# AI 中的数学

## 第十二、十三、十四讲

方聪，概率统计部分参考章复熹和张原老师课件

2024 年秋季

条件期望的定义：设 $X$ 和 $Y$ 是两个随机变量。

(1) 若在 $Y=y$ 的条件下 $X$ 的可能值是 $x_1, x_2, \cdots$ （有限个或无穷可列个），条件概率分布是 $P(X=x_i|Y=y_i)(i=1,2,\cdots)$ 则称

$$\sum_i x_i P(X=x_i|Y=y)$$

为在 $Y=y$ 条件下 $X$ 的条件期望，记为 $E(X|Y=y)$。

(2) 若在 $Y=y$ 的条件下 $X$ 有条件分布密度 $p_{X|Y}(x|y)$，则称积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} x p_{X|Y}(x|y) dx$$

为在 $Y=y$ 的条件下 $X$ 的条件期望，记为 $E(X|Y=y)$。

给定 $y$ 求 $x$ 的条件期望是一个依赖于 $y$ 的随机变量

设二维随机向量 $(X, Y)$ 有联合密度 $p(x, y)$，有

$$E(X|Y=y) = \frac{1}{p_Y(y)} \int_{-\infty}^{\infty} xp(x, y)dx.$$

定理：设二维随机向量 $(X, Y)$ 有联合密度 $p(x, y)$，则

$$E(X) = \int_{\{y:p_Y(y)>0\}} E(X|Y=y)p_Y(y)dy.$$

定理：设二维随机向量 $(X,Y)$ 有联合密度 $p(x,y)$，则

$$E(X)=\int_{\{y:p_Y(y)>0\}}E(X|Y=y)p_Y(y)dy.$$

证明：首先，若 $p_Y(y)=0$，则对任何 $A>0$ 有

$$\left|\int_{-A}^{A}xp(x,y)dx\right|\leqslant A\int_{-A}^{A}p(x,y)dx\leqslant A\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dx=Ap_Y(y)=0,$$

于是

$$\int_{-\infty}^{+\infty}xp(x,y)dx=\lim_{A\to\infty}\int_{-A}^{A}xp(x,y)dx=0$$

可见

$$\int_{\{y:p_Y(y)>0\}}E(X|Y=y)p_Y(y)dy=\int_{\{y:p_Y(y)>0\}}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}xp(x,y)dx\right)dy$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}xp(x,y)dx\right)dy=\int_{-\infty}^{+\infty}x\left(\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dy\right)dx$$

定理：设 $(X,Y)$ 是二维随机向量，$Y$ 的可能值是 $y_1,y_2,\cdots$（有限个或可列无穷个），$P(Y=y_i)>0(i=1,2,\cdots)$，$X$ 的可能值是 $x_1,x_2,\cdots$（有限个或可列无穷个），且 $E(X)$ 存在，则

$$E(X)=\sum_i E(X|Y=y_i)P(Y=y_i).$$

证明：由于 $P(X=x_k,Y=y_i)=P(X=x_k|Y=y_i)P(Y=y_i)$，知

$$\begin{aligned}E(X)&=\sum_k x_kP(X=x_k)=\sum_k x_k\sum_i P(X=x_k,Y=y_i)\\&=\sum_k\sum_i x_kP(X=x_k|Y=y_i)P(Y=y_i)\\&=\sum_i E(X|Y=y_i)P(Y=y_i).\end{aligned}$$

例：设 $(X, Y)$ 的联合密度函数为

$$p(x,y) = \begin{cases} \dfrac{e^{-x/y}e^{-y}}{y}, & x, y \in (0, +\infty), \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

求 $E(X|Y=y)$。

例：设 $(X, Y)$ 的联合密度函数为

$$p(x,y) = \begin{cases} \dfrac{e^{-x/y}e^{-y}}{y}, & x, y \in (0, +\infty), \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

求 $E(X|Y=y)$。

解：对给定的 $y \in (0, +\infty)$，在 $Y=y$ 条件下 $X$ 的条件密度函数为

$$p(x|y) = \begin{cases} \frac{p(x,y)}{p_Y(y)} = \frac{\frac{1}{y}e^{-x/y}e^{-y}}{\int_0^{+\infty}\frac{1}{y}e^{-x/y}e^{-y}dx} = \frac{e^{-x/y}}{y} & x \in (0, +\infty), \\ 0, & x \notin (0, +\infty), \end{cases}$$

因此，$X$ 在给定 $Y=y$ 条件下的条件分布恰好是参数为 $\frac{1}{y}$ 的指数分布。从而

$$E(X|Y=y) = \int_0^{+\infty} \frac{xe^{-x/y}}{y}dx = y.$$

例：（对应郑书例 7.7）一矿工在有三个门的矿井中迷了路，第 1 个门通到一个通道，走 2 个小时可到达地面；第 2 个门通到另一个通道，走 3 个小时又回到原处；第 3 个门通到第 3 个通道，沿它走 5 个小时也回到原处，假定该矿工总是等可能从 3 个门选择任意一个进入通道，试问，该矿工到达地面平均需要多长时间。

例：（对应郑书例 7.7）一矿工在有三个门的矿井中迷了路，第 1 个门通到一个通道，走 2 个小时可到达地面；第 2 个门通到另一个通道，走 3 个小时又回到原处；第 3 个门通到第 3 个通道，沿它走 5 个小时也回到原处，假定该矿工总是等可能从 3 个门选择任意一个进入通道，试问，该矿工到达地面平均需要多长时间。

解：设矿工到达地面所需时间为 $X$，选择门的编号为 $Y$，则 $P(Y=1)=P(Y=2)=P(Y=3)=\frac{1}{3}$，于是

$$E(X)=\sum_{i=1}^{3}P(Y=i)E(X|Y=i)=\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3}E(X|Y=i).$$

易知，$E(X|Y=1)=2$，$E(X|Y=2)=E(X)+3$，$E(X|Y=3)=E(X)+5$，于是

$$E(X)=\frac{1}{3}(2+E(X)+3+E(X)+5)$$

推知 $E(X)=10$，即矿工到达地面平均要 10 小时。

- 定义 6.1. 设 $\xi=(X_1,\cdots,X_n)$ 是 $n$ 维向量, 称 $F(x_1,\cdots,x_n)=P(X_1\leqslant x_1,\cdots,X_n\leqslant x_n),\quad x_1,\cdots,x_n\in\mathbb{R}^n$
为 $\xi$ 的联合分布函数, 也记为 $F_\xi$ 或 $F_{X_1,\cdots,X_n}$.
- 定义 6.2. 若 $\xi$ 取有限个或可列个 “值” ( $n$ 维向量), 则称 $\xi$ 为离散型. (注: 当且仅当 $X,Y$ 都是离散型.)

- 定义 6.3. 若存在 $p(x_1, \cdots, x_n)$ 使得对任意 $n$ 维矩形 $D$ 都有
$$P(\xi \in D) = \int \cdots \int p(x_1, \cdots, x_n)\, dx_1 \cdots dx_n,$$
则称 $\xi$ 为连续型随机向量, 称 $p(x_1, \cdots, x_n)$ 为 $\xi$ 的联合密度, 也记为 $P_{X_1,\cdots,X_n}$.(注：上式对一般 D 都成立).
- 定义 6.4. 对任意 $1 \leqslant k < n, 1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n$, 则称 $(X_{i_1}, \cdots, X_{i_k})$ 为 $\xi$ 的 (一个 $k$ 维) 边缘, 其分布被称为 $\xi$ 的边缘分布.

例 6.1 (多项分布). 设 $U_1, \cdots, U_n$ 相互独立, 都服从如下分布:

$$P(U_i = k) = p_k, \quad k = 1, \cdots, t,$$

其中 $t \geqslant 2, p_k > 0, \forall k$ 且 $p_1 + \cdots + p_t = 1$.

- 背景模型: $n$ 次独立重复试验 (投郑一枚 $t$ 面股子). 记

$$X_k = |\{1 \leqslant i \leqslant n : U_i = k\}| = \sum_{i=1}^{n} 1_{\{U_i = k\}}.$$

- $\xi = (X_1, \cdots, X_t)$ 的联合分布列:

$$P(\xi = (i_1, \cdots, i_t)) = \frac{n!}{i_1! \cdots i_t!} p_1^{i_1} \cdots p_t^{i_t}.$$

- 因为 $X_t = n - \sum_{s=1}^{t-1} X_s$, 所以 $\xi$ 与 $(X_1, \cdots, X_{t-1})$ 等价.

例：口袋中有 5 个白球，8 个黑球，从中不放回的依次取出 3 个，若第 $i$ 次取出白球，则 $X_i=1$，否则令 $X_i=0$，$i=1,2,3$，求 $(X_1,X_2,X_3)$ 的联合分布列。

解：

$$P(X_1=0,X_2=0,X_3=0)=\frac{8\times7\times6}{13\times12\times11}=0.1958$$

$$P(X_1=1,X_2=0,X_3=0)=P(X_1=0,X_2=1,X_3=0)$$

$$=P(X_1=0,X_2=0,X_3=1)=\frac{8\times7\times5}{13\times12\times11}=0.1632$$

$$P(X_1=1,X_2=1,X_3=0)=P(X_1=0,X_2=1,X_3=1)$$

$$=P(X_1=1,X_2=0,X_3=1)=\frac{5\times4\times8}{13\times12\times11}=0.0932$$

$$P(X_1=1,X_2=1,X_3=1)=\frac{5\times4\times3}{13\times12\times11}=0.0.035$$

- 定义 6.5. 若对任意 $a_i < b_i, i = 1, \cdots, n$ 都有

$$
\begin{aligned}
& P\left(a_1 < X_1 < b_1, \cdots, a_n < X_n < b_n\right) \\
= & P\left(a_1 < X_1 < b_1\right) \cdots P\left(a_n < X_n < b_n\right)
\end{aligned}
$$

  则称 $X_1, \cdots, X_n$ 相互独立.
- 若 $X_1, \cdots, X_n$ 相互独立, 且 $F_{X_i} = F_{X_1}, i = 2, \cdots, n$, 则称 $X_1, \cdots, X_n$ 独立同分布.
- 若相互独立, 则上式中的 $a_i < X_i < b_i$ 可以改为 $X_i \in B_i$.

- 相互独立的充要条件与充分条件:

$$F_{X_1,\cdots,X_n}(x_1,\cdots,x_n)=F_{X_1}(x_1)\cdots F_{X_n}(x_n)=f_1(x_1)\cdots f_n(x_n).$$

- 离散型:

$$\begin{aligned}&P\left(X_1=x_{i_1}^{(1)},\cdots,X_n=x_{i_n}^{(n)}\right)\\=&P\left(X_1=x_{i_1}^{(1)}\right)\cdots P\left(X_n=x_{i_n}^{(n)}\right)=p_{i_1}^{(1)}\cdots p_{i_n}^{(n)}\end{aligned}$$

- 连续型 (定理 6.1):

$$p_{X_1,\cdots,X_n}(x_1,\cdots,x_n)=p_{X_1}(x_1)\cdots p_{X_n}(x_n)=p_1(x_1)\cdots p_n(x_n).$$

- 若 $X_i$ 与 $X_j$ 相互独立, $\forall i\neq j$, 则称 $X_1,\cdots,X_n$ 两两独立.
- 例. 甲、乙玩石头剪刀布. 甲出 $X$, 乙出 $Y$, 结局为 $Z$. 则 $X,Y,Z$ 两两独立, 但不相互独立.

例：设随机向量 $(X, Y, Z)$ 在矩形区域 $a < x < b, c < y < d, e < z < f$ 内服从均匀分布，求 $X, Y, Z$ 的分布密度函数，以及 $X, Y, Z$ 是否相互独立。

例：设随机向量 $(X,Y,Z)$ 在矩形区域 $a<x<b, c<y<d, e<z<f$ 内服从均匀分布，求 $X,Y,Z$ 的分布密度函数，以及 $X,Y,Z$ 是否相互独立。

解：由均匀分布定义

$$p(x,y,z)=\frac{1}{(b-a)(d-c)(f-e)} \quad a<x<b, c<y<d, e<z<f.$$

当 $x,y,z$ 所在边界矩形是独立的，且在矩形内时有：

$$p_X(x)=\int_e^f\int_c^d \frac{1}{(b-a)(d-c)(f-e)}dydz=\frac{1}{b-a}$$

$$p_Y(y)=\int_e^f\int_a^b \frac{1}{(b-a)(d-c)(f-e)}dxdz=\frac{1}{d-c}$$

$$p_Z(z)=\int_c^d\int_a^b \frac{1}{(b-a)(d-c)(f-e)}dxdy=\frac{1}{f-e}.$$

由于 $p(x,y,z)=p_X(x)p_Y(y)p_Z(z)$，因此 $X,Y,Z$ 之间相互独立。

定义：设 $\mathbf{X}=(X_1,\cdots,X_m)$ 和 $\mathbf{Y}=(Y_1,\cdots,Y_n)$ 分别是 $m$ 维和 $n$ 维随机向量，给定 $\mathbf{y}=(y_1,\cdots,y_n)$，若 $P(\mathbf{Y}=\mathbf{y})>0$，则 $x_1,\cdots,x_m$ 的函数

$$P(X_1\leqslant x_1,\cdots,X_m\leqslant x_m|\mathbf{Y}=\mathbf{y})$$

称为在 $\mathbf{Y}=\mathbf{y}$ 条件下 $\mathbf{X}$ 的条件分布函数，记为 $F_{\mathbf{X}|\mathbf{Y}}(x_1,\cdots,x_m|\mathbf{y})$.
若 $\mathbf{X}=(X_1,\cdots,X_m)$ 和 $\mathbf{Y}=(Y_1,\cdots,Y_n)$ 有联合密度 $p(x_1,\cdots x_m,y_1,\cdots,y_n)$，则

$$F_{\mathbf{X}|\mathbf{Y}}(x_1,\cdots,x_m|y_1,\cdots,y_n)=\int_{-\infty}^{x_1}\cdots\int_{-\infty}^{x_m}\frac{p(u_1,\cdots,u_m,y_1,\cdots,y_n)}{p_Y(y_1,\cdots,y_n)}du_1\cdots du_m,$$

这里 $p_Y(y_1,\cdots,y_n)$ 是 $\mathbf{Y}=(Y_1,\cdots,Y_n)$ 的联合密度，称这里的被积函数为在 $\mathbf{Y}=(y_1,\cdots,y_n)$ 条件下 $\mathbf{X}$ 的条件分布密度。

例：设 $X_1, X_2, X_3$ 为独立同分布的连续型随机变量，求 $P(X_3 < X_1 | X_1 = \min\{X_1, X_2\})$.

例：设 $X_1, X_2, X_3$ 为独立同分布的连续型随机变量，求 $P(X_3 < X_1 | X_1 = \min\{X_1, X_2\})$.

解：

$$
\begin{aligned}
& P(X_3 < X_1 | X_1 = \min\{X_1, X_2\}) \\
= & \frac{P(X_3 < X_1, X_1 = \min\{X_1, X_2\})}{P(X_1 = \min\{X_1, X_2\})} \\
= & \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{x_3}^{+\infty} \int_{x_1}^{+\infty} p(x_2)dx_2 p(x_1)dx_1 p(x_3)dx_3}{\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{x_1}^{+\infty} p(x_2)dx_2 p(x_1)dx_1} \\
= & \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{x_3}^{+\infty} (1 - F(x_1))dF(x_1)dF(x_3)}{\int_{-\infty}^{+\infty} (1 - F(x_1))dF(x_1)} \\
= & \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} - F(x_3) + \frac{1}{2}F^2(x_3)dF(x_3)}{1/2} = \frac{1/6}{1/2} = \frac{1}{3}.
\end{aligned}
$$

## 2. $n$ 维随机向量 $\xi=(X_1,\cdots,X_n)$ 的数字特征

- 定义 6.6. 称 $(EX_1,\cdots,EX_n)$ 为 $\xi$ 的期望, 记为 $E\xi$.
- 定义 6.7. 记 $\sigma_{ij}=\operatorname{cov}(X_i,X_j)$, $\rho_{ij}=\frac{\sigma_{ij}}{\sqrt{\sigma_{ii}\sigma_{jj}}}$. 称 $\mathbf{\Sigma}=(\sigma_{ij})_{n\times n}$, $\mathbf{R}=(\rho_{ij})_{n\times n}$ 为 $\xi$ 的协方差阵, 相关系数阵.
- 定义 6.8. $n$ 维正态分布. 假设 $\xi$ 有如下的联合密度, 则称 $\xi$ 服从 $n$ 维正态分布, 记为 $\xi\sim N(\vec{\mu},\mathbf{\Sigma})$.

$$p(\vec{x})=\frac{1}{\sqrt{2\pi}^n\sqrt{|\mathbf{\Sigma}|}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(\vec{x}-\vec{\mu})\mathbf{\Sigma}^{-1}(\vec{x}-\vec{\mu})^\top\right\}.$$

- $n=1$ 与 $n=2$ 的特例已介绍.
- $N(\vec{\mu},\mathbf{\Sigma})$ 的数字特征: $\mu_i=EX_i,\sigma_{ij}=\operatorname{cov}(X_i,X_j)$.
- $X_1,\cdots,X_n$ 相互独立当且仅当 $\sigma_{ij}=0,\forall i\neq j$.
- 边缘分布, 条件分布都是正态.

例：设随机变量 $X_1, X_2, X_3$ 满足

$$aX_1 + bX_2 + cX_3 = 0,$$

$$E(X_1) = E(X_2) = E(X_3) = d,$$

$$\mathrm{var}(X_1) = \mathrm{var}(X_2) = \mathrm{var}(X_3) = \sigma^2.$$

求相关系数 $\rho_{12}, \rho_{23}, \rho_{31}$.

例：设随机变量 $X_1, X_2, X_3$ 满足

$$aX_1 + bX_2 + cX_3 = 0,$$

$$E(X_1) = E(X_2) = E(X_3) = d,$$

$$\mathrm{var}(X_1) = \mathrm{var}(X_2) = \mathrm{var}(X_3) = \sigma^2.$$

求相关系数 $\rho_{12}, \rho_{23}, \rho_{31}$.

解：对等式 $aX_1 + bX_2 = -cX_3$ 两侧求方差得
$a^2\sigma^2 + b^2\sigma^2 + 2ab\sigma^2\rho_{12} = c^2\sigma^2$，由此解得

$$\rho_{12} = \frac{c^2 - a^2 - b^2}{2ab},$$

同理，对等式 $aX_1 + cX_3 = -bX_2$ 两侧求方差得

$$\rho_{13} = \frac{b^2 - a^2 - c^2}{2ac},$$

同理，对等式 $bX_2 + cX_3 = -aX_1$ 两侧求方差得

$$\rho_{23} = \frac{a^2 - b^2 - c^2}{2bc}.$$

特别的，当 $d \neq 0$ 时，有 $(a+b+c)d = 0$，因此 $a+b+c=0$，由此可得

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2ab, \quad b^2 = a^2 + c^2 + 2ac, \quad a^2 = b^2 + c^2 + 2bc,$$

代入 $\rho_{12}, \rho_{23}, \rho_{31}$ 表达式得 $\rho_{12} = \rho_{23} = \rho_{31} = 1$。

# 3. $n$ 个随机变量的函数 $Y=f(X_1,\cdots,X_n)$

- 定理 6.2 (分布函数法):

$$F_Y(y)=P(f(\xi)\leqslant y)=\int_{f(x_1,\cdots,x_n)\leqslant y}\cdots\int_1 p(x_1,\cdots,x_n)\,dx_1\cdots dx_n$$

- 定理 6.3.

$$EY=\int\cdots\int f(x_1,\cdots,x_n)\,p(x_1,\cdots,x_n)\,dx_1\cdots dx_n.$$

例 6.3, 6.4, 定义 6.9. 若 $X$ 与 $Y$ 独立, $X \sim \Gamma(r, \lambda)$, $Y \sim \Gamma(s, \lambda)$. 则

$$X + Y \sim \Gamma(r + s, \lambda).$$

- 密度: $p_X(x) = \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)} x^{r-1} e^{-\lambda x}, \quad x > 0.$
- $Z = X + Y : p_Z(z) = \int p_X(x) p_Y(z - x) dx. \forall z > 0,$

$$p_Z(z) = C \int_0^z x^{r-1} e^{-\lambda x} \cdot (z - x)^{s-1} e^{-\lambda(z-x)} dx$$

$$= C e^{-\lambda z} \int_0^1 (tz)^{r-1} ((1 - t)z)^{s-1} d(tz) = \hat{C} z^{r+s-1} e^{-\lambda z}.$$

例：（$\chi^2$ 分布）假设 $X_1, \cdots, X_n$ 独立同分布，都服从 $N(0,1)$. 于是，$Y_n := X_1^2 + \cdots + X_n^2 \sim \Gamma\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right)$，密度为

$$p_n(x) = \frac{1}{2^{n/2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} x^{n/2-1} e^{-x/2}, \quad x > 0.$$

其中

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$$

例：（$\chi^2$ 分布）假设 $X_1, \cdots, X_n$ 独立同分布，都服从 $N(0,1)$. 于是，$Y_n := X_1^2 + \cdots + X_n^2 \sim \Gamma\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right)$，密度为

$$p_n(x) = \frac{1}{2^{n/2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} x^{n/2-1} e^{-x/2}, \quad x > 0.$$

其中

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$$

利用数学归纳法，已经证明（郑书例 5.2）$Y_1 = X_1^2$ 的分布密度是

$$p_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x^{-1/2} e^{-x/2}, \quad x > 0.$$

$X_i^2 \sim \Gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.
于是，$y_n := X_1^2 + \cdots + X_n^2 \sim \Gamma\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right)$

例：假设 $X_1, \cdots, X_n$ 独立同分布，都服从参数为 $\lambda$ 的指数分布，则 $Y_n := \sum_{i=1}^n X_i \quad (n \geqslant 1)$ 的分布密度是

$$p_n(x) = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-\lambda x}, \quad (x > 0).$$

例：假设 $X_1, \cdots, X_n$ 独立同分布，都服从参数为 $\lambda$ 的指数分布，则 $Y_n := \sum_{i=1}^n X_i \quad (n \geqslant 1)$ 的分布密度是

$$p_n(x) = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-\lambda x}, \quad (x > 0).$$

利用数学归纳法假设 $X_1, \cdots, X_n$ 独立同分布，都服从
$\mathrm{Exp}(\lambda) = \Gamma(1, \lambda)$.
于是，$T_n := X_1 + \cdots + X_n \sim \Gamma(n, \lambda)$.

例 6.6. $N$ 件产品中有 $D$ 件次品. 随机抽 $n$ 件, 包含 $X$ 件次品. 求 $EX$ 与 $\mathrm{var}(X)$. (其中, $N \geqslant n \geqslant 2$ ).

- 随机数目的分解: $X = X_1 + \cdots + X_n$, 其中

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{若第} i \text{ 件是次品;} \\ 0, & \text{若第} i \text{ 件是合格品.} \end{cases}$$

- 由期望的线性、伯努利分布的期望,

$$EX = \sum_{i=1}^{n} EX_i = \sum_{i=1}^{n} P(\text{ 第} i \text{ 件是次品}) = n\frac{D}{N}.$$

- $\mathrm{var}(X) = EX^2 - (EX)^2$. 根据对称性,

$$EX^2 = \sum_{i=1}^{n} EX_i^2 + \sum_{i \neq j} EX_i X_j = nEX_1^2 + n(n-1)EX_1X_2$$

- 由乘法公式,

$$EX_1X_2 = P(\text{ 前两件都是次品}) = \frac{D}{N} \cdot \frac{D-1}{N-1}.$$

- 因此,

$$\begin{aligned}\mathrm{var}(X) &= n\frac{D}{N} + n(n-1)\frac{D}{N} \cdot \frac{D-1}{N-1} - \left(n\frac{D}{N}\right)^2 \\ &= \frac{n(N-n)D(N-D)}{N^2(N-1)}\end{aligned}$$

例：随机向量 $\mathbf{X} = (X_i)_{n\times 1}$，$E(\mathbf{X}) = \mu$，$\mathrm{var}(\mathbf{X}) = \mathbf{\Sigma}$，矩阵 $\mathbf{A}_{n\times n}$，证明：$E(\mathbf{X}^\top \mathbf{A}\mathbf{X}) = \mathrm{tr}(\mathbf{A}\mathbf{\Sigma}) + \mu^\top \mathbf{A}\mu$.

例：随机向量 $\mathbf{X}=(X_i)_{n\times 1}$，$E(\mathbf{X})=\mu$，$\mathrm{var}(\mathbf{X})=\mathbf{\Sigma}$，矩阵 $\mathbf{A}_{n\times n}$，证明：$E(\mathbf{X}^\top\mathbf{A}\mathbf{X})=\mathrm{tr}(\mathbf{A}\mathbf{\Sigma})+\mu^\top\mathbf{A}\mu$.

证明：

$$
\begin{aligned}
E(\mathbf{X}^\top\mathbf{A}\mathbf{X}) &= E(\mathrm{tr}(\mathbf{X}^\top\mathbf{A}\mathbf{X})) = E(\mathrm{tr}(\mathbf{A}\mathbf{X}\mathbf{X}^\top)) \\
&= \mathrm{tr}(E(\mathbf{A}\mathbf{X}\mathbf{X}^\top)) = \mathrm{tr}(\mathbf{A}E(\mathbf{X}\mathbf{X}^\top)) \\
&= \mathrm{tr}(\mathbf{A}(\mathrm{var}(\mathbf{X})+\mu\mu^\top)) = \mathrm{tr}(\mathbf{A}\mathbf{\Sigma})+\mathrm{tr}(\mathbf{A}\mu\mu^\top) \\
&= \mathrm{tr}(\mathbf{A}\mathbf{\Sigma})+\mu^\top\mathbf{A}\mu.
\end{aligned}
$$

定理：设 $\xi = (X_1, \cdots, X_n)$ 的协方差阵为 $\mathbf{\Sigma}$, 且

$$Y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j, j = 1, \cdots, m.$$

记 $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m \times n}$，$\eta = (Y_1, \cdots, Y_m)$，则

$$(E(\eta))^\top = \mathbf{A}(E(\xi))^\top,$$

$$\operatorname{cov}(\eta, \eta) = \mathbf{A\Sigma A}^\top.$$

定理：设 $\xi=(X_1,\cdots,X_n)$ 的协方差阵为 $\mathbf{\Sigma}$, 且

$$Y_i=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}X_j, j=1,\cdots,m.$$

记 $\mathbf{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，$\eta=(Y_1,\cdots,Y_m)$，则

$$(E(\eta))^\top=\mathbf{A}(E(\xi))^\top,$$

$$\operatorname{cov}(\eta,\eta)=\mathbf{A\Sigma A}^\top.$$

证明：由于 $E(Y_i)=\sum_{j=1}^n a_{ij}E(X_j)$，故 $(E(\eta))^\top=\mathbf{A}(E(\xi))^\top$ 成立，又由于 $Y_i-E(Y_i)=\sum_{j=1}^n a_{ij}(X_j-E(X_j))$，知

$$(Y_i-E(Y_i))(Y_k-E(Y_k))=\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}a_{ij}a_{kl}(X_j-E(X_j))(X_l-E(X_l)).$$

于是

$$\begin{aligned}\mathrm{cov}(Y_i, Y_k) &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} a_{ij}a_{kl}E(X_j - E(X_j))(X_l - E(X_l)) \\ &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} a_{ij}a_{kl}\sigma_{jl},\end{aligned}$$

这里 $\sigma_{jl} = \mathrm{cov}(X_j, X_l)$.
由于 $\mathbf{\Sigma} = (\sigma_{jl})_{n\times n}$，知 $\mathrm{cov}(\eta, \eta) = \mathbf{A\Sigma A}^\top$ 成立。

## $n$ 个随机变量的多个函数

- 定理 6.4. 设 $\xi = (X_1, \cdots, X_n)$ 为连续型,

$$f: A \to G, \quad (x_1, \cdots, x_n) \mapsto (y_1, \cdots, y_n)$$

一对一, $C^1$ 且 $J = \dfrac{\partial(y_1, \cdots, y_n)}{\partial(x_1, \cdots, x_n)} \neq 0$. 则 $\eta = (Y_1, \cdots, Y_n)$ 是连续型, 且

$$p_\eta(y_1, \cdots, y_n) = p_\xi(x_1, \cdots, x_n)\left|J^{-1}\right|, (y_1, \cdots, y_n) \in G.$$

次序统计量：设 $n$ 个随机变量 $X_1, \cdots, X_n$ ，将它们从小到大排列：

$$X_{(1)} \leqslant X_{(2)} \leqslant \cdots \leqslant X_{(n)},$$

称 $X_{(k)}$ 为第 $k$ 个次序统计量.

次序统计量：设 $n$ 个随机变量 $X_1,\cdots,X_n$ ，将它们从小到大排列:

$$X_{(1)} \leqslant X_{(2)} \leqslant \cdots \leqslant X_{(n)},$$

称 $X_{(k)}$ 为第 $k$ 个次序统计量.

例：设 $X_1,\cdots,X_n$ 独立同分布，都服从 $U(0,1)$. 已知对于 $\forall 0<x<1$,

$$P\left(X_{(k)} \leqslant x\right)=\sum_{i=k}^{n} \frac{n!}{i!(n-i)!} x^{i}(1-x)^{n-i}.$$

求 $E(X_{(k)})$ 与 $\operatorname{var}\left(X_{(k)}\right)$.

- $\forall 0 < x < 1$,

$$P\left(X_{(k)} \leqslant x\right) = \sum_{i=k}^{n} \frac{n!}{i!(n-i)!} x^i (1-x)^{n-i}.$$

- $k \leqslant i \leqslant n-1$, 上式单项的导数是

$$\begin{aligned}
&= \frac{n!}{i!(n-i)!}\left(ix^{i-1}(1-x)^{n-i} - x^i(n-i)(1-x)^{n-i-1}\right) \\
&= \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!}x^{i-1}(1-x)^{n-i} - \frac{n!}{i!(n-i-1)!}x^i(1-x)^{n-i-1} \\
&= a_{i-1} - a_i,
\end{aligned}$$

- $i = n$ 时, $(x^n)' = a_{n-1}$, 于是, $\forall 0 < x < 1$,

$$p_{X_{(k)}}(x) = \sum_{i=k}^{n-1}(a_{i-1} - a_i) + a_{n-1} = a_{k-1}.$$

- 已有 $q_k(x) := p_{X_{(k)}}(x) = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}x^{k-1}(1-x)^{n-k}$.
- $\forall \ell, m \geqslant 1$,

$$\int_0^1 x^\ell (1-x)^m dx = \frac{1}{\ell+1}\int_0^1 (1-x)^m dx^{\ell+1}$$
$$= -\frac{1}{\ell+1}\int_0^1 x^{\ell+1} d(1-x)^m = \frac{m}{\ell+1}\int_0^1 x^{\ell+1}(1-x)^{m-1}dx$$
$$= \cdots = \frac{m!}{(\ell+1)\cdots(\ell+m)}\int_0^1 x^{\ell+m}dx = \frac{\ell! m!}{(\ell+m+1)!}$$

- 期望：取 $\ell = k, m = n-k$，知

$$EX_{(k)} = \int_0^1 x q_k(x) dx = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\int_0^1 x^k (1-x)^{n-k} dx$$
$$= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\cdot\frac{k!(n-k)!}{(n+1)!} = \frac{k}{n+1}.$$

- 已有 $q_k(x) := p_{X_{(k)}}(x) = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} x^{k-1}(1-x)^{n-k}$.

$$\int_0^1 x^\ell (1-x)^m dx = \frac{\ell! m!}{(\ell+m+1)!}.$$

- 二阶矩：取 $\ell = k+1, m = n-k$,

$$EX_{(k)}^2 = \int_0^1 x^2 q_k(x) dx = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \int_0^1 x^{k+1}(1-x)^{n-k} dx$$
$$= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \cdot \frac{(k+1)!(n-k)!}{(n+2)!} = \frac{k(k+1)}{(n+1)(n+2)}.$$

- 方差：

$$\operatorname{var}\left(X_{(k)}\right) = EX_{(k)}^2 - \left(EX_{(k)}\right)^2 = \frac{k(k+1)}{(n+1)(n+2)} - \frac{k^2}{(n+1)^2}$$
$$= \frac{k^2(n+1) + k(n+1) - k^2(n+2)}{(n+1)^2(n+2)} = \frac{k(n+1-k)}{(n+1)^2(n+2)}.$$

$n$ 维正态分布：假设 $n$ 维随机向量 $\xi$ 有如下的联合密度，则称 $\xi$ 服从 $n$ 维正态分布，记为 $\xi \sim N(\mu, \mathbf{\Sigma})$.

$$p(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n \sqrt{|\mathbf{\Sigma}|}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mu)^\top \mathbf{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x}-\mu)\right\}.$$

定理 **8.1**：设 $(X_1,\cdots,X_n)^\top \sim N(\mu,\mathbf{\Sigma})$，$\mathbf{A}=(a_{ij})_{n\times n}$，$|\mathbf{A}|\neq 0$，$Y_i=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}X_j(i=1,\cdots,n)$，则

$$(Y_1,\cdots,Y_n)^\top \sim N(\mathbf{A}\mu,\mathbf{A}\mathbf{\Sigma}\mathbf{A}^\top). \tag{1}$$

定理 **8.1**：设 $(X_1,\cdots,X_n)^\top \sim N(\mu,\mathbf{\Sigma})$，$\mathbf{A}=(a_{ij})_{n\times n}$，$|\mathbf{A}|\neq 0$，$Y_i=\sum_{j=1}^n a_{ij}X_j(i=1,\cdots,n)$，则

$$(Y_1,\cdots,Y_n)^\top \sim N(\mathbf{A}\mu,\mathbf{A}\mathbf{\Sigma}\mathbf{A}^\top). \tag{1}$$

证明：设 $\mathbf{y}=(y_1,\cdots,y_n)^\top$，$\mathbf{x}=(x_1,\cdots,x_n)^\top$，对于任意 $n$ 维矩形 $D$，记

$$D^*=\{\mathbf{x}=(x_1,\cdots,x_n)^\top:\mathbf{A}\mathbf{x}\in D\},$$

则

$$P((Y_1,\cdots,Y_n)^\top\in D)=P((X_1,\cdots,X_n)^\top\in D^*)$$
$$=\iint_{D^*}\frac{1}{\sqrt{2\pi}^n\sqrt{|\mathbf{\Sigma}|}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mu)^\top\mathbf{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x}-\mu)\right\}d\mathbf{x}$$

做变量替换 $\mathbf{x}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{y}$，雅可比行列式为

$$\frac{\partial(x_1,\cdots,x_n)}{\partial(y_1,\cdots,y_n)}=|A^{-1}|=|A|^{-1}$$

于是

$$
\begin{aligned}
& P((Y_1, \cdots, Y_n)^\top \in D) \\
=& \int \cdots \int_D \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n \sqrt{|\mathbf{\Sigma}|}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{y} - \mu)^\top \mathbf{\Sigma}^{-1}(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{y} - \mu)\right\} ||A||^{-1} d\mathbf{y} \\
=& \int \cdots \int_D \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n \sqrt{|\mathbf{A}\mathbf{\Sigma}\mathbf{A}^\top|}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{y} - \mathbf{A}\mu)^\top (\mathbf{A}\mathbf{\Sigma}\mathbf{A}^\top)^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{A}\mu)\right\} d\mathbf{y}
\end{aligned}
$$

这表明 $(Y_1, \cdots, Y_n)^\top \sim N(\mathbf{A}\mu, \mathbf{A}\mathbf{\Sigma}\mathbf{A}^\top)$.

推论：若 $\xi$ 服从 $n$ 元正态分布 $N(\mu, \boldsymbol{\Sigma})$，则存在一个正交变换 $\mathbf{U}$，使得 $\eta = \mathbf{U}\xi$ 是一个具有独立正态分布分量的随机向量，它的数学期望为 $\mathbf{U}\mu$，方差分量是 $\boldsymbol{\Sigma}$ 的特征值。

推论：若 $\xi$ 服从 $n$ 元正态分布 $N(\mu, \mathbf{\Sigma})$，则存在一个正交变换 $\mathbf{U}$，使得 $\eta = \mathbf{U}\xi$ 是一个具有独立正态分布分量的随机向量，它的数学期望为 $\mathbf{U}\mu$，方差分量是 $\mathbf{\Sigma}$ 的特征值。

证明：对实对称矩阵 $\mathbf{\Sigma}$，存在正交矩阵 $\mathbf{U}$，使得 $\mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{U}^\top = \mathbf{D}$，其中 $\mathbf{D}$ 为对角矩阵，对角元是 $\mathbf{\Sigma}$ 的特征值，若 $\mathbf{\Sigma}$ 的秩为 $r$，则有 $r$ 个特征值不为零。

推论：正交变换下，多维标准正态变量保持其独立性，同方差性不变。

推论：正交变换下，多维标准正态变量保持其独立性，同方差性不变。

证明：设 $\mathbf{X}=(X_1,\cdots,X_n)^\top$ 服从 $n$ 元正态分布，且 $X_i$ 相互独立有相同的方差 $\sigma^2$，则协方差矩阵 $D(\mathbf{X})=\sigma^2\mathbf{I}$, 若 $\mathbf{U}$ 是正交阵，$\mathbf{Y}=\mathbf{U}\mathbf{X}$，由定理 8.1 知 $\mathbf{Y}$ 服从正态分布，协方差为

$$\mathbf{U}\sigma^2\mathbf{I}\mathbf{U}^\top=\sigma^2\mathbf{I}$$

因此 $\eta$ 仍然是相互独立且具有相同方差。

推论：若 $\xi \sim N(\mu, \mathbf{\Sigma})$，其中 $\mathbf{\Sigma}$ 是 $n$ 阶正定阵，则

$$(\xi - \mu)^\top \mathbf{\Sigma}^{-1} (\xi - \mu) \sim \chi_n^2$$

推论：若 $\xi \sim N(\mu, \mathbf{\Sigma})$，其中 $\mathbf{\Sigma}$ 是 $n$ 阶正定阵，则

$$(\xi - \mu)^\top \mathbf{\Sigma}^{-1}(\xi - \mu) \sim \chi_n^2$$

证明：设正定阵 $\mathbf{\Sigma} = \mathbf{L}\mathbf{L}^\top$，则

$$(\xi - \mu)^\top \mathbf{\Sigma}^{-1}(\xi - \mu) = (\xi - \mu)^\top (\mathbf{L}\mathbf{L}^\top)^{-1}(\xi - \mu)$$

$$= [\mathbf{L}^{-1}(\xi - \mu)]^\top [\mathbf{L}^{-1}(\xi - \mu)] = \eta^\top \eta$$

其中 $\eta = \mathbf{L}^{-1}(\xi - \mu)$，由定理 8.1 知它是均值为 $\mathbf{0}$ 的 $n$ 维正态变量，协方差矩阵为

$$\mathbf{L}^{-1}\mathbf{\Sigma}(\mathbf{L}^{-1})^\top = \mathbf{I}$$

从而 $\eta$ 的各个分量是相互独立的标准状态变量，因此

$$\eta^\top \eta = \chi_1^2 + \cdots + \chi_1^2 \sim \chi_n^2.$$

定理 **8.2**：设 $(X_1,\cdots,X_m,X_{m+1},\cdots,X_n)^\top \sim N(\mu,\boldsymbol{\Sigma})(1 \leqslant m < n)$，且

$$\mu = \begin{bmatrix} \mu^{(1)} \\ \mu^{(2)} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}^{(1)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\Sigma}^{(2)} \end{bmatrix},$$

其中 $\mu^{(1)}$ 是 $m$ 维列向量，$\mu^{(2)}$ 是 $n-m$ 维列向量，$\boldsymbol{\Sigma}^{(1)}$ 是 $m$ 阶矩阵，$\boldsymbol{\Sigma}^{(2)}$ 是 $n-m$ 阶矩阵，则

$$\mathbf{X}^{(1)} = (X_1,\cdots,X_m)^\top \sim N(\mu^{(1)},\boldsymbol{\Sigma}^{(1)}),$$

$$\mathbf{X}^{(2)} = (X_{m+1},\cdots,X_n)^\top \sim N(\mu^{(2)},\boldsymbol{\Sigma}^{(2)}).$$

证明：记 $\mathbf{x}^{(1)} = (x_1, \cdots, x_m)^\top$，$\mathbf{x}^{(2)} = (x_{m+1}, \cdots, x_n)^\top$，易知 $(X_1, \cdots, X_m, X_{m+1}, \cdots, X_n)^\top$ 的联合密度为

$$
\begin{aligned}
& p(x_1, \cdots, x_m, x_{m+1}, \cdots, x_n) \\
=& \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n \sqrt{|\boldsymbol{\Sigma}^{(1)}|}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}^{(1)} - \mu^{(1)})^\top (\boldsymbol{\Sigma}^{(1)})^{-1} (\mathbf{x}^{(1)} - \mu^{(1)})\right\} \\
& \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n \sqrt{|\boldsymbol{\Sigma}^{(2)}|}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}^{(2)} - \mu^{(2)})^\top (\boldsymbol{\Sigma}^{(2)})^{-1} (\mathbf{x}^{(2)} - \mu^{(2)})\right\}.
\end{aligned}
$$

这表明 $(X_1, \cdots, X_m)^\top \sim N(\mu^{(1)}, \boldsymbol{\Sigma}^{(1)})$，$(X_{m+1}, \cdots, X_n)^\top \sim N(\mu^{(2)}, \boldsymbol{\Sigma}^{(2)})$。

定理 **8.3**：$(X_1, \cdots, X_m, \cdots, X_n)^\top \sim N(\mu, \mathbf{\Sigma})(1 \leqslant m < n)$，则

$$(X_1, \cdots, X_m) \sim N(\mu^{(1)}, \mathbf{\Sigma}_{11})$$

其中

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Sigma}_{11} & \mathbf{\Sigma}_{12} \\ \mathbf{\Sigma}_{21} & \mathbf{\Sigma}_{22} \end{bmatrix}, \quad \mu = \begin{bmatrix} \mu^{(1)} \\ \mu^{(2)} \end{bmatrix}.$$

证明：令

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_m & \mathbf{0} \\ -\mathbf{\Sigma}_{21}\mathbf{\Sigma}_{11}^{-1} & \mathbf{I}_{n-m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} = \mathbf{B} \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix}$$

则由式1知

$$(Y_1, \cdots, Y_n)^\top \sim N(\mathbf{B}\mu, \mathbf{B\Sigma B}^\top).$$

易知

$$\mathbf{B}\mu = \mathbf{B}\begin{bmatrix} \mu^{(1)} \\ \mu^{(2)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{B}^\top = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\Sigma}_{22} - \boldsymbol{\Sigma}_{21}\boldsymbol{\Sigma}_{11}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{12} \end{bmatrix}.$$

根据定理知

$$(X_1, \cdots, X_m) \sim N(\mu^{(1)}, \boldsymbol{\Sigma}_{11}).$$

定理 **8.4**：设 $(X_1, \cdots, X_n)^\top \sim N(\mu, \mathbf{\Sigma})$，$\mathbf{A}$ 是 $m \times n$ 的矩阵且 $\mathbf{A}$ 的秩等于 $m$，$(Y_1, \cdots, Y_m)^\top = \mathbf{A}(X_1, \cdots, X_m)^\top$，则

$$(Y_1, \cdots, Y_m)^\top \sim N(\mathbf{A}\mu, \mathbf{A\Sigma A}^\top).$$

定理 **8.4**：设 $(X_1, \cdots, X_n)^\top \sim N(\mu, \boldsymbol{\Sigma})$，$\mathbf{A}$ 是 $m \times n$ 的矩阵且 $\mathbf{A}$ 的秩等于 $m$，$(Y_1, \cdots, Y_m)^\top = \mathbf{A}(X_1, \cdots, X_m)^\top$，则

$$(Y_1, \cdots, Y_m)^\top \sim N(\mathbf{A}\mu, \mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A}^\top).$$

证明：若 $m = n$，则结论与式1相同；若 $m < n$，则在 $\mathbf{A}$ 下方添加 $n - m$ 行使得到的矩阵

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{C} \end{bmatrix}$$

非奇异，令

$$(Z_1, \cdots Z_n)^\top = \mathbf{B}(X_1, \cdots, X_n)^\top.$$

则有

$$(Z_1, \cdots Z_n)^\top \sim N(\mathbf{B}\mu, \mathbf{B}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{B}^\top).$$

注意到

$$\mathbf{B}\mu = \begin{bmatrix} \mathbf{A}\mu \\ \mathbf{C}\mu \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B\Sigma B}^\top = \begin{bmatrix} \mathbf{A\Sigma A}^\top & \mathbf{A\Sigma C}^\top \\ \mathbf{C\Sigma A}^\top & \mathbf{C\Sigma C}^\top \end{bmatrix},$$

$$(Z_1, \cdots Z_m)^\top = (Y_1, \cdots Y_m)^\top.$$

得到证明。

定理 **8.5**：设 $(X_1, \cdots, X_n)^\top \sim N(\mu, \mathbf{\Sigma})$，则有

(1) $E(\mathbf{X}) \triangleq (E(X_1), \cdots, E(X_n))^\top = \mu$;

(2) $\mathrm{cov}(\mathbf{X}, \mathbf{X}) = \mathbf{\Sigma}$.

**定理 8.5**：设 $(X_1,\cdots,X_n)^\top \sim N(\mu,\mathbf{\Sigma})$，则有
(1) $E(\mathbf{X}) \triangleq (E(X_1),\cdots,E(X_n))^\top = \mu$;
(2) $\mathrm{cov}(\mathbf{X},\mathbf{X}) = \mathbf{\Sigma}$.

证明：先考虑 $\mathbf{\Sigma}=\mathbf{I}$ 的情形，此时 $X_1,\cdots,X_n$ 独立同分布，且 $X_i \sim N(\mu_i,1)$，于是

$$(E(X_1),\cdots,E(X_n))^\top = \mu, \quad \mathrm{cov}(\mathbf{X},\mathbf{X}) = \mathbf{I},$$

故 $\mathbf{\Sigma}=\mathbf{I}$ 时定理成立。
现考虑一般情形，设 $\mathbf{\Sigma}$ 是任何 $n$ 阶正定矩阵，存在方阵 $\mathbf{A}$，使得 $\mathbf{A\Sigma A}=\mathbf{I}$，令 $\mathbf{Y}=\mathbf{AX}$，由定理 8.1 知 $\mathbf{Y}\sim N(\mathbf{A}\mu,\mathbf{A\Sigma A})$，即

$$Y \sim N(\mathbf{A}\mu,\mathbf{I}),$$

因此

$$E(\mathbf{Y}) = \mathbf{A}\mu, \quad \mathrm{cov}(\mathbf{Y},\mathbf{Y}) = \mathbf{I}.$$

由于 $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{Y}$，利用期望的线性性质得到

$$E(\mathbf{X}) = \mathbf{A}^{-1}E(\mathbf{Y}) = \mu,$$

$$\operatorname{cov}(\mathbf{X}, \mathbf{X}) = \mathbf{A}^{-1}\operatorname{cov}(\mathbf{Y}, \mathbf{Y})(\mathbf{A}^{-1})^{\top} = \mathbf{\Sigma}.$$

例：若 $\xi \sim N(0, I_d)$，试证明 $\frac{\xi}{||\xi||}(\xi \neq 0)$ 为 $||x||_2 = 1$ 上的均匀分布。

例：若 $\xi \sim N(0, I_d)$，试证明 $\frac{\xi}{||\xi||}(\xi \neq 0)$ 为 $||x||_2 = 1$ 上的均匀分布。

证明：只需说明 $\forall ||x||_2 = 1$，$R^\top R = I_d$，有 $p_{\frac{\xi}{||\xi||}}(x) = p_{\frac{\xi}{||\xi||}}(Rx)$.
由于概率密度函数 $p_{\frac{\xi}{||\xi||}}(Rx)$ 等价于 $\frac{\xi}{||\xi||}$ 经过线性变换 $R^\top$ 后，得到的变量 $Z = \frac{R^\top \xi}{||\xi||}$ 的概率密度函数，

$$p_{\frac{\xi}{||\xi||}}(Rx) = p_{\frac{R^\top \xi}{||\xi||}}(x),$$

注意到 $||R^\top \xi|| = ||\xi||$，故

$$p_{\frac{\xi}{||\xi||}}(Rx) = p_{\frac{R^\top \xi}{||R^\top \xi||}}(x)$$

由定理 8.1 有 $R^\top \xi \sim N(0, I_d)$, 因此

$$p_{\frac{\xi}{||\xi||}}(Rx) = p_{\frac{R^\top \xi}{||R^\top \xi||}}(x) = p_{\frac{\xi}{||\xi||}}(x).$$

例：若 $\xi_1$，$\xi_2$ 是相互独立的随机变量，均服从标准正态分布，而

$$\eta_1 = a\xi_1 + b\xi_2, \quad \eta_2 = c\xi_1 + d\xi_2,$$

则由于

$$E(\eta_1) = 0, \quad D(\eta_1) = a^2 D(\xi_1) + b^2 D(\xi_2) = a^2 + b^2$$

$$E(\eta_2) = 0, \quad D(\eta_2) = c^2 D(\xi_1) + d^2 D(\xi_2) = c^2 + d^2$$

$$\operatorname{cov}(\eta_1, \eta_2) = ac + bd, \quad \rho_{\eta_1,\eta_2} = \frac{ac+bd}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2}}$$

因此 $\eta_1 \sim N(0, a^2+b^2)$，$\eta_2 \sim N(0, c^2+d^2)$，且

$$(\eta_1, \eta_2) \sim N(0, 0, a^2+b^2, c^2+d^2, \frac{ac+bd}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2}})$$

当 $ac + bd = 0$ 时，$\rho_{\eta_1,\eta_2} = 0$，$\eta_1$ 与 $\eta_2$ 独立。
当 $\rho_{\eta_1,\eta_2} = \pm 1$，即 $(ac+bd)^2 = (a^2+b^2)(c^2+d^2)$ 时，$(\eta_1, \eta_2)(\eta_1, \eta_2)$ 退化为一个点。退化为一维分布，而当 $a = b = c = d = 0$ 时，$(\eta_1, \eta_2)$ 退化为一个点。

条件分布：若 $\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$ 服从 $n$ 元正态分布 $N(\mu, \boldsymbol{\Sigma})$，$E(\xi_1) = \mu_1$，$E(\xi_2) = \mu_2$，$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{11} & \boldsymbol{\Sigma}_{12} \\ \boldsymbol{\Sigma}_{21} & \boldsymbol{\Sigma}_{22} \end{bmatrix}$，则在给定 $\xi_1 = x_1$ 下，$\xi_2$ 的分布仍然为正态分布，条件数学期望

$$\mu_{2|1} = E(\xi_2|\xi_1 = x_1) = \mu_2 + \boldsymbol{\Sigma}_{21}\boldsymbol{\Sigma}_{11}^{-1}(x_1 - \mu_1)$$

条件方差

$$\boldsymbol{\Sigma}_{22|1} = \boldsymbol{\Sigma}_{22} - \boldsymbol{\Sigma}_{21}\boldsymbol{\Sigma}_{11}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{12}$$

这里 $E(\xi_2|\xi_1 = x_1)$ 称为 $\xi_2$ 关于 $\xi_1$ 的回归，注意到它是 $x_1$ 的线性函数。又有条件方差与 $x_1$ 无关。

考虑

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{11} & \boldsymbol{\Sigma}_{12} \\ \boldsymbol{\Sigma}_{21} & \boldsymbol{\Sigma}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} \\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} \end{bmatrix} = \boldsymbol{I}.$$

其中，$\boldsymbol{\Sigma}_{12} = \boldsymbol{\Sigma}_{21}^{\top}$ 和 $\boldsymbol{A}_{12} = \boldsymbol{A}_{21}^{\top}$。则有

$$\boldsymbol{\Sigma}_{11}\boldsymbol{A}_{12} + \boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{A}_{22} = \mathbf{0}.$$

则 $\boldsymbol{A}_{22}^{-1}\boldsymbol{A}_{12}^{\top} = -\boldsymbol{\Sigma}_{12}^{\top}\boldsymbol{\Sigma}_{11}^{-1}$. 所以 $\boldsymbol{A}_{22}^{-1}\boldsymbol{A}_{21} = -\boldsymbol{\Sigma}_{21}\boldsymbol{\Sigma}_{11}^{-1}$. 另外有

$$\boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{A}_{12} + \boldsymbol{\Sigma}_{22}\boldsymbol{A}_{22} = \boldsymbol{I}.$$

则有

$$(\boldsymbol{\Sigma}_{22} - \boldsymbol{\Sigma}_{21}\boldsymbol{\Sigma}_{11}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{12})\boldsymbol{A}_{22} = \boldsymbol{I}.$$

而配方有

$$\begin{aligned} &(x_2-\mu_2)^{\top}\boldsymbol{A}_{22}(x_2-\mu_2)^{\top} + 2(x_2-\mu_2)^{\top}\boldsymbol{A}_{21}(x_1-\mu_1) \\ =& \left[x_2-\mu_2+\boldsymbol{A}_{22}^{-1}\boldsymbol{A}_{21}(x_1-\mu_1)\right]^{\top}\boldsymbol{A}_{22}\left[x_2-\mu_2+\boldsymbol{A}_{22}^{-1}\boldsymbol{A}_{21}(x_1-\mu_1)\right] \\ &+ f(x_1). \end{aligned}$$

例：二元场合，若 $(\xi_1,\xi_2)^\top$ 服从正态分布 $N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$，则

$$\mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{bmatrix}.$$

在给定 $\xi_1 = x_1$ 条件下，$\xi_2$ 的条件分布还是正态分布而且其条件期望由定理可以推知

$$E(\xi_2|\xi_1 = x_1) = \mu_2 \rho \frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x_1 - \mu_1)$$

条件方差可以推知为

$$\sigma_2^2 - \frac{(\rho\sigma_1\sigma_2)^2}{\sigma_1^2} = \sigma_2^2(1-\rho^2).$$