图论

第二讲：通路与连通性

方聪

2024 年秋季

1. 通路与回路
2. 扩大路径法
3. 无向图的连通性

通路

通路：对于标定图 G，称顶点与边的交替序列

$$\Gamma = v_{i_0} e_{j_1} v_{i_1} \cdots e_{j_l} v_{i_l}$$

为顶点 v_{i_0} 到 v_{i_l} 的通路，其中 $e_{j_r} = (v_{i_{r-1}}, v_{i_r})$（$G$ 为无向图）或 $e_{j_r} = \langle v_{i_{r-1}}, v_{i_r} \rangle$（$G$ 为有向图），v_{i_0} 和 v_{i_l} 分别称为通路 Γ 的始点与终点，边数 l 称为通路的长度，记为 $|\Gamma| = l$

回路

回路：若 $v_{i_0} = v_{i_l}$ ，则称 Γ 为回路

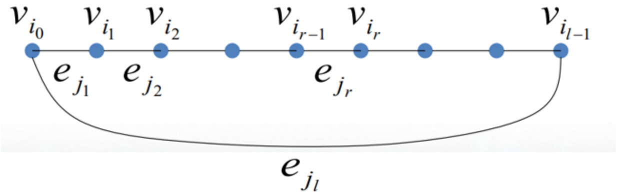


图 1: 回路

简单、复杂、初级通（回）路

:

- 简单通路：没有重复边的通路
- 简单回路：没有重复边的回路
- 复杂通路：有重复边的通路
- 复杂回路：有重复边的回路
- 初级通路（路径）：没有重复顶点和重复边的通路
- 初级回路（圈）：没有重复顶点和重复边的回路

通路的表示

通路的表示：可以只用边的序列表示通路或回路

- 对于简单图，可以用顶点序列表示通路或回路
- 对于长度为 l 的圈
  - 如果是非标定的，则在同构意义下只有一种画法
  - 如果是标定的（指定起点，终点），则可以画出 l 个不同的圈

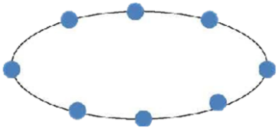


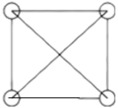
图 2: 圈

周长与围长

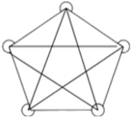
周长与围长：设 G 是含圈的无向简单图，则称 G 中最长圈的长度为 G 的周长，最短圈的长度为 G 的围长。分别记为：

- $c(G)$ = 最长圈的长度
- $g(G)$ = 最短圈的长度

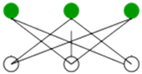
举例：$c(K_n) = n(n \geq 3), c(K_{n,n}) = 2n,$
$g(K_n) = 3(n \geq 3), g(K_{n,n}) = 4(n \geq 2)$



K_4



K_5



$K_{3,3}$

图 3: 周长与围长

定理

定理

在 n 阶（有向或无向）图 G 中，若从不同顶点 v_i 到 v_j 存在通路，则从 v_i 到 v_j 存在长度小于等于 $n-1$ 的通路

推论

在 n 阶图 G 中，若从不同顶点 v_i 到 v_j 存在通路，则从 v_i 到 v_j 存在长度小于等于 $n-1$ 的路径（初级通路）

定理

证明.

设 $\Gamma = v_{i_0} e_{j_1} \cdots v_{i_l}$ 为长度 l 的通路：

- 若 $l \leq n-1$，则 Γ 为满足条件的通路
- 若 $l > n-1$，则 $n < l+1$，即 Γ 上的顶点数大于图的顶点数，因此 Γ 中一定存在某个 v_{i_s} 到自身的回路，在 Γ 中删掉该回路，得到 Γ'，重复上述判断过程

□

定理

定理

在 n 阶图 G 中，若有从顶点 v_i 到自身的回路，则有从 v_i 到自身长度小于等于 n 的回路

推论

在 n 阶图 G 中，若有从顶点 v_i 到自身的简单回路，则有从 v_i 到自身长度小于等于 n 的圈（初级回路）

1. 通路与回路
2. 扩大路径法
3. 无向图的连通性

极大路径

- 在无向简单图中，路径的两个端点不与路径本身以外的顶点相邻，这样的路径称为极大路径
- 在有向图中，路径起点的前驱，终点的后继，都在路径本身上的路径称为极大路径

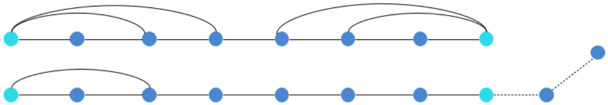


图 4: 极大路径

扩大路径法

任何一条路径，只要不是极大路径，则至少有一个端点与路径本身以外的顶点相邻，则路径还可以扩大，直到变成极大路径为止

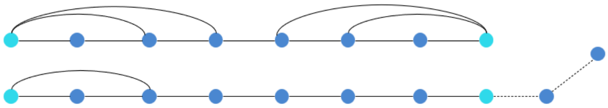


图 5: 极大路径

扩大路径法

例 2 设 G 为 $n \geq 3$ 阶无向简单图，$\delta(G) \geq 2$，求证 G 中存在长度大于等于 3 的圈

证明.

任取 $v_0 \in V(G)$，由于 $\delta(G) \geq 2$，因此存在 $v_1 \in V(G)$ 且 $v_1 \neq v_0$ 使得 $(v_0, v_1) \in E(G)$，因此存在 $\Gamma_0 = v_0 v_1$，对 Γ_0 使用扩大路径法得到 $\Gamma = v_0 \cdots v_l$ 为极大路径且 $l \geq 2$ □

扩大路径法

证明.

- 若 v_0 与 v_l 相邻，则已找到 G 中长度大于等于 3 的圈
- 若 v_0 与 v_l 不相邻，则一定存在某个 $v_s(2 \leq s \leq l-1)$ 与 v_0 相邻，否则与 $\delta(G) \geq 2$ 矛盾，此时找到 G 中长度大于等于 3 的圈

□

1. 通路与回路
2. 扩大路径法
3. 无向图的连通性

连通

连通: 对于无向图 $G = \langle V, E \rangle$, 任取 $u, v \in V$, 若 u 与 v 之间存在通路, 则称 u 与 v 是连通的, 记为

$$u \sim v \iff \text{u 与 v 之间有通路}$$

规定 $u \sim u$
连通关系是等价关系

连通分支与连通图

连通分支：设 V 关于顶点之间连通关系的商集是

$$V/\sim=\{V_1, V_2, \cdots, V_k\}$$

- 连通分支：导出子图 $G[V_i], (i = 1, ..., k)$
- 连通分支数：$p(G) = |V/\sim| = k$

连通图：

- 连通图：$p(G) = 1$
- 非连通图：$p(G) > 1$

短程线，距离

短程线：若 u, v 连通，称 u, v 之间长度最短的通路为 u, v 之间的短程线

距离：$d_G(u, v) =$ u,v 之间短程线的长度，当 u, v 不连通时，$d_G(u, v) = \infty$

直径：图 G 的顶点之间最大距离

$$d(G) = \max\{d_G(u, v) | u, v \in V(G)\}$$

距离

“距离” 应满足以下三条性质：

- 非负性：$d(u,v) > 0$，$d(u,v) = 0 \iff u = v$
- 对称性：$d(u,v) = d(v,u)$
- 三角不等式：$d(u,v) + d(v,w) > d(u,w)$

无向图的距离函数 $d_G(u,v)$ 满足上述要求，有向图的 “距离” 函数 $d_D(u,v)$ 不对称：

$$d(u,v) = 1, d(v,u) = 2$$

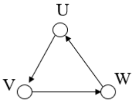


图 6: 有向图的距离函数

二部图判别定理

定理

G 是二部图 $\iff$ G 中无奇圈

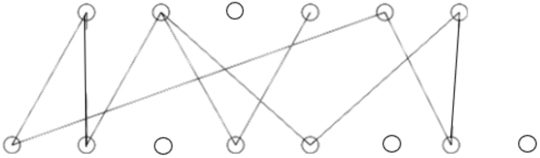


图 7: 二部图判别定理

二部图判别定理

证明.

$(\Rightarrow)$ 设二部图 $G=\langle V_1,V_2,E\rangle$，若 G 中无圈则成立，反之设 C 是 G 中任意圈，$C=v_1v_2\cdots v_{k-1}v_kv_1$。不妨设 $v_1\in V_1$，则 $v_3,v_5,\cdots,v_{k-1}\in V_1$，$v_2,v_4,\cdots,v_k\in V_2$，所以 k 是偶数，$|C|=k$，C 是偶圈.

□

二部图判别定理

证明.

($\Leftarrow$) 设 G 中无奇圈，设 G 连通，否则可以对每个连通分支进行讨论。任取 $v \in V(G)$，令

$$\begin{aligned} V_1 &= \{u | u \in V(G) \wedge \mathrm{d(u,v)} \text{ 是偶数}\}, \\ V_2 &= \{u | u \in V(G) \wedge \mathrm{d(u,v)} \text{ 是奇数}\}, \end{aligned} \tag{1}$$

则 $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ ，$V_1 \cup V_2 = V(G)$，下面证明

$$E \subseteq V_1 \& V_2$$

□

二部图判别定理

证明.

反证，假设存在 $e=(v_x,v_y)$，$v_x,v_y\in V_1$，设 Γ_{vx} 和 Γ_{vy} 分别为 v 到 v_x 和 v_y 的短程线，则其长度均为偶数，且 e 不在 Γ_{vx} 和 Γ_{vy} 上。设 v_z 为 Γ_{vx} 和 Γ_{vy} 的公共点，且 Γ_{zx} 和 Γ_{zy} 除 v_z 外没有公共点，则 Γ_{zx} 和 Γ_{zy} 的长度也是偶数，因此存在一个包含 v_x,v_y,v_z 的奇圈，矛盾 □

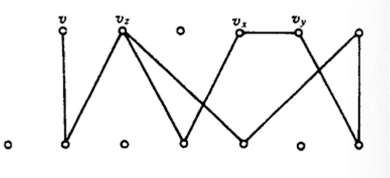


图 8: 二部图判别定理

定理

定理

若 n 阶无向图 G 是连通图，则 G 的边数 $m \geq n-1$

证明.

不妨设 G 是简单图，若简单图情况下成立则非简单图一定成立，下面对 n 归纳：

- $G = N_1$: $n = 1, m = 0$ 结论成立
- 设 $n \leq k$ 时命题成立，下证 $n = k+1$ 时也成立.

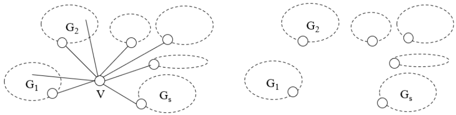


图 9: 连通图的边数

定理

证明.

取 $v \in V(G), G' = G - v$，设 $p(G') = s$，连通分支分别为 $G_1, G_2, \cdots, G_s$，设 $|V(G_i)| = n_i, |E(G_i)| = m_i, (i = 1, 2, \cdots, s)$，由归纳假设知 $m_i \geq n_i - 1$。又由于删除 v 产生 s 个连通分支，所以至少删除了 s 条边，即 $d_G(v) \geq s$，则

$$\begin{aligned} m &= m_1 + m_2 + \cdots + m_s + d_G(v) \\ &\geq (n_1 - 1) + (n_2 - 1) + \cdots + (n_s - 1) + s \\ &= n_1 + n_2 + \cdots + n_s = n - 1 \end{aligned} \tag{2}$$

□

无向图的连通性

例 3 证明每个非连通图 G 的补图 $\bar{G}$ 联通

证明.

只需证明任意连个顶点 x 和 y 在 $\bar{G}$ 中连通即可：

- (1) 若 x 和 y 在 G 中不连通，则在 $\bar{G}$ 中有边相连，连通
- (2) 若 x 和 y 在 G 中连通，则同属一个连通分支，又 G 不是连通图，因此存在 z 是 G 别的连通分支中的顶点，根据 (1)，z 在 $\bar{G}$ 中分别和 x，y 直接相连，因此 x 和 y 在 $\bar{G}$ 中连通。

□