

## 第十六章 高级渲染

我们在此前章节中已经学习了光线投射 (Ray Casting) 和光线追踪 (Ray Tracing) 算法得到了相对物理真实的渲染手段。本章中我们进一步深入渲染话题，讨论如何让渲染更加高效、更加物理真实。

### 16.1 辐射度量学

辐射度量学 (Radiometry) 提供了一系列思想和数学工具，来描述光的传播和反射。它构成了推导本章余下部分将使用的渲染算法的基础。有趣的是，辐射度量学并不是最初从光的物理原理出发推导出来的，而是建立在对光的抽象基础上，这个抽象基础是基于粒子在空间中流动的。因此，光的偏振等效应并不自然地适应于这个框架，尽管后来有人在辐射度学和麦克斯韦方程之间建立了联系，为辐射度量学提供了牢固的物理基础。

辐射传输研究的是辐射能量的传递，它基于辐射度量学原理，在几何光学层面上运作。其中光的宏观性质足以描述光与远大于光波长的物体互作用的方式。纳入光的波光学模型中的现象并不少见，但这些结果需要用辐射传递的基本抽象语言来表达。

通过这种方式，可以描述光与与光波长近似相同大小的物体的相互作用，从而模拟色散和干涉等效应。在更精细的细节水平上，需要使用量子力学来描述光与原子的相互作用。幸运的是，解决计算机图形渲染中的问题不需要直接模拟量子力学原理，因此避免了采用这种方法的不可行性。

在章中我们将假设几何光学是描述光和光散射的足够模型。这导致了有关光行为的几个基本假设，这些假设将在整个系统中隐含地使用：

1. 线性性：光学系统的两个输入的联合效应总是等于每个输入单独效应的总和。
2. 能量守恒：当光从表面或参与介质中散射时，散射事件永远不会产生比起始时更多的能量。
3. 无偏振：我们将忽略电磁场的偏振；因此，光的唯一相关属性是其波长 (或等效地是频率) 的分布。
4. 无荧光或磷光：光在一个波长处的行为完全独立于光在其他波长或时间的行为。与偏振一样，包含这些效应并不太困难，但它们对系统的实际价值相对较小。
5. 稳态：假定环境中的光已经达到平衡状态，因此其辐射分布随时间不会变化。这在现实场景中几乎会在光瞬间到达平衡，因此在实践中不会有限制。请注意，磷光也违反了稳态假设。

采用几何光学模型最重要的损失是很难考虑衍射和干涉效应。例如，在存在这些效应的情况下，两个区域上的总通量未必等于各自区域上收到的功率之和。有一种弥补这些问题的手段是把辐射率替换成 Wigner 分布函数，这里我们不做进一步讨论。

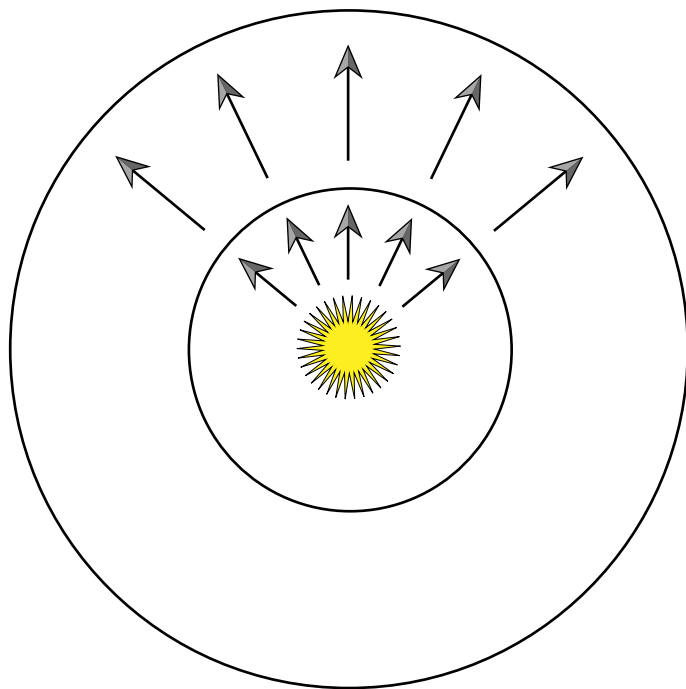


图 16.1: 辐射通量  $\Phi$  是通过空间表面或区域的能量。图源: PBRT

### 16.1.1 基本物理量

以下是有关渲染的四个辐射度量：通量、辐照度/辐射出射度、强度和辐射率。它们可以通过逐步限制时间、面积和方向来从能量（以焦耳为单位）派生出来。所有这些辐射度量通常都依赖于波长。在本章的其余部分，我们不会明确表明这种依赖关系，但这一属性是重要的，需要记住。

**能量** 能量的单位是焦耳 (J)。光源向四面八方发出光子，每个光子处于一个特定的波长并携带了特定一部分能量。辐射度量学的基本物理量都是从不同方面描述一个光子。一个波长为  $\lambda$  的光子携带的能量是

$$Q = \frac{hc}{\lambda},$$

其中  $c$  是光速，为  $299\,472\,458\text{ m/s}$ ， $h$  是普朗克常量， $h \approx 6.626 \times 10^{-34} \text{ m}^2\text{kg/s}$ 。

**通量 (Flux)** 能量描述了一段时间内的功。尽管我们假设了光在环境中每一时刻都是准静态，我们更加关心某一时刻光的状态。辐射通量，亦作辐射功率 (power)，是单位时间内通过某一表面的总能量。辐射通量可以通过对单位时间能量的变化求极限得到：

$$\Phi = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{dQ}{dt}.$$

它的单位是焦耳每秒 (J/s) 或者说瓦特 (W)。

例如，给定一个每小时发出  $Q = 200\,000\text{ J}$  的光源，如果它每小时发出的能量保持不变，我们可以算出光源的通量是

$$\Phi = 200\,000\text{ J}/3600\text{ s} \approx 55.6\text{ W}.$$

相对的，给定通量关于时间的变化，我们可以积分得到给定时间段内的总能量：

$$Q = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t) dt.$$

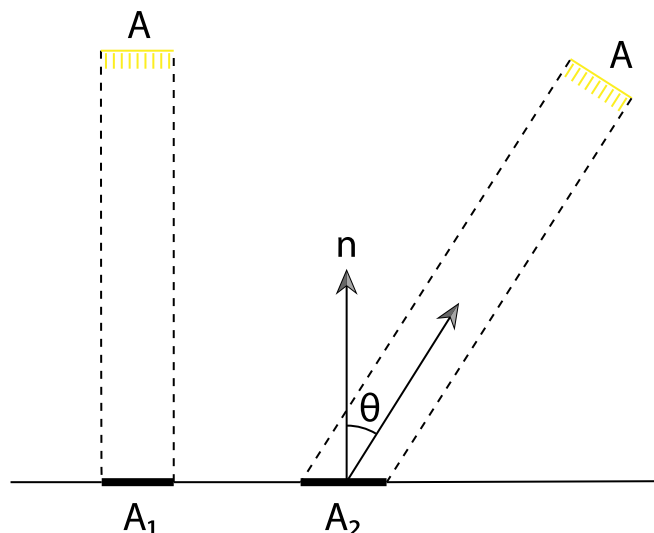


图 16.2: Lambert 定律. 到达表面的辐照度根据照明入射角的余弦值变化, 因为入射角越大, 照明面积越大. 图源: PBRT

注意到这里我们的记号并不是很严谨, 因为光子是离散的量子, 让单位时间趋近于零是没有意义的. 但是对于渲染而言, 我们认为光子的数量相对我们的观测来说是足够多的, 这些细节不会产生问题.

光源的总发射通常用通量来描述. 图16.1显示了通过光周围假想球体的总能量来测量点光源的通量. 请注意, 在图16.1中的两个球体上测量到的总通量是相同的——虽然通过大球体局部的能量比通过小球体局部的能量少, 但大球体的面积更大, 这意味着总通量是相同的.

**辐照度 (Irradiance) 与辐射出射度 (Radiant exitance)** 对于通量的度量需要一块给定的表面计算单位时间内通过的光子. 给定一块面积为  $A$  的有限表面, 我们可以定义面上单位面积的功率密度为  $E = \Phi/A$ . 我们定义进入单位面积的通量为辐照度 ( $E$ ), 以及离开单位面积的通量 ( $M$ ). 它们的单位是  $\text{W}/\text{m}^2$ .

对于如16.1所示的点光源, 外圈的球面上点的辐照度小于内圈球面上的辐照度, 因为外圈球面的表面积更大. 具体来说, 假设光源像四面八方辐射出的能量是相同的, 那么半径为  $r$  的球面上一点的辐照度为

$$E = \frac{\Phi}{4\pi r^2}.$$

这个现象也解释了为什么从一点收到的能量总量与距离的平方成反比.

一般地, 我们可以定义点  $p$  的辐照度与辐射出射度为面积微元上通量变化的极限

$$E(p) = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \Phi(p)}{\Delta A} = \frac{d\Phi(p)}{dA}.$$

我们也可以对辐照度进行积分得到通量

$$\Phi = \int_A E(p) dA.$$

辐照度方程还可以帮助我们理解 Lambert 定律, 即到达表面的光能与光照方向和表面法线之间夹角的余弦成正比 (图16.2).

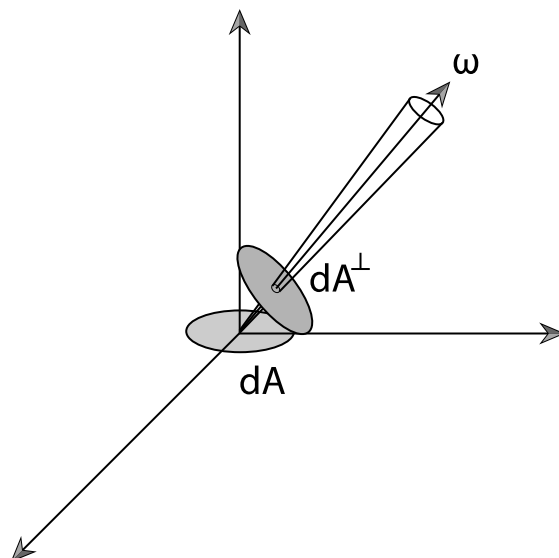


图 16.3: 辐射率  $L$  的定义是单位投影面积  $dA^\perp$  单位立体角  $d\omega$  的通量。图源: PBRT

**强度 (Intensity)** 现在考虑一个发射光子的无限小光源，假设这个光源在一个单位球的球心，我们可以计算单位立体角上的辐射功率。我们称之为辐射强度 ( $I$ )。它的单位是  $\text{W}/\text{sr}$ 。对整个球面来说球面，我们有

$$I = \frac{\Phi}{4\pi},$$

更一般地，我们感兴趣的是某一特定方向，取该方向锥形微元的极限：

$$I = \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \frac{\Delta\Phi}{\Delta\omega} = \frac{d\Phi}{d\omega}.$$

像之前一样，我们可以通过对强度进行积分来恢复功率。给定强度作为方向  $I(\omega)$  的函数，我们可以对一组有限的方向  $\Omega$  上进行积分来恢复功率：

$$\Phi = \int_{\Omega} I(\omega) d\omega.$$

强度描述了光的方向分布，但仅对点光源有意义。

**辐射率 (Radiance)** 最后，也是最重要的辐射度量是辐射率。辐照度和辐射出射度提供了在某一点的微分功率与微分面积的关系，但它们不能区分功率的方向分布。辐射率在这一步上采取了措施，将辐照度或辐射出射度与固体角度相关联。其定义如下：

$$L(p, \omega) = \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \frac{\Delta E_\omega(p)}{\Delta\omega} = \frac{dE_\omega(p)}{d\omega},$$

在这里，我们使用  $E_\omega$  来表示垂直于  $\omega$  方向的表面上的辐照度。换句话说，辐射率不是根据表面上所在的辐照度来测量的。

辐射率是单位面积、单位固体角度的通量。从通量的角度，它的定义如下：

$$L = \frac{d^2\Phi}{d\omega dA^\perp}, \quad (16.1)$$

这里， $A^\perp$  是表面上在与  $\omega$  方向垂直的虚拟表面上的投影面积，如图16.3所示。因此，它是在表面上测量的入射光随着非常小入射方向  $d\omega$  的锥体和表面上非常小的局部区域  $A$  得时的极限。

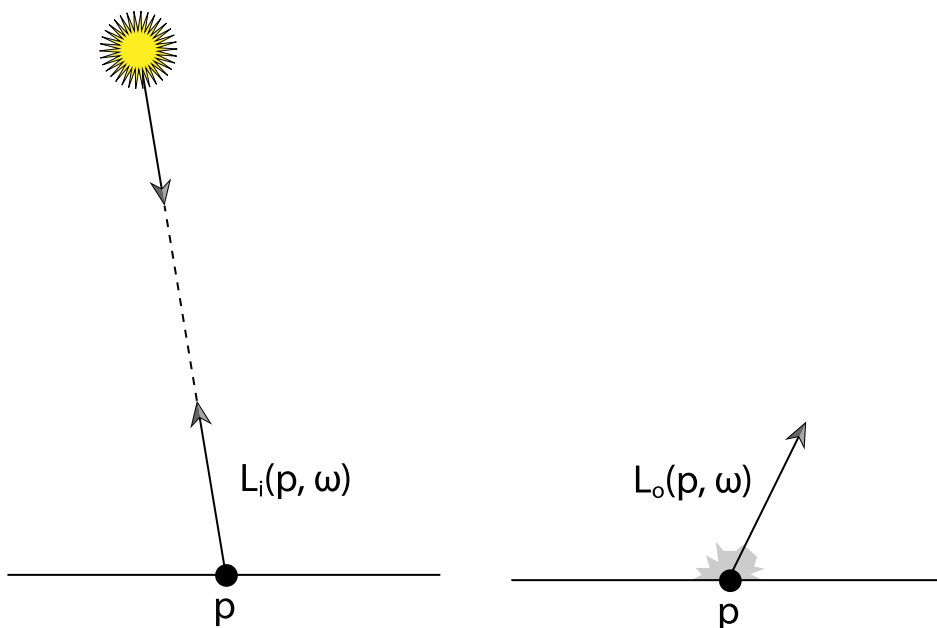


图 16.4:  $L_i(p, \omega)$  是到达点  $p$  的辐射率分布函数;  $L_o(p, \omega)$  是离开  $p$  的辐射率分布函数. 图源: PBRT

在所有这些辐射度量中, 辐射率将在本章中最频繁地使用. 这背后的直觉原因是, 在某种意义上, 它是所有辐射度量中最基本的. 如果给定了辐射率, 那么所有其他值都可以通过对辐射率在区域和方向上的积分来计算.

辐射率的另一个良好属性是, 在通过空间中的射线上保持不变. 一种简单的观察: 从光子的角度来说, 可以视为一群光子打到了一个表面后以某一随机角度打到了新的表面, 在飞行过程中能量自然不会变. 另一方面, 由辐射率的定义: 单位垂直表面上单位立体角接收到的能流, 可以想象, 如果在光线上放置一近一远两个探测器, 则远处的探测器虽然离发光体更远, 发光体打到它的能流有平方反比衰减, 但由于单位立体角不变, 它实际上接收到的发光体面积正比于距离平方, 两者的效应相互抵消. 因此, 它是使用射线追踪进行计算的天然量.

### 16.1.2 入射和出射辐射率

当光与场景中的表面相互作用时, 辐射率函数  $L$  在表面边界上通常不是连续的. 在最极端的情况下, 对于完全不透明的表面 (比如镜子), 表面上方和略微下方的辐射率函数可能完全无关.

因此, 在不连续性处采用单侧极限是有意义的, 以区分位于不连续点上方和下方的辐射率函数, 如下所示:

$$L^+(p, \omega) = \lim_{t \rightarrow 0^+} L(p + t\mathbf{n}_p, \omega),$$

$$L^-(p, \omega) = \lim_{t \rightarrow 0^-} L(p + t\mathbf{n}_p, \omega).$$

这里,  $\mathbf{n}_p$  是在点  $p$  处的表面法向. 然而, 总是使用单侧极限是不必要且繁琐的.

我们更喜欢通过区分到达该点的辐射率 (例如, 由光源照明导致的) 和离开该点的辐射率 (例如, 由表面反射导致的) 来解决这种模糊性.

考虑物体表面上的点  $p$ . 有一些到达该点的辐射率分布, 可以通过位置和方向的数学函数来描述用符号  $L_i(p, \omega)$  表示. 从该点表面反射出的辐亮度分布由函数  $L_o(p, \omega)$  表示

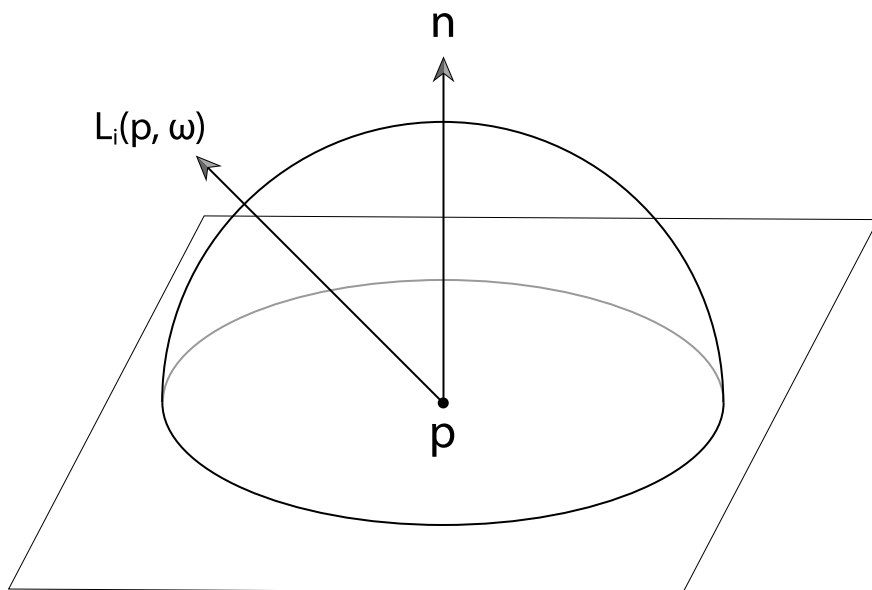


图 16.5: 某一点  $p$  的辐照度是该点上方整个上半球的辐射率乘以入射方向余弦的积分。图源: PBRT

(图16.4)。请注意,在这两种情况下,方向向量  $\omega$  均指向远离该点  $p$  的方向。但要注意,有些作者在一些符号中使用反向的表示法,使其指向该点。

我们将使用入射和出射辐射率函数的概念来解决辐亮度函数在边界上的模糊。

还要记住的另一个性质是,在空间中没有表面的点(即在自由空间中), $L$  是连续的,即  $L^+ = L^-$ , 因此

$$L_o(p, \omega) = L_i(p, -\omega) = L(p, \omega),$$

也就是说,  $L_o$  与  $L_i$  的区别在于相反的方向。

### 16.1.3 相关物理量的积分

渲染中最常见的任务之一是计算上述物理量的积分。我们将介绍一些可以使此任务变得更容易的技巧。为了说明怎样使用这些技术,我们将以计算某一点的辐照度为例。在表面上某点  $p$  具有法向  $\mathbf{n}$  由一组方向  $\Omega$  上的辐射率而导致辐照度为:

$$E(p, \mathbf{n}) = \int_{\Omega} L_i(p, \omega) |\cos \theta| d\omega, \quad (16.2)$$

其中  $L_i(p, \omega)$  是入射辐射率函数(图16.5),该积分中的  $\cos \theta$  源自辐射率定义中的  $dA^\perp$ 。  $\theta$  是  $\omega$  与表面法线  $\mathbf{n}$  之间的角度。辐照度通常是在给定表面法向  $\mathbf{n}$  的半球  $H^2(\mathbf{n})$  上计算的。

#### 关于投影立体角的积分

辐射量积分中的各种余弦项通常会分散积分中所表达的内容。使用投影立体角而不是立体角来测量被集成的物体所包围的区域可以避免这个问题。物体所对的投影立体角是通过将物体投影到单位球体上来确定的,就像对立体角所做的那样,然后将所得形状向下投影到垂直于表面法线的单位圆盘上,如图16.6所示。相对于余弦加权立体角的方向半球上的积分可以重写为投影立体角上的积分。

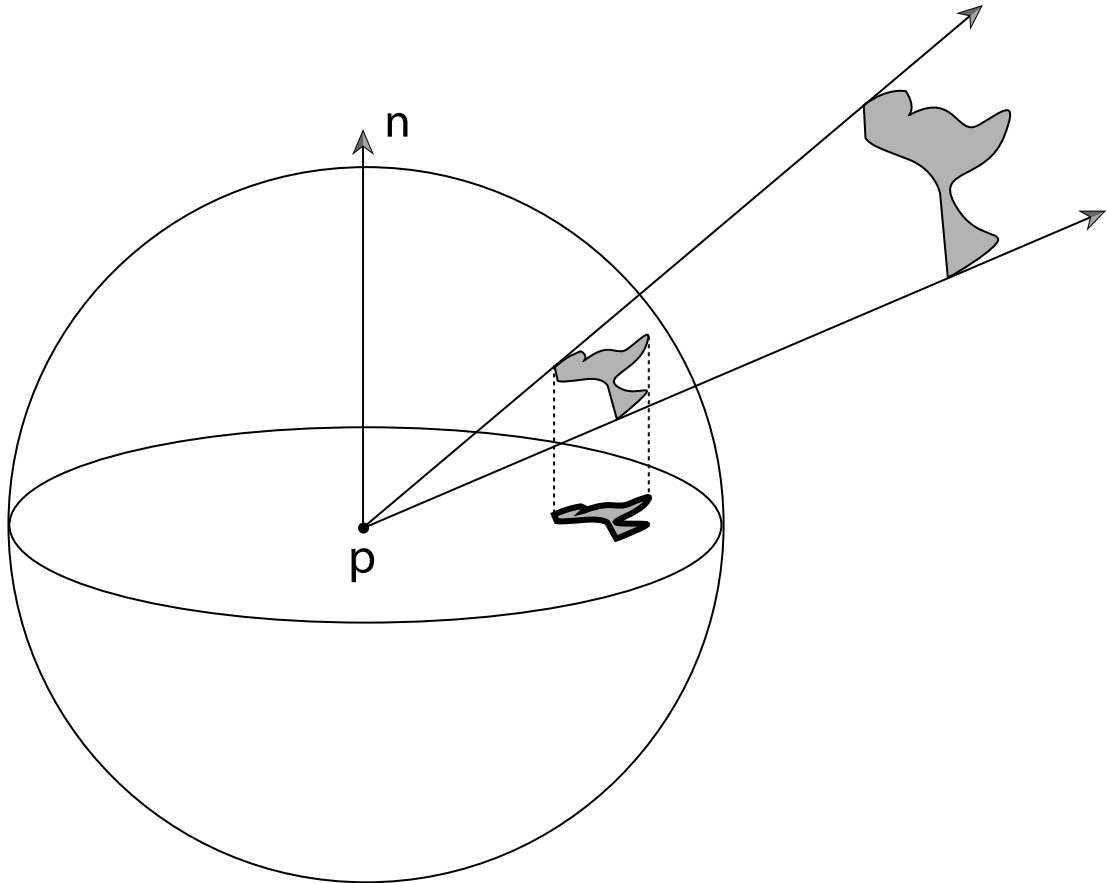


图 16.6: 物体所对的投影实心角是物体所对的余弦加权立体角。计算方法是找到物体的立体角，将其向下投影到垂直于表面法线的平面上，然后测量该平面的面积。因此，投影立体角取决于测量该角度的表面法线，因为法线为投影平面定向。图源：PBRT

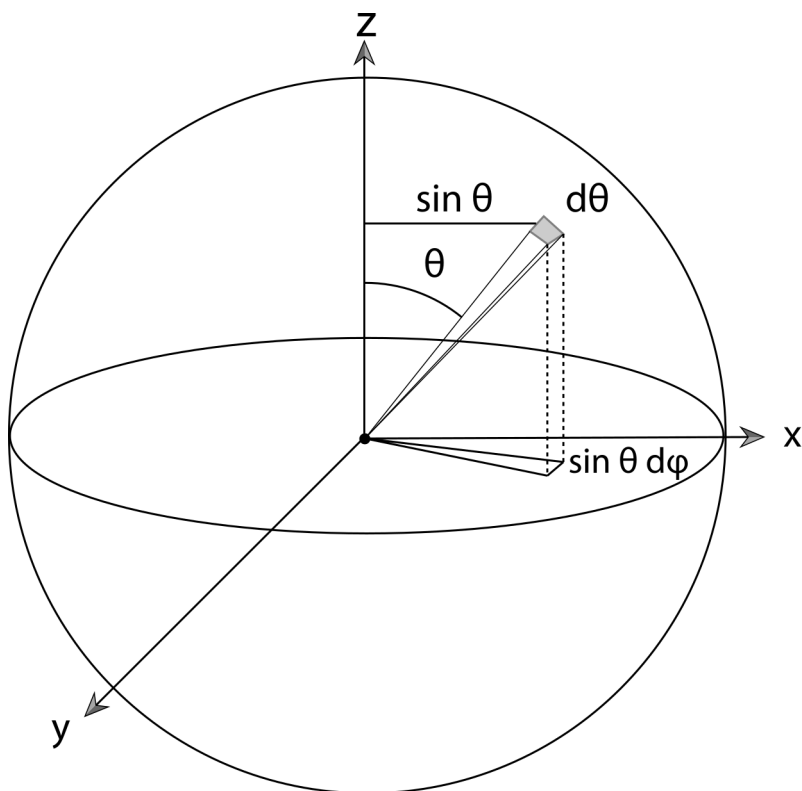


图 16.7: 图源: PBRT

投影立体角测量与立体角测量的关系为:

$$d\omega^\perp = |\cos \theta| d\omega,$$

因此半球上的辐照度积分可以更简单地写为:

$$E(p, \mathbf{n}) = \int_{H^2(\mathbf{n})} L_i(p, \omega) d\omega^\perp.$$

在本章的其余部分中, 我们将用立体角而不是投影立体角来编写方向上的积分. 在其他资料中可能会使用投影立体角, 了解被积函数的实际测量值始终很重要.

### 关于球坐标的积分

我们通常将对立体角的积分转换为对球坐标  $(\theta, \phi)$  的积分. 为了将立体角上的积分转换为  $(\theta, \phi)$  上的积分, 我们需要能够表达小面元上的一组方向  $d\omega$  与小面元上  $(\theta, \phi)$  对之间的关系, 如图16.7所示:

$$d\omega = \sin \theta d\theta d\phi.$$

因此我们可以看到半球上的辐照度积分可以等效地写为

$$E(p, \mathbf{n}) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} L_i(p, \theta, \phi) \cos \theta \sin \theta d\theta d\phi.$$

如果各个方向的辐射亮度相同, 则方程简化为  $E = \pi L_i$ .



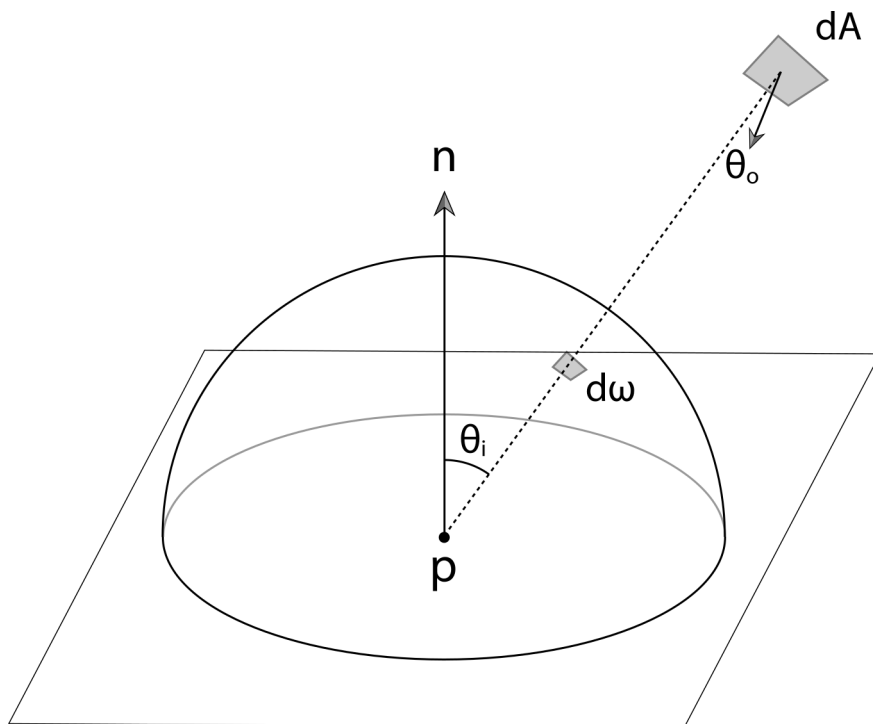


图 16.8: 要计算四边形光源对某点  $p$  的辐照度, 对光源表面积进行积分比对光源所指向的不规则方向进行积分要容易得多. 图源: PBRT

### 关于面积的积分

最后一种可以简化计算的积分变换是将方向积分转化为面积积分. 再次考虑公式16.2中的辐照度积分, 假设有一个四边形, 其外向辐照度恒定, 我们想计算某点的辐照度. 以方向积分的形式计算这个值并不简单, 因为给定一个特定的方向, 要确定四边形在该方向上是否可见并非易事. 以四边形面积的积分形式计算辐照度要简单得多.

差分面积与差分立体角 (从点  $p$  看) 有关:

$$d\omega = \frac{dA \cos \theta}{r^2},$$

其中  $\theta$  是面积微元  $dA$  的法线与到点  $p$  的向量的夹角,  $r$  是面积微元到  $p$  的距离.

因此我们可以把辐照度积分写成

$$E(p, \mathbf{n}) = \int_A L \cos \theta_i \frac{\cos \theta_o dA}{r^2},$$

$L$  是从表面到四边形发出的辐射率,  $\theta_i$  是点  $p$  的法线与  $p$  到  $dA$  上的点  $p'$  向量的夹角,  $\theta_o$  是  $p'$  的法线与  $p'p$  的夹角, 如图16.8所示.

## 16.2 反射模型

当光线入射到表面时, 表面会散射光线, 将部分光线反射回环境中. 建立这种反射模型需要描述两种主要效应: 反射光的光谱分布和方向分布. 例如, 柠檬的表皮主要吸收蓝色波长的光, 但反射大部分红色和绿色波长的光. 因此, 在白光照射下, 它的颜色是黄色的. 无论从哪个方向观察, 表皮的颜色都基本相同, 不过在某些方向上可以看到一个亮点——一个

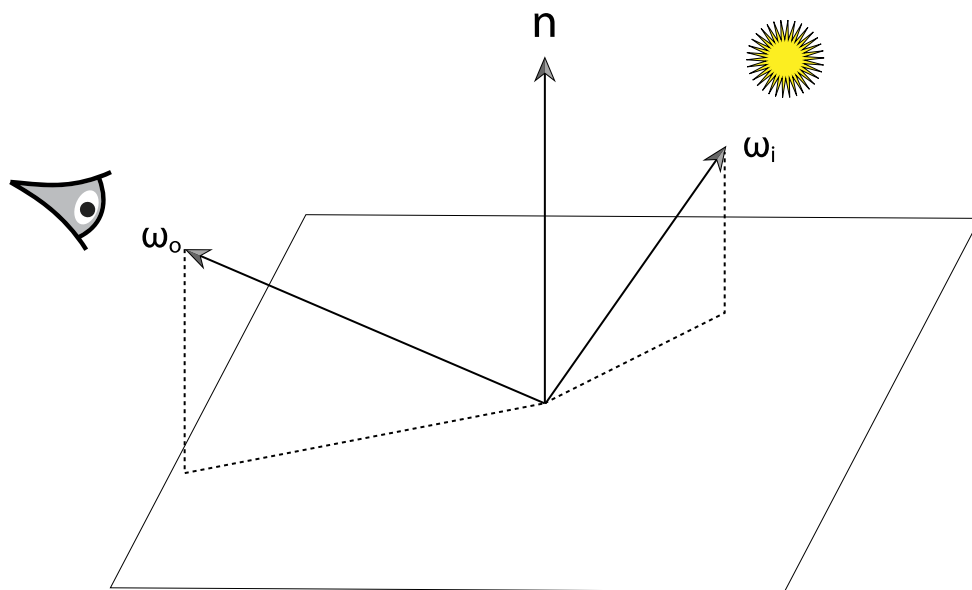


图 16.9: BRDF 是点  $p$  上关于入射方向  $\omega_i$  和出射方向  $\omega_o$  的函数。图源: PBRT

白多黄少的亮区。相比之下，从镜子中某一点反射出来的光线几乎完全取决于观察方向。在镜子上一个固定点上，随着观察角度的变化，镜子中反射的物体也会发生相应的变化。

半透明表面的反射则更为复杂：从皮肤和树叶到蜡和液体等各种材料都会表现出表面下的光传输现象，即从某一点进入表面的光线会从一定距离之外射出。（举例来说，用手电筒照嘴巴会让脸颊发亮，因为进入脸颊内部的光线会穿过皮肤，从脸部射出）。

描述这些光反射机制有两种方法：BRDF 和 BSSRDF，分别在第 16.2.1 和 16.2.2 节中介绍。BRDF 描述的是某一点的表面反射，忽略了次表层光传输的影响；对于光传输机制影响不大的材料，这种简化带来的误差很小，而且渲染算法的执行效率更高。BSSRDF 对 BRDF 进行了推广，描述了半透明材料的光反射这一更普遍的情况。

### 16.2.1 BRDF 与 BTDF

双向反射分布函数 (BRDF) 提供了一种描述表面反射的形式。考虑图 16.9 中的设置：我们想知道由沿着方向  $\omega_i$  入射的辐照度  $L_i(p, \omega_i)$  经过散射造成了多少沿出射方向  $\omega_o$  的辐照度  $L_o(p, \omega_o)$ 。

对入射方向取一小量， $p$  点辐照度的变化为

$$dE(p, \omega_i) = L_i(p, \omega_i) \cos \theta_i d\omega_i,$$

这个辐照度会带来沿  $\omega_o$  出射的辐照度。由于几何光学的线性假设，反射的差值辐射与辐照度成正比

$$dL_o(p, \omega_o) \propto dE(p, \omega_i),$$

其中的比例系数定义了表面上任意一对方向  $\omega_i$  和  $\omega_o$  的 BRDF  $f_r$ ：

$$f_r(p, \omega_o, \omega_i) = \frac{dL_o(p, \omega_o)}{dE(p, \omega_i)} = \frac{dL_o(p, \omega_o)}{L_i(p, \omega_i) \cos \theta_i d\omega_i}.$$

基于物理的 BRDF 有两个重要性质：

1. 对等性：对于所有方向对  $\omega_i$  和  $\omega_o$ ， $f_r(p, \omega_o, \omega_i) = f_r(p, \omega_i, \omega_o)$ 。

2. 能量守恒：反射光的总能量小于等于入射光的能量。对于所有方向  $\omega_o$ ,

$$\int_{H^2(\mathbf{n})} f_r(p, \omega_o, \omega') \cos \theta' d\omega' \leq 1,$$

应当注意 BRDF 的值不一定小于 1，只需要满足此积分式要求的归一化条件。

描述透射光分布的表面双向透射分布函数 (BTDF) 的定义方式与 BRDF 相似。双向透射分布函数一般用  $f_t(p, \omega_o, \omega_i)$  表示，其中  $\omega_i$  和  $\omega_o$  分别在点  $p$  两侧的半圆。值得注意的是，BTDF 并不服从上述定义的对等性。这是因为当光折射到折射率更高的介质时，只能被折射到更小范围的角度，反之亦然。这样的现象在生活中十分常见，比如在露天的泳池里向天空看，天的范围看起来会更小 (Snell's Window)。

考虑入射光到达了两种介质的边缘，直射率分别为  $\eta_i$  和  $\eta_o$ 。假设所有入射光都散射掉了，那么

$$d\Phi_o = d\Phi_i,$$

由辐射率的定义，方程 16.1，等价的有

$$L_o \cos \theta_o dA d\omega_o = L_i \cos \theta_i dA d\omega_i,$$

将立体角展开成球坐标，有

$$L_o \cos \theta_o dA \sin \theta_o d\theta_o d\phi_o = L_i \cos \theta_i dA \sin \theta_i d\theta_i d\phi_i. \quad (16.3)$$

根据我们熟知 Snell 定律，

$$\eta_i \sin \theta_i = \eta_o \sin \theta_o \text{ and } \phi_o = \phi_i + \pi,$$

对两边的  $\theta$  求导得到

$$\eta_o \cos \theta_o d\theta_o = \eta_i \cos \theta_i d\theta_i,$$

也即

$$\frac{\cos \theta_o d\theta_o}{\cos \theta_i d\theta_i} = \frac{\eta_i}{\eta_o},$$

将其带入式 16.3 并化简得到

$$L_o \eta_i^2 d\phi_o = L_i \eta_o^2 d\phi_i,$$

最后由于  $d\phi_o = d\phi_i$ ，我们得到入射和出射辐射率

$$L_o = L_i \frac{\eta_o^2}{\eta_i^2},$$

从而 BTDF 的对称性关系为

$$\eta_o^2 f_t(p, \omega_o, \omega_i) = \eta_i^2 f_r(p, \omega_i, \omega_o).$$

这种不对称性对于既从相机采样路径也从光源采样路径的双向光线传播算法是独特的问题，如果不考虑这样的不对称性这些算法会带来不正确的结果，因为这些算法基本上都是基于对称性原则的。

为方便起见，我们将 BRDF 和 BTDF 放在一起表示为  $f(p, \omega_o, \omega_i)$ 。我们称之为双向散射分布函数 (BSDF)。由 BSDF 的定义我们有：

$$dL_o(p, \omega_o) = f(p, \omega_o, \omega_i) L_i(p, \omega_i) |\cos \theta_i| d\omega_i,$$

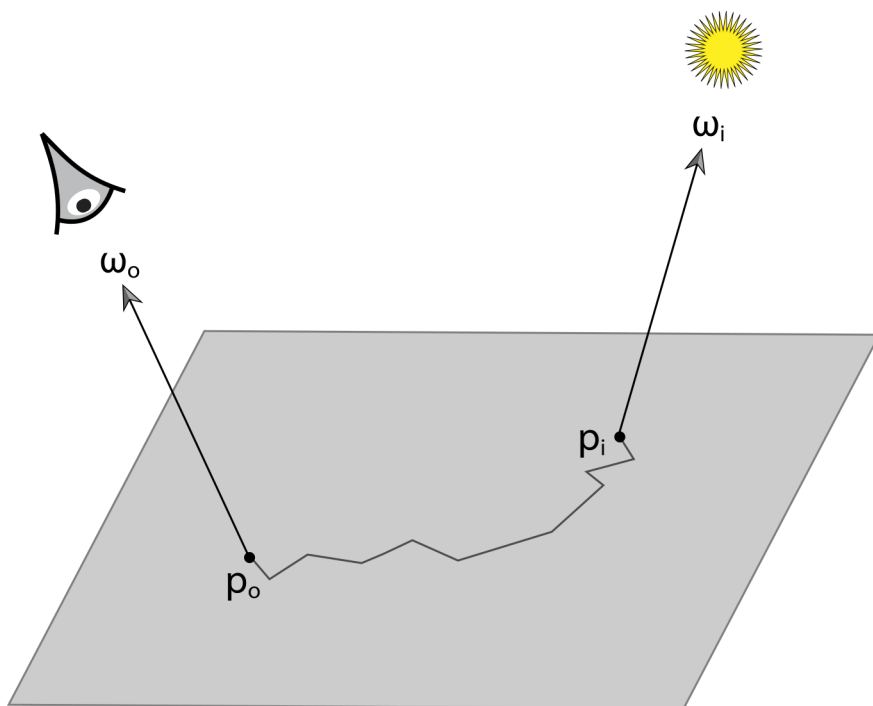


图 16.10: 双向散射表面反射率分布函数对 BSDF 进行了概括, 以考虑从表面进入点以外的其他点流出的光线。双向散射表面反射率分布函数通常比双向散射表面反射率分布函数更难评估, 尽管表面下的光传输对许多真实世界物体的外观有很大影响。图源: PBRT

在这里, 我们给  $\cos \theta_i$  加上了一个绝对值。这样做的原因是我们没有假定表面的法线与  $\omega_i$  在同一侧 (许多其他渲染系统都是这样做的)。

我们可以对点  $p$  入射方向球面上对方程进行积分, 从而计算出从在点  $p$  沿  $\omega_o$  出射的辐射率:

$$L_o(p, \omega_o) = \int_{S^2} f(p, \omega_o, \omega_i) L_i(p, \omega_i) |\cos \theta_i| d\omega_i. \quad (16.4)$$

这是渲染中的一个基本方程; 它描述了如何根据表面的散射特性, 将某一点的入射光分布转化为出射光分布。当以球面为域时, 它通常被称为散射方程 (此处即为散射方程); 当只对上半球进行积分时, 它通常被称为反射方程。第16.4节和第16.5节的主要任务之一就是场景中表面上的点计算上述积分。

### 16.2.2 BSSRDF

双向散射表面反射率分布函数 (BSSRDF) 是一种描述材料散射的形式, 这种材料表现出大量的次表面光传输。它是一个分布函数  $S(p_o, \omega_o, p_i, \omega_i)$ , 描述了在点  $p_o$  方向  $\omega_o$  的出射微分辐射与从点  $p_i$  方向  $\omega_i$  的入射微分通量之比, 如图16.10所示:

$$S(p_o, \omega_o, p_i, \omega_i) = \frac{dL_o(p_o, \omega_o)}{d\Phi(p_i, \omega_i)},$$

使用 BSSRDF 推广的散射方程需要对表面积和入射方向进行积分, 从而将二维散射方程16.4转化为四维积分:

$$L_o(p, \omega_o) = \int_A \int_{H^2(\mathbf{n})} S(p, \omega_o, \omega_i) L_i(p, \omega_i) |\cos \theta_i| d\omega_i dA.$$

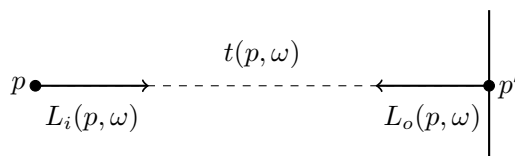


图 16.11: 射线穿过自由空间时的辐射度是不变的. 因此, 要计算从方向为  $\omega$  的点  $p$  出发的射线的入射辐射率, 我们可以找到射线相交的第一个表面, 然后计算该点  $-\omega$  方向的出射辐射率.

由于多了两个维度的积分, 在渲染算法中使用时要复杂得多. 不过随着点  $p_i$  与点  $p_o$  之间距离的增加,  $S$  的值一般会减小. 这对实现次表层散射算法有很大帮助.

表层下的光传输原理与参与介质中的体积光传输原理相同, 本书中我们不会介绍体渲染. 因此, 表层下散射与云和烟中的光散射基于相同的效应, 只是尺度更小而已.

## 16.3 光线传播方程

光传输方程 (LTE) 是描述场景中辐射平衡分布的指导方程. 它给出了表面上某一点的总反射辐射度, 即表面的发射、其 BSDF 以及到达该点的入射光分布. 我们将继续只考虑场景中没有参与介质的情况.

使计算 LTE 变得困难的点在于, 一个点的入射辐射度会受到场景中所有物体的几何形状和散射特性的影响. 例如, 照射在红色物体上的强光可能会使场景中附近的物体染成红色, 或者玻璃可能会将光线聚焦在桌面上形成焦散性图案. 考虑到这种复杂性的渲染算法通常被称为全局光照算法, 以区别于在阴影计算中仅使用局部表面属性信息的局部照明算法.

### 16.3.1 基本推导

光传输方程基于我们在选择使用辐射测量来描述光时所做的基本假设——波光学效应并不重要、场景中的辐射分布处于平衡状态.

LTE 的基本原则是能量平衡. 任何能量变化都必须通过某个过程转化, 我们必须跟踪所有的能量. 既然我们假定照明是一个线性过程, 那么系统中输出的能量和输入的能量之间的差值也必须等于发射的能量和吸收的能量之间的差值. 这一观点在很多层面上都适用.

为了保证表面上能量平衡, 出射辐射率  $L_o$  必须等于散发的辐射率加上入射辐射率的散射. 将散发的辐射率记为  $L_e$ , 散射辐射率由散射方程计算得到, 我们有

$$L_o(p, \omega_o) = L_e(p, \omega_o) + \int_{S^2} f(p, \omega_o, \omega_i) L_i(p, \omega_i) |\cos \theta_i| d\omega_i.$$

由于我们暂时假定不存在参与介质, 因此穿过场景的光线的辐射度是恒定的. 因此, 如图16.11所示, 我们可以将入射点  $p$  的辐射度与另一点  $p'$  的出射辐射度联系起来. 如果我们将光线投射函数定义为一个函数  $t(p, \omega)$  用于计算光线从点  $p$  沿  $\omega$  方向与表面的第一个交点  $p'$ , 我们就可以将点  $p$  的入射辐射度用点  $p'$  的出射辐射度表示:

$$L_i(p, \omega) = L_o(t(p, \omega), -\omega).$$

如果场景不是封闭的, 我们定义如果光线  $(p, \omega)$  没有与场景中的任何物体相交, 则光线投射函数返回一个特殊值  $\Lambda$ , 且  $L_o(\Lambda, \omega)$  始终为 0.

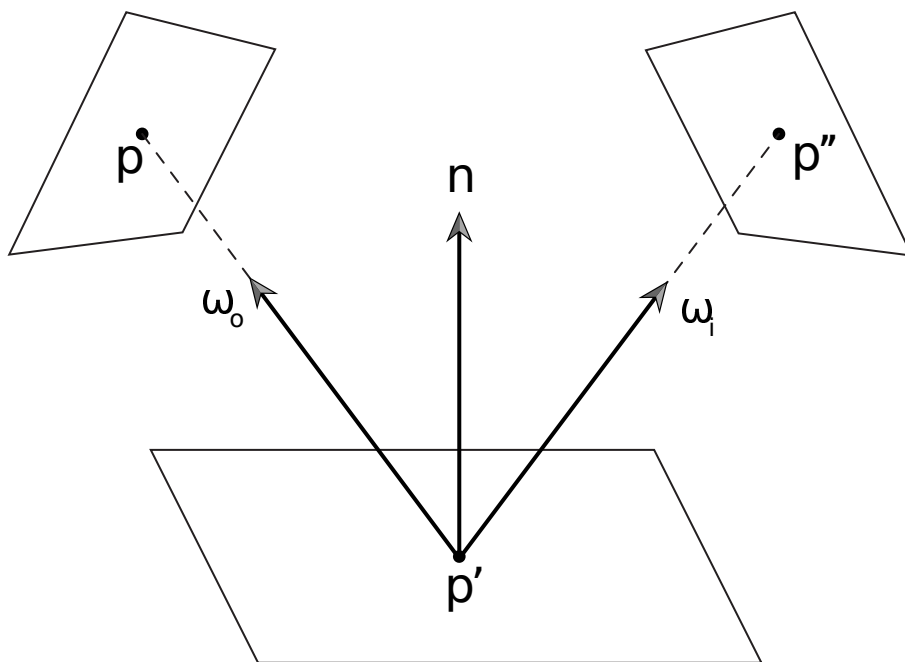


图 16.12: 光传输方程的三点形式将积分转换为场景中表面上的点域, 而不是球面上的方向. 这是推导光传输方程路径积分形式的关键变换. 图源: PBRT

为简洁起见, 忽略  $L_o$  的下标, 我们可以把 LTE 写成:

$$L(p, \omega_o) = L_e(p, \omega_o) + \int_{S^2} f(p, \omega_o, \omega_i) L(t(p, \omega_i), -\omega_i) |\cos \theta_i| d\omega_i. \quad (16.5)$$

上述表示法的关键在于只有一个相关量, 即来自表面各点的出射辐射率. 当然, 它出现在等式的两边, 所以我们的任务仍然不简单, 但肯定要好一些. 重要的是要记住我们只需场景中能量平衡, 就能得出这个等式.

### 16.3.2 LTE 的面积分形式

方程16.5比较复杂的原因之一是场景中几何物体之间的关系隐含在光线跟踪函数  $t(p, \omega)$  中. 在积分中明确这一函数的行为将有助于了解方程的结构. 为此, 我们将把方程重写为 16.5 面积积分, 而不是球面上的方向积分.

我们首先定义从点  $p'$  到点  $p$  的出射辐射率为

$$L(p' \rightarrow p) = L(p', \omega),$$

其中  $\omega$  是点  $p'$  指向点  $p$  的单位向量. 我们还可以将  $p'$  处的 BSDF 写成

$$f(p'' \rightarrow p' \rightarrow p) = f(p', \omega_o, \omega_i),$$

其中  $\omega_i$  是点  $p'$  指向点  $p''$  的单位向量,  $\omega_o$  是点  $p'$  指向点  $p$  的单位向量 (如图16.12).

然而, 以这种方式重写 LTE 中的项还远远不够. 我们还需要乘以将实体角度与面积相关的雅各布因子, 以便将 LTE 从方向积分转换为表面积分. 这个雅各比系数为  $|\cos \theta'|/r^2$ .

我们将把这个变量变化项、LTE 中的原始项  $|\cos \theta|$  和一个二元可见度函数  $V(V = 1$  如果两点相互可见, 否则  $V = 0)$  合并为一个单一的耦合项:

$$G(p \leftrightarrow p') = V(p \leftrightarrow p') \frac{|\cos \theta| |\cos \theta'|}{\|p - p'\|^2}.$$

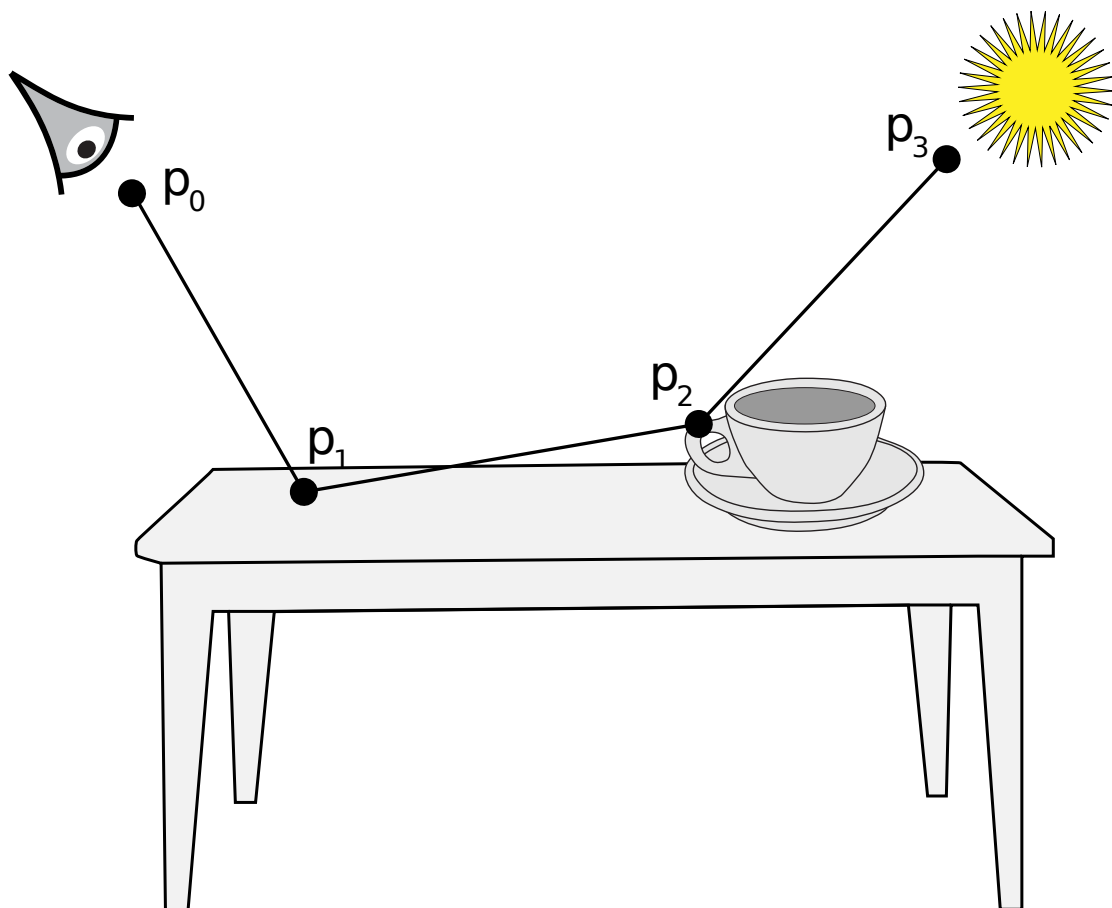


图 16.13: 一条光线路径, 这条路径中光线从  $p_3$  出发, 经过两次反射, 来到相机上的点  $p_0$ .  
图源: PBRT

将这些内容代入光传输方程并转换为面积积分, 我们可以得到:

$$L(p' \rightarrow p) = L_e(p' \rightarrow p) + \int_A f(p'' \rightarrow p' \rightarrow p) L(p'' \leftrightarrow p') G(p'' \leftrightarrow p') dA(p''), \quad (16.6)$$

其中  $A$  是场景中所有表面.

虽然公式16.5和16.6是等价的, 但它们代表了两种不同的光传输方法. 要使用蒙特卡洛计算公式16.5, 我们需要从球面上的方向分布中抽取若干方向, 然后投射光线来计算积分. 而对于公式16.6, 我们将根据表面积分布选择表面上的若干点, 计算这些点之间的耦合以求得积分, 并追踪光线以求得可见项  $V(p \leftrightarrow p')$ .

### 16.3.3 路径上的积分

有了公式16.6的面积积分形式, 我们就可以推导出 LTE 的一种更灵活的形式, 即光传输的路径积分形式, 它将辐射度表示为对路径的积分, 而路径本身就是高维路径空间中的点. 使用路径空间的主要原因之一是, 它能将测量值表达为路径上的显式积分, 而不是能量平衡方程16.5所产生的笨重的递归定义.

这种显式形式为如何找到这些路径提供了相当大的自由度——实际上, 任何随机选择路径的技术都可以转化为可行的渲染算法, 只要有足够多的样本, 就能计算出正确的答案. 这种形式的 LTE 为双向光传输算法奠定了基础.

从面积积分到涉及不同长度载光路径的路径积分之和，我们现在可以开始展开三点光传输方程，反复将方程的右侧代入积分内的  $L(p'' \leftrightarrow p')$  项中。下面替换的前几项，它们给出了从另一点  $p_1$  出发的某一点  $p_0$  的入射辐射率，其中  $p_1$  是从  $p_0$  出发沿  $p_1 - p_0$  方向的表面上的第一个交点：

$$\begin{aligned} L(p_1 \rightarrow p_0) = & L_e(p_1 \rightarrow p_0) \\ & + \int_A L_e(p_2 \rightarrow p_1) f(p_2 \rightarrow p_1 \rightarrow p_0) G(p_2 \leftrightarrow p_1) dA(p_2) \\ & + \int_A \int_A L_e(p_3 \rightarrow p_2) f(p_3 \rightarrow p_2 \rightarrow p_1) G(p_3 \leftrightarrow p_2) \\ & \times f(p_2 \rightarrow p_1 \rightarrow p_0) G(p_2 \leftrightarrow p_1) dA(p_3) dA(p_2) + \dots \end{aligned}$$

等式右边的每个项都代表一条长度递增的路径。例如，图16.13所示。这条路径有四个顶点，由三条线段连接。所有长度为四的路径（即一个位于摄像机的顶点、两个位于场景表面点的顶点和一个位于光源的顶点）的总贡献都由该项给出。路径的前两个顶点  $p_0$  和  $p_1$ ，是根据摄像机光线的原点和摄像机光线的交点预先确定的，但  $p_2$  和  $p_3$  可以在场景表面的所有点上变化。对所有这样的  $p_2$  和  $p_3$  进行积分，就得到了长度为 4 的路径对到达摄像机的辐射度的总贡献。

这个无穷求和可以更简洁的写成

$$L(p_1 \rightarrow p_0) = \sum_{n=1}^{\infty} P(\bar{p}_n), \quad (16.7)$$

$P(\bar{p}_n)$  是对  $n+1$  个顶点的路径  $\bar{p}_n = p_0, p_1, \dots, p_n$  所贡献的辐射率， $p_0$  在相机平面内， $p_n$  在光源上。

$$\begin{aligned} P(\bar{p}_n) = & \underbrace{\int_A \int_A \dots \int_A}_{n-1} L_e(p_n \rightarrow p_{n-1}) \\ & \times \left( \prod_{i=1}^{n-1} f(p_{i+1} \rightarrow p_i \rightarrow p_{i-1}) G(p_{i+1} \leftrightarrow p_i) \right) dA(p_2) \dots dA(p_n). \end{aligned}$$

给定方程16.7和特定的长度  $n$ ，我们要计算的是长度路径到达的辐射率的蒙特卡洛估计，只需在场景中以适当的采样密度  $\bar{p}_n \sim p$  对一组顶点进行采样，生成一条路径，然后使用这些顶点的估计  $P(\bar{p}_n)$ 。

$$L(p_1 \rightarrow p_0) \approx \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P(\bar{p}_n)}{p(\bar{p}_n)}.$$

至于我们是以摄像机为起点、以光线为起点、以两端为起点，还是以中间某一点为起点来生成这些顶点，这些细节只会影响蒙特卡罗估计的权重  $p(\bar{p}_n)$  计算方式。在接下来，我们将看到这种表述如何推导出实用的光线传输算法。

## 16.4 路径追踪

既然我们已经推导出了光传输方程的路径积分形式，那么我们将展示如何利用它来推导路径追踪光传输算法，并介绍一种路径追踪积分器。一般来说，要获得高质量的结果，每个像素可能需要数百或数千个采样——这可能需要大量的计算开销。

路径追踪是第一种用于图形学的通用无偏蒙特卡洛光传输算法。Kajiya(1986) 在首次描述光传输方程的同一篇文章中介绍了这一算法。路径追踪以增量方式生成散射事件的路



径，从摄像机开始，到场景中的光源结束。可以把它看作是 Whitted 方法的一种扩展，将 delta 分布和非 delta BSDF 以及光源都包括在内，而不是只考虑 delta 项。

虽然直接从基本光传输方程推导路径追踪略微容易一些，但我们将从路径积分形式着手，这有助于加深对路径积分形式的光线传播方程的理解，并使双向路径追踪更容易理解。

### 16.4.1 简介

考虑到 LTE 的路径积分形式 (式16.7)，我们希望估算摄影机光线与表面第一个交点  $p_1$  的出射辐射率。为了计算这个估计值，我们必须解决两个问题：

1.  $P(\bar{p}_i)$  有无穷多项，我们怎么在有限步计算？
2. 给定一个  $P(\bar{p}_i)$ ，它的下一项用于蒙特卡洛估计的采样方向应该如何选取？

对于路径追踪，我们可以利用以下事实：对于物理上有效的场景，顶点较多的路径比顶点较少的路径散射的光线要少 (这并不一定适用于任何特定的路径对，只是总体而言)。这是 BSDF 能量守恒的自然结果。因此，我们将始终估计前几项  $P(\bar{p}_i)$ ，然后应用俄罗斯轮盘赌，在有限的项数后停止采样。例如，如果我们总是计算  $P(\bar{p}_1)$ 、 $P(\bar{p}_2)$  和  $P(\bar{p}_3)$ ，但以概率  $q$  的方式停止计算更多的项，那么总和的无偏估计值将是

$$P(\bar{p}_1) + P(\bar{p}_2) + P(\bar{p}_3) + \frac{1}{1-q} \sum_{i=4}^{\infty} P(\bar{p}_i).$$

以这种方式使用俄罗斯轮盘赌并不能解决需要计算无穷和的问题，我们仍以  $1-q$  的概率计算无穷求和，我们需要设每一项有终止概率  $q_i$ ：

$$\frac{1}{1-q_1}(P(\bar{p}_1) + \frac{1}{1-q_2}(P(\bar{p}_2) + \dots$$

我们最终会停止继续求和。然而，由于对于任何特定的  $i$ ，对  $P(\bar{p}_i)$  进行求值的概率都大于零，而且如果我们对其进行求值，也会对其进行适当的加权，因此最终结果是对总和的无偏估计。

### 16.4.2 路径采样

鉴于这种方法只能评估无限和中的有限项，我们还需要一种方法来估算  $P(\bar{p}_i)$ 。我们需要  $i+1$  个顶点来指定路径，其中最后一个顶点  $p_i$  位于光源上，第一个顶点  $p_0$  位于相机胶片或镜头上的一个点。从对场景中物体的表面积进行多元积分的形式来看，最自然的做法是根据场景中物体的表面积对顶点  $p_i$  进行采样，这样对场景中物体上的任何特定点进行采样的概率与对其他点进行采样的概率相同。

我们可以对场景中的  $n$  个物体定义一个离散概率。如果每个物体都有表面积  $A_i$ ，那么对第  $i$  个物体表面的路径顶点进行采样的概率应该是

$$p_i = \frac{A_i}{\sum_j A_j}.$$

那么，给定一种以均匀分布对第  $i$  个物体上的点进行采样。抽样点的总体概率密度为

$$p_A(p_i) = \frac{1}{\sum_j A_j}.$$

令人欣慰的是，它们都具有相同的权重，因为我们的目的是以相同的概率从场景中所有表面上的点中进行选择。

给定一组顶点以这种方式采样，然后我们可以采样场景中光源上的最后一个顶点，以相同的方式定义概率密度函数。虽然我们可以使用采样路径顶点的相同技术对灯光上的点进行采样，但这将导致高方差，因为对于不在光源照射范围的所有路径，计算值都为零。期望值仍然是积分的正确值，但收敛速度非常慢。更好的方法是只对发光物体的区域进行采样，并相应地更新概率。

对于如何用这种通用方法设置采样概率，我们可以想出各种方法，例如如果我们知道来自少数对象的间接照明对场景中的大部分照明都有贡献，那么我们可以为在这些对象上生成路径顶点分配更高的概率，并适当更新采样权重。然而，这种方式的采样路径有两个相互关联的问题。第一种可能导致高方差，而第二种可能导致不正确的结果。

第一个问题是，如果路径中有一对相互不可见的相邻顶点，那么许多路径将没有贡献。考虑在复杂的建筑模型中应用此面积采样方法：如果路径中的相邻顶点之间有一堵或两堵墙，则这对路径就会没有贡献，并且估计方差会很大。

第二个问题是，如果被积函数中有 delta 函数（例如点光源或完全镜面反射 BSDF），这种采样技术将永远无法选择路径顶点，即使没有 delta 分布，随着 BSDF 变得越来越光滑，几乎所有的路径都将具有较低的贡献，因为光滑物体的 BSDF 在大多方向具有较小或零的值，估计方差会很大。同理，如果没有明确采样方案，小面积光源也会是方差来源。

### 16.4.3 增量构建路径

增量构建路径可以解决上面的两个问题。从相机所在的顶点  $p_0$  开始，在每个顶点处，通过采样 BSDF 产生新的方向，新的顶点  $p_{i+1}$  由  $p_i$  沿该方向与物体第一次相交计算得到。我们尝试寻找一条总体贡献更大的路径，通过作出一系列选择，找到具有重要局部贡献的方向。虽然可以想象这种方法可能无效的情况（比如反弹了很多次之后都没有打到光源），但它通常是一种很好的策略。

由于该方法根据立体角采样 BSDF 来构造路径，并且由于路径积分 LTE 是场景中表面积上的积分，因此需要进行转换——将表面积相关的概率分布  $p_A$  转换到立体角相关的概率分布  $p_\omega$ ：

$$p_A(p_i) = p_\omega(\omega_{i-1}) \frac{|\cos \theta_i|}{\|p_{i-1} - p_i\|^2}.$$

这种修正使得除了  $\cos \theta_{i+1}$  项外，几何项  $G(p_i \leftrightarrow p_{i+1})$  的所有项从  $P(\bar{p}_i)$  中抵消。此外，我们已经知道  $p_i$  和  $p_{i+1}$  是相互可见的，因为我们是跟踪光线来找到  $p_{i+1}$  的，所以可见性项等于 1。另一种理解方式是光线跟踪提供了一种对  $G$  的可见性分量进行重要性采样。

在路径追踪中，光源上的最后一个顶点需要特殊处理。它是通过对光源表面的分布函数进行采样，而非通过增量构造得到。我们假设对于发光点的采样概率分布为  $p_e$ 。综上对于一条路径使用蒙特卡洛估计为：

$$P(\bar{p}_i) \approx \frac{L_e(p_i \rightarrow p_{i-1}) f(p_i \rightarrow p_{i-1} \rightarrow p_{i-2}) G(p_i \leftrightarrow p_{i-1})}{p_e(p_i)} \times \left( \prod_{j=1}^{i-2} \frac{f(p_{j+1} \rightarrow p_j \rightarrow p_{j-1}) |\cos \theta_j|}{p_\omega(p_{j+1} - p_j)} \right).$$

由于这样的采样方式，对长为  $i$  的路径，会重复使用前  $i$  个点构成的路径（除了在光源上的顶点），这对  $P(\bar{p}_i)$  引入了修正项。这样的修正项不影响蒙特卡洛估计的无偏性，实际上它更像是为了提高效率，减少追踪光线的数量而引入的。

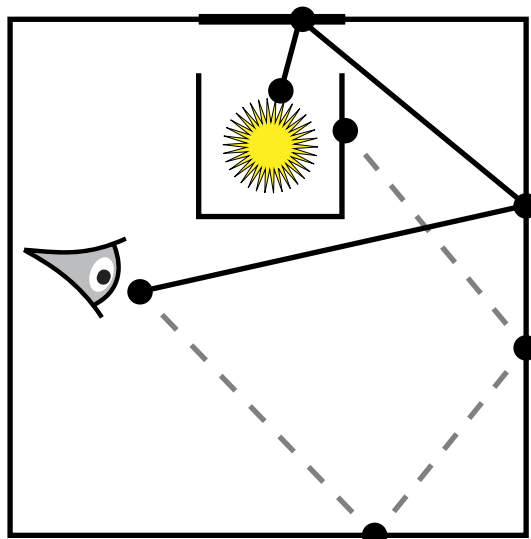


图 16.14: 从摄像机开始的路径追踪困难案例。光源照亮了天花板上的一小块区域 (粗线), 因此只有顶点倒数第二个位于指示区域内的路径才能从光源中找到照明。BDPT 从光源出发, 并与来自摄像机的路径相连, 可以更稳健地处理类似情况。图源: PBRT

## 16.5 双向路径追踪

路径追踪算法是计算机图形学中第一种完全通用的光线传输算法, 可以处理各种几何表示、光线和 BSDF 模型。虽然该算法在很多场景下都能很好地工作, 但在特定的棘手光照条件下, 路径追踪会表现出很大的差异。例如, 考虑图16.14中的设置: 一个光源照亮了天花板上的一小块区域, 房间的其他部分只能通过从该区域反射的间接照明来照亮。如果我们只追踪从摄像机开始的路径, 那么在追踪到光源的阴影光线之前, 我们几乎永远不会在天花板上的照明区域对路径顶点进行采样。大多数路径都不会有任何贡献, 而少数路径——恰好击中天花板上的小区域的路径——会有很大的贡献。这样得到的图像将具有很高的方差。

要更有效地处理类似的困难照明设置, 可以构建这样的路径: 一端从摄像机出发, 另一端从灯光出发, 中间用可见光射线连接。由此产生的双向路径追踪算法 (以下简称 BDPT) 是对标准路径追踪算法的概括, 它的效率要高得多。与随机渐进光子映射相比, 双向路径追踪算法是无偏的, 不会模糊场景光照。

BDPT 首先从摄像机上的一个点  $p_0$  开始, 增量构建像机路径。通过计算沿摄像机光线的第一个交点  $p_1$ , 对  $p_1$  处的 BSDF 采样找到下一个顶点  $p_2$ , 以此类推, 最终得到  $t$  个顶点的路径  $p_0, p_1, \dots, p_{t-1}$ 。按照同样的方法, 从光源上的一个点  $q_0$  开始 (然后在每个顶点使用邻接的 BSDF), 就可以得到  $s$  个顶点的光源路径  $q_0, q_1, \dots, q_{s-1}$ 。

给定两条子路径, 将每条路径上的一对顶点连接起来, 就能找到一条完整的载光路径。 $\bar{p} = q_0, q_1, \dots, q_{s'-1}, p_{t'-1}, \dots, p_0$  其中  $s' \leq s, t' \leq t$ 。如果  $q_{s'-1}$  和  $p_{t'-1}$  之间光线没有被遮挡, 则可以通过计算连接顶点的 BSDF 来找到路径贡献。一般来说, 这些子路径可以通过路径积分形式的 LTE 来合并。

到目前为止, 我们已经对算法进行了三次改进, 从而提高了算法的实际性能。前两项类似于对路径追踪的改进, 而第三项则是一项强大的降低方差技术。

首先, 子路径可以重复使用: 给定一条路径  $q_0, q_1, \dots, q_{s'-1}, p_{t'-1}, \dots, p_0$ , 通过将两条路径的所有不同前缀组合连接在一起, 可以对给定的所有路径进行运算。如果两条路径分

别有  $s$  和  $t$  个顶点，那么就可以用它们构建出各种独特的路径，长度从 2 到  $s + t$  不等。

第二项优化是不要尝试连接只使用其中一个子路径中的一个顶点的路径。最好使用摄像机和光源提供的优化采样例程来生成这些路径；对于光源来说，这就是直接照明技术。

第三种优化方法对生成给定长度路径的各种策略进行了加权，这比对构建相同长度路径的所有策略求平均值更为谨慎。BDPT 连接子路径的方法意味着包含散射事件的路径可以以不同方式生成。我们可以预料，某些策略对于生成某些类型的路径是个不错的选择，而对于其他类型的路径则相当糟糕。多重重要性采样可用于将连接策略组合成一个单一的估计器，在每个策略最合适的地方使用它。多重重要性采样的应用对 BDPT 的效率至关重要。