

20240424作业

1. 讨论函数项级数在指定区间的一致收敛性: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin x \sin nx}{\sqrt{n+x^2}}, \quad x \in [0, +\infty).$
2. 设 $\{f_n(x)\}$ 是 $[0, 1]$ 上的连续函数列并且满足 $f_n(x) \rightarrow f(x) (n \rightarrow \infty)$, 序列 $\{x_n\} \subset [0, 1]$ 满足 $x_n \rightarrow x_0 (n \rightarrow \infty)$, 试举例说明: 当 $n \rightarrow \infty$ 时 $f_n(x_n) (n = 1, 2, \dots)$ 未必收敛到 $f(x_0)$. 现在设 $f_n(x) \Rightarrow f(x), x \in [0, 1]$, 证明必有 $f_n(x_n) \rightarrow f(x_0), (n \rightarrow \infty)$.
3. 讨论函数项级数在指定区间的一致收敛性:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin nx}{n}, \quad (A) \ x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]; \quad (B) \ x \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}].$$
4. 证明 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+x^2} \arctan nx$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致收敛.