SymPy

—符号运算库

目录

- 从例子开始
  - 欧拉恒等式
  - 球体体积
- 数学表达式
  - 符号
  - 数值
  - 运算符和函数
- 符号运算
  - 表达式变换和化简
  - 方程

目录

- 极限
- 微分
- 微分方程
- 积分
- 矩阵

- 其它功能

SymPy是一个符号数学Python库。它的目标是成为一个全功能的计算机代数系统，同时保持代码的精简而易于理解和可扩展。SymPy完全由Python写成，不需要任何外部库。

可用SymPy进行数学表达式的符号推导和演算。可使用isympy运行程序，isympy在IPython的基础上添加了数学表达式的直观显示功能。启动时还会自动运行下面的程序：

```
from __future__ import division
from sympy import *
x, y, z, t = symbols('x,y,z,t')
k, m, n = symbols('k,m,n', integer=True)
f, g, h = symbols('f,g,h', cls=Function)
#init_printing(use_latex=‘mathjax’)

symbols?
```

这段程序首先将Python的除法操作符“/”从整数除法改为普通除法。然后从SymPy库载入所有符号，并且定义了四个通用的数学符号x、y、z 、t，三个表示整数的符号k、m、n，以及三个表示数学函数的符号f、g、h。

从例子开始

- 欧拉恒等式

$$e^{i\pi}+1=0$$

此公式被称为欧拉恒等式，其中e是自然常数，i是虚数单位，π 是圆周率。此公式被誉为数学中最奇妙的公式，它将5个基本数学常数用加法、乘法和幂运算联系起来。

从SymPy库载入的符号中，E表示自然常数，I表示虚数单位，pi表示圆周率，因此上面的公式可以直接如下计算：

```
>>>E**(I*pi)+1
 0
```

从例子开始

SymPy除了可以直接计算公式的值之外，还可以帮助做数学公式的推导和证明。欧拉恒等式可以将 π 代入下面的欧拉公式得到：

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x$$

在SymPy中可以使用expand()将表达式展开，用它展开 e^{ix} 试试看：

```
>>> expand( E**(I*x))
exp(I*x)
```

没有成功，只是换了一种写法而已。当expand()的complex参数为True时，表达式将被分为实数和虚数两个部分：

从例子开始

```
>>> expand(exp(I*x), complex=True)
 I*exp(-im(x))*sin(re(x)) + exp(-im(x))*cos(re(x))
```

这次将表达式展开了，但是得到的结果相当复杂。显然，**expand()**将x当做复数了。为了指定x为实数，需要重新定义x:

```
>>> x = Symbol("x", real=True)
>>> expand(exp(I*x), complex=True)
Isin(x)+cos(x)
```

终于得到了需要的公式。可以用泰勒多项式对其进行展开:

从例子开始

```
>>>tmp = series(exp(I*x), x, 0, 10)
>>> print  tmp
1 + I*x - x**2/2 - I*x**3/6 + x**4/24 +
I*x**5/120 - x**6/720 - I*x**7/5040 +
x**8/40320 + I*x**9/362880 + O(x**10)
```

series()对表达式进行泰勒级数展开。可以看到展开之后虚数项和实数项交替出现。根据欧拉公式，虚数项的和应该等于sin(x)的泰勒展开，而实数项的和应该等于cos(x)的泰勒展开。

从例子开始

下面获得tmp的实部：

```
>>> re(tmp)
x**8/40320 - x**6/720 + x**4/24 - x**2/2 +
re(O(x**10)) + 1
```

下面对cos (x)进行泰勒展开，可看到其中各项和上面的结果是一致的。

```
>>> series(cos(x), x, 0, 10)
1 - x**2/2 + x**4/24 - x**6/720 + x**8/40320 +
O(x**10)
```

从例子开始

下面获得tmp的虚部:

```
>>> im(tmp)
x**9/362880 - x**7/5040 + x**5/120 - x**3/6 + x +
im(O(x**10))
```

下面对sin (x)进行泰勒展开，其中各项也和上面的结果一致。

```
>>>series(sin(x), x, 0, 10)
x - x**3/6 + x**5/120 - x**7/5040 + x**9/362880 +
O(x**10)
```

由于e^{ix}展开式的实部和虚部分别等于cos(x)和sin(x),因此验证了欧拉公式的正确性。

从例子开始

- 球体体积

Scipy介绍了如何使用数值定积分计算球体的体积，SymPy中的integrate()则可以进行符号积分。用integrate()进行不定积分运算：

```
>>> integrate(x*sin(x), x)
 -x*cos(x) + sin(x)
```

如果指定变量x的取值范围,integrate()就能进行定积分运算:

```
>>> integrate(x*sin(x), (x, 0,2*pi))
- 2*pi
```

从例子开始

为了计算球体体积，首先看看如何计算圆的面积，假设圆的半径为r，则圆上任意一点的Y坐标函数为：

$$y(x)=\sqrt{r^2-x^2}$$

因此可以直接对函数y(x)在-r到r区间上进行定积分得到半圆面积。

```
>>> x, y, r =symbols('x,y,r')
>>> f=2 * integrate(sqrt(r*r-x**2), (x, -r, r))
>>> print f
2*Integral(sqrt(r**2 - x**2), (x, -r, r))
```

从例子开始

首先需要定义运算中所需的符号，这里用symbols()一次创建多个符号。Integrate()没有计算出积分结果，而是直接返回了输入的算式。这是因为SymPy不知道r是大于0的，重新定义r，就可以得到正确答案了：

```
>>> r = symbols( 'r', positive=True)
>>> circle_area = 2 * integrate(sqrt(r**2-x**2), (x, -r, r))
>>> print circle_area
pi*r**2
```

接下来对此面积公式进行定积分，就可以得到球体的体积，但是随着X轴坐标的变化，对应切面的半径也会发生变化。

从例子开始

假设X轴的坐标为x,球体的半径为r,那么x处球的切面半径可以使用前面的公式y(x)计算出。因此需要对圆的面积公式circle_area中的变量r进行替代:

```
>>> circle_area = circle_area.subs(r, sqrt(r**2-x**2))
>>> print circle_area
pi*(r**2 - x**2)
```

然后对circle_area中的变量x在区间-r到r上进行定积分，就可以得到球体的体积公式:

```
>>>print  integrate(circle_area, (x, -r, r))
4*pi*r**3/3
```

从例子开始

用subs进行算式替换： #circle_area.subs?

subs()可以将算式中的符号进行替换，它有3种调用方式：

- expression.subs(x, y):将算式中的 x 替换成 y.
- expression.subs({x:y,u:v}):使用字典进行多次替换.
- expression.subs([(x,y),(u,v)])：使用列表进行多次替换.

请注意多次替换是顺序执行的，因此：

expression.subs([(x,y),(y,x)])

并不能对符号x和y进行交换。

数学表达式

- 符号

创建一个符号使用symbols()，此函数会返回一个Symbol对象，用于表示符号变量，其有name属性，这是符号名，如：

```
>>> x0=symbols('x0')
```

其中左边的x0是一个符号对象，而右边括号中用引号包着的x0是符号对象的name属性，两个x0不要求一样，但是为了易于理解，通常将符号对象和name属性显示成一样，另外name属性是引号包起来的。如要同时配置多个符号对象，symbols()中多个name属性可以以

数学表达式

空格或者逗号分隔，然后用引号包住，如下：

```
>>> x0,y0,x1,y1=symbols('x0,y0,x1,y1')
```

一次配置四个符号，由于符号对象名和name属性名经常一致，所以可以使用var（）函数，如：

```
>>> var("x0,y0,x1,y1")
(x0, y0, x1, y1)
```

这语句和上个语句功能一致，在当前环境中创建了4个同名的Symbol对象（为了防止误会，使用symbols其实更好）。

数学表达式

上面的语句创建了名为x0、y0、x1、y1的4个Symbol对象，同时还在当前的环境中创建 了4个同名的变量来分别表示这4个Symbol对象。因为符号对象在转换为字符串时直接使用它的name 属性，因此在交互式环境中看到变量,x0的值就是x0，但是查看变量x0的类型时就可以发现，它实际上是一个Symbol对象。

```
>>> x0
x0
>>> type(x0)
sympy.core.symbol.Symbol
>>> x0.name
'x0'
>>> type(x0.name)
str
```

数学表达式

变量名和符号名当然也可以是不一样的，例如：

```
>>> a, b = symbols ("alpha, beta")
>>> a, b
(alpha, beta)
```

数学公式中的符号一般都有特定的假设，例如m、n通常是整数，而z经常表示复数。在用var()、symbols()或Symbol()创建Symbol对象时，可以通过关键字参数指定所创建符号的假设条件，这些假设条件会影响到它们所参与的计算。

数学表达式

例如，下面创建了两个整数符号m和n, 以及一个正数符号x:

```
>>> m, n = symbols("m,n", integer=True)
>>> x = Symbol("x", positive=True)
# symbols?
```

每个符号都有许多is_*属性，用以判断符号的各种假设条件。在IPython中，使用自动完成功能可以快速查看这些假设的名称。注意下划线后为大写字母的属性，用来判断对象的类型; 而全小写字母的属性，则用来判断符号的假设条件。

数学表达式

```
>>> x.is_  #按了tab键自动完成


>>> x.is_Symbol # x 是一个符号
True
>>> x.is_positive # x 是一个正数
True
>>> x.is_imaginary #因为x可以比较大小，所以它不是虚数
False
>>> x.is_complex # x是一个复数，因为复数包括实数，而实数包括正数
True
```

数学表达式

- 数值

　　为了实现符号运算，在SymPy内部有一整套数值运算系统。因此SymPy的数值和Python 的整数、浮点数是完全不同的对象。为了使用方便，SymPy会尽量自动将Python的数值类型转换为SymPy的数值类型。此外，SymPy提供了一个S对象用于进行这种转换。在下面的例子中，当有SymPy的数值参与计算时，结果将是SymPy的数值对象。

数学表达式

```
>>> 1/2 + 1/3 #结果为浮点数
0.8333333333333333
>>> S(1)/2 + 1/S(3) #结果为SymPy的数值对象
5/6
```

“5/6”在SymPy中使用Rational对象表示，它由两个整数的商表示，数学上称之为有理数。也可以直接通过Rational创建：

```
>>> Rational(5, 10) #有理数会自动进行约分处理
1/2
```

数学表达式

- 运算符和函数

　　SymPy重新定义了所有的数学运算符和数学函数。例如Add类表示加法，Mul类表示乘法，而Pow类表示指数运算，sin类表示正弦函数。和Symbol对象一样，这些运算符和函数都从Basic类继承，可在IPython中查看它们的继承列表(例如:Add.mro())。可以使用这些类创建复杂的表达式：

```
>>> var("x,y,z,n")
>>> Add(x,y,z)
 x + y + z
>>> Add(Mul(x,y,z), Pow(x,y), sin(z))
x*y*z + x**y + sin(z)
```

数学表达式

由于在Basic类中重新定义了__add__()等用于创建表达式的方法，因此可以使用和Python表达式相同的方式创建SymPy的表达式：

```
>>> x*y*z + sin(z) + x**y
x*y*z + x**y + sin(z)
```

在Basic类中定义了两个很重要的属性：func和args。func属性得到对象的类，而args得到其参数。使用这两个属性可以观察SymPy所创建的表达式。 SymPy没有减法运算类，下面看看减法运算所得到的表达式：

数学表达式

```
>>> t = x - y
>>> t.func # 减法运算用加法类Add表示
sympy.core.add.Add
>>> t.args # 两个加数一个是x，一个是-y
(x, -y)
 >>> t.args[1].func # -y是用Mul表示的
sympy.core.mul.Mul
>>> t.args[1].args
(-1, y)
```

通过上面的例子可以看出，表达式“x-y”在SymPy中实际上是用“Add(x, Mul(-1, y))”表示的。同样，SymPy中没有除法类，可使用和上面相同的方法观察“x/y”在SymPy中是如何表示的。

数学表达式

SymPy的表达式实际上是一个由Basic类的各种对象进行多层嵌套所得到的树状结构。下面的函数使用递归显示这种树状结构：

```
def print_expression(e, level=0):
    spaces = " "*level
    if isinstance(e, (Symbol, Number)):
        print spaces + str(e)
        return
    if len(e.args) > 0:
        print spaces + e.func.__name__
        for arg in e.args:
            print_expression(arg, level+1)
    else:
        print spaces + e.func.__name__
```

数学表达式

例如 $\sqrt{x^2+y^2}$ 在SymPy中使用下面的树表示：

```
>>>print_expression(sqrt(x**2+y**2))
Pow
    Add
        Pow
            x
            2
        Pow
            y
            2
     1/2
```

由于其中的各个对象的args属性类型是元组，因此表达式一旦创建就不能再改变。使用不可变的结构表示表达式有很多优点，例如可以用表达式作为字典的键。

数学表达式

除了使用SymPy中预先定义好的具有特殊运算含义的数学函数之外，还可以使用Function()创建自定义的数学函数：

```
>>> f = Function("f")
```

请注意Function虽然是一个类，但是上面的语句所得到的f并不是Function类的实例。和预定义的数学函数一样，f是一个类，它从Function类继承：

```
>>> f.__base__
sympy.core.function.AppliedUndef
>>> isinstance(f, Function)
False
```

数学表达式

当使用f创建一个表达式时，就相当于创建它的一个实例：

```
>>> t = f(x,y)
>>> isinstance(t, Function)
True
>>> type(t)
f
>>> t.func # （其中func和args是Basic类的两个非常重要的属性，分别表示对象的类和对象的参数）
f
>>> t.args
(x, y)
```

f的实例t可以参与表达式运算：

```
>>> t+t*t
f(x, y)**2 + f(x, y)
```

符号运算

- 表达式变换和化简

simplify()可以对数学表达式进行化简，例如:

```
>>> simplify((x+2)**2 - (x+1)**2)
2*x + 3
```

simplify()调用SymPy内部的多种表达式变换函数对表达式进行化简运算。但是数学表达式的化简是一件非常复杂的工作，并且对于同一个表达式，根据其使用目的可以有多种化简方案。

符号运算

radsimp()对表达式的分母进行有理化，它所得到的表达式的分母部分将不含无理数。例如：

```
>>> radsimp(1/(sqrt(5)+2*sqrt(2)))
(-sqrt(5) + 2*sqrt(2))/3
```

它也可以对带符号的表达式进行处理:

```
>>>radsimp(1/(y*sqrt(x)+x*sqrt(y)))
(-sqrt(x)*y + x*sqrt(y))/(x*y*(x - y))
```

符号运算

ratsimp()对表达式中的分母进行通分运算，即将表达式转换为分子除分母的形式：

```
>>> ratsimp(x/(x+y)+y/(x-y))
2*y**2/(x**2 - y**2) + 1
```

fraction()返回一个包含表达式的分子和分母的元组,用它可以获得ratsimp()通分之后的分子或分母：

```
>>> fraction(ratsimp(1/x+1/y))
(x + y, x*y)
```

注意fraction()不会自动对表达式进行通分运算，因此：

```
>>> fraction(1/x+1/y)
(1/y + 1/x, 1)
```

符号运算

expand（）是对括号里的多项式进行展开。

```
>>> expr1 = (x+1)**2
>>> expr2 = ((x + 1)*(x - 2) - (x - 1)*x)

>>> r1 = expand(expr1)
>>> r2 = expand(expr2)



x**2 + 2*x + 1
-2
```

符号运算

cancel()对分式表达式的分子分母进行约分运算，可以对纯符号的分式表达式以及自定义函数表达式进行约分，但是不能对内部函数的表达式进行约分。

```
>>>cancel((x**2-1)/(1+x))
x-1
>>> cancel(sin((x**2-1)/(1+x))) # cancel不能对函数内部的表达式进行约分
sin(x**2/(x + 1) - 1/(x + 1))
>>> cancel((f(x)**2-1)/(f(x)+1))  #能对自定义函数表达式进行约分
f(x) - 1
```

符号运算

trigsimp()对表达式中的三角函数进行化简。它有两个可选参数--deep和recursive，默认值都为False。当deep参数为True时，将对表达式中的所有子表达式进行化简运算；当recursive参数为True时，将递归使用trigsimp()进行最大限度的化简：

```
>>> trigsimp(sin(x)**2+2*sin(x)*cos(x)+cos(x)**2)
sin(2*x) + 1
>>> trigsimp(f(sin(x)**2+2*sin(x)*cos(x)+cos(x)**2))  #也能对自定义函数中的三角函数化简，deep和recursive？？？
 f(sin(2*x) + 1)
```

符号运算

expand_trig()可以对三角函数的表达式进行展开。它实际上是对expand()的封装，通过将expand()的trig参数设置为True,实现三角函数的展开计算。输入“expand_trig??” 来查看它调用expand()时的参数。

```
>>> expand_trig(sin(2*x+y))
(2*cos(x)**2 - 1)*sin(y) + 2*sin(x)*cos(x)*cos(y)
```

expand()通用的展开运算，根据用户设置的标志参数对表达式进行展开。默认情况下，以下的标志参数为 True。

mul：展开乘法

符号运算

log:展开对数函数参数中的乘积和幂运算

```
>>> x,y=symbols("x,y",positive=True)
>>> expand(log(x*y**2))      # expand??
log(x) + 2*log(y)
```

multinomial:展开加法式的整数次幂

```
>>> expand((x+y)**3)
x**3 + 3*x**2*y + 3*x*y**2 + y**3
```

power_base:展开幂函数的底数乘积

```
>>>expand(x**(y+z))
x**y*x**z
```

符号运算

可以将默认为True的标志参数设置为False,强制不展开对应的表达式。在下面的例子中， 将mul设置为False,因此不对乘法进行展开:

```
>>> x,y,z=symbols("x,y,z", positive=True)
>>> expand(x*log(y*z), mul=False)
x*(log(y) + log(z))
```

expand()的以下标志参数默认为False。

complex:展开复数的实部和虚部，默认不展开复数的实部和虚部:

```
>>> x,y=symbols("x,y",complex=True)
>>> expand(x*y, complex=True)
re(x)*re(y) + I*re(x)*im(y) + I*re(y)*im(x) -
im(x)*im(y)
```

符号运算

func:对一些特殊函数进行展开

```
>>> expand (gamma (1+x),func=True)
x*gamma(x)
```

trig:展开三角函数

```
>>> expand(sin(x+y), trig=True)
sin(x)*cos(y) + sin(y)*cos(x)
```

expand_log()、expand_mul()、expand_complex()、expand_trig()、expand_func()等函数则通过将相应的标志参数设置为True,对expand()进行封装。

符号运算

factor()可以对多项式表达式进行因式分解：

```
>>> factor(15*x**2+2*y-3*x-10*x*y)
 (3*x - 2*y)*(5*x - 1)
>>> factor(expand((x+y)**20))
(x + y)**20
```

collect()收集表达式中指定符号的有理指数次幂的系数。例如，希望获得如下表达式中x的各次幂的系数：

```
>>> a,b=symbols('a,b')
>>> eq = (1+a*x)**3 + (1+b*x)**2
```

符号运算

首先需要对表达式eq进行展开，得到的表达式eq2是一系列乘式的和:

```
>>> eq2 = expand (eq)
>>> eq2
a**3*x**3 + 3*a**2*x**2 + 3*a*x + b**2*x**2
+ 2*b*x + 2
```

然后调用collect(),对表达式eq2中X的幂的系数进行收集：

```
>>> collect(eq2,x)
a**3*x**3 + x**2*(3*a**2 + b**2) + x*(3*a +
2*b) + 2
```

符号运算

默认情况下，collect()返回的是一个整理之后的表达式，如果希望得到x的各次幂的系数，可以设置evaluate参数为False,让它返回一个以X的幂为键、值为系数的字典：

```
>>> p = collect(eq2, x, evaluate=False)
>>> p[S(1)] #常数项，注意需要用SymPy中的数值1,或者使用p[x**0]
2
>>> p[x**2] # x的2次项系数
b**2 + 3*a**2
```

符号运算

collect()也可以收集表达式的各次幂的系数，例如下面的程序收集表达式“sin(2*x)”的系数:

```
>>> collect(a*sin(2*x) + b*sin(2*x), sin(2*x))
 (a + b)*sin(2*x)
```

符号运算

- 方程solve()

　　在SymPy中，表达式可以直接表示值为0的方程。也可以使用Eq()创建方程。solve()可以对方程进行符号求解，它的第一个参数是表示方程的表达式，其后的参数是表示方程中未知变量的符号。下面的例子使用solve()对一元二次方程进行求解:

```
>>> a,b,c = symbols("a,b,c")
>>> solve(a*x**2+b*x+c, x)
[(-b + sqrt(-4*a*c + b**2))/(2*a), -(b + sqrt(-
4*a*c + b**2))/(2*a)]
```

符号运算

使用Eq创建一个方程对象并求解：

```
>>> my_eq=Eq(a*x**2+b*x+c,0)
>>> solve(my_eq,x)
[(-b + sqrt(-4*a*c + b**2))/(2*a), -(b + sqrt(-
4*a*c + b**2))/(2*a)]
```

符号运算

由于方程的解可能有多组，因此solve()返回一个列表保存所有的解。可以传递包含多个表达式的元组或列表，让solve()对方程组进行求解，得到的解是两层嵌套的列表，其中每个元组表示方程组的一组解：

```
#对方程组求解（用元组将几个方程组成一个组）
>>> solve ((x**2+x*y+1, y ** 2+x*y+2 ), x, y )
[(-sqrt(3)*I/3, -2*sqrt(3)*I/3), (sqrt(3)*I/3, 2*sqrt(3)*I/3)]
#有两组解

#solve ((x**2+x*y+1, y ** 2+x*y+2 ), x, y,set=True )
```

符号运算

☐ 解线性方程组linsolve（）

在sympy中，解线性方程组有三种形式：

1、默认等式为0的形式：linsolve(eq, [x, y, z])

2、矩阵形式：linsolve(eq, [x, y, z])

3、增广矩阵形式：linsolve(A，b, x, y, z)

```
x, y, z = symbols("x y z")
# 默认等式为0的形式
print("======默认等式为0的形式 =======")
eq = [x+y+z-2, 2*x-y+z+1, x+2*y+2*z-3]
result = linsolve(eq, [x, y, z])
print(result)
```

符号运算

```
# 矩阵形式
print("=======矩阵形式 ========")
eq = Matrix(([1, 1, 1, 2], [2, -1, 1, -1], [1, 2, 2, 3]))
result = linsolve(eq, [x, y, z])
print(result)


# 增广矩阵形式
print("=======增广矩阵形式 ========")
A = Matrix([[1, 1, 1], [2, -1, 1], [1, 2, 2]])
b = Matrix([[2], [-1], [3]])
system = A, b
result = linsolve(system, x, y, z)
print(result)
```

符号运算

- **解非线性方程组数值解nsolve（）**

nsolve()用于求解非线性方程组，例如二次方，三角函数等方程

```
>>> x1 = Symbol('x1')
>>> x2 = Symbol('x2')
>>> f1 = 3 * x1**2 - 2 * x2**2 - 1
>>> f2 = x1**2 - 2 * x1 + x2**2 + 2 * x2 - 8
>>> print(nsolve((f1, f2), (x1, x2), (-1, 1)))

f1.subs([(x1,-
1.19287309935246),(x2,1.27844411169911)])
f2.subs([(x1,-
1.19287309935246),(x2,1.27844411169911)])

>>> nsolve(sin(x), x, 2)
```

符号运算

- 极限

　　极限在sympy中使用很简单，它们的语法是limit(function, variable, point)，所以计算当x趋近于0时f(x)的极限，可以给出limit(f, x, 0)：

```
>>> from sympy import *
>>> x=Symbol("x")
>>> limit(sin(x)/x, x, 0)
 1
```

　　也可以计算在无穷的极限：

```
>>>limit(sin(x)/x, x, oo)
 0
```

符号运算

- 微分

Derivative是表示导函数的类，它的第一个参数是需要进行求导的数学函数，第二个参数是求导的自变量.注意Derivative所得到的是一个导函数，它并不会进行求导运算：

```
>>> t = Derivative(sin(x),x)  #创建了一个导函数对象
>>> t
Derivative(sin(x), x)
```

如果希望它进行实际的运算，计算出导函数，可以调用其doit()方法：

```
>>> t.doit()
cos(x)
```

符号运算

也可以直接使用diff()函数或表达式的diff()方法来计算导函数：

```
>>> diff(sin(2*x), x)
2*cos(2*x)
>>> sin(2*x).diff(x)
2*cos(2*x)
>>> diff(sin(2*x), x, 2)
-4*sin(2*x)
>>> diff(sin(2*x), x, 3)
 -8*cos(2*x)
```

使用Derivative对象可以表示自定义的数学函数的导函数，例如：

```
>>> Derivative(f(x), x)
Derivative(f(x), x)
```

符号运算

由于SymPy不知道如何对自定义的数学函数进行求导，因此它的diff()方法会返回和上面相同的结果：

```
>>> f(x).diff(x) #方法中的x表示对x符号进行求导
Derivative(f(x), x)
```

添加更多的符号参数可以表示高阶导函数，例如：

```
>>> Derivative(f(x), x, 3) #表示f(x)对x求三阶导数（或者偏导）
 Derivative(f(x),x,x,x)

#也可以写作  f(x).diff(x,3)
```

符号运算

也可以表示多个变量的导函数，例如：

```
>>> Derivative(f(x,y), x,2,y,3) #对x求二阶导且对y求三阶导数（5阶数）
Derivative(f(x, y), x, x, y, y, y)

# f(x,y).diff(x,2,y,3)
```

diff()求解的格式和Derivative声明的格式类似，例如下面的语句计算sin(xy)对x两次求导、对y三次求导的结果:

```
>>> diff(sin(x*y), x,2,y,3)
x*(x**2*y**2*cos(x*y) + 6*x*y*sin(x*y) -
6*cos(x*y))
```

符号运算

- 微分方程

　　dsolve()可以对微分方程进行符号求解。它的第一个参数是一个带未知函数的表达式，第二个参数是需要进行求解的未知函数。例如下面的程序对微分方程 $f'(x) - f(x) = 0$ 进行求解。得到的结果是一个自然指数函数，它有一个待定系数c_1。

```
>>>f=Function("f")
>>> dsolve(Derivative(f(x),x) - f(x), f(x))
 f(x) == C1*exp(x)

#>>> dsolve(f(x).diff(x) - f(x), f(x))
```

用dsolve()解微分方程时可以传递一个hint参数，指定微分方程的解法。该参数的默认值为“default”,表示由SymPy自动挑选解法。可以将hint参数设置为“best”，让dsolve()尝试所有已知解法，并返回最简单的解，例如下面对微分方程：

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x) + f(x) + f^2(x) = 0$$

进行求解。得到的结果是一个一般方程，它描述了f(x)和自变量之间的关系。一般把这种函数称为隐函数：

符号运算

```
>>> x = symbols("x", real=True) # 定义符号x为实数
>>> eq1 = dsolve(f(x).diff(x) + f(x)**2 + f(x), f(x))
>>> eq1
f(x) == -C1/(C1 - exp(x))
```

如果设置hint参数为“best”,就能得到更简单的显函数表达式:

```
>>> eq2 = dsolve(f(x).diff(x) + f(x)**2 + f(x), f(x),
hint="best")
>>> eq2
f(x) == -C1/(C1 - exp(x))
```

符号运算

不同形式的微分方程需要使用不同的解法，使用classify_ode()可以查看与指定微分方程对应的解法列表。查看方程f’(x) + f(x) = (cos(x) - sin(x))* f(x)**2对应的解法：

```
>>> eq = Eq(f(x).diff(x) + f(x), (cos(x) - sin(x)) *
f(x)**2)
>>> classify_ode(eq, f(x))
('1st_power_series', 'lie_group')
```

符号运算

可以通过dsolve()的hint参数指定解法，默认值为'default'表示采用classify_ode()返回值中的第一个解法：

```
>>> dsolve(eq, f(x))
Eq(f(x), C1 - C1*x**2/2 - C1*x**3/6 + C1*x**4/4 +
C1*x**5*(-C1*(C1 - 3) - C1*(C1 + 1) + 4*C1 + 12)/120
+ O(x**6))
```

hint参数指定"lie_group"解法，则可以得到更简洁的结果

```
>>> dsolve(eq, f(x), hint="lie_group")
Eq(f(x), 1/(C1*exp(x) - sin(x)))

# dsolve(eq, f(x), hint="best")
```

符号运算

也可以将hint设置为’all’，让dsolve()尝试classify_ode()返回的所有解法：

```
>>> dsolve(eq, f(x), hint="all")
{'1st_power_series': Eq(f(x), C1 - C1*x**2/2 -
C1*x**3/6 + C1*x**4/4 + C1*x**5*(-C1*(C1 - 3) -
C1*(C1 + 1) + 4*C1 + 12)/120 + O(x**6)),
 'best': Eq(f(x), C1 - C1*x**2/2 - C1*x**3/6 +
C1*x**4/4 + C1*x**5*(-C1*(C1 - 3) - C1*(C1 + 1) +
4*C1 + 12)/120 + O(x**6)),
 'best_hint': '1st_power_series',
 'default': '1st_power_series',
 'lie_group': Eq(f(x), 1/(C1*exp(x) - sin(x))),
 'order': 1}
```

符号运算

- 积分

  integrate()可以计算定积分和不定积分：

  - integrate(f,x):计算不定积分 $\int f dx$
  - integrate(f,(x,a,b)):计算定积分 $\int_a^b f dx$

- 如果要对多个变量计算多重积分，只需要将被积分的变量依次列出即可：

  - integrate(f,x,y):计算双重不定积分 $\int\int f dx dy$
  - integrate(f,(x,a,b),(y,c,d)):计算双重定积分 $\int_c^d \int_a^b f dx dy$

符号运算

和Derivative对象表示微分表达式类似,Integral对象表示积分表达式，它的参数和integrate() 类似，例如：

```
>>> e = Integral(x*sin(x), x)
>>> e
Integral(x*sin(x), x)
```

调用积分对象的doit()方法可以对其进行求值计算:

```
>>> e.doit()
-x*cos(x) + sin(x))

>>> integrate(x*sin(x), x)
```

符号运算

有些积分表达式无法进行符号化简，这时可以调用其evalf()方法或用求值函数N()对其进行数值运算：

```
>>> e2 = Integral(sin(x)/x, (x, 0, 1))
>>> e2.doit()
Si(1)   #Si
```

由于无法进行符号定积分，可用evalf()和N()对其 进行数值运算：

```
>>> e2.evalf()
0.946083070367183
>>> N(e2)
0.946083070367183
>>> N(e2, 100) #可以指定精度
0.946083070367183014941353313823…
```

符号运算

as_sum()方法可以将定积分转换为近似求和公式，它将积分区域分割成N个小矩形的面积之和:

```
>>> e=Integral(sin(x)/x,(x,0,1))
>>> e.as_sum(5)
2*sin(9/10)/9 + 2*sin(7/10)/7 + 2*sin(1/2)/5 +
2*sin(3/10)/3 + 2*sin(1/10)
>>> N(e.as_sum(5))
 0.946585362780408
```

符号运算

SymPy的数值计算功能还不够强大，不能对应如下这种情况的无限积分：$\int_0^{\infty}\frac{\sin(x)}{x}dx=\pi/2$

```
>>> N(Integral(sin(x)/x, (x, 0, oo))) # oo表示正无穷
-0.e+0
```

将积分上限修改为10000也没能计算出近似结果，上限为1000时得到了 π/2的近似值，不过还远远不够精确：

```
>>> N(Integral(sin(x)/x, (x, 0, 10000)))
0.e+0
>>>N(Integral(sin(x)/x, (x, 0, 1000)))
1.57023312196877
>>> e3 = Integral(sin(x)/x, (x, 0, oo))
>>> e3.doit()
pi/2
```

符号运算

二重积分：

```
>>> integrate(x*y,(x,0,1),(y,0,1/2))
0.0625000000000000




>>> expr3 = exp(-x**2-y**2)

>>> r3 = integrate(expr3, (x, -oo, oo), (y, -oo, oo))

>>> print("r3:", r3)
('r3:', pi)
```

符号运算

矩阵

```
#矩阵的创建-Matrix（）
m1 = Matrix([1, 2, 3]) # 矩阵m3=Matrix([[1, 2, 3]])
m2 = Matrix([[1, -1], [3, 4], [0, 2]]) #矩阵
print(m1)
print(m2)

#常用的构造矩阵
m1 = eye(3) # 单位矩阵
print(m1)
m2 = zeros(3, 4) # 零矩阵
print(m2)
m3 = ones(3, 4) # 一矩阵
print(m3)
m4 = diag(1, 2, 3) # 对角矩阵
print(m4)
```

符号运算

```
#基本操作
m = Matrix([[1, -1], [3, 4], [0, 2]]) # 矩阵
print(m)
print(m.shape) # 获得形状
print(m.row(0)) # 获得单行与单列
print(m.col(0))
m.row_del(0) # 删除行与列
print("删除第一行后：", m)
m.col_del(0)
print("删除第一列后：", m)
print(m)
m2 = Matrix([[2, 3]])
print("m2:", m2)
m2 = m2.row_insert(1, Matrix([[0, 4]])) # 插入新的行与列
print("插入新行后：", m2)
m2 = m2.col_insert(2, Matrix([9, 8]))
print("插入新列后：", m2)
print("其转置矩阵是：", m2.T) # 求转置矩阵
```

符号运算

```
#矩阵的运算
M = Matrix([1, 2, 3])
N = Matrix([4, 5, 6])
print("M+N:", M+N) # 加法与减法
print("M-N:", M-N)

M = Matrix([[1, -1, 1], [2, 3, -2]])
N = Matrix([[1, 2], [2, 1], [1, 1]])
print(M*N) # 求乘法


m = Matrix([[1, 3], [-2, 3]])
print(m**(-1)) # 求逆矩阵
print(m**(-1)*m)
print(m*m**(-1))
```

符号运算

```
#行列式
M = Matrix([[1, 0, 1], [2, -1, 3], [4, 3, 2]])
print("行列式:", M.det()) # 求行列式

# 求特征值与特征向量
M = Matrix([[3, -2, 4, -2], [5, 3, -3, -2], [5, -2, 2, -2],
[5, -2, -3, 3]])
print("特征值: ", M.eigenvals())
print("特征值与特征向量: ", M.eigenvects ())

M = Matrix([[3, -2, 4, -2], [5, 3, -3, -2], [5, -2, 2, -2],
[5, -2, -3, 3]])      #M.(+tab)
P, D = M.diagonalize()  #对角化矩阵
print("矩阵M",M)
print("矩阵P",P)
print("矩阵D",D)
print("P*D*P**-1",P*D*P**-1)
```

符号运算

矩阵（带参数）

矩阵从Matrix类创建,它可以包含符号：

```
>>> x = Symbol('x')
>>> y = Symbol('y')
>>> A = Matrix([[1,x], [y,1]])
>>> A
Matrix([
[1, x],
[y, 1]])
>>> A**2
Matrix([
[x*y + 1,     2*x],
[    2*y, x*y + 1]])
```

符号运算

```
>>> print A
>>> c=A**(-1)  #求逆
>>> print c
>>> cc=c*A
>>> print cc     #需要用simplify()化简simplify(cc)
>>> cc1=A*c
>>> print cc1    #需要用simplify()化简simplify(cc1)
```

其他功能

- 用SymPy做计算器

　　SymPy有三种内建的数值类型：浮点数、有理数和整数。

　　有理数类用一对整数表示一个有理数：分子和分母，所以Rational(1,2)代表1/2，Rational(5,2) 代表5/2等等。

　　有些特殊的常数，像e和pi，它们被视为符号(1+pi将不被数值求解，它将保持为1+pi)，并且可以有任意精度：

```
>>> pi**2
pi**2
```

其他功能

```
>>> pi.evalf()
3.14159265358979
>>> (pi+exp(1)).evalf(50)
5.8598744820488384738229308546321653819544164
930751
```

evalf将表达式求解为浮点数。

这还有一个类表示数学上的无限，叫作oo：

```
>>> oo > 99999
True
>>> oo + 10000
oo
```

其他功能

- 级数展开

  使用.series(var, point, order):

```
>>> (1/cos(x)).series(x, 0, 10)
1 + x**2/2 + 5*x**4/24 + 61*x**6/720 +
277*x**8/8064 + O(x**10)
>>> e = 1/(x + y)
>>> s = e.series(x, 0, 5)
>>> print(s)
1/y - x/y**2 + x**2/y**3 - x**3/y**4 + x**4/y**5
+ O(x**5)
>>>pprint(s)
          2    3    4     ⎛ 5⎞
1   x    x    x    x      ⎝ ⎠
─ - ── + ── - ── + ── + O⎝x ⎠
y    2    3    4    5
    y    y    y    y
```

其他功能

- 求和

  计算给定求和变量界限的f的总和(Summation)

  summation(f, (i, a, b))变量i从a到b计算f的和.如果不能计算总和，它将打印相应的求和公式。求值可引入额外的极限计算：

```
>>> from sympy import summation, oo, symbols, log
>>> i, n, m = symbols('i n m', integer=True)
>>> summation(2*i - 1, (i, 1, n))
n**2
>>>summation(1/2**i, (i, 0, oo))
2
```

其他功能

```
>>> summation(1/log(n)**n, (n, 2, oo))
Sum(log(n)**(-n), (n, 2, oo))
#不能计算总和，将打印相应的求和公式

>>>summation(i, (i, 0, n))
n**2/2 + n/2
>>>summation(n**2/2 + n/2, (n, 0, m))
m**3/6 + m**2/2 + m/3
>>>summation(i, (i, 0, n), (n, 0, m))
m**3/6 + m**2/2 + m/3

>>> from sympy.abc import x
>>> from sympy import factorial
>>> summation(x**n/factorial(n), (n, 0, oo))
exp(x)
```

其他功能

- 模式匹配

使用.match()方法，和Wild类对表达式实行模式匹配。这个方法将返回一个发生替换的字典，如下：

```
>>> from sympy import Symbol, Wild
>>> x = Symbol('x')
>>> p = Wild('p')
>>> (5*x**2).match(p*x**2)
{p_: 5}

>>> q = Wild('q')
>>> (x**2).match(p*x**q)
{q_: 2, p_: 1}
```

其他功能

如果匹配失败，将返回None：

```
>>> print (x+1).match(p**x)
None
```

可以指定Wild类的排除参数去保证一些东西不出现在结果之中：

```
>>> p = Wild('p', exclude=[1,x])
>>> print (x+1).match(x+p) # 1 is excluded
None
>>> print (x+1).match(p+1) # x is excluded
None
>>> print (x+1).match(x+2+p) # -1 is not
excluded {p_: -1}
```

其他功能

- Sympy.geometry平面几何模块

  这个模块可以创建二维几何图形的对象，如直线，线段，圆等，并计算这些对象的各种信息，例如椭圆的面积，判断一组点是否共线，或者求两条直线的交点等等。

  下面有几个简单的例子：

```
#创建了3个表示平面上的点的对象
>>> A=Point(0,0)
>>> B=Point(5,0)
>>> C=Point(3,2)
#用上面创建的三个点当三角形的顶点，创建了一个表示三角形的对象t
>>> t=Triangle(A,B,C)
```

其他功能

```
 #三角形对象的incenter属性用于获取其内心（内切圆的圆心）
>>> D=t.incenter
>>> D
Point(5*(3 + sqrt(13))/(2*sqrt(2) + sqrt(13) + 5),
10/(2*sqrt(2) + sqrt(13) + 5))

#利用Circle()创建了经过C，D，B三个点的圆，另外Circle()也
可以通过制定圆心和半径来创建一个圆。还有要注意的是circle()
返回的对象是一个类似元组对象，所以引用这个对象的时候要使用
引用元组的方法
>>>p=Circle(C,D,B)

>>> i=Segment(*p.intersection(Line(A,B)))
 #首先用Line()创建了一个直线对象，类似的无限的直线对象；利
用圆的intersection()方法，可以计算出圆与直线的两个交点；最
后使用Segment()将传入的这个交点生成一个弦对象（弦对象是
一种有长度的线段）
```

其他功能

```
#利用弦对象的length属性获取其长度（表示方法复杂），
然后用evalf()方法计算出。
>>> i.length.evalf()
1.39444872453601
>>> j=Segment(*p.intersection(Line(A,C)))
>>> j.length.evalf()
1.39444872453601
```

使用这些平面几何模块计算实在是太慢了!作图？？

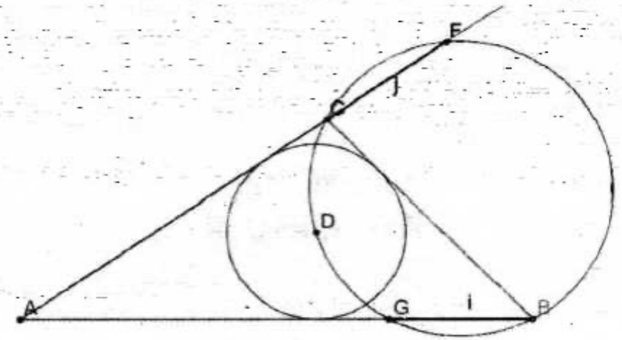


图 4-1 弦相等几何题示意图

sympy_geometry.py
验证弦相等

利用 SymPy 画函数图像

使用 plot 函数绘制二维函数图像，例如：

```
from sympy.plotting import plot
#from sympy.abc import x
plot(x**2, (x, -2, 2))
```

导入 SymPy 的 plot_implicit 函数绘制隐函数图像：

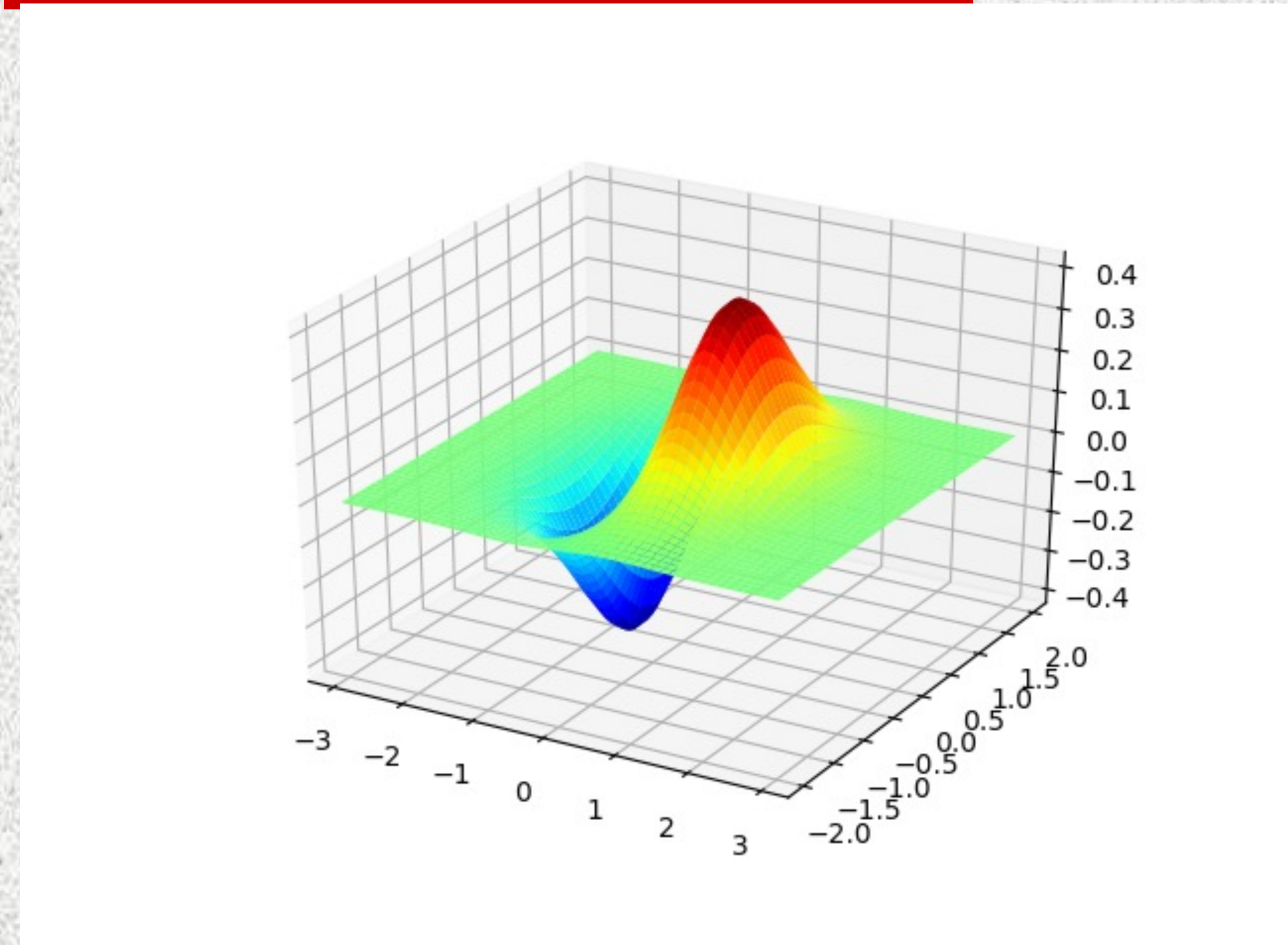
```
from sympy import plot_implicit
from sympy import Eq
#from sympy.abc import x, y
plot_implicit(Eq(x**2 + y**2, 1))
#plot_implicit(Eq(x**2 + y**2, 1),(x, -1.5, 1.5),(y, -1.5,
1.5))
```

利用 SymPy 画函数图像

使用 SymPy 画出三维函数图像，例如：

```
from sympy.plotting import plot3d
#from sympy.abc import x, y
from sympy import exp
plot3d(x*exp(-x**2 - y**2), (x, -3, 3), (y, -2, 2))
```

SymPy 的 2D、3D 函数绘图能力一般，画二维函数时会出现x，y轴比例不对。用户若有精确绘制函数图像的需求，应该求助于更加专业的 Python 绘图库，如Matplotlib 。


0.4
0.3
0.2
0.1
0.0
−0.1
−0.2
−0.3
−0.4
−3
−2
−1
0
1
2
3
−2.0
−1.5
−1.0
−0.5
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0