例7.4.7. 设 $f(x)\in C[0,1]$, 则 $\int_0^{\pi} xf(\sin x)\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\,\mathrm{d}x$.

证明. $\int_0^{\pi} xf(\sin x)\,\mathrm{d}x \xlongequal{\pi-x=t} \int_{\pi}^{0}(\pi-t)f(\sin t)(-\mathrm{d}t)$

$=\pi\int_0^{\pi} f(\sin t)\,\mathrm{d}t-\int_0^{\pi} tf(\sin t)\,\mathrm{d}t \qquad \Rightarrow \int_0^{\pi} xf(\sin x)\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\,\mathrm{d}x.$

注7.4.1. 此例对于有些定积分的计算有重要作用.

如: $I=\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$. 直接求原函数较困难, 利用上例结论:

$$I=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x=-\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}\cos x}{1+\cos^2 x}\xlongequal{\cos x=t}-\frac{\pi}{2}\int_1^{-1}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}=\frac{\pi}{2}\arctan t\Big|_{-1}^{1}=\frac{\pi^2}{4}.$$

例7.4.8. $I=\int_0^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x$. 换元积分法, 令 $x=a\sin\theta$, 则 $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} a\cos\theta\cdot a\cos\theta\ \mathrm{d}\theta=\cdots$.

事实上, 这个积分就是 $\frac{1}{4}$ 圆的面积, 可以直接写出!

例7.4.12. 证明: $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\ \mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\ \mathrm{d}x,\ \forall n\in\mathbb{N}$. 并求值 $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\ \mathrm{d}x$.

证明. $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\ \mathrm{d}x \xlongequal{x=\frac{\pi}{2}-t} \int_{\frac{\pi}{2}}^0\cos^n t\,(-\mathrm{d}t)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\ \mathrm{d}x$.

且有 $I_0=\int_0^{\frac{\pi}{2}}1\ \mathrm{d}x=\frac{\pi}{2},\ I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\ \mathrm{d}x=-\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=1$.

当 $n\geqslant 2$ 时, $I_n=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1}x\ \mathrm{d}\cos x=-\sin^{n-1}x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x\cos^2 x\ \mathrm{d}x$

$=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^{n-2}x-\sin^n x)\ \mathrm{d}x=(n-1)(I_{n-2}-I_n)$, 因此 $I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2},\quad n\geqslant 2$.

从而$n=2k$时, $I_{2k}=\frac{2k-1}{2k}\cdot\frac{2k-3}{2k-2}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{2}\cdot I_0=\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\cdot\frac{\pi}{2}\quad(k\geqslant 1)$;

$n=2k+1$时, $I_{2k+1}=\frac{2k}{2k+1}\cdot\frac{2k-2}{2k-1}\cdot\cdots\cdot\frac{2}{3}\cdot I_1=\frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}\quad(k\geqslant 1)$. □

例7.4.13. 利用前一例题结论，证明*Wallis*公式 $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2\cdot\frac{1}{2n+1}=\frac{\pi}{2}.}$

证明. 当 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ 时，$\sin^{2n+1}x<\sin^{2n}x<\sin^{2n-1}x,\quad \forall n\in\mathbb{N}.$ 从而 $I_{2n+1}\leqslant I_{2n}\leqslant I_{2n-1}$.

据例7.4.12，$\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\leqslant\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{\pi}{2}\leqslant\frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}$. 所以 $\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2\cdot\frac{1}{2n+1}\leqslant\frac{\pi}{2}\leqslant\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2\cdot\frac{1}{2n}$.

记 $a_n=\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2\cdot\frac{1}{2n+1},\quad b_n=\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2\cdot\frac{1}{2n}$，则上不等式写成 $a_n\leqslant\frac{\pi}{2}\leqslant b_n,\quad n\in\mathbb{N}$.

注意到 $0\leqslant b_n-a_n=\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2\cdot\left(\frac{1}{2n}-\frac{1}{2n+1}\right)=\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2\cdot\frac{1}{(2n)(2n+1)}=\frac{a_n}{2n}\leqslant\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2n}$,

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$，从而 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\frac{\pi}{2}$,

即 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2\cdot\frac{1}{2n+1}=\frac{\pi}{2}$，或者：$\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\sim\sqrt{n\pi}\quad(n\to\infty)$. □

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\ \mathrm{d}x \qquad I_{2k}=\frac{2k-1}{2k}\cdot\frac{2k-3}{2k-2}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{2}\cdot I_0=\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\cdot\frac{\pi}{2}\quad(k\geqslant1);\qquad I_{2k+1}=\frac{2k}{2k+1}\cdot\frac{2k-2}{2k-1}\cdot\cdots\cdot\frac{2}{3}\cdot I_1=\frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}\quad(k\geqslant1).$$

§7.4.2.3 补充说明

现在是时候对诸如例7.2.3中的函数$f(x)=\begin{cases}\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$ 以及$\displaystyle\int_0^1 \sin\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ 的相关记号做一些说明了.

即到底是应该写成$\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ 还是应该写成$\displaystyle\int_0^1 \sin\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$.

(1) 设$f(x)$在$(a,b]$上有定义, 如果在作延拓$\tilde{f}(x)=\begin{cases} f(x), & x\in(a,b],\\ 0, & x=a\end{cases}$ 之后$\tilde{f}(x)\in R[a,b]$,

则为了简化记号, 把$\displaystyle\int_a^b \tilde{f}(x)\,\mathrm{d}x$直接写成$\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

(2) 设$f(x)$在$[a,b)$上有定义, 如果在作延拓$\tilde{f}(x)=\begin{cases} f(x), & x\in[a,b),\\ 0, & x=a\end{cases}$ 之后$\tilde{f}(x)\in R[a,b]$,

则为了简化记号, 把$\displaystyle\int_a^b \tilde{f}(x)\,\mathrm{d}x$ 直接写成$\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

(3) 设$f(x)$在(a,b)上有定义, 如果在作延拓$\tilde{f}(x)=\begin{cases} f(x), & x\in(a,b),\\ 0, & x=a,b,\end{cases}$ 之后$\tilde{f}(x)\in R[a,b]$,

则为了简化记号, 把$\displaystyle\int_a^b \tilde{f}(x)\,\mathrm{d}x$直接写成$\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

但是, 通常不说$f(x)\in R[a,b]$, 因为不符合积分的原始定义.

(4) 在计算如上三种情况的积分时，由于一般的可积函数不一定有原函数，或者有原函数但必能初等表出，所以不一定能直接使用N-L 公式．但可以有理论上的结果．

$\int_0^1 \sin\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$

设$f(x)\in C(a,b)$，$\tilde{f}(x)\in R[a,b]$，则$f(x)$在(a,b)有原函数 ——原函数之一就是$\tilde{F}(x)=\int_a^x \tilde{f}(t)\,\mathrm{d}t=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t,\quad x\in(a,b)$.

而且$f(x)\in C(a,b),\tilde{f}(x)\in R[a,b] \quad\Rightarrow\quad \tilde{F}(x)\in C[a,b],D(a,b)$.

设$F(x)$是$f(x)$在(a,b)上的任意一个原函数，则$\exists c\in\mathbb{R}$ s.t. $F(x)=\tilde{F}(x)+c,\ x\in(a,b)$.

从而 $\tilde{F}(x)\in C[a,b]$导致$F(a+),F(b-)$一定存在.

并且此时可以证明，$\displaystyle\int_a^b \tilde{f}(x)\,\mathrm{d}x \xlongequal{\text{记作}} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)\Big|_{a+}^{b-}$.

事实上，$\forall\varepsilon>0$，$f(x)\in C[a+\varepsilon,b-\varepsilon] \quad\Rightarrow\quad \displaystyle\int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x = F(b-\varepsilon)-F(a+\varepsilon)$.

又$\tilde{f}(x)\in R[a,b] \quad\Rightarrow\quad \displaystyle\lim_{\varepsilon\to0}\int_a^{a+\varepsilon}\tilde{f}(x)\,\mathrm{d}x=0,\quad \lim_{\varepsilon\to0}\int_{b-\varepsilon}^{b}\tilde{f}(x)\,\mathrm{d}x=0$.

所以，$\displaystyle\int_a^b \tilde{f}(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{\varepsilon\to0}\int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to0}F(b-\varepsilon)-\lim_{\varepsilon\to0}F(a+\varepsilon)=F(b-)-F(a+)$. □

最后提醒一下，诸如$\displaystyle\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$，$\displaystyle\int_0^1 \ln x\,\mathrm{d}x$ 这样的积分，看似和上述所论之积分相像，但不是一回事．概因被积函数无法延拓成闭区间上的可积函数．这类积分属于下一章讨论的广义积分．

例7.4.16. 设$f(x)=\begin{cases}\sin x\ln\sin x, & x\in(0,\frac{\pi}{2}],\\ 0, & x=0.\end{cases}$ 计算$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x$.

解. 原始正确解法：$x\in(2k\pi,2k\pi+\pi)$，$k\in\mathbb{Z}$ 时，

$$\int\sin x\ln\sin x\,\mathrm{d}x=-\int\ln\sin x\,\mathrm{d}\cos x=-\cos x\ \ln\sin x+\int\frac{\cos^2 x}{\sin x}\mathrm{d}x$$

$$=-\cos x\ \ln\sin x+\int\frac{1-\sin^2 x}{\sin x}\mathrm{d}x=-\cos x\ \ln\sin x+\int\frac{1}{\sin x}\mathrm{d}x+\cos x.$$

$$\int\frac{1}{\sin x}\mathrm{d}x=\int\frac{\sin x}{\sin^2 x}\mathrm{d}x=\int\frac{-\mathrm{d}\cos x}{1-\cos^2 x}=\int\left(\frac{1}{\cos x-1}-\frac{1}{\cos x+1}\right)\mathrm{d}\cos x=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\cos x-1}{\cos x+1}\right|+c \qquad ?$$

$$=\frac{1}{2}\ln\frac{1-\cos^2 x}{(1+\cos x)^2}+c=\ln\sin x-\ln(1+\cos x)+c.$$

所以，$\int\sin x\ln\sin x\,\mathrm{d}x=-\cos x\ \ln\sin x+\cos x+\ln\sin x-\ln(1+\cos x)+c$

$$=(1-\cos x)\ln\sin x+\cos x-\ln(1+\cos x)+c,\quad x\in(2k\pi,2k\pi+\pi),\ k\in\mathbb{Z}.$$

从而，$I=\Big[(1-\cos x)\ln\sin x+\cos x-\ln(1+\cos x)\Big]\Big|_{0+}^{\frac{\pi}{2}}=\ln 2-1.$

例7.4.16. 设$f(x)=\begin{cases}\sin x\ln\sin x, & x\in(0,\frac{\pi}{2}],\\ 0, & x=0.\end{cases}$ 计算$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\,\mathrm{d}x$.

解. 当然, 也可以使用其他方法避免分部积分时出现上述“问题”, 比如谢惠民等书上使用下述方法.

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\,\mathrm{d}(1-\cos x)=(1-\cos x)\ln\sin x\Big|_{0+}^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos x)\frac{\cos x}{\sin x}\mathrm{d}x$$

$$=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1-\cos x)\sin x\cos x}{\sin^2 x}\mathrm{d}x=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x\cos x}{1+\cos x}\mathrm{d}x$$

$$\xlongequal{t=\cos x}\int_1^0\frac{t}{1+t}\mathrm{d}t=-\int_0^1\left(1-\frac{1}{1+t}\right)\mathrm{d}t=-1+\ln(1+t)\Big|_0^1=\ln 2-1.$$

当然, 通常避雷的办法有多种. 比如:

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\ln\sin x\,\mathrm{d}x=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\,\mathrm{d}\sin^2\frac{x}{2}$$

最后, 演示一个常用积分结果, 并由此引出函数正交性的概念.

例7.4.17. $\forall n, m \in \mathbb{Z}$,

$$\int_0^{2\pi} \sin nx \ \mathrm{d}x = \begin{cases} -\frac{1}{n}\cos nx\Big|_0^{2\pi} = 0, & n \neq 0 \\ 0, & n = 0 \end{cases};$$

$$\int_0^{2\pi} \cos nx \ \mathrm{d}x = \begin{cases} \frac{1}{n}\sin nx\Big|_0^{2\pi} = 0, & n \neq 0 \\ 2\pi, & n = 0 \end{cases};$$

$$\int_0^{2\pi} \sin nx \sin mx \ \mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}[\cos(n-m)x - \cos(n+m)x] \ \mathrm{d}x = \begin{cases} \pi, & n = m \\ 0, & n \neq m \end{cases};$$

$$\int_0^{2\pi} \cos nx \cos mx \ \mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}[\cos(n+m)x + \cos(n-m)x] \ \mathrm{d}x = \begin{cases} \pi, & n = m \\ 0, & n \neq m \end{cases};$$

$$\int_0^{2\pi} \sin nx \cos mx \ \mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}[\sin(n+m)x + \sin(n-m)x] \ \mathrm{d}x = 0.$$

注意积分区间可以改变为 $\int_{-\pi}^{\pi}$ 或任何长度为2π的区间.

定理7.5.3. 设 $g(x)\in R[a,b]$ 不变号, $f(x)\in R[a,b]$, $M=\sup\limits_{[a,b]} f(x)$, $m=\inf\limits_{[a,b]} f(x)$. 则

$$\exists\ \mu\in[m,M],\quad s.t.\quad \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x=\mu\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

往证 $\dfrac{\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x}$ 是 $f(x)$ 的中介值.

证明. 因为 $g(x)$ 不变号, 不妨设 $g(x)\geqslant 0$.

则 $mg(x)\leqslant f(x)g(x)\leqslant Mg(x)$, $\forall x\in[a,b]$.

有 $\boxed{m\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\leqslant M\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.}$

如果 $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x=0$, 则 $\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x=0$.

从而 $\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x=\mu\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ 对任意的 μ 成立(两边都是 0).

如果 $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x>0$. 则有 $m\leqslant\dfrac{\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x}\leqslant M.$ □

例7.5.1. 设 $f(x) \in C[a,b]$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \dfrac{nf(x)}{1+n^2x^2}\,\mathrm{d}x = \dfrac{\pi}{2}f(0)$.

证明. 首先，不能交换运算次序—-除了左端点之外，被积函数的极限是0.

【法一】确实，关键在左端点. 思路 $\int_0^1 = \int_0^\delta + \int_\delta^1$.

因为 $f(x) \in C[0,1]$，故存在 M, $s.t.$ $|f(x)| \leqslant M$, $x \in [0,1]$.

对于任意的 $n \in \mathbb{N}$. $\displaystyle\int_0^1 \frac{nf(x)}{1+n^2x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{\sqrt[3]{n}}} \frac{nf(x)}{1+n^2x^2}\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{\sqrt[3]{n}}}^1 \frac{nf(x)}{1+n^2x^2}\,\mathrm{d}x$,

而 $\displaystyle\left|\int_{\frac{1}{\sqrt[3]{n}}}^1 \frac{nf(x)}{1+n^2x^2}\,\mathrm{d}x\right| \leqslant M\cdot\int_{\frac{1}{\sqrt[3]{n}}}^1 \frac{n}{1+n^2x^2}\,\mathrm{d}x \leqslant M\cdot\frac{n}{1+n^2\cdot\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)^2}\cdot\left(1-\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right) \leqslant \frac{Mn}{1+n^{\frac{4}{3}}} \to 0\ (n\to\infty)$,

$\displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt[3]{n}}} \frac{nf(x)}{1+n^2x^2}\,\mathrm{d}x = f(\xi_n)\int_0^{\frac{1}{\sqrt[3]{n}}} \frac{n}{1+n^2x^2}\,\mathrm{d}x = f(\xi_n)\arctan(nx)\Big|_0^{n^{-\frac{1}{3}}} = f(\xi_n)\cdot\arctan n^{\frac{2}{3}}$，其中 $\xi_n \in [0, n^{-\frac{1}{3}}]$.

$x)$ 连续，故 $\lim\limits_{n\to\infty} f(\xi_n) = f(0)$， $\lim\limits_{n\to\infty}\arctan n^{\frac{2}{3}} = \dfrac{\pi}{2}$. 所以原式得证. $\square$

例7.5.1. 设 $f(x)\in C[a,b]$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{nf(x)}{1+n^2x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}f(0)$.

证明. 首先，不能交换运算次序—-除了左端点之外，被积函数的极限是0.

【法二】由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{nf(0)}{1+n^2x^2}\mathrm{d}x=f(0)\lim\limits_{n\to\infty}\arctan n=\frac{\pi}{2}f(0)$，所以考虑 $\int_0^1\frac{n[f(x)-f(0)]}{1+n^2x^2}\mathrm{d}x$.