图论

第六讲：欧拉图与总结

方聪

2024 年秋季

1 欧拉图

2 图论作业

3 总结

4 复习题

5 致谢

1 欧拉图

2 图论作业

3 总结

4 复习题

5 致谢

七桥问题

哥尼斯堡七桥问题：一个散步者如何不重复的走完七桥，并最终回到出发点？

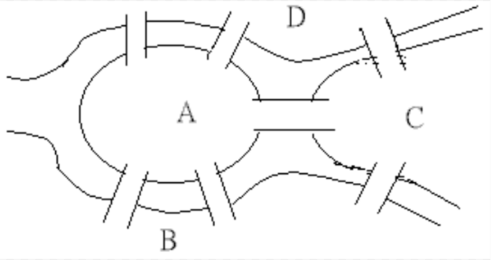


图 1: 七桥问题

Leonhard Euler

Leonhard Euler ($1707 \sim 1783$):

- 人类有史以来最多产的数学家
- 1736 年,“七桥问题”,图论和拓扑学诞生

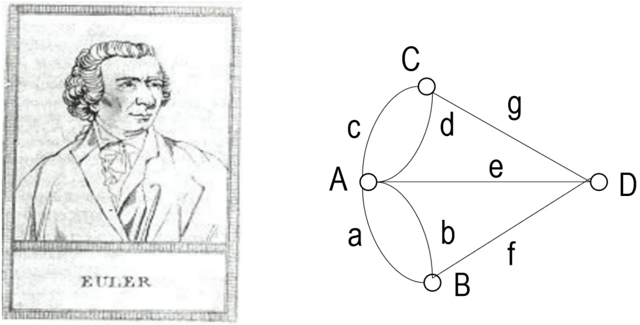


图 2: Leonhard Euler

欧拉通路、欧拉回路

定义 (欧拉通路)

经过图中所有边一次且仅一次，行遍所有顶点的通路称为欧拉通路。根据定义可知，欧拉通路是经过所有边的简单通路并且是生成通路（经过所有顶点的通路）

定义 (欧拉回路)

经过图中所有边一次且仅一次，行遍所有顶点的回路称为欧拉回路。欧拉回路是经过所有边的简单生成回路

欧拉图和半欧拉图

定义 (欧拉图)

有欧拉回路的图

定义 (半欧拉图)

有欧拉通路但无欧拉回路的图

规定：平凡图为欧拉图

无向欧拉图的充分必要条件

定理

设 G 是无向连通图，则以下命题等价

- G 是欧拉图
- G 中所有顶点都是偶数度
- G 是若干个边不交的圈的并

证明.

(1)⇒(2)：设 G 是 n 阶、m 条边的无向图，若 G 是平凡图，结论成立；若 G 是非平凡图，因为 G 是欧拉图，所以存在欧拉回路，设 C 为 G 中一条欧拉回路，$C = v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \cdots e_{m-1} v_{m-1} e_m v_0$，对于任意 v，在 C 中出现一次就获 2 度，若总共 k 次经过顶点 v，则 $d(v) = 2k$，即 v 的度数为偶数 □

无向欧拉图的充分必要条件

证明.

(2)⇒(3)：对 G 的边数 m 应用数学归纳法。当 $m=1$ 时，G 为一个环，结论成立。由于 G 连通且无奇数顶点可知 G 中存在圈，设 C 为 G 中一个圈，令 $G' = G - E(C)$，则 G' 有 s $(s \geq 1)$ 个连通分支 $G_1, \cdots, G_s$（可能有的连通分支为平凡图） □

则 G_i 的边数 $m_i \leq k$，且顶点的度仍为偶数，由归纳假设知：
$G_r = \bigcup_{i=1}^{d_r} C_{ri}, r = 1, 2, ..., s$. 其中
$E(C_{ri}) \bigcap E(C_{rt}) = \emptyset, i, t = 1, 2, ..., d, i \neq t, r = 1, 2, ..., s$, 并且
$E(C_{ri}) \bigcap E(C_{tj}) = \emptyset, r, t = 1, 2, ...s, r \neq t, i = 1, 2, ...d_r, j = 1, 2, ...d_t$. 因此 $G = C \bigcup G' = C \bigcup \left(\bigcup_{t=1}^{s} \bigcup_{i=1}^{d_t} C_{ti} \right)$ 为边不重的圈的并

无向欧拉图的充分必要条件

证明.

(3)⇒(1)：对 G 中的圈的个数 d 应用数学归纳法。$d=1$ 时，$G=C_1$，则 C_1 为 G 的欧拉回路，G 为欧拉图。
假如结论对 $d \le k$ 成立，考虑 $d=k+1$ 的情况，设 $G_1' = \bigcup_{i=1}^{k+1} C_i - E(C_{k+1})$ 并且设 G_1' 有 s 个连通分支 $G_1, \cdots, G_s$，由于 G 为若干个边不重的圈的并，可知 G_i 为若干个边不重的圈的并或为平凡图，由归纳假设知 G_i 为欧拉图，设 $\tilde{C}_i$ 为 G_i 中的欧拉回路，由 G 的连通性知 C_{k+1} 与 $\tilde{C}_i$ 有公共顶点，设 $v_{(k+1),i}$ 为 C_{k+1} 与 $\tilde{C}_i$ 的一个公共顶点，规定一种走法：从 C_{k+1} 的某一顶点出发开始行遍，当遇到 $v_{(k+1),i}$ 时，先行遍 $\tilde{C}_i$，再继续行遍，最后回到原始出发点，得到回路 C，它经过 G 中每条边一次并且行遍 G 的所有顶点，因此 C 为 G 中欧拉回路，所以 G 为欧拉图 □

例图

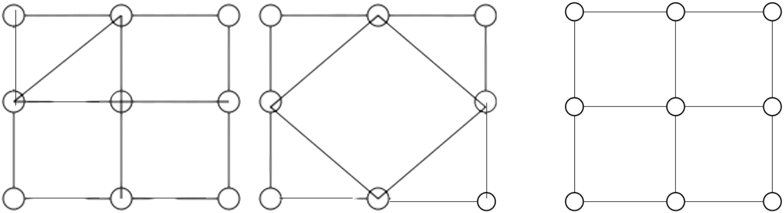


图 3: 例图

一三存在奇数顶点

无向半欧拉图的充分必要条件

定理

设 G 是无向连通图，则以下命题等价

- G 是半欧拉图
- G 中恰有 2 个奇度顶点

证明.

$\Rightarrow$ 设 G 为半欧拉图，存在欧拉通路 $C = v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \cdots e_{m-1} v_{m-1} e_m v_m$，欧拉通路的起点和终点是奇数度，其余顶点都是偶数度

$\Leftarrow$ 在两个奇数度顶点之间加 1 条新边所有顶点都是偶数度，得到欧拉回路。从欧拉回路上删除所加边后，得到欧拉通路 $\square$

欧拉图

例 1：设 G 是恰有 $2k$ 个奇度顶点的连通图，证明 G 中存在 k 条边不重的简单通路 $P_1 \cdots P_k$，使得 $E(G) = \bigcup_{i=1}^{k} E(P_i)$

证明.

归纳

- $k = 1$ 时，G 中恰好有两个奇度顶点，可知 G 为半欧拉图，其欧拉通路满足条件；
- 设 $k = r$ 时结论为真，$k = r + 1$ 时，设奇度顶点为 $v_1, v_1^{'} \cdots v_{r+1}, v_{r+1}^{'}$，在 G 中加边 $(v_{r+1}, v_{r+1}^{'})$ 得 $G^{'}$ 为具有 $2r$ 个奇度顶点的图，根据归纳假设存在 r 个边不重的简单通路使得 $E(G^{'}) = \bigcup_{i=1}^{r} E(P_i)$

□

欧拉图

证明.

同一简单通路最多含两个奇度顶点，因此 $P_1, \cdots, P_r$ 各自含两个奇度顶点且为通路的始点和终点。又存在某个 P_i 含有新加边 (v_{r+1}, v'_{r+1})，则 $P_i - (v_{r+1}, v'_{r+1})$ 产生两条边不重的简单通路，因此 $E(G)$ 由 $r+1$ 条边不重的简单通路组成 □

1 欧拉图

2 图论作业

3 总结

4 复习题

5 致谢

1. 设无向图 G 有 16 条边，有 3 个 4 度顶点，4 个 3 度顶点，其余顶点的度数均小于 3，问 G 中至少有几个顶点？

解：用握手定理解本题，设 G 至少有 n 个顶点，则 G 有 $n-7$ 个顶点的度数至多为 2，由握手定理可得 $2m = 32 \leqslant 3 \times 4 + 4 \times 3 + 2(n-7)$. 从此式解出 $n \geqslant 11$，即 G 中至少有 11 个顶点。

2. 设 9 阶无向图 G 中，每个顶点的度数不是 5 就是 6，证明 G 中至少有 5 个 6 度顶点或至少有 6 个 5 度顶点。

解：【方法一】穷举法。设 G 有 x 个 5 度顶点，由握手定理的推论可知，x 只能取 0, 2, 4, 6, 8 这 5 个值，G 有 $9-x$ 个 6 度顶点，于是 $(x, 9-x)$ 只有下面 5 种情况：

$$(1)(0,9);\quad (2)(2,7);\quad (3)(4,5);\quad (4)(6,3);\quad (5)(8,1).$$

在 (1), (2), (3) 中至少有 5 个 6 度顶点，而在 (4), (5) 中均至少有 6 个 5 度顶点。

【方法二】反证法。否则，G 至多有 4 个 6 度顶点，并且至多有 5 个 5 度顶点，但由握手定理的推论可知，G 不可能有 5 个 5 度顶点，于是 G 至多有 8 个顶点，这与 G 有 9 个顶点相矛盾。

3. 证明空间中不可能存在有奇数个面且每个面均有奇数条棱的多面体。

解：用握手定理或握手定理的推论证明，使用反证法。
假设存在具有奇数个面且每个面均具有奇数条棱的多面体，要寻找出矛盾，就要做无向图 $G = \langle V, E\rangle$。其中，$V = \{v|v$ 为 G 的面$\}$，$E = \{(u, v)|u, v \in V \wedge u \neq v \wedge u$ 与 v 有公共棱$\}$。由假设可知，$|V|$ ($=$ 面数) 为奇数，且 $\forall v \in V$，$d(v)$ 为奇数，于是 G 有奇数个奇度顶点，这与握手定理推论相矛盾。

14. 设 $n(n \geq 3)$ 阶无向简单图 G 是连通的，但不是完全图，证明存在 $u, v, w \in V(G)$，使得 $(u, v), (v, w) \in E(G)$，而 $(u, w) \notin E(G)$.

解：【方法二】反证法.
否则，$\forall u, v, w \in V(G)$，只要 (u, v) 和 $(v, w) \in E(G)$，就有 $(u, w) \in E(G)$，记否定的结论为 $(*)$。下面利用 $(*)$ 推矛盾。
$\forall u, v \in V(G)$，由 G 的连通性可知，u 与 v 之间有通路，设 $P = uv_1v_2 \cdots v_rv$ 为 u 与 v 之间的一条通路。因为 $(u, v_1), (v_1, v_2) \in E(G)$，由 $(*)$ 可知 $(u, v_2) \in E(G)$，又因为 $(u, v_2), (v_2, v_3) \in E(G)$，由 $(*)$ 可知 $(u, v_3) \in E(G)$，这样继续下去，必有 $(u, v) \in E(G)$，由 u, v 的任意性，可知 G 为无向完全图 K_n，这与 G 不是完全图矛盾。

15. 设 G 是无向简单图, $\delta(G) \geq 2$, 证明 G 中存在长度大于等于 $\delta(G)+1$ 的圈.

解：用扩大路径法证明.
不妨设 G 是连通的，否则，G 的每个连通分支的最小度都 ≥ 2。
设 $u, v \in V(G)$，由于 G 的连通性可知，u 与 v 之间存在路径，用扩大路径法扩大这条路径，设极大路径为 $\Gamma = v_1 v_2 \cdots v_{l-1} v_l$。
由于最小度为 $\delta \geqslant 2$，易知，$l \geqslant \delta + 1$。由极大路径的性质可知，Γ 中 v_1（还有 v_2）不与 Γ 外的顶点相邻，而 $d(v_1) \geqslant \delta(G) \geqslant 2$，因而在 Γ 上至少存在 $\delta(G)$ 个顶点，$v_{i_1} = v_2, v_{i_2}, \cdots, v_{i_\delta} \cdots$ 与 v_1 相邻，如图4所示。于是圈 $v_1 v_{i_1} \cdots v_{i_\delta} v_1$ 的长度 $\geqslant \delta(G)+1$。

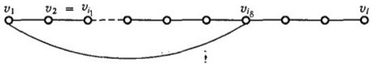


图 4:

16. 设 G 是无向简单图，$\delta(G) \geq 3$，证明 G 中各圈长度的最大公约数为 1 或 2.

解：用扩大路径法找一条极大路径，在路径上找 3 个圈进行讨论。
不妨设 G 是连通简单图，否则可对 G 的某个连通分支进行讨论。
设 $P = v_0 v_1 \cdots v_l$ 为 G 中一条极大路径。则 $l \geqslant \delta(G) \geqslant 3$。由于 v_0 不与 P 外顶点相邻，又因为 G 为简单图，则在 P 上除 v_l 与 v_0 相邻外，由 $\delta(G) \geqslant 3$，还至少存在两个顶点，设其为 v_r，v_s $(1 < r < s)$ 与 v_0 相邻，于是可得 3 个圈。

如图 5 所示。

$$C_1 = v_0 v_1 \cdots v_r v_0, \quad C_2 = v_0 v_1 \cdots v_r \cdots v_s v_0, \quad C_3 = v_0 v_1 \cdots v_s v_0$$

易知，C_1, C_2, C_3 的长度分别为 $r+1, s+1, s-r+2$。设 $\gcd(r+1, s+1, s-r+2) = k$，则
$k \mid r+1 \wedge k \mid s+1 \wedge k \mid s-r+2$，由
$k \mid r+1 \wedge k \mid s+1 \Rightarrow k \mid s-r$，又由
$k \mid s-r+2 \wedge k \mid s-r \Rightarrow k \mid 2$，于是 k 只能为 1 或 2。

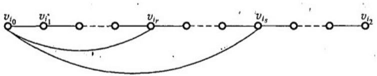


图 5:

第九章习题

2. 无向树 T 有 9 片树叶，3 个 3 度顶点，其余顶点的度数均为 4，问 T 中有几个 4 度顶点？根据 T 的度数列，你能画出多少棵非同构的无向树？

解：设有 x 个 4 度顶点，则阶数 $n = x + 9 + 3 = 12 + x$，
$m = n - 1 = 11 + x$，由握手定理可得
$2m = 22 + 2x = 9 + 3 \times 3 + 4x \Rightarrow x = 2$，即有 2 个 4 度顶点。于是所求树均为 14 阶树，度数列应为

$$1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 3, 3, 3, 4, 4,$$

(1) 直径为 6 的非树叶顶点的排列可有下面 6 种不同方案，

$$(3,3,3,4,4),(3,3,4,3,4),(3,4,3,3,4),(4,3,3,3,4)$$

$$(3,4,4,3,3),(3,4,3,4,3)$$

从而得 6 棵非同构的树，分别如图6(a), (b), (c), (d), (e), (f) 所示。

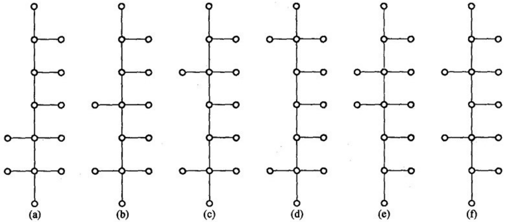


图 6:

(2) 直径为 5 的可画出 7 棵非同构树，如图7(a),(b),(c),(d),(e),(f),(g) 所示。直径为 4 的如图7(h) 所示。

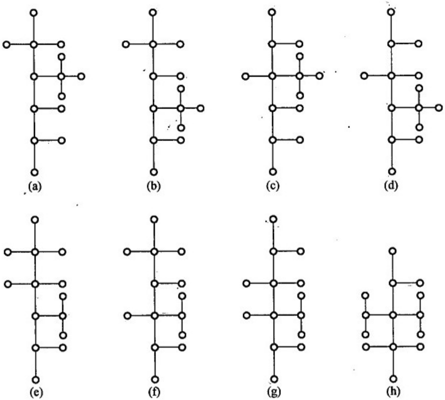


图 7:

3. 一棵无向树 T，有 n_i 个 i 度顶点，$i = 2, 3, \ldots, k$，其余顶点都是树叶，问 T 有几片树叶？

解：设有 x 片树叶，则阶数 $n = x + \sum_{i=2}^{x} n_i$，边数 $m = \sum_{i=2}^{x} n_i + (x-1)$，由握手定理可知

$$2m = \sum_{i=2}^{x} 2n_i + 2(x-1) = x + \sum_{i=2}^{x} in_i,$$

解得

$$x = \sum_{i=2}^{x} (i-2)n_i + 2 = \sum_{i=3}^{x} (i-2)n_i + 2.$$

6. 设 G 为 $n(n \geqslant 5)$ 阶简单图，证明 G 或 $\overline{G}$ 中必含圈。

解：【方法一】设 G 与 $\overline{G}$ 的边数分别为 m 与 m'，连通分支数分别为 s 与 s' $(s \geqslant 1, s' \geqslant 1)$。
若 G 与 $\overline{G}$ 中都无圈，则它们的各连通分支都是树。设 G 的第 i 个连通分支的阶数和边数分别为 n_i 与 m_i $(1 \leqslant i \leqslant s)$, $\overline{G}$ 的第 j 个连通分支的阶数和边数分别为 n_j' 与 m_j' $(1 \leqslant j \leqslant s)$, 因此

$$\frac{n(n-1)}{2} = m + m' = \sum_{i=1}^{s} m_i + \sum_{i=1}^{s} m_i'$$

$$= \sum_{i=1}^{s} n_i + \sum_{i=1}^{s} n_i' - (s+s') = 2n - (s+s') \leqslant 2n-2,$$

整理后得 $n^2 - 5n + 4 \leqslant 0.$
解此不等式，得 $1 \leqslant n \leqslant 4$，这与 $n \geqslant 5$ 相矛盾，所以 G 或 $\overline{G}$ 必含圈。

【方法二】不妨设 G 的边数不比 $\overline{G}$ 的边数少，下面证明 G 中必含圈。方法还是反证法。
否则，设 G 有 $s\ (s \geqslant 1)$ 个连通分支，它们都是树，于是 G 的边数 m 满足

$$\frac{n(n-1)}{4} \leqslant m = \sum_{i=1}^{s} m_i = \sum_{i=1}^{s} n_i - s = n - s \leqslant n - 1,$$

得不等式 $n^2 - 5n + 4 \leqslant 0$,
解出 $1 \leqslant n \leqslant 4$，这与 $n \geqslant 5$ 相矛盾，所以 G 中必含圈。

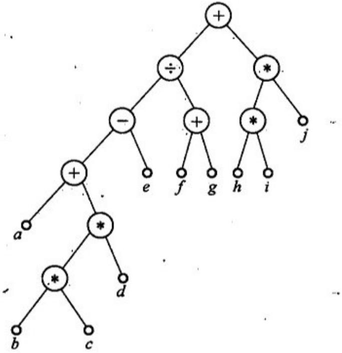
13. 设 T_1, T_2 是无向连通图 G 的两棵生成树。已知 $e_1 \in E(T_1)$ 但 $e_1 \notin E(T_2)$，证明存在 $e_2 \in E(T_2)$ 但 $e_2 \notin E(T_1)$，使得 $(T_1 - e_1) \cup \{e_2\}$，$(T_2 - e_2) \cup \{e_1\}$ 都是 G 的生成树。

解：由于 e_1 是 T_1 的树枝，且 $e_1 \notin E(T_2)$，所以 e_1 是 T_2 的弦，这说明 e_1 不是环（环不在任何生成树中），也不是桥（桥应在任何生成树中）。

设 $e_1=(u_1,v_1)$。则 u,v 之间在 T_2 中存在唯一的路径 $P(u_1,v_1)$，$P(u_1,v_1)\cup\{e_1\}$ 构成一个圈。e_1 将 T_1 分为两个连通分支 G_1,G_2。考虑圈 $P(u_1,v_1)\cup\{e_1\}$ 中的所有顶点，则存在 $u_2\in G_1,v_2\in G_2$ 且 $e_2=(u_2,v_2)\subseteq P(u_1,v_1)$，由于 G_1,G_2 之间不连通，因此 $(T_1-e_1)\cup\{e_2\}$ 连通无回路。同样，$T_2\cup\{e_1\}$ 存在唯一回路 $P(u_1,v_1)\cup\{e_1\}$，从回路中删去 e_2 得到 $(T_2-e_2)\cup\{e_1\}$ 是联通无回路的。

由以上分析可知，$(T_1-e_1)\cup\{e_2\}$ 连通无回路，且为 G 的生成树，同样，$(T_2-e_2)\cup\{e_1\}$ 也是 G 的生成树。

21. 求算式 $((a+(b*c)*d)-e)\div(f+g)+(h*i)*j$ 的波兰符号法和逆波兰符号法表示。



(1) 用前序行遍法访问 T，得波兰符号法算式为：
$+\div-+a**bcde+fg**hij$.
(2) 用后序行遍法访问 T，得逆波兰符号法算式为：
$abc*d*+e-fg+\div hi*j*+$.

1. 求图8所示二图的关联矩阵。

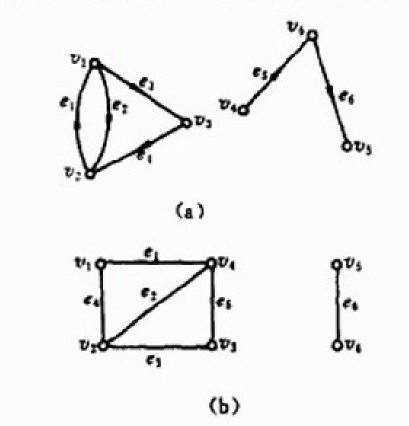


图 8:

第十章习题

解：图 8(a) 中有向图 D 的关联矩阵为

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6
v_1	-1	1	1	0	0	0
v_2	1	-1	0	-1	0	0
v_3	0	0	-1	1	0	0
v_4	0	0	0	0	1	0
v_5	0	0	0	0	0	-1
v_6	0	0	0	0	-1	1

图 8(b) 中无向图 G 的关联矩阵为

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6
v_1	1	0	0	1	0	0
v_2	0	1	1	1	0	0
v_3	0	0	1	0	1	0
v_4	1	1	0	0	1	0

4. 有向图如图 9所示.

(1) D 中 v_1 到 v_4 长度为 1, 2, 3, 4 的通路各为多少条?

(2) v_1 到 v_4 长度小于等于 3 的通路为多少条?

(3) v_1 到 v_1 长度为 1, 2, 3, 4 的回路各为多少条?

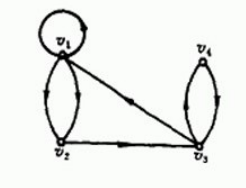
(4) v_4 到 v_4 长度小于等于 3 的回路为多少条?

(5) D 中长度为 4 的通路 (不含回路) 有多少条?

(6) D 中长度为 4 的回路有多少条?

(7) D 中长度小于等于 4 的通路为多少条? 其中有多少条为回路?

(8) 写出 D 的可达矩阵.



解：只需计算有向图 D 的邻接矩阵 A 及 A^2, A^3, A^4 就可以回答所有问题。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A^4 = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

为计算方便，还可以计算出 B_1, B_2, B_3, B_4.

$$B_1 = A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$B_3 = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_4 = \begin{pmatrix} 10 & 12 & 8 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 2 \\ 8 & 8 & 6 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

根据以上计算回答各问题:
(1) v_1 到 v_4 长度为 1, 2, 3, 4 的通路分别为 0; 0; 2, 2 条;
(2) v_1 到 v_4 长度小于等于 3 的通路为 2 条;
(3) v_1 到 v_1 长度为 1, 2, 3, 4 的回路分别为 1, 1, 3, 5 条;
(4) v_4 到 v_4 长度小于等于 3 的回路为 1 条;
(5) D 中长度为 4 的通路 (不含回路) 为 33 条;
(6) D 中长度为 4 的回路为 11 条;
(7) D 中长度小于等于 4 的通路为 88 条，其中有 22 条回路;
(8) 可达矩阵

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

可见 D 是强连通图。

5. 已知标定的无向图如图10 所示. A 是它的相邻矩阵, 求 A^k 中的元素 $a_{22}^{(k)}$, $k = 1, 2, \cdots$.

图 10:

第八章习题

4. 设 G 为欧拉图，$v_0 \in V(G)$，若从 v_0 开始行遍，无论行遍到那个顶点，只要未行遍过的边就可以行遍，最后行遍所有边回到 v_0，即得 G 中一条欧拉回路，则称 v_0 是可以任意行遍的。证明：v_0 是可以任意行遍的当且仅当 $G - v_0$ 中无圈。

解："$\Rightarrow$" 用反证法证明必要性。
否则，$G - v_0$ 中含圈，设 C' 为 $G - v_0$ 中的圈，则 v_0 不在 C' 上。设 $G' = G - E(C')$，由于在图中删除某个圈上的所有边，不影响图中顶点的奇偶性，所以 G' 中仍无奇度顶点，因而，若 G' 连通，G' 仍为欧拉图。
由于 v_0 是可以任意行遍的，在从 v_0 出发行遍 G 中欧拉回路时，只要 G' 中的边未行遍完就行遍 G' 中的边，由于 G' 也是欧拉图，当行遍出 G' 的欧拉回路时，必回到 v_0。但因 v_0 不在 C' 上，所以无法从 v_0 出发再行遍 C' 上的边，这与 v_0 是可以任意行遍的相矛盾。

若 G' 不连通，共有 $k(k \geqslant 2)$ 个连通分支，设为 $G_1, G_2, \cdots, G_k$，易知 $G_i(i=1,2,\cdots,k)$ 都是欧拉图。不妨设 v_0 在 G_1 中，在从 v_0 开始行遍 G 的欧拉回路时，先行遍 G_1 中的欧拉回路，由于不连通性，以及 v_0 不在 G' 上，所以 $G_2, G_3, \cdots, G_k$ 以及 C' 都无法行遍，这又矛盾于 v_0 是可以任意行遍的。

若 G' 不连通，共有 $k(k \geqslant 2)$ 个连通分支，设为 $G_1, G_2, \cdots, G_k$，易知 $G_i(i = 1, 2, \cdots, k)$ 都是欧拉图。不妨设 v_0 在 G_1 中，在从 v_0 开始行遍 G 的欧拉回路时，先行遍 G_1 中的欧拉回路，由于不连通性，以及 v_0 不在 G' 上，所以 $G_2, G_3, \cdots, G_k$ 以及 C' 都无法行遍，这又矛盾于 v_0 是可以任意行遍的。

"$\Leftarrow$"：由于 G 为欧拉图，G 为若干个边不重的圈的并，即 $G = \bigcup_{i=1}^{d} C_i$，因为 $G - v_0$ 中无圈，所以 G 中每个圈都过 v_0，即 v_0 是 G 中所有圈的公共顶点，于是 $C_1, C_2, \cdots, C_d$ 都过 v_0。在走 G 中欧拉回路时，从 v_0 开始行遍，随意地行遍完 $C_1, C_2, \cdots, C_d$（可不按标定顺序），最后回到 v_0，走一条欧拉回路，所以 v_0 是可任意行遍的。

1 欧拉图

2 图论作业

3 总结

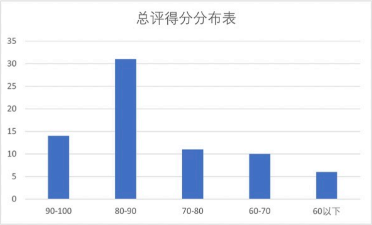
4 复习题

5 致谢

- 概率
- 正态分布的矩阵计算
- 统计
- 图论

考核方式：

- 课程作业 30%
- 期末考试 65%
- 其他：5%
- 取消期中考试



成绩统计	学生人数				学期成绩分布情况					
	应考人数	实考人数	未考人数		59分以下		60-84分		85分以上	
			正当理由	其他	人数	%	人数	%	人数	%
	73	72	1		6	8.33	38	52.78	28	38.89

考试范围

- 概率部分都考
- 统计：
  - 最大似然估计、矩估计、UMVUE、假设检验、t 分布、卡方分布
  - 假设检验：两点、单参数
  - 一元线性回归：公式
- 图论：
  - 握手、最大路径
  - 树（定义）、生成树
  - 图的矩阵表示、谱图

概率部分重点内容:

- 概率事件交并关系
- 概率分布、密度函数、概率密度变换公式、条件概率
- 期望、方差、条件期望/方差、协方差、相关系数、独立性
- 正态分布性质
- 依概率收敛

1 欧拉图

2 图论作业

3 总结

4 复习题

5 致谢

Problem 1 概率部分

设 ξ 的分布函数为 $p(x) = \lambda e^{-\lambda x}\mathbf{1}(x \geq 0)$, (1) 求 $E\xi$, (2) 求 $D\xi$

证明:

$$E\xi = \int_0^{+\infty} x\lambda e^{-\lambda x} dx = -\int_0^{+\infty} x de^{-\lambda x} = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda},$$

$$E\xi^2 = \int_0^{+\infty} x^2\lambda e^{-\lambda x} dx = -\int_0^{+\infty} x^2 de^{-\lambda x}$$

$$= -x^2 e^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} 2xe^{-\lambda x} dx = \frac{2}{\lambda}E\xi = \frac{2}{\lambda^2},$$

$$D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$

Problem 2

设事件 A 与 B 独立，且 $P(B) = 0.5$, $P(A \bigcap B^c) = 0.3$, 求 $P(A^c \bigcap B)$

解：

$$P(A \bigcap B^c) = P(A) - P(AB) = P(A) - P(A)P(B) = 0.5P(A) = 0.3,$$

$$\Rightarrow P(A) = 0.6$$

$$\Rightarrow P(A^c \bigcap B) = P(B) - P(AB) = P(B) - P(A)P(B) = 0.2$$

Problem 3

事件 A,B,C，A 与 C 互斥，$P(AB)=\frac{1}{2}$，$P(C)=\frac{1}{3}$，求 $P(AB|C^c)$

解：

$$P(AB|C^c)=\frac{P(ABC^c)}{P(C^c)}=\frac{P(AB)-P(ABC)}{1-P(C)}$$
$$=\frac{P(AB)}{1-P(C)}=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{4}$$

Problem 4

设 $X \sim U(0,1)$，当给定 $X = x$ 时，随机变量 Y 在 $(0,x)$ 上服从均匀分布．求 (1)(X,Y) 的概率密度；(2)$f_{X|Y}(x|y)$；(3)$P(X > e^{-1}|Y = e^{-2})$

证明：

$$(1) f_X(x) = \mathbf{1}(0 < x < 1), f_{Y|X}(y|x) = \frac{1}{x}\mathbf{1}(0 < y < x < 1),$$

$$f(x,y) = f_X(x)f_{Y|X}(y|x) = \frac{1}{x}\mathbf{1}(0 < y < x < 1)$$

$$(2) f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx = -\ln y\mathbf{1}(0 < y < 1),$$

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = -\frac{1}{x\ln y}\mathbf{1}(0 < y < x < 1)$$

Problem 4

设 $X \sim U(0,1)$，当给定 $X = x$ 时，随机变量 Y 在 $(0,x)$ 上服从均匀分布. 求 (1)(X,Y) 的概率密度; (2)$f_{X|Y}(x|y)$; (3)$P(X > e^{-1}|Y = e^{-2})$

证明：

$$
\begin{aligned}
(3)P(X > e^{-1}|Y = e^{-2}) &= \int_{e^{-1}}^{+\infty} f_{X|Y}(x|y = e^{-2})dx \\
&= \int_{e^{-1}}^{1} \frac{1}{2x} dx \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

Problem 5

设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度 $p(x,y)=be^{-(x+y)}1(0<x<1,y>0)$, (1) 求 b, (2) 令 $U=max\{X,Y\}$, 求 U 的分布函数 $F_U(u)$

解：(1)

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dxdy=b\int_0^1 e^{-x}dx\int_0^{+\infty}e^{-y}dy,$$

$$\Rightarrow b=\frac{e}{e-1}$$

Problem 5

设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度 $p(x, y) = be^{-(x+y)}\mathbf{1}(0 < x < 1, y > 0)$, (1) 求 b, (2) 令 $U = max\{X, Y\}$, 求 U 的分布函数 $F_U(u)$

解: (2) 由分布函数定义:

$$F_U(u) = P\left(max\{X, Y\} \leq u\right) = P\left(X \leq u, Y \leq u\right),$$

当 $u < 0$ 时, $F_U(u) = 0$,
当 $0 \leq u < 1$ 时,

$$F_U(u) = \frac{e}{e-1}\int_0^u dx \int_0^u e^{-x}e^{-y}dy = \frac{e}{e-1}(1-e^{-u})^2,$$

当 $u \geq 1$ 时,

$$F_U(u) = \frac{e}{e-1}\int_0^1 dx \int_0^u e^{-x}e^{-y}dy = 1 - e^{-u}$$

Problem 6

设 $\xi \sim N_3\left(0, \begin{pmatrix} 1 & \rho & 0 \\ \rho & 1 & \rho \\ 0 & \rho & 1 \end{pmatrix}\right)$, 试问 ρ 取什么值时, $\xi_1+\xi_2+\xi_3$ 与 $\xi_1-\xi_2-\xi_3$ 相互独立

解：由 $\xi \sim N_3\left(0, \begin{pmatrix} 1 & \rho & 0 \\ \rho & 1 & \rho \\ 0 & \rho & 1 \end{pmatrix}\right)$, 知 $\xi_1+\xi_2+\xi_3$ 与 $\xi_1-\xi_2-\xi_3$ 为二元正态分布，

$$Cov(\xi_1+\xi_2+\xi_3, \xi_1-\xi_2-\xi_3) = -1-2\rho,$$

当 $\rho = -\frac{1}{2}$ 时，$\xi_1+\xi_2+\xi_3$ 与 $\xi_1-\xi_2-\xi_3$ 相互独立

Problem 7

设 $\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix}$, $Var(\xi) = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, (1) 求 $\xi_1 - 2\xi_2 + \xi_3$ 的方差,
(2) 求 $\eta_1 = \xi_1 + \xi_2$,$\eta_2 = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3$ 的协方差阵

解:

$$
\begin{aligned}
&(1) D(\xi_1 - 2\xi_2 + \xi_3) \\
&\quad = D\xi_1 + 4D\xi_2 + D\xi_3 - 4Cov(\xi_1, \xi_2) - 4Cov(\xi_2, \xi_3) + 2Cov(\xi_1, \xi_3) \\
&\quad = 17, \\
&(2) D\eta_1 = D\xi_1 + D\xi_2 + 2Cov(\xi_1, \xi_2) = 12, \\
&\quad D\eta_2 = D\xi_1 + D\xi_2 + D\xi_3 + 2Cov(\xi_1, \xi_2) + 2Cov(\xi_2, \xi_3) + 2Cov(\xi_3, \xi_1) \\
&\quad = 20, \\
&\quad Cov(\eta_1, \eta_2) \\
&\quad = D\xi_1 + D\xi_2 + 2Cov(\xi_1, \xi_2) + Cov(\xi_2, \xi_3) + Cov(\xi_1, \xi_3) = 15
\end{aligned}
$$

Problem 8

若 (ξ,η) 服从 $N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$, 令 $U=a\xi+b\eta$, $V=c\xi+d\eta$, (1) 写出 (U,V) 的分布, (2) 求 U 与 V 的数学期望，方差以及相关系数, (3) 问何时 (u,V) 退化为一维分布, 何时 U 与 V 独立.

解:

$$(1)\begin{pmatrix}U\\V\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix},$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}U\\V\end{pmatrix}\sim N\left(\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mu_1\\\mu_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sigma_1^2&\rho\sigma_1\sigma_2\\\rho\sigma_1\sigma_2&\sigma_2^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&c\\b&d\end{pmatrix}\right)$$

$$=N(\begin{pmatrix}a\mu_1+b\mu_2\\c\mu_1+d\mu_2\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}a^2\sigma_1^2+b^2\sigma_2^2+2ab\sigma_1\sigma_2\rho & ac\sigma_1^2+bd\sigma_2^2+(ad+bc)\sigma_1\sigma_2\rho\\ac\sigma_1^2+bd\sigma_2^2+(ad+bc)\sigma_1\sigma_2\rho & c^2\sigma_1^2+d^2\sigma_2^2+2cd\sigma_1\sigma_2\rho\end{pmatrix}$$

Problem 8

若 (ξ, η) 服从 $N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$，令 $U = a\xi + b\eta$，$V = c\xi + d\eta$，(1) 写出 (U, V) 的分布，(2) 求 U 与 V 的数学期望，方差以及相关系数，(3) 问何时 (u, V) 退化为一维分布，何时 U 与 V 独立

解：(2) 由 (1) 知

$$
\begin{aligned}
EU &= a\mu_1 + b\mu_2, DU = a^2\sigma_1^2 + b^2\sigma_2^2 + 2ab\sigma_1\sigma_2\rho,\\
EV &= c\mu_1 + d\mu_2, DV = c^2\sigma_1^2 + d^2\sigma_2^2 + 2cd\sigma_1\sigma_2\rho,\\
cov(U, V) &= ac\sigma_1^2 + bd\sigma_2^2 + (ad + bc)\sigma_1\sigma_2\rho,\\
\rho_{UV} &= \frac{cov(U, V)}{\sqrt{DU}\sqrt{DV}}.
\end{aligned}
$$

Problem 9

设随机变量 X 和 Y 独立同分布，$X \sim N(\mu,\sigma^2)$，证明：$\mathbb{E}\left(\max\{X,Y\}\right) = \mu + \frac{\sigma}{\sqrt{\pi}}$.

证明：令 $X_1 = \frac{X-\mu}{\sigma}$，$Y_1 = \frac{Y-\mu}{\sigma}$，则有

$$X_1, Y_1 \sim N(0,1), \max\{X,Y\} = \mu + \sigma \max\{X_1, Y_1\}. \qquad (1)$$

又 $\max\{X_1,Y_1\} = \frac{1}{2}\left(X_1 + Y_1 + |X_1 - Y_1|\right)$，因此只需计算 $\mathbb{E}\left(|X_1 - Y_1|\right)$.

Problem 9

设随机变量 X 和 Y 独立同分布，$X \sim N(\mu, \sigma^2)$，证明：$\mathbb{E}\left(\max\{X, Y\}\right) = \mu + \frac{\sigma}{\sqrt{\pi}}$.

根据第（1）问的结果，有 $X_1 - Y_1 \sim N(0, 2)$，因此有

$$\mathbb{E}\left(|X_1 - Y_1|\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{\infty} |x| \exp -\frac{x^2}{4} dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}}. \qquad (2)$$

因此有 $\mathbb{E}\left(\max\{X, Y\}\right) = \mu + \frac{\sigma}{\sqrt{\pi}}$.

Problem 10

设随机变量序列 $\{X_n\}$ 为独立同分布，其密度函数为 $p(x) = e^{-(x-\alpha)}1(x \geq \alpha)$，令 $Y_n = min\{X_1, \ldots X_n\}$，证明:$Y_n \xrightarrow{P} \alpha$.

证明：

$$\begin{aligned} P(|Y_n - \alpha| \geq \epsilon) &= P(Y_n - \alpha \geq \epsilon) \\ &= P(\forall 1 \leq i \leq n, X_i \geq \alpha + \epsilon) \\ &= \prod_{i=1}^{n} P(X_i \geq \alpha + \epsilon) \\ &= e^{-n\epsilon} \to 0. \end{aligned}$$

Problem 11

设随机变量序列 $\{X_n\}$ 为独立同分布，且 $X_i \sim U(0,1)$，证明 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} lnX_i \xrightarrow{P} -1$.

证明：

$$E(lnX_i) = \int_0^1 lnxdx = -1,$$

$$E(lnX_i)^2 = \int_0^1 (lnx)^2 dx = 2, Var(lnX_i) = 1.$$

由切比雪夫不等式，$\forall \epsilon > 0$,

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} lnX_i - (-1)\right| \geq \epsilon\right) \leq \frac{1}{n\epsilon^2} \to 0.$$

Problem 12

设随机变量序列 X_n 服从参数为 $\frac{1}{n}$ 的泊松分布（$P(x=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$），证明 X_n 依概率收敛于 0.

证明：

$$\begin{aligned} P\left(|X_n-0|\le\epsilon\right) &= P\left(-\epsilon\le X_n\le\epsilon\right) \\ &= P\left(X_n=0\right) \\ &= e^{-\frac{1}{n}}\to 1. \end{aligned}$$

Problem 1 统计

设 $\xi_1,..,\xi_n$ 为总体 ξ 的样本，ξ 的概率密度函数为 $p(x,\theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta^2}2(\theta - x), 0 < x < \theta \\ 0, \quad \text{else} \end{cases}$，$\theta > 0$，求未知参数 θ 的矩估计量.

证明：

$$E\xi = \int_0^\theta x\frac{1}{\theta^2}2(\theta - x)dx = \frac{\theta}{3},$$

$$\Rightarrow \hat{\theta} = 3\bar{\xi}.$$

Problem 2

设 $\xi_1,..,\xi_n$ 为总体 ξ 的样本，ξ 的概率密度函数为 $p(x,\theta) = \begin{cases} (\theta+1)x^\theta, 0<x<1 \\ 0, \quad \text{else} \end{cases}$，$\theta>0$，求未知参数 θ 的矩估计量.

证明：

$$E\xi = \int_0^1 x(\theta+1)x^\theta dx = \frac{\theta+1}{\theta+2},$$

$$\Rightarrow \hat{\theta} = \frac{2\bar{\xi}-1}{1-\bar{\xi}}.$$

Problem 3

设 $\xi_1, .., \xi_n$ 为总体 ξ 的样本, $\xi \sim N(\mu, \sigma^2)$, (1) 求 μ 与 σ^2 的极大似然估计量, (2) 求出 μ 与 σ^2 的 UMVUE.

证明：(1)

$$L(\mu,\sigma^2) = \prod_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(\xi_i-\mu)^2\right\}\right]$$

$$= \frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma)^n} exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-\mu)^2\right\}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial lnL(\mu,\sigma^2)}{\partial \mu} = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-\mu) = 0 \\ \frac{\partial lnL(\mu,\sigma^2)}{\partial \sigma^2} = \frac{1}{2\sigma^4}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-\mu)^2 - \frac{n}{2\sigma^2} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i = \bar{\xi} \\ \hat{\sigma^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-\bar{\xi})^2. \end{cases}$$

Problem 3

设 $\xi_1,..,\xi_n$ 为总体 ξ 的样本, $\xi \sim N(\mu,\sigma^2)$, (1) 求 a 与 σ^2 的极大似然估计量, (2) 求出 μ 与 σ^2 的 UMVUE.

证明: (2)

$$p(x_1,..,x_n;\mu,\sigma^2) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma)^n} exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\right\}$$

$$= \frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma)^n} e^{-\frac{n\mu^2}{2\sigma^2}} exp\left\{\left(\bar{x},\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)\begin{pmatrix}\frac{n\mu}{\sigma^2}\\ -\frac{1}{2\sigma^2}\end{pmatrix}\right\}$$

$\Rightarrow T(\xi_1,...,\xi_n) = (\bar{\xi},\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2)$ 为 (μ,σ^2) 的充分完备统计量, 而 $(\bar{\xi},\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-\bar{\xi})^2)$ 为 (μ,σ^2) 的无偏估计量, 且
$E\left(\bar{\xi}|\bar{\xi},\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2\right) = \bar{\xi}$,
$E\left(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-\bar{\xi})^2|\bar{\xi},\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2\right) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-\bar{\xi})^2$, 故
$(\bar{\xi},\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-\bar{\xi})^2)$ 为 (μ,σ^2) 的 UMVUE.

Problem 4

考虑一元回归模型 $y = \beta x + \epsilon, \epsilon \sim N(0, \sigma^2)$，现有样本 $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$，(1) 求 β 的最小二乘估计 $\hat{\beta}$，(2) 证明 $\hat{\beta}$ 为 β 的无偏估计.

证明：

$$(1)\frac{\partial}{\partial\beta}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \beta x_i)^2 = -\sum_{i=1}^{n}(y_i - \beta x_i)x_i = 0,$$

$$\Rightarrow \hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}.$$

$$(2)E\hat{\beta} = E\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = E\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i(\beta x_i + \epsilon_i)}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \beta.$$

Problem 5

设总体 ξ 服从正态分布 $N(a,\sigma^2)$,a,σ^2 未知，$\xi_1,...,\xi_4$ 为取自总体 ξ 的样本，由样本观察值计算得 $\bar{\xi} = 1267, S^* = \sqrt{\frac{1}{3}\sum_{i=1}^4(\xi_i-\bar{\xi})^2} = 3.65$，求 a,σ^2 的置信度为 0.95 的置信区间 $(t_{0.975}(3)=3.18, \chi^2_{0.975}(3)=9.35, \chi^2_{0.025}(3)=0.22)$.

证明：

$$\bar{\xi} \sim N(a, \frac{\sigma^2}{4})$$

$$\Rightarrow \frac{2(\bar{\xi}-a)}{\sigma} \sim N(0,1), \frac{3(S^*)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(3)$$

$$\Rightarrow \frac{2(\bar{\xi}-a)}{S^*} \sim t(3)$$

$$P(c_1 < a < c_2) = P\left(\frac{2(\bar{\xi}-c_2)}{S^*} < \frac{2(\bar{\xi}-a)}{S^*} < \frac{2(\bar{\xi}-c_1)}{S^*}\right)$$

Problem 5

设总体 ξ 服从正态分布 $N(a,\sigma^2)$,a,σ^2 未知，$\xi_1,...,\xi_4$ 为取自总体 ξ 的样本，由样本观察值计算得 $\bar{\xi}=1267, S^*=\sqrt{\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{4}(\xi_i-\bar{\xi})^2}=3.65$，求 a,σ^2 的置信度为 0.95 的置信区间 $(t_{0.975}(3)=3.18, \chi^2_{0.975}(3)=9.35, \chi^2_{0.025}(3)=0.22)$.

证明：

$$\Rightarrow \frac{2(\bar{\xi}-c_1)}{S^*}=t_{0.975}(3)=3.18, \frac{2(\bar{\xi}-c_2)}{S^*}=-3.18$$

$$\Rightarrow c_1=1261.1965, c_2=1272.8305.$$

a 的置信度为 0.95 的置信区间为 $(1261.1965, 1272.8035)$.

Problem 5

设总体 ξ 服从正态分布 $N(a,\sigma^2)$,a,σ^2 未知，$\xi_1,\ldots,\xi_4$ 为取自总体 ξ 的样本，由样本观察值计算得 $\bar{\xi}=1267, S^*=\sqrt{\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{4}(\xi_i-\bar{\xi})^2}=3.65$，求 a,σ^2 的置信度为 0.95 的置信区间 $(t_{0.975}(3)=3.18, \chi^2_{0.975}(3)=9.35, \chi^2_{0.025}(3)=0.22)$.

证明：

$$\frac{3(S^*)^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(3)$$

$$\Rightarrow P\left(\sigma_1<\sigma^2<\sigma_2\right)=P\left(\frac{3(S^*)^2}{\sigma_2}<\frac{3(S^*)^2}{\sigma^2}<\frac{3(S^*)^2}{\sigma_1}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{3(S^*)^2}{\sigma_1}=\chi^2_{0.975}(3)=9.35, \frac{3(S^*)^2}{\sigma_2}=\chi^2_{0.025}(3)=0.22,$$

$$\Rightarrow \sigma_1=4.27\ \sigma_2=181.67.$$

σ^2 的置信度为 0.95 的置信区间为 $(4.27, 181.67)$.

Problem 6

某厂生产的某种铝材的长度服从正态分布 $N(\mu,\sigma_0^2)$，其中 $\sigma_0^2 = 0.16$，长度超过 240cm 的铝材视为合格品，满足出厂条件。现从该厂抽取 5 件产品，测得其长度（单位：cm）为 239.7,239.6,239,240,239.2，试判断在显著性水平 $\alpha = 0.05$ 的条件下，这一批铝材的平均长度是否超过 240cm。$z_{0.95} = 1.65$

证明：原假设 $H_0 : \mu \le \mu_0 = 240$，备选假设 $H_1 : \mu > \mu_0 = 240$，
由于 σ_0 已知，铝材长度的分布为单参数指数族，其中
$T(x) = x$，因此拒绝域为 $\left\{\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu_0)}{\sigma_0} > z_{1-\alpha}\right\}$，
计算得 $\bar{X} = 239.5$，$\sqrt{5}(239.5 - 240)/0.4 = -2.795 < 1.65$，故接受原假设，平均长度没有超过 240cm

1 欧拉图

2 图论作业

3 总结

4 复习题

5 致谢

- 感谢大家听课！
- 感谢助教！
- 共同努力！
- 答疑时间：1 月 3 号、4 号晚上 6 到 9 点，资源西楼 2214A

本科期末课程评估指导语

各位同学：

课程评估是学校本科教学质量保障的重要环节，对保障和提升教学质量至关重要。课程评估结果对学校院系规范教学管理和提升教学质量有着重要作用，同时也是任课教师改进和调整教学的重要依据。只有各位同学认真负责，提供有意义的反馈意见，才能够为教学管理和课程教学提供有效信息，真正促进教学改进和提升。

衷心感谢各位同学参加本学期课程评估，同时希望同学们给予课程更多的改进和提升建议。具体参与方式如右所示。

一、电脑端登录

1、登录网上评估系统（kcpg. pku. edu. cn）。

2、输入『学号』及『密码』（与校内门户一致）完成登录。

3、填写任务列表中对应的课程评估任务，填写问卷并点击『提交』。

二、手机端登录

1、用微信扫描如下二维码，关注“本科课程评估”。

2、点击首页——输入『学号』及『密码』登录——任务评价；非本校同学请点击个人设置——校外绑定——输入『学号』、『密码』默认为学号。

3、根据我的任务中的课程，填写问卷并点击『提交』。

教务部教育教学评估办公室