AI 中的数学

第二十讲

方聪，概率统计部分参考章复熹和张原老师课件

2024 年秋季

3. 设二维随机向量 (X, Y) 的联合密度为

$$p(x,y) = \begin{cases} c(R - \sqrt{x^2+y^2}), & x^2+y^2 \leqslant R^2, \\ 0, & x^2+y^2 > R^2, \end{cases}$$

求：(1) 系数 c；(2) 向量 (X, Y) 落入圆 $x^2+y^2 \leqslant r^2 (0 < r < R)$ 的概率。

3. 设二维随机向量 (X,Y) 的联合密度为

$$p(x,y)=\begin{cases} c(R-\sqrt{x^2+y^2}), & x^2+y^2\leqslant R^2, \\ 0, & x^2+y^2>R^2, \end{cases}$$

求：(1) 系数 c；(2) 向量 (X,Y) 落入圆 $x^2+y^2\leqslant r^2(0<r<R)$ 的概率。

解：(1)

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2} p(x,y)dxdy &= \int_{\{x^2+y^2\leqslant R^2\}} c(R-\sqrt{x^2+y^2})dxdy \\ &= \int_{0\leqslant r\leqslant R}\int_{0\leqslant\theta\leqslant 2\pi} c(R-r)rd\theta dr \\ &= 2\pi c\int_0^R (R-r)rdr = c\pi R^2 = 1\end{aligned}$$

因此 $c=\frac{1}{\pi R^2}$.

(2)

$$
\begin{aligned}
P(x^2+y^2 \leqslant r^2) &= \int_{\{x^2+y^2\leqslant r^2\}} c(R-\sqrt{x^2+y^2})dxdy \\
&= \int_{0\leqslant r'\leqslant r}\int_{0\leqslant\theta\leqslant 2\pi} c(R-r')r'd\theta dr' \\
&= 2\pi c\int_0^r (R-r')r'dr' \\
&= 2\pi c(Rr-\frac{r^2}{2}) = \frac{2r}{R}-\frac{r^2}{R^2}.
\end{aligned}
$$

4. 设二维随机向量 (X, Y) 服从区域

$$D = \left\{(x, y) : \frac{(x+y)^2}{2a^2} + \frac{(x-y)^2}{2b^2} \leqslant 1\right\} \quad (a, b > 0)$$

上的均匀分布，求 (X, Y) 的联合密度。

4. 设二维随机向量 (X, Y) 服从区域

$$D = \left\{(x,y) : \frac{(x+y)^2}{2a^2} + \frac{(x-y)^2}{2b^2} \leqslant 1\right\} \quad (a, b > 0)$$

上的均匀分布，求 (X, Y) 的联合密度。

解：设 $I_D(x,y)$ 为示性函数，$p(x,y) = cI_D(x,y)$。令
$u = \frac{x+y}{2}, v = \frac{x-y}{2}$ 得

$$\int_{\mathbb{R}^2} p(x,y)dxdy = \int_D cdxdy = c\int_{\{\frac{2u^2}{a^2}+\frac{2v^2}{b^2}\leqslant 1\}} 2dudv = c\pi ab = 1$$

解得 $c = \frac{1}{\pi ab}$，联合密度为 $p(x,y) = \frac{1}{\pi ab} I_D(x,y)$.

8. 设随机变量 X 与 Y 相互独立。分别服从自由度为 m, n 的 χ^2 分布，即

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^{m/2}\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} x^{m/2-1} e^{-x/2}, & x > 0, \\ 0, & x \leqslant 0, \end{cases}$$

$$p_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2^{n/2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} y^{n/2-1} e^{-y/2}, & y > 0, \\ 0, & y \leqslant 0, \end{cases}$$

试证明，$X + Y$ 服从 χ^2 分布，其自由度为 $m + n$.

有 $x \sim \Gamma(m, 1/2)$，$y \sim \Gamma(n, 1/2)$. 由独立性，可得结论。

若 X 与 Y 独立, $X \sim \Gamma(r, \lambda)$, $Y \sim \Gamma(s, \lambda)$. 则

$$X + Y \sim \Gamma(r + s, \lambda).$$

- 密度: $p_X(x) = \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)} x^{r-1} e^{-\lambda x}, \quad x > 0.$
- $Z = X + Y : p_Z(z) = \int p_X(x) p_Y(z-x) dx. \forall z > 0,$

$$p_Z(z) = C \int_0^z x^{r-1} e^{-\lambda x} \cdot (z-x)^{s-1} e^{-\lambda(z-x)} dx$$

$$= C e^{-\lambda z} \int_0^1 (tz)^{r-1} ((1-t)z)^{s-1} d(tz) = \hat{C} z^{r+s-1} e^{-\lambda z}.$$

10. 设二维随机向量 (X, Y) 的联合密度为

$$p(x,y) = \begin{cases} 4xy\exp\{-(x^2+y^2)\}, & x>0, y>0, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

求 $Z = \sqrt{X^2+Y^2}$ 的均值。

10. 设二维随机向量 (X, Y) 的联合密度为

$$p(x,y) = \begin{cases} 4xy\exp\{-(x^2+y^2)\}, & x>0, y>0, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

求 $Z = \sqrt{X^2+Y^2}$ 的均值。

解：作极坐标变换 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ 得

$$\begin{aligned} E(Z) &= \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} \sqrt{x^2+y^2}4xy\exp\{-(x^2+y^2)\}dxdy \\ &= \int_0^{\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} r\cdot 4r^2\cos\theta\sin\theta e^{-r^2} rd\theta dr \\ &= \left(\int_0^{\infty} 4r^4e^{-r^2}dr\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\sin\theta d\theta\right) \\ &= \frac{3\sqrt{\pi}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}. \end{aligned}$$

11. 设二维随机向量 (X, Y) 服从区域

$$D = \{(x, y) : 0 < x < 1, 0 < y < x\}$$

上的均匀分布，求 $E(X), \mathrm{var}(X)$ 及 X 与 Y 的相关系数。

11. 设二维随机向量 (X, Y) 服从区域

$$D = \{(x, y) : 0 < x < 1, 0 < y < x\}$$

上的均匀分布，求 $E(X), \mathrm{var}(X)$ 及 X 与 Y 的相关系数。

解：设 $I_D(x, y)$ 为示性函数，$p(x, y) = cI_D(x, y)$。
由于 $\int_0^1 \int_0^x cdxdy = 1$，解得 $c = 2$.

$$E(X) = \int_{\mathbb{R}^2} x \cdot 2I_D(x, y)dxdy = \int_0^1 2x^2 dx = \frac{2}{3}.$$

$$E(X^2) = \int_{\mathbb{R}^2} x^2 \cdot 2I_D(x, y)dxdy = \int_0^1 2x^3 dx = \frac{1}{2}.$$

$$\mathrm{var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{1}{18}.$$

$$E(XY) = \int_{\mathbb{R}^2} xy \cdot 2I_D(x, y)dxdy = \int_0^1 \int_0^x 2xydydx = \frac{1}{4}.$$

$$E(Y) = \int_{\mathbb{R}^2} y \cdot 2I_D(x,y)dxdy = \int_0^1 \int_0^x 2ydydx = \frac{1}{3}.$$

$$E(Y^2) = \int_{\mathbb{R}^2} y^2 \cdot 2I_D(x,y)dxdy = \int_0^1 \int_0^x 2y^2dydx = \frac{1}{6}.$$

$$\rho(X,Y) = \frac{E(XY) - E(X)E(Y)}{\sqrt{\mathrm{var}(X)}\sqrt{\mathrm{var}(Y)}} = \frac{1}{2}.$$

12. 设随机变量 $X \sim N(0,1)$, $Y = X^n$ (n 是正整数), 求 X 与 Y 的相关系数.

12. 设随机变量 $X \sim N(0,1)$, $Y = X^n$ (n 是正整数), 求 X 与 Y 的相关系数.

解：若随机变量 $X \sim N(0,1)$，则对一切正整数 k，可以由递推得到

$$E(X^{2k-1}) = 0, \quad E(X^{2k}) = \prod_{0 \leqslant i < k} (2k-1-2i)$$

若 n 为奇数，

$$E(Y) = E(X^n) = 0$$

$$E(XY) = E(X^{n+1}) = \prod_{0 \leqslant i < \frac{n+1}{2}} (n-2i)$$

$$E(Y^2) = E(X^{2n}) = \prod_{0 \leqslant i < n} (2n-1-2i)$$

$$\rho_{XY} = \frac{E(XY) - E(X)E(Y)}{\sqrt{\text{var}(X)}\sqrt{\text{var}(Y)}} = \frac{\prod_{0\leqslant i<\frac{n+1}{2}}(n-2i) - 0}{1\cdot\sqrt{\prod_{0\leqslant i<n}(2n-1-2i) - 0^2}}$$

$$= \frac{\prod_{0\leqslant i<\frac{n+1}{2}}(n-2i)}{\sqrt{\prod_{0\leqslant i<n}(2n-1-2i)}}$$

若 n 为偶数，

$$E(Y) = E(X^n) = \prod_{0\leqslant i<\frac{n}{2}}(n-1-2i)$$

$$E(XY) = E(X^{n+1}) = 0$$

$$\text{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0$$

故相关系数 $\rho_{XY} = 0$.

13. 设随机变量 X_1 与 X_2 相互独立，分布密度分别为

$$p_1(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 0, & , \end{cases}$$

$$p_2(x) = \begin{cases} e^{-(x-5)}, & x > 5, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

求 $E(X_1X_2)$.

13. 设随机变量 X_1 与 X_2 相互独立, 分布密度分别为

$$p_1(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 0, & , \end{cases}$$

$$p_2(x) = \begin{cases} e^{-(x-5)}, & x > 5, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

求 $E(X_1X_2)$.

解:

$$E(X_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} xp_1(x)dx = \int_0^1 2x^2dx = \frac{2}{3},$$

$$E(X_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} xp_2(x)dx = \int_5^{\infty} xe^{-(x-5)}dx = \int_0^{\infty} (u+5)e^u du = 6$$

由于 X_1 和 X_2 相互独立, 因此

$$E(X_1X_2) = E(X_1)E(X_2) = 4.$$

14. 设 X 和 Y 是随机变量, $\mathrm{var}(X) = 25$, $\mathrm{var}(Y) = 36$, 相关系数 $\rho_{XY} = 0.4$, 求 $\mathrm{var}(X + Y)$ 及 $\mathrm{var}(X - Y)$.

14. 设 X 和 Y 是随机变量，$\mathrm{var}(X) = 25$，$\mathrm{var}(Y) = 36$，相关系数 $\rho_{XY} = 0.4$，求 $\mathrm{var}(X+Y)$ 及 $\mathrm{var}(X-Y)$.

解：不妨假设 X Y 零均值。

$$\mathrm{cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \rho_{XY}\sqrt{\mathrm{var}(X)}\sqrt{\mathrm{var}(Y)} = 12.$$

$$\mathrm{var}(X+Y) = \mathrm{var}(X) + \mathrm{var}(Y) + 2\,\mathrm{cov}(X,Y) = 85.$$

$$\mathrm{var}(X-Y) = \mathrm{var}(X) + \mathrm{var}(Y) - 2\,\mathrm{cov}(X,Y) = 37.$$

15. 设二维随机向量 (X, Y) 服从二维正态分布，$E(X) = E(Y) = 0$, $\mathrm{var}(X) = a^2$, $\mathrm{var}(Y) = b^2$, $\rho_{XY} = 0$. 试求 (X, Y) 落入区域

$$D = \left\{(x, y) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant k^2\right\} \quad (k > 0)$$

的概率。

15. 设二维随机向量 (X, Y) 服从二维正态分布，$E(X) = E(Y) = 0$, $\mathrm{var}(X) = a^2$, $\mathrm{var}(Y) = b^2$, $\rho_{XY} = 0$. 试求 (X, Y) 落入区域

$$D = \left\{(x, y) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant k^2\right\} \quad (k > 0)$$

的概率。

解：由题意得，联合密度函数

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{ab2\pi} e^{-\frac{x^2}{2a^2} - \frac{y^2}{2b^2}}$$

(X, Y) 落入区域 D 的概率为

$$P((X, Y) \in D) = \iint_D \frac{1}{ab2\pi} e^{-\frac{x^2}{2a^2} - \frac{y^2}{2b^2}} \, dx \, dy$$

使用极坐标变换：$x = ar\cos\theta, \quad y = br\sin\theta.$

在这种变换下，雅可比行列式为：

$$J = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} \right| = abr$$

区域 D 变换后为：

$$\frac{(ar\cos\theta)^2}{a^2} + \frac{(br\sin\theta)^2}{b^2} = r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = r^2 \le k^2$$

因此，积分可表示为

$$P((X, Y) \in D) = \int_0^{2\pi} \int_0^k \frac{1}{ab2\pi} e^{-\frac{(ar\cos\theta)^2}{2a^2} - \frac{(br\sin\theta)^2}{2b^2}} \cdot abr\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^k \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{r^2}{2}} r\,dr\,d\theta$$

令 $u=\frac{r^2}{2}$，则

$$P((X,Y)\in D)=\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{k^2}{2}}\frac{1}{2\pi}e^{-u}\,du\,d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2\pi}(1-e^{-\frac{k^2}{2}})\,d\theta$$

16. 设三维随机向量 (X, Y, Z) 的联合密度为

$$p(x, y, z) = \begin{cases} e^{-(x+y+z)}, & x > 0, y > 0, z > 0, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

试分别求出随机变量 X, Y, Z 的分布密度，又问：X, Y, Z 相互独立吗？

解：

$$f_X(x) = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} p(x, y, z)\, dy\, dz = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-(x+y+z)}\, dy\, dz = \int_0^{\infty} e^{-x}$$

因此，X 的边缘分布密度为：

$$f_X(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x > 0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

Y 和 Z 相同。由

$$f_X(x)\cdot f_Y(y)\cdot f_Z(z)=e^{-x}\cdot e^{-y}\cdot e^{-z}=e^{-(x+y+z)}=p(x,y,z)$$

因此，X,Y,Z 是相互独立的。

17. 设随机变量 X, Y, Z 相互独立，都服从标准正态分布，求 $\xi \triangleq \sqrt{X^2+Y^2+Z^2}$ 的概率分布.

17. 设随机变量 X, Y, Z 相互独立，都服从标准正态分布，求 $\xi \triangleq \sqrt{X^2+Y^2+Z^2}$ 的概率分布.

解：由于 X, Y, Z 都服从标准正态分布 $N(0,1)$，因此 X^2, Y^2, Z^2 都服从卡方分布 $\chi^2(1)$，它们的和 ξ^2 服从自由度为 3 的卡方分布 $\chi^2(3)$。
设 $\xi^2 = W$，则 $W \sim \chi^2(3)$，密度函数为

$$f_W(w) = \frac{w^{1.5-1}e^{-w/2}}{2^{1.5}\Gamma(1.5)} = \frac{w^{0.5}e^{-w/2}}{2^{1.5}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}} = \frac{w^{0.5}e^{-w/2}}{\sqrt{2\pi}}$$

其中利用了 $\Gamma(1.5) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$。
设 $g(w) = \sqrt{w}$，则 $g'(w) = \frac{1}{2\sqrt{w}}$。逆变换为 $w = g^{-1}(\xi) = \xi^2$。

由变换公式，ξ 的概率密度函数为：

$$f_\xi(\xi) = f_W(g^{-1}(\xi)) \left| \frac{d}{d\xi} g^{-1}(\xi) \right| = f_W(\xi^2) \left| \frac{d}{d\xi} (\xi^2) \right|$$
$$= \frac{(\xi^2)^{0.5} e^{-(\xi^2)/2}}{\sqrt{2\pi}} \cdot 2\xi = \frac{\xi e^{-(\xi^2)/2}}{\sqrt{2\pi}} \cdot 2\xi = \frac{2\xi^2 e^{-(\xi^2)/2}}{\sqrt{2\pi}}$$

因此，ξ 的概率密度函数为：

$$f_\xi(\xi) = \frac{2\xi^2 e^{-(\xi^2)/2}}{\sqrt{2\pi}}, \quad (\xi \geqslant 0)$$

.

18. 设随机变量 $X_1, \ldots, X_n$ 独立同分布，共同的分布是威布尔分布，即共同的分布函数是

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\left(\frac{x}{\eta}\right)^m}, & x > 0, \\ 0, & x \leqslant 0, \end{cases} \quad (m > 0, \eta > 0),$$

试证明 $\xi \triangleq \min\{X_1, \ldots, X_n\}$ 仍服从威布尔分布。

18. 设随机变量 $X_1, \dots, X_n$ 独立同分布，共同的分布是威布尔分布，即共同的分布函数是

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\left(\frac{x}{\eta}\right)^m}, & x > 0, \\ 0, & x \leqslant 0, \end{cases} \quad (m > 0, \eta > 0),$$

试证明 $\xi \triangleq \min\{X_1, \dots, X_n\}$ 仍服从威布尔分布。

证明：由于 $\xi = \min\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$，所以 $\xi > x$ 当且仅当所有 $X_i > x \ (i = 1, 2, \dots, n)$。因为 X_i 是独立的，我们有：

$$P(\xi > x) = P(X_1 > x, X_2 > x, \dots, X_n > x) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i > x)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} (1 - F(x)) = e^{-n\left(\frac{x}{\eta}\right)^m}$$

所以：

$$F_\xi(x) = 1 - P(\xi > x) = 1 - e^{-n\left(\frac{x}{\eta}\right)^m}$$

设 $\eta' = \eta\left(\frac{1}{n}\right)^{1/m}$，则：

$$F_\xi(x) = 1 - e^{-\left(\frac{x}{\eta'}\right)^m}$$

因此，$\xi = \min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ 仍然服从威布尔分布，其参数为：

$$\eta' = \eta\left(\frac{1}{n}\right)^{1/m}.$$

19. 对于随机变量 X, Y, Z, 已知

$$
\begin{aligned}
E(X) = E(Y) = 1, \quad E(Z) = -1, \\
\operatorname{var}(X) = \operatorname{var}(Y) = \operatorname{var}(Z) = 1, \\
\rho_{XY} = 0, \quad \rho_{XZ} = 1/2, \quad \rho_{YZ} = -1/2,
\end{aligned}
$$

试求 $E(X+Y+Z)$ 及 $\operatorname{var}(X+Y+Z)$.

解：

$$E(X+Y+Z) = E(X) + E(Y) + E(Z) = 1 + 1 - 1 = 1$$

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{var}(X+Y+Z) \\
=&\operatorname{var}(X) + \operatorname{var}(Y) + \operatorname{var}(Z) + 2\left(\operatorname{cov}(X,Y) + \operatorname{cov}(X,Z) + \operatorname{cov}(Y,Z)\right)
\end{aligned}
$$

计算协方差：

$$\text{cov}(X, Y) = \rho_{XY}\sqrt{\text{var}(X)\text{var}(Y)} = 0 \cdot \sqrt{1 \cdot 1} = 0$$

$$\text{cov}(X, Z) = \rho_{XZ}\sqrt{\text{var}(X)\text{var}(Z)} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{1 \cdot 1} = \frac{1}{2}$$

$$\text{cov}(Y, Z) = \rho_{YZ}\sqrt{\text{var}(Y)\text{var}(Z)} = -\frac{1}{2} \cdot \sqrt{1 \cdot 1} = -\frac{1}{2}$$

代入方差公式：

$$\text{var}(X + Y + Z) = 1 + 1 + 1 + 2\left(0 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) = 3$$

因此，$E(X + Y + Z) = 1$，$\text{var}(X + Y + Z) = 3$。

20. 设随机变量 X 与 Y 相互独立, $X \sim N(0,1)$, $Y \sim N(0,1)$, 试求 $U = X + Y$, $V = X - Y$ 的联合密度.

解: 设变换:

$$\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

变换矩阵 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, 逆变换矩阵

$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$

由于 X 和 Y 相互独立且都服从标准正态分布, 它们的联合密度函数为:

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$$

代入逆变换:

$$x(u, v) = \frac{u+v}{2}, \quad y(u, v) = \frac{u-v}{2}, \quad |\det(\mathbf{A}^{-1})| = \left|\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$$

所以，U, V 的联合密度为：

$$f_{U,V}(u,v) = f_{X,Y}(x(u,v), y(u,v)) \cdot |\det(\mathbf{A}^{-1})|$$
$$= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{\left(\frac{u+v}{2}\right)^2 + \left(\frac{u-v}{2}\right)^2}{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{u^2+v^2}{4}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4\pi} e^{-\frac{u^2+v^2}{4}}.$$

21. 设随机变量 X 与 Y 相互独立, $X \sim N(0,1)$, $Y \sim N(0,1)$, 试证: $U = X^2 + Y^2$ 与 $V = X/Y$ 是相互独立的.

21. 设随机变量 X 与 Y 相互独立，$X \sim N(0,1)$，$Y \sim N(0,1)$，试证：$U = X^2 + Y^2$ 与 $V = X/Y$ 是相互独立的.

证明：作极坐标变换：$X = R\cos\Theta$，　$Y = R\sin\Theta$，雅可比行列式 J 为：

$$J = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right| = r$$

X 和 Y 的联合密度函数为：

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$$

因此，R 和 Θ 的联合密度函数为：

$$f_{R,\Theta}(r,\theta) = f_{X,Y}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) \cdot |J| = \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{r^2}{2}} \cdot r = \frac{r}{2\pi}e^{-\frac{r^2}{2}}$$

R 的边缘密度函数：

$$f_R(r) = \int_0^{2\pi} f_{R,\Theta}(r,\theta)\, d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{r}{2\pi}e^{-\frac{r^2}{2}}\, d\theta = re^{-\frac{r^2}{2}}$$

Θ 的边缘密度函数：

$$f_\Theta(\theta) = \int_0^\infty f_{R,\Theta}(r,\theta)\, dr = \int_0^\infty \frac{r}{2\pi} e^{-\frac{r^2}{2}}\, dr = \frac{1}{2\pi}$$

注意到 $f_{R,\Theta}(r,\theta) = f_R(r)\cdot f_\Theta(\theta)$，这表明 R 和 Θ 是相互独立的。又由于

$$U = X^2 + Y^2 = R^2, \quad V = \frac{X}{Y} = \frac{\cos(\Theta)}{\sin(\Theta)} = \cot(\Theta)$$

因为 R 和 Θ 是相互独立的，而 U 只依赖于 R，V 只依赖于 Θ，所以 U 和 V 也是相互独立的。

22. 设随机变量 X 与 Y 相互独立, X 服从区间 $[0,1]$ 上的均匀分布, Y 服从区间 $[1,3]$ 上的均匀分布, 试求 $E(XY)$ 及 $\mathrm{var}(XY)$.

22. 设随机变量 X 与 Y 相互独立，X 服从区间 $[0,1]$ 上的均匀分布，Y 服从区间 $[1,3]$ 上的均匀分布，试求 $E(XY)$ 及 $\mathrm{var}(XY)$.

解：

$$E(X) = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}, \quad E(Y) = \frac{1+3}{2} = 2$$

由于 X 和 Y 相互独立，

$$E(XY) = E(X) \cdot E(Y) = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$$

$$E(X^2) = \int_0^1 x^2\, dx = \frac{1}{3}, \quad E(Y^2) = \int_1^3 \frac{1}{2} y^2\, dy = \frac{27}{6} - \frac{1}{6} = \frac{13}{3}$$

同样，X^2 和 Y^2 相互独立，

$$E((XY)^2) = E(X^2) \cdot E(Y^2) = \frac{1}{3} \cdot \frac{13}{3} = \frac{13}{9}$$

因此

$$\mathrm{var}(XY) = E((XY)^2) - [E(XY)]^2 = \frac{13}{9} - 1^2 = \frac{4}{9}$$

23. 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且 $\mathrm{var}(X)$ 和 $\mathrm{var}(Y)$ 存在, 试证:

$$\mathrm{var}(XY) \geqslant \mathrm{var}(X)\,\mathrm{var}(Y).$$

23. 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且 $\text{var}(X)$ 和 $\text{var}(Y)$ 存在, 试证:

$$\text{var}(XY) \geqslant \text{var}(X)\,\text{var}(Y).$$

证明: 由于 X 和 Y 相互独立, 有:

$$E((XY)^2) = E(X^2Y^2) = E(X^2)E(Y^2), \quad E(XY) = E(X)E(Y)$$

计算方差:

$$\text{var}(X)\,\text{var}(Y) = (E(X^2) - [E(X)]^2)(E(Y^2) - [E(Y)]^2)$$
$$=E(X^2)E(Y^2) - E(X^2)[E(Y)]^2 - [E(X)]^2E(Y^2) + [E(X)]^2[E(Y)]^2$$

$$\text{var}(XY) = E(X^2)E(Y^2) - [E(X)E(Y)]^2$$

由于:

$$E(X^2) \geqslant [E(X)]^2, \quad E(Y^2) \geqslant [E(Y)]^2$$

因此

$$E(X^2)[E(Y)]^2 + [E(X)]^2 E(Y^2) \geqslant 2[E(X)]^2[E(Y)]^2$$

$$\begin{aligned} & \operatorname{var}(X)\operatorname{var}(Y) - \operatorname{var}(XY) \\ = & 2[E(X)]^2[E(Y)]^2 - E(X^2)[E(Y)]^2 + [E(X)]^2 E(Y^2) \leqslant 0 \end{aligned}$$

即

$$\operatorname{var}(XY) \geqslant \operatorname{var}(X)\operatorname{var}(Y)$$

1. 第三章作业
2. 第二部分
3. 多元正态分布

24. 设一城市有 n 个区，其中住有 x_j 个居民的区共有 n_j 个 $(\sum n_j = n)$. 令

$$m = \sum_j \frac{n_j x_j}{n}, \quad \sigma^2 = \sum_j \frac{n_j x_j^2}{n} - m^2.$$

(m 是每个区的居民民数的平均均数). 现在随机选取 r 个区，并数出其中每个区中的居民民数，设 $X_1, \cdots, X_r$ 分别为这 r 个区的居民民数，试证：

$$E(X_1 + \cdots + X_r) = mr, \quad \mathrm{var}(X_1 + \cdots + X_r) = \frac{\sigma^2 r(n-r)}{n-1}.$$

24. 设一城市有 n 个区, 其中住有 x_j 个居民的区共有 n_j 个 $(\sum n_j = n)$. 令

$$m = \sum_j \frac{n_j x_j}{n}, \quad \sigma^2 = \sum_j \frac{n_j x_j^2}{n} - m^2.$$

(m 是每个区的居民民数的平均均数). 现在随机选取 r 个区, 并数出其中每个区中的居民民数, 设 $X_1, \cdots, X_r$ 分别为这 r 个区的居民民数, 试证:

$$E(X_1 + \cdots + X_r) = mr, \quad \mathrm{var}(X_1 + \cdots + X_r) = \frac{\sigma^2 r(n-r)}{n-1}.$$

证明: 由于每个区被选中的概率相等, 每个区的居民数的期望为:

$$E(X_i) = \sum_j x_j \cdot P(X_i = x_j) = \sum_j x_j \cdot \frac{n_j}{n} = \frac{1}{n}\sum_j n_j x_j = m$$
$$E(X_i^2) = \sum_j x_j^2 \cdot P(X_i = x_j) = \sum_j x_j^2 \cdot \frac{n_j}{n} = \frac{1}{n}\sum_j n_j x_j^2$$

因此：

$$\mathrm{var}(X_i) = \frac{1}{n}\sum_j n_j x_j^2 - m^2 = \sigma^2$$

$$E(X_1+X_2+\cdots+X_r) = E(X_1)+E(X_2)+\cdots+E(X_r) = r\cdot E(X_i) = r\cdot m$$

对于任意两个变量 X_i 和 X_j ，$E(X_iX_j)$ 可以表示为：

$$\begin{aligned}
E(X_iX_j) &= \frac{1}{n(n-1)}\sum_{i\neq j} x_i x_j \\
&= \frac{1}{n(n-1)}\left[\left(\sum_j x_j\right)^2 - \sum_j x_j^2 = n^2m^2 - n\sum_j \frac{n_j x_j^2}{n}\right] \\
&= \frac{1}{n(n-1)}\left(n^2m^2 - n\left(n\sigma^2 + nm^2\right)\right) = \frac{-n^2\sigma^2}{n(n-1)}
\end{aligned}$$

协方差为

$$\operatorname{cov}(X_i, X_j) = \frac{-n\sigma^2}{n-1} - m^2 = \frac{-n\sigma^2 - (n-1)m^2}{n-1} = \frac{-\sigma^2}{n-1}$$

$$\begin{aligned}
&\operatorname{var}(X_1 + X_2 + \cdots + X_r) \\
=&\sum_{i=1}^{r} \operatorname{var}(X_i) + 2\sum_{1\le i<j\le r} \operatorname{cov}(X_i, X_j) = r\sigma^2 - \frac{r(r-1)\sigma^2}{n-1} \\
=&\sigma^2\left(\frac{r(n-r)}{n-1}\right)
\end{aligned}$$

25. 设 $X_1, \dots, X_n$ 是独立同分布的正值随机变列，试证：

$$E\left(\frac{X_1 + \cdots + X_k}{X_1 + \cdots + X_n}\right) = \frac{k}{n} \quad (k = 1, \dots, n).$$

25. 设 $X_1,\ldots,X_n$ 是独立同分布的正值随机变列，试证：

$$E\left(\frac{X_1+\cdots+X_k}{X_1+\cdots+X_n}\right)=\frac{k}{n}\quad(k=1,\ldots,n).$$

证明：设 $S_n=X_1+X_2+\cdots+X_n$ 和 $S_k=X_1+X_2+\cdots+X_k$。由于 $X_1,X_2,\ldots,X_n$ 是独立同分布的正值随机变量，对于任意 i 和 j，$\frac{X_i}{S_n}$ 和 $\frac{X_j}{S_n}$ 的期望值相同。因此，我们可以考虑所有 $\frac{X_i}{S_n}$ 的和：

$$E\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{X_i}{S_n}\right)=E(1)=1$$

由于 $\frac{X_i}{S_n}$ 的期望值相同，因此：

$$E\left(\frac{X_i}{S_n}\right)=\frac{1}{n}\quad 对于所有 i=1,2,\ldots,n$$

$$E\left(\frac{S_k}{S_n}\right) = E\left(\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_k}{S_n}\right)$$

$$= E\left(\sum_{i=1}^{k} \frac{X_i}{S_n}\right) = \sum_{i=1}^{k} E\left(\frac{X_i}{S_n}\right) = k \cdot \frac{1}{n} = \frac{k}{n}$$

26. 设随机变量 $X_1, \cdots, X_n$ 独立同分布, $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, 记

$$\xi = \sum_{i=1}^{m} X_i, \quad \eta = \sum_{i=1}^{n} X_i \quad (1 \leqslant m < n),$$

试求 (ξ, η) 的联合密度.

26. 设随机变量 $X_1, \cdots, X_n$ 独立同分布, $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, 记

$$\xi = \sum_{i=1}^{m} X_i, \quad \eta = \sum_{i=1}^{n} X_i \quad (1 \leqslant m < n),$$

试求 (ξ, η) 的联合密度.

解： ξ , η 是 m 个独立正态随机变量的和，因此 ξ , η 也服从正态分布：

$$\xi \sim N(m\mu, m\sigma^2), \quad \eta \sim N(n\mu, n\sigma^2)$$

由于 X_i 独立同分布，只有当 $i = j$ 时，$\mathrm{cov}(X_i, X_j) = \sigma^2$，否则为 0。因此 ξ 和 η 的协方差为：

$$\mathrm{cov}(\xi, \eta) = \mathrm{cov}\left(\sum_{i=1}^{m} X_i, \sum_{j=1}^{n} X_j\right) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \mathrm{cov}(X_i, X_j) = m\sigma^2$$

ξ 和 η 的联合分布是一个二维正态分布，其均值向量和协方差矩阵分别为：

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} m\mu \\ n\mu \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} m\sigma^2 & m\sigma^2 \\ m\sigma^2 & n\sigma^2 \end{pmatrix}$$

二维正态分布的联合密度函数为：

$$f_{\xi,\eta}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\det(\boldsymbol{\Sigma})}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\boldsymbol{z} - \boldsymbol{\mu})^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{z} - \boldsymbol{\mu})\right)$$

27. 设随机变量 X 与 Y 独立同分布, $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, α, β 是两个实数 (全不为 0).

(1) 求 $\alpha X + \beta Y$ 与 $\alpha X - \beta Y$ 的相关系数和联合密度;

(2) 证明: $E(\max\{X, Y\}) = \mu + \frac{\sigma}{\sqrt{\pi}}$.

27. 设随机变量 X 与 Y 独立同分布, $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, α, β 是两个实数 (全不为 0).
(1) 求 $\alpha X + \beta Y$ 与 $\alpha X - \beta Y$ 的相关系数和联合密度;
(2) 证明: $E(\max\{X, Y\}) = \mu + \frac{\sigma}{\sqrt{\pi}}$.

解: (1) 设 $U = \alpha X + \beta Y, \quad V = \alpha X - \beta Y$, 期望为

$$E(U) = E(\alpha X + \beta Y) = \alpha E(X) + \beta E(Y) = \alpha\mu + \beta\mu = (\alpha + \beta)\mu$$

$$E(V) = E(\alpha X - \beta Y) = \alpha E(X) - \beta E(Y) = \alpha\mu - \beta\mu = (\alpha - \beta)\mu$$

由于 X 和 Y 独立同分布:

$$\mathrm{Var}(U) = \mathrm{Var}(\alpha X + \beta Y) = \alpha^2 \mathrm{Var}(X) + \beta^2 \mathrm{Var}(Y) = (\alpha^2 + \beta^2)\sigma^2$$

$$\mathrm{Var}(V) = \mathrm{Var}(\alpha X - \beta Y) = \alpha^2 \mathrm{Var}(X) + \beta^2 \mathrm{Var}(Y) = (\alpha^2 + \beta^2)\sigma^2$$

U, V 的协方差为

$$\begin{aligned}&\operatorname{Cov}(U, V) = \operatorname{Cov}(\alpha X + \beta Y, \alpha X - \beta Y)\\ =&\alpha^2 \operatorname{Cov}(X, X) - \beta^2 \operatorname{Cov}(Y, Y) = \alpha^2\sigma^2 - \beta^2\sigma^2 = (\alpha^2 - \beta^2)\sigma^2\end{aligned}$$

相关系数

$$\rho_{UV} = \frac{\operatorname{Cov}(U, V)}{\sqrt{\operatorname{Var}(U)\operatorname{Var}(V)}} = \frac{(\alpha^2 - \beta^2)\sigma^2}{\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2)\sigma^2(\alpha^2 + \beta^2)\sigma^2}} = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2}$$

由于 X 和 Y 独立同分布且均为正态分布，U 和 V 也是正态分布的线性组合，因此 (U, V) 也是二维正态分布，参数为

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix}(\alpha+\beta)\mu \\ (\alpha-\beta)\mu\end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix}(\alpha^2 + \beta^2)\sigma^2 & (\alpha^2 - \beta^2)\sigma^2 \\ (\alpha^2 - \beta^2)\sigma^2 & (\alpha^2 + \beta^2)\sigma^2\end{pmatrix}$$

$$f_{\xi,\eta}(u, v) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\det(\boldsymbol{\Sigma})}} \exp\left(-\frac{1}{2}((\boldsymbol{u}; \boldsymbol{v}) - \boldsymbol{\mu})^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1}((\boldsymbol{u}; \boldsymbol{v}) - \boldsymbol{\mu})\right)$$

(2) 令 $X_1 = \frac{X-\mu}{\sigma}, Y_1 = \frac{Y-\mu}{\sigma}$，$X_1, Y_1$ 均服从标准正态分布，$\max\{X, Y\} = \mu + \sigma \max\{X_1, Y_1\}$. 注意到

$$\max\{X_1, Y_1\} = \frac{1}{2}(X_1 + Y_1 + |X_1 - Y_1|)$$

由于 $X_1 - Y_1 \sim N(0, 2)$,

$$E|X_1 - Y_1| = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |x| \exp\left\{-\frac{x^2}{4}\right\} dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}}$$

因此 $E(\max\{X, Y\}) = \mu + \frac{\sigma}{\sqrt{\pi}}$.

28. 考虑 $m(m \geqslant 2)$ 个独立试验. 每个试验具有 $r(r \geqslant 2)$ 个可能的试验结果, 相应出现的概率分别为 $p_1, \cdots, p_r \left(\sum_{i=1}^{r} p_i = 1\right)$.
用 X_i 表示 m 个试验中结果 $i(i = 1, \cdots, r)$ 出现的次数. 试求出:
(1) r 维随机向量 $(X_1, \cdots, X_r)$ 的概率分布;
(2) X_i 与 $X_j(i \neq j)$ 的协方差。

28. 考虑 $m(m \geqslant 2)$ 个独立试验．每个试验具有 $r(r \geqslant 2)$ 个可能的试验结果，相应出现的概率分别为 $p_1, \cdots, p_r$ $\left(\sum_{i=1}^{r} p_i = 1\right)$．用 X_i 表示 m 个试验中结果 $i(i = 1, \cdots, r)$ 出现的次数．试求出：
(1) r 维随机向量 $(X_1, \cdots, X_r)$ 的概率分布；
(2) X_i 与 $X_j (i \neq j)$ 的协方差。

解：(1) 设 X_i 是 m 次试验中结果 i 出现的次数，则 r 维随机向量 $(X_1, X_2, \ldots, X_r)$ 的概率分布是一个多项式分布，其分布可以表示为：

$$P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_r = x_r) = \frac{m!}{x_1! x_2! \cdots x_r!} p_1^{x_1} p_2^{x_2} \cdots p_r^{x_r}$$

(2) 由于 X_i 服从二项分布，其期望和方差为：

$E(X_i) = mp_i$, $\mathrm{Var}(X_i) = mp_i(1-p_i)$, $E(X_i^2) = (mp_i)^2 + mp_i(1-p_i)$

对于任意的 X_i, X_j，$X_i + X_j \sim B(m, p_i + p_j)$，我们有：

$$E(X_i + X_j)^2 = (m(p_i + p_j))^2 + m(p_i + p_j)(1 - p_i - p_j)$$

$$\begin{aligned} E(X_iX_j) &= \frac{1}{2}(E(X_i + X_j)^2 - E(X_i^2) - E(X_j^2)) \\ &= m^2 p_i p_j - mp_i p_j \end{aligned}$$

因此：

$$\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = E(X_iX_j) - E(X_i)E(X_j) = -mp_i p_j$$

30. 若 X 的分布密度是偶函数，且 $E(X^2)$ 存在，试证：$|X|$ 与 X 不相关，但它们不相互独立．若 $X_1, \cdots, X_n (n \geqslant 2)$ 相互独立，$\mathrm{var}(X_i) = \sigma_i^2 (i = 1, \cdots, n)$，试找 “权” $a_1, \cdots, a_n \left(a_i \geqslant 0, \sum_{i=1}^{n} a_i = 1 \right)$，使得 $\sum_{i=1}^{n} a_i X_i$ 的方差最小。

30. 若 X 的分布密度是偶函数，且 $E(X^2)$ 存在，试证：$|X|$ 与 X 不相关，但它们不相互独立．若 $X_1, \cdots, X_n (n \geqslant 2)$ 相互独立，$\mathrm{var}(X_i) = \sigma_i^2 (i = 1, \cdots, n)$，试找 "权"

$$a_1, \cdots, a_n \left(a_i \geqslant 0, \sum_{i=1}^{n} a_i = 1 \right),$$ 使得 $\sum_{i=1}^{n} a_i X_i$ 的方差最小。

解：由于 $f(x)$ 是偶函数，X 的期望 $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx = 0$，

$$E(|X|X) = \int_{-\infty}^{\infty} |x|xf(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} (-x)xf(x)\,dx + \int_{0}^{\infty} xxf(x)\,dx = 0$$

$$\mathrm{Cov}(|X|, X) = E(|X|X) - E(|X|)E(X) = 0 - 0 = 0$$

因此，$|X|$ 和 X 不相关。

考虑 X 的具体分布，例如 $X \sim N(0, 1)$。在这种情况下，$|X|$ 的分布为半正态分布。显然，$P(|X| = x, X = -x) = 0$，而 $P(|X| = x)P(X = -x) > 0$，这说明 $|X|$ 和 X 不独立。

因此，$|X|$ 和 X 不相关但不独立。

考虑线性组合 $Y=\sum_{i=1}^n a_iX_i$，其方差为：

$$\mathrm{Var}(Y)=\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^n a_iX_i\right)=\sum_{i=1}^n a_i^2\,\mathrm{Var}(X_i)=\sum_{i=1}^n a_i^2\sigma_i^2$$

其中，若有方差 $\sigma_{i_0}^2=0$，则由约束条件 $\sum_{i=1}^n a_i=1$ 知，应取 $a_{i_0}=1, a_i=0(i\neq i_0)$。
若所有方差 $\sigma_i^2>0$，则为了使 $\mathrm{Var}(Y)$ 最小，我们需要最小化 $\sum_{i=1}^n a_i^2\sigma_i^2$。这是一个带约束的优化问题，可以使用拉格朗日乘数法解决。定义拉格朗日函数：

$$L(a_1,a_2,\ldots,a_n,\lambda)=\sum_{i=1}^n a_i^2\sigma_i^2+\lambda\left(1-\sum_{i=1}^n a_i\right)$$

对 a_i 求导并令导数为零：

$$\frac{\partial L}{\partial a_i}=2a_i\sigma_i^2-\lambda=0\implies a_i=\frac{\lambda}{2\sigma_i^2}$$

利用 $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$：

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda}{2\sigma_i^2} = 1 \implies \lambda \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2\sigma_i^2} = 1 \implies \lambda = \frac{2}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma_i^2}}$$

代入 λ 得到最优权重：

$$a_i = \frac{1}{\sigma_i^2 \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\sigma_j^2}}$$

31. 若 X 与 Y 都是只取两个值的随机变量，试证明：若 X 与 Y 不相关，则 X 与 Y 相互独立。

31. 若 X 与 Y 都是只取两个值的随机变量，试证明：若 X 与 Y 不相关，则 X 与 Y 相互独立。

证明：不妨设 X, Y 分别取 x_1, x_2 和 y_1, y_2，$P(X = x_1) = q_1$，$P(X = x_2) = 1 - q_1$；$P(Y = y_1) = q_2$，$P(Y = y_2) = 1 - q_2$；$P(X = x_1, Y = y_1) = p_1$，$P(X = x_1, Y = y_2) = p_2$，$P(X = x_2, Y = y_1) = p_3$，$P(X = x_2, Y = y_2) = p_4$.
由于不相关，

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{cov}(X, Y) \\
=&x_1 y_1 p_1 + x_1 y_2 p_2 + x_2 y_1 p_3 + x_2 y_2 p_4 \\
&- (x_1 q_1 + x_2(1 - q_1))(y_1 q_2 + y_2(1 - q_2)) = 0
\end{aligned}
$$

其中 $q_1 = p_1 + p_2, q_2 = p_1 + p_3, p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1$
假设 q_1, q_2 已知，求解方程组得 $p_1 = q_1 q_2$， $p_2 = q_1(1 - q_2)$， $p_3 = (1 - q_1) q_2$， $p_4 = (1 - q_1)(1 - q_2)$. 故 X 与 Y 相互独立。

33. 设函数

$$\delta(x) = \begin{cases} 1, & x \geqslant 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

试证: 随机变量 X 与 Y 相互独立的充分必要条件是

$$E(\delta(a-X)\delta(b-Y)) = E(\delta(a-X))E(\delta(b-Y)) \quad (一切 a, b).$$

证明： 充分性：

假设 X 和 Y 相互独立。

$$E(\delta(a-X)) = P(a-X \geqslant 0) = P(X \leq a)$$

$$E(\delta(b-Y)) = P(b-Y \geqslant 0) = P(Y \leq b)$$

由于 X 和 Y 相互独立，我们有：

$$E(\delta(a-X)\delta(b-Y)) = P((a-X \geqslant 0)\cap(b-Y \geqslant 0)) = P(X \leq a, Y \leq b)$$

$$P(X \leq a, Y \leq b) = P(X \leq a)P(Y \leq b) = E(\delta(a-X))E(\delta(b-Y))$$

因此，如果 X 和 Y 相互独立，则
$E(\delta(a-X)\delta(b-Y)) = E(\delta(a-X))E(\delta(b-Y))$ 对于所有 a 和 b 成立。
必要性:
假设 $E(\delta(a-X)\delta(b-Y)) = E(\delta(a-X))E(\delta(b-Y))$ 对于所有 a 和 b 成立。
设 $A=\{X\leq a\}$ 和 $B=\{Y\leq b\}$。

$$P(A\cap B) = P(X\leq a, Y\leq b) = E(\delta(a-X)\delta(b-Y))$$

根据假设 $E(\delta(a-X)\delta(b-Y)) = E(\delta(a-X))E(\delta(b-Y))$，我们有:

$$P(X\leq a, Y\leq b) = P(X\leq a)P(Y\leq b)$$

对于任意的 a 和 b，我们都有
$P(X\leq a, Y\leq b) = P(X\leq a)P(Y\leq b)$。这意味着对于任意的 A 和 B，有 $P(A\cap B) = P(A)P(B)$。因此，X 和 Y 相互独立。

34. 一辆交通车送 25 名乘客到 7 个站, 假设每一个乘客等可能地在任一站下车, 且他们行动独立, 交通车只在有人下车时才停站, 问: 该交通车停站的期望次数是多少?

34. 一辆交通车送 25 名乘客到 7 个站，假设每一个乘客等可能地在任一站下车，且他们行动独立，交通车只在有人下车时才停站，问：该交通车停站的期望次数是多少？

解：设 X_i 是一个指示变量，表示第 i 站是否有乘客下车（如果有乘客下车则 $X_i = 1$，否则 $X_i = 0$）。交通车停站的总次数 X 可以表示为 $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_7$，期望为

$$E[X] = E[X_1 + X_2 + \cdots + X_7] = E[X_1] + E[X_2] + \cdots + E[X_7]$$

第 i 站至少有一名乘客下车的概率为：

$$P(\text{第}i\text{ 站至少有一名乘客下车}) = 1 - \left(\frac{6}{7}\right)^{25}$$

因此，

$$E[X_i] = 1 - \left(\frac{6}{7}\right)^{25}, \qquad E[X] = 7 \times \left(1 - \left(\frac{6}{7}\right)^{25}\right)$$

35. 50 个人排队作肺部透视, 假设他们中有 4 个阳性患者, 问: 在出现第一个阳性患者之前, 阴性反应者的人数平均是多少?

35. 50 个人排队作肺部透视, 假设他们中有 4 个阳性患者, 问: 在出现第一个阳性患者之前, 阴性反应者的人数平均是多少?

解: 设 X 为第一位阳性患者出现的位置, 则

$$P(X \geqslant k) = \frac{C_{51-k}^{4}}{C_{50}^{4}}$$

因此所求平均值为

$$E(X) - 1 = \sum_{k=1}^{47} P(X \geqslant k) - 1 = \sum_{k=1}^{47} \frac{C_{51-k}^{4}}{C_{50}^{4}} - 1$$

$$= \frac{C_{51}^{5}}{C_{50}^{4}} - 1 = \frac{46}{5}$$

38. 若对于随机变量 $X, E(e^{aX})$ 存在 (a 是正常数), 试证:

$$P(X \geqslant \varepsilon) \leqslant e^{-a\varepsilon} E(e^{aX}) \quad (\text{一切 } \varepsilon > 0).$$

38. 若对于随机变量 $X, E(e^{aX})$ 存在 (a 是正常数), 试证:

$$P(X \geqslant \varepsilon) \leqslant e^{-a\varepsilon} E(e^{aX}) \quad (一切\ \varepsilon > 0).$$

证明：设随机变量 $Y = e^{aX}$，其中 $a > 0$。显然，Y 是非负的。由马尔可夫不等式，得:

$$P(X \geqslant \varepsilon) = P(Y \geqslant e^{a\varepsilon}) \leqslant \frac{E(Y)}{e^{a\varepsilon}}.$$

因此:

$$P(X \geqslant \varepsilon) \leqslant e^{-a\varepsilon} E(e^{aX}).$$

39. 设随机变量 X 与 Y 相互独立, $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$, 已知 $\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2$, 试求 $P(X > Y)$.

39. 设随机变量 X 与 Y 相互独立，
$X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$，已知 $\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2$，试求 $P(X > Y)$.

解：设 $Z = X - Y$。由于 X 和 Y 是相互独立的，Z 也是一个正态随机变量，$Z \sim N(\mu_1 - \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$。
令 $W = \frac{Z-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}$，则 W 服从标准正态分布 $N(0,1)$。因此：

$$P(Z > 0) = P\left(W > \frac{\mu_2 - \mu_1}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}\right)$$

设 $d = \frac{\mu_1-\mu_2}{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}$，则：

$$P(Z > 0) = P(W > -d) = 1 - P(W \le -d) = P(W \le d).$$

$$P(X > Y) = \Phi\left(\frac{\mu_1 - \mu_2}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}\right)$$

给定二维随机向量 (X, Y) 的概率分布，求
$P(X = 2), P(Y \geqslant 2), P(X = Y), P(X \leqslant 2, Y \leqslant 2), P(X > Y)$。

给定二维随机向量 (X, Y) 的概率分布，求
$P(X=2), P(Y\geqslant 2), P(X=Y), P(X\leqslant 2, Y\leqslant 2), P(X>Y)$。
解：

$$P(X=2)=\sum_{i=0}^{4}P(X=2, Y=i)=0.27$$

$$P(Y\geqslant 2)=\sum_{i=2}^{4}\sum_{j=0}^{3}P(X=j, Y=i)=0.69$$

$$P(X=Y)=\sum_{i=0}^{3}P(X=i, Y=i)=0.3$$

$$P(X\leqslant 2, Y\leqslant 2)=\sum_{i=0}^{2}\sum_{j=0}^{2}P(X=i, Y=j)=0.69$$

$$P(X>Y)=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=0}^{i-1}P(X=i, Y=j)=0.25$$

43. 设随机变量 X 与 Y 独立同分布，共同分布是几何分布，即 $P(X=k)=pq^k \quad (k=0,1,\cdots;q=1-p)$，试证：(1) $\min\{X,Y\}$ 与 $X-Y$ 相互独立；(2) $Z=\min\{X,Y\}$ 与 $W=\max\{X,Y\}-Z$ 相互独立。

43. 设随机变量 X 与 Y 独立同分布，共同分布是几何分布，即 $P(X=k)=pq^k \quad (k=0,1,\cdots;q=1-p)$，试证：(1) $\min\{X,Y\}$ 与 $X-Y$ 相互独立；(2) $Z=\min\{X,Y\}$ 与 $W=\max\{X,Y\}-Z$ 相互独立。

证明： (1)

$$
\begin{aligned}
&P(\min\{X,Y\}=k)\\
&=P(X=k,Y\geqslant k)+P(Y=k,X\geqslant k)-P(X=k,Y=k)\\
&=2pq^k\sum_{j=k}^{\infty}pq^j-(pq^k)^2=2pq^k\cdot\frac{pq^k}{p}-(pq^k)^2=pq^{2k}(2-p)
\end{aligned}
$$

考虑 $X-Y$ 的概率分布：$n>0$,

$$
P(X-Y=n)=\sum_{k=0}^{\infty}P(X=k+n,Y=k)=p^2q^n\sum_{k=0}^{\infty}q^{2k}=p^2q^n\cdot\frac{1}{1-q^2}
$$

$$
P(X-Y\ldots)=\begin{cases}\sum_{k=0}^{\infty}P(X=k+n,Y=k)=p^2q^n\sum_{k=0}^{\infty}q^{2k}=p^2q^n\cdot\ldots\end{cases}
$$

对于 $n \leqslant 0$,

$$P(X-Y=n)=\sum_{k=-n}^{\infty} P(X=k+n, Y=k)=p^2q^n\sum_{k=-n}^{\infty} q^{2k}=\frac{p^2q^{-n}}{1-q^2}.$$

计算联合概率：

$$P(\min\{X,Y\}=k, X-Y=n)=\begin{cases} P(X=k+n, Y=k)=p^2q^{2k+n}, & n>0 \\ P(X=k, Y=k-n)=p^2q^{2k-n}, & n\leqslant 0 \end{cases}$$

因此，

$$P(\min\{X,Y\}=k)P(X-Y=n)=P(\min\{X,Y\}=k, X-Y=n).$$

$\min\{X,Y\}$ 与 $X-Y$ 相互独立。

(2) 考虑 X 和 Y 的所有可能组合，计算 W 的概率分布

$$P(W=n)=\sum_{k=0}^{\infty}P(X=k+n,Y=k)+P(X=k,Y=k+n)$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}(p^2q^{2k+n}+p^2q^{2k+n})=2p^2q^n\sum_{k=0}^{\infty}q^{2k}=\frac{2p^2q^n}{1-q^2}.$$

联合概率：

$$P(Z=k,W=n)=P(X=k+n,Y=k)+P(X=k,Y=k+n)=2p^2q^{2k+n}$$

另一方面：

$$P(Z=k)P(W=n)=q^{2k}(2-p^2)\cdot\frac{2p^2q^n}{1-q^2}=2p^2q^{2k+n}.$$

因此，Z 和 W 相互独立。

44. 设 a 是区间 $[0,1]$ 中的一个定点，随机变量 X 服从 $[0,1]$ 上的均匀分布，$Y = |X - a|$。问：a 取何值时，X 与 Y 不相关。

44. 设 a 是区间 $[0,1]$ 中的一个定点，随机变量 X 服从 $[0,1]$ 上的均匀分布，$Y=|X-a|$。问：a 取何值时，X 与 Y 不相关。

解：

$$E(X)=\int_0^1 x\,dx=\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1=\frac{1}{2}.$$

$$E(Y)=E(|X-a|)=\int_0^1 |x-a|\,dx=\int_0^a (a-x)\,dx+\int_a^1 (x-a)\,dx=\frac{a^2}{2}+\frac{1}{2}$$

$$E(XY)=E(X|X-a|)=\int_0^1 x|x-a|\,dx$$

$$=\int_0^a x(a-x)\,dx+\int_a^1 x(x-a)\,dx$$

$$=\frac{a^3}{6}+\frac{1}{3}-\frac{a}{2}+\frac{a^3}{6}=\frac{a^3}{3}+\frac{1}{3}-\frac{a}{2}.$$

协方差为

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \left(\frac{a^3}{3} + \frac{1}{3} - \frac{a}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}\right)\left(a^2 - a + \frac{1}{2}\right) = \frac{a^3}{3} - \frac{a^2}{2} + \frac{1}{12}.$$

为了使 X 和 Y 不相关，需要：

$$\frac{a^3}{3} - \frac{a^2}{2} + \frac{1}{12} = 0.$$

解方程可得 $a = \frac{1}{2}$ 是方程的一个根。

45. 设二维随机向量 (X, Y) 有联合密度

$$p(x,y) = \begin{cases} 3x, & 0 < x < 1 \text{ 且} 0 < y < x, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

试求条件分布密度 $p_{Y|X}(y|x)$ 和 $p_{X|Y}(x|y)$。

45. 设二维随机向量 (X, Y) 有联合密度

$$p(x,y) = \begin{cases} 3x, & 0 < x < 1 \text{ 且} 0 < y < x, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$ 试求条件分布密度

$p_{Y|X}(y|x)$ 和 $p_{X|Y}(x|y)$。

解：对于 $0 < x < 1$，$0 < y < 1$，

$$p_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x,y)\,dy = \int_0^x 3x\,dy = 3x\int_0^x 1\,dy = 3x \cdot x = 3x^2.$$

$$p_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x,y)\,dx = \int_y^1 3x\,dx = 3\int_y^1 x\,dx = \frac{3}{2}(1-y^2).$$

条件分布密度为

$$p_{Y|X}(y|x) = \frac{p(x,y)}{p_X(x)} = \frac{3x}{3x^2} = \frac{1}{x} \quad (0 < y < x).$$

$$p_{X|Y}(x|y) = \frac{p(x,y)}{p_Y(y)} = \frac{3x}{\frac{3}{2}(1-y^2)} = \frac{2x}{1-y^2} \quad (y < x < 1).$$

46. 已知二维随机向量 (X,Y) 的联合密度为

$$p(x,y)=\begin{cases}\dfrac{21}{4}x^2y, & x^2\leqslant y\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

求条件概率 $P(Y\geqslant 0.75\mid X=0.5)$.

46. 已知二维随机向量 (X, Y) 的联合密度为

$$p(x,y) = \begin{cases} \frac{21}{4}x^2y, & x^2 \leqslant y \leqslant 1, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

求条件概率 $P(Y \geqslant 0.75 \mid X = 0.5)$.

解:

$$p_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x,y)\,dy = \int_{x^2}^{1} \frac{21}{4}x^2y\,dy = \frac{21}{4}x^2 \cdot \frac{1-x^4}{2} = \frac{21}{8}x^2(1-x^4).$$

$$p_{Y|X}(y|x) = \frac{p(x,y)}{p_X(x)} = \frac{\frac{21}{4}x^2y}{\frac{21}{8}x^2(1-x^4)} = \frac{2y}{1-x^4} \quad (x^2 \leq y \leq 1).$$

因此, $P(Y \geqslant 0.75 \mid X = 0.5) = \int_{0.75}^{1} p_{Y|X}(y \mid 0.5)\,dy$.
代入 $x = 0.5$: $P(Y \geqslant 0.75 \mid X = 0.5) = \int_{0.75}^{1} \frac{32y}{15}\,dy = \frac{7}{15}$.

47. 设二维随机向量 (X, Y) 有联合密度

$$p(x,y) = \begin{cases} 24(1-x)y, & 0 < y < x < 1, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

当 $0 < y < 1$ 时，试求条件期望 $E(X \mid Y = y)$.

47. 设二维随机向量 (X, Y) 有联合密度

$$p(x,y)=\begin{cases}24(1-x)y, & 0<y<x<1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

当 $0<y<1$ 时，试求条件期望 $E(X\mid Y=y)$.

解：

$$p_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}p(x,y)\,dx=\int_y^1 24(1-x)y\,dx=12y(1-y)^2.$$

$$p_{X|Y}(x|y)=\frac{p(x,y)}{p_Y(y)}=\frac{24(1-x)y}{12y(1-y)^2}=\frac{2(1-x)}{(1-y)^2}\quad(y<x<1).$$

条件期望为

$$E(X \mid Y = y) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, p_{X|Y}(x|y)\, dx = \int_{y}^{1} x \cdot \frac{2(1-x)}{(1-y)^2}\, dx$$

$$= \frac{2}{(1-y)^2} \int_{y}^{1} x(1-x)\, dx = \frac{2}{(1-y)^2} \cdot \frac{1-3y^2+2y^3}{6} = \frac{2y+1}{3}.$$

(0<y<1)

48. 设随机变量 X 与 Y 独立同分布，都服从参数为 λ 的指数分布，令

$$Z = \begin{cases} 3X+1, & X \geqslant Y, \\ 6Y, & X < Y, \end{cases}$$

试求 $E(Z)$.

48. 设随机变量 X 与 Y 独立同分布，都服从参数为 λ 的指数分布，令

$$Z=\begin{cases}3X+1, & X\geqslant Y,\\ 6Y, & X<Y,\end{cases}$$

试求 $E(Z)$.

$$E(Z)=E(3X+1)I(X\geqslant Y)+E(6Y)I(X<Y)$$

$$=\int_{x\geqslant y>0}(3x+1)\lambda^2e^{-\lambda x}e^{-\lambda y}dxdy+\int_{0<x<y}6y\lambda^2e^{-\lambda x}e^{-\lambda y}dxdy$$

$$=\int_0^{+\infty}(3x+1)\lambda^2e^{-\lambda x}\int_0^x e^{-\lambda y}dydx+\int_0^{+\infty}6y\lambda^2e^{-\lambda y}\int_0^y e^{-\lambda x}dxdy$$

$$=\int_0^{+\infty}(3x+1)\lambda e^{-\lambda x}(1-e^{-\lambda x})dx+\int_0^{+\infty}6y\lambda e^{-\lambda y}(1-e^{-\lambda y})dy$$

$$=\int_0^{+\infty}(9x+1)\lambda e^{-\lambda x}(1-e^{-\lambda x})dx=\frac{27}{4\lambda}+\frac{1}{2}.$$

49. 设随机变量 $X_1, \ldots, X_n (n \geqslant 2)$ 都是随机变量，它们的期望、方差都存在，试证协方差矩阵：

$$\Sigma = (\sigma_{ij})_{n\times n}, \quad \sigma_{ij} \triangleq \mathrm{cov}(X_i, X_j)$$

是非负定的，即对一切实数 $t_1, \ldots, t_n$，均有 $\sum_{i,j} \sigma_{ij} t_i t_j \geqslant 0.$

49. 设随机变量 $X_1, \ldots, X_n (n \geqslant 2)$ 都是随机变量，它们的期望、方差都存在，试证协方差矩阵：

$$\Sigma = (\sigma_{ij})_{n \times n}, \quad \sigma_{ij} \triangleq \mathrm{cov}(X_i, X_j)$$

是非负定的，即对一切实数 $t_1, \ldots, t_n$，均有 $\sum_{i,j} \sigma_{ij} t_i t_j \geqslant 0$.

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j} \sigma_{ij} t_i t_j &= \sum_{i,j} (E(X_i X_j) - E(X_i)E(X_j)) t_i t_j \\
&= \sum_{i,j} (E(t_i X_i t_j X_j) - E(t_i X_i)E(t_j X_j)) \\
&= E(\sum_{i,j} t_i X_i t_j X_j) - [E(\sum_i t_i X_i)]^2 \\
&= E((\sum_i t_i X_i)^2) - [E(\sum_i t_i X_i)]^2 = \mathrm{var}(\sum_i t_i X_i) \geqslant 0
\end{aligned}$$

51. 设随机变量 X 与 U 相互独立,X 的分布密度是 $p_x(x)$, U 服从区间 $[0,1]$ 上的均匀分布，又函数 $q(x)$ 满足:

1. $q(x) \geq 0$, 且 $\int_{-\infty}^{+\infty} q(x)dx = 1$;
2. 存在 $a > 0$, 使得 $p_x(x)/q(x) \geq a$ (当 $q(x) > 0$ 时);

令 $r(x) = a\frac{q(x)}{p_x(x)}$ (当 $p_x(x) = 0$ 时，规定 $r(x) = 0$),
$M = \{U \leq r(X)\}$,
试证明: $P(X \leq z|M) = \int_{-\infty}^{z} q(x)dx$,
即在 M 发生的条件下 X 的条件分布密度恰好是 $q(x)$.

证明：

$$
\begin{aligned}
P(X \leq z|M) &= \frac{P(\{x \leq z, U \leq r(x)\})}{P(\{U \leq r(x)\})} \\
&= \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} P(X \leq z, U \leq r(X)|X = x)p(x)dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} P(U \leq r(X)|X = x)p(x)dx} \\
&= \frac{\int_{-\infty}^{z} P(U \leq r(x))p(x)dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} P(U \leq r(x))p(x)dx} \\
&= \frac{\int_{-\infty}^{z} r(x)p(x)dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} r(x)p(x)dx} \\
&= \frac{\int_{-\infty}^{z} aq(x)dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} aq(x)dx} \\
&= \int_{-\infty}^{z} q(x)dx
\end{aligned}
$$

1. 第三章作业
2. 第二部分
3. 多元正态分布

1. 随机向量 $(X, Y) \sim N\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}\right)$，求

(1) X 的边际密度函数 $f_X(x)$;

(2) $E(Y|X = x)$;

(3) 相关系数 ρ_{XY}.

解：(1) 边际密度函数：

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_X^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu_X)^2}{2\sigma_X^2}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-1)^2}{8}\right).$$

(2)(3) 相关系数

$$\rho_{XY} = \frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{3}{2 \cdot 3} = 0.5.$$

由协方差矩阵 Σ，$\sigma_X^2 = 4$，$\sigma_Y^2 = 9$，条件期望

$$E(Y|X = x) = \mu_Y + \rho \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x - \mu_X) = 2 + \rho \frac{3}{2}(x - 1) = \frac{3}{4}x + \frac{5}{4}.$$

2. 设随机向量 $\mathbf{X} \sim N\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}\right)$,

$\mathbf{Y} \sim N\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$, X, Y 的密度函数分别为

$p(x), q(x)(x \in \mathbb{R}^2)$, 求期望 $E_X \log \frac{p(X)}{q(X)}$.

解：期望值 $E_{\mathbf{X}} \log \frac{p(\mathbf{X})}{q(\mathbf{X})}$ 可以通过积分计算：

$$
\begin{aligned}
& E_{\mathbf{X}} \log \frac{p(\mathbf{X})}{q(\mathbf{X})} \\
= & \int p(\mathbf{x}) \Big[\log |\Sigma_{\mathbf{Y}}|^{1/2} - \log |\Sigma_{\mathbf{X}}|^{1/2} - \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mu_{\mathbf{X}})^\top \Sigma_{\mathbf{X}}^{-1} (\mathbf{x} - \mu_{\mathbf{X}}) \\
& + \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mu_{\mathbf{Y}})^\top \Sigma_{\mathbf{Y}}^{-1} (\mathbf{x} - \mu_{\mathbf{Y}}) \Big] d\mathbf{x}.
\end{aligned}
$$

其中，$\Sigma_{\mathbf{X}}^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \Sigma_{\mathbf{Y}}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$,

$$\int p(\mathbf{x})(\mathbf{x}-\mu_{\mathbf{X}})^\top \Sigma_{\mathbf{X}}^{-1}(\mathbf{x}-\mu_{\mathbf{X}})d\mathbf{x}$$
$$= E_{\mathbf{X}} \begin{bmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$
$$= 5E_{\mathbf{X}}((x_1-1)^2) - 4E_{\mathbf{X}}((x_1-1)x_2) + E_{\mathbf{X}}(x_2^2) = 2$$

$$\int p(\mathbf{x})(\mathbf{x}-\mu_{\mathbf{Y}})^\top \Sigma_{\mathbf{Y}}^{-1}(\mathbf{x}-\mu_{\mathbf{Y}})d\mathbf{x}$$
$$= E_{\mathbf{X}} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 - 1 \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 - 1 \end{bmatrix}$$
$$= E_{\mathbf{X}}(x_1^2) + E_{\mathbf{X}}((x_2-1)^2) = 8$$

将上述结果代入并计算：

$$E_{\mathbf{X}} \log \frac{p(\mathbf{X})}{q(\mathbf{X})} = 0 - \frac{1}{2}\cdot 2 + \frac{1}{2}\cdot 8 = 3$$

3. 若随机向量 $\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} \sim N\left(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix}\right)$，试求 $P(\xi \geqslant a, \eta \geqslant b)$。

解：设 $X = \xi - a$，$Y = \eta - b$，则
$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \sim N\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix}\right)$，

$$P(\xi \geqslant a, \eta \geqslant b)$$
$$= \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(x^2+y^2-2\rho xy)\right\} dxdy.$$

作极坐标变换 $x = r\sin\theta$，$y = r\cos\theta$，雅可比矩阵

$$J = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right| = r$$

$$
\begin{aligned}
&P(\xi \geqslant a, \eta \geqslant b) \\
&= \int_0^{+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} r \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(r^2 - 2\rho r^2 \sin\theta\cos\theta)\right\} d\theta dr \\
&= \frac{1}{4\pi\sqrt{1-\rho^2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{+\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)} r^2(1-\rho\sin 2\theta)\right\} dr^2 d\theta \\
&= \frac{1}{4\pi\sqrt{1-\rho^2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\frac{2(1-\rho^2)}{1-\rho\sin 2\theta} d\theta \\
&= \frac{\sqrt{1-\rho^2}}{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\frac{1}{\sin^2\theta + \cos^2\theta - \rho\sin 2\theta} d\theta \\
&= \frac{\sqrt{1-\rho^2}}{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\frac{1}{\tan^2\theta + 1 - 2\rho\tan\theta} d\tan\theta
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\sqrt{1-\rho^2}}{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\frac{1}{1-\rho^2} \frac{1}{\left(\frac{\tan\theta-\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}\right)^2+1} d\tan\theta \\
&= \frac{\sqrt{1-\rho^2}}{2\pi} \int_{-\frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}}^{+\infty} -\frac{1}{1-\rho^2} \frac{1}{t^2+1} \sqrt{1-\rho^2}\, dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\pi}{2} + \arctan\left(\frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} \right) \right)
\end{aligned}
$$

4. 已知 $X \sim N(\mathbf{0}, I_2)$，向量 $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ 满足 $||\mathbf{u}|| = ||\mathbf{v}|| = 1$，求：
(1) $\mathrm{cov}(\langle \mathbf{u}, \mathbf{x} \rangle, \langle \mathbf{v}, \mathbf{x} \rangle)$；
(2)（选做）$E\mathrm{sign}(\langle \mathbf{u}, \mathbf{x} \rangle)\mathrm{sign}(\langle \mathbf{v}, \mathbf{x} \rangle)$，这里符号函数满足 sign
$(X) = \begin{cases} 1, & x \geqslant 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$.

解：(1) $E[\langle \mathbf{u}, \mathbf{x} \rangle] = E[\mathbf{u}^\top \mathbf{x}] = \mathbf{u}^\top E[\mathbf{x}] = \mathbf{u}^\top \mathbf{0} = 0$，同理
$E[\langle \mathbf{v}, \mathbf{x} \rangle] = 0$。
所以，

$$\mathrm{cov}(\langle \mathbf{u}, \mathbf{x} \rangle, \langle \mathbf{v}, \mathbf{x} \rangle) = E[\langle \mathbf{u}, \mathbf{x} \rangle \langle \mathbf{v}, \mathbf{x} \rangle] = E[(\mathbf{u}^\top \mathbf{x})(\mathbf{v}^\top \mathbf{x})] = E[\mathbf{u}^\top (\mathbf{x}\mathbf{x}^\top)\mathbf{v}]$$

由于 $\mathbf{x} \sim N(\mathbf{0}, I_2)$，我们有 $E[\mathbf{x}\mathbf{x}^T] = I_2$，因此：

$$\mathrm{cov}(\langle \mathbf{u}, \mathbf{x} \rangle, \langle \mathbf{v}, \mathbf{x} \rangle) = \mathbf{u}^T I_2 \mathbf{v} = \mathbf{u}^T \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$$

(2) 设 $\xi = \langle \mathbf{u}, \mathbf{x} \rangle$，$\eta = \langle \mathbf{v}, \mathbf{x} \rangle$，则方差 $\mathrm{var}(\xi) = \mathbf{u}^\top I_2 \mathbf{u} = ||\mathbf{u}|| = 1$，$\mathrm{var}(\eta) = \mathbf{v}^\top I_2 \mathbf{v} = ||\mathbf{v}|| = 1$，相关系数
$\rho = \mathrm{cov}(\langle \mathbf{u}, \mathbf{x} \rangle, \langle \mathbf{v}, \mathbf{x} \rangle) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$，因此

$$\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} \sim N\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix} \right)$$

利用第 3 题的结果，有

$$P(\xi \geqslant 0, \eta \geqslant 0) = P(\xi < 0, \eta < 0) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \arctan \sqrt{\frac{1-\rho}{1+\rho}}$$

类似的，

$$P(\xi < 0, \eta \geqslant 0) = P(\xi \geqslant 0, \eta < 0) = \frac{1}{\pi} \arctan \sqrt{\frac{1-\rho}{1+\rho}}$$

因此因此

$$
\begin{aligned}
& E\mathrm{sign}(\langle \mathbf{u}, \mathbf{x} \rangle)\mathrm{sign}(\langle \mathbf{v}, \mathbf{x} \rangle) \\
& = P(\xi \geqslant 0, \eta \geqslant 0) + P(\xi < 0, \eta < 0) - P(\xi < 0, \eta \geqslant 0) \\
& - P(\xi \geqslant 0, \eta < 0) \\
& = 1 - \frac{4}{\pi} \arctan \sqrt{\frac{1-\rho}{1+\rho}} = 1 - \frac{4}{\pi} \arctan \sqrt{\frac{1 - \mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{1 + \mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}}
\end{aligned}
$$

其中若 $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = -1$，投影方向完全相反，$E\mathrm{sign}(\langle \mathbf{u}, \mathbf{x} \rangle)\mathrm{sign}(\langle \mathbf{v}, \mathbf{x} \rangle) = -1$.

29. 设 $X_1, \cdots, X_n (n \geqslant 2)$ 是独立同分布的随机变量列，且 $E[(X_1 - E(X_1))^3] = 0$，试证：随机变量 $\xi = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ 与 $\eta = \sum_{i=1}^{n} (X_i - \xi)^2$ 是不相关的。

29. 设 $X_1, \cdots, X_n (n \geqslant 2)$ 是独立同分布的随机变量列，且 $E[(X_1 - E(X_1))^3] = 0$，试证：随机变量 $\xi = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ 与 $\eta = \sum_{i=1}^{n}(X_i - \xi)^2$ 是不相关的。

证明：

$$\operatorname{cov}(\xi, \eta) = \operatorname{cov}(\xi - \mu, \eta) = E((\xi - \mu)\eta)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} E((\xi - \mu)(X_i - \mu + \mu - \xi)^2)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} E(\xi - \mu)(X_i - \mu)^2 - 2E\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)(\xi - \mu)^2\right) + \sum_{i=1}^{n} E(\xi - \mu)^3$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{n}E(X_j - \mu)(X_i - \mu)^2 - nE(\xi - \mu)^3 = 0$$

3. 若随机向量 $\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} \sim N\left(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix}\right)$，试求 $P(\xi \geqslant a, \eta \geqslant b)$。

3. 若随机向量 $\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} \sim N\left(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix}\right)$，试求 $P(\xi \geqslant a, \eta \geqslant b)$。

解：设 $X = \xi - a$，$Y = \eta - b$，则

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \sim N\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix}\right),$$

$$P(\xi \geqslant a, \eta \geqslant b)$$
$$= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(x^2+y^2-2\rho xy)\right\} dxdy.$$

将协方差矩阵的逆矩阵对角化 $\mathbf{\Sigma}^{-1} = \mathbf{U}^\top \mathbf{D} \mathbf{U}$，则 $\mathbf{U} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ 为正交阵，$\mathbf{D} = \mathrm{diag}\left(\frac{1}{1+\rho}, \frac{1}{1-\rho}\right)$.
作变量替换 $\begin{bmatrix} X' \\ Y' \end{bmatrix} = \mathbf{U}\ \mathrm{diag}\ (\sqrt{1+\rho}, \sqrt{1-\rho}) \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$，积分区域变为

$$\Omega' = \{(x', y') : y' \geqslant \sqrt{\frac{1-\rho}{1+\rho}} x', y' \geqslant -\sqrt{\frac{1-\rho}{1+\rho}} x'\},$$

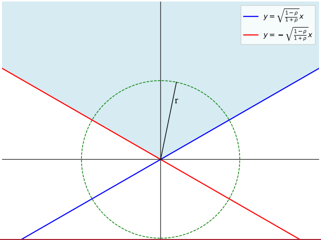
雅可比矩阵

$$J = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(x', y')} \right| = \sqrt{1-\rho^2}$$

$$P(\xi \geqslant a, \eta \geqslant b) = \iint_{\Omega'} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x'^2 + y'^2)\right) \sqrt{1-\rho^2}\, \mathrm{d}x' \mathrm{d}y'$$

$$= \int_{\arctan\sqrt{\frac{1-\rho}{1+\rho}}}^{\pi - \arctan\sqrt{\frac{1-\rho}{1+\rho}}} \mathrm{d}\theta \int_0^{+\infty} \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{1}{2}r^2\right) r\, \mathrm{d}r$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \arctan\sqrt{\frac{1-\rho}{1+\rho}}.$$



5（选做）. 随机变量 $\xi_1, \cdots, \xi_n \sim N(0, \sigma^2)$，i.i.d.，矩阵 $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 且是对称矩阵，记 $\xi = (\xi_1, \cdots, \xi_n)^\top$，求 $\mathrm{cov}(\xi^\top \mathbf{A} \xi, \xi^\top \mathbf{B} \xi)$.

解：由独立同分布条件，$E(\xi_i \xi_j) = \delta_{ij}$，这里 δ_{ij} 当 $i = j$ 时为 1，否则为 0。$\xi^\top \mathbf{A} \xi$ 和 $\xi^\top \mathbf{B} \xi$ 的期望为：

$$E[\xi^\top \mathbf{A} \xi] = \sum_{i,j} A_{ij} E(\xi_i \xi_j) = \sigma^2 \operatorname{tr}(\mathbf{A})$$

$$E[\xi^\top \mathbf{B} \xi] = \sum_{i,j} B_{ij} E(\xi_i \xi_j) = \sigma^2 \operatorname{tr}(\mathbf{B})$$

$$E(\xi^\top \mathbf{A} \xi \xi^\top \mathbf{B} \xi) = E \operatorname{tr}(\xi^\top \mathbf{A} \xi \xi^\top \mathbf{B} \xi) = \operatorname{tr}(\mathbf{A} E(\xi \xi^\top \mathbf{B} \xi \xi^\top))$$

对称矩阵 A 对角化 $\mathbf{A} = \mathbf{U}^\top \mathbf{D} \mathbf{U}$，其中对角阵 $\mathbf{D} = \mathrm{diag}(d_1, \cdots, d_n)$，设 $\eta = \frac{\mathbf{U}\xi}{\sigma}$，

$$E(\xi\xi^\top \mathbf{B} \xi\xi^\top) = \sigma^4 E(\mathbf{U}^\top \eta\eta^\top \mathbf{D} \eta\eta^\top \mathbf{U}) = \sigma^4 \mathbf{U}^\top E\left(\sum_{i=1}^n d_i \eta_i^2 \cdot \eta\eta^\top\right)\mathbf{U}$$

η 为标准正态向量，$E\left(\sum_{i=1}^n d_i \eta_i^2 \cdot \eta\eta^\top\right)$ 的非对角元期望为 0，利用 $E(\eta_i^2) = 1, E(\eta_i^4) = 3$，我们有

$$E\left(\sum_{i=1}^n d_i \eta_i^2 \cdot \eta\eta^\top\right) = \sum_{i=1}^n d_i \cdot \mathbf{I} + 2\mathbf{D}$$

又由于 $\mathrm{tr}(\mathbf{B}) = \mathrm{tr}(\mathbf{U}^\top \mathbf{D}\mathbf{U}) = \mathrm{tr}(\mathbf{D}\mathbf{U}^\top \mathbf{U}) = \mathrm{tr}(\mathbf{D})$，因此

$$E(\xi\xi^\top \mathbf{B}\xi\xi^\top) = \sigma^4 \left[\sum_{i=1}^{n} d_i \cdot \mathbf{I} + 2\mathbf{B}\right] = \sigma^4(\mathrm{tr}(\mathbf{B})\mathbf{I} + 2\mathbf{B})$$

协方差

$$\begin{aligned}
\mathrm{cov}(\xi^\top \mathbf{A}\xi, \xi^\top \mathbf{B}\xi) &= E(\xi^\top \mathbf{A}\xi\xi^\top \mathbf{B}\xi) - E(\xi^\top \mathbf{A}\xi)E(\xi^\top \mathbf{B}\xi) \\
&= \sigma^4(\mathrm{tr}(\mathbf{A})\,\mathrm{tr}(\mathbf{B}) + 2\,\mathrm{tr}(\mathbf{A}\mathbf{B}) - \mathrm{tr}(\mathbf{A})\,\mathrm{tr}(\mathbf{B})) \\
&= 2\sigma^4\,\mathrm{tr}(\mathbf{A}\mathbf{B})
\end{aligned}$$