{n}{n}=1$，取$\xi_i=\frac{i}{n},\forall 1\le i\le n$，可以将右边表达式的极限转化为一个收敛的瑕积分如下：

$$\lim_{n\to\infty}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\ln\frac{k}{n}=-\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\epsilon}^{1}\ln x\,\mathrm{d}x=-\lim_{\epsilon\to 0}(x\cdot\ln x-x)|_{\epsilon}^{1}=-(-1)=1$$

由此可得$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}=\mathrm{e}$。证毕。

(2)首先本题的代码，要尽量摒弃 C++当中使用 for 循环的思想方法和代码风格。其次，在

计算的过程中，要将 1~300 转化为符号型，因为$\sqrt[n]{n!}$在双精度型的计算中，因为$n!$过大有可能会计算出 Inf,导致最终的b_n等于 0，发生致命错误。

```
t = 1:300;        %定义1~300整数点的横坐标值
t = sym(t);
%如果不转化为符号型，bn后面的部分函数值计算会因为计算溢出而得到0
x = (1+1./t).^t;                          % an的对应纵坐标
y = t./((factorial(t)).^(1./t));          % bn的对应纵坐标
z = exp(1)*ones(1,300);                    %常数e的高度
plot(t,x,t,y,'-','LineWidth',2);
hold on
plot(t,z,':','LineWidth',2)
hold off
legend('(1+1/n)^n','n/((n!)^{1/n})','e','Location','South
East')
```

效果图如下，通过对比两条实现与虚线的距离，可以明显的发现，和函数收敛序列a_n收敛速度要比b_n快。