第二周作业问题：

问题一、(b)⇒(c)：

留意等式(a)中：

$$P(\boxed{X_{n+1}} = i_{n+1}|X_0 = i_0, \ldots, \boxed{X_n} = i_n) = P(\boxed{X_{n+1}} = i_{n+1}|\boxed{X_n} = i_n)$$

以及等式(b)中：

$$P(\boxed{X_{n+1}} = j|X_0 \in B_0, \cdots, X_{n-1} \in B_{n-1}, \boxed{X_n} = i) = P(\boxed{X_{n+1}} = j|\boxed{X_n} = i)$$

要求是X_{n+1}与X_n。如果要求代入等式(c)，那么就只能要求$k_{n+1} = k_n + 1$。

问题一思路A、

既然只有$k_{n+1} = k_n + 1$才能把等式(b)代入等式(c)，那么我们可以考虑用$k_n + 1, k_n + 2, \ldots, k_{n+1} - 1$把$k_n$与$k_{n+1}$连接起来。

$$\begin{aligned} & P(X_{k_{n+1}} = i_{n+1}|X_{k_n} = i_n, \ldots, X_{k_0} = i_0) \\ = \quad & P(X_{k_{n+1}} = i_{n+1}, X_{k_{n+1}-1} \in E, \ldots, X_{k_n+1} \in E|X_{k_n} = i_n, \ldots, X_{k_0} = i_0) \end{aligned}$$

之后利用条件概率的公式，就可以直接套用等式(b)：

$$\begin{aligned} & P(X_m = i_m, X_{m-1} = i_{m-1}, \ldots, X_{n+1} = i_{n+1}|X_n = i_n, \ldots, X_0 = i_0) \\ = \quad & P(X_m = i_m|X_{m-1} = i_{m-1}, \ldots, X_0 = i_0)P(X_{m-1} = i_{m-1}|X_{m-2} = i_{m-2}, \ldots, X_0 = i_0) \cdots P(X_{n+1} = i_{n+1}|X_n = i_n, \ldots, X_0 = i_0) \end{aligned}$$

问题一思路B、

既然只有$k_{n+1} = k_n + 1$才能把等式(b)代入等式(c)，那么可以考虑用数学归纳法，假设m的时候成立，然后再考虑$m + 1$的情况。要把$m + 1$的情况与m的情况联系在一起，可以考虑

$$\begin{aligned} & P(X_{m+1} = i_{m+1}|X_{k_n} = i_n, \ldots, X_{k_0} = i_0) \\ = \quad & \sum_{i_m \in E} P(X_{m+1} = i_{m+1}, X_m = i_m|X_{k_n} = i_n, \ldots, X_{k_0} = i_0) \end{aligned}$$

再利用条件概率公式，就可以利用等式(b)：

$$\begin{aligned} & P(X_{m+1} = i_{m+1}, X_m = i_m|X_{k_n} = i_n, \ldots, X_{k_0} = i_0) \\ = \quad & P(X_{m+1} = i_{m+1}|X_m = i_m, X_{k_n} = i_n, \ldots, X_{k_0} = i_0)P(X_m = i_m|X_{k_n} = i_n, \ldots, X_{k_0} = i_0) \end{aligned}$$

问题二、(c)⇒(b)：
部分同学是这样证明的：
令$k_n = n$、$B_n = \{i_n\}$，代入等式(b)即可。
这个证明方法是**错误**的!!
利用等式(c)去证明等式(b)，就必须固定$B_0, B_1, \ldots, B_{n-1}$，不是你想把$B_0$变成$i_0$就能够变成。
就好比你想证明$x \in B \Rightarrow x \in A$，不能过说令$A = B$，等式显然成立。
问题二思路、
具体可以参照等式(a)⇒等式(b)。