

Q1. 有序列 $x(k) = a^k, h(k) = b^k$, (在此 $k \geq 0, a \neq b$), 求这两个序列的卷积 $y(k) = \sum_{n=0}^k h(n)x(k-n)$ 。

答：

(1) 直接法

```
syms a b n k
x=a^k;
h=b^k;
w=symsum(subs(h,k,n)*subs(x,k,k-n),n,0,k);    %据定义
y1=simplify(w)
y1 =
piecewise(a == b & b ~= 0, b^k*(k + 1), a ~= b | b == 0, (a^(k + 1) -
b^(k + 1))/(a - b))
```

%事实上, 本题已假设 a 和 b 不相等, 因此仅有后面的表达式是有效的, 但使用 `assume` 函数可以让结果更加漂亮, 如下

```
syms a b n k
assume(a~=b);
x=a^k;
h=b^k;
w=symsum(subs(h,k,n)*subs(x,k,k-n),n,0,k);    %据定义
y1=simplify(w)
y1 =
(a^(k + 1) - b^(k + 1))/(a - b)
```

(2) Z 变换法

```
syms a b n k w z
assume(a~=b);assumeAlso(a~=0);assumeAlso(b~=0);
%a 与 b 不为 0 的显示更加简练 (其实 a 或 b 为 0 也应该对的, 这是 MATLAB 处理不到位)
X=ztrans(a^k,k,z);
H=ztrans(b^k,k,z);
w=iztrans(H*X,z,k);
y2 = simplify(w)    %通过 z 变换及反变换
y2 =
(a^(k + 1) - b^(k + 1))/(a - b)
```

%可见, a 不等于 b 时, 两种方法获得的结果完全相同

Q2. 利用符号运算证明 Laplace 变换的时域求导性质: $L\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = s \cdot L[f(t)] - f(0)$ 。

答：

```
syms t s f(t);
df=diff(f(t),t);
Ldy=laplace(df,t,s)
Ldy =
s*laplace(f(t), t, s) - f(0)
```

Q3. 求方程 $x^2 + y^2 = 1, xy = 2$ 的解

答：

```
syms x y
eq1=x^2+y^2==1;
eq2=x*y==2;
[x,y]=solve(eq1,eq2,x,y)
x =
(1/2 + (15^(1/2)*i)/2)^(1/2)/2 - (1/2 + (15^(1/2)*i)/2)^(3/2)/2
- (1/2 + (15^(1/2)*i)/2)^(1/2)/2 + (1/2 + (15^(1/2)*i)/2)^(3/2)/2
(1/2 - (15^(1/2)*i)/2)^(1/2)/2 - (1/2 - (15^(1/2)*i)/2)^(3/2)/2
- (1/2 - (15^(1/2)*i)/2)^(1/2)/2 + (1/2 - (15^(1/2)*i)/2)^(3/2)/2
y =
(1/2 + (15^(1/2)*i)/2)^(1/2)
-(1/2 + (15^(1/2)*i)/2)^(1/2)
(1/2 - (15^(1/2)*i)/2)^(1/2)
-(1/2 - (15^(1/2)*i)/2)^(1/2)
```

Q4. 定义参数曲面 $x = \cos \theta \sin \alpha, y = \sin \theta \sin \alpha, z = \cos \alpha. (0 \leq \alpha \leq \pi/6, 0 \leq \theta \leq \pi)$, 分别利用 MATLAB 命令 ezmesh,ezsurf,ezsurf 完成对应的曲面绘图, 并且尝试调整坐标轴的位置, 观察角度 (函数命令或鼠标操作), 以及光照, 调色板等各种功能, 尝试美化绘图效果。

答: (仅提供 MATLAB R2016b 基础显示无美化效果图, 注意用 axis equal 和 axis 的范围确保结果曲面可以符合真实的比例, 而改变 view 和 axis 可以使结果图更加清晰、明确)

```
close all
clear
syms alpha theta
x = cos(theta)*sin(alpha);
y = sin(theta)*sin(alpha);
z = cos(alpha);
ezmesh(x,y,z,[0,pi/6,0,pi])

% 默认斜上方角度, 注意参数是按字典序排序

axis equal% 纵横比不拉伸

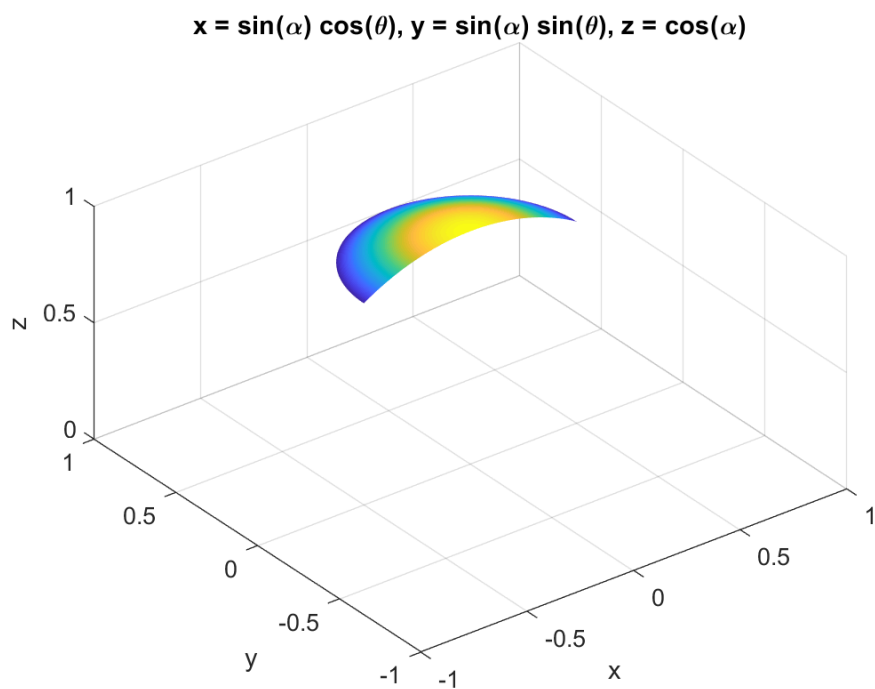
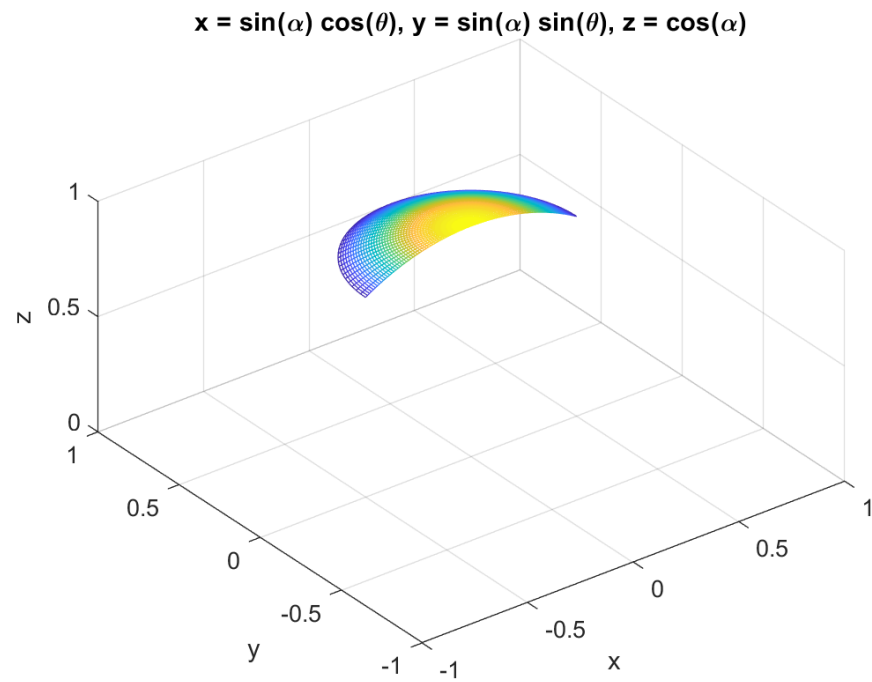
axis([-1,1,-1,1,0,1]) % 坐标范围 $x \in [-1,1], y \in [-1,1], z \in [0,1]$ 

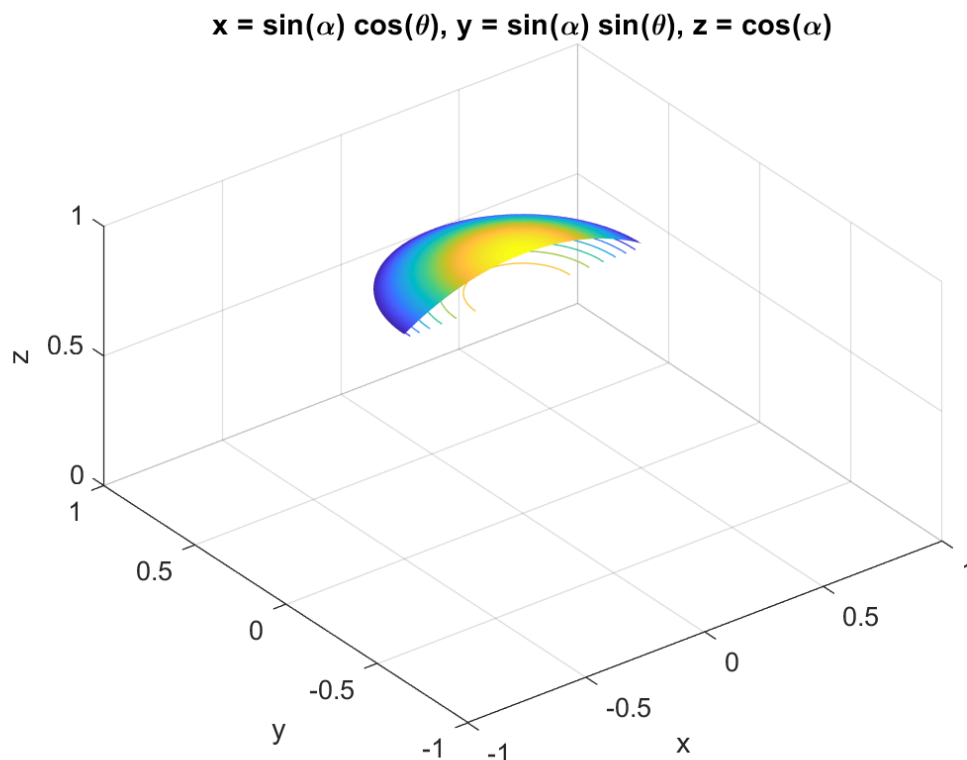
figure;
ezsurf(x,y,z,[0,pi/6,0,pi])

shading interp% 去掉网格线

axis equal
axis([-1,1,-1,1,0,1])
```

```
figure;
ezsurf(x,y,z,[0,pi/6,0,pi]) % 可见绘制的等值线
shading interp
axis equal
axis([-1,1,-1,1,0,1])
```





Q5. (选做) 二次曲面的复习与绘图

- (1) 二次曲面 $z = xy$ 是哪一种类型的曲面，曲面 $x^2 - 2xy + 2y + z^2 = 4$ 又是哪一种类型的曲面？为什么？请进行论证。
- (2) 二次曲面还有多少种大的类型？请对二次曲面的其他每个类型分别举出一个例子。
- (3) 使用 MATLAB 函数 `ezsurf` 或 `fsurf` 或 `fimplicit3` 尝试将前两问所出现或列举的曲面进行图示。写下代码和图示结果。

答：(1) 由配方法可以得到 $z = xy = \frac{(x+y)^2 - (x-y)^2}{2}$ ，因此可得该二次曲面为双曲抛物面（鞍型抛物面），而 $x^2 - 2xy + 2y + z^2 = (x-y)^2 - (y-1)^2 + z^2 + 1$ ，因此二次曲面 $x^2 - 2xy + 2y + z^2 = 4$ 与 $(x-y)^2 - (y-1)^2 + z^2 = 3$ 是相同类型的曲面，因此该曲面的三个平方项有两个正系数和一个负系数，为单叶双曲面。

另外，曲面 $z = xy$ 也可以用分析二次型的方法来判别曲面的类型， xy 的二次型矩阵为 $\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$ ，

矩阵的特征值为 $\pm \frac{1}{2}$ ，两个异号的特征值，表明了 $z = xy$ 是一个鞍型抛物面，在 $(x, y) = (0, 0)$ 处为 $z = f(x, y)$ 的鞍点。

(2) 除双曲抛物面、单叶双曲面外，二次曲面总体上还有七个大类型：

1. 椭球面（含球面）：举例 $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$
2. 双叶双曲面：举例 $x^2 - 2y^2 - 3z^2 = 6$
3. 椭圆抛物面：举例 $z = x^2 + 2y^2$
4. 椭圆锥面：举例 $z^2 = x^2 + 2y^2$
5. 双曲柱面：举例 $x^2 - y^2 = 1$
6. 椭圆柱面：举例 $x^2 + 2y^2 = 1$
7. 抛物柱面：举例 $y = x^2$

(3)对于上述九个曲面，可以分别进行绘图，这里推荐函数 `fimplicit3`，因为可以直接对三元隐函数 $F(x,y,z) = 0$ 绘图，不担心显函数只能画出曲面一支的情况。代码与绘图如下：

```
clear all, close all
```

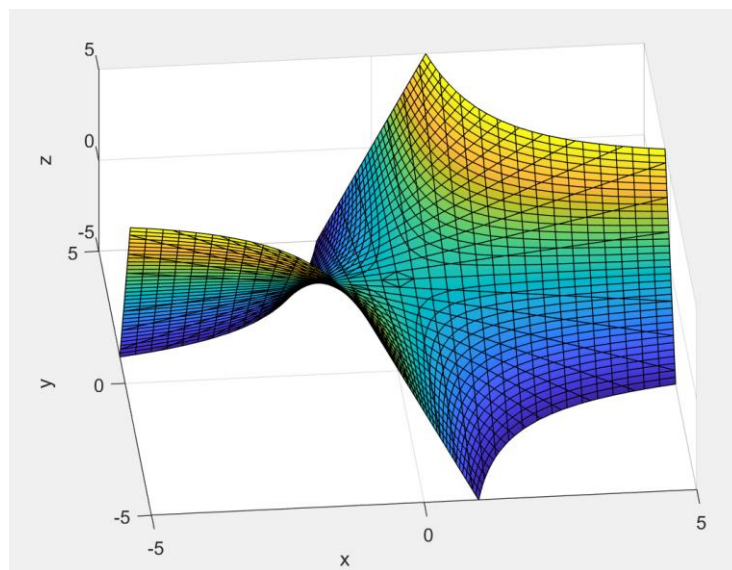
```
syms x y z
```

```
fimplicit3(z-x*y)
```

%绘制双曲抛物面

```
xlabel('x'), ylabel('y'), zlabel('z')
```

%给三个坐标轴加上标签

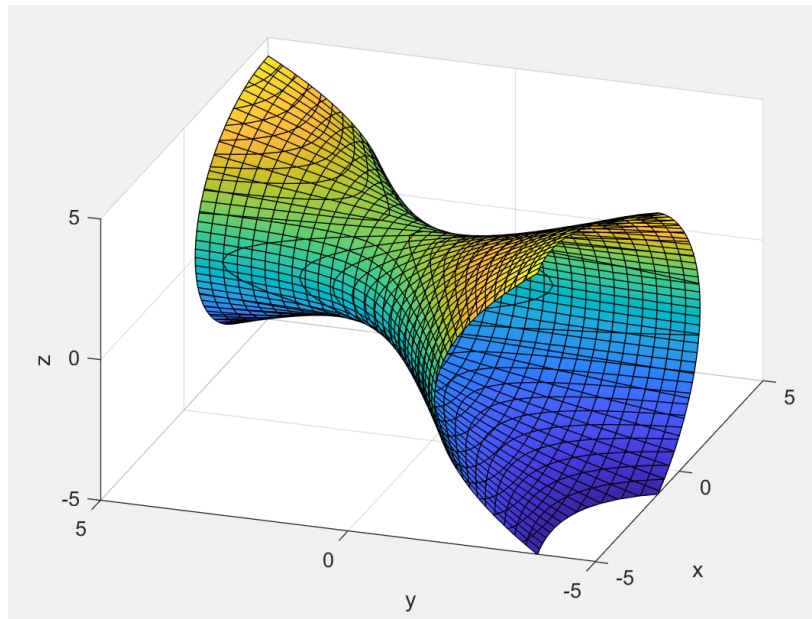


```
figure;
```

```
fimplicit3(x^2-2*x*y+2*y+z^2-4)
```

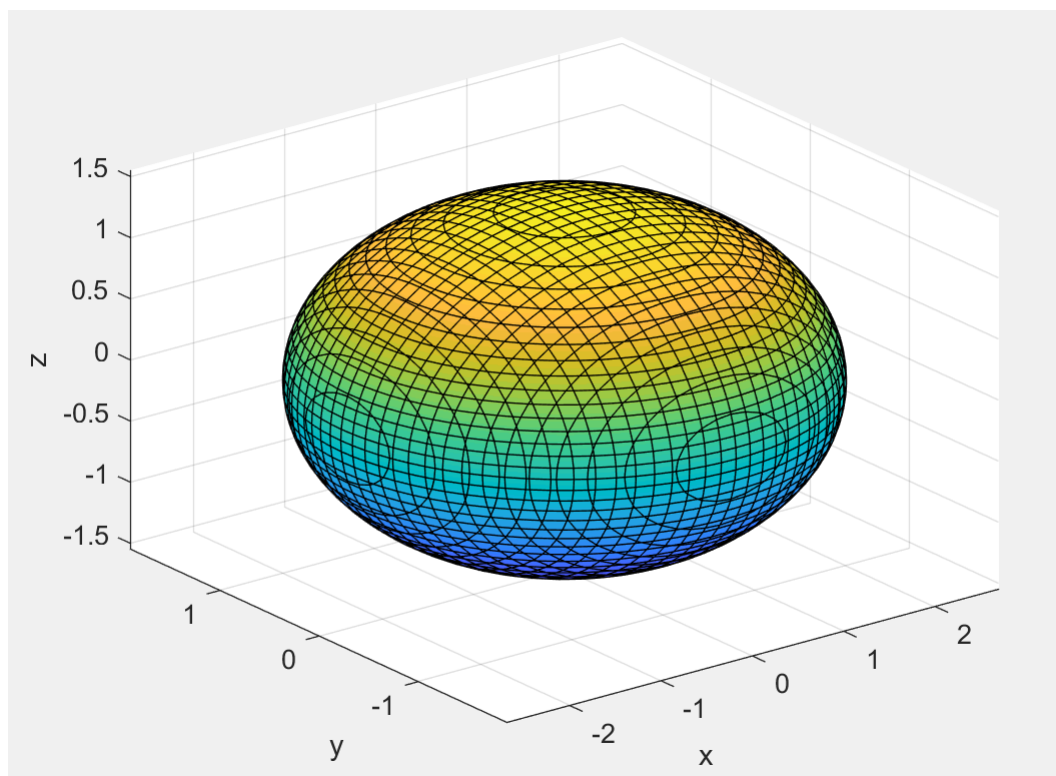
%绘制单叶双曲面（小蛮腰）

```
xlabel('x'), ylabel('y'), zlabel('z')
```



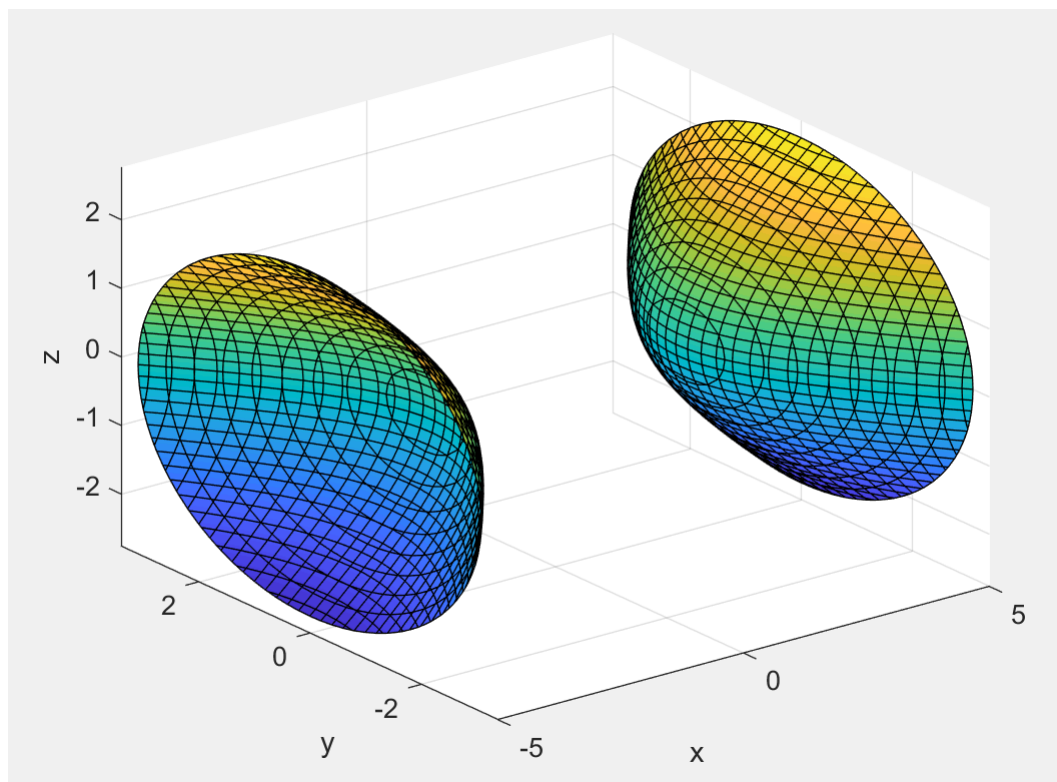
```
figure;
fimplicit3(x^2+2*y^2+3*z^2-6)
xlabel('x'),ylabel('y'),zlabel('z')
```

%绘制椭球面

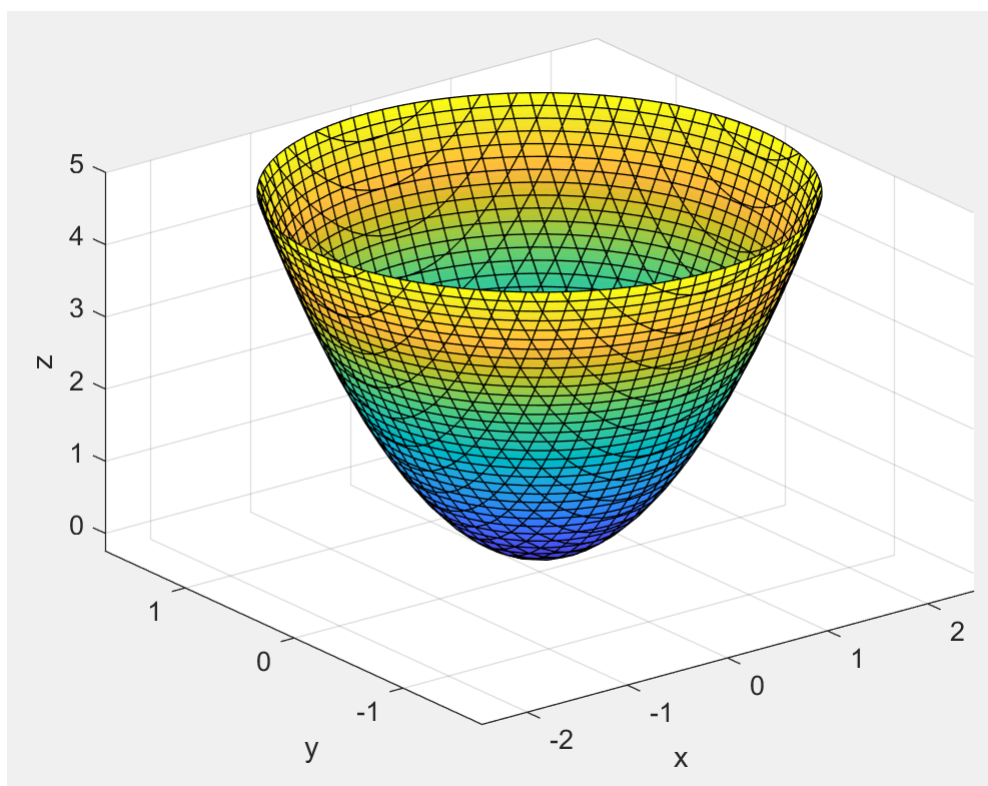


```
figure;
fimplicit3(x^2-2*y^2-3*z^2-6)
xlabel('x'),ylabel('y'),zlabel('z')
```

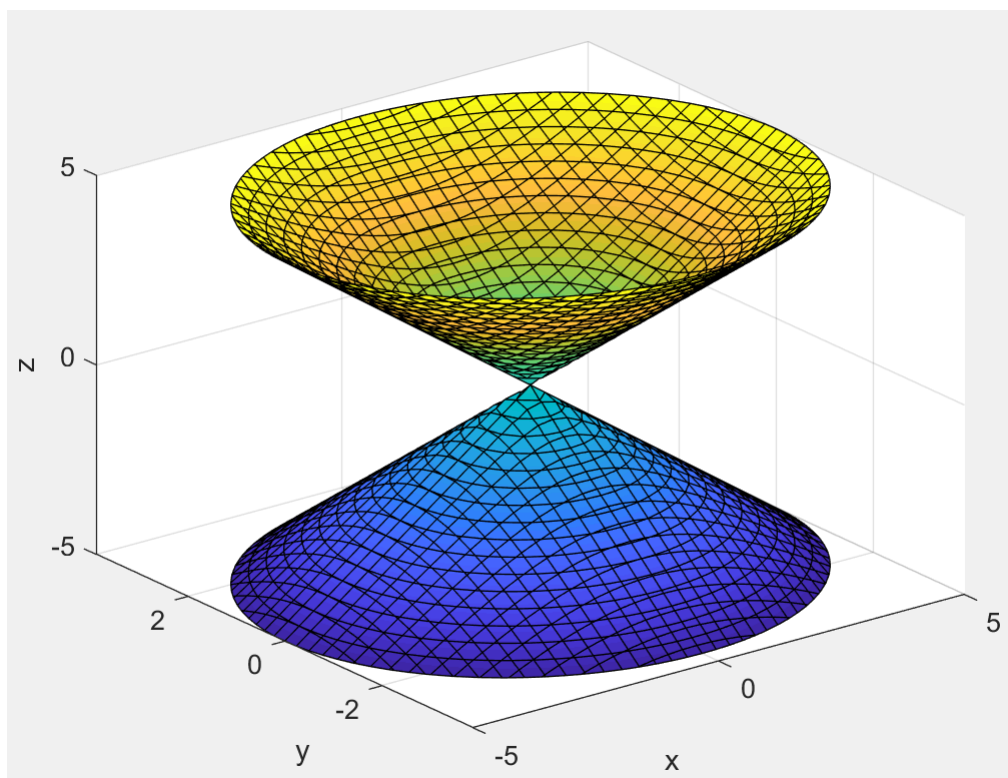
%绘制双叶双曲面



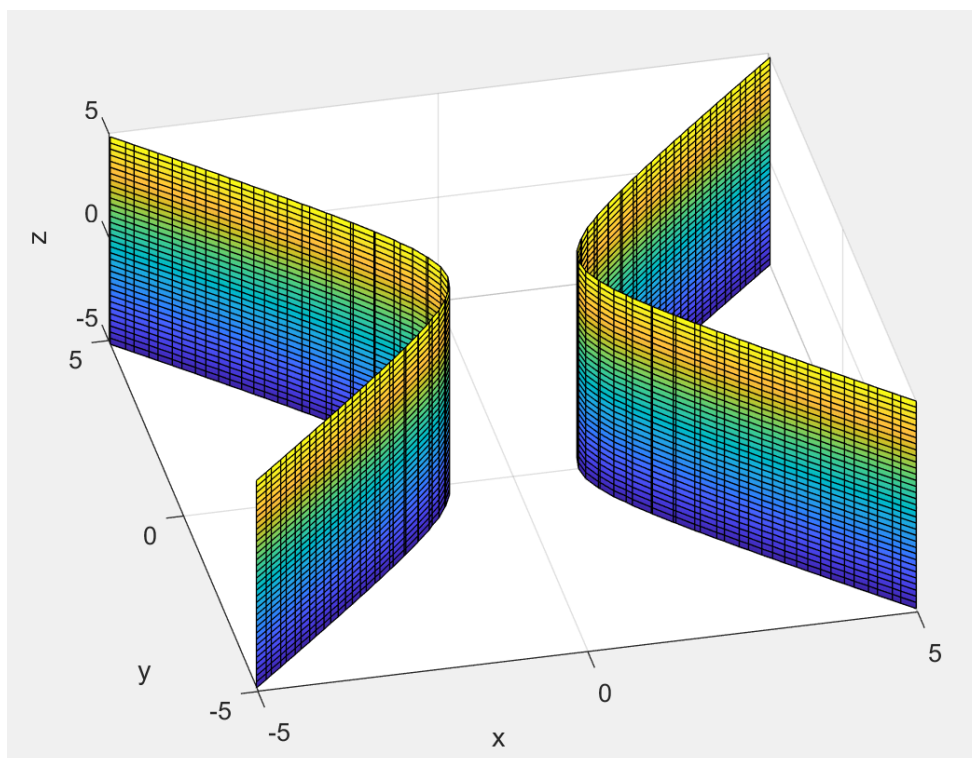
```
figure;
fimplicit3(z-x^2-2*y^2) %绘制椭圆抛物面
xlabel('x'),ylabel('y'),zlabel('z')
```



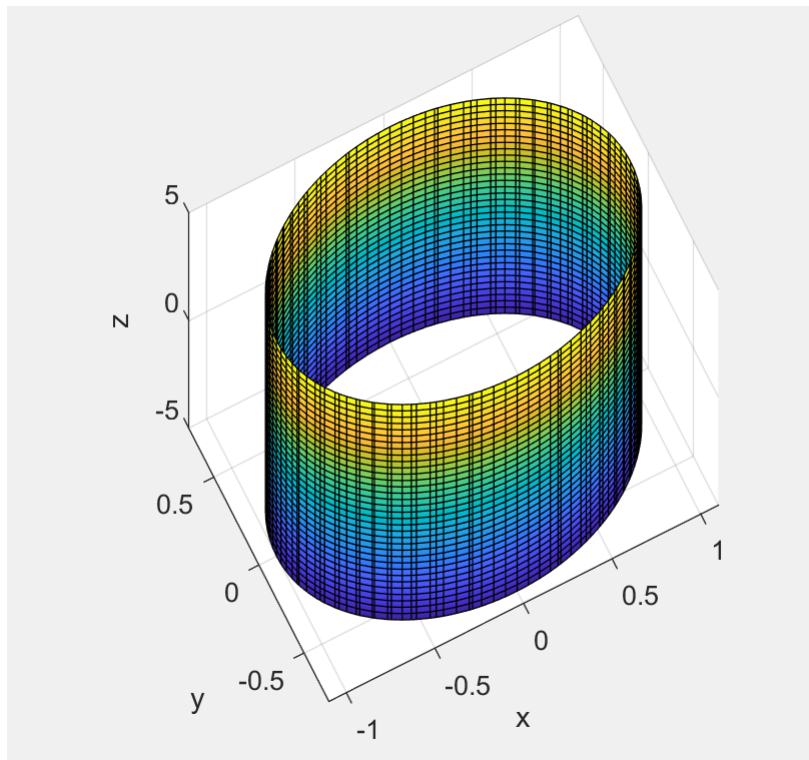
```
figure;
fimplicit3(z^2-x^2-2*y^2) %绘制椭圆锥面
xlabel('x'),ylabel('y'),zlabel('z')
```

```
figure;
fimplicit3(x^2-y^2-1) %绘制双曲柱面
xlabel('x'), ylabel('y'), zlabel('z')
```




```
figure;
fimplicit3(x^2+2*y^2-1) %绘制椭圆柱面
axis equal,xlabel('x'),ylabel('y'),zlabel('z') %无放缩防失真
```



```
figure;
fimplicit3(y-x^2) %绘制抛物柱面
axis equal,xlabel('x'),ylabel('y'),zlabel('z')
```

