注8.3.2. 对于$x=0$是瑕点的广义积分$\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$，

通常会分成瑕积分$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$和无穷积分$\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$分别讨论其敛散性.

只有两者都收敛的时候原积分才收敛（定义就是如此）.

又$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$总可以用倒数变换变成无穷积分$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} f(\frac{1}{x})\,\mathrm{d}x$.

此时要注意，把两者合并一起后讨论敛散性可能会和原积分的敛散性不同.

即$\int_1^{+\infty} \left[f(x)+\frac{1}{x^2}f(\frac{1}{x})\right]\mathrm{d}x$有可能收敛，而原积分实际上发散.

比如，$\int_0^{+\infty}(1+\frac{1}{x^2})\ln x\,\mathrm{d}x$是发散的（两头都发散），

但是对$f(x)=(1+\frac{1}{x^2})\ln x$来说，$\frac{1}{x^2}f(\frac{1}{x})=-\frac{1}{x^2}(1+x^2)\ln x=-(1+\frac{1}{x^2})\ln x,\quad x\in[1,+\infty)$

$$\Rightarrow\quad f(x)+\frac{1}{x^2}f(\frac{1}{x})=0,\quad x\in[1,+\infty)\quad\Rightarrow\quad \int_1^{+\infty}\left[f(x)+\frac{1}{x^2}f(\frac{1}{x})\right]\mathrm{d}x \text{收敛}.$$

例8.3.8. 讨论积分的敛散性：$I=\int_0^{+\infty}\frac{\sin(x+\frac{1}{x})}{x^p}\mathrm{d}x$，其中$p\in\mathbb{R}$为常数.

【解一】：$I=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\sin(x+\frac{1}{x})}{x^p}\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{\sin(x+\frac{1}{x})}{x^p}\mathrm{d}x+\int_2^{+\infty}\frac{\sin(x+\frac{1}{x})}{x^p}\mathrm{d}x=I_1+I_0+I_2.$

先讨论I_2. 令$t=x+\frac{1}{x}$，则$x=\frac{t+\sqrt{t^2-4}}{2}$，$\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left(1+\frac{t}{\sqrt{t^2-4}}\right)\mathrm{d}t$，$x\in(1,+\infty)$

$$I_2=\int_2^{+\infty}\frac{\sin(x+\frac{1}{x})}{x^p}\mathrm{d}x\ \xlongequal[x=\frac{t+\sqrt{t^2-4}}{2}]{t=x+\frac{1}{x}}\ \int_{\frac{5}{2}}^{+\infty}\sin t\ \frac{2^p}{\left(t+\sqrt{t^2-4}\right)^p}\frac{1}{2}\left(1+\frac{t}{\sqrt{t^2-4}}\right)\mathrm{d}t$$

$$=2^{p-1}\int_{\frac{5}{2}}^{+\infty}\sin t\ \frac{1}{\left(t+\sqrt{t^2-4}\right)^{p-1}\sqrt{t^2-4}}\mathrm{d}t\quad=2^{p-1}\int_{\frac{5}{2}}^{+\infty}\frac{\sin t}{t^p}\ \frac{1}{(1+\sqrt{1-\frac{4}{t^2}})\sqrt{1-\frac{4}{t^2}}}\mathrm{d}t.$$

由于$\frac{1}{(1+\sqrt{1-\frac{4}{t^2}})\sqrt{1-\frac{4}{t^2}}}$在$[\frac{5}{2},+\infty)$单调有界，所以$\int_{\frac{5}{2}}^{+\infty}\frac{\sin t}{t^p}\ \frac{1}{(1+\sqrt{1-\frac{4}{t^2}})\sqrt{1-\frac{4}{t^2}}}\mathrm{d}t$ 与 $\int_{\frac{5}{2}}^{+\infty}\frac{\sin t}{t^p}\mathrm{d}t$ 同敛散.

例8.3.8. 讨论积分的敛散性: $I=\int_0^{+\infty}\frac{\sin(x+\frac{1}{x})}{x^p}\mathrm{d}x$, 其中$p\in\mathbb{R}$为常数.

【解一】: $I=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\sin(x+\frac{1}{x})}{x^p}\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{\sin(x+\frac{1}{x})}{x^p}\mathrm{d}x+\int_2^{+\infty}\frac{\sin(x+\frac{1}{x})}{x^p}\mathrm{d}x=I_1+I_0+I_2$.

先讨论I_2. 令$t=x+\frac{1}{x}$, 则$x=\frac{t+\sqrt{t^2-4}}{2}$, $\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left(1+\frac{t}{\sqrt{t^2-4}}\right)\mathrm{d}t$, $x\in(1,+\infty)$

$$I_2=\int_2^{+\infty}\frac{\sin(x+\frac{1}{x})}{x^p}\mathrm{d}x \xlongequal[x=\frac{t+\sqrt{t^2-4}}{2}]{t=x+\frac{1}{x}} \int_{\frac{5}{2}}^{+\infty}\sin t\,\frac{2^p}{\left(t+\sqrt{t^2-4}\right)^p}\frac{1}{2}\left(1+\frac{t}{\sqrt{t^2-4}}\right)\mathrm{d}t$$

$$=2^{p-1}\int_{\frac{5}{2}}^{+\infty}\sin t\,\frac{1}{\left(t+\sqrt{t^2-4}\right)^{p-1}\sqrt{t^2-4}}\mathrm{d}t=2^{p-1}\int_{\frac{5}{2}}^{+\infty}\frac{\sin t}{t^p}\frac{1}{(1+\sqrt{1-\frac{4}{t^2}})\sqrt{1-\frac{4}{t^2}}}\mathrm{d}t.$$

由于$\frac{1}{(1+\sqrt{1-\frac{4}{t^2}})\sqrt{1-\frac{4}{t^2}}}$在$[\frac{5}{2},+\infty)$单调有界, 所以$\int_{\frac{5}{2}}^{+\infty}\frac{\sin t}{t^p}\frac{1}{(1+\sqrt{1-\frac{4}{t^2}})\sqrt{1-\frac{4}{t^2}}}\mathrm{d}t$ 与 $\int_{\frac{5}{2}}^{+\infty}\frac{\sin t}{t^p}\mathrm{d}t$ 同敛散.

即, $p>0$时, I_2收敛; $p\leqslant 0$时I_2发散.

对于I_1, 在倒数变换后, $I_1\xlongequal{t=\frac{1}{x}}\int_2^{+\infty}t^p\sin(t+\frac{1}{t})(-\frac{\mathrm{d}t}{t^2})=\int_2^{+\infty}\frac{\sin(t+\frac{1}{t})}{t^{2-p}}\mathrm{d}t.$

使用上述结论知道, 在$2-p>0$, *i.e.* $p<2$时I_1收敛, $p\geqslant 2$时I_1发散.

综上, I在$0<p<2$时收敛, 其他情况下发散. □

例8.3.8. 讨论积分的敛散性: $I=\int_0^{+\infty}\frac{\sin(x+\frac{1}{x})}{x^p}\mathrm{d}x$, 其中$p\in\mathbb{R}$为常数.

【解二】: $I=\int_0^{+\infty}\frac{\sin(x+\frac{1}{x})}{x^p}\mathrm{d}x=\int_0^{1}\frac{\sin(x+\frac{1}{x})}{x^p}\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}\frac{\sin(x+\frac{1}{x})}{x^p}\mathrm{d}x=I_1+I_2.$

当$p>0$时, $\frac{1}{x^p}$在$[1,+\infty)$上单调下降趋于0,

$\int_1^x\sin(t+\frac{1}{t})\,\mathrm{d}t=\int_1^x\left[\sin t\cos\frac{1}{t}+\cos t\sin\frac{1}{t}\right]\mathrm{d}t\xlongequal{\text{积分中值定理}}\cos\frac{1}{x}\int_x^{\xi_1}\sin t\,\mathrm{d}t+\sin 1\int_1^{\xi_2}\cos t\,\mathrm{d}t.$ $\left|\int_1^x\sin(t+\frac{1}{t})\,\mathrm{d}t\right|\leqslant 4,\ \ \forall x>1.$

据Dirichlet判敛法, I_2在$p>0$时收敛,

对I_1, 在倒数变换后, $I_1\xlongequal{t=\frac{1}{x}}\int_1^{+\infty}t^p\sin(t+\frac{1}{t})(-\frac{\mathrm{d}t}{t^2})=\int_1^{+\infty}\frac{\sin(t+\frac{1}{t})}{t^{2-p}}\mathrm{d}t.$

使用上述结论知道, 在$2-p>0$, i.e. $p<2$时I_1收敛,

$p\leqslant 0$时, 使用Cauchy准则证明I_2发散. 首先, $\frac{1}{x^p}\geqslant 1,\ \ \forall x\in[1,+\infty),\ p\leqslant 0.$

其次, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0\ \Rightarrow\ \exists X>1\ \text{ s.t. }\ 0<\frac{1}{x}<\frac{\pi}{6},\ \ \forall x>X.$

$\Rightarrow\ \exists N\in\mathbb{N}$ s.t. $x\in[2n\pi+\frac{\pi}{6},2n\pi+\frac{4\pi}{6}]$时, $x+\frac{1}{x}\in[2n\pi+\frac{2\pi}{6},2n\pi+\frac{5\pi}{6}],\ \forall n>N.$

$\Rightarrow\ \int_{2n\pi+\frac{\pi}{6}}^{2n\pi+\frac{4\pi}{6}}\frac{\sin(x+\frac{1}{x})}{x^p}\mathrm{d}x\geqslant 1\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2},\ \ \forall n>N.$

例8.3.9. 讨论$I=\int_0^{\frac{1}{2}} x^p|\ln x|^q\,\mathrm{d}x$的敛散性，其中$p,q\in\mathbb{R}$是常数.

解. $x=0$是可能的瑕点.

$p>0$时，$\lim\limits_{x\to 0+} x^p|\ln x|^q=0$, $\forall q\in\mathbb{R}$. 此时$x=0$不是瑕点，积分为正常积分.

$$p\leqslant 0\text{时}, I=\int_0^{\frac{1}{2}} x^p|\ln x|^q\,\mathrm{d}x \xlongequal{t=\frac{1}{x}} \int_{+\infty}^{2} \frac{1}{t^p}\ln^q t(-\frac{\mathrm{d}t}{t^2})=\int_2^{+\infty}\frac{\ln^q t}{t^{2+p}}\,\mathrm{d}t.$$

若$p+2>1$, i.e. $p>-1$, 积分对任意$q\in\mathbb{R}$收敛;

如果$2+p=1$, i.e. $p=-1$, 　则$I=\int_2^{+\infty}\frac{1}{t\ln^{-q} t}\,\mathrm{d}t$

在$-q>1$, i.e. $q<-1$是收敛, $q\geqslant -1$时发散.

综上，在$p>-1$ 或者$\begin{cases} p=-1 \\ q<-1 \end{cases}$ 时$I=\int_0^{\frac{1}{2}} x^p|\ln x|^q\,\mathrm{d}x$收敛,

其他情况时，积分发散. □

例8.3.11. 讨论积分的收敛性与绝对收敛性：$I=\displaystyle\int_0^{+\infty}|\ln x|^p\frac{\sin x}{x^q}\,\mathrm{d}x,\quad p,q\in\mathbb{R}$是常

解. $I=\displaystyle\int_0^{\frac12}|\ln x|^p\frac{\sin x}{x^q}\,\mathrm{d}x+\int_{\frac12}^{1}|\ln x|^p\frac{\sin x}{x^q}\,\mathrm{d}x+\int_1^{2}(\ln x)^p\frac{\sin x}{x^q}\,\mathrm{d}x+\int_2^{+\infty}(\ln x)^p\frac{\sin x}{x^q}\,\mathrm{d}x\quad=I_1+I_2+$

$x\to0+$时，$\dfrac{\sin x}{x^q}\sim x^{1-q}$，据例8.3.9，

所以，I_1在$1-q>-1$, *i.e.* $q<2$

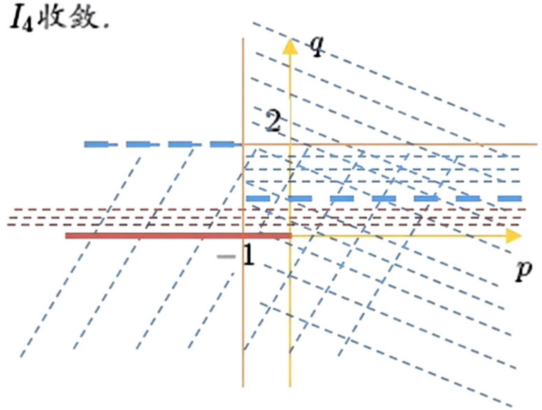
或者$\begin{cases}1-q=-1,\ i.e.\ q=2\\ p<-1\end{cases}$ 时(绝对)收敛，其他情况时发散.

对I_2,I_3，因为$\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{\sin x}{x^q}=\sin1$，$\forall q\in\mathbb{R}$，所以据例8.3.10，$p>-1$，$q\in\mathbb{R}$时（绝对）收敛，其他情况时发散.

$I_4=\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{(\ln x)^p}{x^q}\sin x\ \mathrm{d}x=\int_2^{+\infty}\frac{1}{x^q\ln^{-p}x}\ \sin x\ \mathrm{d}x.$ 在$q>1$或$\begin{cases}q=1\\ -p>1\end{cases}$ 时$\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{1}{x^q\ln^{-p}x}\,\mathrm{d}x$收敛，此时$I_4$ 绝对收敛；

在$0<q<1$或$\begin{cases}q=0\\ p<0\end{cases}$ 时，随着$x\to+\infty$，$\dfrac{1}{x^q\ln^{-p}x}$ 单调下降趋于0，据*Dirichlet*判敛法，I_4收敛.

但是此时$\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{1}{x^q\ln^{-p}x}\,\mathrm{d}x$ 发散，所以，在$0<q<1$或$\begin{cases}q=0\\ p<0\end{cases}$ 时，I_4 条件收敛.



综上，I在$\begin{cases}q\in[1,2)\\ p>-1\end{cases}$ 时绝对收敛；

在$\begin{cases}q\in(0,1)\\ p>-1\end{cases}$ 或者$\begin{cases}q=0\\ p\in(-1,0)\end{cases}$ 时条件收敛；其他情况下发散. □

例8.3.12. 设 $f(x) \in C[0,+\infty)$, $\alpha = \lim_{x\to+\infty} f(x)$. 证明:

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x = [f(0)-\alpha]\ln\frac{b}{a},\quad \forall 0<a<b.$$

证明. $I = \int_0^1 \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x + \int_1^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x = I_1 + I_2.$

$$\boxed{I_1 = \lim_{\varepsilon\to0+} \int_\varepsilon^1 \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x.}$$

$$\int_\varepsilon^1 \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x = \int_\varepsilon^1 \frac{f(ax)}{x}\,\mathrm{d}x - \int_\varepsilon^1 \frac{f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x = \int_{a\varepsilon}^a \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t - \int_{b\varepsilon}^b \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t - \int_a^b \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t \xlongequal{\text{积分中值定理}} f(\xi)\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t - \int_a^b \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$$

$$= f(\xi)\ln\frac{b}{a} - \int_a^b \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t,\ \text{其中},\ \xi\in[a\varepsilon, b\varepsilon].$$

所以, $I_1 = \lim_{\varepsilon\to0+}\left(f(\xi)\ln\frac{b}{a} - \int_a^b \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t\right) = f(0)\ln\frac{b}{a} - \int_a^b \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t.$

例8.3.12. 设$f(x)\in C[0,+\infty)$, $\alpha=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$. 证明:

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x=[f(0)-\alpha]\ln\frac{b}{a},\quad \forall 0<a<b.$$

证明. $I=\displaystyle\int_0^1\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x=I_1+I_2.$

$$\boxed{I_1=\lim_{\varepsilon\to0+}\int_\varepsilon^1\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x.}=f(0)\ln\frac{b}{a}-\int_a^b\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t.$$

$$I_2=\lim_{A\to+\infty}\int_1^A\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x.$$

$$\int_1^A\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x=\int_1^A\frac{f(ax)}{x}\mathrm{d}x-\int_1^A\frac{f(bx)}{x}\mathrm{d}x=\int_a^{Aa}\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t-\int_b^{bA}\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t$$

$$=\int_a^b\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t-\int_{Aa}^{bA}\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t\xlongequal{\text{积分中值定理}}\int_a^b\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t-f(\eta)\int_{Aa}^{bA}\frac{1}{t}\mathrm{d}t$$

$$=\int_a^b\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t-f(\eta)\ln\frac{b}{a},\ \text{其中},\ \eta\in[Aa,Ab].$$

所以, $I_2=\displaystyle\lim_{A\to+\infty}\left(\int_a^b\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t-f(\eta)\ln\frac{b}{a}\right)=\int_a^b\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t-\alpha\ln\frac{b}{a}.$

例8.3.13. 计算积分$I=\int_0^{+\infty}\frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x$.

解. 首先，由于$\lim\limits_{x\to0+}x\ln x=0$，所以$x=0$不是瑕点，积分$I$是无穷积分.

又由于$x>1$时，$0<\frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}<\frac{\ln x}{x^3}$，$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^3}\mathrm{d}x$收敛，所以积分$I$收敛.

如果，$I=\int_0^{+\infty}\frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\ln x\,\mathrm{d}\frac{1}{1+x^2}=-\frac{\ln x}{2(1+x^2)}\Big|_0^{+\infty}+\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{1}{x(1+x^2)}\mathrm{d}x$,

则，不仅$\lim\limits_{x\to0+}\frac{\ln x}{2(1+x^2)}\nexists$，而且，以$x=0$为瑕点的积分$\int_0^{+\infty}\frac{1}{x(1+x^2)}\mathrm{d}x$发散.

可是我们已经知道积分I是收敛的. 这样的问题是我们的方法导致的—和正常积分的情况类似，分部积分可能将好的原函数分离成两个坏的原函数的和.

本题的正确解法之一是：$I=\int_0^1\frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}\frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x$.

$\int_1^{+\infty}\frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x\xlongequal{t=\frac{1}{x}}\int_1^0\frac{-\frac{1}{t}\ln t}{\frac{(1+t^2)^2}{t^2}}(-\frac{\mathrm{d}t}{t^2})=-\int_0^1\frac{t\ln t}{(1+t^2)^2}\mathrm{d}t$. 所以，$I=0$. □