AI 中的数学 第七次作业

2300012929 尹锦润

教材 3.38

$\forall \varepsilon > 0$，有

$$E(e^{aX}) = \int_{-\infty}^{\varepsilon} e^{ax} P(X = x)\mathrm{d}x + \int_{\varepsilon}^{+\infty} e^{ax} P(X = x)\mathrm{d}x \geqslant \int_{\varepsilon}^{+\infty} e^{ax} P(X = x)\mathrm{d}x \geqslant e^{a\varepsilon} P(X \geqslant \varepsilon)$$

因此 $P(X \geqslant \varepsilon) \leqslant e^{-a\varepsilon} E(e^{aX})$。

教材 3.39

令 $Z = X - Y, Z \sim N(\mu_1 - \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$，于是所求概率为

$$P(Z > 0) = P\left(\frac{Z - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} > \frac{0 - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}\right) = P\left(N(0,1) > \frac{-(\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}\right) = P\left(N(0,1) < \frac{(\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}\right) = \Phi(\frac{\mu_1 - \mu_2}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}})$$

教材 3.40

$$P(X = 2) = 0.05 + 0.06 + 0.09 + 0.04 + 0.03 = 0.27$$
$$P(Y \geqslant 2) = 0.06 + 0.12 + 0.09 + 0.03 + 0.01 + 0.05 + 0.04 + 0.03 + 0.01 + 0.02 + 0.03 + 0.04 = 0.53$$
$$P(X = Y) = 0.08 + 0.10 + 0.09 + 0.03 = 0.3$$
$$P(X \leqslant 2, Y \leqslant 2) = 0.08 + 0.06 + 0.05 + 0.07 + 0.10 + 0.06 + 0.06 + 0.12 + 0.09 = 0.69$$
$$P(X > Y) = 0.06 + 0.05 + 0.02 + 0.06 + 0.03 + 0.03 = 0.25$$

教材 3.43

(1)

$$P(X \leqslant t) = \sum_{k=0}^{t} pq^k = 1 - q^{t+1}$$

$$P(\min\{X, Y\} = z) = P(X = z)(1 - P(Y \leqslant z - 1)) + P(Y = z)(1 - P(X \leqslant z)) = pq^{2t}(1 + q)$$

$$P(X - Y = v) = \sum_k pq^k p^{k+v} = \frac{pq^v}{1 + q}$$

$$P(\min\{X, Y\} = z \wedge X - Y = v) = pq^z pq^{z+v} = P(\min\{X, Y\} = z)P(X - Y = v)$$

（对于 v ⩾ 0 或者 < 0 都满足）因此独立。

(2) 类似 1 证明即可。

教材 3.44

$$p_X(x)=1, p_Y(y)=[a-y\geqslant 0]+[a+y\leqslant 1]$$
$$E(X)=0.5, E(Y)=\frac{a^2+(1-a)^2}{2}, E(XY)=\frac{1}{3}-\frac{a}{2}+\frac{a^3}{3}$$

代入 $E(X)E(Y)=E(XY)$ 可以得到 $(a-\frac{1}{2})(2a^2-2a-1)=0$，进而 $a=\frac{1}{2}$ 或者 $a=\frac{1\pm\sqrt{3}}{2}$（舍去）。

于是 $a=1/2$。

教材 3.45

$$p_X(x)=3x^2, p_Y(y)=\int_y^1 3x\mathrm{d}x=\frac{3}{2}(1-y^2)$$
$$p_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\frac{3x}{3x^2}=\frac{1}{x}, & 0<x<1, 0<y<x\\ 0, & otherwise\end{cases}$$
$$p_{X|Y}(x|y)=\begin{cases}\frac{3x}{\frac{3}{2}(1-y^2)}=\frac{2x}{1-y^2}, & 0<y<x\leqslant 1\\ 0, & otherwise\end{cases}$$

教材 3.46

$$P(X=0.5)=\int_{0.25}^1\frac{21}{4}(0.25)^2y\mathrm{d}y=\frac{21*15}{2048}$$
$$P(Y\geqslant 0.75, X=0.5)=\int_{0.75}^1\frac{21}{4}(0.25)^2y\mathrm{d}y=\frac{21*7}{2048}$$
$$P(Y\geqslant 0.75|X=0.5)=\frac{P(Y\geqslant 0.75, X=0.5)}{P(X=0.5)}=\frac{7}{15}$$

教材 3.47

$$p(Y=y)=\int_y^1 24(1-x)y\mathrm{d}x=12y(y-1)^2$$
$$E(X|Y=y)=\int_y^1\frac{p(x,y)}{p(Y=y)}x\mathrm{d}x=\frac{(2y+1)}{3}$$

教材 3.48

$$\begin{aligned}
E(Z) &= \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x}\left[(3x+1)\int_0^x \lambda e^{-\lambda y}\mathrm{d}y + 6\int_x^{+\infty} \lambda e^{-\lambda y}y\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x}\left[(3x+1)(1-e^{-\lambda x}) + 6xe^{-\lambda x} - 6\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\right]\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{+\infty} \left[3\lambda xe^{-\lambda x} + \lambda e^{-\lambda x} + 3\lambda xe^{-2\lambda x} - (\lambda+6)e^{-2\lambda x}\right]\mathrm{d}x \\
&= \frac{3}{\lambda} - 1 + \frac{3}{4\lambda} + \frac{\lambda+6}{2\lambda} \\
&= \frac{27}{4\lambda} - \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

教材 3.49

对于任意 $\mathbf{t} = (t_1, \cdots, t_n)$，有

$$\sum_{i,j}\sigma_{i,j}t_it_j = \sum_{i,j}E\left[(X_i - E[X_i])(X_j - E[X_j])t_it_j\right] = E\left[\sum_{i,j}(X_i - E[X_i])(X_j - E[X_j])t_it_j\right] = E[YY^T]$$

其中 $Y = \sum_i (X_i - E[X_i])t_i$，于是 $\mathbf{\Sigma}$ 非负定。

教材 3.51

$$P(M) = \int_{-\infty}^{+\infty} r(x)p_X(x)\mathrm{d}x = a$$

$$P(X \leqslant z \wedge M) = \int_{-\infty}^{z} p_X(x)r(x)\mathrm{d}x = a\int_{-\infty}^{z} q(x)\mathrm{d}x$$

因此

$$P(X \leqslant z|M) = \int_{-\infty}^{z} q(x)\mathrm{d}x$$

练习题 1

（1）$X \sim N(1,4)$，因此其边界密度函数为 $f_X(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\exp\{-\frac{(x-1)^2}{4}\}$。

（2）$(X,Y) \sim N\left([\mu_1,\mu_2], \begin{bmatrix}\sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22}\end{bmatrix}\right)$，有 $E(Y|X=x) = \mu_2 + \sigma_{21}\sigma_{11}^{-1}(x-\mu_1) = 2 + \frac{3}{4}(x-1)$。

（3）$\rho(X,Y)=\dfrac{cov(X,Y)}{\sqrt{var(X)var(Y)}}=1/2$。

练习题 2

$|\Sigma_1|=|\Sigma_2|=1$，因此

$$\begin{aligned}\log\frac{p(X)}{q(X)}&=-\frac{1}{2}\left[(X-\mu_1)^T\begin{bmatrix}1&2\\2&5\end{bmatrix}^{-1}(X-\mu_1)-(X-\mu_2)^T\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}^{-1}(X-\mu_2)\right]\\&=-\frac{1}{2}\left[(X-\mu_1)^T\begin{bmatrix}1&2\\2&5\end{bmatrix}^{-1}(X-\mu_1)-(X-\mu_2)^T\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}^{-1}(X-\mu_2)\right]\\&=-\frac{1}{2}[(x_1-x_2-1)^2-x_1^2-(x_2-1)^2]=-x_1(x_2+1)+2x_2\end{aligned}$$

对于 $E_X\left(\log\dfrac{p(X)}{q(X)}\right)$ 不会。

练习题 3

令 $X=(\xi-a)/1,Y=(\eta-b)/1$，有 $(X,Y)\,N(0,0,1,1,\rho)$，本质上求 $P(X\geqslant 0,Y\geqslant 0)$，不会。

练习题 4

（1）

$$cov(\langle\mathbf{u},\mathbf{x}\rangle,\langle\mathbf{v},\mathbf{x}\rangle)=\mathbf{u}^{\mathbf{T}}\,cov(\langle\mathbf{x}\rangle,\langle\mathbf{x}\rangle)\mathbf{v}=\mathbf{u}^{\mathbf{T}}\mathbf{v}$$