

人工智能中的数学讲义

方聪

北京大学

摘要

本讲义收录了人工智能中的数学课程中的主要概念与课程习题。概率与统计讲义内容摘录于陈家鼎、郑忠国《概率与统计》教材与复熹和张原概率与统计课程课件。图论内容摘录于耿素云、屈婉玲、王捍贫《离散数学教程》。本讲义版权归上述作者，不会出版。讲义仅供于上该课程的同学学习参考，讲义的错误会不断修正。感谢张乙沐、张海涵对讲义整理的帮助。

1.1 随机事件及其运算

1.1.1 随机事件

样本空间和样本点：随机实验 E 中所有可能结果组成的集合称为 E 的**样本空间**，记为 Ω 。样本空间中的元素称为**样本点**，记为 ω

- E_1 ：抛掷硬币，观察正面 H ，反面 T 出现的情况。

$$\Omega_1 = \{H, T\}.$$

- E_2 ：抛掷一枚硬币 3 次，观察正面 H ，反面 T 出现的情况。

$$\Omega_2 = \{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT\}.$$

- E_3 ：抛掷一枚硬币 3 次，观察正面出现的次数。

$$\Omega_3 = \{0, 1, 2, 3\}.$$

随机现象的某些样本点组成的集合称为**随机事件**，简称为事件，常用 A, B, C, \dots 表示

例如， E 为抛掷一枚骰子，事件 $A = \text{“出现奇数点”}$ ，即 $A = \{1, 3, 5\}$ ，是样本空间 $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 的一个子集

事件的频率：设 μ 是 n 次实验中事件 A 发生的次数，则事件 A 发生的频率 $\frac{\mu}{n}$ ，随着实验次数 n 增大，频率会在某一数值 p 附近摆动，称为该事件的**概率**，记为 $P(A) = p$

由于频率 $\frac{\mu}{n}$ 总在 $0, 1$ 之间，我们有：

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

例如投一枚硬币 n 次，出现 μ 次正面，则 $\frac{\mu}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} p$ 。其中，主观概率 p 为事件的置信度，概率是可能性大小的度量。大概率事情易发生，小概率事情不易发生。

1.1.1.1 事件的交和并

定义 2.1 设有事件 A 和事件 B ，如果 A 发生，则 B 必发生，那么称事件 B 包含事件 A （或称事件 A 在 B 中），并记为

$$A \subset B \text{ (或 } B \supset A)$$

定义 2.2 如果事件 A 包含事件 B ，同时事件 B 包含事件 A ，则事件 A 和事件 B 相等，并记为

$$A = B$$

定义 2.3 设 A 和 B 都是事件，则“ A 或 B ”表示这样的事件 C ： C 发生当且仅当 A 或 B 中至少有一个发生，该事件 C 叫做 A 与 B 的并，记为 $A \cup B$ 。

例 2.1（对应郑书例 2.1）在桌面上，投掷两枚匀称的硬币， A 表示“恰好一枚国旗朝上”， B 表示“两枚国旗朝上”， C 表示“至少一枚国旗朝上”，则 $C = A \cup B$ 。

对于并运算，有以下性质，我们恒记必然事件为 U ，不可能事件为 V ：

$$\begin{aligned} A \cup B &= B \cup A \\ A \cup U &= U, \quad A \cup V = V \end{aligned}$$

定义 2.4 设 A 和 B 都是事件，则“ A 且 B ”表示这样的事件 C ： C 发生当且仅当 A 和 B 都发生，该事件 C 叫做 A 与 B 的交，记为 $A \cap B$ ，也简记为 AB 。

在例 2.1 中， $A \cap C = A$ ， $B \cap C = C$ ， $A \cap B = A$

对于交运算，有以下性质：

$$\begin{aligned} A \cap B &= B \cap A \\ A \cap U &= A, \quad A \cap V = V \end{aligned}$$

1.1.1.2 事件的余和差

定义 2.5 设 A 是事件，称“非 A ”是 A 的对立事件（或称余是事件），其含义为，“非 A ”发生当且仅当 A 不发生，常常用 \bar{A} 表示“非 A ”，也用 A^c 表示“非 A ”。

由定义知 $\overline{\bar{A}} = A$ ， $\bar{U} = V$ ， $\bar{V} = U$

定义 2.6 设 A 和 B 都是事件，则两个事件的差“ A 减去 B ”表示这样的事件 C ： C 发生当且仅当 A 发生而 B 不发生，该事件 C 记为 $A - B$ （或 $A \setminus B$ ）

由定义知， $A - B = A \cap \bar{B}$

画图法确定关系。

1.1.1.3 事件运算的性质

事件的基本运算还有以下性质：

- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ “并”的结合律
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ “交”的结合律
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ 分配律
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ 分配律
- $A \cup A = A, A \cap A = A$
- $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ 对偶律
- $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ 对偶律

多个事件的交和并：

设 A_1, A_2, \dots, A_n 是 n 个事件，则“ A_1, A_2, \dots, A_n ”的并是指这样的事件：它发生当且仅当 A_1, A_2, \dots, A_n 中至少一个发生，常常用 $\bigcup_{i=1}^n A_i$ 表示 A_1, A_2, \dots, A_n 的并
 设 A_1, A_2, \dots, A_n 是 n 个事件，则“ A_1, A_2, \dots, A_n ”的交是指这样的事件：它发生当且仅当 A_1, A_2, \dots, A_n 这 n 个事件都发生，常常用 $\bigcap_{i=1}^n A_i$ 表示 A_1, A_2, \dots, A_n 的交，也用 $A_1 A_2 \dots A_n$ 表示这个“交”

实际应用中，还需定义无穷多事件的并与交

设 $A_1, A_2, \dots, A_i, \dots$ 是一列事件，则 B 是指这样的事件： B 发生当且仅当这些 $A_i (i = 1, 2, \dots)$ 中至少一个发生，这个 B 叫做诸 A_i 的并，记为 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ ，有时也写为 $A_1 \cup A_2 \cup \dots$

设 $A_1, A_2, \dots, A_i, \dots$ 是一列事件，则 C 是指这样的事件： C 发生当且仅当这些 $A_i (i = 1, 2, \dots)$ 都发生，这个 C 叫做诸 A_i 的交，记为 $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ ，有时也写为 $A_1 A_2 \dots$

例：取 $X \in \mathbb{R}$ ，事件 A_i 为 $X \in [\frac{1}{i+1}, \frac{1}{i}]$ ，事件 B_i 为 $X \in [0, \frac{1}{i}]$ 。则事件 $\bigcup_{i=1}^n A_i$ 发生等价于 $X \in [\frac{1}{n+1}, 1]$ ，事件 $\bigcap_{i=1}^n B_i$ 发生等价于 $X \in [0, \frac{1}{n}]$ 。进而当 $n \rightarrow \infty$ 时事件 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ 发生等价于 $X \in (0, 1]$ ，事件 $\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i$ 发生等价于 $X = 0$ 。

并的更一般定义是，设 $\{A_a, a \in \Gamma\}$ 是一族事件（其中 Γ 是任何非空集，每个 $a \in \Gamma$ 对应一个事件 A_a ），这些事件 A_a 的“并”是指这样的事件 B ： B 发生当且仅当至少一个 A_a 发生，这个 B 常常记为 $\bigcup_{a \in \Gamma} A_a$ ，类似可以定义一族事件的交 $\bigcap_{a \in \Gamma} A_a$

例 2.3: (对应郑书例 2.3) 一射手向一个目标连续射击, 设 $A_1 =$ “第一次射击, 命中”, $A_i =$ “前 $i-1$ 次射击都未命中, 第 i 次射击命中” ($i = 2, 3, \dots$), $B =$ “终于命中”, 则 $B = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$

例 2.4: (对应郑书例 2.4) 一射手向一个目标连续射击, 设 $A_i =$ “第 i 次射击, 未命中目标” ($i = 2, 3, \dots$) 则 $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i =$ “每次均未命中目标”

不难验证, 对可列个事件的并和交有以下规律:

- $A \cup \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i \right) = \bigcap_{i=1}^{\infty} (A \cup B_i)$ 分配律
- $A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \right) = \bigcup_{i=1}^{\infty} (A \cap B_i)$ 分配律
- $\overline{\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right)} = \bigcap_{i=1}^{\infty} \overline{A_i}$ 对偶律
- $\overline{\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \right)} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{A_i}$ 对偶律

1.1.1.4 互斥事件

互不相容的事件

如果事件 A 和事件 B 不能都发生, 即 $A \cap B = \emptyset$, 则称 A 和 B 是互不相容的事件 (也称互斥的事件)

称事件 A_1, \dots, A_n 互不相容, 若对任何 $i \neq j (i, j = 1, \dots, n)$, A_i 与 A_j 互不相容

例如, 抛掷两枚硬币, 事件 “恰好一枚国徽朝上” 和事件 “两枚都是国徽朝上” 是互不相容的。不难看出, 对任何事件 A , A 和 \overline{A} 是互不相容的

- 加法公式: A_1, A_2, \dots 互不相容, 则:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

1.2 概率的公理化定义

概率空间子类: 设 Ω 为样本空间, \mathcal{F} 为 Ω 的一些子集构成的集类。若 \mathcal{F} 满足以下三个条件: (1) $\Omega \in \mathcal{F}$, (2) $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$, (3) $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$, 则称 \mathcal{F} 为概率空间子类

例:

- $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega\}$ 平凡概率空间子类
- $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega, A, \bar{A}\}$ 包含 A 的最小概率空间子类
- $\mathcal{F} = \{A | A \subset \Omega\}$ Ω 上的最大概率空间子类
- $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$, 则 Ω 所有子集构成的概率空间子类共有 2^n 个元素

定义: 设 \mathcal{F} 是满足上述条件的概率空间子集类。概率 $P = P(\cdot)$ 是 \mathcal{F} 上面定义的实值函数, 满足:

- 非负性: $P(A) \geq 0$ 对于一切 $A \in \mathcal{F}$
- 规范性: $P(\Omega) = 1$
- 可列可加性: 若 $A_n \in \mathcal{F} (n = 1, 2, \dots)$ 两两不相交, 则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

(Ω, \mathcal{F}, P) 为概率空间

例 1: 假定 $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$, \mathcal{F} 为全体子集构成的概率空间子类。

设 p_1, \dots, p_n 为 n 个非负实数, 且满足 $\sum_{i=1}^n p_i = 1$ 。令

$$\mathbb{P}(\emptyset) = 0, \quad \mathbb{P}(A) = \sum_{j=1}^k p_{i_j}, \quad A = \{\omega_{i_1}, \dots, \omega_{i_k}\}, k = 1, \dots, n$$

则 \mathbb{P} 为 (Ω, \mathcal{F}) 上概率。

概率 P 有以下性质:

- (1) $P(\emptyset) = 0$;
- (2) 若 $A \in \mathcal{F}$, 则 $P(A^c) = 1 - P(A)$;
- (3) 若 A_1, \dots, A_n 都属于 \mathcal{F} 且两两不相交, 则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i) \quad (1.2.1)$$

(4) 若 $A \subset B$, $A \in \mathcal{F}$, $B \in \mathcal{F}$, 则 $P(A) \leq P(B)$, 且

$$P(B - A) = P(B) - P(A) \quad (1.2.2)$$

(5) 若 $A_n \subset A_{n+1}$, $A_n \in \mathcal{F} (n = 1, 2, \dots)$, 则

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) \quad (1.2.3)$$

(6) 若 $A_n \supset A_{n+1}$, $A_n \in \mathcal{F} (n = 1, 2, \dots)$, 则

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) \quad (1.2.4)$$

(7) 若 $A_n \in \mathcal{F} (n = 1, 2, \dots)$, 则

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) \quad (1.2.5)$$

2.1 古典概型

模型定义：若随机现象有如下两个特征：

(1) 在实验中它的全部可能性只有有限个；

(2) 基本事件发生或出现是等可能的；

则称其对应的数学模型为古典概型

取

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}, \quad \mathcal{F} = \{A | A \subset \Omega\}$$

令 P 为 (Ω, \mathcal{F}) 上的概率测度，满足

$$P(\{\omega_1\}) = \dots = P(\{\omega_n\})$$

则 (Ω, \mathcal{F}, P) 为古典概型对应的概率空间。

计算公式：对 $A = \{\omega_{i_1}, \dots, \omega_{i_k}\} \in \mathcal{F}$ ，利用概率的有限可加性可知：

$$P(A) = \sum_{j=1}^k P(\{\omega_{i_j}\}) = \frac{k}{n} = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

排列：从含有 n 个不同元素的总体中抽取 r 个进行排列

(1) 放回情形：共有 n^r 种排列方式

(2) 不放回情形：共有 $A_n^r := n(n-1)\cdots(n-r+1)$ 种排列方式

当 $r = n$ 时，为全排列，此时 $A_n^n = n!$ 。

组合：(1) 从 n 个不同元素中取出 r 个而不考虑其顺序，称为组合，其总数为 $C_n^r = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{A_n^r}{r!}$

(2) 把 n 个不同元素分成 k 个部分，且第 i 个部分有 r_i 个元素， $1 \leq i \leq k$ ，且 $r_1 + r_2 + \dots + r_k = n$ ，则有 $\frac{n!}{r_1!r_2!\cdots r_k!}$ 种方法

(3) 把 n 个元素全部带有标注，其中 n_1 个带标注 1， n_2 个带标注 2， \dots ， n_k 个带标注 k 。现在从此 n 个元素中取出 r 个，使得带有标注 i 的元素有 r_i 个，其中 $1 \leq i \leq k$ 且 $r_1 + r_2 + \dots + r_k = r$ 。则不同取法的总数为 $C_{n_1}^{r_1} C_{n_2}^{r_2} \cdots C_{n_k}^{r_k}$ 。

(4) 从 n 个不同元素中有重复的取出 r 个，不计顺序，则不同的取法有 C_{n+r-1}^r （有重复组合数）

组合公式：对一切正整数 a, b ,

$$\sum_{i=0}^n C_a^i C_b^{n-i} = C_{a+b}^n$$

约定当 $k > n$ 时, $C_n^k = 0$ 。特别地,

$$\sum_{i=0}^n (C_n^i)^2 = C_{2n}^n$$

例 1: (对应郑书例 3.1) 某人同时抛掷两枚骰子, 问: 得到 7 点 (两颗骰子的点数之和的概率是多少?)

解: 我们用甲乙分别表示这两颗骰子, 每颗骰子共有 6 种可能的点数: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 两颗骰子共有 $6 \times 6 = 36$ 种可能结果: $(i, j) (i = 1, \dots, 6) (j = 1, \dots, 6)$, 这里 i 表示骰子甲的点数, j 表示骰子乙的点数, 显然这些结果出现的机会是相等的, 它们构成了等概完备事件组, 事件“得到 7 点”由 6 种结果 (基本事件) 组成: $(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)$, 故事件“得到 7 点”的概率为 $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$
□

例 2: 甲口袋有 5 个白球, 3 个黑球, 乙口袋中有 4 个白球, 6 个黑球, 从两个口袋中各任取一球, 求取到的两个球颜色相同的概率。

解: 从两个口袋中各取一球, 共有 $C_8^1 C_{10}^1$ 种可能取法。两球颜色相同可能情况为: 从甲乙口袋均取出白球, 从甲乙口袋均取出黑球, 共有 $C_5^1 C_4^1 + C_3^1 C_6^1$ 种取法, 于是

$$P(\text{取到的两个球颜色相同}) = \frac{C_5^1 C_4^1 + C_3^1 C_6^1}{C_8^1 C_{10}^1} = \frac{19}{40}$$

□

例 3: (巴拿赫问题) 某数学家有两盒火柴, 每盒有 n 根, 每次使用时, 他任取一盒并从中抽出一根, 问他发现一盒空而同时另一盒还有 $r (0 \leq r \leq n)$ 的概率为多少 (发现为空表示最后一次抽到空盒)?

解: 设两盒火柴分别为 A, B , 由对称性, 所求概率为事件 $E = \text{“发现 } A \text{ 盒空而 } B \text{ 盒还有 } r \text{ 根”}$ 的概率的 2 倍。

先计算样本空间中的样本点个数, 由于共取了 $2n - r + 1$ 次, 故有 2^{2n-r+1} 个样本点。

考察事件 E , 等效为前 $2n - r$ 次 A 盒恰好取 n 次, 次序不论, 最后一次必定取到 A 盒, 此种样本点共有 C_{2n-r}^n 个, 因此

$$P(E) = \frac{C_{2n-r}^n}{2^{2n-r+1}}.$$

所求概率为 $\frac{C_{2n-r}^n}{2^{2n-r}}.$

2.2 条件概率与独立性

2.2.1 条件概率

条件概率：设 (Ω, \mathcal{F}, P) 为概率空间， $B \in \mathcal{F}$ 满足 $P(B) > 0$ 。称

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}, A \in \mathcal{F}$$

为 B 发生条件下 A 发生的条件概率。

条件概率 $P(\cdot|B)$ 为 \mathcal{F} 上的概率，即满足：

- $P(A|B) \geq 0, \forall A \in \mathcal{F}$
- $P(\Omega|B) = 1$
- $\forall \{A_n\} \subset \mathcal{F}, A_n \cap A_m = \emptyset, \forall n \neq m,$

$$P\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n | B\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n | B)$$

容易得到， $P(B|\Omega) = P(B)$ 。

乘法公式： $P(AB) = P(B|A)P(A)$

乘法公式的推广： $P(A_1 A_2 \cdots A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 A_2) \cdots P(A_n|A_1 A_2 \cdots A_{n-1})$ ，其中 $P(A_1 A_2 \cdots A_{n-1}) > 0$ 。

例 1：将 52 张扑克牌（不含大王、小王）随机地分为 4 堆，每堆 13 张，问：各堆都含有 A 牌（即 1 点）的概率是多少？

解：将 4 堆扑克牌编号：第 1 堆，第 2 堆，第 3 堆，第 4 堆，用 A_1, A_2, A_3, A_4 依次表示 4 个 A 牌，设 i_1, i_2, i_3, i_4 是 1, 2, 3, 4 的一个排列，令 $E_{i_1 i_2 i_3 i_4} =$ “第 i_1 堆有 A_1 但没有 A_2, A_3, A_4 ，第 i_2 堆有 A_2 但没有 A_1, A_3, A_4 ，第 i_3 堆有 A_3 但没有 A_1, A_2, A_4 ，第 i_4 堆有 A_4 但没有 A_1, A_2, A_3 ”， $E =$ “各堆都含有 A”，则

$$E = \bigcup_{i_1 i_2 i_3 i_4} E_{i_1 i_2 i_3 i_4}$$

这些事件两两不相容，易知 $P(E) = 4!P(E_{1234})$ ，令 $E_k = \{ \text{第 } k \text{ 堆含有 } A_k \text{ 但不含有其他的 } A_j (j \neq k) \} \quad (k = 1, 2, 3, 4)$ ，则

$$P(E_{1234}) = P(E_1)P(E_2|E_1)P(E_3|E_1 E_2)P(E_4|E_1 E_2 E_3)$$

易知

$$P(E_1) = C_{48}^{12}/C_{52}^{13}, \quad P(E_2|E_1) = C_{36}^{12}/C_{39}^{13},$$

$$P(E_3|E_1E_2) = C_{24}^{12}/C_{26}^{13}, \quad P(E_4|E_1E_2E_3) = 1,$$

于是

$$P(E_{1234}) = \frac{C_{48}^{12}C_{36}^{12}C_{24}^{12}}{C_{52}^{13}C_{39}^{13}C_{26}^{13}} = \frac{13^4}{52 \times 51 \times 50 \times 49},$$

$$P(E) = 4!P(E_{1234}) \approx 0.105$$

□

例 2: (罐子模型) 设罐中有 b 个黑球, r 个红球, 每次随机取出一个球, 取出后将原球放回, 还加进 c 个同色球和 d 个异色球, 记 B_i 为“第 i 次取出的是黑球”, R_j 为“第 j 次取出的是红球”。若连续从罐中取出三个球, 其中有两个红球, 一个黑球, 则由乘法公式我们可得

$$P(B_1R_2R_3) = P(B_1)P(R_2|B_1)P(R_3|B_1R_2) = \frac{b}{b+r} \cdot \frac{r+d}{b+r+c+d} \cdot \frac{r+d+c}{b+r+2c+2d},$$

$$P(R_1B_2R_3) = P(R_1)P(B_2|R_1)P(R_3|R_1B_2) = \frac{r}{b+r} \cdot \frac{b+d}{b+r+c+d} \cdot \frac{r+d+c}{b+r+2c+2d},$$

$$P(R_1R_2B_3) = P(R_1)P(R_2|R_1)P(B_3|R_1R_2) = \frac{r}{b+r} \cdot \frac{r+c}{b+r+c+d} \cdot \frac{b+2d}{b+r+2c+2d},$$

以上概率与黑球在第几次被抽出有关。罐子模型也称波利亚 (Polya) 模型, 这个模型的各种变化如下:

(1) 当 $c = -1, d = 0$ 时, 为不返回抽样, 此时前次抽取结果会影响后次抽取结果, 但只要抽取的黑球和红球个数确定, 则概率不依赖其抽出球的次序, 有

$$P(B_1R_2R_3) = P(R_1B_2R_3) = P(R_1R_2B_3) = \frac{br(r-1)}{(b+r)(b+r-1)(b+r-2)}$$

(2) 当 $c = 0, d = 0$ 时, 为返回抽样, 此时前次抽取结果不会影响后次抽取结果, 上述三种概率相等, 有

$$P(B_1R_2R_3) = P(R_1B_2R_3) = P(R_1R_2B_3) = \frac{br^2}{(b+r)^3}$$

(3) 当 $c > 0, d = 0$ 时, 为传染病模型, 此时每次取出球后会增加下一次取到同色球的概率, 或者说, 每发现一个传染病患者, 以后都会增加再传染的概率。同样的, 上述三种概率相等, 且都等于

$$P(B_1R_2R_3) = P(R_1B_2R_3) = P(R_1R_2B_3) = \frac{br(r+c)}{(b+r)(b+r+c)(b+r+2c)}$$

可以看出, 当 $d = 0$ 时, 只要取出的黑球和红球个数确定, 则概率不依赖于其抽出球的顺序。

(4) 当 $c = 0, d > 0$ 时, 为安全模型, 可以解释为, 每当事故发生, 会抓紧安全工作, 从而下一次发生事故的的概率会减少, 而当事故未发生时, 安全工作会松懈, 下一次发生事故的的概率会增大, 上述三种概率分别为:

$$P(B_1R_2R_3) = \frac{b}{(b+r)} \cdot \frac{r+d}{b+r+d} \cdot \frac{r+d}{b+r+2d},$$

$$P(R_1 B_2 R_3) = \frac{r}{(b+r)} \cdot \frac{b+d}{b+r+d} \cdot \frac{r+d}{b+r+2d},$$

$$P(R_1 R_2 B_3) = \frac{r}{(b+r)} \cdot \frac{r}{b+r+d} \cdot \frac{b+2d}{b+r+2d}$$

例：设 n 件产品中有 m 件不合格品，从中任取两件，已知两件中有一件是合格品，求另一件也是合格品的概率。

解：记事件 A “有一件是合格品”， B “另一件也是合格品”。则

$P(A) = P(\text{取出一件合格品，一件不合格品}) + P(\text{取出两件都是合格品})$

$$= \frac{C_m^1 C_{n-m}^1}{C_n^2} + \frac{C_{n-m}^2}{C_n^2} = \frac{2m(n-m) + (n-m)(n-m-1)}{n(n-1)}$$

$$= \frac{(n-m)(n+m-1)}{n(n-1)}$$

$$P(AB) = P(\text{取出两件都是合格品}) = \frac{C_{n-m}^2}{C_n^2} = \frac{(n-m)(n-m-1)}{n(n-1)}$$

于是所求概率为

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{\frac{(n-m)(n-m-1)}{n(n-1)}}{\frac{(n-m)(n+m-1)}{n(n-1)}} = \frac{n-m-1}{n+m-1}$$

□

2.2.2 事件的独立性

事件的独立性：设 (Ω, \mathcal{F}, P) 为概率空间，称 $A, B \in \mathcal{F}$ 相互独立（独立），若

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

性质：(1) 若 A, B 独立，且 $P(B) > 0$ ，则

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B)}{P(B)} = P(A).$$

即条件概率等于无条件概率。

(2) 若 A, B 独立，则 A 与 \bar{B} ， \bar{A} 与 B ， \bar{A} 与 \bar{B} 亦独立。

$$P(A\bar{B}) = P(A) - P(AB) = P(A) - P(A)P(B) = P(A)P(\bar{B})$$

(3) 零概率事件及其对立的事件与任意的事件都独立。

例：袋中有 a 只黑球和 b 只白球，令 A ：“第一次摸到黑球”， B ：“第二次摸到黑球”。讨论 A 和 B 的独立性。

(1) 放回情形。因为

$$P(A) = \frac{a}{a+b}, P(AB) = \frac{a^2}{(a+b)^2}, P(\overline{A}B) = \frac{ab}{(a+b)^2},$$

所以

$$P(B) = P(AB) + P(\overline{A}B) = \frac{a^2 + ab}{(a+b)^2} = \frac{a}{a+b}$$

故

$$P(A)P(B) = P(AB)$$

(2) 不放回情形。易知

$$P(A) = P(B) = \frac{a}{a+b}, P(\overline{A}B) = \frac{ab}{(a+b)(a+b-1)},$$

故

$$P(A)P(B) \neq P(AB)$$

定义： 设 $\{A_k\}_{k \leq n} \subset \mathcal{F}$ 。称 A_1, A_2, \dots, A_n 相互独立，若

$$P\left(\bigcap_{j=1}^k A_{i_j}\right) = \prod_{j=1}^k P(A_{i_j}), \quad 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n, k \leq n$$

注意：独立 \Rightarrow 两两独立，但是反之不对：

伯恩斯坦反例：一个均匀的正四面体，其第一、二、三面分别涂上红、黄、蓝三种颜色第四面同时涂上以上三种颜色。以 A, B, C 分别表示投一次四面体出现红、黄、蓝颜色朝下的事件，则

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{2}, \quad P(AB) = P(BC) = P(AC) = \frac{1}{4}$$

从而 A, B, C 两两独立，但是，

$$P(ABC) = \frac{1}{4} \neq P(A)P(B)P(C)$$

独立性与概率计算： 设 A_1, A_2, \dots, A_n 相互独立，则

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = 1 - \prod_{i=1}^n P(\overline{A}_i)$$

例： 设有某型号的高射炮，每门炮（发射一发）击中敌机的概率为 0.6，现在若干门炮同时发射（每炮射一发），问：若要以 99% 的把握击中来犯的一架敌机，至少需要配置几门高射炮？

解： 设 n 是需要配置的高射炮的门数，记 $A_i =$ “第 i 门炮击中敌机” ($i = 1, \dots, n$)， $A =$ “敌机被击中”。由于 $A = \bigcup_{i=1}^n A_i$ ，于是找到 n ，使得

$$P(A) = P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \geq 0.99$$

由于 $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - P(\bigcup_{i=1}^n \bar{A}_i)$, 且 $\bar{A}_1, \dots, \bar{A}_n$ 相互独立, 故

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}_1) \cdots P(\bar{A}_n) = 1 - 0.4^n$$

为使不等式成立, 必须且只需 $1 - 0.4^n \geq 0.99$. 由此得

$$n \geq \lg 0.01 / \lg 0.4 = 5.026$$

故至少需配置 6 门高射炮方能以 99% 的把握击中敌机。

例: 设 A, B, C 三事件相互独立, 证明 $A - B$ 与 C 独立。

解: 因为

$$\begin{aligned} P((A - B)C) &= P(AC - BC) = P(AC) - P(ABC) \\ &= P(A)P(C) - P(A)P(B)P(C) \\ &= (P(A) - P(A)P(B))P(C) \\ &= (P(A) - P(AB))P(C) = P(A - B)P(C). \end{aligned}$$

所以 $A - B$ 与 C 独立。 □

2.3 全概率公式和贝叶斯公式

2.3.1 全概率公式

完备事件组: 若 $\{B_n\}_{n \geq 1} \subset \mathcal{F}$ 满足两两互斥且 $\sum_{n=1}^{\infty} B_n = \Omega$, 则称 $\{B_n\}_{n \geq 1}$ 为完备事件组。

全概率公式: 假定 $\{B_n\}_{n \geq 1}$ 为完备事件组, 则

$$P(A) = \sum_{n=1}^{\infty} P(B_n)P(A|B_n), \forall A \in \mathcal{F}$$

注意: 在上式中, 若 $P(B_n) = 0$, 则规定 $P(B_n)P(A|B_n) = 0$ 。

例: 一保险公司相信人群可以分为 2 类: 一类是容易出事故的; 另一类是不容易出事故的。已知前者在一年内出事故的概率为 0.4, 后者在一年内出事故的概率为 0.2。前者约占人群的 30%。今有一人前来投保, 他在一年内出事故的可能性有多大?

解: 设 $A =$ “他在一年内出事故”, $B =$ “他是容易出事故的”, 则 B, \bar{B} 构成完备事件组, 有

$$P(A) = P(B)P(A|B) + P(\bar{B})P(A|\bar{B})$$



图 2.1: 完备事件组

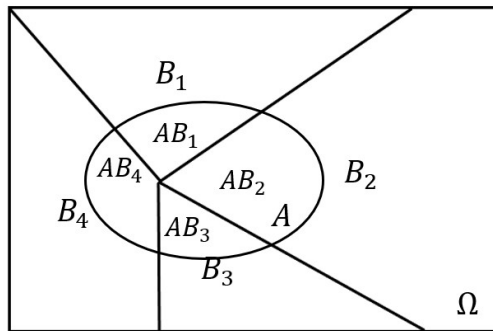


图 2.2: 全概率公式

由于 $P(B) = 0.3, P(A|B) = 0.4, P(\bar{B}) = 0.7, P(A|\bar{B}) = 0.2$, 于是

$$P(A) = 0.3 \times 0.4 + 0.7 \times 0.2 = 0.26$$

□

例: 甲口袋有 1 个黑球, 2 个白球, 乙口袋有 3 个白球, 每次从两口袋中任取一球, 交换后放入另一口袋中, 求交换 n 次之后, 黑球仍然在甲口袋的概率。

设事件 A_i 为 “第 i 次交换后黑球仍然在甲口袋中”, 记 $p_i = P(A_i), i = 0, 1, 2, \dots$, 则有 $p_0 = 1$, 且

$$P(A_{i+1} | A_i) = \frac{2}{3}, \quad P(A_{i+1} | A_i^c) = \frac{1}{3}$$

由全概率公式得

$$p_n = \frac{2}{3}p_{n-1} + \frac{1}{3}(1 - p_{n-1}) = \frac{1}{3}p_{n-1} + \frac{1}{3}, \quad n \geq 1$$

得到递推公式

$$p_n - \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{3}\right) \left(p_{n-1} - \frac{1}{2}\right), \quad n \geq 1$$

将 $p_0 = 1$ 代入上式可得

$$p_n - \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{3}\right)^n \left(\frac{1}{2}\right)$$

因此

$$p_n = \frac{1}{2} \left[1 + \left(\frac{1}{3}\right)^n \right]$$

□

2.3.2 贝叶斯公式

贝叶斯公式：假定 $\{B_n\}_{n \geq 1}$ 为完备事件组， $A \in \mathcal{F}$ 满足 $P(A) > 0$ ，则

$$P(B_n|A) = \frac{P(B_n)P(A|B_n)}{\sum_{n=1}^{\infty} P(B_n)P(A|B_n)}$$

例：一项血液化验有 95% 的把握诊断某种疾病，但这项化验用于健康人也会有 1% 的“假阳性”结果（即如果一个健康人接受这项化验，化验结果误诊此病人患该疾病的概率为 1%）。假定该疾病的患者事实上只占总人口的 0.5%。若某人化验结果为阳性，则此人确实患有该疾病的概率是多少？

解：令 A 表示“此人确实患该疾病”， B 表示“其化验结果为阳性”，则所求概率为

$$\begin{aligned} P(A|B) &= \frac{P(A)P(B|A)}{P(A)P(B|A) + P(\bar{A})P(B|\bar{A})} \\ &= \frac{0.95 \times 0.005}{0.95 \times 0.005 + 0.01 \times 0.995} \\ &= \frac{95}{294} \approx 0.323 \end{aligned}$$

□ **例：**一架飞机失踪了，推测它等可能的坠落在 3 个区域。令 $\alpha_i (i = 1, 2, 3)$ 表示飞机在第 i 个区域坠落但没有被发现的概率。已知对区域 1 的搜索没有发现飞机，求在此条件下，飞机坠落在第 $i (i = 1, 2, 3)$ 个区域的条件概率。

解：令 B_i 表示“飞机坠毁在第 i 个区域”， $i = 1, 2, 3$ ， A 表示“在第 1 个区域没有搜索到飞机”，则

$$P(B_1|A) = \frac{P(B_1)P(A|B_1)}{\sum_{i=1}^3 P(B_i)P(A|B_i)} = \frac{\frac{\alpha_1}{3}}{\frac{\alpha_1}{3} + 1 \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{1}{3}} = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + 2}$$

对 $j = 2, 3$,

$$P(B_j|A) = \frac{P(B_j)P(A|B_j)}{\sum_{i=1}^3 P(B_i)P(A|B_i)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{\alpha_1}{3} + 1 \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{1}{3}} = \frac{1}{\alpha_1 + 2}$$

□

□

随机游走：考虑数轴上一质点，假定它只在整数点上运动。当前时刻它处于位置 a （整数），下一时刻（单位间隔时间）以概率 p 向正向，概率 $1-p$ 向负向运动一个单位，称这样的质点运动为随机游动，当 $p = q = \frac{1}{2}$ 时，称为对称随机游走。

(1) 无限制随机游走：对随机游走，以 S_n 表示 n 时刻质点的位置，假定 $S_0 = 0$ 。我们计算经过 n 次运动后到达位置 k 的概率。

由于质点在 n 时刻位于 k ，在 n 次游动中，质点向右移动次数 x 比向左运动 y 多 k 次：

$$\begin{aligned} x - y &= k, & x + y &= n \\ x &= \frac{n+k}{2}, & y &= \frac{n-k}{2} \end{aligned}$$

为使 x 为整数， k 和 n 的奇偶性需要相同，即

$$P(S_n = k) = \begin{cases} C_n^{\frac{n+k}{2}} p^{\frac{n+k}{2}} (1-p)^{\frac{n-k}{2}}, & n, k \text{ 奇偶性相同} \\ 0, & n, k \text{ 奇偶性不同} \end{cases}$$

(2) 两端带有吸收壁的随机游走：设 a, b 为正整数。假定质点初始位置为 a ，在位置 0 和 $a+b$ 均有一个吸收壁，求质点被吸收的概率。

记 q_n 为质点初始位置是 n 而最终在 $a+b$ 被吸收的概率，显然，

$$q_0 = 0, \quad q_{a+b} = 1$$

若质点某时刻位于 n ， $n = 1, \dots, a+b-1$ 。则其在位置 $a+b$ 被吸收有两种可能：(1) 运动到 $n-1$ 位置被 $a+b$ 吸收，(2) 运动到 $n+1$ 位置被 $a+b$ 吸收，由全概率公式得

$$q_n = q_{n-1}p + q_{n+1}p, \quad n = 1, \dots, a+b-1$$

由于 $p+q=1$ ，上式可以写为

$$p(q_{n+1} - q_n) = q(q_n - q_{n-1}), \quad n = 1, \dots, a+b-1$$

记 $r = \frac{q}{p}$ ，则

$$q_{n+1} - q_n = r(q_n - q_{n-1}), \quad n = 1, \dots, a+b-1$$

可以分两种情况讨论：(i) 若 $r = 1$ ，即 $p = q = \frac{1}{2}$ 。则

$$q_{n+1} - q_n = q_n - q_{n-1} = \dots = q_1 - q_0$$

$$q_{n+1} = q_0 + (n+1)(q_1 - q_0), \quad n = 1, \dots, a+b-1$$

结合边值条件, 有

$$q_n = \frac{n}{a+b}, n = 1, \cdots, a+b-1$$

(ii) 若 $r \neq 1$, 即 $p \neq q$:

$$q_{n+1} - q_n = r(q_n - q_{n-1}) = \cdots = r^n(q_1 - q_0)$$

即

$$q_n - q_0 = \sum_{i=0}^{n-1} (q_{i+1} - q_i) = \sum_{i=0}^{n-1} r^i (q_1 - q_0) = \frac{1-r^n}{1-r} (q_1 - q_0), \quad n = 1, \cdots, a+b-1$$

结合边值条件, 得

$$q_1 = \frac{1-r}{1-r^{a+b}}$$

则

$$q_n = \frac{1-r^n}{1-r^{a+b}}$$

3.1 随机变量

为了进一步研究随机现象，我们需要引入随机变量的概念。

定义：（随机变量的直观描述）如果条件 S 下的结果可以用某个变量 X 来描述， X 的值不能预先确定，而随着条件 S 的不同可能变化，但是对任何实数 c ，事件“ X 取值不超过 c ”是有概率的，将这样一种变量 X 称为随机变量。

定义：（随机变量的数学描述）如果条件 S 下的所有可能结果组成了集合 $\Omega = \{\omega\}$ ， $X = X(\omega)$ 是在 Ω 上有定义的实值函数，而且对任何实数 c ，事件“ $\{\omega : X(\omega) \leq c\}$ ”是有概率的，将 X 称为随机变量。

例：（对应郑书例 1.2）盒中有 5 个球，其中有 2 个白球，3 个黑球。从中任取 3 个球，将其中所含的白球的数记为 X 。

建模：将球编号，1~3 表示黑球，4,5 表示白球。

记摸到球的编号为 $\omega = (i, j, k)$ ，其中 $1 \leq i < j < k \leq 5$ 。 $|\Omega| = C_5^3 = 10$ 。

其中满足 $X = 0$ 的 ω 有 $C_2^0 C_3^3 = 1$ 个；满足 $X = 1$ 的 ω 有 $C_2^1 C_3^2 = 6$ 个；满足 $X = 2$ 的 ω 有 $C_2^2 C_3^1 = 3$ 个。

设事件： $\{X = 1\} = \{\omega : X(\omega) = 1\}$ ， $\{X \leq 1\} = \{\omega : X(\omega) \leq 1\}$ 。

将 $P(\{X = 1\})$ 简记为 $P(X = 1)$ 。

$$P(X = 1) = \frac{6}{10}, \quad P(X \leq 1) = \frac{7}{10}.$$

例：（对应郑书例 1.6）某公共汽车站每隔 10 min 会有一两某路公交车到达。某乘客随机在任意时刻到达车站。

显然，他的候车时间 X （单位：min）为随机变量。 X 的取值范围 $0 \leq X \leq 10$ 。事件 $\{X \leq c\}$ 是有概率的，这是一种几何概型，我们会在后面给出计算过程，例如：

$$P(X \leq 3) = \frac{3}{10}, \quad P(2 \leq X \leq 6) = \frac{4}{10}.$$

3.2 离散型随机变量

定义： X 是离散型随机变量指： X 取有限个值 x_1, \dots, x_n , 或可列无穷个值 x_1, x_2, \dots . X 的概率分布 (列) 指:

$$p_k = P(X = x_k), \quad k = 1, \dots, n \text{ 或 } k = 1, 2, \dots.$$

将 X 的可能值以及相应的概率列为表3.1。表3.1称为 X 的**概率分布表**，它能够清楚完整的表示 X

X	x_1	x_2	\cdots	x_k	\cdots
p	p_1	p_2	\cdots	p_k	\cdots

表 3.1: 概率分布表

的取值以及概率的分布情况。

定义： 设 X 的可能取值是 x_1, x_2, \dots (有限个或者可列无穷个)，则称

$$p_k = P(X = x_k) \quad (k = 1, 2, \dots)$$

为 X 的**概率分布**，这时也称为 X 的**概率函数**或者**概率分布律**

关于 $\{p_k\}$ ，有以下性质：

$$(1) \quad p_k \geq 0 \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (2) \quad \sum_k p_k = 1$$

回忆本讲例 1 的 X (抽到的白球数) 它的概率分布表如表3.2所示：

X	0	1	2
p	0.1	0.6	0.3

表 3.2: X 的概率分布表

对离散型随机变量，有以下几种常见的概率分布：

3.2.1 两点分布 (伯努利分布)

定义随机变量 X 的可能值是 0 和 1 且概率分布为:

$$P(X = 1) = p, \quad P(X = 0) = 1 - p.$$

称 X 服从**两点分布** (也称伯努利分布), 记为 $X \sim B(1, p)$ (参数 $0 \leq p \leq 1$)

我们定义示性函数 1_A : 事件 A 发生则取 1; A 不发生则取 0.

例: (对应郑书例 2.1) 100 件产品中有 3 件次品. 从中任取一件.

设事件 $A =$ “取到合格品”, , 随机变量 $X = 1_A$, X 的可能取值为 0 和 1。取到每件产品的概率均等, 概率分布为

$$P(X = 1) = \frac{97}{100}, P(X = 0) = \frac{3}{100}$$

X 服从参数 $p = 0.97$ 的两点分布。

3.2.2 二项分布

设随机变量所有可能值为 $0, 1, \dots, n$, 且

$$P(X = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}, k = 0, 1, \dots, n$$

称 X 服从参数为 n, p 的二项分布, 记作 $X \sim B(n, p)$ (参数 $n \geq 1, 0 \leq p \leq 1$)

二项分布有明显的实际背景, 例如在单次实验中事件 A 发生的概率是 p , 进行独立重复实验 n 次, 记事件 A 发生的次数为 X , 则 $X \sim B(n, p)$ 。

定理 2.1: 对于二项分布, 分布列 $P(X = k)$ 的最大值点 k_0 如下:

若 $(n + 1)p \notin \mathbb{Z}$, 则 $k_0 = [(n + 1)p]$;

若 $(n + 1)p \in \mathbb{Z}$, 则 $k_0 = (n + 1)p$ 或 $(n + 1)p - 1$.

证明: 显然

$$\frac{p_n(k+1)}{p_n(k)} = \frac{n-k}{k+1} \cdot \frac{p}{1-p}$$

由于 $\frac{n-k}{k+1} \cdot \frac{p}{1-p} > 1$ 等价于 $k < (n + 1)p - 1$, 于是有:

(a) 当 $k < (n + 1)p - 1$ 时, $p_n(k + 1) > p_n(k)$

(b) 当 $k > (n + 1)p - 1$ 时, $p_n(k + 1) < p_n(k)$

(c) 当 $k = (n + 1)p - 1$ 时, $p_n(k + 1) = p_n(k)$

(i) 若 $(n+1)p \notin \mathbb{Z}$, 设 $k_0 = [(n+1)p] < (n+1)p < k_0 + 1$, 当 $k < m$ 时, $k \leq k_0 - 1 < (n+1)p - 1$, 因此 $p_n(k) < p_n(k+1)$; 当 $k \geq k_0$ 时, $k > (n+1)p - 1$, 因此 $p_n(k) > p_n(k+1)$, 所以 k_0 为最大值。

(ii) 若 $(n+1)p \in \mathbb{Z}$, 设 $k_0 = (n+1)p$, 有 $p_n(k_0) = p_n(k_0 + 1)$, 进而利用性质 (a) 和性质 (b) 知 k_0 为最大值。□

3.2.3 泊松分布

定义: 设随机变量 X 的所有可能取值是全体非负整数, 且

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

则称 X 服从参数为 λ 的泊松分布, 记为 $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ (参数: $\lambda > 0$)。

泊松分布常见于生物学, 物理学, 工业的应用中, 例如电话交换台收到的电话呼唤次数, 放射性物质在一定时间内放出的粒子数。

定理: 泊松分布的分布列最大值点 $k_0 = [\lambda]$ 。

证明: 注意到 $p_{k+1} = \frac{\lambda}{k+1} p_k$, 故由分布函数知

若 $k+1 \leq \lambda$, 则 $p_{k+1} \geq p_k$

若 $k+1 \geq \lambda$, 则 $p_{k+1} \leq p_k$

因此当 $k_0 = [\lambda]$ 时, 分布列取最大值。□

例: 已知某商场一天来的顾客服从参数为 λ 的泊松分布, 而每个来商场的顾客购物概率为 p , 证明此商场一天内购物的顾客数服从参数为 λp 的泊松分布。

解: 用 Y 表示商场内一天购物的顾客数, 则由全概率公式知, 对任意正整数 k 有

$$\begin{aligned} P(Y = k) &= \sum_{i=k}^{\infty} P(X = i) P(Y = k | X = i) = \sum_{i=k}^{\infty} \frac{\lambda^i e^{-\lambda}}{i!} C_i^k p^k (1-p)^{i-k} \\ &= \frac{(\lambda p)^k}{k!} e^{-\lambda} \sum_{i=k}^{\infty} \frac{[\lambda(1-p)]^{i-k}}{(i-k)!} = \frac{(\lambda p)^k}{k!} e^{-\lambda} e^{\lambda(1-p)} = \frac{(\lambda p)^k}{k!} e^{-\lambda p} \end{aligned}$$

□

3.2.4 超几何分布

定义：若随机变量 X 的概率分布满足：

$$P(X = k) = \frac{C_D^k C_{N-D}^{n-k}}{C_N^n}, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

则称 X 服从超几何分布，记为 $X \sim H(N, D, n)$ （参数 N, D, n 满足 $N \geq D \geq 0$ ）

设一批产品有 N 个产品， D 个次品，任取 n 个，抽到的次品数为 X 。如果进行放回抽样则 X 服从二项分布，如果进行不放回抽样则 X 服从超几何分布。

定理 2.3：给定 n 。当 $N \rightarrow \infty, \frac{D}{N} \rightarrow p$ 时，

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{C_D^k C_{N-D}^{n-k}}{C_N^n} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \quad k \geq 0$$

证明：由于 $0 < p < 1$ ，当 N 充分大时， $n < D < N$ ，且 n 是固定的，易知

$$\begin{aligned} \frac{C_D^k C_{N-D}^{n-k}}{C_N^n} &= \frac{D!}{k!(D-k)!} \cdot \frac{(N-D)!}{(n-k)!(N-D-n+k)!} \cdot \frac{n!(N-n)!}{N!} \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{D(D-1) \cdots (D-k+1)}{N^k} \\ &\quad \cdot \frac{(N-D)(N-D-1) \cdots (N-D-n+k+1)}{N^{n-k}} \\ &\quad \cdot \frac{N^n}{N(N-1) \cdots (N-n+1)} \\ &= C_n^k \left(\prod_{i=1}^k \frac{D-i+1}{N} \right) \left(\prod_{i=1}^{n-k} \frac{N-D-i+1}{N} \right) \left(\prod_{i=1}^n \frac{N}{N-i+1} \right) \\ &\rightarrow C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \quad (N \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

□

该定理的直观解释是，如果一批产品的总量 N 很大，其中次品占比为 p ，则从整批产品随机抽取 n 个，抽到次品的个数 k 近似服从参数为 p, n 的二项分布。

3.2.5 几何分布

定义：若随机变量 X 的所有可能值是全体整数，且概率分布满足：

$$P(X = k) = (1-p)^{k-1} p, \quad k = 1, 2, \dots$$

则称 X 服从几何分布，记为 $X \sim G(p)$ ，参数 $0 < p < 1$ 。

例如，某个射手向目标连续射击，如果他单次射中目标的概率为 p ，则他首次射中目标所需要的射击次数 X 是一个随机变量，且满足几何分布。

几何分布具备无记忆性: $P(X - n = k \mid X > n) = P(X = k)$.

例：设 X 是只取自然数的离散随机变量，若 X 的分布具有无记忆性，证明 X 的分布一定为几何分布。

证明：由无记忆性知

$$P(X > n + m \mid X > m) = \frac{P(X > n + m)}{P(X > m)} = P(X > n),$$

将 n 换为 $n - 1$ 仍有

$$P(X > n + m - 1) = P(X > n - 1)P(X > m).$$

两式相减有

$$P(X = n + m) = P(X = n)P(X > m).$$

设 $P(X = 1) = p$ ，若取 $n = m = 1$ 有

$$P(X = 2) = p(1 - p).$$

若取 $n = 2, m = 1$ 则有

$$P(X = 3) = P(X = 2)P(X > 1) = p(1 - p)^2.$$

若令 $P(X = k) = p(1 - p)^{k-1}$ ，则用数学归纳法得

$$P(X = k + 1) = P(X = k)P(X > 1) = p(1 - p)^k, \quad k = 0, 1, \dots.$$

这表明 X 的分布为几何分布。 □

3.2.6 离散均匀分布

定义：若随机变量 X 的概率分布满足：

$$P(X = k) = \frac{1}{N}, \quad k = 1, \dots, N.$$

则称 X 服从离散均匀分布。

3.3 连续随机变量

定义：连续型随机变量指：存在 $p(x)$ 使得

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b p(x)dx, \quad \forall a < b.$$

称 $p(\cdot)$ 为 X 的概率密度 (函数), 也记为 $p_X(\cdot)$.

连续随机变量有以下性质：

- (1) 非负: $p(x) \geq 0$
- (2) 规范: $\int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = 1$
- (3) $P(X = x) = 0$ 在任意一点选中的概率都为 0.
- (4) $p(\cdot)$ 在 x 连续, 即 $P(X \in [x, x + \Delta x]) = p(x)\Delta x + o(\Delta x)$,

以下是常见的连续随机变量：

3.3.1 均匀分布

定义：如果随机变量 X 的分布密度为：

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}; & \text{若 } a \leq x \leq b; \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

则称 X 服从区间 $[a, b]$ (或 (a, b)) 上的均匀分布, 记为 $X \sim U(a, b)$ (参数 $a < b$) :

均匀分布的分布函数也可以写为 $p(x) = \frac{1}{b-a} 1_{\{a \leq x \leq b\}}$.

例如, 某公共汽车站每隔 10 分钟会有一班公交车到达, 一位搭乘该车的乘客在任意时刻到达车站是等可能的, 则他的候车时间 X 是一个随机变量, 且满足 $[0, 10]$ 上的均匀分布。

3.3.2 指数分布

定义：如果随机变量 X 的分布密度为：

$$p(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x > 0.$$

则称 X 服从参数为 λ 的指数分布, 记为 $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ (参数 $\lambda > 0$)

若 X 服从参数为 λ 的指数分布, 则对任何 $0 \leq a < b$ 有:

$$P(a < X < b) = \lambda \int_a^b e^{-\lambda x} dx = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$$

$$P(X > a) = e^{-\lambda a}$$

定理: (无记忆性): $P(X - s > t \mid X > s) = e^{-\lambda t}, \forall t, s \geq 0$.

不难看出, $P(X - s > t \mid X > s) = \frac{P(X-s>t)}{P(X>s)} = \frac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda s}} = e^{-\lambda t} = P(X > t)$

注意到, 无记忆性是指数分布独有的, 即设 X 是非负的随机变量, $P(X-s > t \mid X > s) = P(X > s)$ 对 $\forall t, s \geq 0$ 恒成立的充分必要条件是 X 服从指数分布。

证明: 之前已经证明了充分性, 现只需证明必要性: 设 X 是非负随机变量满足 $P(X - s > t \mid X > s) = e^{-\lambda t}$, 则

$$P(X > s) > 0, \quad P(X > s+t) = P(X > s)P(X > t)$$

令 $f(u) = P(X > u)$, 则 $f(s+t) = f(s)f(t)$

于是 $f(1) = f(\frac{1}{n} \times n) = (f(\frac{1}{n}))^n$

从而 $f(\frac{m}{n}) = f(\frac{1}{n} \times m) = (f(\frac{1}{n}))^m = (f(1))^{\frac{m}{n}}$

故对任意正有理数 r , 有 $f(r) = (f(1))^r$ 。由于 $0 < f(1) < 1$ 且 $f(u)$ 是关于 u 的减函数, 因此对任意 $u \geq 0$, 有 $f(u) = (f(1))^u$ 。

令 $\lambda = -\ln f(1)$, 则 $f(u) = e^{-\lambda u}$, 即

$$P(X > u) = e^{-\lambda u} = \int_{+\infty}^u e^{-\lambda x} dx$$

$$P(a < X < b) = \int_a^b \lambda e^{-\lambda x} dx \quad (0 \leq a < b)$$

说明 X 服从指数分布。 □

3.3.3 正态分布

定义: 如果随机变量 X 的分布密度为:

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^2} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}$$

则称 X 服从参数为 μ, σ 的正态分布, 记为 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ (参数 $\mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$)

参数 $\mu = 0$, $\sigma^2 = 1$ 时的正态分布称为标准正态分布 $N(0, 1)$, 分布密度是:

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

归一性: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1$:

设 $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, 将积分的平方写为二重积分:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \frac{1}{2\pi} \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dx dy.$$

做极坐标变换:

$$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta \Rightarrow \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = r.$$

因此, 二重积分可以写为

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\infty} e^{-\frac{r^2}{2}} r dr \right) d\theta = \int_0^{\infty} e^{-R} dR = 1$$

对于其他正态分布的密度函数 $p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$: 令 $y = \frac{x-\mu}{\sigma}$, 则

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = 1.$$

定义函数 Φ :

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \phi(x) dx.$$

容易看出 $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$.

定理: 令 $x^* = \frac{x-\mu}{\sigma}$, 则

$$P(a < X < b) = \int_a^b \frac{1}{\sigma} \phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) dx = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right).$$

推论: 设随机变量 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则对一切正数 k , 有

$$P(\mu - k\sigma < X < \mu + k\sigma) = \Phi(k) - \Phi(-k) = 2\Phi(k) - 1$$

例如查表得 $\Phi(3) = 0.9987$, 因此

$$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) = \Phi(3) - \Phi(-3) = 0.9974$$

该结果说明正态随机变量 X 的取值基本落在区间 $(\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma)$ 内。

3.3.4 伽马分布

定义：如果随机变量 X 的分布密度为：

$$p(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}, \quad x > 0.$$

则称随机变量 X 服从伽马分布，记为 $X \sim \Gamma(\alpha, \beta)$ (参数 $\alpha, \beta > 0$)

其中，称 $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty y^{\alpha-1} e^{-y} dy$ 为 Γ 函数。

若 $\Gamma(\alpha)$ 为 Γ 函数，则函数具备以下性质：

$$(1) \Gamma(\alpha + 1) = \alpha \Gamma(\alpha)$$

证明：

$$\int_0^\infty y^\alpha e^{-y} dy = -y^\alpha e^{-y} \Big|_0^\infty + \int_0^\infty \alpha y^{\alpha-1} e^{-y} dy = \alpha \int_0^\infty y^{\alpha-1} e^{-y} dy$$

□

$$(2) \Gamma(1) = 1; \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

证明：

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{y}} e^{-y} dy = \sqrt{2} \int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{\pi}.$$

□

$$(3) \alpha = 1 \text{ 时就是指数分布参数为 } \beta.$$

3.4 随机变量的严格定义

定义：假设 (Ω, \mathcal{F}, P) 是概率空间， $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ 满足：

$$\text{对任意 } x \in \mathbb{R} \text{ 都有 } \{X \leq x\} \in \mathcal{F},$$

则称 X 是一个随机变量。

定义：令 $F(x) = P(X \leq x), x \in \mathbb{R}$. 称 F 为随机变量 X 的分布函数，也记为 F_X .

定理：分布函数 $F = F_X$ 的三条性质：

- (1) 单调性：若 $x \leq y$, 则 $F(x) \leq F(y)$.
- (2) 规范性： $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0; \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$.
- (3) 右连续性： $\lim_{y \rightarrow x+} F(y) = F(x)$.

- 离散型： $P(X = x_i) = p_i$. x_i 为 F_X 的跳点, p_i 为跳跃幅度.
- 连续型： $F_X(x) = \int_{-\infty}^x p(z)dz$, 且

$$p(x) = F'_X(x).$$

反过来, 若 F_X “几乎” 连续可导, 则为连续型 (定理 4.3, 4.4).

- 尾分布函数： $G(x) = P(X > x) = 1 - F(x)$.

连续型： $p(x) = -G'(x)$.

- 例. $X \sim \text{Exp}(\lambda)$.

$$\begin{aligned} G(x) &= e^{-\lambda x}, \quad \forall x > 0, \\ \Rightarrow G'(x) &= -\lambda G(x). \quad \lambda: \text{速率}. \end{aligned}$$

- 由 $F_X(x)$ 可求出 $P(X \in B), \forall B$.
- 若 $F_X = F_Y$, 则称 X 与 Y 同分布, 记为 $X \stackrel{d}{=} Y$.
- $X = Y$, 即 $P(X = Y) = 1$, 则 $F_X = F_Y$. 反之不然.

4.1 随机变量的函数

随机变量的函数：设 $y = g(x)$ 是定义在 \mathbb{R} 上的一个函数， X 是一个随机变量，那么 $Y = g(X)$ 作为 X 的函数，同样也是一个随机变量。

在实际问题中，如果已知随机变量 X 的分布，我们可以求出另一个随机变量 $Y = g(X)$ 的分布。我们将从离散和连续两种场合分别讨论随机变量函数的分布。

注：为了让 Y 是数学意义上严格定义的随机变量，必须对函数 $f(x)$ 有所假定才能使得 $\{Y \leq c\}$ 是有概率的事件，通常假定 $f(x)$ 是 Borel 函数，即对于任何实数 c ， $\{x : f(x) \leq c\}$ 是 Borel 集，有以下定理：

定理：设 $X = X(\omega)$ 是概率空间 (Ω, \mathcal{F}, P) 上的随机变量，则对任何 Borel 函数 $f(x)$ ， $Y = f(X(\omega))$ 也是这个概率空间上的随机变量。

证明：给定任意实数 c ，令

$$B = \{x : f(x) \leq c\}$$

则 $\{\omega : Y \leq c\} = \{\omega : f(X(\omega)) \leq c\} = \{\omega : X(\omega) \in B\}$ ，由于 B 是 Borel 集，则由定理 [?] 知 $\{\omega : X(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}$ ，所以 $\{Y \leq c\} \in \mathcal{F}$ ， Y 是随机变量。

我们遇到的随机函数一般都是 Borel 函数，所以 $Y = X(\omega)$ 一般都是随机变量。

4.1.1 离散随机变量函数的分布

设 X 是离散随机变量， X 的分布列为：则 $Y = g(X)$ 也是一个离散随机变量，此时 Y 的分布列可

X	x_1	x_2	\cdots	x_k	\cdots
p	p_{x_1}	p_{x_2}	\cdots	p_{x_k}	\cdots

以简单表示为：若 $p_{x_1}, p_{x_2}, \cdots, p_{x_k}, \cdots$ 中有某些值相等时，把那些相等的值分别合并，并将对应概

Y	$g(x_1)$	$g(x_2)$	\cdots	$g(x_k)$	\cdots
p	p_{x_1}	p_{x_2}	\cdots	p_{x_k}	\cdots

率相加。

例：已知随机变量 X 的分布如下，求 $Y = X^2 + X$ 的分布列。

X	-2	-1	0	1	2
p	0.2	0.1	0.1	0.3	0.3

解: $Y = X^2 + X$ 的分布列为

Y	2	0	0	2	6
p	0.2	0.1	0.1	0.3	0.3

合并得到

Y	0	2	6
p	0.2	0.5	0.3

定理: (离散卷积公式) 若 ξ, η 是相互独立的随机变量, 且取非负整数值, 分布列分别为 $\{k; a_k\}$ 和 $\{k; b_k\}$ 。则随机变量 $\zeta = \xi + \eta$ 的分布列为 $P(\zeta = k) = \sum_{i=0}^k a_i b_{k-i}$, 称为**卷积公式**。

证明: 注意到 $P(\zeta = k) = P(\xi = 0, \eta = k) + P(\xi = 1, \eta = k-1) + \cdots + P(\xi = k, \eta = 0)$ 。其中 $= P(\xi = i, \eta = k-i) = a_i b_{k-i}$, 因此 $P(\zeta = k) = \sum_{i=0}^k a_i b_{k-i}$ 。 \square

例: (泊松分布可加性) 设 $X \sim \mathcal{P}(\lambda_1), Y \sim \mathcal{P}(\lambda_2)$, 且 X, Y 相互独立, 证明 $X + Y \sim \mathcal{P}(\lambda_1 + \lambda_2)$ 。

解: 泊松分布函数 $P(X = k) = \frac{\lambda_1^k}{k!} e^{-\lambda_1}$, $P(Y = k) = \frac{\lambda_2^k}{k!} e^{-\lambda_2}$, 由卷积公式,

$$P(X + Y = k) = \sum_{i=0}^k P(X = i) P(Y = k-i) = \sum_{i=0}^k \frac{\lambda_1^i}{i!} e^{-\lambda_1} \frac{\lambda_2^{k-i}}{(k-i)!} e^{-\lambda_2}$$

由二项式展开, 上式整理为

$$\frac{e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)}}{k!} \sum_{i=0}^k \frac{\lambda_1^i \lambda_2^{k-i} k!}{i!(k-i)!} = \frac{e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)}}{k!} (\lambda_1 + \lambda_2)^k$$

\square

4.1.2 连续随机变量函数的分布

对于连续随机变量, 一般先求分布函数, 如果能写出分布密度就写出分布密度。

例: 设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 试求 $Y = \frac{1}{\sigma}(X - \mu)$ 的概率分布。

解: 对任何实数 y , 由于 $\{Y \leq y\} = \{X \leq \sigma y + \mu\}$, 于是

$$P(Y \leq y) = P(X \leq \sigma y + \mu)$$

$$= \int_{-\infty}^{\mu+\sigma y} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right\} dx$$

变量替换 $\frac{x-\mu}{\sigma} = t$ 得

$$P(Y \leq y) = \int_{-\infty}^y \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

说明 $Y \sim N(0, 1)$ □

定理: 设随机变量 X 有分布密度 $p(x)$, 且在区间 (a, b) ($-\infty \leq a < b \leq +\infty$) 上满足 $P(a < X < b) = 1$ 。又 $Y = f(X)$, 其中 $f(x)$ 是 (a, b) 上严格单调的连续函数, $g(y)$ 是 $f(x)$ 的反函数, 且 $g'(y)$ 处处存在, 令

$$q(y) = \begin{cases} p(g(y))|g'(y)|, & y \in (\alpha, \beta), \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

其中 (α, β) 是反函数 $g(y)$ 的存在区间, 即 $\alpha = \min\{A, B\}$, $\beta = \max\{A, B\}$, $A \triangleq \lim_{x \rightarrow a+} f(x)$, $B \triangleq \lim_{x \rightarrow b-} f(x)$, 则 $q(y)$ 是 Y 的分布密度。

证明: 设 $f(x)$ 是严格增函数 (当 $f(x)$ 是严格减函数时, 可以类似的证明)。那么对于 $u \in (\alpha, \beta)$ 有

$$\begin{aligned} P(Y \leq u) &= P(f(X) \leq u) = P(X \leq g(u)) \\ &= \int_{-\infty}^{g(u)} p(x) dx = \int_a^{g(u)} p(x) dx \end{aligned}$$

做变量替换 $x = g(y)$, 则

$$P(Y \leq u) = \int_a^u p(g(y)) |g'(y)| dy = \int_{-\infty}^u q(y) dy$$

当 $u \leq \alpha$ 时,

$$P(Y \leq u) = P(X \leq a) = 0 = \int_{-\infty}^u q(y) dy$$

当 $u \geq \beta$ 时,

$$\begin{aligned} P(Y \leq u) &= P(X \leq b) = 1 = \int_a^b p(x) dx \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} p(g(y)) |g'(y)| dy = \int_{-\infty}^u q(y) dy \end{aligned}$$

综上, 对于一切实数 u , 有 $P(Y \leq u) = \int_{-\infty}^u q(y) dy$, 故 $q(y)$ 是 $Y = f(X)$ 的密度函数。 □

例: (对应郑书例 5.3) 研究水箱内某种微生物的增长情况。设在时 0 微生物的总数是 v ($v > 0$), 增长率是 X , 在时刻 t 微生物总数是 $Y = ve^{Xt}$ ($t > 0$)。若 X 有分布密度

$$p(x) = \begin{cases} 3(1-x)^2, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

试求 Y 的概率分布。

解：反函数的求解需要注意函数和区间的变化。

令 $f(x) = ve^{Xt} (0 < x < 1)$ ，则其反函数为：

$$g(y) = \frac{1}{t} \ln \frac{y}{v} \quad (v < y < ve^t)$$

易知 $g'(y) = \frac{1}{ty}$ ，根据定理知， $Y = ve^{xt}$ 的分布密度是：

$$q(y) = \begin{cases} 3(1 - \frac{1}{t} \ln \frac{y}{v})^2 \frac{1}{ty}, & v < y < ve^t, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

□

例：(对应郑书例 5.4, 对数正态分布) 设 X 是只取正值的随机变量，使得 $Y = \ln X$ 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ ，试求出 X 的分布函数和分布密度。

解：对任何 $x > 0$ ，有

$$\begin{aligned} F_X(x) &= P(X \leq x) = P(\ln X \leq \ln x) = P(Y \leq \ln x) \\ &= \int_{-\infty}^{\ln x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} (y - \mu)^2 \right\} dy \end{aligned}$$

做变量替换 $y = \ln u$ ，得

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma u} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} (\ln u - \mu)^2 \right\} du$$

当 $x \leq 0$ 时，称变量 X 服从对数正态分布。不难看出， X 的分布密度 $p(u)$ 为：当 $u \leq 0$ 时， $p(u) = 0$ ，当 $u > 0$ 时， $p(u)$ 是上式中的被积函数。 □

例：设 $\theta \sim U(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ， $\psi = \tan \theta$ ，求 ψ 的密度函数。

解：设 $\psi = \tan \theta$ 的反函数为 $g(y)$ ，则 $g(y) = \arctan y$ 。由定理得 $p_\psi(y) = p_{U(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})}(g(y))g'(y) = p_{U(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})}(\arctan y) \frac{1}{1+y^2} = \frac{1}{\pi(1+y^2)}$ ， $y \in \mathbb{R}$ ，称该变量 ψ 符合 **Cauchy 分布**。 □

4.2 随机变量的反函数

随机变量的反函数： 设 $F(x)$ 是任何分布函数（即 $F(x)$ 非减，右连续，且 $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$ ），令

$$F^{-1}(p) \triangleq \min \{x : F(x) \geq p\} \quad (0 < p < 1)$$

则称 $F^{-1}(p)$ 是 $F(x)$ 的**广义反函数**。

注意， $F(x)$ 是右连续增函数，满足不等式 $F(x) \geq p$ 的 x 中必有最小者，当 $F(x)$ 是严格增的连续函数时， $F^{-1}(p)$ 正好是方程 $F(x) = p$ 的唯一根，此时 $F^{-1}(p)$ 是 $F(x)$ 的普通反函数。

引理： $F^{-1}(p)$ ($0 < p < 1$) 有如下性质：

(1) $F^{-1}(p)$ 是 p 的增函数。

(2) $F(F^{-1}(p)) \geq p$ ，若 $F(x)$ 在点 $x = F^{-1}(p)$ 处连续，则

$$F(F^{-1}(p)) = p.$$

(3) $F^{-1}(p) \leq x$ 的充分必要条件是 $p \leq F(x)$ 。

证明： (2) 由于 $F(F^{-1}(p) + \varepsilon) \geq p$ ($\forall \varepsilon > 0$)，令 $\varepsilon \rightarrow 0$ ，利用 $F(x)$ 的右连续性知 $F(F^{-1}(p)) \geq p$ 。若 $F(x)$ 在点 $F^{-1}(p)$ 处连续，从 $F(F^{-1}(p) - \varepsilon) < p$ ($\varepsilon > 0$) 推知 $F(F^{-1}(p)) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F(F^{-1}(p) - \varepsilon) \leq p$ ，从而 $F(F^{-1}(p)) = p$ 。

(3) 若 $F(x) \geq p$ ，从非减性质知 $x \geq F^{-1}(p)$ ；反之若 $x \geq F^{-1}(p)$ ，则 $F(x) \geq F(F^{-1}(p)) \geq p$ ，故性质 (3) 成立。 \square

定理： 设 $F(x)$ 是任何分布函数，若 U 是服从区间 $[0, 1]$ 上的均匀分布的随机变量，且

$$X = F^{-1}(U)$$

则 X 的分布函数恰好是 $F(x)$ 。

证明： 对任何 $y \in (0, 1)$ ，从性质 (3) 知 $x \geq F^{-1}(y)$ 的充分必要条件是 $F(x) \geq y$ ，于是

$$P(X \leq x) = P(F^{-1}(U) \leq x) = P(U \leq F(x)) = F(x).$$

这表明 X 的分布函数是 $F(x)$ 。 \square

5.1 随机变量的数学期望

实际问题的概率分布比较难以确定,有时只需掌握随机变量的数学特征就足够了。随机变量的数学期望(expectation)的含义是,随机变量平均取值(mean)的大小。

- X 的大量独立观测值(记为 a_1, a_2, \dots, a_n) 的算术平均,当样本数无穷大时,算术平均收敛于期望值:

$$\bar{a} = \frac{1}{n} (a_1 + \dots + a_n).$$

- X 的所有可能值的加权平均(总和).

5.1.1 离散型随机变量的数学期望

离散型随机变量的数学期望: 假设 X 是离散型随机变量,分布列为

$$P(X = x_k) = p_k, \quad k = 1, \dots, n \text{ 或 } k = 1, 2, \dots.$$

其中 X 的可能值是 x_1, x_2, \dots , 如果 $\sum_k |x_k| p_k < \infty$, 那么,称 X 的期望存在,称 $\sum_k x_k p_k$ 为 X 的数学期望,记为 EX .

注意,级数 $\sum_k |x_k| p_k$ 收敛可以保证和数 $\sum_k x_k p_k$ 与加项的先后次序无关。更一般的假定是级数 $\sum_k x_k^+ p_k$ 和 $\sum_k x_k^- p_k$ 中至少一个收敛(这里 $x_k^+ = \max\{x_k, 0\}$, $x_k^- = \max\{-x_k, 0\}$) 这时和数 $\sum_k x_k p_k$ 与加项的先后次序无关。

注意到 $E(X)$ 完全由 X 的概率分布确定,因此 $E(X)$ 也称为相应概率分布的期望,下面计算几个常见的概率分布的期望:

(1) 两点分布

设随机变量 X 服从两点分布, $P(X = 1) = p, P(X = 0) = 1 - p$. 则,

$$E(X) = 1 \cdot p + 0 \cdot (1 - p) = p.$$

(2) 二项分布

设随机变量 X 服从二项分布: $P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k} := b(n; k), k = 0, 1, \dots, n, (q = 1 - p)$.

对于 $\forall 1 \leq k \leq n$,

$$\begin{aligned} k \cdot b(n; k) &= k \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} p^k q^{n-k} \\ &= \frac{n \cdot (n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} p \cdot p^{k-1} q^{n-k} = np \cdot b(n-1; k-1) \end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=0}^n k \cdot b(n; k) = \sum_{k=1}^n np \cdot b(n-1; k-1) \\ &= np \sum_{\ell=0}^{n-1} b(n-1, \ell) = np. \end{aligned}$$

(3) 泊松分布

设随机变量 X 服从泊松分布:

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} =: p_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

则对于 $\forall k \geq 1$,

$$k p_k = k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \lambda \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda} = \lambda p_{k-1}.$$

因此,

$$E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} k p_k = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda p_{k-1} = \lambda \sum_{\ell=0}^{\infty} p_{\ell} = \lambda.$$

(4) 几何分布

设随机变量 X 满足几何分布, 即

$$P(X = k) = q^{k-1} p =: p_k, \quad k = 1, 2, \dots, (q = 1 - p).$$

直接计算期望:

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} k p_k = \frac{1}{p}.$$

(5) 离散均匀分布

设随机变量 X 的可能值是 $1, \dots, N$, 且

$$P(X = k) = \frac{1}{N} \quad (k = 1, \dots, N).$$

直接计算

$$E(X) = \sum_{k=1}^N k P(X = k) = \frac{N+1}{2}.$$

(6) 超几何分布

设随机变量 X 满足超几何分布, 即

$$P(X = k) = \frac{C_D^k C_{N-D}^{n-k}}{C_N^n}, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

记 $h(N, D, n; k) = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$

$$= \frac{D!}{k!(D-k)!} \cdot \frac{(N-D)!}{(n-k)!(N-D-(n-k))!} \cdot \frac{n!(N-n)!}{N!}.$$

记 $x' = x - 1$. 则, $\forall 1 \leq k \leq n$,

$$k \cdot A_1 = \frac{D!}{(k-1)!(D-k)!} = D \times \frac{D!}{k!(D-k')!}.$$

进一步,

$$A_2 = \frac{(N'-D')!}{(n'-k')!(N'-D'-(n'-k'))!},$$

$$A_3 = \frac{n \cdot n'! (N' - n')!}{N \cdot N'!} = \frac{n}{N} \times \frac{n'! (N' - n')!}{N'!}.$$

记 $x' = x - 1$. 则 $\forall 1 \leq k \leq n$,

$$k \cdot h(N, D, n; k) = \frac{nD}{N} \times h(N', D', n'; k').$$

因此,

$$E(X) = \sum_{k=1}^n k \cdot h(N, D, n; k) = \frac{nD}{N} \sum_{k'=0}^{n'} h(N', D', n'; k') = \frac{nD}{N}$$

对于该期望, 当 $D = 1$ 时, 退化为伯努利分布, $E(X) = p = \frac{D}{N}$.

当 $D \geq 2$ 时, 不放回抽样, 仍有 $E(X) = np$.

5.1.2 一般随机变量的数学期望

若 X 为任意随机变量. 做如下近似: 对于 $\forall n \in \mathbb{Z}$,

$$\text{当 } n\varepsilon < X \leq (n+1)\varepsilon \text{ 时, 令 } X^* = n\varepsilon. \quad (5.1.1)$$

该假设的直观含义是: $X^* \leq X < X^* + \varepsilon$, 因此 $EX^* \leq EX < EX^* + \varepsilon$.

一般随机变量的数学期望: 若 EX^* 存在且当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时有极限, 则称 X 的期望存在, 且称该极限为 X 的期望, 记为 $E(X)$ 。

对离散型随机变量, 离散型随机变量期望的定义和一般随机变量的数学期望的定义一致。

例: 对于连续性随机变量 X , 且 $X \geq 0$. 证明 $E(X) = \int_0^{+\infty} P(X > x)dx$.

解: 令

$$G(x) = P(X > x) = \int_x^{\infty} p(y)dy$$

则 $G'(x) = -p(x)$. 于是,

$$\int_0^{\infty} xp(x)dx = \int_0^{\infty} x dG(x) = \int_0^{\infty} G(x)dx.$$

接下来, 我们计算一些常见连续型随机变量的数学期望:

(1) 均匀分布

设随机变量 X 服从区间 $[a, b]$ 上的均匀分布, 即 X 有密度分布:

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

由定义知

$$E(X) = \int_a^b x \frac{1}{b-a} dx = \frac{a+b}{2}.$$

(2) 指数分布

设随机变量 X 有分布密度

$$p(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x > 0, \lambda > 0.$$

由定义知 $E(X) = \int_0^{\infty} x \cdot \lambda e^{-\lambda x} dx = - \int_0^{\infty} x de^{-\lambda x} = \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda}$.

(3) 正态分布

设随机变量 X 有分布密度

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

对于 $X \sim N(0, 1)$, 由对称性直接计算得,

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 0$$

同理, $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则 $p(\mu+x) = p(\mu-x)$, 因此 $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x+\mu)p(\mu+x)d(x+\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x+\mu)dx + \mu \int_{-\infty}^{\infty} p(x+\mu)dx = \mu$.

例, 对于柯西分布,

$$p(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+x^2}.$$

但是, $\int_{-\infty}^{\infty} |x|p(x)dx = \infty$. 因此, EX 不存在!

(4) 伽马分布

设随机变量 X 有分布密度

$$p(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}, \quad x > 0$$

对于 $\forall x > 0$,

$$xp(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^\alpha e^{-\beta x} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\beta \Gamma(\alpha)} \cdot \frac{\beta^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1)} x^\alpha e^{-\beta x} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \hat{p}(x).$$

因此,

$$E(X) = \int_0^\infty xp(x)dx = \frac{\alpha}{\beta} \int_0^\infty \hat{p}(x)dx = \frac{\alpha}{\beta}$$

5.1.3 数学期望的性质

定理: (1) 若 $X \equiv a$, 则 $E(X) = a$;

(2) 若 $X \geq 0$, 且 $E(X)$ 存在, 则 $EX \geq 0$;

(3) 若 $F_X = F_Y$ (或, 若 $X = Y$), 且 $E(X)$ 存在, 则 $E(Y)$ 存在, 且 $E(X) = E(Y)$;

(4) 线性: 假设 $E(X), E(Y)$ 存在. 则,

$$E(a(X)) = aE(X), \quad E(X+Y) = E(X) + E(Y).$$

(5) 单调性: 假设 $E(X), E(Y)$ 存在, 又若 $X \geq Y$, 则 $E(X) \geq E(Y)$;

(6) $E|X| \geq |E(X)|$;

(7) 若随机变量 X, Y 独立, 且期望 $E(X), E(Y)$ 存在, 则

$$E(XY) = E(X)E(Y).$$

推论: (1) 线性: 假设 $E(X), E(Y)$ 存在. 则,

$$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y).$$

(2) 和的期望: 假设 $E(X_1), \dots, E(X_n)$ 都存在, $\eta = X_1 + \dots + X_n$. 则 $E(\eta)$ 存在, 且

$$E(\eta) = \sum_{i=1}^n E(X_i)$$

推论 (1) 可以由性质 (4) 推出, 推论 (2) 可以由数学归纳法和性质 (4) 推出。

例：超几何分布 $\eta \sim H(N, D, n)$ 的期望可以使用推论 (2) 计算：若第 i 个产品是次品，则令 $X_i = 1$ ；否则，令 $X_i = 0$ 。则，

$$\eta = X_1 + \cdots + X_n \Rightarrow E(\eta) = np$$

马尔科夫不等式：设 $X \geq 0$ ，且 EX 存在。则对任意 $C > 0$ ，有

$$P(X \geq C) \leq \frac{1}{C}EX.$$

证明：令 $A = \{X \geq C\}$ 。则 $1_A \leq \frac{X}{C}$ 。于是，

$$P(A) = E1_A \leq E\frac{X}{C} = \frac{1}{C}EX.$$

例：若 $X \geq 0$ ，且 $EX = 0$ ，证明 $P(X > 0) = 0$ 。

解：

$$\begin{aligned} P\left(X \geq \frac{1}{n}\right) &\leq nEX = 0 \\ \Rightarrow P(X > 0) &= \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(X \geq \frac{1}{n}\right) = 0. \end{aligned}$$

□

5.2 随机变量函数的期望

定理：(1) X 是离散型随机变量，且下面的级数绝对收敛，则

$$Ef(X) = \sum_k f(x_k) p_k \quad (5.2.1)$$

(2) X 是连续型随机变量，且下面的积分绝对收敛，则

$$Ef(X) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)p(x)dx. \quad (5.2.2)$$

例：(对应郑书例 6.1) 设 $X \sim U(0, 2\pi)$ ，求 $E(\sin X)$ 。

解：令 $p(x)$ 是 x 的分布密度，用公式：

$$E \sin X = \int_{-\infty}^{\infty} \sin x \cdot p(x)dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin x dx = 0$$

□

例：(对应郑书例 6.2) 设随机变量 X 服从参数为 λ 的指数分布，又 $v_0 > 0$,

$$Y = \begin{cases} X, & X < v_0, \\ v_0, & X \geq v_0, \end{cases}$$

求 $E(Y)$ 。

解：设 $f(x) = \min\{x, v_0\}$ ，则 $Y = f(X)$ ，由于 X 的分布密度是

$$p(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0, \\ 0, & X \leq 0, \end{cases}$$

由式 5.2.2 知

$$\begin{aligned} E(Y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)p(x)dx = \int_0^{+\infty} f(x)\lambda e^{-\lambda x}dx \\ &= \int_0^{v_0} x\lambda e^{-\lambda x}dx + \int_{v_0}^{+\infty} v_0\lambda e^{-\lambda x}dx \\ &= \frac{1}{\lambda}(1 - e^{-\lambda v_0}) \end{aligned}$$

□

琴生不等式：若 ϕ 为凸函数，则

$$\phi(E(X)) \leq E(\phi(X)).$$

将期望等价于平均，代入琴生不等式即可证明。

例：连续型随机变量 X, Y 的概率密度函数分别为 $p(x), q(x)$ 且 $p(x), q(x) \neq 0$ ， f 为一凸函数， $f(1) = 0$ ，证明： $E_{x \sim q} f\left(\frac{p(x)}{q(x)}\right) \geq 0$ 。

证明：由琴生不等式，

$$E_{x \sim q} f\left(\frac{p(x)}{q(x)}\right) \geq f\left(E_{x \sim q}\left(\frac{p(x)}{q(x)}\right)\right) = f\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{p(x)}{q(x)} q(x) dx\right) = f(1) = 0.$$

例：连续型随机变量 X, Y 的概率密度函数分别为 $p(x), q(x)$ 且 $p(x), q(x) \neq 0$ ，我们定义 X 关于 Y 的 KL-divergence 为 $KL(X||Y) = E_X\left(\ln \frac{p(x)}{q(x)}\right)$ ，试证明 $KL(X||Y) \geq 0$ 。

证明：

$$KL(X||Y) = \int p(x) \left(-\ln \frac{q(x)}{p(x)}\right) dx,$$

由于 $-\ln x$ 是凸函数，由琴生不等式知

$$\int p(x) \left(-\ln \frac{q(x)}{p(x)}\right) dx \geq -\ln \left(\int p(x) \frac{q(x)}{p(x)} dx\right) = -\ln 1 = 0.$$

□

例：设随机变量 X 服从参数为 λ 的泊松分布，证明

$$E(X^n) = \lambda E((X+1)^{n-1}).$$

利用此结果计算 $E(X^3)$ 。

证明：

$$E(X^n) = \sum_{k=0}^{\infty} k^n \frac{\lambda^n}{k!} e^{-\lambda} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} k^{n-1} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}$$

设 $k' = k - 1$ ，则

$$E(X^n) = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k'=0}^{\infty} (k'+1)^{n-1} \frac{\lambda^{k'}}{k'!} = \lambda E((X+1)^{n-1}).$$

由此得

$$E(X^3) = \lambda E(X+1)^2 = \lambda(E(X^2) + 2E(X) + 1) = \lambda(\lambda E(X+1) + 2\lambda + 1) = \lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda.$$

例：设 X 是仅取非负整数的离散随机变量，若其数学期望存在，证明

$$(1) E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} P(X \geq k).$$

$$(2) \sum_{k=0}^{\infty} kP(X > k) = \frac{1}{2}[E(X^2) - E(X)].$$

证明：(1) 由于 $E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} kP(X = k)$ 存在，所以该级数绝对收敛，从而

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=1}^{\infty} kP(X = k) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^k P(X = k) \right] \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \left[\sum_{k=i}^{\infty} P(X = k) \right] = \sum_{k=1}^{\infty} P(X \geq k). \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} kP(X > k) &= \sum_{k=0}^{\infty} k \sum_{i=k+1}^{\infty} P(X = i) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{i-1} kP(X = i) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} P(X = i) \frac{(i-1)i}{2} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} i^2 P(X = i) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} i P(X = i) \\ &= \frac{1}{2} E(X^2) - \frac{1}{2} E(X). \end{aligned}$$

例：甲乙两人进行象棋比赛，每局甲胜的概率为 p ，乙胜的概率为 $q = 1 - p$ ，比赛进行到有一人连胜两局为止，求平均比赛局数。

解：设 X 为决定胜负所需的局数，可以取值为 $2, 3, \dots$ ，事件 $\{X \geq k\}$ 表示“到 $k-1$ 局时没有一人连胜两局”，所以

$$P(X \geq 1) = 1,$$

$$P(X \geq 2k) = p^k q^{k-1} + p^{k-1} q^k = (pq)^{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

$$P(X \geq 2k+1) = 2p^k q^k, \quad k = 1, 2, \dots.$$

利用上一题第一问提供的公式，可得

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=1}^{\infty} P(X \geq k) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (pq)^{k-1} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (pq)^k \\ &= 1 + \frac{1}{1-pq} + \frac{2pq}{1-pq} = \frac{2+pq}{1-pq}. \end{aligned}$$

注意到对任意的 $0 < p < 1$ 总有 $p(1-p) \leq \frac{1}{4}$ ，故由 $E(X)$ 关于 pq 单调增可得

$$E(X) \leq \frac{2+\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}} = 3$$

故这种比赛最终决定胜负的平均局数不超过 3 局，在 $p = \frac{1}{2}$ 时达到上界。

5.3 随机变量的方差

随机变量的方差和标准差：假设 $E(X)$ 存在，且 $E(X - EX)^2$ 也存在。则称 $E(X - EX)^2$ 为 X 的方差，记为 $\text{var}(X)$ 或 $D(X)$ 。称 $\sqrt{\text{var}(X)}$ 为标准差。

切比雪夫不等式：设 X 是随机变量，如果 $E(X)$ 和 $\text{var}(X)$ 都存在，则 $\forall \varepsilon > 0$ ，有

$$P(|X - EX| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \text{var}(X). \quad (5.3.1)$$

证明： $\{|X - EX| \geq \varepsilon\} = \{(X - EX)^2 \geq \varepsilon^2\}$ ，对 $Y = (X - EX)^2$ 用马尔可夫不等式，得

$$P(|X - EX| \geq \varepsilon) = P(Y \geq \varepsilon^2) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} E(Y).$$

□

推论：若 $\text{var}(X) = 0$ ，则

$$P(X = E(X)) = 1.$$

证明：由切比雪夫不等式知

$$P(|X - E(X)| \geq \frac{1}{n}) = 0 \quad (n = 1, 2, \dots),$$

于是

$$\begin{aligned} P(X \neq E(X)) &= P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{|X - E(X)| \geq \frac{1}{n}\right\}\right) \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} P(|X - E(X)| \geq \frac{1}{n}) = 0. \end{aligned}$$

所以 $P(X = E(X)) = 1$ 。 □

对于方差的计算方法，有以下定理：

定理： X 为一般随机变量，且期望 $E(X^2)$ 和 $E(X)$ 存在，则

$$\text{var}(X) = E(X^2) - (EX)^2. \quad (5.3.2)$$

证明：

$$\begin{aligned} \text{var}(X) &= E(X^2 - 2X \cdot EX + (EX)^2) \\ &= E(X^2) - 2E(X) \cdot E(X) + (E(X))^2 = E(X^2) - (EX)^2 \end{aligned}$$

具体地，离散型或连续型的公式如下：

$$\begin{aligned} \text{var}(X) &= \sum_k x_k^2 p_k - (EX)^2 \\ \text{var}(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x) dx - (EX)^2 \end{aligned}$$

□

定理： X 的线性变换的方差：

$$\text{var}(aX + b) = a^2 \text{var}(X)$$

该定理可以利用式5.3.2计算。

$$\begin{aligned} \text{var}(aX + b) &= E((aX + b)^2) - (E(aX + b))^2 \\ &= (a^2 E(X^2) + 2abE(X) + b^2) - (a^2 (E(X))^2 + 2abE(X) + b^2) \\ &= a^2 (E(X^2) - (E(X))^2) = a^2 \text{var}(X) \end{aligned}$$

□

定理： 设 X 为随机变量，则方差 $D(X) = \inf_{c \in \mathbb{R}} E(X - c)^2$ 。

证明：【方法一】 利用 $E(X + c) = E(X) + c$ 与 $D(X + c) = D(X)$ ，可得

$$D(X) = D(X - c) = E(X - c)^2 - (E(X - c))^2 \leq E(X - c)^2.$$

等号成立条件是 $E(X) = c$ 。

【方法二】利用

$$\begin{aligned} E(X - c)^2 &= E(X - E(X) + E(X) - c)^2 \\ &= D(X) + 2E[(X - E(X))(E(X) - c)] + (E(X) - c)^2 \\ &= D(X) + (E(X) - c)^2. \end{aligned}$$

在 $c = E(X)$ 处取得最小值 $D(X)$ 。 □

下面计算常见随机变量的方差：

(1) 两点分布

设随机变量 X 服从两点分布，即 $X \sim B(1, p)$ ，根据之前的计算 $E(X) = p$ ， $E(X^2) = 0^2 \cdot P(X = 0) + 1^2 \cdot P(X = 1) = p$ ，由式5.3.2知

$$D(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = p - p^2 = p(1 - p)$$

(2) 二项分布

设随机变量 X 服从参数为 n, p 的二项分布，即

$$P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k} =: b(n; k), \quad k = 0, 1, \dots, n, (q = 1 - p).$$

已经计算期望 $EX = np$ ，且由分布函数知，对于 $\forall 1 \leq k \leq n$ ，

$$k \cdot b(n; k) = np \cdot b(n - 1, k - 1).$$

那么对于 $\forall 2 \leq k \leq n$ ，

$$\begin{aligned} k(k - 1) \cdot b(n; k) &= np \cdot (k - 1) \cdot b(n - 1, k - 1) \\ &= np \cdot (n - 1)p \cdot b(n - 2, k - 2) \end{aligned}$$

于是，

$$E(X(X - 1)) = \sum_{k=2}^n k(k - 1) \cdot b(n; k) = np(n - 1)p \sum_{k=2}^n b(n - 2; k - 2) = np(n - 1)p = (np)^2 - np^2,$$

从而

$$D(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = E(X(X - 1)) + E(X) - (E(X))^2 = npq.$$

(3) 泊松分布

设随机变量 X 服从参数为 λ 的泊松分布, 即

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

已经计算 X 的期望 $E(X) = \lambda$, 且由分布函数, $\forall k \geq 1, kp_k = \lambda p_{k-1}$. 因此, 对于 $\forall k \geq 2$,

$$k(k-1)p_k = \lambda(k-1)p_{k-1} = \lambda^2 p_{k-2}.$$

于是,

$$E(X(X-1)) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) \cdot p_k = \lambda^2 \sum_{k=2}^{\infty} p_{k-2} = \lambda^2,$$

从而

$$Dvar(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = E(X(X-1)) + E(X) - (E(X))^2 = \lambda.$$

(4) 均匀分布

设随机变量 X 服从区间 $[a, b]$ 上的均匀分布, 即 X 有密度分布:

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

已经计算 X 的期望 $E(x) = \frac{a+b}{2}$, 且

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x) dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b x^2 dx = \frac{b^2 + ab + a^2}{3}.$$

由式5.3.2得

$$D(X) = \frac{b^2 + ab + a^2}{3} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

(5) 指数分布

设随机变量 X 服从参数为 λ 的指数分布, 即 X 的分布函数为:

$$p(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0, \\ 0, & X \leq 0, \end{cases}$$

已经计算期望 $E(X) = \frac{1}{\lambda}$, 且

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x) dx = \lambda \int_0^{+\infty} x^2 e^{-\lambda x} dx = \frac{2}{\lambda^2}$$

由式5.3.2得

$$D(X) = \frac{2}{\lambda^2} - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$

(6) 正态分布

设随机变量 X 服从正态分布, 即 X 的分布函数为:

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

若 $\mu = E(X) = 0, \sigma^2 = 1$, 则,

$$\begin{aligned} D(X) &= E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\ &= -\frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} x d e^{-\frac{x^2}{2}} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1 \end{aligned}$$

一般情形, 做变量替换 $Y = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$. 则

$$\begin{aligned} X - E(X) &= (\mu + \sigma Y) - (\mu + \sigma E(Y)) = \sigma(Y - E(Y)) \\ \Rightarrow D(X) &= E((X - E(X))^2) = E(\sigma(Y - E(Y))^2) = \sigma^2 D(Y) = \sigma^2 \end{aligned}$$

(7) 伽马分布

设随机变量 X 服从伽马分布, 有分布密度

$$p(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}, \quad x > 0$$

已经计算 X 的期望 $E(X) = \frac{\alpha}{\beta}$, 由式5.3.2知

$$D(X) = \int_0^{+\infty} x^2 \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} dx - \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2$$

做变量替换 $\beta x = t$, 易知

$$\begin{aligned} D(X) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^2} \int_0^{+\infty} t^{\alpha+1} e^{-t} dt - \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^2} \Gamma(\alpha+2) - \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 \\ &= \frac{(\alpha+1)\alpha\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha)\beta^2} - \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 = \frac{\alpha}{\beta^2} \end{aligned}$$

随机变量的标准化: 一般地, 若 X 的方差存在, 且 $\text{var}(X) > 0$, 则

$$X^* = \frac{X - E(X)}{\sqrt{\text{var}(X)}}$$

满足 $E(X^*) = 0, \text{var}(X^*) = 1$. 称 X^* 为 X 的标准化。

例：设随机变量 $X \sim N(0, 1)$, 则对一切正整数 k ,

$$E(X^{2k-1}) = 0, \quad E(X^{2k}) = (2k-1)(2k-3)\cdots 3 \cdot 1.$$

证明：对任何 $m \geq 1$, 积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} |x|^m e^{-x^2/2} dx$ 收敛, 因此 $E(X^m)$ 存在, 由于

$$x^{2k-1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

是 x 的奇函数, 故

$$E(X^{2k-1}) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2k-1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx = 0$$

$$\begin{aligned} E(X^{2k}) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2k} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x^{2k-1} d(e^{-x^2/2}) \\ &= (2k-1) \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2k-2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx \\ &= (2k-1) E(X^{2k-2}). \end{aligned}$$

这是递推公式, 故

$$E(X^{2k}) = (2k-1)(2k-3)\cdots 3 \cdot 1$$

例：设随机变量 X 的概率密度函数为 $f(x) = \frac{k\theta^k}{x^{k+1}}, x > \theta > 0, k > 2$ 为正整数, 求 (1) $E(X)$, (2) $D(X)$.

解：(1):

$$E(X) = \int_{\theta}^{+\infty} \frac{k\theta^k}{x^{k+1}} x dx = \frac{k\theta}{k-1}.$$

(2):

$$D(X) = \int_{\theta}^{+\infty} \frac{k\theta^k}{x^{k+1}} x^2 dx - (E(X))^2 = \frac{3k-2k^2}{(k-2)(k-1)^2}.$$

例：设连续随机变量 X 的分布函数为 $F(x)$, 且数学期望存在, 证明:

$$E(X) = \int_0^{\infty} [1 - F(x)] dx - \int_{-\infty}^0 F(x) dx.$$

证明：

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x) dx = \int_{-\infty}^0 xp(x) dx + \int_0^{\infty} xp(x) dx.$$

将第一个积分改写为:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^0 xp(x)dx &= \int_{-\infty}^0 -\left(\int_x^0 dy\right)p(x)dx \\ &= -\int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^y p(x)dx dy \\ &= -\int_{-\infty}^0 F(y)dy.\end{aligned}$$

第二个积分同理,

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} xp(x)dx &= \int_0^{\infty} \left(\int_0^x dy\right)p(x)dx \\ &= \int_0^{\infty} \int_y^{\infty} p(x)dx dy \\ &= \int_0^{\infty} [1 - F(y)]dy.\end{aligned}$$

将二式加和即可得

$$E(X) = \int_0^{\infty} [1 - F(x)]dx - \int_{-\infty}^0 F(x)dx.$$

5.4 随机变量的其他数学特征

原点矩和中心矩:

设 X 是随机变量, 如果 $E(X^k)$ 存在 (k 是正整数), 则称 $E(X^k)$ 是 X 的 k 阶原点矩, 常常记为 ν_k 。

设 X 是随机变量, 如果 $E(X)$ 存在, 且 $E(X - E(X))^k$ 存在 (k 是正整数), 则称 $E(X - E(X))^k$ 为 X 的 k 阶中心矩, 常常记为 μ_k 。

显然, $E(X) = \nu_1$, $\text{var}(X) = \mu_2$ 。

随机变量的 p 分位数: 若 X 是随机变量, $0 < p < 1$, 且

$$P(X < a) \leq p \leq P(X \leq a),$$

则称 a 为 X 的一个 p 分位数。

$p = 0.5$ 时, 也称 a 为一个中位数。

例: 设随机变量 X 的可能值是 1, 2, 3 且

$$P(X = 1) = \frac{1}{3}, \quad P(X = 2) = \frac{1}{6}, \quad P(X = 3) = \frac{1}{2}.$$

则 $E(X) = \frac{13}{6}$, 中位数有无穷个, 区间 $[2, 3]$ 中的每个数都是 X 的中位数。

例: (对应郑书例 8.3) 设随机变量 $X \sim N(0, 1)$, 则对一切正整数 k ,

$$E(x^{2k-1}) = 0, \quad E(X^{2k}) = (2k-1)(2k-3) \cdots 3 \cdot 1.$$

□

定理: 设 $X = X(\omega)$ 是随机变量, 对某个 $\alpha \geq 1$, $E(|X|^\alpha)$ 存在, 则 $E(X)$ 存在, 且

$$E(|X|) \leq (E(|X|^\alpha))^{1/\alpha}.$$

证明: 首先指出, 对一切 $x \geq 0$, $\alpha \geq 0$, 如下不等式成立:

$$x^\alpha \geq a^\alpha + \alpha a^{\alpha-1}(x-a). \quad (5.4.1)$$

实际上, 令 $f(x) = x^\alpha - a^\alpha - \alpha a^{\alpha-1}(x-a)$, 则 $f'(x) = \alpha(x^{\alpha-1} - a^{\alpha-1})$, 从而 $f(x)$ 在 $x = a$ 处达到最小值, 由于 $f(a) = 0$, 因此式 5.4.1 成立。

由于 $\alpha \geq 1$, 有 $|X(\omega)| \leq |X(\omega)|^\alpha + 1$, 知 $E(X)$ 存在。令 $a = E(X)$, 由式 5.4.1 知

$$|X(\omega)|^\alpha \geq (E(|X|))^\alpha + \alpha(E(|X|))^{\alpha-1}(|X(\omega)| - E(|X|)).$$

两侧取数学期望, 得 $(E(|X|))^\alpha \leq E(|X|^\alpha)$, 表明定理成立。

□

6.1 随机向量的定义

n 维随机向量：称 n 个随机变量 X_1, \dots, X_n 的整体 $\xi = (X_1, \dots, X_n)$ 为 n 维随机向量（或者 n 维随机变量），一维随机向量简称随机变量。

n 维随机变量数学上的精确定义：设 $X_1 = X_1(\omega), \dots, X_n = X_n(\omega)$ 都是概率空间 (Ω, \mathcal{F}, P) 上的随机变量，则称

$$\xi = \xi(\Omega) \triangleq (X_1(\omega), \dots, X_n(\omega))$$

为概率空间 (Ω, \mathcal{F}, P) 上的 n 维随机向（变）量。

例如，用炮弹向远处目标攻击，炮弹的落点用平面坐标系中的坐标表示为 (X, Y) ，是一个二维随机向量。

随机向量的函数：设 $X_1 = X_1(\omega), \dots, X_n = X_n(\omega)$ 是 n 个随机变量， $f(x_1, \dots, x_n)$ 是 n 元实值函数，则称随机变量 $Y \triangleq f(x_1, \dots, x_n)$ 为随机变量 X_1, \dots, X_n 的函数（即随机向量 (X_1, \dots, X_n) 的函数）。

6.2 二维随机变量的联合分布和边缘分布

6.2.1 离散情形

离散型二维随机向量：称二维随机向量 $\xi = (X, Y)$ 是离散型的，若它只取至多可列个不同的值，即 ξ 可能取的值可以排成一个（有限或无穷序列）。

二维离散型随机向量的概率分布：设 $\xi = (X, Y)$ 是二维离散型随机向量，其可能值是 a_1, a_2, \dots （有限个或者无穷可列个）， $p_i \triangleq P(\xi = a_i) (i = 1, 2, \dots)$ ，则称

$$\{p_i : i = 1, 2, \dots\}$$

为 ξ 的概率分布，也称为 ξ 的概率函数或概率分布律。 $\xi = (X, Y)$ 的概率分布也叫做 (X, Y) 的联合概率分布（简称联合分布）。

令

$$p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j) \quad (i, j = 1, 2, \dots),$$

$\{p_{ij}\}$ 就是 $\xi = (X, Y)$ 的概率分布，可以用表6.3来表示，表6.3也称 $\xi = (X, Y)$ 的概率分布表。

联合分布满足性质：

表 6.3: (X, Y) 的概率分布表。

$X \backslash Y$					
	y_1	y_2	\cdots	y_j	\cdots
x_1	p_{11}	p_{12}	\cdots	p_{1j}	\cdots
x_2	p_{21}	p_{22}	\cdots	p_{2j}	\cdots
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
x_i	p_{i1}	p_{i2}	\cdots	p_{ij}	\cdots
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots

(1) 非负性: $p_{ij} \geq 0, i, j = 1, 2, \cdots$;

(2) 规范性: $\sum_{i,j} p_{ij} = 1$ 。

例: (三项分布) 设二维随机向量 $\xi = (X, Y)$ 取值于集合 $E = \{(k_1, k_2) : k_1 \text{ 和 } k_2 \text{ 都是非负整数且 } k_1 + k_2 \leq n\}$, ξ 的概率分布是:

$$P((X, Y) = (k_1, k_2)) = \frac{n!}{k_1!k_2!(n - k_1 - k_2)!} p_1^{k_1} p_2^{k_2} (1 - p_1 - p_2)^{n - k_1 - k_2},$$

其中 $n \geq 1, 0 < p_1, 0 < p_2, p_1 + p_2 < 1, (k_1, k_2) \in E$, 这时称 ξ 服从三项分布。

例: 有一大批量粉笔, 其中 60% 是白的, 25% 是黄的, 15% 是红的, 现从中随机的依次取出 6 支, 问: 其中恰有 3 支白色, 1 支黄色, 2 支红色的概率是多少?

解: 令 $X =$ “6 支中白粉笔的个数”, $Y =$ “6 支中黄粉笔的个数”, 则事件 “6 支中恰有 3 支白色, 1 支黄色, 2 支红色” 就是事件

$$\{X = 3, Y = 1\}, \text{ 即 } \{(X, Y) = (3, 1)\}.$$

由三项分布, 概率可表示为

$$P((X, Y) = (3, 1)) = \frac{6!}{3!1!2!} 0.6^3 \times 0.25 \times 0.15^2.$$

用组合数方法同样可以得到上述结果。

一般的, 对于满足 $k_1 \geq 0, k_2 \geq 0$ 及 $k_1 + k_2 \leq 6$ 的 k_1, k_2 , 由三项分布有

$$P((X, Y) = (k_1, k_2)) = \frac{6!}{k_1!k_2!(6 - k_1 - k_2)!} 0.6^{k_1} \times 0.25^{k_2} \times 0.15^{6 - k_1 - k_2}.$$

□

二维随机向量的边缘分布: 对于二维随机向量 $\xi = (X, Y)$, 分量 X 的概率分布称为 ξ 关于 X 的**边缘分布**, 分量 Y 的概率分布称为 ξ 关于 Y 的**边缘分布**。

二维随机向量 $\xi = (X, Y)$ 的两个边缘分布均由 ξ 的概率分布完全确定。

例: 从 $1, 2, 3, 4$ 中任取一数记为 X , 再从 $1, \dots, X$ 中任取一数记为 Y , 求 (X, Y) 的联合分布列及 $P(X = Y)$ 。

解: 易知 X 的分布列为:

$$P(X = i) = \frac{1}{4}, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

显然, $P(X = i, Y = j) = 0, j > i, i = 1, 2, 3, 4$, 当 $1 \leq j \leq i \leq 4$ 时, 由乘法公式得

$$P(X = i, Y = j) = P(X = i)P(Y = j|X = i) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{i} = \frac{1}{4i}.$$

从而 (X, Y) 的分布列为 由此可算得

$Y \backslash X$	1	2	3	4
1	$\frac{1}{4}$	0	0	0
2	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	0	0
3	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	0
4	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$

$$P(X = Y) = \sum_{i=1}^4 P(X = Y = i) = \sum_{i=1}^4 \frac{1}{4i} = \frac{25}{48}.$$

□

例: (对应郑书例 2.5) 设随机变量 X 取值是 0 或 1, 随机变量 Y 取值也是 0 或 1, 且二维随机向量 (X, Y) 的概率分布是

$$P((X, Y) = (0, 0)) = \frac{1}{4} + \varepsilon, \quad P((X, Y) = (0, 1)) = \frac{1}{4} - \varepsilon,$$

$$P((X, Y) = (1, 0)) = \frac{1}{4} - \varepsilon, \quad P((X, Y) = (1, 1)) = \frac{1}{4} + \varepsilon,$$

其中 $0 \leq \varepsilon \leq \frac{1}{4}$ 。

易知不同的 ε 对应不同的联合分布, 但是

$$P(X = 0) = P((X, Y) = (0, 0)) + P((X, Y) = (0, 1)) = \frac{1}{2},$$

$$P(X=1) = P((X,Y)=(1,0)) + P((X,Y)=(1,1)) = \frac{1}{2}.$$

同理,

$$P(Y=0) = P(Y=1) = \frac{1}{2},$$

由此可见, 两个边缘分布均与 ε 无关, 表明有无穷多个不同的联合分布具有相同的边缘分布。

6.2.2 连续情形

连续型随机向量及其联合密度函数: 设 $\xi = (X, Y)$ 为二维随机向量, 若存在非负函数 $p(x, y)$ 使得

$$P(\xi \in D) = \iint_D p(x, y) dx dy,$$

对任意开矩形 D 成立, 则称 ξ 为**连续型随机向量**, 称 $p(x, y)$ 为 ξ 的**联合密度** (函数), 也称**概率分布密度函数**, 记为 $p_{X,Y}(x, y)$.

对于二维连续型随机向量 $\xi = (X, Y)$, 对于平面上任意的集合 A , 有

$$P(\xi \in A) = \iint_A p(x, y) dx dy, \quad (6.2.1)$$

联合密度满足归一性:

$$p(x, y) \geq 0; \quad \iint_{\mathbb{R}^2} p(x, y) dx dy = 1.$$

例: (对应郑书例 2.6) 设二维随机向量 $\xi = (X, Y)$ 的联合密度为

$$p(x, y) = \begin{cases} ce^{-(x+y)}, & x \geq 0 \text{ 且 } y \geq 0, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$$

其中 c 是一个常数, 求:

(1) c 的值; (2) $P(0 < X < 1, 0 < Y < 1)$.

解: (1) 由归一性知

$$1 = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} ce^{-(x+y)} dx dy = c \int_0^{+\infty} e^{-x} dx \cdot \int_0^{+\infty} e^{-y} dy$$

于是 $c = 1$.

(2) 取 $D = \{(x, y) : 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$, 由定义知

$$P(0 < X < 1, 0 < Y < 1) = P((X, Y) \in D) = \int_0^1 \int_0^1 e^{-(x+y)} dx dy$$

$$= \int_0^1 e^{-x} dx \cdot \int_0^1 e^{-y} dy = (1 - e^{-1})^2.$$

□

定义：设 G 是平面上面积为 $a(0 < a < +\infty)$ 的区域，称二维随机向量 $\xi = (X, Y)$ 服从 G 上的**均匀分布**，若 $P((X, Y) \in G) = 1$ ，且 (X, Y) 取值属于 G 的任何部分 A (A 是 G 的子区域) 的概率与 A 的面积成正比。容易推知二维随机向量 $\xi = (X, Y)$ 有联合密度为

$$p(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{a}, & (x, y) \in G, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases} \quad (6.2.2)$$

连续型随机向量的边缘分布：设 $p(x, y)$ 是二维随机向量 $\xi = (X, Y)$ 的联合密度，则

$$p_X(x) \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y) dy, \quad p_Y(y) \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y) dx$$

分别是 X, Y 的分布密度。

证明：对任何 $a < b$ ，令 $A = \{(x, y) : a < x < b, -\infty < y < +\infty\}$ ，由式6.2.1知

$$\begin{aligned} P((X, Y) \in A) &= P(a < X < b) = \int_a^b \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y) dx dy \\ &= \int_a^b \left(\int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y) dy \right) dx = \int_a^b p_X(x) dx. \end{aligned}$$

这表明 $p_X(x)$ 是 X 的分布密度，同理知 $p_Y(y)$ 是 Y 的分布密度。 □

例：(对应郑书例 2.7) 设 G 是由抛物线 $y = x^2$ 和直线 $y = x$ 所围成的区域 (图6.3) 若二维随机向量 $\xi = (X, Y)$ 服从 G 上的均匀分布，试求 ξ 的联合分布和两个边缘分布密度。

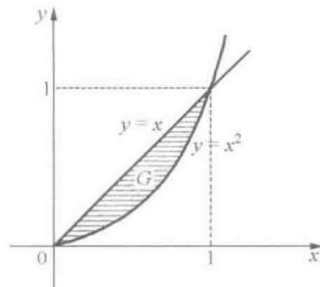


图 6.3: 区域 G 的示意图

解：由于 G 的面积为

$$\int_0^1 (x - x^2) dx = \frac{1}{6},$$

由式6.2.2知联合密度为

$$p(x, y) = \begin{cases} 6, & (x, y) \in G, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$$

得 X 的分布密度 $p_X(x)$ 和 Y 的分布密度 $p_Y(y)$ 分别如下：

$$\begin{aligned} p_X(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y) dy \\ &= \int_{x^2}^x 6 dy = 6(x - x^2) \quad (0 \leq x \leq 1), \\ p_X(x) &= 0 \quad (x \notin [0, 1]), \\ p_Y(y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y) dx \\ &= \int_y^{\sqrt{y}} 6 dx = 6(\sqrt{y} - y) \quad (0 \leq y \leq 1), \\ p_Y(y) &= 0 \quad (y \notin [0, 1]). \end{aligned}$$

□

由定义知边缘密度函数由联合密度确定，但是不同的联合密度可能有相同的边缘分布密度，即联合密度不能由两个边缘分布密度完全确定。

例：设二维随机向量 $\xi = (X, Y)$ 有联合密度

$$p_1(x, y) = \frac{1}{2\pi} \exp\left\{-\frac{1}{2}(x^2 + y^2)\right\},$$

二维随机向量 $\eta = (U, V)$ 有联合密度

$$p_2(x, y) = \begin{cases} 2p_1(x, y), & xy \geq 0, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

则 X 与 U 有相同的分布密度， Y 与 V 有相同的分布密度。

一方面，当 $x \leq 0$ 时，

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} p_2(x, y) dy &= \int_{-\infty}^0 2p_1(x, y) dy = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^0 e^{-(x^2+y^2)/2} dy \\ &= \frac{1}{\pi} e^{-x^2/2} \int_{-\infty}^0 e^{-y^2/2} dy = \frac{1}{\pi} e^{-x^2/2} \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2/2} dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}. \end{aligned}$$

类似的, 当 $x > 0$ 时,

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} p_2(x, y) dy &= \int_0^{+\infty} 2p_1(x, y) dy \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)/2} dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}.\end{aligned}$$

即, 对一切 x , $\int_{-\infty}^{+\infty} p_2(x, y) dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ 。

同理, 对一切 y , $\int_{-\infty}^{+\infty} p_2(x, y) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2}$ 。

6.2.3 一般情形

一般二维随机向量及其联合分布函数: 设 $\xi = (X, Y)$ 是二维随机向量, 则称

$$F(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y) \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

为 ξ 的分布函数。也称为 (X, Y) 的**联合分布函数**。

分布函数 $F(x, y)$ 有以下性质:

- (1) $0 \leq F(x, y) \leq 1$;
- (2) $F(x, y)$ 是 x 的右连续增函数, 也是 y 的右连续增函数;
- (3) $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x, y) = 0, \lim_{y \rightarrow -\infty} F(x, y) = 0$;
- (4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x, y) = P(Y \leq y), \lim_{y \rightarrow +\infty} F(x, y) = P(X \leq x)$;
- (5) 对任何 $x_1 \leq x_2, y_1 \leq y_2$, 有

$$F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1) \geq 0.$$

对性质 (1) - (4) 可以效仿一维随机变量的证明。

现在证明性质 (5), 我们指出, 对一切 $x_1 \leq x_2, y_1 \leq y_2$, 有

$$\begin{aligned}P(x_1 < X \leq x_2, y_1 < Y \leq y_2) &= P(x_1 < X \leq x_2, Y \leq y_2) - P(x_1 < X \leq x_2, Y \leq y_1) \\ &= P(X \leq x_2, Y \leq y_2) - P(X \leq x_1, Y \leq y_2) \\ &\quad - [P(X \leq x_2, Y \leq y_1) - P(X \leq x_1, Y \leq y_1)] \\ &= F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2) - [F(x_2, y_1) - F(x_1, y_1)]\end{aligned}$$

由 $P(x_1 < X \leq x_2, y_1 < Y \leq y_2) \geq 0$ 知性质 (5) 成立。

□

若二维随机向量 $\xi = (X, Y)$ 有联合密度 $p(x, y)$, 则 ξ 的联合分布函数 $F(x, y)$ 与联合密度 $p(x, y)$ 有关系式

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y p(u, v) du dv. \quad (6.2.3)$$

例: 设二维随机向量 (X, Y) 有密度函数

$$p(x, y) = \begin{cases} Ce^{-(2x+y)}, & x > 0, y > 0, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

求 (1) 常数 C 的值; (2) 联合分布函数 $F(x, y)$; (3) 概率 $P(X \leq Y)$ 。

解: (1) 由于

$$1 = C \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y) dx dy = C \int_0^{+\infty} e^{-2x} dx \int_0^{+\infty} e^{-y} dy = \frac{C}{2}$$

得 $C = 2$ 。

(2) 利用公式

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^x p(t, r) dt dr \\ &= \begin{cases} \int_0^y \int_0^x 2e^{-2t-r} dt dr, & x > 0, y > 0, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases} \\ &= \begin{cases} (1 - e^{-2x})(1 - e^{-y}), & x > 0, y > 0, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases} \end{aligned}$$

(3) 设区域 $G = \{(x, y) | x \leq y\}$, 则

$$P(X \leq Y) = P((X, Y) \in G) = \iint_G p(x, y) dy dx = \int_0^{+\infty} \int_x^{+\infty} 2e^{-2x-y} dy dx = \frac{2}{3}.$$

□

例: 设 (X, Y) 的联合密度函数为

$$p(x, y) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1, |y| < x, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

求边际密度函数。

解: 根据定义

$$p_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y) dy = \begin{cases} \int_{-x}^x 1 dy = 2x & x \in (0, 1), \\ 0, & x \notin (0, 1). \end{cases}$$

$$p_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y) dx = \begin{cases} \int_y^1 1 dx = 1 - y & y \in [0, 1), \\ \int_{-y}^1 1 dx = 1 + y, & y \in (-1, 0), \\ 0, & y \notin (-1, 1). \end{cases}$$

□

6.2.4 二维正态分布

二维正态分布：若 $\xi = (X, Y)$ 的联合密度 $p(x, y)$ 有如下表达式，则称 ξ 服从二维（元）正态分布。

$$\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{u^2 + v^2 - 2\rho uv}{2(1-\rho^2)}\right\}, \quad (6.2.4)$$

其中,

$$u = \frac{x - \mu_1}{\sigma_1}, \quad v = \frac{y - \mu_2}{\sigma_2},$$

共有 5 个参数: $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}, \sigma_1, \sigma_2 > 0, \rho \in (-1, 1)$

例：设二维随机向量 $\xi = (X, Y)$ 服从二维正态分布，试求出 X 的分布密度和 Y 的分布密度。

解：设 X 的分布密度为 $p_X(x)$ ，做变量代换 $v = \frac{y - \mu_2}{\sigma_2}$ ，得

$$\begin{aligned} p_X(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y) dy \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left(\frac{x - \mu_1}{\sigma_1}\right)^2\right\} \\ &\quad \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left[\left(\frac{y - \mu_2}{\sigma_2}\right)^2 - 2\rho \frac{y - \mu_2}{\sigma_2} \frac{x - \mu_1}{\sigma_1}\right]\right\} dy \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left(\frac{x - \mu_1}{\sigma_1}\right)^2\right\} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)} [v^2 - 2\rho v \frac{x - \mu_1}{\sigma_1}]\right\} dv \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)} [v^2 - 2\rho v \frac{x - \mu_1}{\sigma_1}]\right\} dv \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left[\left(v - \rho \frac{x - \mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - \rho^2 \left(\frac{x - \mu_1}{\sigma_1}\right)^2\right]\right\} dv \\ &= \exp\left\{-\frac{\rho^2}{2(1-\rho^2)} \left(\frac{x - \mu_1}{\sigma_1}\right)^2\right\} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left(v - \rho \frac{x - \mu_1}{\sigma_1}\right)^2\right\} dv \end{aligned}$$

$$= \exp \left\{ \frac{\rho^2}{2(1-\rho^2)} \left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1} \right)^2 \right\} \sqrt{2\pi(1-\rho^2)}.$$

于是

$$p_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \exp \left\{ -\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2} \right\}.$$

同理知

$$p_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} \exp \left\{ -\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2} \right\}.$$

这表明 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$.

例：假定 $(\xi_1, \xi_2) \sim N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$ ，试求 (ξ_1, ξ_2) 落在

$$D = \left\{ (x, y) \mid \left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1} \right)^2 - 2\rho \frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2} \right)^2 \leq \lambda^2 \right\}$$

内的概率。

解：所求概率

$$\begin{aligned} \iint_D p(x, y) dx dy &= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \\ &\times \iint_D \exp \left\{ -\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left[\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1} \right)^2 - 2\rho \frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2} \right)^2 \right] \right\} dx dy \end{aligned}$$

做变量代换 $u = \frac{x-\mu_1}{\sigma_1} - \rho \frac{y-\mu_2}{\sigma_2}$, $v = \sqrt{1-\rho^2} \frac{y-\mu_2}{\sigma_2}$, 则

$$\left| \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \right| = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sigma_1} & 0 \\ -\frac{\rho}{\sigma_2} & \frac{\sqrt{1-\rho^2}}{\sigma_2} \end{vmatrix} = \frac{\sqrt{1-\rho^2}}{\sigma_1\sigma_2}, \quad |J| = \frac{\sigma_1\sigma_2}{\sqrt{1-\rho^2}}.$$

从而

$$\begin{aligned} \iint_D p(x, y) dx dy &= \frac{1}{2\pi(1-\rho^2)} \iint_{\{u^2+v^2 \leq \lambda^2\}} \exp \left\{ -\frac{u^2+v^2}{2(1-\rho^2)} \right\} du dv \\ &= \frac{1}{2\pi(1-\rho^2)} \int_0^{2\pi} \int_0^\lambda \exp \left\{ -\frac{r^2}{2(1-\rho^2)} \right\} r dr d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\lambda^2}{2(1-\rho^2)}} e^{-t} dt = 1 - \exp \left\{ -\frac{\lambda^2}{2(1-\rho^2)} \right\}. \end{aligned}$$

□

6.3 条件分布

条件分布函数：设 X 和 Y 是两个随机变量，给定实数 y ，如果 $P(Y = y) > 0$ ，则称 x 的函数 $P(X \leq x|Y = y)$ 为在 $Y = y$ 的条件下 X 的**条件分布函数**，记作 $F_{X|Y}(x|y)$ ，显然，根据条件概率的定义，有

$$F_{X|Y}(x|y) = \frac{P(X \leq x, Y = y)}{P(Y = y)}.$$

6.3.1 离散型情形

设 (X, Y) 是二维离散型随机向量，其概率分布为

$$P(X = x_i, Y = y_j) = p_{ij} \quad (i = 1, 2, \dots; j = 1, 2, \dots),$$

这里 $P(Y = y_i) > 0 \quad (j \geq 1)$ ，则在 $Y = y_i$ 的条件下 X 的条件分布为

$$P(X = x_i|Y = y_j) = \frac{P(X = x_i, Y = y_j)}{P(Y = y_j)} = \frac{p_{ij}}{\sum_k p_{kj}} \quad (i = 1, 2, \dots).$$

例：设随机变量 X 与 Y 相互独立， X 服从参数为 λ_1 的泊松分布， Y 服从参数为 λ_2 的泊松分布，试求在 $X + Y = n$ 条件下 X 的条件分布 (n 为正整数)。

解：由于 $X + Y$ 服从参数为 $\lambda_1 + \lambda_2$ 的泊松分布，故对 $k = 0, 1, \dots, n$ 有

$$\begin{aligned} P(X = k|X + Y = n) &= \frac{P(X = k, X + Y = n)}{P(X + Y = n)} \\ &= \frac{P(X = k)P(Y = n - k)}{P(X + Y = n)} \\ &= \frac{\lambda_1^k}{k!} e^{-\lambda_1} \frac{\lambda_2^{n-k}}{(n-k)!} e^{-\lambda_2} \bigg/ \left[\frac{1}{n!} (\lambda_1 + \lambda_2)^n e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)} \right] \\ &= C_n^k \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \right)^k \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \right)^{n-k}. \end{aligned}$$

这表明，在 $X + Y = n$ 的条件下 X 的条件分布列为参数为 $n, \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$ 的二项分布。 \square

例：设随机变量 X 与 Y 相互独立，都服从参数是 n, p 的二项分布，试求在 $X + Y = m (0 \leq m \leq 2n)$ 条件下 X 的条件分布。

解：记 $l = \min\{n, m\}$ ，易知

$$P(X + Y = m) = \sum_{i=0}^l P(X = i, Y = m - i)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=0}^l P(X=i)P(Y=m-i) \\
&= \sum_{i=0}^l C_n^i p^i (1-p)^{n-i} C_n^{m-i} p^{m-i} (1-p)^{n-m+i} \\
&= p^m (1-p)^{2n-m} \sum_{i=0}^l C_n^i C_n^{m-i} \\
&= C_{2n}^m p^m (1-p)^{2n-m}.
\end{aligned}$$

于是, 当 $k=0, 1, \dots, l$ 时,

$$\begin{aligned}
P(X=k|X+Y=m) &= \frac{P(X=k, X+Y=m)}{P(X+Y=m)} \\
&= \frac{C_n^k p^k (1-p)^{n-k} C_n^{m-k} p^{m-k} (1-p)^{n-m+k}}{C_{2n}^m p^m (1-p)^{2n-m}} \\
&= \frac{C_n^k C_n^{m-k}}{C_{2n}^m}.
\end{aligned}$$

当 $k > l$ 时, 显然 $P(X=k|X+Y=m) = 0$ 。

由此可见, 在 $X+Y=m$ 条件下 X 的条件分布是超几何分布。 \square

例: 一射手进行射击, 击中目标的概率 $p \in (0, 1)$, 射击至击中目标两次为止。若以 X 表示首次击中目标所进行的射击次数, 以 Y 表示总共进行的射击次数。试求 X 和 Y 的联合分布列及条件分布列。

解: $Y=n$ 表示第 n 次击中目标且前 $n-1$ 次恰有一次击中目标,

$$P(X=m, Y=n) = p^2(1-p)^{n-2}, \quad n=2, 3, \dots, m=1, \dots, n-1.$$

从而

$$\begin{aligned}
P(X=m) &= \sum_{n=m+1}^{\infty} P(X=m, Y=n) \\
&= \sum_{n=m+1}^{\infty} p^2(1-p)^{n-2} \\
&= p(1-p)^{m-1}, \quad m=1, 2, \dots
\end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned}
 P(Y = n) &= \sum_{m=1}^{n-1} P(X = m, Y = n) \\
 &= \sum_{m=1}^{n-1} p^2(1-p)^{n-2} \\
 &= (n-1)p^2(1-p)^{n-2}, \quad n = 2, 3, \dots
 \end{aligned}$$

于是当 $n = 2, 3, \dots$ 时,

$$P(X = m|Y = n) = \frac{p^2(1-p)^{n-2}}{(n-1)p^2(1-p)^{n-2}} = \frac{1}{n-1}, \quad m = 1, \dots, n-1.$$

当 $m = 1, 2, \dots$ 时,

$$P(Y = n|X = m) = \frac{p^2(1-p)^{n-2}}{p(1-p)^{m-1}} = p(1-p)^{n-m-1}, \quad n = m+1, m+2, \dots$$

□

6.3.2 连续型情形

设二维随机向量 (X, Y) 有联合分布函数 $F(x, y)$, 联合密度 $p(x, y)$, 若 $p_Y(y) > 0$, 则在 $Y = y$ 条件下 X 的条件分布函数为

$$F_{X|Y}(x|y) = \int_{-\infty}^x \frac{p(u, y)}{p_Y(y)} du.$$

自然, 在 $Y = y$ 条件下 X 的条件分布密度为

$$p_{X|Y}(x|y) = \frac{p(x, y)}{p_Y(y)}.$$

连续场合的全概率公式: 由基本公式

$$p(x, y) = p_Y(y)p(x|y) = p_X(x)p(y|x),$$

连续场合的全概率公式为:

$$\begin{aligned}
 p_X(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} p_Y(y)p(x|y) dy, \\
 p_Y(y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} p_X(x)p(y|x) dx.
 \end{aligned}$$

连续场合的贝叶斯公式:

$$p(y|x) = \frac{p_Y(y)p(x|y)}{\int_{-\infty}^{+\infty} p_Y(y)p(x|y)dy},$$

$$p(x|y) = \frac{p_X(x)p(y|x)}{\int_{-\infty}^{+\infty} p_X(x)p(y|x)dx}.$$

例: 设二维随机向量 (X, Y) 满足二维正态分布, 易知 Y 的分布密度为

$$p_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} \exp\left\{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}\right\}.$$

则在 $Y = y$ 条件下 X 的分布密度为

$$p_{X|Y}(x|y) = \frac{p(x, y)}{p_Y(y)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\rho^2)}\sigma_1} \exp\left\{-\frac{(x-m)^2}{2(1-\rho^2)\sigma_1^2}\right\},$$

其中 $m = \mu_1 + \rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y - \mu_2)$.

□

例: 设二维随机向量 (X, Y) 的联合密度为

$$p(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{y}e^{-y} \cdot e^{-\frac{x}{y}}, & x > 0, y > 0, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

给定 $y > 0$, 试求出条件概率 $P(X > 1|Y = y)$ 。

解: 在 $Y = y$ 条件下 X 的条件分布密度是

$$p_{X|Y}(x|y) = \frac{p(x, y)}{p_Y(y)}.$$

其中 $p_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y)dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{y}e^{-y} \cdot e^{-\frac{x}{y}}dx = e^{-y}$, 于是

$$p_{X|Y}(x|y) = \begin{cases} \frac{1}{y}e^{-\frac{x}{y}}, & x > 0, y > 0 \\ 0, & x \leq 0, y > 0 \end{cases}$$

因此

$$P(X > 1|Y = y) = \int_1^{+\infty} \frac{1}{y}e^{-\frac{x}{y}}dx = e^{-\frac{1}{y}}.$$

□

例: 设随机变量 X 在区间 $(0, 1)$ 上随机取值, 当观察到 $X = x(0 < x < 1)$ 时, 随机变量 Y 在区间 $(x, 1)$ 上随机取值, 求 Y 的概率密度函数 $p_Y(y)$ 。

解： X 服从区间 $(0, 1)$ 上的均匀分布，对任意的 $x \in (0, 1)$ ，在 $X = x$ 条件下， Y 的条件概率密度为

$$p(y|x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x}, & y \in (x, 1), \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

从而，

$$p(x, y) = p(y|x)p_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x}, & 0 < x < y < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

故

$$p_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y)dx = \begin{cases} \int_0^y \frac{1}{1-x} dx = -\ln(1-y), & 0 < y < 1, \\ 0, & y \notin (0, 1). \end{cases}$$

6.4 随机变量的独立性

随机变量的独立性：设 X 和 Y 都是随机变量，如果对任何 $a < b, c < d$ ，事件 $\{a < X < b\}$ 和事件 $\{c < Y < d\}$ 相互独立，则称 X 与 Y **相互独立**。

定理：设随机变量 X 的可能值是 x_1, x_2, \dots （有限个或无穷可列个），随机变量 Y 的可能值是 y_1, y_2, \dots （有限个或无穷可列个），则 X 与 Y 相互独立的充分必要条件是，对一切 i, j 下式成立：

$$P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i)P(Y = y_j).$$

定理：设随机变量 X, Y 分别有分布密度 $p_X(x), p_Y(y)$ ，则 X 与 Y 相互独立的充分必要条件是二元函数 $p(x, y) = p_X(x)p_Y(y)$ 是二维随机向量 (X, Y) 的联合密度。

证明：充分性：设 $p_X(x)p_Y(y)$ 是 (X, Y) 的联合密度，则对于任何 $a < b, c < d$ 有

$$\begin{aligned} P(a < X < b, c < Y < d) &= \int_a^b \int_c^d p_X(x)p_Y(y)dx dy \\ &= \int_a^b p_X(x)dx \cdot \int_c^d p_Y(y)dy = P(a < X < b)P(c < Y < d). \end{aligned}$$

表明 X 与 Y 相互独立

必要性：设 X 与 Y 相互独立，则对任何 $a < b, c < d$ 有

$$\begin{aligned} P(a < X < b, c < Y < d) &= P(a < X < b)P(c < Y < d) \\ &= \int_a^b p_X(x)dx \cdot \int_c^d p_Y(y)dy = \int_a^b \int_c^d p_X(x)p_Y(y)dx dy \end{aligned}$$

表明 $p_X(x)p_Y(y)$ 是 (X, Y) 的联合密度。 □

推论：设二维随机向量 (X, Y) 的联合密度 $p(x, y)$ 可以表示为

$$p(x, y) = f(x)g(y),$$

其中 $f(x) \geq 0$, $g(y) \geq 0$, 且 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ 收敛, 则 X 与 Y 相互独立。

证明：由于 $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y)dxdy = 1$, 记 $c \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx > 0$, 推知 X 的分布密度是 $p_X(x) = \frac{1}{c}f(x)$, Y 的分布密度是 $p_Y(y) = cg(y)$, 则 $p(x, y) = f(x)g(y) = p_X(x)p_Y(y)$, 因此 X 与 Y 相互独立。 \square

定理：设 $\xi = (X, Y)$ 是二维随机向量, X 的分布函数是 $F_X(x)$, Y 的分布函数是 $F_Y(y)$, 则 X 和 Y 相互独立的充分必要条件是 ξ 的分布函数 $F(x, y)$ 等于 $F_X(x)$ 与 $F_Y(y)$ 之积, 即

$$F(x, y) = F_X(x)F_Y(y). \quad (6.4.1)$$

证明：必要性：设 X 与 Y 相互独立, 则对任何 $n \geq 1$, 事件 $\{-n < X \leq x\}$ 与事件 $\{-n < Y \leq y\}$ 相互独立, 于是

$$P(-n < X \leq x, -n < Y \leq y) = P(-n < X \leq x)P(-n < Y \leq y).$$

令 $n \rightarrow \infty$, 即知6.4.1式成立。

充分性：设6.4.1式成立, 对任何 $a < b$, $c < d$, 有

$$\begin{aligned} P(a < X \leq b, c < Y \leq d) &= F(b, d) - F(a, d) - F(b, c) + F(a, c) \\ &= F_X(b)F_Y(d) - F_X(a)F_Y(d) - F_X(b)F_Y(c) + F_X(a)F_Y(c) \\ &= (F_X(b) - F_X(a))(F_Y(d) - F_Y(c)) \\ &= P(a < X \leq b)P(c < Y \leq d). \end{aligned}$$

由此知 X 与 Y 相互独立。 \square

定理：若随机变量 X 和 Y 相互独立, 且方差 $D(X)$ 和 $D(Y)$ 存在, 则 $D(X+Y) = D(X) + D(Y)$ 。

证明：由式5.3.2知

$$D(X+Y) = E(X+Y)^2 - (E(X+Y))^2 = (E(X^2) + E(Y^2) - 2E(XY)) - ((E(X))^2 + (E(Y))^2 + 2E(X)E(Y))$$

由独立的性质知 $E(XY) = E(X)E(Y)$, 则

$$D(X+Y) = E(X^2) - (E(X))^2 + E(Y^2) - (E(Y))^2 = D(X) + D(Y).$$

例：设二维随机向量 (X, Y) 服从参数为 $\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, \rho$ 的二维正态分布，则 X 与 Y 相互独立的充分必要条件是 $\rho = 0$ 。

证明：已求出 X 和 Y 的分布密度：

$$p_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \exp\left\{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}\right\}.$$

$$p_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} \exp\left\{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}\right\}.$$

于是

$$p_X(x)p_Y(y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \exp\left\{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2} - \frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}\right\}.$$

结合联合密度 $p(x, y)$ (式6.2.4)，知当 $\rho = 0$ 时，

$$p(x, y) = p_X(x)p_Y(y).$$

故 X 与 Y 相互独立。

若 X 与 Y 相互独立，则 $p_X(x)p_Y(y)$ 是 (X, Y) 的联合密度，由于 $p_X(x), p_Y(y), p(x, y)$ 均为连续函数，故

$$p(x, y) \equiv p_X(x)p_Y(y).$$

特别地 $p(\mu_1, \mu_2) = p_X(\mu_1)p_Y(\mu_2)$ ，于是

$$\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2},$$

从而 $\rho = 0$ 。 □

例：设 (X, Y) 联合密度为

$$p(x, y) = \begin{cases} 8xy, & 0 \leq x \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

问 X 与 Y 是否独立？

解：易得

$$p_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y) dy = \begin{cases} \int_x^1 8xy dy = 4x(1-x^2), & x \in [0, 1], \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

$$p_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y) dx = \begin{cases} \int_0^y 8xy dx = 4y^3, & y \in [0, 1], \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

从而，

$$p(x, y) \neq p_X(x)p_Y(y) = \begin{cases} 16x(1-x^2)y^3, & x, y \in [0, 1], \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

故 X, Y 不独立。 \square

例：假定一天内进入邮局的人数为服从参数 λ 的泊松分布的随机变量，如果每个进入邮局的人为男性的概率为 p ，为女性的概率为 $1 - p$ ，证明进入邮局的男人数和女人数是相互独立的泊松随机变量，且参数分别为 λp 和 $\lambda(1 - p)$ 。

解：设 X 和 Y 分别是进入邮局的男人数和女人数，则对任意的自然数 i 和 j ，

$$P(X = i, Y = j) = P(X = i, Y = j | X + Y = i + j)P(X + Y = i + j).$$

注意到

$$P(X + Y = i + j) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^{i+j}}{(i+j)!}.$$

且在给定 $i + j$ 人进入邮局的条件下，恰有 i 个男人和 j 个女人的概率是 $C_{i+j}^i p^i (1-p)^j$ ，从而

$$P(X = i, Y = j) = C_{i+j}^i p^i (1-p)^j e^{-\lambda} \frac{\lambda^{i+j}}{(i+j)!} = e^{-\lambda p} \frac{(\lambda p)^i}{i!} e^{-\lambda(1-p)} \frac{(\lambda(1-p))^j}{j!}.$$

故

$$P(X = i) = e^{-\lambda p} \frac{(\lambda p)^i}{i!} \sum_{j=0}^{+\infty} e^{-\lambda(1-p)} \frac{(\lambda(1-p))^j}{j!} = e^{-\lambda p} \frac{(\lambda p)^i}{i!}, \quad i \in \mathbb{N}.$$

且

$$P(X = j) = e^{-\lambda(1-p)} \frac{(\lambda(1-p))^j}{j!} \sum_{i=0}^{+\infty} e^{-\lambda p} \frac{(\lambda p)^i}{i!} = e^{-\lambda(1-p)} \frac{(\lambda(1-p))^j}{j!}, \quad j \in \mathbb{N}.$$

\square

6.5 两个随机变量的函数

6.5.1 随机向量函数的概率分布

随机向量函数的概率分布：假设二维随机向量 (X, Y) 有联合密度 $p(x, y)$ （对于离散型情形，有类似的结论），随机变量 $Z = f(X, Y)$ ，对于任何实数 z ，令 $A = \{(x, y) : f(x, y) \leq z\}$ ，则 Z 的分布函数的计算公式为

$$P(Z \leq z) = P(Z \in A) = \iint_A p(x, y) dx dy. \quad (6.5.1)$$

定理：设二维随机向量 (X, Y) 有联合密度 $p(x, y)$ ，随机变量 $Z = X + Y$ ，则 Z 的分布密度为

$$p_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, z - x) dx,$$

证明：令

$$A = \{(x, y) : x + y \leq z\}$$

由式6.5.1知

$$P(Z \leq z) = P((X, Y) \in A) = \iint_{\{x+y \leq z\}} p(x, y) dx dy.$$

利用变量替换 $u = x + y$ 有

$$\begin{aligned} \iint_{\{x+y \leq z\}} p(x, y) dx dy &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{z-x} p(x, y) dy \right) dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^z p(x, u-x) du \right) dx \\ &= \int_{-\infty}^z \left(\int_{-\infty}^{+\infty} p(x, u-x) dx \right) du. \end{aligned}$$

因此

$$P(Z \leq z) = \int_{-\infty}^z \left(\int_{-\infty}^{+\infty} p(x, u-x) dx \right) du.$$

因此 Z 的分布函数为 $p_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, z-x) dx$. □

推论：设随机变量 X 和 Y 分别有分布密度 $p_X(x)$ 和 $p_Y(y)$ ，且 X 和 Y 相互独立，则随机变量 $Z = X + Y$ 有分布密度

$$p_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_X(x) p_Y(z-x) dx.$$

例：设 (X, Y) 服从二维正态分布，联合密度 $p(x, y)$ 为 $p(x, y) = \hat{C} \exp \left\{ -\frac{u^2 - 2\rho uv + v^2}{2(1-\rho^2)} \right\}$ ，其中 $u = \frac{x-\mu_1}{\sigma_1}$, $v = \frac{y-\mu_2}{\sigma_2}$, $\hat{C} = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}$. 求 $Z = X + Y$ 的密度。

解：由定理知 Z 的分布密度为 $p_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x, z-x) dx$. 当 y 取 $z-x$ 时，

$$v = \frac{y-\mu_2}{\sigma_2} = \frac{z-(\mu_1+\sigma_1 u)-\mu_2}{\sigma_2} = C - \frac{\sigma_1}{\sigma_2} u,$$

其中, $C = (z - \mu_1 - \mu_2) / \sigma_2$.

此时,

$$\begin{aligned} u^2 - 2\rho uv + v^2 &= u^2 - 2\rho u \left(C - \frac{\sigma_1 u}{\sigma_2} \right) + \left(C - \frac{\sigma_1 u}{\sigma_2} \right)^2 \\ &= \left(1 + 2\rho \frac{\sigma_1}{\sigma_2} + \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2} \right)^2 \right) u^2 - 2 \left(\rho + \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \right) C u + C^2. \end{aligned}$$

现在计算 $p_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x, z-x) dx$ ，已知：

$$\begin{aligned} p(x, z-x) &= \hat{C} \left\{ -\frac{Au^2 - 2Bu + C^2}{2(1-\rho^2)} \right\}, \quad \text{其中, } u = \frac{x-\mu_1}{\sigma_1}, \\ A &= 1 + 2\rho \frac{\sigma_1}{\sigma_2} + \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2} \right)^2, \quad B = \left(\rho + \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \right) C, \quad C = \frac{z - (\mu_1 + \mu_2)}{\sigma_2}. \end{aligned}$$

配方:

$$Au^2 - 2Bu + C^2 = A \left(u - \frac{B}{A} \right)^2 - \left(\frac{B^2}{A} - C^2 \right)$$

于是,

$$\begin{aligned} p_Z(z) &= \hat{C} \exp \left\{ \frac{\frac{B^2}{A} - C^2}{2(1-\rho^2)} \right\} \times \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{A(u - \frac{B}{A})^2}{2(1-\rho^2)} \right\} \sigma_1 du \\ &= \tilde{C} \exp \left\{ \frac{B^2 - AC^2}{2(1-\rho^2)A} \right\}. \quad \tilde{C} = \hat{C} \sigma_1 \sqrt{2\pi \frac{1-\rho^2}{A}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_2^2 A}} \end{aligned}$$

已有: $p_Z(z) = \tilde{C} \exp \left\{ \frac{B^2 - AC^2}{2(1-\rho^2)A} \right\}$, 其中 \tilde{C} 是常数,

$$A = 1 + 2\rho \frac{\sigma_1}{\sigma_2} + \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2} \right)^2, B = \left(\rho + \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \right) C, C = \frac{z - (\mu_1 + \mu_2)}{\sigma_2}.$$

$$B^2 - AC^2 = \left(\left(\rho + \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \right)^2 - A \right) C^2 = (\rho^2 - 1) \frac{(z - (\mu_1 + \mu_2))^2}{\sigma_2^2}.$$

因此,

$$p_Z(z) = \tilde{C} \exp \left\{ -\frac{(z - \mu)^2}{2\sigma^2} \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left\{ -\frac{(z - \mu)^2}{2\sigma^2} \right\}.$$

其中, $\mu = \mu_1 + \mu_2, \sigma^2 = \sigma_2^2 A = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2$.

特别地, 若 $\rho = 0$ (即 X, Y 相互独立), 则

$$X + Y \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2).$$

□

例: 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且 X, Y 分别有分布密度:

$$p_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases} \quad (\lambda > 0),$$

$$p_Y(y) = \begin{cases} \mu e^{-\mu y}, & y > 0, \\ 0, & y \leq 0, \end{cases} \quad (\mu > 0),$$

试求随机变量 $X + Y$ 的分布密度。

解: 随机变量 $Z = X + Y$ 的分布密度为

$$p(z) = \int_{-\infty}^{\infty} p_X(x) p_Y(z - x) dx.$$

易知, 当 $z \leq 0$ 时, $p(z) = 0$, 设 $z > 0$, 则

$$p(z) = \int_0^z \lambda e^{-\lambda x} \mu e^{-\mu(z-x)} dx = \lambda \mu e^{-\mu z} \int_0^z e^{-(\lambda-\mu)x} dx$$

$$= \begin{cases} \lambda^2 e^{-\lambda z} z, & \lambda = \mu, \\ \frac{\lambda \mu}{\lambda - \mu} (e^{-\mu z} - e^{-\lambda z}), & \lambda \neq \mu. \end{cases}$$

□

定理: 设二维随机向量 (X, Y) 有联合密度 $p(x, y)$. 令 $Z = X/Y$ (当 $Y = 0$ 时, 规定 $Z = 0$). 则 Z 为连续型, 且

$$p_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} |y| p(zy, y) dy.$$

证明: 首先, $\frac{x}{y} \leq z$ 当且仅当 “ $y > 0$ 且 $x \leq yz$ ” 或者 “ $y < 0$ 且 $x \geq yz$.” 于是,

$$F_Z(z) = P(Y > 0, X \leq Yz) + P(Y < 0, X \geq Yz).$$

其中,

$$\begin{aligned} P(Y > 0, X \leq Yz) &= \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{yz} p(x, y) dx dy = \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^z p(yu, y) y du dy \\ &= \int_{-\infty}^z \left(\int_0^{\infty} y p(yu, y) dy \right) du \end{aligned}$$

类似的,

$$\begin{aligned} P(Y < 0, X \geq Yz) &= \int_{-\infty}^0 \int_{yz}^{\infty} p(x, y) dx dy = \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^z p(yu, y) |y| du dy \\ &= \int_{-\infty}^z \left(\int_{-\infty}^0 |y| p(yu, y) dy \right) du \end{aligned}$$

于是,

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= \int_{-\infty}^z \left(\int_{-\infty}^{\infty} |y| p(yu, y) dy \right) du \\ p_Z(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} |y| p(zy, y) dy. \end{aligned}$$

□

例: 随机变量 X, Y 相互独立, 都服从 $N(0, 1)$. 求随机变量 $Z = X/Y$ 的概率密度.

解: 联合密度为:

$$p(x, y) = \frac{1}{2\pi} \exp \left\{ -\frac{x^2 + y^2}{2} \right\}.$$

因此,

$$\begin{aligned} p_Z(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} |y| p(zy, y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} |y| \frac{1}{2\pi} \exp \left\{ -\frac{(zy)^2 + y^2}{2} \right\} dy \\ &= \frac{2}{2\pi} \int_0^{\infty} y \exp \left\{ -\frac{(z^2 + 1)y^2}{2} \right\} dy \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-(z^2 + 1)u} du = \frac{1}{\pi(z^2 + 1)}. \end{aligned}$$

□

例：设随机变量 X 与 Y 独立同分布，共同分布是 $N(0, 1)$ ，试求随机变量 $Z = \sqrt{X^2 + Y^2}$ 的概率分布。

解：对任何 $z \leq 0$ ，易知 $P(Z \leq z) = 0$ ，设 $z > 0$ ，则

$$P(Z \leq z) = \iint_{\{x^2+y^2 \leq z^2\}} \frac{1}{2\pi} \exp\left\{-\frac{x^2+y^2}{2}\right\} dx dy$$

做极坐标变换 $x = r \cos \theta$ ， $y = r \sin \theta$ ($0 \leq \theta < 2\pi, r \geq 0$)，于是

$$P(Z \leq z) = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^z \frac{1}{2\pi} e^{-r^2/2} r dr \right) d\theta = \int_0^z r e^{-r^2/2} dr.$$

可见， $Z = \sqrt{X^2 + Y^2}$ 有分布密度

$$p(z) = \begin{cases} 0, & z \leq 0, \\ ze^{-z^2/2}, & z > 0. \end{cases}$$

这样的概率分布也称为瑞利分布。

□

定理：假设 $\xi = (X, Y)$ 为连续型，有密度 $p(x, y)$ ，区域 A 满足 $P((X, Y) \in A) = 1$ ，假设

$$\eta = (U, V), \quad \text{其中 } U = f(X, Y), \quad V = g(X, Y).$$

如果：(1) $P(\xi \in A) = 1$ 且 $(f, g) : A \rightarrow G$ 是一对一的；

(2) $f, g \in C^1(A)$ ，且 $\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \neq 0, \forall (x, y) \in A$ ，

那么， η 是连续型，且

$$p_{U,V}(u, v) = p(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right|, (u, v) \in G.$$

证明：对于 $\forall D \subseteq G$ ，设 $D^* = \{(x, y) : (f(x, y), g(x, y)) \in D\}$ ，易知 $D^* \subseteq A$ ， $(f(x, y), g(x, y))$ 是 D^* 到 D 上的一一映射，其逆映射是 $(x(u, v), y(u, v))$ ，根据重积分的变量替换公式，

$$\iint_{D^*} p(x, y) dx dy = \iint_D p(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv.$$

于是，

$$P((U, V) \in D) = P((X, Y) \in D^*) = \iint_{D^*} p(x, y) dx dy = \iint_D p(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv.$$

因此

$$p_{U,V}(u, v) = p(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right|, (u, v) \in G.$$

□

6.5.2 两个随机变量函数的数学期望

我们首先考虑一个特殊情形： $f(x, y) = xy$ 。

定理：设随机变量 X 与 Y 相互独立，且 $E(X)$ 与 $E(Y)$ 都存在，则

$$E(XY) = E(X)E(Y).$$

连续情形的证明：

$$E(XY) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xyp_X(x)p_Y(y)dxdy = (E(X))(E(Y)).$$

定理：若随机变量 X 与 Y 相互独立，则

$$\text{var}(X + Y) = \text{var}(X) + \text{var}(Y).$$

证明：由于 $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$ ，得

$$\begin{aligned} \text{var}(X + Y) &= E(X + Y - (EX + EY))^2 \\ &= \text{var}(X) + \text{var}(Y) + 2E(X - E(X))(Y - E(Y)). \end{aligned}$$

由 X 与 Y 相互独立得

$$E(X - E(X))(Y - E(Y)) = E(X - E(X))E(Y - E(Y)) = 0$$

因此等式成立。 □

均值公式：(1) 设二维随机向量 (X, Y) 的可能值是 a_1, a_2, \dots (有限个或可列无穷个)， $f(x, y)$ 是任何二元函数，则

$$E(f(X, Y)) = \sum_i f(a_i)P((X, Y) = a_i).$$

(当 a_i 有无穷个时，要求此级数绝对收敛)。

(2) 设二维随机向量 (X, Y) 有联合分布密度 $p(x, y)$ ，二元函数 $p(x, y)$ 满足积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x, y)|p(x, y)dxdy$$

收敛，则

$$E(f(X, Y)) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)p(x, y)dxdy.$$

例：在长为 a 的线段上，任取两个点 X 和 Y ，求此两点间的平均距离。

解：显然 X 和 Y 服从区间 $(0, a)$ 上的均匀分布，且相互独立，从而 X 和 Y 的联合密度为

$$p(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{a^2} & x, y \in (0, a), \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

从而，两点间的平均长度为

$$\begin{aligned} E|X - Y| &= \iint_{\mathbb{R}^2} |x - y| p(x, y) dx dy \\ &= \int_0^a \int_0^a |x - y| \frac{1}{a^2} dx dy \\ &= \frac{1}{a^2} \int_0^a \left(\int_0^x (x - y) dy + \int_x^a (y - x) dy \right) dx \\ &= \frac{1}{a^2} \int_0^a \left(x^2 - ax + \frac{a^2}{2} \right) dx = \frac{a}{3}. \end{aligned}$$

□

例： x, y, z 为相互独立的随机变量， h, l, f, g 为任意确定性映射。判断

- (1) 令 $a = f(x, y)$, $b = g(x, z)$, a 与 b 是否独立, $a, b | x$ 是否独立?
- (2) 令 $c = x + y$, 则 $x, y | c$ 是否独立?
- (3) $h(l(x, y), z)$ 与 x 是否独立? $h(l(x, y), z)$ 与 x 在 $l(x, y)$ 给定条件下是否独立?

解：

- (1) a 与 b 不独立，都依赖于 x , $a, b | x$ 独立。
- (2) 不独立
- (3) $h(l(x, y), z)$ 与 x 不独立，给定 $l(x, y)$ 则独立。

6.6 二维随机向量的数字特征

两个随机变量的协方差：假设随机变量 X, Y 的期望和方差存在，则称

$$E(X - E(X))(Y - E(Y))$$

为 X 与 Y 的**协方差**，记为 $\text{cov}(X, Y)$ 或 σ_{XY} 。

若 $\sigma_{XY} = 0$ ，则称 X 与 Y 不相关。

注: 协方差存在, 因为

$$2(X - EX)(Y - EY) \leq (X - EX)^2 + (Y - EY)^2.$$

协方差的计算公式为:

$$\text{cov}(X, Y) = E(XY) - (EX)(EY).$$

注意: 协方差为 0 不等价于随机变量 X 和 Y 独立。

例如, 令随机变量 $X \sim U(0, 2\pi)$, 设 $Y = \sin X$, $Z = \cos X$, Y 和 Z 的协方差为

$$\text{cov}(Y, Z) = E(YZ) - E(Y)E(Z) = \frac{1}{2}E(\sin 2X) - E(\sin X)E(\cos X) = 0.$$

而 Y 和 Z 显然是不独立的。

定理: 假设 X, Y 的方差存在, 则

$$(\text{cov}(X, Y))^2 \leq \text{var}(X) \cdot \text{var}(Y). \quad (6.6.1)$$

证明: 若 $\text{var}(X) = 0$, 则 $X \equiv c$, 于是 $\text{cov}(X, Y) = 0$. 若 $\text{var}(X) > 0$, 则设

$$\begin{aligned} g(t) &:= E(t(X - EX) + (Y - EY))^2 \\ &= t^2 \text{var}(X) + 2t \text{cov}(X, Y) + \text{var}(Y) \geq 0 \end{aligned}$$

由于不等式恒成立, 故 $g(t)$ 的判别式 ≤ 0 , 即 $(\text{cov}(X, Y))^2 \leq \text{var}(X) \cdot \text{var}(Y)$. □

随机变量的相关系数: 设 $0 < \text{var}(X), \text{var}(Y) < \infty$, 则称

$$\frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{var}(X)}\sqrt{\text{var}(Y)}}$$

为 X 与 Y 的**相关系数**, 记为 ρ_{XY} , 简记为 ρ 。

定理: 设 ρ 是随机变量 X 与 Y 的相关系数, 则有

- (1) $|\rho| \leq 1$;
- (2) X 与 Y 独立, 则不相关, 从而 $\rho = 0$;
- (3) $|\rho| = 1$ 当且仅当存在 a, b 以概率 1 使得 $Y = a + bX$.

证明: (1) 可以直接由式 6.6.1 推知成立。

(2) 若 X 与 Y 相互独立, 则

$$E(X - E(X))(Y - E(Y)) = E(X - E(X))E(Y - E(Y)) = 0,$$

从而 $\rho = 0$ 。

(3) 设

$$\begin{aligned} g(t) &:= E(t(X - EX) + (Y - EY))^2 \\ &= t^2 \text{var}(X) + 2t \text{cov}(X, Y) + \text{var}(Y) \end{aligned}$$

则 $|\rho| = 1$ 当且仅当 $g(t)$ 的判别式为 0, 即存在 t_0 使得

$$\begin{aligned} g(t_0) &= E(t_0(X - EX) + (Y - EY))^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow Y = -t_0 X + EX + EY. \end{aligned}$$

□

例: 设 (X, Y) 服从二维正态分布, 联合密度为

$$\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(u^2+v^2-2\rho uv)} \quad u = \frac{x-\mu_1}{\sigma_1}, v = \frac{y-\mu_2}{\sigma_2}.$$

求 ρ_{XY} 。

解: 由之前的结论, $\mu_1 = E(X), \mu_2 = E(Y), \sigma_1^2 = \text{var}(X), \sigma_2^2 = \text{var}(Y)$ 。

故

$$\begin{aligned} \rho_{XY} &= \frac{E(X - \mu_1)(Y - \mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} = E\left(\frac{X - \mu_1}{\sigma_1} \frac{Y - \mu_2}{\sigma_2}\right) \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} uv \cdot e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(u^2+v^2-2\rho uv)} dv du. \end{aligned}$$

先对 v 积分, $v^2 - 2\rho uv + u^2 = (v - \rho u)^2 + (1 - \rho^2)u^2$,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} uv \cdot e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(u^2+v^2-2\rho uv)} dv &= ue^{-\frac{u^2}{2}} \times \int_{-\infty}^{\infty} ve^{-\frac{(v-\rho u)^2}{2(1-\rho^2)}} dv \\ &= ue^{-\frac{u^2}{2}} \times \sqrt{2\pi(1-\rho^2)} \cdot \rho u. \end{aligned}$$

代入积分式, 再对 u 积分,

$$\rho_{XY} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \rho u^2 e^{-\frac{u^2}{2}} du = \rho.$$

□

例: 设二维随机向量 (X, Y) 的联合密度是

$$p(x, y) = \begin{cases} \frac{2}{2\pi} \exp\left\{-\frac{1}{2}(x^2 + y^2)\right\}, & xy > 0, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

求 ρ_{XY} 。

解：上一讲第二节已经指出 $X \sim N(0,1)$, $Y \sim N(0,1)$, 故

$$E(X) = E(Y) = 0, \quad \text{var}(X) = \text{var}(Y) = 1.$$

因此

$$\begin{aligned} \text{cov}(X, Y) &= E(XY) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xyp(x, y)dx dy \\ &= \iint_{\{(x, y): xy > 0\}} xy \frac{2}{2\pi} \exp\left\{-\frac{1}{2}(x^2 + y^2)\right\} dx dy \\ &= \int_0^{\infty} ye^{-y^2/2} \left(\int_0^{\infty} \frac{2}{2\pi} xe^{-x^2/2} dx \right) dy \\ &\quad + \int_{-\infty}^0 ye^{-y^2/2} \left(\int_{-\infty}^0 \frac{2}{2\pi} xe^{-x^2/2} dx \right) dy \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{2}{2\pi} ye^{-y^2/2} dy - \int_{-\infty}^0 \frac{2}{2\pi} ye^{-y^2/2} dy \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{2}{\pi} ye^{-y^2/2} dy = \frac{2}{\pi} \end{aligned}$$

故相关系数为 $\rho_{XY} = \frac{2}{\pi}$ 。

□

6.7 条件期望

条件期望的定义： 设 X 和 Y 是两个随机变量。

(1) 若在 $Y = y$ 的条件下 X 的可能值是 x_1, x_2, \dots (有限个或无穷可列个), 条件概率分布是 $P(X = x_i | Y = y_i) (i = 1, 2, \dots)$ 则称

$$\sum_i x_i P(X = x_i | Y = y)$$

为在 $Y = y$ 条件下 X 的**条件期望**, 记为 $E(X | Y = y)$ 。

(2) 若在 $Y = y$ 的条件下 X 有条件分布密度 $p_{X|Y}(x|y)$, 则称积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} xp_{X|Y}(x|y)dx$$

为在 $Y = y$ 的条件下 X 的**条件期望**, 记为 $E(X | Y = y)$ 。

设二维随机向量 (X, Y) 有联合密度 $p(x, y)$, 有

$$E(X | Y = y) = \frac{1}{p_Y(y)} \int_{-\infty}^{\infty} xp(x, y)dx.$$

定理： 设二维随机向量 (X, Y) 有联合密度 $p(x, y)$ ，则

$$E(X) = \int_{\{y: p_Y(y) > 0\}} E(X|Y = y) p_Y(y) dy.$$

证明： 首先，若 $p_Y(y) = 0$ ，则对任何 $A > 0$ 有

$$\left| \int_{-A}^A xp(x, y) dx \right| \leq A \int_{-A}^A p(x, y) dx \leq A \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y) dx = A p_Y(y) = 0,$$

于是

$$\int_{-\infty}^{+\infty} xp(x, y) dx = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_{-A}^A xp(x, y) dx = 0$$

可见

$$\begin{aligned} \int_{\{y: p_Y(y) > 0\}} E(X|Y = y) p_Y(y) dy &= \int_{\{y: p_Y(y) > 0\}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} xp(x, y) dx \right) dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} xp(x, y) dy \right) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x \left(\int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y) dy \right) dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} xp_X(x) dx = E(X). \end{aligned}$$

□

对于离散情形，有类似的定理。

定理： 设 (X, Y) 是二维随机向量， Y 的可能值是 y_1, y_2, \dots （有限个或可列无穷个）， $P(Y = y_i) > 0$ ($i = 1, 2, \dots$)， X 的可能值是 x_1, x_2, \dots （有限个或可列无穷个），且 $E(X)$ 存在，则

$$E(X) = \sum_i E(X|Y = y_i) P(Y = y_i).$$

证明： 由于 $P(X = x_k, Y = y_i) = P(X = x_k|Y = y_i) P(Y = y_i)$ ，知

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_k x_k P(X = x_k) = \sum_k x_k \sum_i P(X = x_k, Y = y_i) \\ &= \sum_k \sum_i x_k P(X = x_k|Y = y_i) P(Y = y_i) \\ &= \sum_i E(X|Y = y_i) P(Y = y_i). \end{aligned}$$

□

例：设 (X, Y) 的联合密度函数为

$$p(x, y) = \begin{cases} \frac{e^{-x/y} e^{-y}}{y}, & x, y \in (0, +\infty), \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

求 $E(X|Y = y)$ 。

解：对给定的 $y \in (0, +\infty)$ ，在 $Y = y$ 条件下 X 的条件密度函数为

$$p(x|y) = \begin{cases} \frac{p(x, y)}{p_Y(y)} = \frac{\frac{1}{y} e^{-x/y} e^{-y}}{\int_0^{+\infty} \frac{1}{y} e^{-x/y} e^{-y} dx} = \frac{e^{-x/y}}{y} & x \in (0, +\infty), \\ 0, & x \notin (0, +\infty), \end{cases}$$

因此， X 在给定 $Y = y$ 条件下的条件分布恰好是参数为 $\frac{1}{y}$ 的指数分布。从而

$$E(X|Y = y) = \int_0^{+\infty} x \frac{e^{-x/y}}{y} dx = y.$$

例：(对应郑书例 7.7) 一矿工在有三个门的矿井中迷了路，第 1 个门通到一个通道，走 2 个小时可到达地面；第 2 个门通到另一个通道，走 3 个小时又回到原处；第 3 个门通到第 3 个通道，沿它走 5 个小时也回到原处，假定该矿工总是等可能从 3 个门选择任意一个进入通道，试问，该矿工到达地面平均需要多长时间。

解：设矿工到达地面所需时间为 X ，选择门的编号为 Y ，则 $P(Y = 1) = P(Y = 2) = P(Y = 3) = \frac{1}{3}$ ，于是

$$E(X) = \sum_{i=1}^3 P(Y = i) E(X|Y = i) = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 E(X|Y = i).$$

易知， $E(X|Y = 1) = 2$ ， $E(X|Y = 2) = E(X) + 3$ ， $E(X|Y = 3) = E(X) + 5$ ，于是

$$E(X) = \frac{1}{3}(2 + E(X) + 3 + E(X) + 5)$$

推知 $E(X) = 10$ ，即矿工到达地面平均要 10 小时。

7.1 n 维随机向量

n 维随机向量及其联合分布函数: 设 $\xi = (X_1, \dots, X_n)$ 是 n 维向量, 称

$$F(x_1, \dots, x_n) = P(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n), \quad x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^n$$

为 ξ 的联合分布函数, 也记为 F_ξ 或 F_{X_1, \dots, X_n} .

离散型 n 维随机向量: 若 ξ 取有限个或可列个值 (n 维向量), 则称 ξ 为离散型.

连续型 n 维随机向量: 若存在非负可积函数 $p(x_1, \dots, x_n)$ 使得对任意 n 维矩形 D 都有

$$P(\xi \in D) = \int \cdots \int_D p(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n,$$

则称 ξ 为连续型随机向量, 称 $p(x_1, \dots, x_n)$ 为 ξ 的联合密度, 也记为 P_{X_1, \dots, X_n} . (注: 上式对一般集合 D 都成立).

n 维随机向量的边缘分布: 设 $\xi = (X_1, \dots, X_n)$ 是 n 维向量, 对任意 $1 \leq k < n, 1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$, 则称 $(X_{i_1}, \dots, X_{i_k})$ 为 ξ 的 (一个 k 维) 边缘, 其分布被称为 ξ 的边缘分布.

例: (多项分布) 设 U_1, \dots, U_n 是取值 $1, \dots, t$ 的随机变量, 且相互独立, 都服从如下分布:

$$P(U_i = k) = p_k, \quad k = 1, \dots, t,$$

其中 $t \geq 2, p_k > 0, \forall k$ 且 $p_1 + \cdots + p_t = 1$.

记

$$X_k = |\{1 \leq i \leq n : U_i = k\}| = \sum_{i=1}^n 1_{\{U_i=k\}}.$$

$\xi = (X_1, \dots, X_t)$ 的联合分布列:

$$P(\xi = (i_1, \dots, i_t)) = \frac{n!}{i_1! \cdots i_t!} p_1^{i_1} \cdots p_t^{i_t}.$$

因为 $X_t = n - \sum_{s=1}^{t-1} X_s$, $p_t = 1 - \sum_{s=1}^{t-1} p_s$, 所以 ξ 与 (X_1, \dots, X_{t-1}) 等价.

本例的背景模型为: n 次独立重复试验 (投掷一枚 t 面骰子).

例: 口袋中有 5 个白球, 8 个黑球, 从中不放回的依次取出 3 个, 若第 i 次取出白球, 则 $X_i = 1$, 否则令 $X_i = 0$, $i = 1, 2, 3$, 求 (X_1, X_2, X_3) 的联合分布列.

解:

$$P(X_1 = 0, X_2 = 0, X_3 = 0) = \frac{8 \times 7 \times 6}{13 \times 12 \times 11} = 0.1958$$

$$\begin{aligned}
P(X_1 = 1, X_2 = 0, X_3 = 0) &= P(X_1 = 0, X_2 = 1, X_3 = 0) \\
&= P(X_1 = 0, X_2 = 0, X_3 = 1) = \frac{8 \times 7 \times 5}{13 \times 12 \times 11} = 0.1632 \\
P(X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 0) &= P(X_1 = 0, X_2 = 1, X_3 = 1) \\
&= P(X_1 = 1, X_2 = 0, X_3 = 1) = \frac{5 \times 4 \times 8}{13 \times 12 \times 11} = 0.0932 \\
P(X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 1) &= \frac{5 \times 4 \times 3}{13 \times 12 \times 11} = 0.0035
\end{aligned}$$

独立性: 若对任意 $a_i < b_i, i = 1, \dots, n$ 都有

$$\begin{aligned}
&P(a_1 < X_1 < b_1, \dots, a_n < X_n < b_n) \\
&= P(a_1 < X_1 < b_1) \cdots P(a_n < X_n < b_n)
\end{aligned}$$

则称 n 个随机变量 X_1, \dots, X_n 相互独立.

若 X_1, \dots, X_n 相互独立, 且 $F_{X_i} = F_{X_1}, i = 2, \dots, n$, 则称 X_1, \dots, X_n 独立同分布.

若相互独立, 则上式中的 $a_i < X_i < b_i$ 可以改为 $X_i \in B_i$, 其中 B_1, \dots, B_n 为任意一维 Borel 集.

定理: 设 $X_1, \dots, X_n (n \geq 2)$ 都是随机变量, 分别有分布密度 $p_1(x_1), \dots, p_n(x_n)$, 则 X_1, \dots, X_n 相互独立的充分必要条件是 n 元函数

$$p_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) = p_1(x_1) \cdots p_n(x_n).$$

为 n 维随机向量 (X_1, \dots, X_n) 的联合密度.

对于离散型随机向量, 有类似的结论, 设 n 个随机变量的取值分别为 $X_1 = x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots; \dots; X_n = x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots$, 则 X_1, \dots, X_n 相互独立的充分必要条件是

$$\begin{aligned}
&P(X_1 = x_{i_1}^{(1)}, \dots, X_n = x_{i_n}^{(n)}) \\
&= P(X_1 = x_{i_1}^{(1)}) \cdots P(X_n = x_{i_n}^{(n)}) = p_{i_1}^{(1)} \cdots p_{i_n}^{(n)}
\end{aligned}$$

定义: 若 X_i 与 X_j 相互独立, $\forall i \neq j$, 则称 X_1, \dots, X_n 两两独立.

例: 甲、乙玩石头剪刀布. 甲出 X , 乙出 Y , 结局为 Z . 则 X, Y, Z 两两独立, 但不相互独立.

例: 设随机向量 (X, Y, Z) 在矩形区域 $a < x < b, c < y < d, e < z < f$ 内服从均匀分布, 求 X, Y, Z 的分布密度函数, 以及 X, Y, Z 是否相互独立.

解: 由均匀分布定义

$$p(x, y, z) = \frac{1}{(b-a)(d-c)(f-e)} \quad a < x < b, c < y < d, e < z < f.$$

当 x, y, z 所在边界矩形是独立的, 且在矩形内时有:

$$p_X(x) = \int_e^f \int_c^d \frac{1}{(b-a)(d-c)(f-e)} dydz = \frac{1}{b-a}$$

$$p_Y(y) = \int_e^f \int_a^b \frac{1}{(b-a)(d-c)(f-e)} dx dz = \frac{1}{d-c}$$

$$p_Z(z) = \int_e^f \int_a^b \frac{1}{(b-a)(d-c)(f-e)} dx dy = \frac{1}{f-e}.$$

由于 $p(x, y, z) = p_X(x)p_Y(y)p_Z(z)$, 因此 X, Y, Z 之间相互独立。

定义: 设 $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_m)$ 和 $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_n)$ 分别是 m 维和 n 维随机向量, 给定 $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$, 若 $P(\mathbf{Y} = \mathbf{y}) > 0$, 则 x_1, \dots, x_m 的函数

$$P(X_1 \leq x_1, \dots, X_m \leq x_m | \mathbf{Y} = \mathbf{y})$$

称为在 $\mathbf{Y} = \mathbf{y}$ 条件下 \mathbf{X} 的**条件分布函数**, 记为 $F_{\mathbf{X}|\mathbf{Y}}(x_1, \dots, x_m | \mathbf{y})$.

若 $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_m)$ 和 $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_n)$ 有联合密度 $p(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n)$, 则

$$F_{\mathbf{X}|\mathbf{Y}}(x_1, \dots, x_m | y_1, \dots, y_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_m} \frac{p(u_1, \dots, u_m, y_1, \dots, y_n)}{p_Y(y_1, \dots, y_n)} du_1 \dots du_m,$$

这里 $p_Y(y_1, \dots, y_n)$ 是 $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_n)$ 的联合密度, 称这里的被积函数为在 $\mathbf{Y} = (y_1, \dots, y_n)$ 条件下 \mathbf{X} 的**条件分布密度**。

例: 设 X_1, X_2, X_3 为独立同分布的连续型随机变量, 求 $P(X_3 < X_1 | X_1 = \min \{X_1, X_2\})$.

解:

$$\begin{aligned} P(X_3 < X_1 | X_1 = \min \{X_1, X_2\}) &= \frac{P(X_3 < X_1, X_1 = \min \{X_1, X_2\})}{P(X_1 = \min \{X_1, X_2\})} \\ &= \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{x_3}^{+\infty} \int_{x_1}^{+\infty} p(x_2) dx_2 p(x_1) dx_1 p(x_3) dx_3}{\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{x_1}^{+\infty} p(x_2) dx_2 p(x_1) dx_1} \\ &= \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{x_3}^{+\infty} (1 - F(x_1)) dF(x_1) dF(x_3)}{\int_{-\infty}^{+\infty} (1 - F(x_1)) dF(x_1)} \\ &= \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} - F(x_3) + \frac{1}{2} F^2(x_3) dF(x_3)}{1/2} = \frac{1/6}{1/2} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

7.1.1 n 维随机向量的数字特征

设 $\xi = (X_1, \dots, X_n)$ 是 n 维随机向量, 每个 X_i 都有期望和方差, 易知协方差

$$\sigma_{X_i X_j} = E((X_i - E(X_i))(X_j - E(X_j))) \quad (i \neq j)$$

必然存在。

期望: 称 $(E(X_1), \dots, E(X_n))$ 为 ξ 的期望, 记为 $E(\xi)$.

协方差阵: 记 $\sigma_{ij} = \text{cov}(X_i, X_j)$, $\rho_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sqrt{\sigma_{ii}\sigma_{jj}}}$. 称 $\Sigma = (\sigma_{ij})_{n \times n}$ 为 ξ 的协方差阵, $\mathbf{R} = (\rho_{ij})_{n \times n}$ 为 ξ 的相关系数阵。

例: 设随机变量 X_1, X_2, X_3 满足

$$aX_1 + bX_2 + cX_3 = 0,$$

$$E(X_1) = E(X_2) = E(X_3) = d,$$

$$\text{var}(X_1) = \text{var}(X_2) = \text{var}(X_3) = \sigma^2.$$

求相关系数 $\rho_{12}, \rho_{23}, \rho_{31}$.

解: 对等式 $aX_1 + bX_2 = -cX_3$ 两侧求方差得 $a^2\sigma^2 + b^2\sigma^2 + 2ab\sigma^2\rho_{12} = c^2\sigma^2$, 由此解得

$$\rho_{12} = \frac{c^2 - a^2 - b^2}{2ab},$$

同理, 对等式 $aX_1 + cX_3 = -bX_2$ 两侧求方差得

$$\rho_{13} = \frac{b^2 - a^2 - c^2}{2ac},$$

同理, 对等式 $bX_2 + cX_3 = -aX_1$ 两侧求方差得

$$\rho_{23} = \frac{a^2 - b^2 - c^2}{2bc}.$$

特别的, 当 $d \neq 0$ 时, 有 $(a + b + c)d = 0$, 因此 $a + b + c = 0$, 由此可得

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2ab, \quad b^2 = a^2 + c^2 + 2ac, \quad a^2 = b^2 + c^2 + 2bc,$$

代入 $\rho_{12}, \rho_{23}, \rho_{31}$ 表达式得 $\rho_{12} = \rho_{23} = \rho_{31} = 1$ 。

7.1.2 n 个随机变量的函数

定理： 设 $Y = f(X_1, \cdots, X_n)$ 的分布函数是 $F(y)$ ，令

$$A(y) = \{(x_1, \cdots, x_n) : f(x_1, \cdots, x_n) \leq y\}$$

其中 y 是任意实数，则

$$F_Y(y) = P(f(\xi) \leq y) = \int \cdots \int_{A(y)} p(x_1, \cdots, x_n) dx_1 \cdots dx_n$$

定理： (均值公式) 设 $Y = f(X_1, \cdots, X_n)$ ， n 维随机向量 (X_1, \cdots, X_n) 有联合密度 $p(x_1, \cdots, x_n)$ ，则

$$EY = \int \cdots \int f(x_1, \cdots, x_n) p(x_1, \cdots, x_n) dx_1 \cdots dx_n.$$

例： (χ^2 分布) 假设 X_1, \cdots, X_n 独立同分布，都服从 $N(0, 1)$ 。于是， $Y_n := X_1^2 + \cdots + X_n^2 \sim \Gamma(\frac{n}{2}, \frac{1}{2})$ ，密度为

$$p_n(x) = \frac{1}{2^{n/2} \Gamma(\frac{n}{2})} x^{n/2-1} e^{-x/2}, \quad x > 0.$$

其中

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$$

证明： 利用数学归纳法，已经证明 (郑书例 5.2) $Y_1 = X_1^2$ 的分布密度是

$$p_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x^{-1/2} e^{-x/2}, \quad x > 0.$$

设 $n = k$ 时结论成立，考虑 $n = k + 1$ 的情形，由于 $Y_{k+1} = Y_k + X_{k+1}^2$ ， Y_k 与 X_{k+1}^2 相互独立，则 Y_{k+1} 的分布密度为

$$\begin{aligned} p_{k+1}(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} p_k(u) p_1(x-u) du \\ &= \int_0^x \frac{1}{2^{k/2} \Gamma(\frac{k}{2})} u^{k/2-1} e^{-u/2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (x-u)^{-1/2} e^{-(x-u)/2} du \\ &= \int_0^x \frac{e^{-x/2}}{2^{(k+1)/2} \Gamma(\frac{k}{2}) \sqrt{\pi}} u^{k/2-1} (x-u)^{-1/2} du \\ &= \frac{x^{(k+1)/2-1} e^{-x/2}}{2^{(k+1)/2} \Gamma(\frac{k}{2}) \sqrt{\pi}} \int_0^1 v^{k/2-1} (1-v)^{-1/2} dv \quad (\text{做变量替换 } u = xv) \\ &= C x^{(k+1)/2-1} e^{-x/2} \quad (C \text{ 是与 } x \text{ 无关的常数}). \end{aligned}$$

由归一性

$$1 = \int_0^{+\infty} C x^{(k+1)/2-1} e^{-x/2} dx = C 2^{(k+1)/2} \int_0^{+\infty} t^{(k+1)/2-1} e^{-t} dt$$

故

$$C = \frac{1}{2^{(k+1)/2} \Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}.$$

因此 $n = k + 1$ 时结论成立。对一切 $n \geq 1$, Y_n 均服从 $\Gamma\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 。称 Y_n 服从 n 个自由度的 χ^2 (卡方) 分布。□

例: 假设 X_1, \dots, X_n 独立同分布, 都服从参数为 λ 的指数分布, 则 $Y_n := \sum_{i=1}^n X_i$ ($n \geq 1$) 的分布密度是

$$p_n(x) = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-\lambda x}, \quad (x > 0).$$

证明: 利用数学归纳法, 当 $n = 1$ 时, 结论显然成立。设 $n = k$ 时结论成立, 考虑 $n = k + 1$ 的情形, 由于 $Y_{k+1} = Y_k + X_{k+1}$, Y_k 与 X_{k+1} 相互独立, 则 Y_{k+1} 的分布密度为

$$\begin{aligned} p_{k+1}(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} p_k(u) p_1(x-u) du \\ &= \int_0^x \frac{\lambda^k}{(k-1)!} u^{k-1} e^{-\lambda u} \lambda e^{-\lambda(x-u)} du \\ &= \frac{\lambda^{k+1}}{(k-1)!} e^{-\lambda x} \int_0^x u^{k-1} du = \frac{\lambda^{k+1}}{k!} x^k e^{-\lambda x}. \end{aligned}$$

因此 $n = k + 1$ 时结论成立。对一切 $n \geq 1$, Y_n 的概率密度均为 $p_n(x) = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-\lambda x}$, ($x > 0$)。并且随机变量 $Z_n = 2\lambda Y_n$ 服从 $2n$ 个自由度的 χ^2 分布。□

例: N 件产品中有 D 件次品. 随机抽取 n 件, 设包含 X 件次品. 可以利用期望的性质, 求 $E(X)$ 与 $\text{var}(X)$. (其中, $N \geq n \geq 2$).

解: 随机数目的分解: $X = X_1 + \dots + X_n$, 其中

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{若第 } i \text{ 件是次品;} \\ 0, & \text{若第 } i \text{ 件是合格品.} \end{cases}$$

由期望的线性、伯努利分布的期望,

$$E(X) = \sum_{i=1}^n E(X_i) = \sum_{i=1}^n P(\text{第 } i \text{ 件是次品}) = n \frac{D}{N}.$$

由于 $\text{var}(X) = EX^2 - (EX)^2$. 根据对称性,

$$E(X^2) = \sum_{i=1}^n E(X_i^2) + \sum_{i \neq j} E(X_i X_j) = nE(X_1^2) + n(n-1)E(X_1 X_2)$$

由乘法公式,

$$E(X_1 X_2) = P(\text{前两件都是次品}) = \frac{D}{N} \cdot \frac{D-1}{N-1}.$$

因此,

$$\begin{aligned} \text{var}(X) &= n \frac{D}{N} + n(n-1) \frac{D}{N} \cdot \frac{D-1}{N-1} - \left(n \frac{D}{N} \right)^2 \\ &= \frac{n(N-n)D(N-D)}{N^2(N-1)} \quad (N > 1) \end{aligned}$$

例: 随机向量 $\mathbf{X} = (X_i)_{n \times 1}$, $E(\mathbf{X}) = \mu$, $\text{var}(\mathbf{X}) = \Sigma$, 矩阵 $\mathbf{A}_{n \times n}$, 证明: $E(\mathbf{X}^\top \mathbf{A} \mathbf{X}) = \text{tr}(\mathbf{A} \Sigma) + \mu^\top \mathbf{A} \mu$.

证明:

$$\begin{aligned} E(\mathbf{X}^\top \mathbf{A} \mathbf{X}) &= E(\text{tr}(\mathbf{X}^\top \mathbf{A} \mathbf{X})) = E(\text{tr}(\mathbf{A} \mathbf{X} \mathbf{X}^\top)) \\ &= \text{tr}(E(\mathbf{A} \mathbf{X} \mathbf{X}^\top)) = \text{tr}(\mathbf{A} E(\mathbf{X} \mathbf{X}^\top)) \\ &= \text{tr}(\mathbf{A} (\text{var}(\mathbf{X}) + \mu \mu^\top)) = \text{tr}(\mathbf{A} \Sigma) + \text{tr}(\mathbf{A} \mu \mu^\top) \\ &= \text{tr}(\mathbf{A} \Sigma) + \mu^\top \mathbf{A} \mu. \end{aligned}$$

□

7.1.3 n 个随机变量的多个函数

定理: 设 $\xi = (X_1, \dots, X_n)$ 为连续型随机向量, 且 \mathbb{R}^n 中的区域 A 满足 $P(\xi \in A) = 1$, 函数 $f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n)$ 满足下列条件:

(1) 对任何实数 u_1, \dots, u_n , 方程组

$$f_k(x_1, \dots, x_n) = u_k, \quad (k = 1, \dots, n)$$

在 A 中至多有一个解 $x_i = x_i(u_1, \dots, u_n)$, $i = 1, \dots, n$;

(2) 对一切 $k = 1, \dots, n$, f_k 在 A 中有连续偏导数;

(3) 雅可比行列式

$$J = \frac{\partial(y_1, \dots, y_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} \neq 0.$$

设 $Y_k = f_k(X_1, \dots, X_n)$ ($k = 1, \dots, n$), $G = \{(u_1, \dots, u_n) : \text{方程组 } f_k(x_1, \dots, x_n) = u_k, (k = 1, \dots, n) \text{ 在 } A \text{ 中有解}\}$, 则 $\eta = (Y_1, \dots, Y_n)$ 是连续型, 且联合密度

$$p_\eta(y_1, \dots, y_n) = p_\xi(x_1, \dots, x_n) |J^{-1}|, (y_1, \dots, y_n) \in G.$$

定理: 设 $\xi = (X_1, \dots, X_n)$ 的协方差阵为 Σ , 且

$$Y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} X_j, j = 1, \dots, m.$$

记 $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m \times n}$, $\eta = (Y_1, \dots, Y_m)$, 则

$$(E(\eta))^{\top} = \mathbf{A}(E(\xi))^{\top},$$

$$\text{cov}(\eta, \eta) = \mathbf{A}\Sigma\mathbf{A}^{\top}.$$

证明: 由于 $E(Y_i) = \sum_{j=1}^n a_{ij} E(X_j)$, 故 $(E(\eta))^{\top} = \mathbf{A}(E(\xi))^{\top}$ 成立, 又由于 $Y_i - E(Y_i) = \sum_{j=1}^n a_{ij} (X_j - E(X_j))$, 知

$$(Y_i - E(Y_i))(Y_k - E(Y_k)) = \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n a_{ij} a_{kl} (X_j - E(X_j))(X_l - E(X_l)).$$

于是

$$\begin{aligned} \text{cov}(Y_i, Y_k) &= \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n a_{ij} a_{kl} E(X_j - E(X_j))(X_l - E(X_l)) \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n a_{ij} a_{kl} \sigma_{jl}, \end{aligned}$$

这里 $\sigma_{jl} = \text{cov}(X_j, X_l)$.

由于 $\Sigma = (\sigma_{jl})_{n \times n}$, 知 $\text{cov}(\eta, \eta) = \mathbf{A}\Sigma\mathbf{A}^{\top}$ 成立。 □

次序统计量: 设 n 个随机变量 X_1, \dots, X_n , 将它们从小到大排列:

$$X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \dots \leq X_{(n)},$$

称 $X_{(k)}$ 为第 k 个次序统计量.

例: 设 X_1, \dots, X_n 独立同分布, 都服从 $U(0, 1)$. 已知对于 $\forall 0 < x < 1$,

$$P(X_{(k)} \leq x) = \sum_{i=k}^n \frac{n!}{i!(n-i)!} x^i (1-x)^{n-i}.$$

求 $E(X_{(k)})$ 与 $\text{var}(X_{(k)})$.

解: 由于对于 $\forall 0 < x < 1$,

$$P(X_{(k)} \leq x) = \sum_{i=k}^n \frac{n!}{i!(n-i)!} x^i (1-x)^{n-i}.$$

$k \leq i \leq n-1$, 上式单项的导数是

$$\begin{aligned} & \frac{n!}{i!(n-i)!} (ix^{i-1}(1-x)^{n-i} - x^i(n-i)(1-x)^{n-i-1}) \\ &= \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!} x^{i-1}(1-x)^{n-i} - \frac{n!}{i!(n-i-1)!} x^i(1-x)^{n-i-1} \\ &= a_{i-1} - a_i, \end{aligned}$$

$i = n$ 时, $(x^n)' = a_{n-1}$, 于是, $\forall 0 < x < 1$,

$$p_{X_{(k)}}(x) = \sum_{i=k}^{n-1} (a_{i-1} - a_i) + a_{n-1} = a_{k-1}.$$

已有 $q_k(x) := p_{X_{(k)}}(x) = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} x^{k-1}(1-x)^{n-k}$, 且对于 $\forall \ell, m \geq 1$, 由分部积分

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^\ell (1-x)^m dx &= \frac{m}{\ell+1} \int_0^1 x^{\ell+1} (1-x)^{m-1} dx \\ &= \cdots = \frac{m!}{(\ell+1) \cdots (\ell+m)} \int_0^1 x^{\ell+m} dx = \frac{\ell!m!}{(\ell+m+1)!} \end{aligned}$$

期望: 取 $\ell = k, m = n-k$, 知

$$\begin{aligned} EX_{(k)} &= \int_0^1 x q_k(x) dx = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \int_0^1 x^k (1-x)^{n-k} dx \\ &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \cdot \frac{k!(n-k)!}{(n+1)!} = \frac{k}{n+1}. \end{aligned}$$

二阶矩: 取 $\ell = k+1, m = n-k$,

$$\begin{aligned} EX_{(k)}^2 &= \int_0^1 x^2 q_k(x) dx = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \int_0^1 x^{k+1} (1-x)^{n-k} dx \\ &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \cdot \frac{(k+1)!(n-k)!}{(n+2)!} = \frac{k(k+1)}{(n+1)(n+2)}. \end{aligned}$$

方差:

$$\begin{aligned} \text{var}(X_{(k)}) &= EX_{(k)}^2 - (EX_{(k)})^2 = \frac{k(k+1)}{(n+1)(n+2)} - \frac{k^2}{(n+1)^2} \\ &= \frac{k^2(n+1) + k(n+1) - k^2(n+2)}{(n+1)^2(n+2)} = \frac{k(n+1-k)}{(n+1)^2(n+2)}. \end{aligned}$$

7.1.4 n 维正态分布

我们已经定义过 n 维正态分布。

n 维正态分布: 假设 n 维随机向量 ξ 有如下的联合密度, 则称 ξ 服从 n 维正态分布, 记为 $\xi \sim N(\mu, \Sigma)$.

$$p(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n \sqrt{|\Sigma|}} \exp \left\{ -\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mu)^\top \Sigma^{-1}(\mathbf{x} - \mu) \right\}.$$

定理 8.1: 设 $(X_1, \dots, X_n)^\top \sim N(\mu, \Sigma)$, $\mathbf{A} = (a_{ij})_{n \times n}$, $|\mathbf{A}| \neq 0$, $Y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} X_j (i = 1, \dots, n)$, 则

$$(Y_1, \dots, Y_n)^\top \sim N(\mathbf{A}\mu, \mathbf{A}\Sigma\mathbf{A}^\top). \quad (7.1.1)$$

证明: 设 $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)^\top$, $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^\top$, 对于任意 n 维矩形 D , 记

$$D^* = \{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^\top : \mathbf{A}\mathbf{x} \in D\},$$

则

$$P((Y_1, \dots, Y_n)^\top \in D) = P((X_1, \dots, X_n)^\top \in D^*) = \iint_{D^*} \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n \sqrt{|\Sigma|}} \exp \left\{ -\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mu)^\top \Sigma^{-1}(\mathbf{x} - \mu) \right\} d\mathbf{x}$$

做变量替换 $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{y}$, 雅可比行列式为

$$\frac{\partial(x_1, \dots, x_n)}{\partial(y_1, \dots, y_n)} = |\mathbf{A}^{-1}| = |\mathbf{A}|^{-1}.$$

于是

$$\begin{aligned} P((Y_1, \dots, Y_n)^\top \in D) &= \int \cdots \int_D \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n \sqrt{|\Sigma|}} \exp \left\{ -\frac{1}{2}(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{y} - \mu)^\top \Sigma^{-1}(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{y} - \mu) \right\} \|\mathbf{A}\|^{-1} d\mathbf{y} \\ &= \int \cdots \int_D \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n \sqrt{|\mathbf{A}\Sigma\mathbf{A}^\top|}} \exp \left\{ -\frac{1}{2}(\mathbf{y} - \mathbf{A}\mu)^\top (\mathbf{A}\Sigma\mathbf{A}^\top)^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{A}\mu) \right\} d\mathbf{y}. \end{aligned}$$

这表明 $(Y_1, \dots, Y_n)^\top \sim N(\mathbf{A}\mu, \mathbf{A}\Sigma\mathbf{A}^\top)$. □

推论: 若 ξ 服从 n 元正态分布 $N(\mu, \Sigma)$, 则存在一个正交变换 \mathbf{U} , 使得 $\eta = \mathbf{U}\xi$ 是一个具有独立正态分布分量的随机向量, 它的数学期望为 $\mathbf{U}\mu$, 方差分量是 Σ 的特征值。

证明: 对实对称矩阵 Σ , 存在正交矩阵 \mathbf{U} , 使得 $\mathbf{U}\Sigma\mathbf{U}^\top = \mathbf{D}$, 其中 \mathbf{D} 为对角矩阵, 对角元是 Σ 的特征值, 若 Σ 的秩为 r , 则有 r 个特征值不为零。

将这里的 \mathbf{U} 作为定理 8.1 的变换矩阵, 则可得推论结果。 □

推论: 正交变换下, 多维标准正态变量保持其独立性, 同方差性不变。

证明: 设 $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^\top$ 服从 n 元正态分布, 且 X_i 相互独立有相同的方差 σ^2 , 则协方差矩阵 $D(\mathbf{X}) = \sigma^2 \mathbf{I}$, 若 \mathbf{U} 是正交阵, $\mathbf{Y} = \mathbf{U}\mathbf{X}$, 由定理 8.1 知 \mathbf{Y} 服从正态分布, 协方差为

$$\mathbf{U}\sigma^2\mathbf{I}\mathbf{U}^\top = \sigma^2\mathbf{I}$$

因此 η 仍然是相互独立且具有相同方差。 □

推论：若 $\xi \sim N(\mu, \Sigma)$ ，其中 Σ 是 n 阶正定阵，则

$$(\xi - \mu)^\top \Sigma^{-1} (\xi - \mu) \sim \chi_n^2$$

证明：设正定阵 $\Sigma = \mathbf{L}\mathbf{L}^\top$ ，则

$$\begin{aligned} (\xi - \mu)^\top \Sigma^{-1} (\xi - \mu) &= (\xi - \mu)^\top (\mathbf{L}\mathbf{L}^\top)^{-1} (\xi - \mu) \\ &= [\mathbf{L}^{-1}(\xi - \mu)]^\top [\mathbf{L}^{-1}(\xi - \mu)] = \eta^\top \eta \end{aligned}$$

其中 $\eta = \mathbf{L}^{-1}(\xi - \mu)$ ，由定理 8.1 知它是均值为 $\mathbf{0}$ 的 n 维正态变量，协方差矩阵为

$$\mathbf{L}^{-1} \Sigma (\mathbf{L}^{-1})^\top = \mathbf{I}$$

从而 η 的各个分量是相互独立的标准状态变量，因此

$$\eta^\top \eta = \chi_1^2 + \cdots + \chi_n^2 \sim \chi_n^2.$$

□

定理 8.2：设 $(X_1, \cdots, X_m, X_{m+1}, \cdots, X_n)^\top \sim N(\mu, \Sigma) (1 \leq m < n)$ ，且

$$\mu = \begin{bmatrix} \mu^{(1)} \\ \mu^{(2)} \end{bmatrix}, \quad \Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma^{(1)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Sigma^{(2)} \end{bmatrix},$$

其中 $\mu^{(1)}$ 是 m 维列向量， $\mu^{(2)}$ 是 $n-m$ 维列向量， $\Sigma^{(1)}$ 是 m 阶矩阵， $\Sigma^{(2)}$ 是 $n-m$ 阶矩阵，则

$$\mathbf{X}^{(1)} = (X_1, \cdots, X_m)^\top \sim N(\mu^{(1)}, \Sigma^{(1)}), \quad \mathbf{X}^{(2)} = (X_{m+1}, \cdots, X_n)^\top \sim N(\mu^{(2)}, \Sigma^{(2)}).$$

证明：记 $\mathbf{x}^{(1)} = (x_1, \cdots, x_m)^\top$ ， $\mathbf{x}^{(2)} = (x_{m+1}, \cdots, x_n)^\top$ ，易知 $(X_1, \cdots, X_m, X_{m+1}, \cdots, X_n)^\top$ 的联合密度为

$$\begin{aligned} p(x_1, \cdots, x_m, x_{m+1}, \cdots, x_n) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n \sqrt{|\Sigma^{(1)}|}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\mathbf{x}^{(1)} - \mu^{(1)})^\top (\Sigma^{(1)})^{-1} (\mathbf{x}^{(1)} - \mu^{(1)}) \right\} \\ &\quad \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}^{n-m} \sqrt{|\Sigma^{(2)}|}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\mathbf{x}^{(2)} - \mu^{(2)})^\top (\Sigma^{(2)})^{-1} (\mathbf{x}^{(2)} - \mu^{(2)}) \right\}. \end{aligned}$$

于是

$$P((X_1, \cdots, X_m)^\top \in D) = \int \cdots \int_D \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n \sqrt{|\Sigma^{(1)}|}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\mathbf{x}^{(1)} - \mu^{(1)})^\top (\Sigma^{(1)})^{-1} (\mathbf{x}^{(1)} - \mu^{(1)}) \right\} d\mathbf{x}^{(1)}$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \int \cdots \int_{\mathcal{R}^{n-m}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n \sqrt{|\Sigma^{(2)}|}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\mathbf{x}^{(2)} - \mu^{(2)})^\top (\Sigma^{(2)})^{-1} (\mathbf{x}^{(2)} - \mu^{(2)}) \right\} d\mathbf{x}^{(2)} \\
& = \int \cdots \int_D \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n \sqrt{|\Sigma^{(1)}|}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\mathbf{x}^{(1)} - \mu^{(1)})^\top (\Sigma^{(1)})^{-1} (\mathbf{x}^{(1)} - \mu^{(1)}) \right\} d\mathbf{x}^{(1)}.
\end{aligned}$$

这表明 $(X_1, \dots, X_m)^\top \sim N(\mu^{(1)}, \Sigma^{(1)})$, 同理知 $(X_{m+1}, \dots, X_n)^\top \sim N(\mu^{(2)}, \Sigma^{(2)})$. \square

在上述定理的假设条件下, $(X_1, \dots, X_m)^\top$ 与 $(X_{m+1}, \dots, X_n)^\top$ 相互独立. 进而推知多元正态分布 (X_1, \dots, X_n) 两两独立的充分必要条件是两两不相关.

定理 8.3: $(X_1, \dots, X_m, \dots, X_n)^\top \sim N(\mu, \Sigma) (1 \leq m < n)$, 则

$$(X_1, \dots, X_m) \sim N(\mu^{(1)}, \Sigma_{11})$$

其中

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{bmatrix}, \quad \mu = \begin{bmatrix} \mu^{(1)} \\ \mu^{(2)} \end{bmatrix}.$$

证明: 令

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_m & \mathbf{0} \\ -\Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1} & \mathbf{I}_{n-m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} = \mathbf{B} \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix}$$

则由式7.1.1知

$$(Y_1, \dots, Y_n)^\top \sim N(\mathbf{B}\mu, \mathbf{B}\Sigma\mathbf{B}^\top).$$

易知

$$\mathbf{B}\mu = \mathbf{B} \begin{bmatrix} \mu^{(1)} \\ \mu^{(2)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}\Sigma\mathbf{B}^\top = \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Sigma_{22} - \Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}\Sigma_{12} \end{bmatrix}.$$

根据定理知

$$(X_1, \dots, X_m) \sim N(\mu^{(1)}, \Sigma_{11}).$$

\square

定理 8.4: 设 $(X_1, \dots, X_n)^\top \sim N(\mu, \Sigma)$, \mathbf{A} 是 $m \times n$ 的矩阵且 \mathbf{A} 的秩等于 m , $(Y_1, \dots, Y_m)^\top = \mathbf{A}(X_1, \dots, X_m)^\top$, 则

$$(Y_1, \dots, Y_m)^\top \sim N(\mathbf{A}\mu, \mathbf{A}\Sigma\mathbf{A}^\top).$$

证明: 若 $m = n$, 则结论与式7.1.1相同; 若 $m < n$, 则在 \mathbf{A} 下方添加 $n - m$ 行使得到的矩阵

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{C} \end{bmatrix}$$

非奇异, 令

$$(Z_1, \dots, Z_n)^\top = \mathbf{B}(X_1, \dots, X_n)^\top.$$

由式 7.1.1 知

$$(Z_1, \dots, Z_n)^\top \sim N(\mathbf{B}\mu, \mathbf{B}\Sigma\mathbf{B}^\top).$$

注意到

$$\mathbf{B}\mu = \begin{bmatrix} \mathbf{A}\mu \\ \mathbf{C}\mu \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}\Sigma\mathbf{B}^\top = \begin{bmatrix} \mathbf{A}\Sigma\mathbf{A}^\top & \mathbf{A}\Sigma\mathbf{C}^\top \\ \mathbf{C}\Sigma\mathbf{A}^\top & \mathbf{C}\Sigma\mathbf{C}^\top \end{bmatrix},$$

$$(Z_1, \dots, Z_m)^\top = (Y_1, \dots, Y_m)^\top.$$

由定理 8.3 知定理成立。 □

定理 8.5: 设 $(X_1, \dots, X_n)^\top \sim N(\mu, \Sigma)$, 则有

$$(1) \ E(\mathbf{X}) \triangleq (E(X_1), \dots, E(X_n))^\top = \mu;$$

$$(2) \ \text{cov}(\mathbf{X}, \mathbf{X}) = \Sigma.$$

证明: 先考虑 $\Sigma = \mathbf{I}$ 的情形, 此时 X_1, \dots, X_n 独立同分布, 且 $X_i \sim N(\mu_i, 1)$, 于是

$$(E(X_1), \dots, E(X_n))^\top = \mu, \quad \text{cov}(\mathbf{X}, \mathbf{X}) = \mathbf{I},$$

故 $\Sigma = \mathbf{I}$ 时定理成立。

现考虑一般情形, 设 Σ 是任何 n 阶正定矩阵, 存在方阵 \mathbf{A} , 使得 $\mathbf{A}\Sigma\mathbf{A}^\top = \mathbf{I}$, 令 $\mathbf{Y} = \mathbf{A}\mathbf{X}$, 由定理 8.1 知 $\mathbf{Y} \sim N(\mathbf{A}\mu, \mathbf{A}\Sigma\mathbf{A}^\top)$, 即

$$\mathbf{Y} \sim N(\mathbf{A}\mu, \mathbf{I}),$$

因此

$$E(\mathbf{Y}) = \mathbf{A}\mu, \quad \text{cov}(\mathbf{Y}, \mathbf{Y}) = \mathbf{I}.$$

由于 $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{Y}$, 利用期望的线性性质得到

$$E(\mathbf{X}) = \mathbf{A}^{-1}E(\mathbf{Y}) = \mu,$$

$$\text{cov}(\mathbf{X}, \mathbf{X}) = \mathbf{A}^{-1} \text{cov}(\mathbf{Y}, \mathbf{Y})(\mathbf{A}^{-1})^\top = \Sigma.$$

□

例: 若 $\xi \sim N(0, I_d)$, 试证明 $\frac{\xi}{\|\xi\|} (\xi \neq 0)$ 为 $\|x\|_2 = 1$ 上的均匀分布。

证明: 只需说明 $\forall \|x\|_2 = 1, R^\top R = I_d$, 有 $p_{\frac{\xi}{\|\xi\|}}(x) = p_{\frac{\xi}{\|\xi\|}}(Rx)$.

由于概率密度函数 $p_{\frac{\xi}{\|\xi\|}}(Rx)$ 等价于 $\frac{\xi}{\|\xi\|}$ 经过线性变换 R^\top 后, 得到的变量 $Z = \frac{R^\top \xi}{\|\xi\|}$ 的概率密度函数,

$$p_{\frac{\xi}{\|\xi\|}}(Rx) = p_{\frac{R^\top \xi}{\|\xi\|}}(x),$$

注意到 $\|R^\top \xi\| = \|\xi\|$, 故

$$p_{\frac{\xi}{\|\xi\|}}(Rx) = p_{\frac{R^\top \xi}{\|R^\top \xi\|}}(x)$$

由定理 8.1 有 $R^\top \xi \sim N(0, I_d)$, 因此

$$p_{\frac{\xi}{\|\xi\|}}(Rx) = p_{\frac{R^\top \xi}{\|R^\top \xi\|}}(x) = p_{\frac{\xi}{\|\xi\|}}(x).$$

例: 若 ξ_1, ξ_2 是相互独立的随机变量, 均服从标准正态分布, 而

$$\eta_1 = a\xi_1 + b\xi_2, \quad \eta_2 = c\xi_1 + d\xi_2,$$

则由于

$$E(\eta_1) = 0, \quad D(\eta_1) = a^2 D(\xi_1) + b^2 D(\xi_2) = a^2 + b^2$$

$$E(\eta_2) = 0, \quad D(\eta_2) = c^2 D(\xi_1) + d^2 D(\xi_2) = c^2 + d^2$$

$$\text{cov}(\eta_1, \eta_2) = ac + bd, \quad \rho_{\eta_1, \eta_2} = \frac{ac + bd}{\sqrt{a^2 + b^2} \sqrt{c^2 + d^2}}$$

因此 $\eta_1 \sim N(0, a^2 + b^2)$, $\eta_2 \sim N(0, c^2 + d^2)$, 且

$$(\eta_1, \eta_2) \sim N(0, 0, a^2 + b^2, c^2 + d^2, \frac{ac + bd}{\sqrt{a^2 + b^2} \sqrt{c^2 + d^2}})$$

当 $ac + bd = 0$ 时, $\rho_{\eta_1, \eta_2} = 0$, η_1 与 η_2 独立。

当 $\rho_{\eta_1, \eta_2} = \pm 1$, 即 $(ac + bd)^2 = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$ 时, (η_1, η_2) 退化为一个点。退化为一维分布, 而当 $a = b = c = d = 0$ 时, (η_1, η_2) 退化为一个点。

条件分布: 若 $\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$ 服从 n 元正态分布 $N(\mu, \Sigma)$, $E(\xi_1) = \mu_1, E(\xi_2) = \mu_2, \Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{bmatrix}$,

则在给定 $\xi_1 = x_1$ 下, ξ_2 的分布仍然为正态分布, 条件数学期望

$$\mu_{2|1} = E(\xi_2 | \xi_1 = x_1) = \mu_2 + \Sigma_{21} \Sigma_{11}^{-1} (x_1 - \mu_1)$$

条件方差

$$\Sigma_{22|1} = \Sigma_{22} - \Sigma_{21} \Sigma_{11}^{-1} \Sigma_{12}$$

这里 $E(\xi_2 | \xi_1 = x_1)$ 称为 ξ_2 关于 ξ_1 的回归, 注意到它是 x_1 的线性函数。又有条件方差与 x_1 无关。

证明：考虑

$$\begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} = \mathbf{I}.$$

其中, $\Sigma_{12} = \Sigma_{21}^\top$ 和 $\mathbf{A}_{12} = \mathbf{A}_{21}^\top$ 。则有

$$\Sigma_{11}\mathbf{A}_{12} + \Sigma_{12}\mathbf{A}_{22} = \mathbf{0}.$$

则 $\mathbf{A}_{22}^{-1}\mathbf{A}_{12}^\top = -\Sigma_{12}^\top\Sigma_{11}^{-1}$. 所以 $\mathbf{A}_{22}^{-1}\mathbf{A}_{21} = -\Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}$. 另外有

$$\Sigma_{12}\mathbf{A}_{12} + \Sigma_{22}\mathbf{A}_{22} = \mathbf{I}.$$

则有

$$(\Sigma_{22} - \Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}\Sigma_{12})\mathbf{A}_{22} = \mathbf{I}.$$

而配方有

$$\begin{aligned} & (x_2 - \mu_2)^\top \mathbf{A}_{22}(x_2 - \mu_2)^\top + 2(x_2 - \mu_2)^\top \mathbf{A}_{21}(x_1 - \mu_1) \\ &= [x_2 - \mu_2 + \mathbf{A}_{22}^{-1}\mathbf{A}_{21}(x_1 - \mu_1)]^\top \mathbf{A}_{22} [x_2 - \mu_2 + \mathbf{A}_{22}^{-1}\mathbf{A}_{21}(x_1 - \mu_1)] \\ & \quad + f(x_1). \end{aligned}$$

得到证明。

例：二元场合, 若 $(\xi_1, \xi_2)^\top$ 服从正态分布 $N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$, 则

$$\mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} \quad \Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{bmatrix}.$$

在给定 $\xi_1 = x_1$ 条件下, ξ_2 的条件分布还是正态分布而且其条件期望由定理可以推知

$$E(\xi_2|\xi_1 = x_1) = \mu_2\rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x_1 - \mu_1)$$

条件方差可以推知为

$$\sigma_2^2 - \frac{(\rho\sigma_1\sigma_2)^2}{\sigma_1^2} = \sigma_2^2(1 - \rho^2).$$

8.1 随机序列的收敛性

设随机变量 $\eta = \eta(\omega), \xi_1 = \xi_1(\omega), \xi_2 = \xi_2(\omega), \dots$ 都是概率空间 (Ω, \mathcal{F}, P) 上的实值函数, 我们在表述上常常省去 ω 。

定义: 称随机变量 ξ_1, ξ_2, \dots **依概率收敛** 于 η , 若对任何 $\varepsilon > 0$, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(\{\omega : |\xi_n(\omega) - \eta(\omega)| \geq \varepsilon\}) = 0.$$

此时记作 $\xi_n \xrightarrow{P} \eta$.

定义: 称随机变量 ξ_1, ξ_2, \dots **概率为 1 (或几乎必然) 的收敛** 于 η , 若

$$P(\{\omega : \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n(\omega) = \eta(\omega)\}) = 1.$$

此时记作 $\xi_n \xrightarrow{a.s.} \eta$, 其中 a.s. 是 almost surely 的缩写。

定义: 称随机变量 ξ_1, ξ_2, \dots **弱收敛** 于 η , 若对于 η 的分布函数 $F(x)$ 的任何连续点 x , 下式皆成立:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(\{\omega : \xi_n(\omega) \leq x\}) = P(\{\omega : \eta(\omega) \leq x\}).$$

此时记作 $\xi_n \xrightarrow{w} \eta$ 。弱收敛也称为依分布收敛。

定理: 设 $\xi_n \xrightarrow{a.s.} \eta$, 则 $\xi_n \xrightarrow{P} \eta$ 。

证明 (不做要求): 研究集合 $A = \{\omega : \xi_1(\omega), \xi_2(\omega), \dots \text{不收敛于 } \eta(\omega)\}$, 假设 $\xi_n \xrightarrow{a.s.} \eta$, 知 $P(A) = 0$, 对任何 $\varepsilon > 0$, 令

$$B = \{\omega : \text{有无穷多个 } n, \text{ 使得 } |\xi_n(\omega) - \eta(\omega)| \geq \varepsilon\},$$

$$B_m = \{\omega : \text{有 } n \geq m, \text{ 使得 } |\xi_n(\omega) - \eta(\omega)| \geq \varepsilon\},$$

则 $B_m \supset B_{m+1}$, $B = \bigcap_{m=1}^{\infty} B_m$, 于是

$$\lim_{m \rightarrow \infty} P(B_m) = P(B) \leq P(A) = 0,$$

因为 $P(|\xi_n - \eta| \geq \varepsilon) \leq P(B_m)$, 所以

$$\lim_{m \rightarrow \infty} P(|\xi_n - \eta| \geq \varepsilon) = 0.$$

表明 $\xi_n \xrightarrow{P} \eta$ 。

□

注意，逆定理不成立：

例 (不做要求)： 设 $\Omega = (0, 1)$, \mathcal{F} 由 $(0, 1)$ 中所有 Borel 子集组成, P 是这样的概率测度: 对任何区间 $(a, b) (0 \leq a < b \leq 1)$, $P((a, b)) = b - a$, 在概率空间 (Ω, \mathcal{F}, P) 上考虑下列随机变量序列:

对任何正整数 k 及 $j = 1, \dots, 2^k$, 令

$$X_{k1} = \begin{cases} 1, & 0 < \omega < \frac{1}{2^k}, \\ 0, & \text{其他;} \end{cases}, \quad X_{kj} = \begin{cases} 1, & \frac{j-1}{2^k} < \omega < \frac{j}{2^k}, \\ 0, & \text{其他;} \end{cases} \quad (j > 1).$$

这些 $X_{kj} : k \geq 1, j = 1, \dots, 2^k$ 可排成一个序列: $X_{11}, X_{12}, X_{21}, X_{22}, X_{23}, X_{24}, \dots$ (按照字典排列法, 将第一个足标从小到大排, 若相同则按第二个足标从小到大排), 将该序列记为 ξ_1, ξ_2, \dots , 其中 $\xi_n = X_{k_n j_n}$, 则对任何 $\varepsilon \in (0, 1)$ 有:

$$P(|\xi_n| \geq \varepsilon) = P(\xi_n = 1) = \frac{1}{2^{k_n}}$$

在 $n \rightarrow \infty$ 时 $k_n \rightarrow \infty$, 故有 $\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\xi_n| \geq \varepsilon) = 0$, 这表明 $\xi_n \xrightarrow{P} 0$.

而对于任何 $\omega \in (0, 1)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n(\omega)$ 不存在。实际上对任何 ω 和 k , 存在唯一的 j_k 使得 $X_{kj_k}(\omega) = 1$, 而 $j \neq j_k$ 时 $X_{kj}(\omega) = 0$, 由此可见, $\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n(\omega)$ 不存在。即 $\xi_n \xrightarrow{a.s.} \eta$ 不成立。

定理 (不做要求)： 设 $\xi_n \xrightarrow{P} \eta$, 则 $\xi_n \xrightarrow{w} \eta$.

证明： 设 x_0 是 η 的分布函数 $F(x)$ 的连续点, 记

$$F_n(x) = P(\xi_n \leq x) \quad (n = 1, 2, \dots).$$

易知, 对任何 $\varepsilon > 0$, 有

$$\{\xi_n \leq x_0\} \subset \{\xi_n - \eta \leq -\varepsilon\} \cup \{\eta \leq x_0 + \varepsilon\},$$

于是 $P(\xi_n \leq x_0) \leq P(\xi_n - \eta \leq -\varepsilon) + P(\eta \leq x_0 + \varepsilon)$.

故

$$F_n(x_0) - F(x_0) \leq P(|\xi_n - \eta| \geq \varepsilon) + F(x_0 + \varepsilon) - F(x_0).$$

类似地, 有

$$\{\xi_n \leq x_0\} \supset \{\xi_n - \eta \leq \varepsilon, \eta \leq x_0 - \varepsilon\},$$

于是

$$P(\xi_n \leq x_0) \geq P(\xi_n - \eta \leq \varepsilon, \eta \leq x_0 - \varepsilon) \geq P(\eta \leq x_0 - \varepsilon) - P(\xi_n - \eta > \varepsilon)$$

故

$$F_n(x_0) - F(x_0) \geq F(x_0 - \varepsilon) - F(x_0) - P(|\xi_n - \eta| \geq \varepsilon).$$

因此

$$|F_n(x_0) - F(x_0)| \leq F(x_0 + \varepsilon) - F(x_0 - \varepsilon) + P(|\xi_n - \eta| \geq \varepsilon).$$

由于 x_0 是 $F(x)$ 的连续点, 因此对任何 $\delta > 0$, 有 $\varepsilon > 0$, 满足

$$F(x_0 + \varepsilon) - F(x_0 - \varepsilon) < \frac{\delta}{2}.$$

取 n_0 , 当 $n \geq n_0$ 时,

$$P(|\xi_n - \eta| \geq \varepsilon) < \frac{\delta}{2}.$$

于是对一切 $n \geq n_0$, 有

$$|F_n(x_0) - F(x_0)| < \delta.$$

这表明 $F_n(x_0) \rightarrow F(x_0) (n \rightarrow \infty)$, 故 $\xi_n \xrightarrow{\omega} \eta$. □

注意, 逆定理不真:

例: 设随机变量 $X \sim N(0, 1)$, 令

$$\xi_{2n-1} = X, \quad \xi_{2n} = -X \quad (n = 1, 2, \dots).$$

易知所有的 ξ_n 有相同的分布函数 $\phi(x)$, 为标准正态分布函数, 显然 $\xi_n \xrightarrow{\omega} \eta$. 但是对 $\varepsilon > 0$, 有

$$P(|\xi_n - X| \geq \varepsilon) = \begin{cases} 0, & n \text{ 是奇数,} \\ P(|X| \geq \frac{\varepsilon}{2}), & n \text{ 是偶数.} \end{cases}$$

可见 ξ_1, ξ_2, \dots 并不依概率收敛于 X .

设 X_1, X_2, \dots 是随机变量序列, 令

$$S_n = X_1 + \dots + X_n.$$

定义: 若 $E(X_n), n = 1, 2, \dots$ 都存在, 且

$$\frac{1}{n} (S_n - E(S_n)) \xrightarrow{P} 0$$

则称 X_1, X_2, \dots 服从 (弱) 大数律 (Weak Law of Large Numbers, WLLN)。

定义: 若 $E(X_n), n = 1, 2, \dots$ 都存在, 且

$$\frac{1}{n} (S_n - E(S_n)) \xrightarrow{\text{a.s.}} 0,$$

则称 X_1, X_2, \dots 服从强大数律 (SLLN)。

定义: 若对任意 $n \geq 2$ 都有 X_1, \dots, X_n 相互独立, 则称 X_1, X_2, \dots 是相互独立的随机变量序列。

若 X_1, X_2, \dots 相互独立, 且 $X_n \stackrel{d}{=} X_1, \forall n \geq 2$, 则称 X_1, X_2, \dots 独立同分布, 记为 i.i.d. (independent and identically distributed).

例: 设随机变量序列 $\{X_n\}$ 独立同分布, 其密度函数为

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta}, & 0 < x < \beta, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

其中常数 $\beta > 0$, 令 $Y_n = \max\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$, 证明 $Y_n \xrightarrow{P} \beta$.

证明: 因为当 $x < 0$ 时, 有 $P(Y_n \leq x) = 0$, 当 $x \geq \beta$ 时, 有 $P(Y_n \leq x) = 1$, 当 $0 \leq x < \beta$ 时, 有

$$P(Y_n \leq x) = \prod_{i=1}^n P(X_i \leq x) = \prod_{i=1}^n \int_0^x \frac{1}{\beta} dx = \left(\frac{x}{\beta}\right)^n,$$

所以对任意的 $\varepsilon > 0 (\varepsilon < \beta)$, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 有

$$P(|Y_n - \beta| \geq \varepsilon) = P(Y_n \leq \beta - \varepsilon) = \left(\frac{\beta - \varepsilon}{\beta}\right)^n \rightarrow 0,$$

所以有 $Y_n \xrightarrow{P} \beta$. □

8.2 大数定律

切比雪夫大数定律: 假设 X_1, X_2, \dots 相互独立, 且存在 M 使得 $\text{var}(X_i) \leq M, \forall i$. 设 $S_n = X_1 + \dots + X_n$, 那么,

$$\frac{1}{n} (S_n - ES_n) \xrightarrow{P} 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

证明: 令 $A_n = \{|\frac{1}{n} (S_n - ES_n)| \geq \varepsilon\}$. 需验证 $P(A_n) \rightarrow 0$.

由切比雪夫不等式,

$$P(A_n) = P(|S_n - ES_n| \geq n\varepsilon) \leq \frac{1}{(n\varepsilon)^2} \text{var}(S_n)$$

由于 X_1, X_2, \dots 两两不相关, 所以 $\text{var}(S_n) = \sum_{i=1}^n \text{var}(X_i) \leq nM$, 于是

$$P(A_n) \leq \frac{nM}{n^2\varepsilon^2} = \frac{M}{\varepsilon^2} \cdot \frac{1}{n} \rightarrow 0.$$

由此知定律成立.

其中定律里的条件“相互独立”可减弱为“两两不相关”. □

推论: 设 X_1, X_2, \dots 独立同分布, $\text{var}(X_1) < \infty$, 则当 $n \rightarrow \infty$ 时,

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{P} E(X_1).$$

推论: (伯努利大数律) 单次试验中 A 发生的概率为 p , 设在 n 次试验中事件 A 发生了 ν_n 次, 则当 $n \rightarrow \infty$ 时,

$$\frac{\nu_n}{n} \xrightarrow{P} p.$$

证明: 令

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{第 } i \text{ 次试验中 } A \text{ 发生,} \\ 0, & \text{第 } i \text{ 次试验中 } A \text{ 不发生,} \end{cases} \quad (i = 1, 2, \dots),$$

则 $\frac{\nu_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ 由于 X_1, X_2, \dots 是独立同分布的随机变量序列, $E(X_i) = p$, $\text{var}(X_i) = p(1-p)$ ($i = 1, 2, \dots$), 故由上一推论知本推论成立. \square

如果不假定 $E(X_i)$ 存在, 上述推论是否成立?

例: 设 X_1, X_2, \dots 独立同分布, 密度为 $p(x) = \frac{1}{\pi(x^2+1)}$. 可以证明, $\frac{S_n}{n}$ 与 X_1 有相同的密度. 于是, 对任何 a 和 $\varepsilon > 0$, 有

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - a\right| > \varepsilon\right) = P(|X_1 - a| > \varepsilon) \text{ 不趋于 } 0.$$

故 $\frac{S_n}{n}$ 不能以概率收敛于 a .

定理: (Cantelli 强大数定律) 假设 X_1, X_2, \dots 相互独立, $E(X_i)$ 存在, 且 $E(X_i - E(X_i))^4 \leq M$, $\forall i$. 那么

$$\frac{1}{n} (S_n - ES_n) \xrightarrow{\text{a.s.}} 0.$$

推论: 设 X_1, X_2, \dots 独立同分布, $E(X_1^4)$ 存在, 则 $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\text{a.s.}} E(X_1)$.

本推论可以由 Cantelli 强大数定律直接推出。

推论: (Borel 强大数律) 单次小试验中事件 A 发生的概率为 p . 在独立重复试验中, 前 n 次试验中 A 发生的次数为 ν_n , 则

$$\frac{\nu_n}{n} \xrightarrow{\text{a.s.}} p.$$

定理 2.4. (Kolmogorov's SLLN). 假设 X_1, X_2, \dots 独立同分布, 期望存在, 则 $\frac{1}{n} S_n \xrightarrow{\text{a.s.}} EX_1$.

例: 设 X_1, X_2, \dots 是相互独立的随机变量序列, $X_1 \equiv 0$, 对一切 $n \geq 2$, X_n 只取三个可能值 $n, -n, 0$, 且

$$P(X_n) = n = P(X_n = -n) = \frac{1}{2n \ln n}, \quad P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n \ln n}.$$

证明 X_1, X_2, \dots 服从切比雪夫大数定律。

证明: 易知

$$E(X_n) = 0, \quad \text{var}(X_1) = 0, \quad \text{var}(X_n) = \frac{n}{\ln n} \quad (n = 2, 3, \dots).$$

令 $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, 则 $\text{var}(S_n) = \sum_{i=1}^n \text{var}(X_i) = \sum_{i=2}^n \frac{i}{\ln i}$. 由于 $x \geq 3$ 时 $\frac{x}{\ln x}$ 是 x 的增函数, 故 $\text{var}(S_n) \leq \frac{2}{\ln 2} + \frac{n^2}{\ln n}$, 利用切比雪夫不等式, 有

$$P\left(\left|\frac{S_n - E(S_n)}{n}\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{1}{n^2 \varepsilon} \text{var}(S_n) \rightarrow 0 \quad (\varepsilon > 0, n \rightarrow \infty).$$

这表明 X_1, X_2, \dots 服从切比雪夫大数定律。

大数定律和强大数定律有广泛的应用:

(1): 统计方法的理论依据. 假设采集到数据数据: X_1, \dots, X_n 为 X 的 n 次独立观测值, 它们独立同分布.

常用 $\frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n)$ 估计期望:

$$\bar{X} := \frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n) \xrightarrow{\text{a.s.}} E(X).$$

常用 $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ 估计方差:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - (\bar{X})^2 \xrightarrow{\text{a.s.}} E(X^2) - (E(X))^2 = \text{var}(X).$$

(2): 用于计算机模拟期望、概率.

例: 设有 m 枚炮弹同时射击, 第 i 枚炮弹落点为 (x_i, y_i) ,

$$\varphi(x_1, y_1; \dots; x_m, y_m) = \begin{cases} 1, & \text{若落点造成有效毁伤;} \\ 0, & \text{否则.} \end{cases}$$

设第 i 枚炮弹的瞄准点为 (a_i, b_i) , 实际落点 (X_i, Y_i) . 模型假设: $X_1, \dots, X_m; Y_1, \dots, Y_m$ 相互独立, 且

$$X_i \sim N(a_i, \sigma_1^2), \quad Y_i \sim N(b_i, \sigma_2^2).$$

根据 SLLN:

$$\begin{aligned} & P(\varphi(X_1, Y_1; \dots; X_m, Y_m) = 1) \\ & \approx \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \varphi(X_1^{(k)}, Y_1^{(k)}; \dots; X_m^{(k)}, Y_m^{(k)}). \end{aligned}$$

利用数据 $X_1^{(k)}, Y_1^{(k)}; \dots; X_m^{(k)}$ 即可用计算机计算概率的估计值。

(3): 估计积分 $I = \int_a^b f(x)dx$.

利用变量替换 $x = a + (b-a)u$ 得, $I = \int_0^1 f(a + (b-a)u)(b-a)du$, 因此不妨假设 $a=0, b=1$.

得到 $I = \int_0^1 f(x) \cdot 1dx = E(f(U))$. 其中 U 为服从区间 $(0, 1)$ 上均匀分布的随机变量。

根据 SLLN:

$$I \approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (f(U_1) + \cdots + f(U_n))$$

因此只需得到服从区间 $(0, 1)$ 上均匀分布的随机数 u_1, \cdots, u_n , 即可得到积分的近似值。该方法还可以推广到高维的数值积分。

8.3 中心极限定理

中心极限定理: 设 X_1, X_2, \cdots 为随机变量序列, 若 $E(X_n), \text{var}(X_n), n = 1, 2, \cdots$ 都存在, $\text{var}(X_n)$ 不全为 0, 令 $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, 且

$$S_n^* = \frac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{\text{var}(S_n)}} \xrightarrow{\omega} Z \sim N(0, 1),$$

则称 X_1, X_2, \cdots 服从中心极限定理 (Central Limit Theorem, CLT)(或适合中心极限定理)。

定理: (Linderberg-Levy 中心极限定理) 假设 X_1, X_2, \cdots 独立同分布, $E(X_1)$ 存在且 $0 < \text{var}(X_1) < \infty$. 那么,

$$S_n^* \xrightarrow{\omega} Z \sim N(0, 1).$$

例: 加法器同时收到 20 个噪声电压 $V_k, k = 1, \cdots, 20$, 它们独立同分布, $V_1 \sim U(0, 10)$. 记 $V = \sum_{k=1}^{20} V_k$, 求 $P(V > 105)$.

解: 易知 $E(V_1) = 5, \text{var}(V_1) = \frac{10^2}{12}$.

设

$$V^* = \frac{V - 20 \times 5}{\sqrt{20 \times \frac{100}{12}}}$$

根据中心极限定理,

$$P(V > 105) = P\left(V^* > \frac{105 - 20 \times 5}{\sqrt{20 \times \frac{100}{12}}}\right) \approx 1 - \Phi(0.387)$$

查表得 $\Phi(x^*) = 0.652$, 从而所求的 $p = 1 - 0.652 = 0.348$.

例: 旅馆有 500 间客房, 每间有一台 2 千瓦的空调. 入住率为 80%. 问: 需多少千瓦的电力能有 99% 的把握保证电力足够?

解: 假设提供 x 千瓦.

设事件 $A_i =$ “第 i 间房开空调”, $P(A_i) = 80\%$, $X_i = 2 \times 1_{A_i}$.

则易知 $E(X_1) = 1.6$, $\text{var}(X_1) = 4 \times 0.8 - 1.6^2 = 0.64$.

要求 x 满足: $P(S_n \leq x) \geq 99\%$. 设

$$S_n^* = \frac{S_n - 500 \times 1.6}{\sqrt{500 \times 0.64}}$$

根据中心极限定理, 要求

$$P(S_n \leq x) = P(S_n^* \leq x^*) \approx \Phi(x^*) \geq 0.99$$

其中

$$x^* = \frac{x - 500 \times 1.6}{\sqrt{500 \times 0.64}}.$$

查表得 $\Phi(2.33) = 0.99$. 即, 要求 $x^* \geq 2.33$.

即, 要求 $x \geq 800 + 2.33 \times \sqrt{320} = 841.68$, 从而需 842 千瓦.

9.1 统计学若干基本概念

定义：所考察的对象的总和称为**总体**，在统计学中可以归结为随机变量或其他形式的随机量。

例如，考察电子产品的使用寿命，于是将所有电子产品的使用寿命作为总体。所谓总体特性，就是使用寿命的特性，或者是刻画使用寿命的随机变量 X 的特性，该随机变量的分布称为**总体分布**。可以假定 X 的分布为指数分布，其分布密度有下列形式：

$$p(x, \theta) = \frac{1}{\theta} \exp \left\{ -\frac{x}{\theta} \right\} \quad (x > 0, \theta > 0),$$

式中 θ 是分布的**参数**。

设用 $F(x, \theta)$ 表示随机变量 X 分布密度相应的分布函数，用 F_θ 表示相应的分布。为获取分布 F_θ 的信息，我们假定 F_θ 属于一个**分布族**，用 $\mathcal{F} = \{F_\theta, \theta \in \Theta\}$ 表示这个分布族。在分布族 \mathcal{F} 的表达式中 θ 称为参数， Θ 称为**参数空间**。在统计学中，随机变量 X 称为总体，它的分布 F_θ 称为**总体分布**。这样， $X \sim F_\theta \in \mathcal{F}$ 形成了这个统计问题的**模型**，称为总体模型。

例如，电子产品的使用寿命 X 的分布 F_θ 由分布密度确定，其中参数 $\theta \in (0, +\infty)$ 。当 θ 确定后，我们获得了电子产品使用寿命的全部信息。

总体模型只涉及 X 这个随机变量，而没有涉及数据。观察数据 $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ 是 $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ 的观察值。其中 X_1, \dots, X_n 是独立同分布的，这由样本的产生所确定，其共同的分布为 F_θ 。在统计学中，我们称 $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ 为**样本**，称 n 为**样本量**，称 \mathbf{X} 的取值 $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ 为**样本值**。称 \mathbf{X} 的所有可能取值的集合为样本空间 \mathcal{X} ，在样本空间上的分布为 P_θ ，我们称 $\mathbf{X} \sim P_\theta (\theta \in \Theta)$ 为**统计模型**。

模型的参数 θ 可以是常数向量或者其他的量，主要特征是：一旦参数的值确定后，统计模型中的分布就完全确定了。在某些统计问题中，我们需要了解与参数有关的量，即 θ 的函数 $g(\theta)$ ，为了简便，将 $g(\theta)$ 也称为参数。

例：(测量问题) 对某待估量 a 重复独立测量 n 次，得到测量值 x_1, \dots, x_n 。

测量值带有误差，总体分布 $X = a + e$ ，其中 $e \sim N(0, \sigma^2)$ 。即， $X \sim N(a, \sigma^2)$ 。相应的参数空间为 $\Theta = \{\theta = (a, \sigma^2) : a \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0\}$ 。

参数 $\theta = (a, \sigma^2)$ 。其中， σ^2 不是所关心的，称为讨厌参数。

$P_\theta: \vec{X}$ 的联合密度为

$$f_\theta(x) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left\{ -\frac{(x_i - a)^2}{2\sigma^2} \right\}.$$

这样, $\mathbf{X} \sim P_\theta$, $\theta = (a, \sigma^2) \in \Theta$ 形成了统计模型。

研究对象 θ 或 $g(\theta)$. 例, $g(a, \sigma^2) = a$.

定义: 设 $\mathbf{X} \sim P_\theta(\theta \in \Theta)$ 是一个统计模型, 则定义在样本空间 \mathcal{X} 上的任何函数 $T(\mathbf{x})(\mathbf{x} \in \mathcal{X})$ 都称为**统计量**。

在统计学中统计量通常是指具体的函数, 不能泛指, 尤其不能含有未知参数。从数学上, 统计量是一个只依赖数据的函数, 当 (x_1, \dots, x_n) 的值给定后根据函数关系可以算出 $T(\mathbf{x})$ 的值。

然而, 如果将统计量看成样本 \mathbf{X} 的函数, $T(\mathbf{X})$ 还是一个随机变量, 具有分布, 且在不同参数值下具有不同的分布。严格意义下, 统计量具有分布族。

例如在测量问题中, 最常见的统计量为样本均值 $T = \frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n)$, 当观察值为 x_1, \dots, x_n 时, $T = \frac{1}{n}(x_1 + \dots + x_n)$ 为一个数值。当 $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ 时, 统计量是样本的函数, 为随机变量。我们可以计算 T 的分布, $T \sim N\left(a, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ 。注意统计量的分布含有未知参数 (a, σ^2) 。

9.2 若干统计问题

估计问题: 依赖于样本的统计量就可以作为参数 a 的估计, 在估计问题中, 估计参数的统计量也称为估计量。

例: (测量问题续) 测量问题中待测量 a 的一个估计为 $T_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ 。当 (X_1, \dots, X_n) 服从多元正态分布时, 其常数线性组合的分布也是正态分布, 利用 $X_i (i = 1, \dots, n)$ 独立同分布的特性, 计算 T_1 的期望和方差, 可得

$$E(T_1) = \frac{1}{n} \left[\sum_{i=1}^n E(X_i) \right] = a,$$

$$\text{var}(T_1) = \frac{1}{n^2} \left[\sum_{i=1}^n \text{var}(X_i) \right] = \frac{\sigma^2}{n},$$

这样我们得到 $T_1 \sim N\left(a, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ 。

假设检验: 对假设 H_0 回答“是”或“否”。

例如, 规定不合格率不能超过 3%。现有 200 件产品, 从中任意抽取 10 件, 发现 2 件不合格。问: 是否可以出厂?

线性回归：研究变量 Y 对 x 的线性依赖关系，

$$Y = b_0 + b_1x + e, \quad e \sim N(0, \sigma^2).$$

9.3 极大似然

我们引入两类常用的统计模型：

离散统计模型：设 (X_1, \dots, X_n) 为独立重复观察得到的样本，其中 $X_i (i = 1, \dots, n)$ 为离散型随机变量，样本分布列具有下列一般性质：

$$P_\theta((X_1, \dots, X_n) = (x_1, \dots, x_n)) = \prod_{i=1}^n P_\theta(X_i = x_i) \quad (\theta \in \Theta),$$

此时 θ 为参数，对于固定的样本值 (x_1, \dots, x_n) ，作为 θ 的函数

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n P_\theta(X_i = x_i)$$

称为**似然函数**。

连续统计模型：此时 $X_i (i = 1, \dots, n)$ 为连续型随机变量，样本 (X_1, \dots, X_n) 具有联合密度

$$\prod_{i=1}^n p(x_i, \theta) \quad (\theta \in \Theta).$$

对于固定的样本值 (x_1, \dots, x_n) ， θ 的函数

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n p(x_i, \theta) \tag{9.3.1}$$

也称为**似然函数**。

我们可以用似然函数刻画 θ 与数据的匹配程度。例如，在离散情况下，似然函数 $L(\theta)$ 就是总体参数为 θ 的情况下，事件 $\{(X_1, \dots, X_n) = (x_1, \dots, x_n)\}$ 的概率。极大似然估计就是挑选使 $P_\theta((X_1, \dots, X_n) = (x_1, \dots, x_n))$ 达到最大的 θ 值作为真值的估计。这个思路可以写为定义：

定义：设 $\theta \in \Theta$ 为统计模型 $(X_1, \dots, X_n) \sim P_\theta$ 的参数，统计模型可为连续型或者离散型，又设 x_1, \dots, x_n 为总体的样本值，若存在 $\hat{\theta}(x_1, \dots, x_n)$ ，使得

$$L(\hat{\theta}(x_1, \dots, x_n)) = \max_{\theta \in \Theta} L(\theta),$$

其中 $L(\cdot)$ 为离散统计模型或者连续统计模型的似然函数，则称 $\hat{\theta}(x_1, \dots, x_n)$ 为 θ 的**最大似然估计** (简称 ML 估计)。若 $\hat{\theta}$ 为参数 θ 的 ML 估计，则 θ 的函数 $g(\theta)$ 的 ML 估计定义为 $g(\hat{\theta})$ 。

注 1：为记号统一，离散和连续模型下的似然函数都用式 9.3.1 的表达式表示。

注 2：与统计量的表示法一样，可用 $\hat{\theta}(x_1, \dots, x_n)$ 或 $\hat{\theta}(X_1, \dots, X_n)$ 表示参数 θ 的估计量 $\hat{\theta}$ ，当用 $\hat{\theta}(x_1, \dots, x_n)$ 表示时，强调 $\hat{\theta}$ 的计算，当用 $\hat{\theta}(X_1, \dots, X_n)$ 表示时，强调 $\hat{\theta}$ 的统计特性。

注 3：本定义中， $g(\theta)$ 的 ML 估计定义为 $g(\hat{\theta})$ ，此处 $\hat{\theta}$ 为参数 θ 的 ML 估计。这样定义后使得 ML 估计具有不变性。若 $g(\theta)$ 是一个一一变换， $\eta = g(\theta)$ 可以视为模型的一个新参数化，在新的模型中，似然函数 $\tilde{L}(\eta) = \prod_{i=1}^n p(x_i, \theta)$ 。显然， $\hat{\eta}$ 使 $\tilde{L}(\eta)$ 达到最大等价于原来的似然函数 $L(\theta)$ 在 $\hat{\theta}$ 处达到最大。这样 $\hat{\eta} = g(\hat{\theta})$ 。定义中并不要求 $g(\theta)$ 是一个一一变换，可以形式上定义一个似然函数

$$L(g) = \max_{\{g: g(\theta)=g\}} L(\theta),$$

利用该似然函数，求得 g 的最大似然估计就是 $g(\hat{\theta})$ 。

正态模型：考虑随机变量 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ，有独立重复观察得到的样本 $(X_1, \dots, X_n) = (x_1, \dots, x_n)$ ，希望由这些观察值求出参数 μ, σ^2 的 ML 估计，对于样本值 (x_1, \dots, x_n) ，似然函数为

$$L(\theta) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \right)^n \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma} \right)^2 \right\},$$

其中 $\theta = (\mu, \sigma^2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ 为参数。为求似然函数 $L(\theta)$ 的最大值点，首先固定二维向量 $\theta = (\mu, \sigma^2)$ 的 σ^2 ，求 $L(\theta) = L(\mu, \sigma^2)$ 相对于变量 μ 的最大值点 $\mu^*(\sigma^2)$ ，随后代入 $L(\theta)$ ，得到 $L(\mu^*(\sigma^2), \sigma^2)$ ，再求 σ^2 的最大值点 σ^{2*} ，可得

$$L(\mu^*(\sigma^{2*}), \sigma^{2*}) \geq L(\mu^*(\sigma^2), \sigma^2) \geq L(\mu, \sigma^2),$$

因此 $(\mu^*(\sigma^{2*}), \sigma^{2*})$ 为 $\theta = (\mu, \sigma^2)$ 的 ML 估计。

我们首先求 $\mu^*(\sigma^2)$ 。注意到，求 μ 的值 μ^* 使得 $L(\mu, \sigma^2)$ 达到最大，等价于求 μ^* 使得 $\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2$ 达到最小。由于

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 + n(\bar{x} - \mu)^2,$$

其中 $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$, 可知当 $\mu = \bar{x}$ 时, $\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2$ 达到最小, 将 $\mu = \bar{x}$ 代入 $L(\mu, \sigma^2)$ 的表达式中, 得

$$L(\bar{x}, \sigma^2) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \right)^n \exp \left\{ -\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{2\sigma^2} \right\}.$$

由于 $\sigma^2 \in (0, +\infty)$, L 作为 σ^2 的函数恒取正值。现等价的求解方程 $\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma^2} = 0$, 即

$$-\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = 0$$

解得 $\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$ 。由此可知, $\mu = \bar{x}$, $\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$ 使得 $L(\mu, \sigma^2)$ 在它的定义域上达到最大, 再由 ML 估计定义知

$$\hat{\mu} = \bar{x}, \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

分别为 μ 和 σ^2 的 ML 估计。

例: 设对飞机的最大飞行速度进行测试, 测得 15 个数据 (单位 m/s) 如下:

422.2, 418.7, 425.6, 420.3, 425.8, 423.1, 431.5, 428.2, 434.0, 438.3, 412.3, 417.2, 413.5, 441.3, 423.7.

试估计飞机最大速度的均值。

解: 将飞机最大飞行速度的观察值 x_1, \dots, x_{15} 视为随机变量 X_1, \dots, X_{15} 的观察值, 随机变量的共同分布为正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, 该假设根据物理背景或经验确定。

将数据代入上面的结果, 得

$$\hat{\mu} = \bar{x} = 425.05$$

本例建立的统计模型称为**正态模型**, 有时也称为**测量模型**, 其数据的总体 X 的分布是正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, 而这些数据就是来自这个总体的一组观测值, 对于正态总体, 其参数 μ 和 σ^2 的 ML 估计分别是 $\hat{\mu} = \bar{x}, \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$ 。

注意到在实际问题中, 正态模型的参数空间不一定是 $\Theta = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$, 参数空间不同, 其相应的模型就是不同的模型。在求解问题时, 需要特别注意参数空间的范围。

例如实际问题中有下列两种常见的正态模型: 一种是 $X \sim N(\mu_0, \sigma^2)$, 其中 $\sigma^2 > 0$, μ_0 为已知的参数值, 求解方程 $\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma^2} = 0$, 即

$$-\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_0)^2 = 0$$

解得 σ^2 的 ML 估计为 $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_0)^2$ 。

另一种是 $X \sim N(\mu, \sigma_0^2)$, 其中 $\mu \in \mathbb{R}$, 而 σ_0^2 为已知的参数值, 此时求解 $L(\theta)$ 的关于 μ 的最大值仍等价于求解 μ^* 使 $\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2$ 达到最小, 因此 μ 的 ML 估计为 $\hat{\mu} = \bar{x}$.

例: (次品率的估计). 某工人生产 20 件产品, 检查出恰有一件为次品. 估计该工人生产的次品率.

解: 由题意知, 总体 $X \sim B(1, p), p \in [0, 1]$. 样本量: $n = 20$.

似然函数:

$$L(p) = C_n^s p^s (1-p)^{n-s}, \text{ 其中 } s = x_1 + \cdots + x_n.$$

显然 \hat{p} 也为 $\ln L(p) = s \ln p + (n-s) \ln(1-p)$ 的最大值点, 且

$$\frac{d}{dp} \ln L(p) = \frac{s}{p} - \frac{n-s}{1-p} \Rightarrow \hat{p} = \frac{s}{n}.$$

将 $n = 20, s = 1$ 代入, 因此, $\hat{p} = \frac{1}{20}$.

例: (对应郑书例 1.4) 设 $X_1, \cdots, X_n \sim \text{iid } U(0, \theta)$, (样本量: n). 求: θ 的最大似然估计.

解: 似然函数:

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\theta} 1_{\{0 \leq x_i \leq \theta\}} = \frac{1}{\theta^n} 1_{\{0 \leq x_1, \cdots, x_n \leq \theta\}}.$$

仅当 $\theta \geq \max_{1 \leq i \leq n} x_i$ 时, $L(\theta) > 0$.

当 $\theta \geq \max_{1 \leq i \leq n} x_i$ 时, $L(\theta) = \frac{1}{\theta^n}$, 关于 θ 单调下降.

从而, $\hat{\theta} = \max_{1 \leq i \leq n} x_i$, 即 $\max_{1 \leq i \leq n} X_i$.

例: (对应郑书例 1.5) 设 X 为某产品的寿命, 服从指数分布, 即 $X \sim \text{Exp}(\lambda)$, 设 (x_1, \cdots, x_n) 为来自总体 X 的一个样本值, 样本量: n . 求: $E(X)$ 的最大似然估计.

解: 似然函数:

$$L(\lambda) = \prod_{i=1}^n \lambda e^{-\lambda x_i} = \lambda^n \exp \left\{ -\lambda \sum_{i=1}^n x_i \right\} = \exp \{ n(\ln \lambda - \lambda \bar{x}) \}.$$

$\hat{\lambda}$ 是 $\ln \lambda - \bar{x}$ 的最大值点:

$$\frac{d}{d\lambda} (\ln \lambda - \bar{x}) = \frac{1}{\lambda} - \bar{x} \Rightarrow \hat{\lambda} = 1/\bar{x}.$$

$E(X) = 1/\lambda$, 因此, $\widehat{E(X)} = 1/\hat{\lambda} = \bar{x}$, 或 \bar{X} .

例: (对应郑书例 1.6) 设 X 服从泊松分布, $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, 设 (x_1, \cdots, x_n) 为来自总体 X 的一个样本值, 样本量: n . 求: λ 的最大似然估计.

解: 似然函数:

$$L(\lambda) = \prod_{i=1}^n \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!} e^{-\lambda} = \frac{1}{\prod_{i=1}^n x_i!} \lambda^{n\bar{x}} e^{-\lambda n} = \frac{1}{\prod_{i=1}^n x_i!} e^{n(\bar{x} \ln \lambda - \lambda)}.$$

$\hat{\lambda}$ 是 $\bar{x} \ln \lambda - \lambda$ 的最大值点:

$$\frac{d}{d\lambda}(\bar{x} \ln \lambda - \lambda) = \frac{\bar{x}}{\lambda} - 1 \Rightarrow \hat{\lambda} = \bar{x}, \text{ 或 } \bar{X}.$$

例: 设总体 X 的分布函数为 $f(x, \theta) = \frac{2x}{\theta^2}, 0 \leq x \leq \theta$, 设 (x_1, \dots, x_n) 为来自总体 X 的一个样本值, 求分布中位数的 ML 估计。

解: 设分布中位数为 a , 则

$$\int_0^a f(x, \theta) dx = \int_a^\theta f(x, \theta) dx = \frac{1}{2}$$

其中

$$\int_0^a f(x, \theta) dx = \frac{a^2}{\theta^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = \frac{\theta}{\sqrt{2}}$$

似然函数为

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n \frac{2x_i}{\theta^2} = \frac{2 \prod_{i=1}^n x_i}{\theta^{2n}}$$

由于 $\theta \geq x_i, i = 1, \dots, n$, 上式关于 θ 单调减, 故 θ 的 ML 估计为 $\hat{\theta} = \max\{x_1, \dots, x_n\}$ 。中位数 a 的 ML 估计为 $\hat{a} = \frac{\max\{x_1, \dots, x_n\}}{\sqrt{2}}$ 。

9.4 矩估计

定义 设 X_1, \dots, X_n 为来自总体 $X \sim F_\theta (\theta \in \Theta)$ 的一个样本, 通常 $\alpha_l \triangleq E_\theta(X^l)$ 称为 l 阶**总体矩**, 而 $a_l \triangleq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^l$ 称为 l 阶**样本矩**。所涉及的矩存在且有限。

(1) l 阶总体矩 $\alpha_l = E_\theta(X^l)$ 的矩估计定义为相应的样本矩, 即

$$\hat{\alpha}_l = a_l = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^l, \quad l = 1, 2, \dots;$$

(2) 若存在连续函数 ϕ 使 $g(\theta) = \phi(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ 成立, 则 $g(\theta)$ 的矩估计定义为

$$\hat{g}(\theta) = \phi(a_1, \dots, a_k).$$

例: (对应郑书例 2.4) 设总体: $X \sim U(0, \theta)$. 样本量: n . 求 θ 的矩估计.

解: $\alpha_1 = \frac{1}{\theta} \int_0^\theta x dx = \frac{1}{2}\theta$, 即 $\theta = 2\alpha_1$. 故 $\hat{\theta}_1 = 2\bar{X}$ 是 θ 的矩估计.

$\alpha_2 = \frac{1}{\theta} \int_0^\theta x^2 dx = \frac{1}{3}\theta^2$, 即 $\theta = \sqrt{3\alpha_2}$. 从而 $\hat{\theta}_2 = \sqrt{3\bar{X}^2}$ 也是 θ 的矩估计.

比较 $\hat{\theta}_1$ 与最大似然估计 $\hat{\theta} = \max_{1 \leq i \leq n} X_i$.

(1) 当 $2\bar{X} < \max_{1 \leq i \leq n} X_i$ 时, $\hat{\theta}_1$ 不合理. 但, $\hat{\theta}$ 总是合理.

(2) 期望:

$$E_{\theta}(\hat{\theta}_1) = 2E(\bar{X}) = \theta, \quad E_{\theta}(\hat{\theta}) = \frac{n}{n+1}\theta$$

(3) 方差:

$$\begin{aligned} \text{var}_{\theta}(\hat{\theta}_1) &= \frac{4}{n} \text{var}_{\theta}(X) = \frac{4}{n} \cdot \frac{\theta^2}{12} = \frac{1}{3n} \theta^2 \\ \text{var}_{\theta}\left(\frac{n+1}{n}\hat{\theta}\right) &= \frac{(n+1)^2}{n^2} \cdot \frac{n}{(n+1)^2(n+2)} \theta^2 = \frac{1}{n(n+2)} \theta^2. \end{aligned}$$

一些常见分布的矩估计:

(1) 如果总体 $\xi \sim B(N, p)$, N, p 为未知参数, 因为 $E(\xi) = Np$, $D(\xi) = Np(1-p)$, 由方程组

$$\begin{cases} Np = \bar{\xi} \\ Np(1-p) = S^2 \end{cases}, \text{ 解得 } N, p \text{ 的矩估计为}$$

$$\begin{cases} \hat{N} = \frac{\bar{\xi}^2}{\bar{\xi} - S^2}, \\ \hat{p} = 1 - \frac{S^2}{\bar{\xi}}. \end{cases}$$

(2) 如果总体 $\xi \sim P(\lambda)$, λ 为未知参数, 因为 $E(\xi) = \lambda$, $D(\xi) = \lambda$, 所以 λ 的矩估计为

$$\hat{\lambda} = \bar{\xi} \text{ 或 } \hat{\lambda} = S^2.$$

$E(\xi) = \lambda$ 。

(3) 如果总体服从几何分布, $P(\xi = k) = p(1-p)^{k-1}$, p 为未知参数, 则因为 $E(\xi) = \frac{1}{p}$, 所以解得 p 的矩估计为

$$\hat{p} = \frac{1}{\bar{\xi}}.$$

(4) 如果总体 $\xi \sim U(\theta_1, \theta_2)$, θ_1, θ_2 均为未知参数, 因为

$$E(\xi) = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}, \quad D(\xi) = \frac{(\theta_1 - \theta_2)^2}{12}.$$

所以由方程

$$\frac{\theta_1 + \theta_2}{2} = \bar{\xi}, \quad \frac{(\theta_1 - \theta_2)^2}{12} = S^2$$

解得 θ_1, θ_2 的矩估计分别为

$$\hat{\theta}_1 = \bar{\xi} - \sqrt{3}S, \quad \hat{\theta}_2 = \bar{\xi} + \sqrt{3}S.$$

例: 设总体 ξ 的分布为 $p(\xi = k) = (k-1)\theta^2(1-\theta)^{k-2}$, $k = 2, 3, \dots$, $0 < \theta < 1$, 求 θ 的矩估计。

解:

$$E(\xi) = \sum_{k=2}^{\infty} kp(\xi = k) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)\theta^2(1-\theta)^{k-2},$$

$$= 2 \sum_{k=2}^{\infty} C_k^2 \theta^2 (1-\theta)^{k-2} = 2\theta^2 \sum_{k=0}^{\infty} C_{k+2}^2 (1-\theta)^k$$

注意到由泰勒展开式 $(1-x)^{-3} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1)(k+2)}{2} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} C_{k+2}^2 x^k$, 因此

$$E(\xi) = 2\theta^2 \sum_{k=0}^{\infty} C_{k+2}^2 (1-\theta)^k = 2\theta^2 (1 - (1-\theta))^{-3} = \frac{2}{\theta}$$

因此解得

$$\hat{\theta} = \frac{2}{\xi}.$$

9.5 估计的无偏性

定义: 设 $X_1, \dots, X_n \sim \text{iid } F(x, \theta)$ 是一个统计模型, $g(\theta)$ 为待估量。若统计量 $T = T(X_1, \dots, X_n)$ 满足

$$E_{\theta}[T(X_1, \dots, X_n)] = g(\theta), \quad \forall \theta \in \Theta.$$

则称 T 为 $g(\theta)$ 的**无偏估计**。

例: 继续讨论正态模型中的估计问题。已经求得期望和方差的 ML 估计:

$$\hat{\mu} = \bar{X}, \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

样本均值 \bar{X} 是期望 μ 的无偏估计。

$$\begin{aligned} E_{\theta}(\bar{X}) &= E_{\theta}\left(\frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n)\right) \\ &= \frac{1}{n}(E_{\theta}(X_1) + \dots + E_{\theta}(X_n)) = \mu. \end{aligned}$$

样本方差 $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ 不是 σ^2 的无偏估计。

注意到 $x_i - \mu = (x_i - \bar{x}) + (\bar{x} - \mu)$:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 + (\bar{x} - \mu)^2.$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 - (\bar{X} - \mu)^2.$$

$$E_{\theta}(\hat{\sigma}^2) = \text{var}(X) - \text{var}(\bar{X}) = \sigma^2 - \frac{1}{n}\sigma^2 = \frac{n-1}{n}\sigma^2.$$

将方差的 ML 估计适当修改, 可以得到 σ^2 的无偏估计。

定理: 若总体方差 σ^2 存在, 则 S^2 是 σ^2 的无偏估计, 其中,

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2.$$

例: 设总体: $X \sim \text{Exp}(\lambda)$. 样本量: n . 寻找 λ 的无偏估计。

解: 最大似然估计 & 矩估计: $\hat{\lambda} = 1/\bar{X} = \frac{n}{S_n}$, 其中,

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n \sim \Gamma(n, \lambda), \quad p_{S_n}(y) = \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} y^{n-1} e^{-\lambda y}, y > 0.$$

于是,

$$\begin{aligned} E(\hat{\lambda}) &= E\left(\frac{n}{S_n}\right) = n \int_0^\infty \frac{1}{y} \cdot \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} y^{n-1} e^{-\lambda y} dy \\ &= n \frac{\lambda \Gamma(n-1)}{\Gamma(n)} \int_0^\infty \frac{\lambda^{n-1}}{\Gamma(n-1)} y^{n-2} e^{-\lambda y} dy = \frac{n}{n-1} \lambda \end{aligned}$$

$n \geq 2$ 时, $\frac{n-1}{n} \hat{\lambda}$ 为 λ 的无偏估计。

$n = 1$ 时, $E\hat{\lambda} = \int_0^\infty \frac{1}{x} \times \lambda e^{-\lambda x} dx = \infty$. λ 的无偏估计不存在。

例: 设总体 X 服从参数为 λ 的泊松分布。现在求 $\exp\{-2\lambda\}$ 的估计。

解: $E(X) = \lambda$ 知 X 是 λ 的一个无偏估计。显然 $g_1(X) = \exp\{-2X\}$ 是一个可能的估计, 但不是无偏估计 ($E[g_1(x)] = e^{-\lambda(1-e^{-2})} > e^{-2\lambda}$)。因此考虑另一个估计 $g_2(X)$, 令

$$g_2(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ 是偶数,} \\ -1, & x \text{ 是奇数,} \end{cases}$$

此时

$$E(g_2(X)) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k P(X = k) = \exp\{-\lambda\} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^k}{k!} = \exp\{-2\lambda\}.$$

确实是一个无偏估计, 但是这个估计是荒谬的, 当 X 为奇数时, 它取负值。因此, 在样本量很小的时候不能片面追求无偏性。

例: 设总体 $\xi \sim N(\mu, \sigma^2)$, 求 c 使得 $c \sum_{i=1}^n (\xi_{i+1} - \xi_i)^2$ 为 σ^2 的无偏估计。

解:

$$E\left(\sum_{i=1}^n (\xi_{i+1} - \xi_i)^2\right) = \sum_{i=1}^n E(\xi_{i+1}^2 - 2\xi_{i+1}\xi_i + \xi_i^2) = \sum_{i=1}^n 2\sigma^2 = 2n\sigma^2$$

因此可以取 $c = \frac{1}{2n}$ 。

例: 设 $\hat{\theta}$ 为参数 θ 的无偏估计, 且有 $\text{var}(\hat{\theta}) > 0$, 试证明 $(\hat{\theta})^2$ 不是 θ^2 的无偏估计。

证明：由方差的定义可知，

$$\text{var}(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta}^2) - (E(\hat{\theta}))^2 > 0$$

由于 $\hat{\theta}$ 为参数 θ 的无偏估计，即 $E(\hat{\theta}) = \theta$ ，因此

$$E(\hat{\theta}^2) = \text{var}(\hat{\theta}) + (E(\hat{\theta}))^2 = \text{var}(\hat{\theta}) + \theta^2 > \theta^2,$$

所以 $(\hat{\theta})^2$ 不是 θ^2 的无偏估计。

例：设 x_1, \dots, x_n 是来自 $N(\theta, 1)$ 的样本，证明 $g(\theta) = |\theta|$ 没有无偏估计。

证明：假设 $T(x_1, \dots, x_n)$ 为 $g(\theta)$ 的无偏估计，则

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} T(x_1, \dots, x_n) \exp\left\{-\sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \theta)^2}{2}\right\} dx_1 dx_2 \cdots dx_n = |\theta|.$$

由上式可知，等式左侧关于 θ 处处可导，而等式右侧在 $\theta = 0$ 不存在导数，因此假设不成立。即 $g(\theta) = |\theta|$ 没有无偏估计。

例：设从均值 μ ，方差为 $\sigma^2 > 0$ 的总体中分别抽取容量为 n_1 和 n_2 的两独立样本， \bar{x}_1 和 \bar{x}_2 分别是这两个样本的均值。试证明，对于任意常数 a, b ($a + b = 1$)， $Y = a\bar{x}_1 + b\bar{x}_2$ 都是 μ 的无偏估计，并确定常数 a, b 使得 $\text{var}(Y)$ 达到最小。

证明：由于 \bar{x}_1 和 \bar{x}_2 分别是容量为 n_1 和 n_2 的两独立样本的均值，故

$$E(\bar{x}_1) = \mu, \quad E(\bar{x}_2) = \mu, \quad \text{var}(\bar{x}_1) = \frac{\sigma^2}{n_1}, \quad \text{var}(\bar{x}_2) = \frac{\sigma^2}{n_2}.$$

因而

$$E(Y) = E(a\bar{x}_1 + b\bar{x}_2) = aE(\bar{x}_1) + bE(\bar{x}_2) = a\mu + b\mu = (a + b)\mu = \mu$$

因此 $Y = a\bar{x}_1 + b\bar{x}_2$ 是 μ 的无偏估计。

又由 $a + b = 1$ 知 $Y = a\bar{x}_1 + b\bar{x}_2 = a\bar{x}_1 + (1 - a)\bar{x}_2$ ，从而

$$\text{var}(Y) = \frac{a^2\sigma^2}{n_1} + \frac{(1-a)^2\sigma^2}{n_2} = \sigma^2 \left[\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)a^2 - \frac{2}{n_2}a + \frac{1}{n_2} \right],$$

求导知，当 $a = \frac{1/n_2}{1/n_1 + 1/n_2} = \frac{n_1}{n_1 + n_2}$ 时， $\text{var}(Y)$ 达到最小，此时 $b = \frac{n_2}{n_1 + n_2}$ 。

结果表明，来自同一总体的容量为 n_1 和 n_2 的两独立样本的合样本的均值 $\bar{\bar{x}} = \frac{n_1\bar{x}_1 + n_2\bar{x}_2}{n_1 + n_2}$ 是线性无偏估计类 $U = \{a\bar{x}_1 + (1 - a)\bar{x}_2\}$ 中方差最小的。

9.6 无偏估计的优良性

设 $X_1, \dots, X_n \sim \text{iid } F_\theta(x) (\theta \in \Theta)$ 为统计模型, $g(\theta)$ 为待估量, $g(\theta)$ 的估计量 $T(X_1, \dots, X_n)$ 的均方误差定义为

$$R(\theta, T) = E_\theta[T(X_1, \dots, X_n) - g(\theta)]^2.$$

估计的均方误差有时也称为**风险函数**。

例: 设 $X_1, \dots, X_n \sim \text{iid } N(\mu, \sigma^2)$, $\mu \in (+\infty, -\infty)$, $\sigma^2 > 0$, 在这个统计模型中, μ 的 ML 估计为 $\hat{\mu} = \bar{X}$, 其均方误差或风险函数为

$$\begin{aligned} E(\bar{X} - \mu)^2 &= \text{var}(\bar{X}) = \text{var}\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n^2} \text{var}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \text{var}(X_i) = \frac{\sigma^2}{n}. \end{aligned}$$

它是不随 μ 的变化而变化的。

例: 设 $X_1, \dots, X_n \sim \text{iid } B(1, p)$, 即 $X_i (i = 1, \dots, n)$ 以概率 p 取 1, 以概率 $1 - p$ 取 0。该统计模型在实际应用中是很常见的, 我们已经求得参数 p 的 ML 估计为 $\hat{p} = \bar{X}$, 不难验证 \hat{p} 也是 p 的无偏估计, 其均方误差为

$$E(\bar{X} - p)^2 = \text{var}(\bar{X}) = \frac{1}{n} \text{var}(X_1) = \frac{p(1-p)}{n}.$$

由此可知, 估计 \bar{X} 的风险函数为 $R(p, \bar{X}) = \frac{p(1-p)}{n}$ 。

注意: 对于任何一个待估参数 $g(\theta)$, 可以定义估计 $g(\theta_0)$, 它将保证在 θ_0 处, 风险函数最小, 这意味着一个估计如果要成为最优估计, 它的风险函数必须处处为 0。但是这是不可能的, 为此我们需要考虑限制估计类。现在我们只考虑无偏估计类, 希望在无偏估计类内找到最优估计。设 $T(X)$ 是 $g(\theta)$ 的无偏估计, 其均方误差变成方差:

$$R(\theta, T) = E_\theta[T - g(\theta)]^2 = E_\theta[T - E_\theta(T)]^2 = \text{var}_\theta(T).$$

定义: 设 $X_1, \dots, X_n \sim \text{iid } F_\theta(x) (\theta \in \Theta)$ 为统计模型, $g(\theta)$ 为待估量, $g(\theta)$ 的一个估计量为 $T(X_1, \dots, X_n)$ 如果

- (1) T 是 $g(\theta)$ 的无偏估计,
- (2) 对于 $g(\theta)$ 的任意无偏估计 $\tilde{T} = \tilde{T}(X_1, \dots, X_n)$, 都有

$$\text{var}_\theta(T) \leq \text{var}_\theta(\tilde{T}), \quad \forall \theta \in \Theta.$$

则称 T 为 $g(\theta)$ 的 (一致) **最小方差无偏估计** (Uniformly Minimum Variance Unbiased, UMVU).

我们记

$$F_{\theta}(t) = P_{\theta}(T \leq t)$$

为统计量 T 的分布。

定义: 假设统计量 $T = T(X_1, \dots, X_n)$ 满足:

对任意统计量 $\tilde{T} = \tilde{T}(X_1, \dots, X_n)$ 都有,

在 $T = t$ 的条件下, \tilde{T} 的分布与参数 θ 无关,

那么, 称 T 为**充分统计量**。

例: (对应郑书例 4.3) 设总体: $X \sim B(1, p)$, 样本量: n . 考虑 $T = X_1 + \dots + X_n$. 易知 T 的分布为二项分布, 现在讨论 T 的充分性。

对 $t = 0, 1, \dots, n$, 令

$$S_t := \{(x_1, \dots, x_n) : x_i \in \{0, 1\}, \forall i; \text{ 且 } x_1 + \dots + x_n = t\}.$$

那么, $\forall (x_1, \dots, x_n) \in S_t$,

$$\begin{aligned} & P_p(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n | T = t) \\ &= \frac{P_p(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n)}{P_p(T = t)} = \frac{p^t(1-p)^{n-t}}{C_n^t p^t (1-p)^{n-t}} = \frac{1}{C_n^t}. \end{aligned}$$

因此 $\forall t$, 在 $T = t$ 的条件下, (X_1, \dots, X_n) 服从 S_t 上的均匀分布. 该分布与 p 无关. 因此, T 是充分统计量.

一般情况下, 求充分统计量是麻烦的. 有如定理:

定理: (因子分解定理) 设 $X_1, \dots, X_n \sim \text{iid} p(x, \theta)$, 其中 $p(x, \theta)$ 为分布密度或分布列. 若 $T = T(X_1, \dots, X_n)$ 满足:

$$\prod_{i=1}^n p(x_i, \theta) = q_{\theta}(T(x_1, \dots, x_n)) h(x_1, \dots, x_n)$$

则 T 是充分统计量。

例: 设总体: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 样本量: n .

联合密度为

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^n p(x_i, \theta) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}^n} \exp \left\{ -\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}{2\sigma^2} \right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}^n} \exp \left\{ -\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 + n(\bar{x} - \mu)^2}{2\sigma^2} \right\}. \end{aligned}$$

指数上的部分可以写为 $(\bar{X}, \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2)$ 的函数。因此, $(\bar{X}, \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2)$ 是充分统计量。

若总体改为 $X \sim N(\mu, 1)$, 则联合密度改为

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^n p(x_i, \theta) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} \exp \left\{ -\sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \mu)^2}{2} \right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n x_i^2 \right\} \exp \left\{ \mu \sum_{i=1}^n x_i \right\} \exp \left\{ -\frac{n}{2} \mu^2 \right\}. \end{aligned}$$

因此, \bar{X} 是充分统计量。

例: 假设二维随机向量 (X, Y) 服从二元正态分布, 参数 $\theta = (\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$, 从总体中抽取一个样本 $((X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n))$, 样本量为 n , 其联合密度为

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^n p(x_i, y_i; \theta) &= \left(\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \right)^n \\ &\cdot \exp \left\{ -\frac{1}{2(1-\rho^2)} \sum_{i=1}^n \left[\left(\frac{x_i - \mu_1}{\sigma_1} \right)^2 - \frac{2\rho(x_i - \mu_1)(y_i - \mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \left(\frac{y_i - \mu_2}{\sigma_2} \right)^2 \right] \right\}, \end{aligned}$$

$x_i - \mu_1 = x_i - \bar{x} + \bar{x} - \mu_1$ 和 $y_i - \mu_2 = y_i - \bar{y} + \bar{y} - \mu_2$ 代入上式 e 指数上的表达式中, 化简, 表达式可以写为

$$\left(\bar{x}, \bar{y}, \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2, \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2, \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) \right)$$

的函数, 因此联合密度具有形式

$$\prod_{i=1}^n p(x_i, y_i; \theta) = q_\theta \left(\bar{x}, \bar{y}, \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2, \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2, \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) \right).$$

由因子分解定理知

$$T = \left(\bar{X}, \bar{Y}, \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2, \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2, \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y}) \right)$$

例: 设总体: $X \sim \text{Exp}(\lambda)$, 样本量: n .

联合密度具有形式

$$p_\lambda(x_1, \dots, x_n) = \lambda^n \exp \left\{ -\lambda \sum_{i=1}^n x_i \right\} \cdot 1_{\{x_1, \dots, x_n > 0\}}.$$

其中 $1_{\{x_1, \dots, x_n > 0\}}$ 是示性函数, 当所有 x_i 大于 0 时取 1, 否则为 0。显然该函数与参数无关, 因此由因子分解定理有, 令 $T = T(X_1, \dots, X_n) = X_1 + \dots + X_n$. 则 T 是充分统计量。

注意充分统计量不唯一，没有起到数据压缩的作用。**定义：**设 $X_1, \dots, X_n \sim \text{iid} p(x, \theta)$ ，又设 $T = T(X_1, \dots, X_n)$ 为充分统计量. 若对任意 ϕ ,

$$E_{\theta} \phi(T) = 0, \forall \theta \in \Theta \text{ 可推出 } P_{\theta}(\phi(T) = 0) = 1, \forall \theta \in \Theta.$$

则称 T 为**完全充分统计量**.

例：设总体 $X \sim N(\theta, 1)$ ，样本量为 n 。由因子分解定理知， $T_1 = \sum_{i=1}^n X_i$ 是一个充分统计量， $T_2 = (T_1, X_1 - X_2)$ 也是充分统计量。取 $\phi(T_2) = X_1 - X_2$ ，易知

$$E_{\theta}[\phi(T_2)] = E_{\theta}(X_1) - E_{\theta}(X_2) \equiv 0$$

但是 $P(\phi(T_2) = 0) = P(X_1 = X_2) \neq 1$ ，这说明 $T_2 = (T_1, X_1 - X_2)$ 不是完全充分统计量。

定理：设 $T = T(X_1, \dots, X_n)$ 为完全充分统计量. 若

$$E_{\theta}(\phi(T)) = g(\theta), \forall \theta,$$

则 $\phi(T)$ 是 $g(\theta)$ 的 UMVU 估计.

该定理说明，对于待估量 $g(\theta)$ ，只要找到依赖于完全充分统计量的函数 $\phi(T)$ ，使得 $\phi(T)$ 是 $g(\theta)$ 的无偏估计，则 $\phi(T)$ 就是 $g(\theta)$ 的 UMVU 估计。因此，要找到 $g(\theta)$ 的 UMVU 估计，只需在完全充分统计量中寻找即可。

例：设总体 $\xi \sim U(0, \theta)$ ，已经证明样本量为 n 的样本的最大值为 θ 的充分统计量，记为 $\xi_{(n)}$ ，证明 $\xi_{(n)}$ 也为 θ 的完全充分统计量。

证明：因为 $\xi_{(n)}$ 的密度为

$$f_{\xi_{(n)}}(x; \theta) = n f(x; \theta) [F(x; \theta)]^{n-1} = \begin{cases} \frac{nx^{n-1}}{\theta^n}, & 0 \leq x \leq \theta, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$$

如果有函数 $g(x)$ ，使得对一切 $0 < \theta$ ，有

$$E_{\theta}[g(\xi_{(n)})] = 0,$$

即

$$0 \equiv \int_0^{\theta} g(x) f_{\xi_{(n)}}(x; \theta) dx = \frac{n}{\theta^n} \int_0^{\theta} g(x) x^{n-1} dx,$$

故

$$\int_0^{\theta} g(x) x^{n-1} dx \equiv 0.$$

对两侧求导得

$$g(\theta) \theta^{n-1} \equiv 0.$$

从而对一切 $\theta > 0$, $g(\theta) = 0$, 因此 $\xi_{(n)}$ 是完全充分统计量。

定义: 若密度或分布列 $p(x, \theta)$ 能进行如下分解:

$$p(x, \theta) = S(\theta)h(x) \exp \left\{ \sum_{k=1}^m C_k(\theta)T_k(x) \right\}, \quad (\theta \in \Theta)$$

则称 $p(x, \theta), \theta \in \Theta$ 为**指数族分布**.

注: x 可为高维向量, 于是 $p(x, \theta)$ 为联合密度/联合分布列.

例: 设总体: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 样本量: n , 参数 $\theta = (\mu, \sigma^2)$, 分布密度具有形式:

$$p(x, \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}} e^{\frac{\mu}{\sigma^2}x - \frac{1}{2\sigma^2}x^2}.$$

显然, 它具有指数分布的形式。

例: 设总体: X 服从参数为 p 的二项分布, 样本量: n , 分布列可以改写为

$$\begin{aligned} P(X=x) &= C_n^x p^x (1-p)^{n-x} \\ &= (1-p)^n C_n^x \exp \left\{ x \ln \frac{p}{1-p} \right\} \end{aligned}$$

$P(X=x)$ 所表示的三个因子的乘积符合指数族分布的要求。

引理: 若总体 X 是指数族, 则设 (X_1, \dots, X_n) 为 X 的一个样本, 将 (X_1, \dots, X_n) 看做随机向量, 则其联合分布也是指数族分布。

例: 设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 可得 (X_1, \dots, X_n) 的联合分布密度为

$$\begin{aligned} p(x_1, \dots, x_n; \mu, \sigma^2) &= \prod_{i=1}^n p(x_i, \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}^n} \exp \left\{ -\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}{2\sigma^2} \right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}^n} \exp \left\{ -\frac{n\mu^2}{2\sigma^2} \right\} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n x_i^2 + \frac{\mu}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n x_i \right\}, \end{aligned}$$

故正态分布的一个样本的联合分布也是指数族分布。直接使用引理也可以得证。

定理: 总体 X 具有指数族分布, $\Theta \in \mathbb{R}^m$ 且含内点; (C_1, \dots, C_m) 是在 Θ 上一对一、连续的函数; 诸 C_i 之间 (T_i 之间) 无线性关系. 则

$$\left(\sum_{i=1}^n T_1(X_i), \dots, \sum_{i=1}^n T_k(X_i) \right)$$

是完全充分统计量.

例：设总体: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 样本量: n , 参数 $\theta = (\mu, \sigma^2)$ 。

设 $T_1 = \sum_{i=1}^n X_i, T_2 = \sum_{i=1}^n X_i^2$, 则由上面的定理知 (T_1, T_2) 是完全充分统计量。

\bar{X}, S^2 是 μ, σ^2 的 UMVU 估计, 其中:

$$\bar{X} = \frac{1}{n}T_1, \quad S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = \frac{1}{n-1} \left(T_2 - \frac{1}{n}T_1^2 \right)$$

是 (T_1, T_2) 的函数, 并且是 μ, σ^2 的无偏估计。

改为已知 μ (例如, 已知 $\mu = 1$)。则 $\theta = \sigma^2, m = 1$:

$$p(x, \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-1)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-1)^2}.$$

$T_1 = \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2$ 是完全充分统计量。

$\hat{\sigma}^2$ 是 σ^2 的 UMVU 估计, 其中

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2.$$

例：某工人生产 20 件产品, 其中 1 件为次品. 求: 次品率的 UMVU 估计。

解：由题意, 总体: $Y \sim B(1, p)$, 参数 $p = \theta \in [0, 1]$, 样本量: $n = 20$ 。

分布列: (记 $k = y_1 + \cdots + y_n$)

$$\begin{aligned} P_p(Y_1 = y_1, \cdots, Y_n = y_n) &= \prod_{i=1}^n p^{y_i} (1-p)^{1-y_i} \\ &= p^k (1-p)^{n-k} = e^{k \cdot \log p + (n-k) \log(1-p)} = e^{n \log(1-p) + (\log p - \log(1-p))k} \end{aligned}$$

可见 Y 的分布列具有指数族分布的形式. 因此, $T_1 = X = Y_1 + \cdots + Y_{20}$ 是完全充分统计量。

又由于 $E(X) = nE(Y) = np$, 即 $\frac{X}{n}$ 是 p 的无偏估计, 因此, $\hat{p} = X/20$ 是 UMVU 估计。

例：(对应郑书例 4.15) 总体: $X \sim N(\mu, 1)$, 样本量: n , 求 μ^2 的 UMVU 估计。

解：参数 $\theta = \mu$, 联合密度为:

$$p(x, \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\mu^2} e^{-\frac{1}{2}x^2} e^{\mu x}.$$

$T_1 = \sum_{i=1}^n X_i$ 是完全充分统计量, 因此 \bar{X} 也是完全充分统计量。

由 $\text{var}(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2$ 知,

$$\mu^2 = (E_\mu \bar{X})^2 = E_\mu \bar{X}^2 - \text{var}_\mu(\bar{X}) = E_\mu \bar{X}^2 - \frac{1}{n} = E_\mu \left(\bar{X}^2 - \frac{1}{n} \right)$$

因此, $\bar{X}^2 - \frac{1}{n}$ 是 μ^2 的 UMVU 估计.

例: 设总体 $Y \sim N(X\beta, \sigma^2 I_n)$, 其中 $Y \in \mathbb{R}^n, X \in \mathbb{R}^{n \times p} (p \leq n), \beta \in \mathbb{R}^{p \times 1}$. X 已知. (β, σ^2) 是参数. 设 $\hat{\beta} = (X^\top X)^{-1} X^\top Y$, 证明 $\hat{\beta}$ 为 β 的 UMVU 估计.

证明: 由于

$$E(\hat{\beta}) = (X^\top X)^{-1} X^\top E(Y) = (X^\top X)^{-1} X^\top X \beta = \beta,$$

因此 $(\hat{\beta})$ 是 β 的无偏估计. Y_1, \dots, Y_n 的联合密度函数为

$$p(y_1, \dots, y_n; \beta, \sigma^2) = (\sqrt{2\pi}\sigma)^{-n} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \|Y - X\beta\|_2^2 \right\} = Q(\theta) \exp \{ \theta_1 T_1(Y) + \theta_2 T_2(Y) \}$$

其中 $\theta_1 = -\frac{1}{2\sigma^2}, \theta_2 = \frac{\beta}{\sigma^2}, T_1(Y) = Y^\top Y, T_2(Y) = X^\top Y, Q(\theta) = (\sqrt{2\pi}\sigma)^{-n} \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} (X\beta)^\top (X\beta) \right\}$.

由指数分布族的性质知, $T_1(Y)$ 和 $T_2(Y)$ 为完全充分统计量, 而

$$\hat{\beta} = (X^\top X)^{-1} X^\top Y = (X^\top X)^{-1} T_2(Y)$$

这表明 $\hat{\beta}$ 是完全充分统计量的函数, 可知 $\hat{\beta}$ 是 β 的 UMVU 估计.

9.7 估计的相合性

定义: 设 $T_n = T_n(X_1, \dots, X_n)$ 满足: $\forall \varepsilon > 0$,

$$P_\theta(|T_n - g(\theta)| \geq \varepsilon) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \quad \forall \theta \in \Theta.$$

则称 T_n 为 $g(\theta)$ 的相合估计, 或估计 T_n 具有相合性.

定理: 设 $X_1, \dots, X_n \sim \text{iid } F_\theta(x) (\theta \in \Theta)$, $E_\theta(X_i)$ 存在且有限, 则

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{P} E_\theta(X_1) \quad (n \rightarrow \infty),$$

定理说明, 在简单随机抽样的情况下, 样本均值是总体均值的相合估计.

推论: 设 $X_1, \dots, X_n \sim \text{iid } F_\theta(x) (\theta \in \Theta)$, 则 $\alpha_l = E_\theta(X_1^l)$ 的矩估计 $a_l = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j^l$ 为 α_l 的相合估计.

定理： 设 $X_1, \dots, X_n \sim \text{iid } F_\theta(x) (\theta \in \Theta)$, 则 θ 的函数 $g(\theta)$ 的矩估计具有相合性. (注: $g(\theta) = \phi(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$, 其中 ϕ 为连续函数).

隐藏使用了定理:

定理 若 $T_n \xrightarrow{P} \theta$, f 为连续函数, 则 $f(T_n) \xrightarrow{P} f(\theta)$.

提示: 由连续性: 对于任意 $\epsilon > 0$, 存在 δ , 有 $|T_n - \theta| \leq \delta$, 则 $|f(T_n) - f(\theta)| \leq \epsilon$. 故后者事件是前者的子集, 有 $P(|T_n - \theta| \leq \delta) \geq P(|f(T_n) - f(\theta)| \leq \epsilon)$.

例： 设总体: $X \sim U(0, \theta)$, 样本量: n .

由定理可以直接得到, 参数 θ 的矩估计 $2\bar{X}$ 具有相合性.

最大似然估计 $T_n = \max_{1 \leq i \leq n} X_i$ 也具有相合性: $\forall 0 < \epsilon < \theta$,

$$\begin{aligned} P_\theta(|T_n - \theta| \geq \epsilon) &= P_\theta(T_n \leq \theta - \epsilon) \\ &= P_\theta(X \leq \theta - \epsilon)^n = \left(\frac{\theta - \epsilon}{\theta}\right)^n \rightarrow 0. \end{aligned}$$

例： (对应郑书例 5.3) 考虑某物种三种类型的个体, 以 1, 2, 3 表示个体的三种类型, 设此三种类型出现的概率分别为:

$$p(1, \theta) = \theta^2, \quad p(2, \theta) = 2\theta(1 - \theta), \quad p(3, \theta) = (1 - \theta)^2,$$

其中 $0 < \theta < 1$, 现有 n 个个体的类型 $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, 设其中共有 n_1 个 1, n_2 个 2, n_3 个 3, 求 ML 估计并探究相合性.

\mathbf{x} 出现的概率为

$$\begin{aligned} P(X = \mathbf{x}) &= p(1, \theta)^{n_1} p(2, \theta)^{n_2} p(3, \theta)^{n_3} \\ &= \theta^{2n_1 + n_2} (1 - \theta)^{n_2 + 2n_3} 2^{n_2} \\ &= 2^{n_2} \theta^{2n_1 + n_2} (1 - \theta)^{2n - (2n_1 + n_2)}. \end{aligned}$$

这是对 θ 作 ML 估计的似然函数, 与总样本量 $2n$, 某事件出现 $2n_1 + n_2$ 次的二项分布的似然函数相同. 利用二项分布的 ML 估计公式, 可得 θ 的 ML 估计为

$$\hat{\theta}_n = \frac{2n_1 + n_2}{2n}.$$

为证明 $\hat{\theta}_n$ 的相合性, 我们只需证明

$$\frac{n_1}{n} \xrightarrow{P} \theta^2, \quad \frac{n_2}{n} \xrightarrow{P} 2\theta(1 - \theta) (n \rightarrow \infty).$$

事实上, 利用大数定律可得 $\frac{n_1}{n} \xrightarrow{P} p(1, \theta) = \theta^2$, $\frac{n_2}{n} \xrightarrow{P} p(2, \theta) = 2\theta(1 - \theta)$, 将两个极限合并即可得到

$$\hat{\theta}_n = \frac{n_1}{n} + \frac{n_2}{2n} \xrightarrow{P} \theta^2 + \theta - \theta^2 = \theta$$

即 $\hat{\theta}_n$ 为 θ 的相合估计。

例: 设总体 $\xi \sim U(0, \theta)$, $Y = (\prod_{i=1}^n \xi_i)^{\frac{1}{n}}$, 证明 eY 是 θ 的相合估计。

证明: 需要证明 $eY \xrightarrow{P} \theta$, 等价于 $Y \xrightarrow{P} \frac{\theta}{e}$ 。注意到

$$E(\ln \xi) = \int_0^\theta \ln x \frac{1}{\theta} dx = \frac{1}{\theta} x \ln x \Big|_0^\theta - \int_0^\theta \frac{1}{\theta} dx = \ln \theta - 1.$$

因此, 由独立同分布的大数定律得,

$$Y = \left(\prod_{i=1}^n \xi_i \right)^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln \xi_i} \xrightarrow{P} e^{E(\ln \xi)} = \frac{\theta}{e}.$$

9.8 估计的渐近分布

定义: 设 $T_n = T_n(X_1, \dots, X_n)$ 满足:

$$\sqrt{n}(T_n - g(\theta)) \xrightarrow{d} Z \sim N(0, \sigma^2), \quad \forall \theta \in \Theta,$$

则称 T_n 是渐近正态的, 其中 $\sigma^2 = \sigma_\theta^2$ 称为渐近方差。

定理: 若 $Y_n \xrightarrow{d} Y$, 且随机变量序列 A_n 和 $B_n (n = 1, 2, \dots)$ 分别依概率收敛于 a 和 b , 则 $A_n + B_n Y_n \xrightarrow{d} a + bY$ 。

定理: (中心极限定理) 设 $X_i (i = 1, \dots, n)$ 是独立同分布的, 且 $E(X_i) = \mu$, $\text{var}(X_i) = \sigma^2 < +\infty$, 那么 $\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)$ 弱收敛到 $N(\mu, \sigma^2)$, 因此 $\frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{\sigma}$ 弱收敛到标准正态分布 $N(0, 1)$ 。

定理: (Δ 方法). 设 T_n 为 θ 的估计, $\sqrt{n}(T_n - \theta) \xrightarrow{d} Z \sim N(0, \tau^2)$, $h'(\theta)$ 存在且不为 0, 则

$$\sqrt{n}(h(T_n) - h(\theta)) \xrightarrow{d} W \sim N(0, h'(\theta)^2 \tau^2).$$

例: 设总体: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 样本量: n .

UMVU 估计: $\hat{\mu} = \bar{X}, \hat{\sigma}^2 = S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$.

$\hat{\mu}$ 渐近正态: 事实上,

$$\sqrt{n}(\bar{X} - \mu) \sim N(0, \sigma^2).$$

例: (对应郑书例 6.2) 设 X_1, \dots, X_n 是来自总体 X 的一个样本, 总体 X 服从泊松分布, 分布列为

$$P(X_i = k) = \frac{\lambda^k}{k!} \exp\{-\lambda\} \quad (k = 0, 1, 2, \dots; \lambda > 0).$$

已经求得 λ 的 ML 估计为 $\hat{\lambda} = \bar{X}$, 不难验证 λ 的矩估计也是 \bar{X} , 利用中心极限定理, 有

$$\sqrt{n}(\bar{X} - \lambda) = \sqrt{n}[\bar{X} - E(X)] \xrightarrow{\omega} N(0, \text{var}(X)),$$

其中 $\text{var}(X) = \lambda$, 故 \bar{X} 是渐近正态的, 并且渐近方差为 λ . 现在试求 λ^2 的估计, 并讨论其渐近分布. 因 λ 的 ML 估计为 $\hat{\lambda} = \bar{X}$, 故 λ^2 的 ML 估计为 \bar{X}^2 , 有

$$\sqrt{n}[h(\bar{X}) - h(\lambda)] \xrightarrow{\omega} N(0, (h'(\lambda))^2 \lambda) = N(0, 4\lambda^3) \quad (n \rightarrow \infty),$$

式中 $h(\bar{X}) = \bar{X}^2$, $h(\lambda) = \lambda^2$, 由此可知 λ^2 的 ML 估计 \bar{X}^2 是渐近正态的, 其渐近方差为 $4\lambda^2$.

例: 总体: $X \sim N(\mu, 1)$, 待估量: $g(\mu) = P_\mu(X \leq x_0)$.

方法一、设 $g(\mu) = P_\mu(X - \mu \leq x_0 - \mu) = \Phi(x_0 - \mu)$.

由 CLT, μ 的最大似然估计 $\hat{\mu} = \bar{X}$ 渐近正态, 渐近方差 = 1.

再由 Δ 方法, $g(\mu)$ 的最大似然估计 $g(\hat{\mu}) = \Phi(x_0 - \bar{X})$ 渐近正态, 渐近方差为

$$\sigma_1^2 = g'(\mu)^2 \cdot 1 = \varphi(x_0 - \mu)^2.$$

方法二、注意到 $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1_{\{X_i \leq x_0\}} \xrightarrow{P_\mu} P_\mu(X_i \leq x_0) = g(\mu)$, 渐近正态, 渐近方差为

$$\sigma_2^2 = \text{var}(1_{\{X \leq x_0\}}) = g(\mu)(1 - g(\mu)) = \Phi(x_0 - \mu)(1 - \Phi(x_0 - \mu))$$

9.9 置信区间

定义： 设 $X_1, \dots, X_n \sim \text{iid } F(x, \theta)$ 是一个统计模型， $g(\theta)$ 为实值函数。假设 $\underline{T} = \underline{T}(X_1, \dots, X_n)$ 与 $\bar{T} = \bar{T}(X_1, \dots, X_n)$ 为统计量， $\alpha \in (0, 1)$ 。

(1) 若 $\underline{T} < \bar{T}$ 且

$$P_{\theta}(\underline{T} \leq g(\theta) \leq \bar{T}) \geq 1 - \alpha, \quad \forall \theta \in \Theta,$$

则称 $[\underline{T}, \bar{T}]$ 为 $g(\theta)$ 的置信度为 $1 - \alpha$ 的**置信区间**。

(2) 若

$$P_{\theta}(\underline{T} \leq g(\theta)) \geq 1 - \alpha, \quad \forall \theta \in \Theta,$$

则称 \underline{T} 为 $g(\theta)$ 的置信度为 $1 - \alpha$ 的**置信下限**。

(3) 若

$$P_{\theta}(g(\theta) \leq \bar{T}) \geq 1 - \alpha, \quad \forall \theta \in \Theta,$$

则称 \bar{T} 为 $g(\theta)$ 的置信度为 $1 - \alpha$ 的**置信上限**。

9.9.1 枢轴量法

定义： 设 $X_1, \dots, X_n \sim \text{iid } F(x, \theta)$ 是一个统计模型， $g(\theta)$ 是待估量。若

$$h = h(X_1, \dots, X_n; g(\theta))$$

的分布与 θ 无关，则称 h 为**枢轴量**。

借助枢轴量，我们可以构造置信区间或置信限：

Step 1. 找枢轴量 $h = h(\vec{X}, g(\theta))$ 及其分布 F 。

Step 2. 利用 F 选择 a, b ，使得：

$$P(a \leq h \leq b) \geq 1 - \alpha.$$

Step 3. 将 $a \leq h \leq b$ 化为 $\underline{T} \leq g(\theta) \leq \bar{T}$ ，于是得到

$$P(\underline{T} \leq g(\theta) \leq \bar{T}) \geq 1 - \alpha.$$

例： 设总体： $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ 。样本量： n 。求 λ 的置信区间。

解： 由于 $\lambda X \sim \text{Exp}(1)$ ，因此，

$$h_1 = \lambda(X_1 + \dots + X_n) \sim \Gamma(n, 1).$$

$2\lambda X \sim \text{Exp}(\frac{1}{2})$, 因此

$$h_2 = 2\lambda(X_1 + \cdots + X_n) \sim \Gamma\left(n, \frac{1}{2}\right) = \chi^2(2n).$$

查 $\chi^2(2n)$ 的表获得 $\chi^2(2n)$ 分布的 $\alpha/2$ 分位数和 $1-\alpha/2$ 分位数: $\lambda_1 = \chi_{\alpha/2}^2(2n)$, $\lambda_2 = \chi_{1-\alpha/2}^2(2n)$. 于是, $P_\lambda(\lambda_1 \leq h_2 \leq \lambda_2) = 1 - \alpha$. 从而, 所求为 $[T, \bar{T}]$, 其中,

$$\underline{T} = \frac{\lambda_1}{2(X_1 + \cdots + X_n)}, \quad \bar{T} = \frac{\lambda_2}{2(X_1 + \cdots + X_n)}.$$

例: 设总体 $X \sim U(0, \theta)$, 样本量为 n , 试对设定的 $\alpha(0 < \alpha < 1)$ 给出 θ 的 $1 - \alpha$ 同等置信区间。

解: 使用枢轴量法:

第一步: 已知 θ 的 ML 估计是样本的最大次序统计量 $x_{(n)}$, 而 $\frac{x_{(n)}}{\theta}$ 的密度函数为

$$p(y; \theta) = ny^{n-1}, \quad 0 < y < 1,$$

与 θ 无关, 可以选取 $\frac{x_{(n)}}{\theta}$ 作为枢轴量 G 。

第二步: 由于 $\frac{x_{(n)}}{\theta}$ 的分布函数为 $F(y) = y^n, 0 < y < 1$, 故 $P(c \leq \frac{x_{(n)}}{\theta} \leq d) = d^n - c^n$, 因此可以选择适当的 c 和 d 满足

$$d^n - c^n = 1 - \alpha.$$

第三步: 整理不等式得到 θ 的 $1-\alpha$ 同等置信区间为 $[\frac{x_{(n)}}{d}, \frac{x_{(n)}}{c}]$, 该区间的平均长度为 $(\frac{1}{c} - \frac{1}{d})E(x_{(n)})$ 。

不难看出, 当 $d = 1, c = \sqrt[n]{1-\alpha}$ 时, $\frac{1}{c} - \frac{1}{d}$ 取最小值, 说明 $[x_{(n)}, x_{(n)}/\sqrt[n]{1-\alpha}]$ 是 θ 的此类区间估计中置信水平为 $1 - \alpha$ 的最短置信区间。

例: 设总体 $\xi \sim N(\theta, \theta^2), \theta > 0$, 样本量为 n , 求 θ 的 $1 - \alpha$ 同等置信区间。

解: 均值 $\bar{\xi} \sim N(\theta, \frac{\theta^2}{n})$, 因此 $\frac{\bar{\xi} - \theta}{\theta/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$,

$$-\Phi\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \leq \frac{\bar{\xi} - \theta}{\theta/\sqrt{n}} \leq \Phi\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$$

即

$$\frac{\bar{\xi}}{1 + \frac{\Phi(1-\frac{\alpha}{2})}{\sqrt{n}}} \leq \theta \leq \frac{\bar{\xi}}{1 - \frac{\Phi(1-\frac{\alpha}{2})}{\sqrt{n}}}.$$

9.9.2 正态分布中参数的置信区间

正态分布的定义及运算性质请参考概率部分。

定理: 假设总体: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 样本量: n . 则

- (1) $\bar{X} \sim N(\mu, \frac{1}{n}\sigma^2)$
- (2) $\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \sim \chi^2(n-1)$;
- (3) \bar{X} 与 $\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ 相互独立.

$t(n)$ 分布: 设 $\xi \sim N(0, 1)$, $\eta \sim \chi^2(n)$, 且 ξ 与 η 独立, 记 $T = \frac{\xi}{\sqrt{\eta/n}}$.

证明: 设 $X_i = \mu + \sigma Z_i$, 其中 $Z_i = X_i^* \sim N(0, 1)$, i.i.d., 因此

$$\bar{X} = \mu + \sigma \bar{Z}, \quad \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^n (Z_i - \bar{Z})^2 = \sum_{i=1}^n Z_i^2 - n\bar{Z}^2$$

取正交矩阵 $\mathbf{A}_{n \times n}$, 其第一行是 $(\frac{1}{\sqrt{n}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{n}})$. 令 $\vec{Y} = \mathbf{A}\vec{Z}$.

由 \mathbf{A} 正交, $\vec{Y} \sim N(\vec{0}, \mathbf{I}_{n \times n})$ 且 $\sum_{i=1}^n Z_i^2 = \sum_{i=1}^n Y_i^2$.

由 \mathbf{A} 的第一行, $Y_1^2 = n\bar{Z}^2$. 于是, $\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{\sigma^2} = \sum_{i=2}^n Y_i^2 \sim \chi^2(n-1)$. 故 (2) 成立.

$\bar{Z} = \frac{1}{\sqrt{n}} Y_1 \sim N(0, \frac{1}{n})$, 且与 $\sum_{i=2}^n Y_i^2$ 独立. 故, (1), (3) 成立.

例: 总体 $X \sim N(\mu, \sigma_0^2)$, 其中 σ_0^2 已知, (例如, $X \sim N(\mu, 1)$).

求: μ 的置信度为 $1 - \alpha$ 的 (1) 置信区间, (2) 置信上限.

解: 取 $h = h(X_1, \dots, X_n, \mu) := \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{\sigma} \sim N(0, 1)$.

(1) 查表获得标准正态分布的 $1 - \alpha/2$ 分位数 $z_{1-\alpha/2}$, 于是 $P_\mu(|h| \leq z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha$. 因此,

$$P_\mu\left(|\bar{X} - \mu| \leq \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha/2}\right) = 1 - \alpha.$$

概率论角度: $\bar{X} \in \left[\mu - \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha/2}, \mu + \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha/2}\right]$, 未知的随机点 \bar{X} 落在已知的确定区间中.

统计学角度: $\mu \in \left[\bar{X} - \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha/2}, \bar{X} + \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha/2}\right]$ (此即所求置信区间), 已知的随机区间 (可由数据得到) 覆盖未知参数 μ (确定的点).

(2) 置信上限为 $\bar{\mu} = \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha}$:

$$P_\mu(h \geq z_\alpha) = 1 - \alpha \Rightarrow P_\mu\left(\bar{X} \leq \mu + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_\alpha\right) = 1 - \alpha.$$

例: 若在上例中 μ, σ^2 均未知, 求: μ 的置信度为 $1 - \alpha$ 的置信区间.

解: 这种情况不能用枢轴量 $\frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{\sigma}$ 得到 μ 的置信区间 (因 σ 未知). 不过可以取

$$T = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{\hat{\sigma}}$$

作为枢轴量, 其中 $\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}$, 且其分布是自由度为 $n-1$ 的 t 分布。记 $t_{1-\alpha/2}(n-1)$ 为自由度是 $n-1$ 的 t 分布的 $1-\alpha/2$ 分位数, 则

$$P\left(\left|\frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{\hat{\sigma}}\right| \leq t_{1-\alpha/2}(n-1)\right) = 1 - \alpha$$

这样, 我们得到 $[\bar{X} - \hat{\sigma}t_{1-\alpha/2}(n-1)/\sqrt{n}, \bar{X} + \hat{\sigma}t_{1-\alpha/2}(n-1)/\sqrt{n}]$ 是 μ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间。再将数据 x_1, \dots, x_n 代入即可得所求的置信区间。

例: 设总体为正态分布 $N(\mu, 1)$, 为得到 μ 的置信水平为 0.95 的置信区间且长度不超过 1.2, 样本容量应为多大?

解: 由题设条件知 μ 的 0.95 置信区间为

$$[\bar{x} - z_{1-\alpha/2}/\sqrt{n}, \bar{x} + z_{1-\alpha/2}/\sqrt{n}],$$

其区间长度为 $2z_{1-\alpha/2}/\sqrt{n}$, 它仅依赖于样本容量 n 而与样本具体取值无关。现要求 $2z_{1-\alpha/2}/\sqrt{n} \leq 1.2$, 立即有 $n \geq (2/1.2)^2 z_{1-\alpha/2}^2$ 。现 $1-\alpha = 0.95$, 故 $z_{1-\alpha/2} = 1.96$, 从而 $n \geq (5/3)^2 \times 1.96^2 = 10.67 \approx 11$ 。即样本容量至少为 11 时才能使 μ 的置信水平为 0.95 的置信区间长度不超过 1.2。

例: 假设轮胎的寿命服从正态分布。为估计某种轮胎的平均寿命, 现随机地抽取 12 只轮胎试用, 测得它们的寿命 (单位: 万千米) 如下:

4.68	4.85	4.32	4.85	4.61	5.02
5.20	4.60	4.58	4.72	4.38	4.70

试求平均寿命的 0.95 置信区间。

解: 此处正态总体标准差未知, 可使用 t 分布求均值的置信区间。本例中经计算有 $\bar{x} = 4.709$, $s^2 = 0.0615$ 。取 $\alpha = 0.05$, 查表知 $t_{0.975}(11) = 2.2010$, 于是平均寿命的 0.95 置信区间为

$$4.709 \pm 2.2010 \cdot \sqrt{\frac{0.0615}{12}} = [4.5516, 4.8668].$$

在实际问题中, 由于轮胎的寿命越长越好, 因此可以只求平均寿命的置信下限, 也即构造单侧的置信下限。由于

$$P\left(\frac{\sqrt{n}(\bar{x} - \mu)}{s} < t_{1-\alpha}(n-1)\right) = 1 - \alpha.$$

由不等式变形可知 μ 的 $1 - \alpha$ 置信下限为 $\bar{x} - t_{1-\alpha}(n-1)s/\sqrt{n}$. 将 $t_{0.95}(11) = 1.7959$ 代入计算可得平均寿命 μ 的 0.95 置信下限为 4.5806 (万千米).

9.9.3 参数的近似置信区间

定义: 设 $X_1, \dots, X_n \sim \text{iid } F(x, \theta)$ 是一个统计模型, $g(\theta)$ 是待估量, $T(X_1, \dots, X_n)$ 是 $g(\theta)$ 的渐近正态估计,

(1) 若 σ^2 已知, 则 $g(\theta)$ 的置信度为 $1 - \alpha$ 的近似置信区间是

$$\left[T(X_1, \dots, X_n) - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha/2}, T(X_1, \dots, X_n) + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha/2} \right];$$

(2) 若 σ^2 未知, 则 $g(\theta)$ 的置信度为 $1 - \alpha$ 的近似置信区间是

$$\left[T(X_1, \dots, X_n) - \frac{\hat{\sigma}_n}{\sqrt{n}} t_{n-1, 1-\alpha/2}, T(X_1, \dots, X_n) + \frac{\hat{\sigma}_n}{\sqrt{n}} t_{n-1, 1-\alpha/2} \right],$$

其中 $\hat{\sigma}_n$ 为 σ 的相合估计.

例: 某学校计划在数学系开一门新课, 调查了 90 位学生以后, 发现其中 15 位学生反映目前课业负担过重. 试求课业负担过重的学生百分比的置信度为 0.95 的置信区间.

解: 记 θ 为课业负担过重的学生的百分比, n 为调查的样本量, X 为样本中课业负担过重的学生数. 利用中心极限定理, 得到

$$\sqrt{n} \left(\frac{X}{n} - \theta \right) / \sqrt{\theta(1-\theta)} \xrightarrow{w} N(0, 1) \quad (n \rightarrow \infty),$$

从而对给定的 $a \in (0, 1)$, 有

$$P \left(\left| \sqrt{n} \left(\frac{X}{n} - \theta \right) / \sqrt{\theta(1-\theta)} \right| \leq z_{1-a/2} \right) \approx 1 - a.$$

现在需求解不等式

$$\left| \sqrt{n} \left(\frac{X}{n} - \theta \right) / \sqrt{\theta(1-\theta)} \right| \leq z_{1-a/2}.$$

这个不等式的解为

$$\tilde{\theta} - \Delta \leq \theta \leq \tilde{\theta} + \Delta,$$

其中

$$\tilde{\theta} = \frac{2X + z_{1-a/2}^2/n}{n},$$

$$\Delta = \sqrt{\frac{z_{1-a/2}^2/n [z_{1-a/2}^2/n + 4(1 - X/n)X/n]}{n}}.$$

于是, $[\tilde{\theta} - \Delta, \tilde{\theta} + \Delta]$ 是 θ 的置信度为 $1 - \alpha$ 的近似置信区间。

已知 $1 - \alpha = 0.95$, 即 $\alpha = 0.05$, $n = 90$, $X = 15$, 查附表得 $z_{1-\alpha/2} = z_{0.975} = 1.96$, 代入经计算得到 θ 的置信度为 0.95 的近似置信区间是 $[0.1037, 0.2569]$ 。这个区间称为 Wilson 置信区间。

10.1 假设检验

定义：设 $X \sim F_\theta(\theta \in \Theta)$ 为总体模型，所谓假设检验问题是两个关于总体真值的互相对立判断 $(\theta \in \Theta_0, \theta \in \Theta_1)$ 的鉴定问题。其中 Θ_0 是 Θ 的一个真子集， $\Theta_1 = \Theta \setminus \Theta_0$ 为 Θ_0 的余集，判断 $\theta \in \Theta_0$ 称为**零假设**（或原假设），记为 0，判断 $\theta \in \Theta_1$ 称为**对立假设**（或备择假设），记为 1，通常用

$$H_0 : \theta \in \Theta_0 \leftrightarrow H_1 : \theta \in \Theta_1$$

或 (Θ_0, Θ_1) 表示假设检验问题。

假设检验要求回答是否接受零假设 $\theta \in \Theta_0$ 成立，该回答依赖于样本观测值 $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ ，它是样本空间 \mathcal{X} 的一个取值。因此为了做出判断，只需给出样本空间的一个子集 \mathcal{W} 。当且仅当 $\mathbf{x} \in \mathcal{W}$ 时，否定零假设 $\theta \in \Theta_0$ ，我们称 \mathcal{W} 为**否定域**。

实际问题需要评价否定域的优良性。我们考虑在取定否定域 \mathcal{W} 后，实施起来会有什么后果。

在 H_0 为真的条件下，若样本观测值满足条件 $\mathbf{x} \in \mathcal{W}$ ，此时按照检验规则，应当否定 H_0 ，而 H_0 为真，这种错误称为**第一类错误**。若样本观察值 $\mathbf{x} \notin \mathcal{W}$ ，按照检验规则，不应否定 H_0 ，此时按检验规则能够做出正确的判断。

在 H_0 不真的条件下，若样本观测值 $\mathbf{x} \in \mathcal{W}$ ，则按照检验规则应否定 H_0 ，做出了正确的判断。若样本观察值 $\mathbf{x} \notin \mathcal{W}$ ，按照检验规则，不应否定 H_0 ，而 H_0 不真，这种错误称为**第二类错误**。

在样本量固定的情况下，当选择否定域 \mathcal{W} 使得犯第一类错误的概率减少时，相应的犯第二类错误的概率就增大。所以，不可能使得犯两类错误的概率都一致的任意小。一般优先控制第一类犯错概率。

例：做核酸检测，将每一个人看成一个总体，总体的参数为有病 ($\theta = 0$) 或没病 ($\theta = 1$)，则假设检验问题为

$$H_0 : \theta = 0 \leftrightarrow H_1 : \theta = 1.$$

例：药品检验. 药效 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, σ^2 已知.

若 $\mu \geq \mu_0$, 则药有效; 若 $\mu \leq \mu_0$, 则药无效.

我们需要考虑假设 H_0 的形式。

$$H_0 : \mu \geq \mu_0 \leftrightarrow H_1 : \mu < \mu_0$$

$$H_0 : \mu \leq \mu_0 \leftrightarrow H_1 : \mu > \mu_0.$$

控制第一类错误, 即 H_0 为真却输出 “认定 H_1 ” 的概率

$$\sup_{\theta \in \Theta_0} P_{\theta}(\mathbf{X} \in \mathcal{W}) \leq \alpha$$

防止假药上市, 即 $\mu \leq \mu_0$ 为真却输出 “认定 $\mu \geq \mu_0$ ” .

因此, 应该选 $H_0 : \mu \leq \mu_0 \leftrightarrow H_1 : \mu > \mu_0$.

定义: 设 (Θ_0, Θ_1) 称 $\beta_{\mathcal{W}}(\theta) := P_{\theta}(\mathbf{X} \in \mathcal{W})$ 为 \mathcal{W} 的功效函数. 若

$$P_{\theta}(\mathbf{X} \in \mathcal{W}) \leq \alpha, \quad \forall \theta \in \Theta_0,$$

则称 \mathcal{W} 为检验问题 (Θ_0, Θ_1) 的一个 (显著性) 水平为 α 的否定域.

注: 选取 \mathcal{W} , 使得 $\beta_{\mathcal{W}}(\theta)$ 在 Θ_0 小, 在 Θ_1 越大越好.

定义: 若 \mathcal{W} 是检验问题 (Θ_0, Θ_1) 的水平为 α 的否定域, 并且对任意水平为 α 的否定域 $\tilde{\mathcal{W}}$ 都有:

$$P_{\theta}(\mathbf{X} \in \mathcal{W}) \geq P_{\theta}(\mathbf{X} \in \tilde{\mathcal{W}}), \quad \forall \theta \in \Theta_1,$$

则称 \mathcal{W} 为检验问题 (Θ_0, Θ_1) 的水平为 α 的一致最大功效否定域/UMP 否定域.

10.2 N-P 引理和似然比检验

研究简单假设检验问题: $\Theta = \{\theta_0, \theta_1\}$.

$$H_0 : \theta = \theta_0 \leftrightarrow H_1 : \theta = \theta_1.$$

似然函数: $L(\vec{x}, \theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i, \theta)$. (以连续型为例)

似然比否定域/似然比检验:

$$\mathcal{W}_{\lambda} = \{\vec{x} : L(\vec{x}, \theta_1) > \lambda L(\vec{x}, \theta_0)\}$$

定理: (Neyman-Pearson 引理) 若 λ_0 使得

$$P_{\theta_0}(\mathbf{X} \in \mathcal{W}_{\lambda_0}) = \alpha,$$

则 \mathcal{W}_{λ_0} 是水平为 α 的 UMP 否定域.

N-P 引理是利用似然比 $\lambda(\mathbf{x}) \triangleq L(\mathbf{x}, \theta_1)/L(\mathbf{x}, \theta_0)$ 构造否定域, 因此由 N-P 引理所给出的否定域又称似然比否定域, 而这种由似然比构造否定域的检验法叫做似然比检验。

作为假设检验的解, 通常经过化简以后, 否定域具有 $\{\mathbf{x} : T(\mathbf{x}) > c\}$ 或 $\{\mathbf{x} : T(\mathbf{x}) < c_1\} \cup \{\mathbf{x} : T(\mathbf{x}) > c_2\}$ 的形式, 它是通过统计量 $T(\mathbf{X})$ 构造得到的. 此时, 统计量 $T(\mathbf{X})$ 就称为**检验统计量**.

在求 UMP 否定域的时候, 往往先给出否定域的形式 $\mathcal{W} = \{x : \lambda(x) \geq \lambda_0\}$, 其中 λ_0 是一个待定的常数, 它是通过水平 α 来确定的。(求否定域问题被转化为在给定形式下求参数 λ 的问题)。在求否定域的时候, 有时作一些变换可使否定域的计算变得简单。

例: $X \sim N(\mu, 1)$, $\mu \in \{0, 2\}$. 求假设检验问题 $H_0 : \mu = 0 \leftrightarrow H_1 : \mu = 2$ 的水平为 $\alpha = 0.05$ 的 UMP 否定域.

解: 似然函数与似然比:

$$\frac{L(\mathbf{x}, \theta_1)}{L(\mathbf{x}, \theta_0)} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (x_i - 2)^2}}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n x_i^2}} = e^{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n 4(x_i - 1)}.$$

似然比否定域:

$$\mathcal{W}_\lambda = \left\{ \mathbf{x} : \frac{L(\mathbf{x}, \theta_1)}{L(\mathbf{x}, \theta_0)} > \lambda \right\} = \{\mathbf{x} : \bar{x} > c\}.$$

$T(x_1, \dots, x_n) = \bar{x}$ 称为检验统计量.

根据 α 选择 λ (等价地, 选择 c):

$$\alpha = P_{\theta_0}(\bar{X} > c) = P(Z > c\sqrt{n}) \Rightarrow c = z_{1-\alpha}/\sqrt{n}.$$

查表获得 $z_{1-0.05} = 1.65$. 从而所求为

$$\mathcal{W} = \{\mathbf{x} : \bar{x} > 1.65/\sqrt{n}\}.$$

例: $\Theta = \{0, 1\}$. $\theta = 0$ 时, $f(x, 0) = 1_{\{0 < x < 1\}}$, $\theta = 1$ 时, $f(x, 1) = 2x1_{\{0 < x < 1\}}$. 求假设检验问题 $H_0 : \theta = 0 \leftrightarrow H_1 : \theta = 1$ 的水平为 α 的 UMP 否定域.

解: 似然函数与似然比:

$$\frac{L(\mathbf{x}, \theta_1)}{L(\mathbf{x}, \theta_0)} = \frac{2^n x_1 \cdots x_n 1_{\{0 < x_1, \dots, x_n < 1\}}}{1_{\{0 < x_1, \dots, x_n < 1\}}} = 2^n x_1 \cdots x_n 1_{\{0 < x_1, \dots, x_n < 1\}}$$

似然比否定域与检验统计量 $T = T(x_1, \dots, x_n)$:

$$\mathcal{W}_\lambda = \left\{ \mathbf{x} : \frac{L(\mathbf{x}, \theta_1)}{L(\mathbf{x}, \theta_0)} > \lambda \right\} = \left\{ \mathbf{x} : -2 \sum_{i=1}^n \ln x_i < c \right\}$$

故 $T = -2 \sum_{i=1}^n \ln x_i$. 根据 α 选择 c : 在 H_0 下, $Y = -2 \ln X$ 的密度函数为

$$p_Y(y) = p_X(e^{-\frac{1}{2}y}) \left| -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}y} \right| = \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}y} \quad (y > 0)$$

故 $-2 \ln X \sim \chi^2(2)$, 于是, $T \sim \chi^2(2n)$.

$$\alpha = P_{\theta_0} \left(-2 \sum_{i=1}^n \ln X_i < c \right) \Rightarrow c = \chi_{\alpha}^2(2n).$$

10.3 单参数模型检验

定理: 若存在 $\theta_0 \in \Theta_0$ 使得检验问题 (θ_0, θ_1) 的水平为 α 的 UMP 否定域 \mathcal{W} 满足: $P_{\theta}(\mathbf{X} \in \mathcal{W}) \leq \alpha, \forall \theta \in \Theta_0$. 则, \mathcal{W} 是检验问题 (Θ_0, θ_1) 的水平为 α 的 UMP 否定域.

定理: 若对任意 $\theta_1 \in \Theta_1$, 检验问题 (Θ_0, θ_1) 都存在水平为 α 的 UMP 否定域 \mathcal{W} , 且此 \mathcal{W} 不依赖于 θ_1 . 则, 此 \mathcal{W} 是检验问题 (Θ_0, Θ_1) 的水平为 α 的 UMP 否定域.

定义: 若 Θ 为有限或无穷区间, 密度或分布列为

$$f(x, \theta) = S(\theta)h(x) \exp\{C(\theta)T(x)\}, \quad \theta \in \Theta,$$

其中, $C(\theta)$ 严格增. 则称 $f(x, \theta), \theta \in \Theta$ 为单参数指数族.

单参数指数族分布中如下的假设检验问题:

$$H_0: \theta \leq \theta_0 \leftrightarrow H_1: \theta > \theta_0$$

(称此假设检验问题为**单边假设检验问题**). 同样, 假设检验问题

$$H_0: \theta \geq \theta_0 \leftrightarrow H_1: \theta < \theta_0$$

也称为单边假设检验问题. 相应地, 称假设检验问题

$$H_0: \theta = \theta_0 \leftrightarrow H_1: \theta \neq \theta_0$$

为**双边假设检验问题**. 利用前面的定理, 可得到单边假设检验问题的水平为 α 的 UMP 否定域.

定理: 假设总体分布族为单参指数族

$$f(x, \theta) = S(\theta)h(x) \exp\{C(\theta)T(x)\}, \quad \theta \in \Theta.$$

若

$$\mathcal{W} := \left\{ \mathbf{x} : \sum_{i=1}^n T(x_i) > c \right\}$$

满足 $P_{\theta_0}(\mathbf{X} \in \mathcal{W}) = \alpha \neq 0$, 其中 c 为任一常数, 则 \mathcal{W} 是单边问题

$$H_0: \theta \leq \theta_0 \leftrightarrow H_1: \theta > \theta_0$$

的水平为 α 的 UMP 否定域.

例: 总体服从指数分布: $\text{Exp}(\frac{1}{\theta})$, $\Theta = (0, \infty)$. $\theta \geq 6000$ (单位: 小时) 为合格. 测得 5 个数据,

$$395, 4094, 119, 11572, 6133.$$

试进行检验.

假设检验问题. $H_0: \theta \leq \theta_0 = 6000 \leftrightarrow H_1: \theta > \theta_0$. (防止次品出厂). 注意, 另一种问题 $H_0: \theta \geq \theta_0 = 6000 \leftrightarrow H_1: \theta < \theta_0$. 将产品合格作为零假设, 不能保证不合格的产品不予出厂.

总体为单参指数族, $T(x) = x$, 因此, UMP 否定域形如

$$\mathcal{W} = \left\{ \mathbf{x} : \sum_{i=1}^n x_i > c \right\}.$$

在 θ_0 下, $K_{2n} := 2 \sum_{i=1}^n X_i / \theta_0 \sim \chi^2(2n)$. 因此, 要求

$$P_{\theta_0}(\mathbf{X} \in \mathcal{W}) = P(K_{2n} > 2c/\theta_0) = \alpha.$$

$$\text{即, 应取 } 2c/\theta_0 = \chi_{1-\alpha}^2(2n), \text{ 即 } c = \chi_{1-\alpha}^2(2n) \times \theta_0/2.$$

取 $\alpha = 0.05$, 查表获得 $\chi_{0.95}^2(10) = 18.307$,

$$\text{即 } c = 18.307 \times 6000/2 = 54921.$$

$\sum_{i=1}^5 x_i = 22313 < 54921$, 故接受 H_0 , 不予出厂。

例: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, σ^2 已知 ($= 1.21$), 测得 6 个数据.

$$32.56, 29.66, 31.64, 30.00, 31.87, 30.23.$$

$\mu \geq 30$ 则合格. 问: 设水平为 $\alpha = 0.05$, 是否可以出厂?

解: 假设检验问题. $H_0: \mu \leq \mu_0 = 30 \leftrightarrow H_1: \mu > \mu_0$. (防止次品出厂).

总体为单参指数族: $f(x, \mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}x^2} e^{\frac{\mu}{\sigma^2}x}$.

$T(x) = x$, 因此, UMP 否定域形如

$$\mathcal{W} = \left\{ \mathbf{x} : \sum_{i=1}^n x_i > \tilde{c} \right\} = \left\{ \mathbf{x} : \frac{\sqrt{n}(\bar{x} - \mu_0)}{\sigma} > c \right\}$$

取 $c = z_{1-\alpha}$:

$$P_{\mu_0}(\mathbf{X} \in \mathcal{W}) = P_{\mu_0} \left(\frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu_0)}{\sigma} > c \right) = \alpha$$

查表获得 $z_{0.95} = 1.65$. 代入数据: $\frac{\sqrt{n}(\bar{x} - \mu_0)}{\sigma} = 2.212 > 1.65$, 故否定 H_0 , 可出厂!

例: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\mu = 3$ 已知, 测得 9 个数据.

3.0012, 2.9987, 3.0051, 2.9959, 3.0153, 2.9990, 3.0008, 3.0075, 3.0004.

$\sigma < \sigma_0 = 0.005$ 则合格. 问: 在显著性水平为 $\alpha = 0.05$ 下, 该产品是否合格?

解: 假设检验问题. $H_0: \sigma^2 \geq \sigma_0^2 \leftrightarrow H_1: \sigma^2 < \sigma_0^2$.

总体为单参指数族: $f(x, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(x - \mu)^2\right\}$, $T(x) = (x - \mu)^2$, 因此, UMP 否定域形如

$$\mathcal{W} = \left\{ \mathbf{x} : \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 < \tilde{c} \right\} = \left\{ \mathbf{x} : \frac{1}{\sigma_0^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 < c \right\}.$$

取 $c = \chi_{\alpha}^2(n)$:

$$P_{\sigma_0^2}(\mathbf{X} \in \mathcal{W}) = P_{\sigma_0^2} \left(\frac{1}{\sigma_0^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 < c \right) = \alpha.$$

查表获得 $c = \chi_{0.05}^2(9) = 3.325$. 代入数据: $\frac{1}{\sigma_0^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 = 13.2563 > 3.325$, 故接受 H_0 .

10.4 广义似然比检验

设 $X \sim f(x, \theta)$ ($\theta \in \Theta$), $f(x, \theta)$ 是分布密度或分布列, θ 可以是向量, Θ_0 是 Θ 的真子集, 考虑假设检验问题

$$H_0: \theta \in \Theta_0 \longleftrightarrow H_1: \theta \in \Theta_1,$$

设 $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ 为来自总体 X 的一个样本, $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ 为样本观察值. 令

$$L(\mathbf{x}, \theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i, \theta).$$

对于固定的点 \mathbf{x} , 变量 θ 的函数 $L(\mathbf{x}, \theta)$ 为似然函数, 有时候简记为 $L(\theta)$. 令 $\hat{\theta}$ 为 θ 的 ML 估计, 即 $\hat{\theta}$ 满足条件

$$L(\mathbf{x}, \hat{\theta}) = \sup_{\theta \in \Theta} L(\mathbf{x}, \theta).$$

同时, 令 $\hat{\theta}_0$ 为在总体模型 $X \sim f(x, \theta)$ ($\theta \in \Theta_0$) 的假设之下, 参数 θ 的 ML 估计, 即 $\hat{\theta}_0$ 满足条件

$$L(\mathbf{x}, \hat{\theta}_0) = \sup_{\theta \in \Theta_0} L(\mathbf{x}, \theta).$$

定义: 称 $\lambda(\mathbf{x}) := L(\mathbf{x}, \hat{\theta})/L(\mathbf{x}, \hat{\theta}_0)$ 为**广义似然比**.

广义似然比否定域指

$$\mathcal{W} := \left\{ \mathbf{x} : \frac{L(\mathbf{x}, \hat{\theta})}{L(\mathbf{x}, \hat{\theta}_0)} > c \right\} = \{ \mathbf{x} : \lambda(\mathbf{x}) > c \},$$

其中 $c \geq 1$, 且满足 $\sup P_{\theta}(\mathbf{X} \in \mathcal{W}) = \alpha, \theta \in \Theta_0$, 相应的检验方法称为**广义似然比检验**.

10.4.1 正态总体均值的检验

考虑单边问题 $H_0 : \mu \leq \mu_0 \leftrightarrow H_1 : \mu > \mu_0$.

$\theta = (\mu, \sigma^2)$, $\Theta = (-\infty, \infty) \times (0, \infty)$, $\Theta_0 = (-\infty, \mu_0] \times (0, \infty)$.

似然函数: $L(\mathbf{x}, \theta) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \right)^n \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 \right\}$.

最大似然估计 $\hat{\theta} : \hat{\mu} = \bar{x}, \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \hat{\mu})^2$,

$$L(\mathbf{x}, \hat{\theta}) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\hat{\sigma}^2}} \right)^n \exp \left\{ -\frac{1}{2\hat{\sigma}^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \hat{\mu})^2 \right\} = (2\pi\hat{\sigma}^2)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{n}{2}}$$

最大似然估计 $\hat{\theta}_0$:

$$\hat{\mu}_0 = \begin{cases} \bar{x}, & \text{若 } \bar{x} \leq \mu_0, \\ \mu_0, & \text{若 } \bar{x} > \mu_0, \end{cases}$$

$$L(\mathbf{x}, \hat{\theta}_0^2) = (2\pi\hat{\sigma}_0^2)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{n}{2}}.$$

广义似然比: $\lambda(\mathbf{x}) = \left(\frac{\hat{\sigma}_0^2}{\hat{\sigma}^2} \right)^{\frac{n}{2}}$, 其中,

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2, \quad \hat{\sigma}_0^2 = \begin{cases} \hat{\sigma}^2, & \text{若 } \bar{x} \leq \mu_0, \\ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_0)^2, & \text{若 } \bar{x} > \mu_0, \end{cases}$$

广义似然比否定域: $c_1 \geq 1$,

$$\mathcal{W} = \left\{ \mathbf{x} : \frac{\hat{\sigma}_0^2}{\hat{\sigma}^2} > c_1 \right\} = \left\{ \mathbf{x} : \bar{x} > \mu_0 \text{ 且 } \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu_0)^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} > c_1 \right\}.$$

$\sum_{i=1}^n (x_i - \mu_0)^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 + n(\mu_0 - \bar{x})^2$, 因此

$$\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu_0)^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = 1 + \frac{T^2}{n-1}, \quad \text{其中 } T = \frac{\sqrt{n}(\bar{x} - \mu_0)}{S}.$$

总结: $c > 0$,

$$\mathcal{W} = \{\bar{x} : T > 0 \text{ 且 } T^2 > c_2\} = \{\bar{x} : T > c\}.$$

根据 α 求 c : $\forall \mu \leq \mu_0, T \leq \frac{\sqrt{n}(\bar{x} - \mu)}{S} =: T_{n-1} \sim t(n-1)$, 在 $\mu = \mu_0$ 时等号成立. 因此, 取 $c = t_{1-\alpha}(n-1)$ 即可满足

$$\max_{\mu \leq \mu_0} P_\mu(T > c) = P(T_{n-1} > c) = \alpha.$$

10.4.2 正态总体方差的检验

考虑单边问题 $H_0: \sigma^2 \geq \sigma_0^2 \leftrightarrow H_1: \sigma^2 < \sigma_0^2$.

$$\Theta = (-\infty, \infty) \times (0, \infty), \Theta_0 = (-\infty, \infty) \times [\sigma_0^2, \infty).$$

$$\text{似然函数: } L(\mathbf{x}, \theta) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^n \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2\right\}.$$

最大似然估计:

$$\hat{\mu} = \hat{\mu}_0 = \bar{x}, \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \hat{\mu})^2, \hat{\sigma}_0^2 = \begin{cases} \hat{\sigma}^2, & \text{若 } \hat{\sigma}^2 \geq \sigma_0^2, \\ \sigma_0^2, & \text{若 } \hat{\sigma}^2 \leq \sigma_0^2. \end{cases}$$

广义似然比:

$$\lambda(\mathbf{x}) = \frac{L(\mathbf{x}, \hat{\theta})}{L(\mathbf{x}, \hat{\theta}_0)} = \begin{cases} 1, & \text{若 } \hat{\sigma}^2 \geq \sigma_0^2, \\ u^{-\frac{n}{2}} e^{\frac{u}{2}} \left(\frac{e}{n}\right)^{-\frac{n}{2}}, & \text{若 } \hat{\sigma}^2 \leq \sigma_0^2. \end{cases}$$

$$\text{其中 } u = u(\mathbf{x}) = \frac{n\hat{\sigma}^2}{\sigma_0^2}.$$

广义似然比否定域:

$$\mathcal{W} = \left\{ \mathbf{x} : \hat{\sigma}^2 \leq \sigma_0^2, \left(\frac{u}{n}\right)^{-\frac{n}{2}} e^{\frac{u}{2}} > \tilde{c} \right\} = \{\mathbf{x} : u < c\}.$$

$$\text{其中 } u = u(\mathbf{x}) = \frac{n\hat{\sigma}^2}{\sigma_0^2}, c < n.$$

根据 α 求 c . $\forall \sigma^2 \geq \sigma_0^2, U := u(\mathbf{X}) \geq \frac{n\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} =: U_{n-1} \sim \chi^2(n-1)$,

在 $\sigma^2 = \sigma_0^2$ 时, 等号成立. 因此, 取 $c = \chi_\alpha^2(n-1)$ 即可满足

$$\max_{\sigma^2 \geq \sigma_0^2} P_{\sigma^2}(U < c) = P(U_{n-1} < c) = \alpha.$$

11.1 回归分析

实际问题中，两个变量之间往往有某种依赖关系

$$y = f(x) + e$$

其中 e 是误差项，为一个随机变量，该方程称为回归模型或回归方程， y 和 x 的这种关系称为**回归关系** (或者相关关系)，称 x 为自变量/解释变量，称 y 为因变量/响应变量， f 为回归函数。

例如， $x =$ 路程 (可设定)， $y =$ 耗油量. $x =$ 父亲身高 (不可设定，只可测量)， $y =$ 儿子身高. 对这种关系的研究称为回归分析，通常只关心 f ，不关心自变量如何变化。

通常回归函数采取特殊形式

$$y = b_0 + b_1x_1 + \cdots + b_px_p + e,$$

其中 $b_i (i = 1, \cdots, p)$ 称为回归系数， b_0 称为回归方程的截距，这时称相应的回归分析为线性回归分析. 此时，当自变量只有一个时，称为一元线性回归分析；当自变量个数为 $p (p \geq 2)$ 时，称为多元线性回归分析。

例：(回归方程的建立) x 与 y 分别代表某个体的两个特征. 数据: $(x_i, y_i), i = 1, \cdots, n = 50$.

问: x 与 y 之间什么依赖关系?

绘制散点图

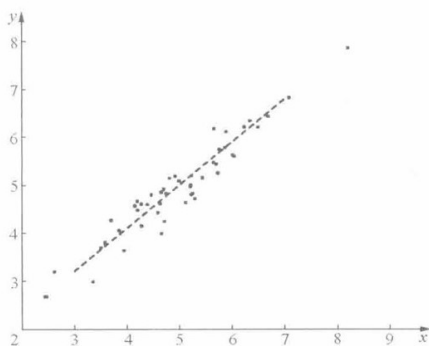


图 11.4: 数据 (x_i, y_i) 的散点图。

初步判断:

$$y_i = b_0 + b_1x_i + e_i, \quad i = 1, \cdots, n.$$

例：(预测). $x =$ 水的沸点, $y =$ 大气压. 由 $n = 17$ 组数据得到预测公式:

$$y = -43.131 + 0.895x + e.$$

某地测得 $x = x_0$, 那么, 可预测 $Y_0 = \hat{b}_0 + \hat{b}_1 x_0 + e_0$.

例：(预测与控制). $x =$ 某小区人口数, $y =$ 冬季用煤量, $z =$ 室温. 通过数据 $(x_i, y_i, z_i), i = 1, \dots, n$ 得到回归关系:

$$y = a + bx + e, \quad z = d + fy + \varepsilon.$$

预测: 根据某小区人口数 x_0 , 预测用煤量 $Y_0 = \hat{a} + \hat{b}x_0 + e_0$. 控制: 为控制 $z \in [17, 18]$, 应该储备多少煤 (反求 y) ?

11.2 线性回归与最大似然估计

考虑一元线性回归问题

$$y = b_0 + bx + e, \quad e \sim N(0, \sigma^2),$$

其中, σ^2 未知. 数据: $(x_i, y_i), i = 1, \dots, n$.

回归模型: $y_i = b_0 + bx_i + e_i, i = 1, \dots, n$.

$$p_{Y_i}(y_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(y_i - (b_0 + bx_i))^2},$$

x_i : 已知参数; b_0, b : 待估参数; σ^2 : 讨厌参数.

似然函数: $L(b_0, b, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}^n} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}Q(b_0, b)}$, 其中 $Q(b_0, b) = \sum_{i=1}^n [y_i - (b_0 + bx_i)]^2$ 称为均方误差.

定义： $Q(b_0, b)$ 的最小值点 \hat{b}_0, \hat{b} 被称为最小二乘拟合系数, 或 b_0, b 的最小二乘估计.

最大似然估计: $\hat{b}_0, \hat{b}, \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}Q(\hat{b}_0, \hat{b})$

定理： 假设 x_1, \dots, x_n 不完全相同, 则

$$\hat{b}_0 = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}, \quad \hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \frac{\ell_{xy}}{\ell_{xx}}.$$

其中, $\ell_{uv} = \sum_{i=1}^n (u_i - \bar{u})(v_i - \bar{v})$.

证明： 只需找 $Q(a, b) = \sum_{i=1}^n [y_i - (b_0 + bx_i)]^2$ 的最小值点, 注意到对 $w_i = y_i - (b_0 + bx_i)$ 有

$$\sum_{i=1}^n w_i^2 = \sum_{i=1}^n (w_i - \bar{w})^2 + n\bar{w}^2.$$

因此

$$Q(a, b) = \sum_{i=1}^n [(y_i - \bar{y}) - b(x_i - \bar{x})]^2 + n(\bar{y} - (b_0 + b\bar{x}))^2.$$

最小值点有 $\hat{b}_0 = \bar{y} - b\bar{x}$, 代入 $Q(a, b)$ 得

$$Q(a, b) = \ell_{yy} - 2b\ell_{xy} + b^2\ell_{xx},$$

最小值点为 $\hat{b} = \frac{\ell_{xy}}{\ell_{xx}}$

定理: 若 x_i 不全相等, 则 \hat{b}_0, \hat{b} 是 (最优) 线性无偏估计.

证明: \hat{b}_0, \hat{b} 是 (y_1, \dots, y_n) 的线性函数.

$$\hat{b}_0 = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}, \quad \hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \frac{\ell_{xy}}{\ell_{xx}}.$$

由于 $y_i = b_0 + bx_i + e_i$, $\bar{y} = b_0 + b\bar{x} + \bar{e}$,

$$y_i - \bar{y} = b(x_i - \bar{x}) + (e_i - \bar{e}).$$

由于 e_1, \dots, e_n i.i.d., 且 $e_1 \sim N(0, \sigma^2)$,

$$\hat{b} = b + \frac{1}{\ell_{xx}} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(e_i - \bar{e}) = b + \frac{1}{\ell_{xx}} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})e_i,$$

故 $E(\hat{b}) = b$.

$$\hat{b}_0 = \bar{y} - \hat{b}\bar{x} = (b_0 + b\bar{x} + \bar{e}) - \hat{b}\bar{x} = b_0 + (b - \hat{b})\bar{x} + \bar{e}.$$

故 $E(\hat{b}_0) = b_0$.

11.3 参数检验 (选学)

对于参数: $\theta = (b_0, b, \sigma^2)$, 考虑假设检验问题 (通常称为相关性检验问题):

$$H_0 : b = 0 \leftrightarrow H_1 : b \neq 0.$$

否定 H_0 , 则表明 y 与 x 之间有线性依赖关系, 因此

$$\Theta = \{\theta : b_0, b \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0\}, \Theta_0 = \{\theta \in \Theta : b = 0\}$$

似然函数: $L(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\pi\sigma^2} Q(b_0, b)}$, 其中 $Q(b_0, b) = \sum_{i=1}^n [y_i - (b_0 + bx_i)]^2$..

Θ 上的最大似然估计: $\hat{\theta} = (\hat{b}_0, \hat{b}, \hat{\sigma}^2)$, $\hat{b}_0 = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}$, $\hat{b} = \frac{\ell_{xy}}{\ell_{xx}}$,

$$L(\hat{\theta}) = \left(\sqrt{2\pi\hat{\sigma}^2}\right)^{-n/2} e^{-\frac{n}{2}}, \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}Q(\hat{b}_0, \hat{b}).$$

Θ_0 上的最大似然估计: $\check{\theta}_0 = (\check{b}_0, \check{b}, \check{\sigma}^2)$, $\check{b}_0 = \bar{y}$, $\check{b} = 0$,

$$L(\check{\theta}_0) = \left(\sqrt{2\pi\check{\sigma}_0^2}\right)^{-n/2} e^{-\frac{n}{2}}, \quad \check{\sigma}_0^2 = \frac{1}{n}Q(\check{b}_0, \check{b}).$$

$Q = Q(\hat{b}_0, \hat{b}) = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2$, 残差平方和;

$$Q(\bar{y}, 0) = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 = \ell_{yy},$$

广义似然比: $\lambda(\vec{y}) = L(\hat{\theta})/L(\check{\theta}_0) = (\ell_{yy}/Q)^{n/2}$.

广义似然比否定域:

$$\mathcal{W} = \{\vec{y} : \ell_{yy}/Q > c_1\}$$

定义残差平方和 Q : $Q = \sum_{i=1}^n \left(y_i - (\hat{a} + \hat{b}x_i)\right)^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2$.

定义回归平方和 U : $U = \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2 = \hat{b}^2 \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$.

引理: $\ell_{yy} = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 = U + Q$.

证明: 将 ℓ_{yy} 表达式的平方项展开:

$$\begin{aligned} \ell_{yy} &= \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^n [(y_i - \hat{y}_i) + (\hat{y}_i - \bar{y})]^2 \\ &= Q + U + 2 \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)(\hat{y}_i - \bar{y}), \end{aligned}$$

其中交叉项为

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)(\hat{y}_i - \bar{y}) &= \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{b}_0 - \hat{b}x_i)(\hat{b}_0 + \hat{b}x_i - \bar{y}) \\ &= \sum_{i=1}^n \left[(y_i - \bar{y}) - \hat{b}(x_i - \bar{x})\right] \hat{b}(x_i - \bar{x}) \\ &= \hat{b}(\ell_{xy} - \hat{b}\ell_{xx}) = \hat{b}\ell_{xx}(\ell_{xy}/\ell_{xx} - \hat{b}) = 0. \end{aligned}$$

□

广义似然比否定域: $\mathcal{W} = \{\vec{y}: U/Q > c_2\}$.

命题: 残差平方和 $Q = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2$ 与回归平方和 $U = \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2 = \hat{b}^2 \ell_{xx}$ 相互独立, 且

$$\frac{1}{\sigma^2} Q \sim \chi^2(n-2); \quad \text{若 } b=0, \text{ 则 } \frac{U}{\sigma^2} \sim \chi^2(1).$$

因此广义似然比否定域可以写为:

$$\mathcal{W} = \left\{ \vec{y}: \frac{U}{Q} > c_2 \right\} = \left\{ \vec{y}: \frac{U}{Q/(n-2)} > \lambda \right\}.$$

F 分布: 设 $\xi \sim \chi^2(m)$, $\eta \sim \chi^2(n)$, 且 ξ 与 η 独立, 记 $F = \frac{\xi/m}{\eta/n}$, 则 F 有概率密度函数

$$f_F(x) = \begin{cases} \frac{\Gamma(\frac{m+n}{2})}{\Gamma(\frac{m}{2})\Gamma(\frac{n}{2})} m^{m/2} n^{n/2} x^{\frac{m}{2}-1} (n+mx)^{-\frac{m+n}{2}}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

并称 F 服从参数为 m 与 n 的 F 分布, 记为 $F \sim F(m, n)$ 。

定理: 在 H_0 下, 检验统计量:

$$\xi := \frac{U}{Q/(n-2)} \sim F(1, n-2).$$

因此, $\lambda = F_{1-\alpha}(1, n-2)$.

例: $x =$ 放射性元素注射后天数, $y =$ 全残留百分数.

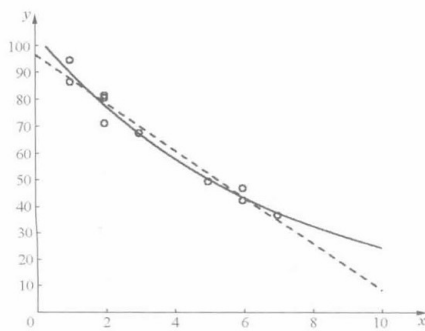


图 11.5: 示踪放射性元素残留量衰减图。

解: 根据散点图建立函数

$$\ln y = b_0 + bx + e.$$

求 $\bar{x}, \bar{z}; \hat{z}_i = \hat{b}_0 + \hat{b}x_i$:

$$\hat{b} = \ell_{xz}/\ell_{xx}, \hat{b}_0 = \bar{z} - \hat{b}\bar{x};$$

求残差平方和: $Q = \sum_i (z_i - \hat{z}_i)^2$

回归平方和: $U = \sum_i (\hat{z}_i - \bar{z})^2$.

$n = 10$, 根据 $\lambda = F_{0.95}(1, n - 2) = F_{0.95}(1, 8) = 5.32$.

由于 $\frac{U}{Q/(n-2)} = 344.82 > \lambda$, 否定 H_0 , 强烈认可 z 线性依赖于 x .

12.1 图的基本概念

无序积: 设 A, B 为任意的两个集合, 称 $\{(a, b) | a \in A \wedge b \in B\}$ 为 A 与 B 的无序积, 记为 $A \& B$

无序积允许 $a = b$, 只要对任意的 a 和 b : $(a, b) = (b, a)$

无向图: 无向图是一个有序的二元组 $\langle V, E \rangle$, 记作 G

$V \neq \emptyset$, 称为**顶点集**, 其元素为顶点或结点

E 称为**边集**, 是无序积 $V \& V$ 的多重子集, 其元素称为无向边, 简称边。

多重集: 允许元素重复出现的集合, 其中某元素出现次数称为重复度

无向图例: $D = \langle V, E \rangle, V = \{a, b, c, d\},$
 $E = \{(a, a), (a, b), (b, b), (b, c), (b, c), (b, c)\}$

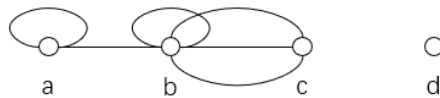


图 12.6: 无向图

有向图: 有向图是一个有序二元组 $\langle V, E \rangle$, 记作 D

顶点集 $V \neq \emptyset$, 其元素称为结点/顶点。

边集 E 是卡氏积 $V \times V$ 的多重子集, 其元素称为边。

其中卡氏积 (笛卡尔积): $A \times B = \{\langle x, y \rangle | x \in A \wedge y \in B\}, \langle x, y \rangle$

有向图例: $D = \langle V, E \rangle, V = \{a, b, c\}, E = \{\langle a, a \rangle, \langle a, b \rangle, \langle b, a \rangle, \langle b, a \rangle, \langle c, b \rangle\}$

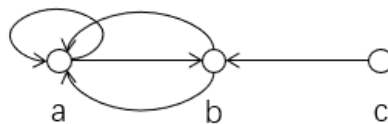


图 12.7: 有向图

对于无向图 G : 用 $V(G), E(G)$ 分别表示图 G 的顶点集和边集, 用 $e_k = (v_i, v_j)$ 表示边

对于有向图 D : 用 $V(D), E(D)$ 表示其顶点集和边集, 用 $e_k = \langle v_i, v_j \rangle$ 表示边

$|V(G)|, |E(G)|, |V(D)|, |E(D)|$ 分别表示 G 和 D 的顶点数和边数

特殊的图定义:

- n 阶图: $|V(G)| = n$ 或 $|V(D)| = n$
- 有限图: $|V(G)|$ 和 $|E(G)|$ 均为有限数
- 零图: $E = \emptyset$
- n 阶零图: $|V(G)| = n$ 的零图, 记为 N_n
- 平凡图: 1 阶零图, N_1
- 空图: $V = E = \emptyset$

点与边的关联: 在无向图 G 中, 边 $e_k = (v_i, v_j)$, 则称 e_k 与 v_i (e_k 与 v_j) 彼此关联

- 关联次数: $v_i \neq v_j$, 称 e_k 与 v_i (e_k 与 v_j) 关联次数为 1; 若 $v_i = v_j$, 关联次数为 2
- 环: 只与一个顶点关联的边
- 孤立点: 无边关联的点

例如, 在图12.6中, 边 (a, a) 和顶点 a 的关联次数为 2, 边 (a, b) 和顶点 a 的关联次数为 1。 a 有环, d 是孤立点, b, c 有平行边。

对于有向图 G , 边 $e_k = \langle v_i, v_j \rangle$, 称 v_i, v_j 为 e_k 的端点, 其中 v_i 为始点, v_j 为终点

相邻: 对于无向图 G , 任意两顶点 v_i, v_j 之间存在边 e_k , $e_k = (v_i, v_j)$, 称 v_i, v_j 彼此相邻 (点与点)

边相邻: 任意两边 e_k, e_l , 至少存在一个公共端点, 称 e_k, e_l 彼此相邻 (边与边)

邻接: 对于有向图 D 任意两顶点 v_i, v_j 之间存在边 e_k , $e_k = \langle v_i, v_j \rangle$, 称 v_i 邻接到 v_j , v_j 邻接于 v_i 。

平行边: 端点相同的两条无向边是平行边; 起点与终点相同的两条有向边是平行边

- 邻域: 称 $N_G(v) = \{u | u \in V(G) \wedge (u, v) \in E(G) \wedge u \neq v\}$ 为 v 的邻域 (v 在图 G 中的相邻顶点)

- 闭邻域: $N_G(v) \cup v$
- 关联集: $I_G(v) = \{e | e \text{ 与 } v \text{ 关联}\}$
- 后继: $\Gamma_D^+(v) = \{u | u \in V(D) \wedge \langle v, u \rangle \in E(D) \wedge u \neq v\}$
- 前驱: $\Gamma_D^-(v) = \{u | u \in V(D) \wedge \langle u, v \rangle \in E(D) \wedge u \neq v\}$
- 邻域: $N_D(v) = \Gamma_D^+(v) \cup \Gamma_D^-(v)$
- 闭邻域: $N_D(v) \cup v$

在无向图12.6中, a 的邻域为 $N_G(a) = \{b\}$, 闭邻域为 $\{a, b\}$, 关联集为 $I_G(a) = \{(a, a), (a, b)\}$ 。 b 的邻域为 $N_G(b) = \{a, c\}$, 闭邻域为 $\{a, b, c\}$, 关联集为 $I_G(b) = \{(a, b), (b, b), (b, c), (b, c), (b, c)\}$ 。 c 的邻域为 $N_G(c) = \{b\}$, 闭邻域为 $\{b, c\}$, 关联集为 $I_G(c) = \{(b, c), (b, c), (b, c)\}$ 。 d 的邻域为 $N_G(d) = \emptyset$, 闭邻域为 $\{d\}$, 关联集为 $I_G(d) = \emptyset$ 。

在有向图12.7中, a 的后继为 $\Gamma_D^+(a) = \{b\}$, 前驱为 $\Gamma_D^-(a) = \{b\}$, 邻域为 $N_D(a) = \{b\}$, 闭邻域为 $\{a, b\}$ 。 b 的后继为 $\Gamma_D^+(b) = \{a\}$, 前驱为 $\Gamma_D^-(b) = \{a, c\}$, 邻域为 $N_D(b) = \{a, c\}$, 闭邻域为 $\{a, b, c\}$ 。 c 的后继为 $\Gamma_D^+(c) = \{b\}$, 前驱为 $\Gamma_D^-(c) = \emptyset$, 邻域为 $N_D(c) = \{b\}$, 闭邻域为 $\{b, c\}$ 。

顶点的度数:

- 度 $d_G(v)$: v 作为 G 中边的端点的次数之和
- 出度 $d_D^+(v)$: v 作为 D 中边的始点的次数之和
- 入度 $d_D^-(v)$: v 作为 D 中边的终点的次数之和
- 度 $d_D(v) = d_D^+(v) + d_D^-(v)$
- 最大度: $\Delta(G) = \max\{d_G(v) | v \in V(G)\}$
- 最小度: $\delta(G) = \min\{d_G(v) | v \in V(G)\}$
- 最大出度: $\Delta^+(D) = \max\{d_D^+(v) | v \in V(D)\}$
- 最小出度: $\delta^+(D) = \min\{d_D^+(v) | v \in V(D)\}$
- 最大入度: $\Delta^-(D) = \max\{d_D^-(v) | v \in V(D)\}$
- 最小入度: $\delta^-(D) = \min\{d_D^-(v) | v \in V(D)\}$

最大 (出/入) 度, 最小 (出/入) 度简记为 $\Delta, \delta, \Delta^+, \delta^+, \Delta^-, \delta^-$

在无向图12.6中, 度 $d_G(a) = 3, d_G(b) = 6, d_G(c) = 3, d_G(d) = 0$, 最大度 $\Delta = 6$, 最小度 $\delta = 0$ 。

在有向图12.7中, 出度 $d_D^+(a) = 2, d_D^+(b) = 2, d_D^+(c) = 1$, 入度 $d_D^-(a) = 3, d_D^-(b) = 2, d_D^-(c) = 0$, 度 $d_G(a) = 5, d_G(b) = 4, d_G(c) = 1$, 最大 (出/入) 度, 最小 (出/入) 度分别为 $\Delta = 5, \delta = 1, \Delta^+ = 2, \delta^+ = 1, \Delta^- = 3, \delta^- = 0$ 。

12.2 图论基本定理, 可图化的条件

图论基本定理:

定理: 设 $G = \langle V, E \rangle$ 是无向图, $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, $|E| = m$, 则

$$d(v_1) + d(v_2) + \dots + d(v_n) = 2m$$

证明: 每一条边均有两个端点, 提供 2 度, m 条边一共提供 $2m$ 度。 □

定理: 设 $D = \langle V, E \rangle$ 是有向图, $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, $|E| = m$, 则

$$d^+(v_1) + d^+(v_2) + \dots + d^+(v_n) = d^-(v_1) + d^-(v_2) + \dots + d^-(v_n) = m$$

推论: 任何图中, 奇数度顶点的个数是偶数。

简单图: 无环, 无平行边的图, 若 G 是简单图, 则 $0 \leq \Delta(G) \leq n - 1$

度数列: 设 $G = \langle V, E \rangle$, $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, 称 $d = (d(v_1), d(v_2), \dots, d(v_n))$ 为 G 的度数列

可图化: 设非负整数列 $d = (d_1, d_2, \dots, d_n)$, 若存在图 G , 使得 G 的度数列是 d , 则称 d 为可图化的。

例: 下面给出的两个整数列, 哪个是可图化的?

1. $d = (5, 4, 4, 3, 3, 2)$; 2. $d = (5, 3, 3, 2, 1)$ 。

解:

1. $\sum_{i=1}^6 d_i = 1 \pmod{2}$, d 不可图化。

2. $\sum_{i=1}^5 d_i = 0 \pmod{2}$, d 是可图化的。以 d 为度数列的图可以有多个, 图12.8所示的 3 个图都符合要求。

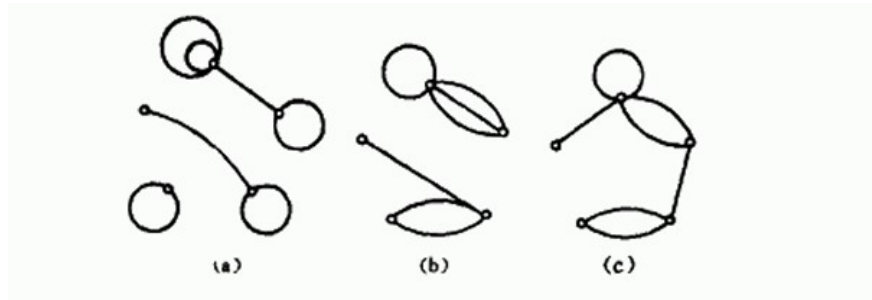


图 12.8

12.3 图同构

图同构: 设图 $G_1 = \langle V_1, E_1 \rangle$, $G_2 = \langle V_2, E_2 \rangle$, 若存在双射 $f: V_1 \rightarrow V_2$, 满足

$$\forall u \in V_1, v \in V_1, (u, v) \in E_1, \exists (f(u), f(v)) \in E_2$$

且 $\langle u, v \rangle$ 与 $\langle f(u), f(v) \rangle$ 重数相同, 则称 G_1 与 G_2 同构, 记作 $G_1 \cong G_2$

同构关系: 同构关系是全体图集合上的二元关系, 有性质: 自反的, 对称的, 传递的。同构关系是等价关系

同构示例:

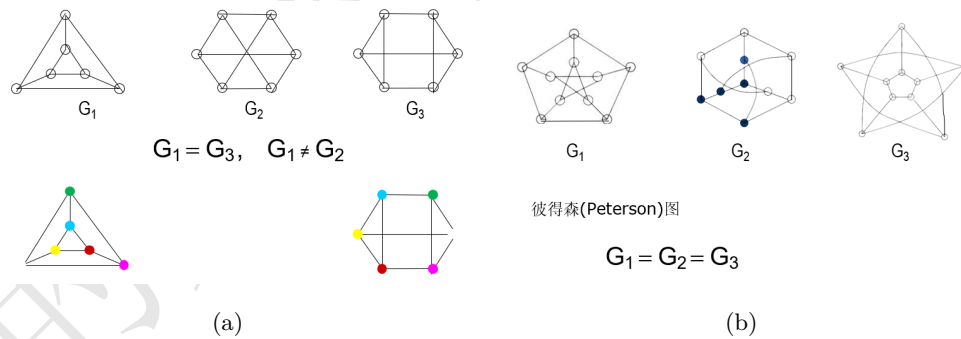


图 12.9: 同构示例

12.4 图族

完全图: 每个顶点均与其余的 $n - 1$ 个顶点相邻, 记作 K_n

竞赛图: N 阶有向简单图, 任意两节点之间只有一条有向边

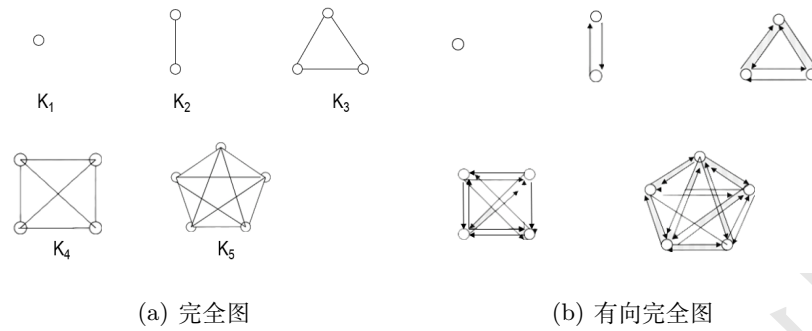


图 12.10: 完全图

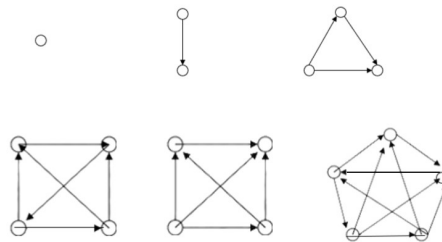


图 12.11: 竞赛图

k 正则图: $v \in V(G), d(v) = k, k = 0, 1, 2, \dots$, 完全图 K_n 是 $n-1$ 正则图 ($n = 1, 2, 3, \dots$), 柏拉图图, 彼得森图, 库拉图斯基图也是正则图.

r 部图: $G = \langle V, E \rangle$, 若 V 分成 r 个互不相交的子集, 使得 G 中任何一条边的两个端点都不在同一个 V_i 中, 即 $V = V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_r, V_i \cap V_j = \emptyset (i \neq j), E \subseteq \bigcup (V_i \times V_j)$, 也记作 $G = \langle V_1, V_2, \dots, V_r; E \rangle$

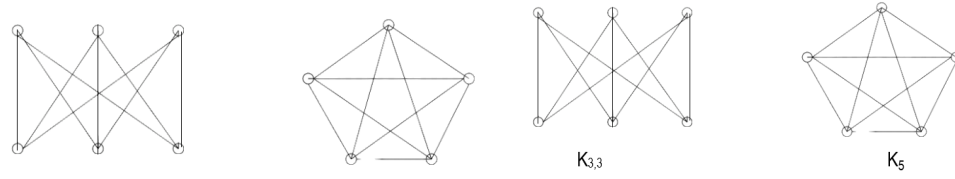
二部图: $G = \langle V_1, V_2; E \rangle$, 也称为偶图

完全 r 部图: K_{n_1, n_2, \dots, n_r} : V_i 中任一顶点均与 $V_j (i \neq j)$ 所有顶点相邻

子图, 生成子图:

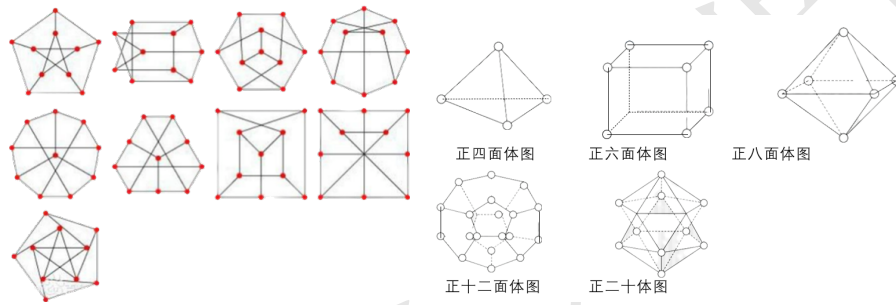
- 子图: 设 $G = \langle V, E \rangle, G' = \langle V', E' \rangle$, 若 $V' \subseteq V$ 且 $E' \subseteq E$, 则称 G' 是 G 的子图, 记为 $G' \subseteq G$
- 真子图: $V' \subset V$ 或 $E' \subset E$
- 生成子图: $V' = V$

导出子图: 设 $G = \langle V, E \rangle$,



(a) 正则图

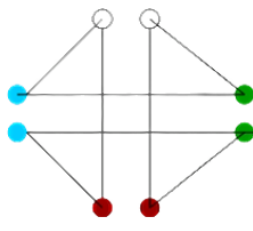
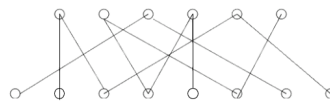
(b) 库拉图斯基图



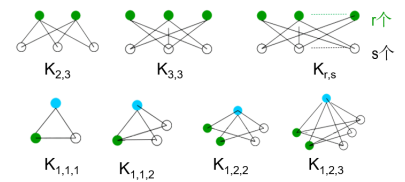
(c) 彼得森图

(d) 柏拉图图

图 12.12: 正则图

(a) r 部图

(b) 二部图

(c) 完全 r 部图图 12.13: r 部图

- 若 $V_1 \subset V$, 以 G 中两个端点都在 V_1 中的边组成边集 E_1 的图, 即 $E_1 = E \cap (V_1 \times V_1)$, $G[V_1] = \langle V_1, E_1 \rangle$ 为由 V_1 导出的子图
- 若 $\emptyset \neq E_1 \subset E$, 以 E_1 中的边关联的点为顶点集 V_1 , 则称 $G[E_1] = \langle V_1, E_1 \rangle$ 为由 E_1 导出的子图

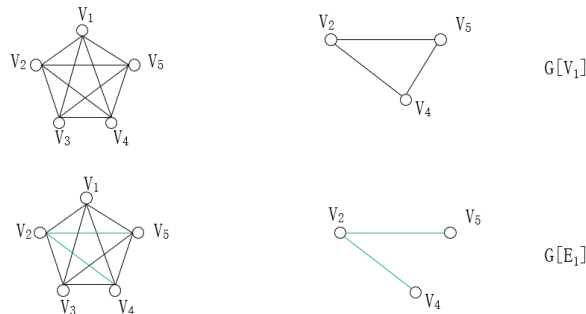


图 12.14: 导出子图

补图: 以 V 为顶点集, 以使 G 成为 n 阶完全图的所有添加边组成的集合为边集的图, 为 G 的补图, 即 $G = \langle V, E \rangle, \overline{G} = \langle V, E(K_n) - E \rangle$

自补图: $G \cong \overline{G}$

例: 五边形的补图是五角星, 五边形是自补图

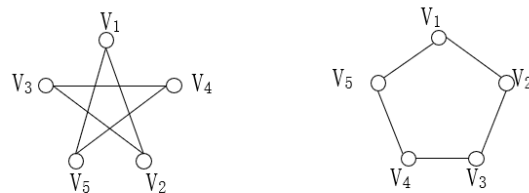


图 12.15: 补图

例: 对于无向图, 若它是自补图, 则阶 n 满足什么性质?

设边为 m , 则 $2m = n(n-1)/2$, 故有 $n = 4k$ or $4k+1$.

13.1 通路 & 回路

定义：对于标定图 G ，称顶点与边的交替序列称为通路。

$$\Gamma = v_{i_0} e_{j_1} v_{i_1} \cdots e_{j_l} v_{i_l}$$

为顶点 v_{i_0} 到 v_{i_l} 的通路，其中 $e_{j_r} = (v_{i_{r-1}}, v_{i_r})$ (G 为无向图) 或 $e_{j_r} = \langle v_{i_{r-1}}, v_{i_r} \rangle$ (G 为有向图)， v_{i_0} 和 v_{i_l} 分别称为通路 Γ 的始点与终点，边数 l 称为通路的长度，记为 $|\Gamma| = l$

定义：若 $v_{i_0} = v_{i_l}$ ，则称 Γ 为回路

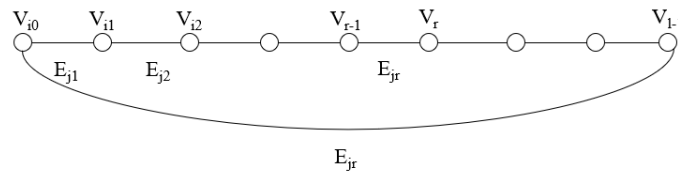


图 13.16: 回路

- 简单通路：没有重复边的通路
- 简单回路：没有重复边的回路
- 复杂通路：有重复边的通路
- 复杂回路：有重复边的回路
- 初级通路（路径）：没有重复顶点和重复边的通路
- 初级回路（圈）：没有重复顶点和重复边的回路

通路的表示：可以只用边的序列表示通路或回路，对于简单图，可以用顶点序列表示通路或回路。对于长度为 l 的圈：如果是非标定的，则在同构意义下只有一种画法；如果是标定的（指定起点，终点），则可以画出 l 个不同的圈。

定义：设 G 是含圈的无向简单图，则称 G 中最长圈的长度为 G 的周长，最短圈的长度为 G 的围长。分别记为： $c(G)$ = 最长圈的长度， $g(G)$ = 最短圈的长度。

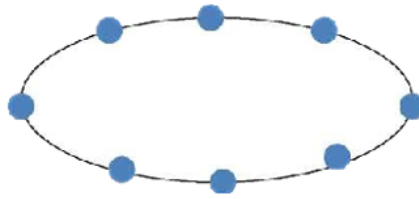


图 13.17: 圈

举例: $c(K_n) = n (n \geq 3)$, $c(K_{n,n}) = 2n$,

$g(K_n) = 3 (n \geq 3)$, $g(K_{n,n}) = 4 (n \geq 2)$ **定理:** 在 n 阶 (有向或无向) 图 G 中, 若从不同顶点 v_i 到

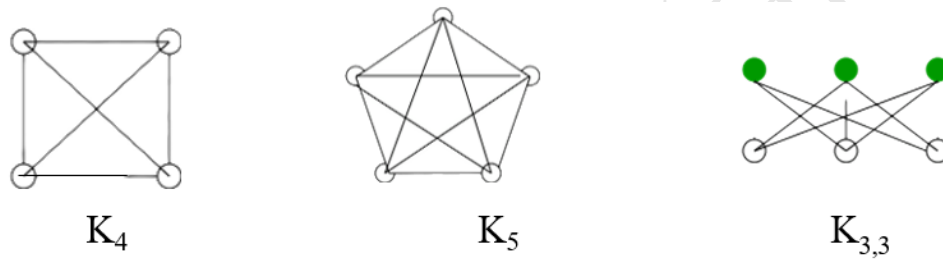


图 13.18: 周长与围长

v_j 存在通路, 则从 v_i 到 v_j 存在长度小于等于 $n-1$ 的通路。

推论: 在 n 阶图 G 中, 若从不同顶点 v_i 到 v_j 存在通路, 则从 v_i 到 v_j 存在长度小于等于 $n-1$ 的路径 (初级通路)。

证明: 设 $\Gamma = v_{i_0}e_{j_1} \cdots v_{i_l}$ 为长度 l 的通路:

若 $l \leq n-1$, 则 Γ 为满足条件的通路

若 $l > n-1$, 则 $n < l+1$, 即 Γ 上的顶点数大于图的顶点数, 因此 Γ 中一定存在某个 v_{i_s} 到自身的回路, 在 Γ 中删掉该回路, 得到 Γ' , 重复上述判断过程。

定理: 在 n 阶图 G 中, 若有从顶点 v_i 到自身的回路, 则有从 v_i 到自身长度小于等于 n 的回路

推论: 在 n 阶图 G 中, 若有从顶点 v_i 到自身的简单回路, 则有从 v_i 到自身长度小于等于 n 的圈 (初级回路)

13.2 扩大路径法

定义：在无向简单图中，路径的两个端点不与路径本身以外的顶点相邻，这样的路径称为**极大路径**；在有向图中，路径起点的前驱，终点的后继，都在路径本身上的路径称为**极大路径**

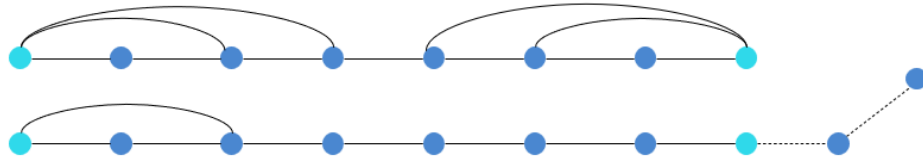


图 13.19: 极大路径

扩大路径法：任何一条路径，只要不是极大路径，则至少有一个端点与路径本身以外的顶点相邻，则路径还可以扩大，直到变成极大路径为止

例：设 G 为 $n \geq 3$ 阶无向简单图， $\delta(G) \geq 2$ ，求证 G 中存在长度大于等于 3 的圈

证明：任取 $v_0 \in V(G)$ ，由于 $\delta(G) \geq 2$ ，因此存在 $v_1 \in V(G)$ 且 $v_1 \neq v_0$ 使得 $(v_0, v_1) \in E(G)$ ，因此存在 $\Gamma_0 = v_0 v_1$ ，对 Γ_0 使用扩大路径法得到 $\Gamma = v_0 \cdots v_l$ 为极大路径且 $l \geq 2$ 。

若 v_0 与 v_l 相邻，则已找到 G 中长度大于等于 3 的圈。

若 v_0 与 v_l 不相邻，则一定存在某个 $v_s (2 \leq s \leq l-1)$ 与 v_0 相邻，否则与 $\delta(G) \geq 2$ 矛盾，此时找到 G 中长度大于等于 3 的圈。

13.3 无向图的连通性

定义：对于无向图 $G = \langle V, E \rangle$ ，任取 $u, v \in V$ ，若 u 与 v 之间存在通路，则称 u 与 v 是**连通的**，记为

$$u \sim v \iff u \text{ 与 } v \text{ 之间有通路}$$

规定 $u \sim u$ 。连通关系是等价关系。

设 V 关于顶点之间连通关系的商集是

$$V / \sim = \{V_1, V_2, \dots, V_k\}$$

- 连通分支：导出子图 $G[V_i], (i = 1, \dots, k)$
- 连通分支数： $p(G) = |V / \sim| = k$

- 连通图: $p(G) = 1$
- 非连通图: $p(G) > 1$

短程线: 若 u, v 连通, 称 u, v 之间长度最短的通路为 u, v 之间的短程线

距离: $d_G(u, v) = u, v$ 之间短程线的长度, 当 u, v 不连通时, $d_G(u, v) = \infty$

直径: 图 G 的顶点之间最大距离

$$d(G) = \max\{d_G(u, v) | u, v \in V(G)\}$$

“距离”应满足以下三条性质:

- 非负性: $d(u, v) > 0, d(u, v) = 0 \iff u = v$
- 对称性: $d(u, v) = d(v, u)$
- 三角不等式: $d(u, v) + d(v, w) > d(u, w)$

无向图的距离函数 $d_G(u, v)$ 满足上述要求, 有向图的“距离”函数 $d_D(u, v)$ 不对称:

$$d(u, v) = 1, d(v, u) = 2$$

定理: (二部图判别定理) G 是二部图 $\iff G$ 中无奇圈.

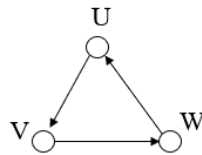


图 13.20: 有向图的距离函数

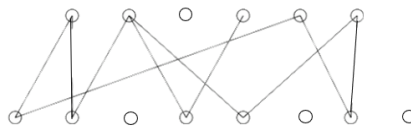


图 13.21: 二部图判别定理

证明: (\Rightarrow) 设二部图 $G = \langle V_1, V_2, E \rangle$, 若 G 中无圈则成立, 反之设 C 是 G 中任意圈, $C = v_1 v_2 \cdots v_{k-1} v_k v_1$. 不妨设 $v_1 \in V_1$, 则 $v_3, v_5, \cdots, v_{k-1} \in V_1, v_2, v_4, \cdots, v_k \in V_2$, 所以 k 是偶数, $|C| = k, C$ 是偶圈.

(\Leftarrow) 设 G 中无奇圈, 设 G 连通, 否则可以对每个连通分支进行讨论. 任取 $v \in V(G)$, 令

$$\begin{aligned} V_1 &= \{u | u \in V(G) \wedge d(u, v) \text{ 是偶数}\}, \\ V_2 &= \{u | u \in V(G) \wedge d(u, v) \text{ 是奇数}\}, \end{aligned} \quad (13.3.1)$$

则 $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, $V_1 \cup V_2 = V(G)$, 下面证明

$$E \subseteq V_1 \& V_2$$

如图13.22所示. 反证, 假设存在 $e = (v_x, v_y)$, $v_x, v_y \in V_1$, 设 Γ_{vx} 和 Γ_{vy} 分别为 v 到 v_x 和 v_y 的短程线, 则其长度均为偶数, 且 e 不在 Γ_{vx} 和 Γ_{vy} 上. 设 v_z 为 Γ_{vx} 和 Γ_{vy} 的公共点, 且 Γ_{zx} 和 Γ_{zy} 除 v_z 外没有公共点, 则 Γ_{zx} 和 Γ_{zy} 的长度也是偶数, 因此存在一个包含 v_x, v_y, v_z 的奇圈, 矛盾.

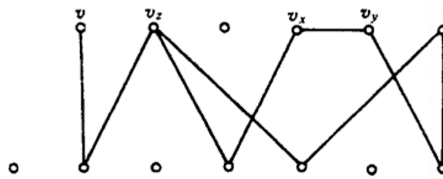


图 13.22: 二部图判定定理

定理: 若 n 阶无向图 G 是连通图, 则 G 的边数 $m \geq n - 1$

证明: 不妨设 G 是简单图, 若简单图情况下成立则非简单图一定成立, 下面对 n 归纳:

- $G = N_1 : n = 1, m = 0$ 结论成立
- 设 $n \leq k$ 时命题成立, 下证 $n = k + 1$ 时也成立.

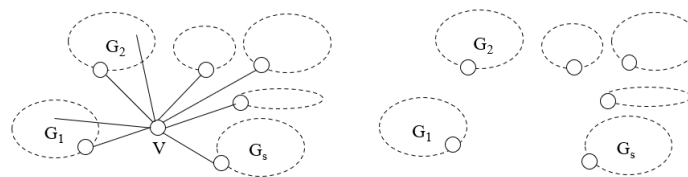


图 13.23: 连通图的边数

取 $v \in V(G)$, $G' = G - v$, 设 $p(G') = s$, 连通分支分别为 G_1, G_2, \dots, G_s , 设 $|V(G_i)| = n_i, |E(G_i)| = m_i, (i = 1, 2, \dots, s)$, 由归纳假设知 $m_i \geq n_i - 1$. 又由于删除 v 产生 s 个连通分支, 所以至少删除了 s 条边, 即 $d_G(v) \geq s$, 则

$$m = m_1 + m_2 + \dots + m_s + d_G(v) \geq (n_1 - 1) + (n_2 - 1) + \dots + (n_s - 1) + s$$

$$= n_1 + n_2 + \cdots + n_s = n - 1$$

例：证明每个非连通图 G 的补图 \bar{G} 联通

证明：只需证明任意两个顶点 x 和 y 在 \bar{G} 中连通即可：

- (1) 若 x 和 y 在 G 中不连通，则在 \bar{G} 中有边相连，连通
- (2) 若 x 和 y 在 G 中连通，则同属一个连通分支，又 G 不是连通图，因此存在 z 是 G 别的连通分支中的顶点，根据 (1)， z 在 \bar{G} 中分别和 x, y 直接相连，因此 x 和 y 在 \bar{G} 中连通。

13.4 无向树的定义与性质

- **无向树：**连通无回路（指初级和简单回路）的无向图称为无向树
- **树：**常用 T 表示树
- **森林：**无向图至少有两个连通分支且每个连通分支都是树
- **平凡树：**平凡图（无树叶，无分支点）
- **树叶：**树中 1 度的顶点， $d(v) = 1$
- **分支点：**树中 2 度以上顶点， $d(v) \geq 2$

树的等价定义：设 $G = \langle V, E \rangle$ 是 n 阶 m 边无向图，则以下命题等价

1. G 是树（连通无回路）
2. G 中任何 2 顶点之间有唯一路径
3. G 无圈 $\wedge m = n - 1$
4. G 连通 $\wedge m = n - 1$
5. G 极小连通：连通 \wedge 所有边是桥
6. G 极大无回：无圈 \wedge 增加任何新边得唯一圈

证明: $1 \Rightarrow 2$: 根据 G 的连通性, 任取 $u, v \in V$, u, v 之间存在通路, 设 P_1 为 u, v 之间通路, 根据 G 中无回路可知 P_1 一定为路径。设 P_1 不唯一, P_2 为 u, v 之间另一路径, 则存在边 $e'_1 = (v_x, v'_1)$ 只在 P_1 上或只在 P_2 上, 设 e'_1 只在 P_2 上, 若还有与 e'_1 相邻的边 e'_2 只在 P_2 上, 得通路 $e'_1 e'_2$ 只在 P_2 上, 以此类推得 $e'_1 e'_2 \cdots e'_k$ 只在 P_2 上, $e'_k = (v'_k, v_y)$ 且 v_x, v_y 为 P_1 和 P_2 的公共顶点, 因此可构造一条回路, 矛盾。

$2 \Rightarrow 3$: 先证明 G 中无圈, 若 G 中存在顶点 v 上的环, 则 v 到 v 存在两条路径, 长度为 0 和 1, 矛盾, 若 G 中存在长度大于等于 2 的圈, 则圈上任取 2 顶点均可构造两条路径, 矛盾。

再证明 $m = n - 1$, $n = 1$ 时, 由于 G 中无圈, $m = 0$, 结论成立; 设 $n \leq k$ 时结论成立, 当 $n = k + 1$ 时, 设 $e = (u, v)$ 为 G 中一条边, 则 $G - e$ 一定有两个连通分支, 否则若 $G - e$ 连通, u, v 之间有圈。设连通分支为 G_1, G_2 , 其顶点数和边数记为 n_1, n_2 和 m_1, m_2 , 根据归纳假设有 $m_i = n_i - 1$, 则 $m = m_1 + m_2 + 1 = n - 1$

$3 \Rightarrow 4$: 只需证明 G 连通。若 G 不连通, 则设 G 有 s 个连通分支 G_1, \cdots, G_s , G_i 均为连通无回路的图, 即树。根据 3, $m_i = n_i - 1$, 因此 $m = \sum_{i=1}^s m_i = n - s$, 由于 $s \geq 2$, 因此与 $m = n - 1$ 矛盾

$4 \Rightarrow 5$: 任取 $e \in E$, 有 $|E(G - e)| = n - 1 - 1 = n - 2$, 根据定理 7.9 (任何无向连通图的边数大于等于顶点数-1) 可知, $G - e$ 不连通, 因此 e 为桥

$5 \Rightarrow 6$: 由于 G 中每条边均为桥, G 中一定没有圈, 又 G 连通, 则 G 为树。因此任取 $u, v \in V$, u, v 之间存在唯一路径 P , 则 $P \cup (u, v)$ 为 $G \cup (u, v)$ 中唯一的圈

$6 \Rightarrow 1$: 只需证明 G 连通, 由于任取 $u, v \in V$, $G \cup (u, v)$ 中存在唯一的圈 C , 则 $C - (u, v)$ 为 G 中 u, v 之间的通路, 根据 u, v 的任意性, G 连通

定理: n 阶非平凡树至少有 2 个树叶

证明: 设 T 有 x 个树叶, 由树的等价定义和握手定理, 有

$$\begin{aligned} 2m &= 2(n - 1) = 2n - 2 = \sum d(v) \\ &= \sum_{v \text{ 是树叶}} d(v) + \sum_{v \text{ 是分支点}} d(v) \\ &\geq x + 2(n - x) = 2n - x, \end{aligned} \quad (13.4.1)$$

所以 $x \geq 2$ 。

无向树的计数: 设 $t_n : n \geq 1$ 为 n 阶非同构无向树的个数

六阶非同构无向树: $n = 6, t_6 = 6$

七阶非同构无向树: $n = 7, t_7 = 11$

n	t_n	n	t_n	n	t_n	n	t_n
1	1	9	47	17	48629	25	104636890
2	1	10	106	18	123867	26	279793450
3	1	11	235	19	317955	27	751065460
4	2	12	551	20	823065	28	2023443032
5	3	13	1301	21	2144505	29	5469566585
6	6	14	3159	22	5623756	30	14830871802
7	11	15	7741	23	14828074	31	40330829030
8	23	16	19320	24	39299897	32	109972410221

图 13.24: 无向树的计数

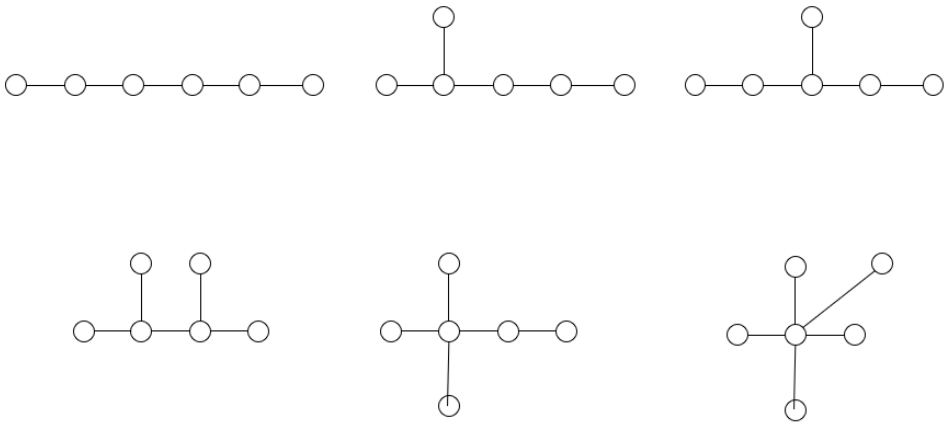


图 13.25: 六阶非同构无向树

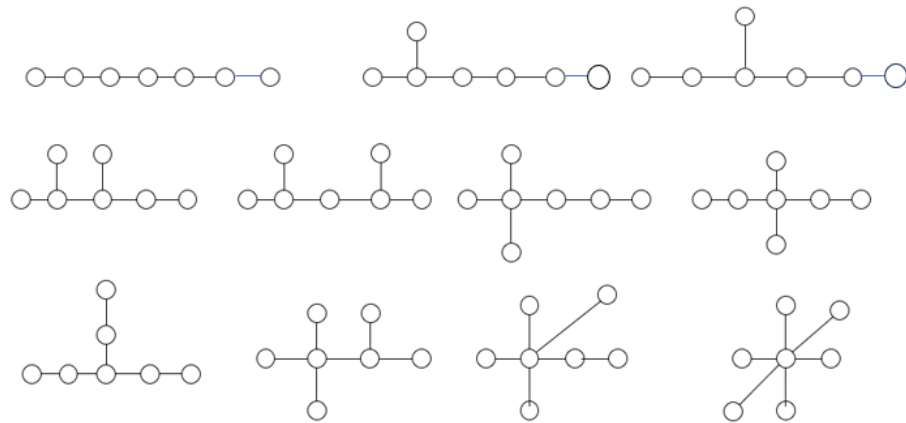


图 13.26: 七阶非同构无向树

例：如果树中没有度数为 2 的顶点，证明树叶的个数不少于分支节点的个数。

证明：当 $n = 1$ 时，树叶和分支节点的个数相等，都是 0；

当 $n \geq 2$ 时，设度数为 1, 2, 3, \dots 的顶点数分别为 n_1, n_2, n_3, \dots ，则有

$$n_1 + n_2 + n_3 + \dots = n$$

$$n_1 + 2n_2 + 3n_3 + \dots = 2(n - 1),$$

1 式乘 2 减 2 式可得 $n_1 > n_3 + 2n_4 + \dots > n_2 + n_3 + n_4 \dots$ ($n_2 = 0$)。

13.5 生成树

- **生成树：** $T \subseteq G \wedge V(T) = V(G) \wedge T$ 是树
- **树枝：** $e \in E(T)$ ，共有 $n - 1$ 条
- **弦：** $e \in E(G) - E(T)$ ，共有 $m - n + 1$ 条
- **余树：** $G[E(G) - E(T)] = \bar{T}$

定理：无向图 G 连通 $\iff G$ 有生成树。

证明：(\Leftarrow) 显然，(\Rightarrow) 破圈法

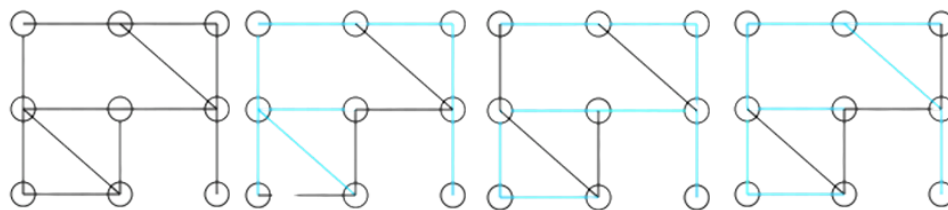


图 13.27: 生成树

若 G 无圈, 则 G 为自己的生成树。若 G 中含圈, 任取一个圈 C , 任意删除 C 上任何一条边, 所得图仍然是连通的, 继续这一过程, 直到最后得到的图无圈为止。设最后的图为 T , 则 T 是连通的且是 G 的生成子图。

- 推论 1: G 是 n 阶 m 边无向连通图 $\Rightarrow m \geq n - 1$
 - 推论 2: T 是 n 阶 m 边无向连通图 G 的生成树 $\Rightarrow |E(\bar{T})| = m - n + 1$
 - 推论 3: T 是连通图 G 中一棵生成树, \bar{T} 是 T 的余树, C 为 G 中任意圈, 则 $E(\bar{T}) \cap E(C) \neq \emptyset$
- 推论 3 的证明: (反证法) 如果 $E(\bar{T}) \cap E(C) = \emptyset$, 则 $E(C) = E(T)$, T 中有回路与 T 是树矛盾。

定理: T 是无向连通图 G 的生成树, e 为 T 的任意一条弦, 则 $T \cup e$ 中含 G 的只含一条弦其余边均为树枝的圈, 而且不同的弦对应的圈是不同的

证明: 设 $e = (u, v)$, 则 u, v 之间在 T 中存在唯一的路径 $P(u, v)$ 。则 $P(u, v) \cup e$ 为 G 中只含弦 e 其余边均为树枝的圈。当 e_1, e_2 不同时, e_2 不在 e_1 对应的圈 C_{e_1} 中, e_1 不在 e_2 对应的圈 C_{e_2} 中。

$\tau(G)$: 标定图 G 的生成树的个数。若 $E(T_1) \neq E(T_2)$, 则认为 $T_1 \neq T_2$ 。

$G - e$: 删除。 $G \setminus e$: 收缩

定理: n 阶无向连通标定图, 对 G 的任意非环边 e , 有 $\tau(G) = \tau(G - e) + \tau(G \setminus e)$

证明: $\forall e$ 非环, 则

- 不含 e 的 G 的生成树个数: $\tau(G - e)$,
- 含 e 的 G 的生成树个数: $\tau(G \setminus e)$

注意: 由于环不在任何生成树中, 因而在计算过程中若出现环应自动将环去掉

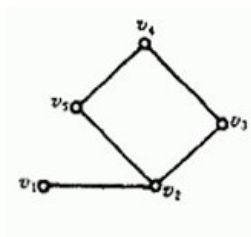


图 13.28

例：计算图 13.28 标定图中生成树的个数，并画出所有不同的生成树。

解：图 13.29(a) 给出了求 $\tau(G)$ 的计算过程，带杠边表示在下一步删除和收缩的边。图 13.29(b) 给出了 G 的 4 棵不同的生成树。

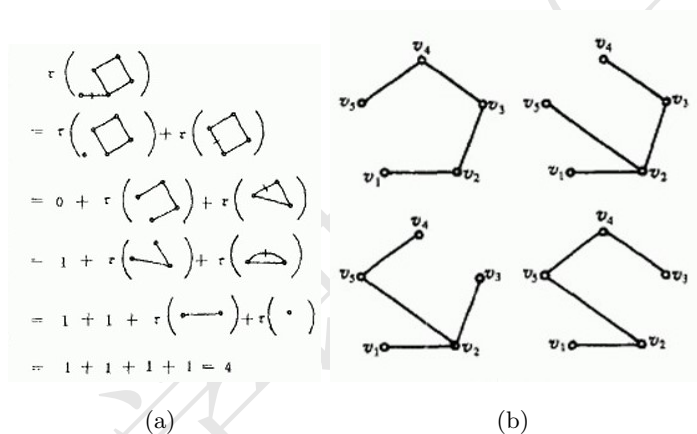


图 13.29

13.6 根树

定义：

- 有向树：基图是树的有向图
- 根树：若有向树 T 是平凡树或 T 中有一个顶点的入度为 0，其余顶点的入度均为 1，则 T 为根树
- 树根：入度为 0 的顶点
- 树叶：入度为 1 出度为 0 的顶点

- 内点: 入度为 1 出度不为 0 的顶点
- 分支点: 树根和内点
- 层数: 树根到 v 的路径长度
- 树高: 层数最大的顶点的层数
- 儿子: u 在上方与 v 相邻, v 是 u 的儿子
- 父亲: u 在上方与 v 相邻, u 是 v 的父亲
- 兄弟: u 与 v 有相同父亲, u 是 v 的兄弟
- 祖先: 从 u 可达 v , u 是 v 的祖先
- 后代: 从 u 可达 v , u 是 v 的后代

有序树: 给相同层数的顶点标上次序的根树。

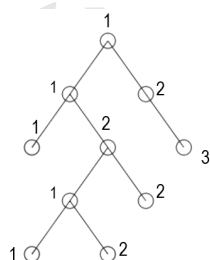
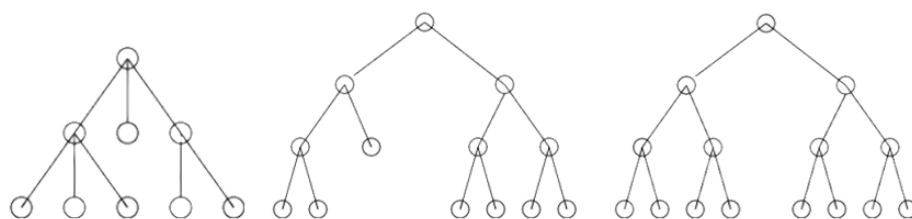


图 13.30: 有序树

- **r 叉树:** 每个分支点至多有 r 个儿子
- 正则 r 叉树: 每个分支点恰好有 r 个儿子
- 完全正则 r 叉树: 树叶的层数均为树高的 r 叉正则树
- 根子树: T 是根树, $v \in V(T)$, 由 v 本身及其所有后代导出的子图 T_v
- 左子树, 右子树: 二叉树中分支点的左右两个儿子导出的根子树

根树的周游: 列出根树的所有顶点, 每个顶点恰好出现一次

图 13.31: r 叉树

- 中序行遍: 左子树, 根, 右子树
- 前序行遍: 根, 左子树, 右子树
- 后序行遍: 左子树, 右子树, 根

对于如图13.32所示的树, 前序, 中序, 后序周游分别为:

- 中序: dbigjehacf
- 前序: abdegijhcf
- 后序: dijghebfca

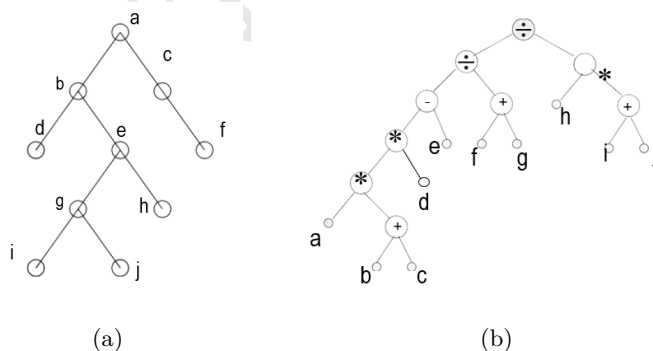


图 13.32: 根树的周游

中缀法, 前缀法, 后缀法: 如图13.32(b) 所示, 用中序, 前序, 后序周游方法表达算式:

- 中缀: $((a * (b + c)) * d - e) \div (f + g) \div (h * (i + j))$
- 前缀 (波兰): $\div \div - * a + bcde + fg * h + ij$

- 后缀 (逆波兰): $abc + *d * e - fg + \div hij + * \div$

例: 证明一个有向树 T 是根树, 当且仅当 T 中有且仅有一个顶点的入度为 0

证明: \Rightarrow 显然

\Leftarrow 若 T 为平凡树一定为真, 下面证明非平凡树的情况, 归纳

$n = 2$ 时, T 两个顶点入度分别为 0, 1, T 是根树;

设 $n = k$ 时结论为真, 考虑 $n = k + 1$ 时, 设 T' 为 T 的基图, 则 T' 为 $k + 1$ 阶无向树, 因此其至少有两片树叶 (定理 9.2)。则 T 中至少存在一个顶点 v_0 满足其入度为 1, 出度为 0。设 $T_1 = T - v_0$, 则 T_1 为 k 阶树, 且 T 中入度为 0 的顶点都在 T_1 中, 根据条件与归纳假设, T_1 中有一个顶点的入度为 0, 出度为 1, 其为 k 阶根树。设 v_0 在 T 中的父亲为 v_1 , 则 $T = T_1 \cup \langle v_1, v_0 \rangle$, 因此 T 中除一个顶点入度为 0 外其余顶点入度均为 1, 其为根树。 \square

13.7 关联矩阵

定义: (有向图关联矩阵) 设 $D = \langle V, E \rangle$ 是无环有向图, $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ 。关联矩阵 (incidence matrix):

$$M(D) = [m_{ij}]_{n \times m}, m_{ij} = \begin{cases} 1, v_i \text{ 是 } e_j \text{ 的起点} \\ 0, v_i \text{ 与 } e_j \text{ 不关联} \\ -1, v_i \text{ 是 } e_j \text{ 的终点} \end{cases}$$

, 其中 D 与 $M(D)$ 是相互唯一确定的。

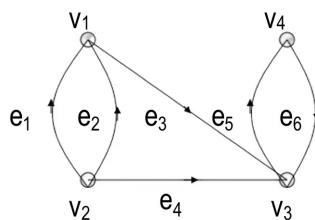
有向图关联矩阵的性质:

- 每列和为零: $\sum_{i=1}^n m_{ij} = 0$ (每条边关联两个顶点)
- 每行绝对值和为 $d(v_i)$: $d(v_i) = \sum_{j=1}^m m_{ij}$, 其中 1 的个数为 $d^+(v)$, -1 的个数为 $d^-(v)$
- 握手定理: $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m m_{ij} = 0$ (各顶点入度之和等于出度之和)
- 平行边: 相同两列

定义: (无向图关联矩阵) 设 $G = \langle V, E \rangle$ 是无环无向图, $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ 。关联矩阵 (incidence matrix):

$$M(G) = [m_{ij}]_{n \times m}, m_{ij} = \begin{cases} 1, v_i \text{ 与 } e_j \text{ 关联} \\ 0, v_i \text{ 与 } e_j \text{ 不关联} \end{cases}$$

例:

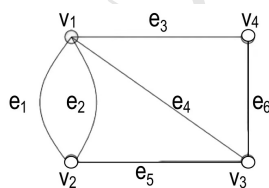


$$M(D) = \begin{matrix} & \begin{matrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

图 13.33: 有向图关联矩阵

, 其中 G 与 $M(G)$ 是相互唯一确定的。

例:



$$M(G) = \begin{matrix} & \begin{matrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

图 13.34: 无向图关联矩阵

无向图关联矩阵的性质:

- 每列和为 2: $\sum_{i=1}^n m_{ij} = 2$
- 每行和为 $d(v)$: $d(v_i) = \sum_{j=1}^m m_{ij}$
- 每行所有 1 对应的边组成的集合为 v_i 的关联集
- 平行边: 相同两列
- 伪对角阵: 若 G 有 k 个连通分支, 则 G 的关联矩阵 $M(G)$ 为伪对角阵

$$M(G) = \begin{matrix} & \begin{matrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad M(G) = \begin{bmatrix} M(G_1) & & \\ & M(G_2) & \\ & & \ddots \\ & & & M(G_k) \end{bmatrix}$$

图 13.35: 无向图的关联矩阵

定义: (无向图基本关联矩阵) 设 $G = \langle V, E \rangle$ 是无环无向图, $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$, 取任意 1 个顶点为参考点。基本关联矩阵 (fundamental incidence matrix) 是从 $M(G)$ 删除参考点对应的行, 记作 $M_f(G)$ 。

定理: n 阶无向连通图 G 的关联矩阵的秩 $r(M(G)) = n - 1$ 。

证明: 在关联矩阵中删掉一行, 依然可以复原原始矩阵, 因此 $r \leq n-1$, 下面证明 $r \geq n-1$ 。取 M 的前 $n-1$ 行, 记为 M_1, \dots, M_{n-1} , 他们是线性无关的, 否则必定存在不全为 0 的 $k_1, \dots, k_{n-1} \in \{0, 1\}$, 在模 2 加法意义下使得 $\sum_{i=1}^{n-1} k_i M_i = 0$, 不妨设其中 $k_1, \dots, k_s = 1$ 其余为 0, 此处 $s \neq 1$, 否则 v_1 为孤立点与连通矛盾; 此时 M 的子阵 $[M_1, \dots, M_s]^T$ 每列恰有两个 1 或者每列均为 0, 可以得到 G 至少有两个连通分支, 矛盾。 \square

- 推论 1: G 有 p 个连通分支, 则 $r(M(G)) = r(M_f(G)) = n - p$, 其中 $M_f(G)$ 是从 $M(G)$ 的每个对角块中删除任意 1 行而得到的
- 推论 2: G 连通 $\Leftrightarrow r(M(G)) = r(M_f(G)) = n - 1$

定理: 设 $M_f(G)$ 是 n 阶连通图 G 的一个基本关联矩阵。 M'_f 是 $M_f(G)$ 中任意 $n-1$ 列组成的方阵, 则 M'_f 各列所对应的边集 $\{e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_{n-1}}\}$ 的导出子图 $G[\{e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_{n-1}}\}]$ 是 G 的生成树当且仅当 M'_f 的行列式 $|M'_f| \neq 0$ 。

用关联矩阵求所有生成树:

- 忽略环, 求关联矩阵
- 任选参考点, 求基本关联矩阵
- 求所有 $n-1$ 阶子方阵, 计算行列式, 行列式非 0 的是生成树

13.8 邻接矩阵与相邻矩阵

定义:(有向图邻接矩阵) 设 $D = \langle V, E \rangle$ 是有向图, $V = v_1, v_2, \dots, v_n$ 。邻接矩阵 (*adjacencematrix*): $A(D) = [a_{ij}]_{n \times n}$, a_{ij} 是从 v_i 到 v_j 的边数。

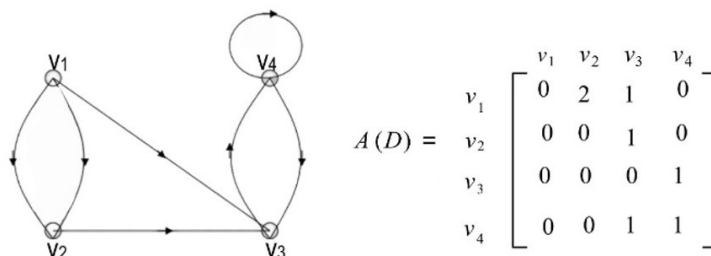


图 13.36: 有向图的邻接矩阵

有向图邻接矩阵的性质:

- 每行和为出度: $\sum_{j=1}^n a_{ij} = d^+(v_i)$
- 每列和为入度: $\sum_{i=1}^n a_{ij} = d^-(v_j)$
- 握手定理: $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} = \sum_{i=1}^n d^+(v_i) = \sum_{j=1}^n d^-(v_j)$
- 环个数: $\sum_{i=1}^n a_{ii}$

定理: 设 $A(D) = A = [a_{ij}]_{n \times n}$, $A^r = A^{r-1} \cdot A$, ($r \geq 2$), $A^r = [a_{ij}^{(r)}]_{n \times n}$, 则

- $a_{ij}^{(r)}$ = 从 v_i 到 v_j 长度为 r 的通路总数
- $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^{(r)}$ = 长度为 r 的通路总数
- $\sum_{i=1}^n a_{ii}^{(r)}$ = 长度为 r 的回路总数

推论: $B_r = A + A^2 + \dots + A^r = [b_{ij}^{(r)}]_{n \times n}$,

- $b_{ij}^{(r)}$ = 从 v_i 到 v_j 长度小于等于 r 的通路总数
- $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij}^{(r)}$ = 长度小于等于 r 的通路总数
- $\sum_{i=1}^n b_{ii}^{(r)}$ = 长度小于等于 r 的回路总数

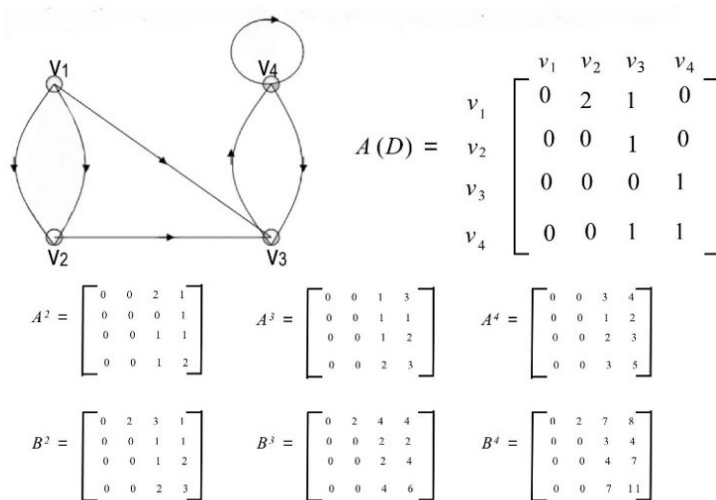


图 13.37: 邻接矩阵求通路数

例：用邻接矩阵求解通路数：

- v_2 到 v_4 长度为 3 和 4 的通路数 : 1, 2
- v_2 到 v_4 长度 ≤ 4 的通路数 : 4
- v_4 到 v_4 长度为 4 的回路数 : 5
- v_4 到 v_4 长度 ≤ 4 的回路数 : 11

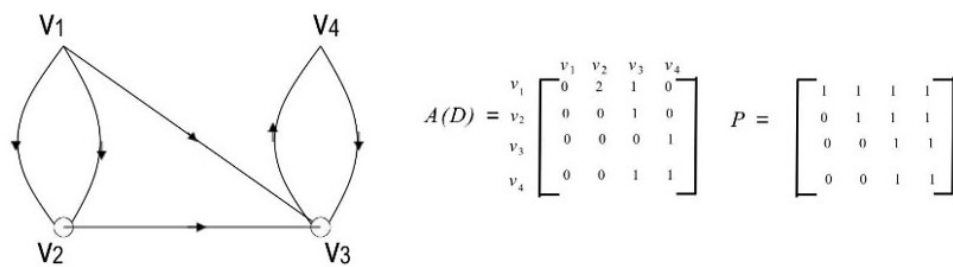
定义：(可达矩阵) 设 $D = \langle V, E \rangle$ 是 n 阶有向图, $V(D) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ 。可达矩阵: $P(D) = [p_{ij}]_{n \times n}$, $p_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{从 } v_i \text{ 可达 } v_j \\ 0, & \text{从 } v_i \text{ 不可达 } v_j \end{cases}$

可达矩阵的性质:

- 主对角线元素都是 1: $\forall v_i \in V$, 从 v_i 可达 v_i
- $\forall i \neq j, p_{ij} = 1 \Leftrightarrow b_{ij}^{(n-1)} > 0$

定义：(无向图相邻矩阵) 设 $G = \langle V, E \rangle$ 是无向简单图, $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ 。相邻矩阵 (adjacency matrix): $A(G) = [a_{ij}]_{n \times n}$, $a_{ii} = 0$, $a_{ij} = \begin{cases} 1, & v_i \text{ 与 } v_j \text{ 相邻}, i \neq j \\ 0, & v_i \text{ 与 } v_j \text{ 不相邻} \end{cases}$

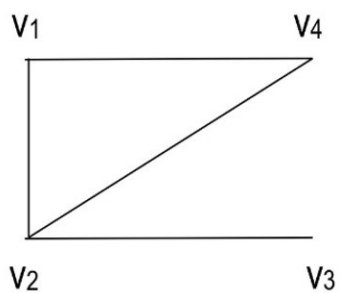
无向图相邻矩阵的性质:



$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad A^4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$B^2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad B^3 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 6 \end{bmatrix} \quad B^4 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 7 & 11 \end{bmatrix}$$

图 13.38: 可达矩阵



$$A(G) = \begin{matrix} & \begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

图 13.39: 无向图相邻矩阵

- $A(G)$ 对称: $a_{ij} = a_{ji}$
- 每行 (列) 和为顶点度: $\sum_{i=1}^n a_{ij} = d(v_j)$
- 握手定理: $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} = \sum_{i=1}^n d(v_i) = 2m$

定理: 设 $A(G) = A = [a_{ij}]_{n \times n}$, $A^r = A^{r-1} \cdot A$, ($r \geq 2$), $A^r = [a_{ij}^{(r)}]_{n \times n}$, $B_r = A + A^2 + \dots + A^r = [b_{ij}^{(r)}]_{n \times n}$, 则

- $a_{ij}^{(r)}$ = 从 v_i 到 v_j 长度为 r 的通路总数
- $\sum_{i=1}^n a_{ii}^{(r)}$ = 长度为 r 的回路总数

推论:

- $a_{ii}^{(2)} = d(v_i)$
- G 连通 \Rightarrow 距离 $d(v_i, v_j) = \min \{r | a_{ij}^{(r)} \neq 0\}$

例: 用相邻矩阵求通路数:

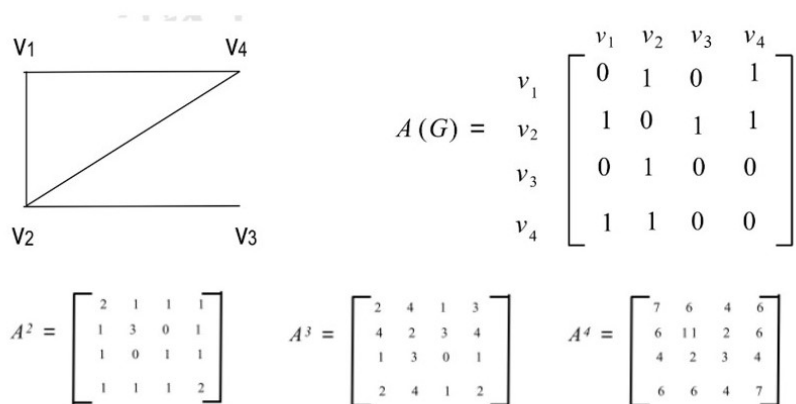


图 13.40: 用相邻矩阵求通路数

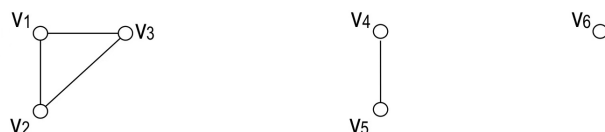
- v_1 到 v_2 长度为 4 的通路数: 6
14142, 14242, 14232, 12412, 14212, 12142

- v_1 到 v_3 长度为 4 的通路数: 4
12423, 12323, 14123, 12123
- v_1 到 v_1 长度为 4 的回路数: 7
14141, 14241, 14121, 12121, 12421, 12321, 12141

定义: (连通矩阵) 设 $G = \langle V, E \rangle$ 是 n 阶无向简单图, $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ 。连通矩阵: $P(G) = [p_{ij}]_{n \times n}$, $p_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{若 } v_i \text{ 与 } v_j \text{ 连通} \\ 0, & \text{若 } v_i \text{ 与 } v_j \text{ 不连通} \end{cases}$

连通矩阵的性质:

- 主对角线元素都是 1: $\forall v_i \in V, v_i$ 与 v_i 连通
- 连通图: 所有元素都是 1
- 伪对角阵: 对角块是连通分支的连通矩阵
- 设 $B_r = A + A^2 + \dots + A^r = [b_{ij}^{(r)}]_{n \times n}$, 则 $\forall i \neq j, p_{ij} = 1 \Leftrightarrow b_{ij}^{(n-1)} > 0$



$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

图 13.41: 连通矩阵

13.9 谱图理论

定义: 设 $G = \langle V, E \rangle$ 是无向简单图, $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, G 的度数矩阵: $D = [d_{ij}]_{n \times n}$, $d_{ij} = \begin{cases} d(i), & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$, 其中 $d_{n \times 1} = (d(i))_{1 \leq i \leq n} = \mathbf{A} \mathbf{1}_n$, \mathbf{A} 为 G 的相邻矩阵。拉普拉斯矩阵 $L = D - A$;

的二次型: $x^T Lx = \sum_{(a,b) \in E} (x_a - x_b)^2$ 。

证明: (拉普拉斯二次型)

$$x^T Ax = \sum_{u \in V} \sum_{v \in V} A_{uv} x_u x_v = \sum_{u \in V} \sum_{v \in N(u)} x_u x_v = 2 \sum_{(u,v) \in E} x_u x_v \quad (13.9.1)$$

$$x^T Dx = \sum_{u \in V} \sum_{v \in V} D_{uv} x_u x_v = \sum_{u \in V} d(u) x_u^2 \quad (13.9.2)$$

结合 (13.9.1) 和 (13.9.2), 有

$$\begin{aligned} x^T Ax &= \sum_{u \in V} d(u) x_u^2 - 2 \sum_{(u,v) \in E} x_u x_v \\ &= \sum_{(u,v) \in E} (x_u^2 + x_v^2 - 2x_u x_v) \\ &= \sum_{(u,v) \in E} (x_u - x_v)^2 \end{aligned} \quad (13.9.3)$$

定理: (谱定理) 若 M 为一个 $n \times n$ 的实对称矩阵, 则存在实数 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 和 n 个相互正交的单位向量 $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$, 其中对于任意 $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, 向量 ψ_i 为矩阵 M 的特征向量, 其对应的特征值为 λ_i i.e. $M\psi_i = \lambda_i \psi_i$ 。

定理: (拉普拉斯矩阵的性质) 对于简单无向图 $G = \langle V, E \rangle$, 其拉普拉斯矩阵 L 是半正定的。

证明: 取 x 为 L 的单位特征向量, 则有 $x^T Lx = x^T \lambda x = \lambda \Rightarrow \lambda = x^T Lx = \sum_{(a,b) \in E} (x_a - x_b)^2 \geq 0$ 故 L 半正定。

定理: L 的最小特征值 $\lambda_1 = 0$ 。

证明: 由于 $L1_n = (D - A)1_n = 0$, 知 0 为 L 的一个特征值, 再由 L 半正定知 $\lambda_1 = 0$ 。

定理: $0 = \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ 为图 $G = \langle V, E \rangle$ 的拉普拉斯矩阵 L 的特征值, 则 $\lambda_2 > 0$ 当且仅当图 G 是连通的。

证明: 若图 G 不连通, 则 G 可以写成两个不连通的子图 G_1, G_2 的并, $L = \begin{bmatrix} L_{G_1} & 0 \\ 0 & L_{G_2} \end{bmatrix}$, 取

$x_1 = \begin{bmatrix} 0_{G_1} \\ 1_{G_2} \end{bmatrix}, x_2 = \begin{bmatrix} 1_{G_1} \\ 0_{G_2} \end{bmatrix}, \Rightarrow Lx_1 = Lx_2 = 0$, 因此 L 关于特征值 0 至少有两个相互正交的特征向量 x_1, x_2 , 故 $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$

若 G 连通, 设 ψ 为 L 关于特征值 0 对应的特征向量, $L\psi = 0, \psi^T L\psi = \sum_{(a,b) \in E} (\psi_a - \psi_b)^2 = 0, \Rightarrow \forall (a,b) \in E, \psi_a = \psi_b$, 由于 G 连通, 知 $\psi = c1_n$, 因此 0 对应的特征空间维数为 $1, \Rightarrow \lambda_2 > \lambda_1 = 0$ 。

例: 完全图 K_n 的拉普拉斯矩阵存在特征值 0 和 n , 其中 n 对应的特征空间重数为 $n - 1$ 。

证明: 设 ψ 为任意与 1_n 正交的非零向量, *i.e.* $\sum_{i=1}^n \psi(i) = 0$, $L\psi(i) = \sum_{(i,j) \in E} (\psi_i - \psi_j) = \sum_{j \neq i} (\psi_i - \psi_j) = (n-1)\psi_i - \sum_{j \neq i} \psi_j = n\psi_i$ 由 i 的任意性, $L\psi = n\psi$, 因此全部与 1_n 正交的向量均为特征值 n 对应的特征向量, 重数为 $n-1$ 。

13.10 欧拉图

定义: 经过图中所有边一次且仅一次, 行遍所有顶点的通路称为**欧拉通路**。根据定义可知, 欧拉通路是经过所有边的简单通路并且是生成通路 (经过所有顶点的通路)。

定义: 经过图中所有边一次且仅一次, 行遍所有顶点的回路称为**欧拉回路**。欧拉回路是经过所有边的简单生成回路。

欧拉图: 有欧拉回路的图。

半欧拉图: 有欧拉通路但无欧拉回路的图。

规定: 平凡图为欧拉图。

定理: 设 G 是无向连通图, 则以下命题等价: (1) G 是欧拉图; (2) G 中所有顶点都是偶数度; (3) G 是若干个边不交的圈的并。

证明: (1) \Rightarrow (2): 设 G 是 n 阶、 m 条边的无向图, 若 G 是平凡图, 结论成立; 若 G 是非平凡图, 因为 G 是欧拉图, 所以存在欧拉回路, 设 C 为 G 中一条欧拉回路, $C = v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \cdots e_{m-1} v_{m-1} e_m v_0$, 对于任意 v , 在 C 中出现一次就获 2 度, 若总共 k 次经过顶点 v , 则 $d(v) = 2k$, 即 v 的度数为偶数。

(2) \Rightarrow (3): 对 G 的边数 m 应用数学归纳法。当 $m = 1$ 时, G 为一个环, 结论成立。由于 G 连通且无奇数顶点可知 G 中存在圈, 设 C 为 G 中一个圈, 令 $G' = G - E(C)$, 则 G' 有 s ($s \geq 1$) 个连通分支 G_1, \cdots, G_s (可能的连通分支为平凡图)

则 G_i 的边数 $m_i \leq k$, 且顶点的度仍为偶数, 由归纳假设知: $G_r = \bigcup_{i=1}^{d_r} C_{ri}, r = 1, 2, \dots, s$. 其中 $E(C_{ri}) \cap E(C_{rt}) = \emptyset, i, t = 1, 2, \dots, d_r, i \neq t, r = 1, 2, \dots, s$, 并且 $E(C_{ri}) \cap E(C_{tj}) = \emptyset, r, t = 1, 2, \dots, s, r \neq t, i = 1, 2, \dots, d_r, j = 1, 2, \dots, d_t$. 因此 $G = C \cup G' = C \cup \left(\bigcup_{t=1}^s \bigcup_{i=1}^{d_t} C_{ti} \right)$ 为边不重的圈的并。

(3) \Rightarrow (1): 对 G 中的圈的个数 d 应用数学归纳法。 $d = 1$ 时, $G = C_1$, 则 C_1 为 G 的欧拉回路, G 为欧拉图。

假如结论对 $d \leq k$ 成立, 考虑 $d = k+1$ 的情况, 设 $G'_1 = \bigcup_{i=1}^{k+1} C_i - E(C_{k+1})$ 并且设 G'_1 有 s 个连通分支 G_1, \cdots, G_s , 由于 G 为若干个边不重的圈的并, 可知 G_i 为若干个边不重的圈的并或为平

凡图, 由归纳假设知 G_i 为欧拉图, 设 \tilde{C}_i 为 G_i 中的欧拉回路, 由 G 的连通性知 C_{k+1} 与 \tilde{C}_i 均有公共顶点, 设 $v_{(k+1),i}$ 为 C_{k+1} 与 \tilde{C}_i 的一个公共顶点, 规定一种走法: 从 C_{k+1} 的某一顶点出发开始行遍, 当遇到 $v_{(k+1),i}$ 时, 先行遍 \tilde{C}_i , 再继续行遍, 最后回到原始出发点, 得到回路 C , 它经过 G 中每条边一次并且行遍 G 的所有顶点, 因此 C 为 G 中欧拉回路, 所以 G 为欧拉图。□

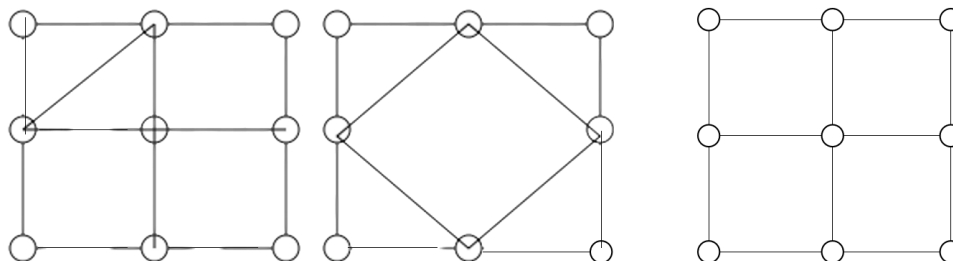


图 13.42: 欧拉图

定理: 设 G 是无向连通图, 则以下命题等价: G 是半欧拉图; G 中恰有 2 个奇度顶点。

证明: \Rightarrow 设 G 为半欧拉图, 存在欧拉通路 $C = v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \cdots e_{m-1} v_{m-1} e_m v_m$, 欧拉通路的起点和终点是奇数度, 其余顶点都是偶数度

\Leftarrow 在两个奇数度顶点之间加 1 条新边所有顶点都是偶数度, 得到欧拉回路。从欧拉回路上删除所加边后, 得到欧拉通路

例: 设 G 是恰有 $2k$ 个奇度顶点的连通图, 证明 G 中存在 k 条边不重的简单通路 $P_1 \cdots P_k$, 使得 $E(G) = \bigcup_{i=1}^k E(P_i)$

证明: 由归纳法:

- $k = 1$ 时, G 中恰好有两个奇度顶点, 可知 G 为半欧拉图, 其欧拉通路满足条件;
- 设 $k = r$ 时结论为真, $k = r+1$ 时, 设奇度顶点为 $v_1, v'_1, \dots, v_{r+1}, v'_{r+1}$, 在 G 中加边 (v_{r+1}, v'_{r+1}) 得 G' 为具有 $2r$ 个奇度顶点的图, 根据归纳假设存在 r 个边不重的简单通路使得 $E(G') = \bigcup_{i=1}^r E(P_i)$

同一简单通路最多含两个奇度顶点, 因此 P_1, \dots, P_r 各自含两个奇度顶点且为通路的始点和终点。又存在某个 P_i 含有新加边 (v_{r+1}, v'_{r+1}) , 则 $P_i - (v_{r+1}, v'_{r+1})$ 产生两条边不重的简单通路, 因此 $E(G)$ 由 $r+1$ 条边不重的简单通路组成。□