## §12.3.4 Fourier级数的均方收敛

**定义12.3.1.** 设$\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$ 作为Riemann积分或者瑕积分存在，则称$f(x)$在$[a,b]$上平方可积.

**注12.3.3.** (1) $f(x)\in R[a,b] \Rightarrow f^2(x)\in R[a,b]$, Riemann 可积函数必平方可积.

(2) $|f(x)|\leqslant \dfrac{f^2(x)+1}{2}$,所以有限区间上平方可积的函数必绝对可积(积分绝对收敛之意).

**定义12.3.2.** 设$f(x)$, $f_n(x)$, $n=1,2,3,\cdots$在$[a,b]$平方可积，并且满足 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b [f_n(x)-f(x)]^2\,\mathrm{d}x=0$,

则称$\{f_n(x)\}$在$[a,b]$ 上均方收敛于$f(x)$. 记作 $g_n(x) \to f(x)$ in $L^2[a,b]$.

**引理12.3.5.** 设$f(x),g(x)$于$[a,b]$平方可积，则： (1)$f(x)g(x)$在$[a,b]$上绝对可积； (2)$f(x)+g(x)$在$[a,b]$上平方可积.

**证明.** (1) $|f(x)g(x)|\leqslant \frac{1}{2}[f^2(x)+g^2(x)]$. (2) $[f(x)+g(x)]^2\leqslant f^2(x)+g^2(x)+2|f(x)g(x)|$. □

**引理12.3.6.** 设$f(x),g(x)$在$[a,b]$平方可积，则： (1) $\int_a^b |f(x)g(x)|\,\mathrm{d}x\leqslant \left(\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$, (Cauchy 不等式)

(2) $\left(\int_a^b [f(x)+g(x)]^2\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant \left(\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$. (Minkowski不等式)

**定理12.3.8.**【*Fourier*最佳逼近】设$f(x)$于$[-\pi,\pi]$上平方可积，$S_n(x)$表示其Fourier级数的部分和序列，则对任意多项式$T_n(x)$有：

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-S_n(x)]^2\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-T_n(x)]^2\,\mathrm{d}x.$$ 并且，当且仅当$S_n(x)=T_n(x)$时，等号成立.

**推论12.3.5.** (1)若$f(x)$平方可积，则 $m>n \Rightarrow \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-S_m(x)]^2\,\mathrm{d}x \leqslant \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-S_n(x)]^2\,\mathrm{d}x.$

(2)若$f(x)$平方可积，则 $\boxed{\left[\dfrac{a_0^2}{2}+\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)\right] \leqslant \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\,\mathrm{d}x,\ \forall n\in\mathbb{N}.\quad (\textit{Bessel}\text{ 不等式})}$

利用Bessel 不等式可以证明类似推论12.3.3的结论.

**定理12.3.9.** 设$2\pi$周期函数$f(x)\in D[-\pi,\pi]$，$f'(x)\in R[-\pi,\pi]$，则$f(x)$ 的*Fourier* 级数在$(-\infty,+\infty)$ 一致收敛到$f(x)$.

证明. 设$f(x)\sim \dfrac{a_0}{2}+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$. 首先，据Fourier级数点收敛定理，$f(x)\in D[-\pi,\pi]$导致 $f(x)=\dfrac{a_0}{2}+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$，$x\in(-\infty,+\infty)$.

下证级数一致收敛. 记$f'(x)\sim\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n\cos nx+\beta_n\sin nx)$，　(注意$\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f'(x)\,\mathrm{d}x=0$)，

则$\alpha_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f'(x)\cos nx\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,\mathrm{d}f(x)=\dfrac{1}{\pi}f(x)\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi}+\dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)n\sin nx\,\mathrm{d}x=nb_n$，$n=1,2,3,\cdots$. 类似地，$\beta_n=-na_n$，$n=1,2,3,\cdots$

从而 $\displaystyle\sum_{n=1}^{N}(|a_n|+|b_n|)=\sum_{n=1}^{N}\frac{|\alpha_n|+|\beta_n|}{n}\leqslant\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}(|\alpha_n|+|\beta_n|)^2+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2}\leqslant\sum_{n=1}^{N}(\alpha_n^2+\beta_n^2)+\frac{1}{2}\frac{\pi^2}{6}\leqslant\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f'(x)|^2\,\mathrm{d}x+\frac{\pi^2}{12}.$

所以$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|+|b_n|)$收敛，所以$\dfrac{a_0}{2}+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$于$(-\infty,+\infty)$(绝对)一致收敛. □

**注12.3.4.** 由于“$f'(x)\in R[-\pi,\pi]$”能保证“$f'(x)$在$[-\pi,\pi]$有界”，但反之不能. 所以定理12.3.9略弱于推论12.3.3.

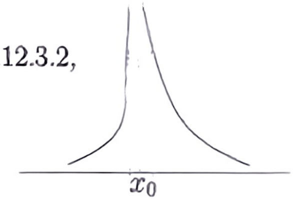
**推论12.3.3.** 设$2\pi$周期函数$f(x)\in C(\mathbb{R})$，$-\pi\leqslant A<a<b<B\leqslant\pi$，$f(x)$于$[A,B]$可导且导数有界. 则$S_n(x)\rightrightarrows f(x)$，$\forall x\in[a,b]$.

命题12.3.1. 设$f(x)\in C(\mathbb{R})$且$f(x+2\pi)=f(x)$， 则(据$W$-第二逼近定理) $\forall\varepsilon>0$, $\exists$三角多项式$T_n(x)$ s.t. $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-T_n(x)|^2\,\mathrm{d}x<\varepsilon$.

命题12.3.2. 设$f(x)\in R[-\pi,\pi]$,则 $\forall\varepsilon>0$, $\exists$三角多项式$T_n(x)$ s.t. $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-T_n(x)|^2\,\mathrm{d}x<\varepsilon$.

命题12.3.3. 设$f(x)$于$[-\pi,\pi]$上平方可积且有一个瑕点, 则 $\forall\varepsilon>0$, $\exists$三角多项式$T_n(x)$ s.t. $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-T_n(x)|^2\,\mathrm{d}x<\varepsilon$.

证明. $f(x)$于$[-\pi,\pi]$上平方可积且有一个瑕点$x_0$, 此时, $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$ s.t. $\displaystyle\int_{x_0-\delta}^{x_0}f^2(x)\,\mathrm{d}x<\frac{\varepsilon}{8}$, $\displaystyle\int_{x_0}^{x_0+\delta}f^2(x)\,\mathrm{d}x<\frac{\varepsilon}{8}$.




定义函数$\tilde{f}(x)=\begin{cases}0, & x\in(x_0-\delta,x_0]\\ f(x), & x\in[x_0-\pi,x_0+\pi]\backslash(x_0-\delta,x_0+\delta)\\ 0, & x\in[x_0,x_0+\delta)\end{cases}$ 则$\tilde{f}(x)\in R[-\pi,\pi]$且$\tilde{f}(-\pi)=\tilde{f}(\pi)$. 据命题12.3.2,

$\exists T_n(x)$ s.t. $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}|\tilde{f}(x)-T_n(x)|^2\,\mathrm{d}x<\frac{\varepsilon}{4}$.

现在

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-T_n(x)|^2\,\mathrm{d}x\leqslant\int_{-\pi}^{\pi}\left[|f(x)-\tilde{f}(x)|+|\tilde{f}(x)-T_n(x)|\right]^2\mathrm{d}x$$

$$\leqslant 2\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-\tilde{f}(x)|^2\,\mathrm{d}x+2\int_{-\pi}^{\pi}|\tilde{f}(x)-T_n(x)|^2\,\mathrm{d}x$$

**命题12.3.1.** 设$f(x) \in C(\mathbb{R})$且$f(x+2\pi)=f(x)$，则(据W-第二逼近定理) $\forall \varepsilon>0$, $\exists$三角多项式$T_n(x)$ s.t. $\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-T_n(x)|^2\,\mathrm{d}x<\varepsilon$.

**命题12.3.2.** 设$f(x) \in R[-\pi,\pi]$,则 $\forall \varepsilon>0$, $\exists$三角多项式$T_n(x)$ s.t. $\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-T_n(x)|^2\,\mathrm{d}x<\varepsilon$.

**命题12.3.3.** 设$f(x)$于$[-\pi,\pi]$上平方可积且有一个瑕点，则 $\forall \varepsilon>0$, $\exists$三角多项式$T_n(x)$ s.t. $\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-T_n(x)|^2\,\mathrm{d}x<\varepsilon$.

**命题12.3.4.** 设$f(x)$于$[-\pi,\pi]$上平方可积，则 $\forall \varepsilon>0$, $\exists$三角多项式$T_n(x)$ s.t. $\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-T_n(x)|^2\,\mathrm{d}x<\varepsilon$.

**定理12.3.10.** 设$f(x)$于$[-\pi,\pi]$上平方可积，则对$f(x)$的部分和序列$S_n(x)$ 有

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-S_n(x)]^2\,\mathrm{d}x=0,\ \text{即} S_n(x)\ \to\ f(x),\ in\ L^2[-\pi,\pi].$$

据命题12.3.4, $\forall\varepsilon>0, \exists T_{n_0}(x)$ s.t. $\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-T_{n_0}(x)|^2\,\mathrm{d}x<\varepsilon$.

据最佳逼近定理, $\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-S_{n_0}(x)|^2\,\mathrm{d}x \leqslant \int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-T_{n_0}(x)|^2\,\mathrm{d}x<\varepsilon$.

又 $\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-S_n(x)|^2\,\mathrm{d}x \leqslant \int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-S_{n_0}(x)|^2\,\mathrm{d}x$, $\forall n>n_0$.

所以$\exists n_0\in\mathbb{N}$ s.t. $\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-S_n(x)|^2\,\mathrm{d}x<\varepsilon$, $\forall n>n_0$. $\square$

**定理12.3.10.** 设$f(x)$于$[-\pi,\pi]$上平方可积，则对$f(x)$的部分和序列$S_n(x)$ 有

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-S_n(x)]^2\,\mathrm{d}x=0,\ \text{即}S_n(x)\ \to\ f(x),\ in\ L^2[-\pi,\pi].$$

**定理12.3.11.【*Parseval*等式】** 设$f(x)$于$[-\pi,\pi]$上平方可积，则 $\boxed{\dfrac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)=\dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\,\mathrm{d}x.}$

**证明.** 在Fourier级数最佳逼近中已证

$$0\leqslant\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\,\mathrm{d}x-\left[\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)\right]=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-S_n(x)|^2\,\mathrm{d}x\to0,\quad(n\to+\infty).\qquad\square$$

**注12.3.5.** 并非任意一个三角级数都是某个平方可积函数的Fourier级数．如$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos nx}{\sqrt{n}}$就不是任何平方可积函数的Fourier级数，因为$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$发散．

**定理12.3.12.** 设$f(x),g(x)$是$2\pi$周期且于$[-\pi.\pi]$平方可积函数，$f(x)\sim\dfrac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$, $g(x)\sim\dfrac{\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n\cos nx+\beta_n\sin nx)$,

则 $\boxed{\dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)g(x)\,\mathrm{d}x=\dfrac{\alpha_0a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\alpha_n+b_n\beta_n)\quad(\text{广义}\textit{Parseval}\text{等式}).}$

证明. 事实上，$f(x)+g(x)\sim\dfrac{a_0+\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+\alpha_n)\cos nx+(b_n+\beta_n)\sin nx$

例12.3.3. 设$f(x),g(x)$于$[-\pi,\pi]$上平方可积. 如果$f(x),g(x)$的Fourier 级数相同, 则$\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-g(x)|\,\mathrm{d}x=0$.

证明. 对$f(x)-g(x)$使用Parseval等式, 有$\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-g(x)]^2\,\mathrm{d}x=0$.

从而据Hölder不等式, $\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-g(x)|\,\mathrm{d}x\leqslant\left(\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-g(x)]^2\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\times\sqrt{2\pi}=0$. □ 这再次重新证明了定理12.1.1.

利用Parseval 等式可以证明一个类似定理12.3.4的结论, 只是条件略强一些.

例12.3.4. 设$2\pi$周期函数$f(x)$于$[-\pi,\pi]$上Riemann可积或平方可积, $f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$, 则

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t=\int_a^b\frac{a_0}{2}\,\mathrm{d}t+\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b(a_n\cos nt+b_n\sin nt)\,\mathrm{d}t,\quad\forall[a,b]\subset[-\pi,\pi].$$

特别地, 当$a=0,b=x$时, $$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t=\frac{a_0}{2}x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{b_n}{n}\cos nx+\frac{a_n}{n}\sin nx\right),\quad\forall x\in[-\pi,\pi].$$

证明. 设$g(x)$是某一个Riemann可积或平方可积的$2\pi$周期函数, 其Fourier系数为 $\alpha_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(x)\cos nx\,\mathrm{d}x,\quad n=0,1,2,\cdots;\quad\beta_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(x)\sin nx\,\mathrm{d}x,\quad n=1,2,\cdots$

则据广义Parseval等式, $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)g(x)\,\mathrm{d}x=\frac{a_0\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\alpha_n+b_n\beta_n)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}g(x)\,\mathrm{d}x+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[a_ng(x)\cos nx\,\mathrm{d}x+b_ng(x)\sin nx]\,\mathrm{d}x$.

取$g(x)=\begin{cases}1, & x\in[a,b],\\ 0, & x\in[-\pi,\pi]\setminus[a,b].\end{cases}$ 则$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{a_0}{2}(b-a)+\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b(a_n\cos nx\,\mathrm{d}x+b_n\sin nx)\,\mathrm{d}x$. (12.3.36)得证. □

例12.3.5. 决定出使下式成立的$x$范围：$x^2=\dfrac{\pi^2}{3}+4\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\cos nx}{n^2}$. 由此求出 (1) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^2}$; (2) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^4}$.

解. 首先, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\cos nx}{n^2}$在$(-\infty,+\infty)$一致收敛.

由于所给等式的右端是$2\pi$周期的函数, 所以假设等式在$[a,a+2\pi]$上成立, 则两边直接积分后得:

$$\int_a^{a+2\pi} x^2\,\mathrm{d}x=\frac{\pi^2}{3}2\pi, \Rightarrow \frac{1}{3}\left[(a+2\pi)^3-a^3\right]=\frac{2}{3}\pi^3, \Rightarrow a=-\pi.$$ 所以等式在$[-\pi,+\pi]$上成立.

令$x=0$, 则$0=\dfrac{\pi^2}{3}+4\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^2}$, $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^2}=\dfrac{\pi^2}{12}$.

又据Parserval等式, $\dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}x^4\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2}{3}\pi^2\right)^2+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{16}{n^4}$.

即, $\dfrac{1}{\pi}\dfrac{2}{5}\pi^5=\dfrac{2}{9}\pi^4+16\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^4}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^4}=\dfrac{\pi^4}{90}$. □

**定理12.2.3.【*Dirichlet-1*】** 设$f(x)$是$2\pi$周期函数，在$[-\pi,\pi]$ *Riemann*可积或广义绝对可积，对任意确定的非瑕点 $x_0\in[-\pi,\pi]$，若存在$\delta>0$使得$f(x)$在$(x_0-\delta,x_0)$及$(x_0,x_0+\delta)$分别单调，则$f(x)$的*Fourier*级数在$x_0$点收敛到$\dfrac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$.

上述定理的证明过程还隐含着如下的（Dirichlet核函数）的一般性结论.

**推论12.2.1.**

若存在$\delta>0$使得$f(x)$在$(x_0-\delta,x_0)$及$(x_0,x_0+\delta)$分别单调，且$f(x_0\pm 0)$ 存在，则$\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\displaystyle\int_0^\delta f(x_0\pm t)\frac{\sin\lambda t}{t}\,\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}f(x_0\pm 0)$.

*证明.* 由于$\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\displaystyle\int_0^\delta\frac{\sin\lambda t}{t}\,\mathrm{d}t=\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\int_0^{\lambda\delta}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}$， $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}.}$

而且上定理证明过程说明，$\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\displaystyle\int_0^\delta[f(x_0\pm t)-f(x_0\pm 0)]\frac{\sin\lambda t}{t}\,\mathrm{d}t=0$， 所以$\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\displaystyle\int_0^\delta f(x_0\pm t)\frac{\sin\lambda t}{t}\,\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}f(x_0\pm 0)$. □

**推论12.2.2.** 设$f(x)$是有界$2\pi$周期函数，在$[-\pi,\pi]$上$\boxed{\text{分段单调，}}$即$[-\pi,\pi]$可以分为有限个闭子区间且$f(x)$在每一个闭子区间上(至多除掉端点外)单调，则 $\dfrac{a_0}{2}+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)=\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$， $\forall x\in[-\pi,\pi]$.

定理12.2.3.【*Dirichlet-1*】 设$f(x)$是$2\pi$周期函数，在$[-\pi,\pi]$Riemann可积或广义绝对可积，对任意确定的非瑕点 $x_0\in[-\pi,\pi]$，若存在$\delta>0$使得$f(x)$在$(x_0-\delta,x_0)$及$(x_0,x_0+\delta)$分别单调，则$f(x)$的Fourier级数在$x_0$点收敛到$\dfrac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$.

推论12.2.1.

若存在$\delta>0$使得$f(x)$在$(x_0-\delta,x_0)$及$(x_0,x_0+\delta)$分别单调，且$f(x_0\pm0)$ 存在，则$\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\displaystyle\int_0^\delta f(x_0\pm t)\frac{\sin\lambda t}{t}\,\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}f(x_0\pm0)$.

推论12.2.2. 设$f(x)$是有界$2\pi$周期函数，在$[-\pi,\pi]$上分段单调，即$[-\pi,\pi]$可以分为有限个闭子区间且$f(x)$在每一个闭子区间上(至多除掉端点外)单调，

则 $$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)=\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2},\quad\forall x\in[-\pi,\pi].$$

如果联想到有界变差函数， 上述定理12.2.3和推论12.2.1、12.2.2可以合并成如下的一个定理.

定理12.2.4.【*Dirichlet-2*】对于$2\pi$周期函数$f(x)$和点$x_0$，如果存在$\delta>0$使得$f(x)$是 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$上的有界变差函数，

则$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cos nx+b_n\sin nx]=\frac{f(x_0-)+f(x_0+)}{2}.$$

**定义12.2.1.** 设$f(x)$在$[a,b]$有定义. 若存在$[a,b]$的分划$\Delta$: $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$, s.t. $f(x)$仅以$x_i, i=0,1,2,\cdots,n$为第一类间断点, 且在$x_i$处存在广义单侧导数, 即

$$\lim_{h\to0+0}\frac{f(x_i+h)-f(x_i+0)}{h}\xlongequal{def}f'_+(x_i),\quad \lim_{h\to0-0}\frac{f(x_i+h)-f(x_i-0)}{h}\xlongequal{def}f'_-(x_i)$$ 存在(端点处只考虑单侧),

而当$x\in(x_{i-1},x_i)$时$f'(x)$存在. 则称$f(x)$于$[a,b]$分段可微.

**定理12.2.6.** 设$f(x)$是$2\pi$周期函数, 且在$[-\pi,\pi]$内分段可微, 则$f(x)$的Fourier级数处处收敛到$\dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$, 即

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)=\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2},\quad \forall x\in[-\pi,\pi].$$

*证明.* 因为$f(x)$分段可微, 所以 $\forall x\in[-\pi,\pi]$, $\displaystyle\lim_{t\to0+0}\frac{f(x+t)-f(x+0)}{t}$, $\displaystyle\lim_{t\to0+0}\frac{f(x-t)-f(x-0)}{t}$ $\exists$.

即$\displaystyle\lim_{t\to0+0}\frac{f(x+t)+f(x-t)-[f(x+0)+f(x-0)]}{t}$ $\exists$. 据前述讨论, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}S_n(x)=\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$. □