§12.1.1 2π周期函数的Fourier级数

最简单的2π周期函数为$\cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cdots, \cos nx, \sin nx, \cdots$, 或记为 $\{\cos nx, \sin nx\}_{n=1}^{\infty}$。

将函数列增加为 $1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cdots, \cos nx, \sin nx, \cdots$,即$\{1, \cos nx, \sin nx\}_{n=1}^{\infty}$,
称$\{1, \cos nx, \sin nx\}_{n=1}^{\infty}$ 为一个三角函数系.

重要的性质, $\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \,\mathrm{d}x = 0$, $\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \,\mathrm{d}x = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$;

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx \,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx \,\mathrm{d}x = \begin{cases} \pi, & m = n, \\ 0, & m \neq n, \end{cases} \quad \forall n, m \in \mathbb{N};$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx \,\mathrm{d}x = 0, \quad \forall n, m \in \mathbb{N}.$$

定义12.1.1. 形如$\sum_{k=0}^{n}(a_k \sin^k x + b_k \cos^k x)$ 的函数称为n阶（2π 周期的）三角多项式.

称形如$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$的函数项级数为三角级数，其中$a_n$，$b_n \in \mathbb{R}$，$n \in \mathbb{N}$.

n阶三角多项式的本意是$T_n(x) = \tilde{a}_0 + \sum_{k=1}^{n}\left[\tilde{a}_k \cos kx + \tilde{b}_k \sin kx\right]$。之所以也称$\sum_{k=0}^{n}(a_k \sin^k x + b_k \cos^k x)$为$n$阶三角多项式, 是因为, 据Euler公式,

$$\cos^k x = \frac{1}{2^k}\sum_{j=0}^{k} C_k^j \cos(2j-k)x, \quad \sin^{2m} x = \frac{(-1)^m}{2^{2m}}\sum_{j=0}^{2m} C_{2m}^j (-1)^j \cos(2j-2m)x, \quad \sin^{2m+1} x = \frac{(-1)^m}{2^{2m+1}}\sum_{j=0}^{2m+1} C_{2m+1}^j (-1)^{j+1} \sin(2j-2m-1)x.$$

定义12.1.2. 设$f(x)$为2π周期且$f(x)\in R[-\pi,\pi]$或$\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|\,\mathrm{d}x$ 作为瑕积分收敛，

则按照上述*Euler-Fourier* 公式可得一列数$\{a_0,a_n,b_n\}_{n=1}^{\infty}$，

$$\begin{cases} a_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x, & n=0,1,2,\cdots \\ b_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x, & n=1,2,3,\cdots. \end{cases} \tag{12.1.1}$$

称为函数$f(x)$所对应的Fourier系数，

由此而得的三角级数称为$f(x)$所对应的Fourier级数，

记为 $f(x)\sim \dfrac{a_0}{2}+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$.

注12.1.1.

(1) 我们暂时不讨论$f(x)$是否等于$\dfrac{a_0}{2}+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$. 后有详述.

(2) $\dfrac{a_0}{2}$ 实质上就是函数 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的平均值，即 $\dfrac{a_0}{2}=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,\mathrm{d}x$.

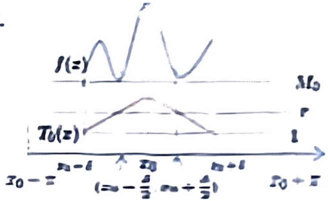
(3) *Euler-Fourier*公式显示：

$$|a_n|\leqslant\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|\,\mathrm{d}x,\quad |b_n|\leqslant\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|\,\mathrm{d}x,\ n=1,2,3,\cdots. \tag{12.1.2}$$

事实上，还可以证明，在一定条件下 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$ (*Riemann-Lebeigue* 引理).

(4) 由于改变函数的有限点的值不改变其积分，所以，可以有许多不同的函数对应相同的Fourier系数和Fourier级数. 也就是说，即使两个函数对应的Fourier系数全相同，也不能保证这两个函数相同. 但在一定条件下，可以得到相关的结论.

定理12.1.1. 设$f(x)\in C(\mathbb{R})$，$f(x)=f(x+2\pi)$，$x\in\mathbb{R}$，$f(x)$ 的Fourier系数全为0. 则$f(x)\equiv 0$，$x\in\mathbb{R}$.



证明. 由于$f(x)$是周期函数，所以只须证明$f(x)\equiv 0$，$x\in[-\pi,\pi]$.

由于$f(x)$的Fourier系数全为0，所以对于任何2π周期的三角多项式$T(x)$，均有$\boxed{\int_{-\pi}^{\pi} f(x)T(x)\,\mathrm{d}x=0.}$

反设$f(x)\not\equiv 0$，$x\in[-\pi,\pi]$，则由连续性，$\exists x_0\in(-\pi,\pi]$ s.t. $f(x_0)\neq 0$.

不妨设$f(x_0)>0$，则$\exists\delta\in(0,\frac{\pi}{2})$ s.t. $f(x)>\frac{f(x_0)}{2}=M_0>0$，$x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 并记$M=\max\limits_{[-\pi,\pi]}|f(x)|$.

现在取定一个特殊的三角多项式 $T_0(x)=1+\cos(x-x_0)-\cos\delta=1+\cos x\cos x_0+\sin x\sin x_0-\cos\delta$.

则有 $T_0(x)\geqslant 1$，$x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$； $|T_0(x)|\leqslant 1$，$x\in[x_0-\pi,x_0+\pi]\backslash(x_0-\delta,x_0+\delta)$； $T_0(x)\geqslant 1+\cos\frac{\delta}{2}-\cos\delta=r>1$，$x\in(x_0-\frac{\delta}{2},x_0+\frac{\delta}{2})$

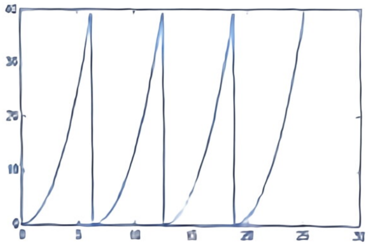
对于任意的$n\in\mathbb{N}$，$T_0^n(x)$ 仍然是三角多项式，因此
$$\int_{x_0-\pi}^{x_0+\pi} f(x)T_0^n(x)\,\mathrm{d}x=\int_{-\pi}^{\pi} f(x)T_0^n(x)\,\mathrm{d}x=0,\quad \forall n\in\mathbb{N}. \tag{12.1.3}$$

同时，
$$\int_{x_0-\pi}^{x_0+\pi} f(x)T_0^n(x)\,\mathrm{d}x=\int_{x_0-\pi}^{x_0-\delta} f(x)T_0^n(x)\,\mathrm{d}x+\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)T_0^n(x)\,\mathrm{d}x+\int_{x_0+\delta}^{x_0+\pi} f(x)T_0^n(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$\left|\int_{x_0-\pi}^{x_0-\delta} f(x)T_0^n(x)\,\mathrm{d}x+\int_{x_0+\delta}^{x_0+\pi} f(x)T_0^n(x)\,\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_{x_0-\pi}^{x_0-\delta}|f(x)||T_0^n(x)|\,\mathrm{d}x+\int_{x_0+\delta}^{x_0+\pi}|f(x)||T_0^n(x)|\,\mathrm{d}x\leqslant M(\pi-\delta)+M(\pi-\delta)<2\pi M,$$

$$\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)T_0^n(x)\,\mathrm{d}x\geqslant\int_{x_0-\frac{\delta}{2}}^{x_0+\frac{\delta}{2}} f(x)T_0^n(x)\,\mathrm{d}x\geqslant M_0r^n\delta\ \to\ +\infty,\quad(n\to+\infty).$$
这与(12.1.3)式矛盾. 所以反设不真. □

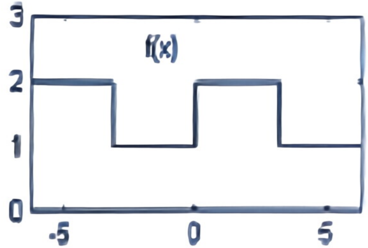
例12.1.3. 求2π周期函数 $f(x)=x^2$, $x\in[0,2\pi)$ 的Fourier级数。



解. 如图.
$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x^2\,\mathrm{d}x=\frac{8\pi^2}{3},$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x^2\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{4}{n^2},\qquad b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x^2\sin nx\,\mathrm{d}x=-\frac{4\pi}{n},\quad n=1,2,3,\cdots,$$

$$f(x)\sim\frac{4\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}-4\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n},\quad x\in\mathbb{R}.\quad\square$$



例12.1.4. 函数 $f(x)$ 是 $(-\infty,\infty)$ 上的 2π 周期函数, 其函数表达式为: $f(x)=\begin{cases}E_1, & x\in[-\pi,0),\\ E_2, & x\in[0,\pi).\end{cases}$

其对应的Fourier级数为 $f(x)\sim\dfrac{E_1+E_2}{2}+\dfrac{2(E_2-E_1)}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}.,\quad x\in\mathbb{R}.$

§12.1.2 2ℓ周期函数的Fourier 级数

如果函数是2ℓ周期的，即$f(x)=f(x+2\ell)$，则它是2π周期函数的横向伸缩.

在变换$t=\dfrac{2x}{2\ell}\pi=\dfrac{\pi x}{\ell}$下，函数$f(x)$变成为$g(t)=f(\dfrac{\ell}{\pi}t)$， 此时$g(t)$是$2\pi$ 周期的，按Fourier系数公式有:

$$a_n=\frac{\ell}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(t)\cos nt\,\mathrm{d}t,\ n=0,1,2,\cdots;$$

$$b_n=\frac{\ell}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(t)\sin nt\,\mathrm{d}t,\ n=1,2,3,\cdots;$$

$$g(t)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nt+b_n\sin nt),\quad t\in\mathbb{R}.$$

将t代换回x，有:

$$a_n=\frac{\ell}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(\frac{\ell}{\pi}t\right)\cos nt\,\mathrm{d}t\ \overset{\frac{\ell}{\pi}t=x}{\underset{t=\frac{\pi}{\ell}x}{=\!=\!=}}\ \frac{\ell}{\pi}\int_{-\ell}^{\ell}f(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}\,\mathrm{d}\frac{\pi}{\ell}x=\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}\,\mathrm{d}x,\ n=0,1,2,\cdots.$$

$$b_n=\frac{\ell}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\frac{\ell}{\pi}t)\sin nt\,\mathrm{d}t=\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}\,\mathrm{d}x,\quad n=1,2,3,\cdots.$$

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\frac{n\pi x}{\ell}+b_n\sin\frac{n\pi x}{\ell}),\quad x\in\mathbb{R}.$$

事实上，$\left\{1,\cos\dfrac{n\pi x}{\ell},\sin\dfrac{n\pi x}{\ell}\right\}_{n=1}^{\infty}$是$2\ell$周期函数的正交三角函数系，并且$2\pi$ 周期函数只是这里的一个特例.

奇延拓, 令 $\tilde{f}(x)=\begin{cases} f(x), & x\in(0,\ell],\\ 0, & x=0,\\ -f(-x), & x\in[-\ell,0). \end{cases}$ 此时, $\begin{cases} a_n=0,\ n=0,1,2,\cdots,\\ b_n=\dfrac{1}{\ell}\displaystyle\int_{-\ell}^{\ell}\tilde{f}(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}f(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}\,\mathrm{d}x, \quad n=1,2,3,\cdots, \end{cases}$

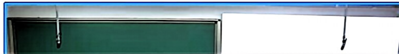
$$\tilde{f}(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{\ell},\quad x\in[-\ell,\ell]. \qquad f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{\ell},\quad x\in[0,\ell].$$

定义12.1.3. 对定义于$[0,\ell]$上的函数$f(x)$, 作$b_n=\dfrac{2}{\ell}\displaystyle\int_0^{\ell}f(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}\,\mathrm{d}x,\quad n=1,2,3,\cdots$

所得的级数$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{\ell}$称为$f(x)$对应的正弦(Fourier) 级数.

偶延拓, 令 $\tilde{f}(x)=\begin{cases} f(x), & x\in[0,\ell],\\ f(-x), & x\in[-\ell,0]. \end{cases}$ 此时, $\begin{cases} b_n=0,\ n=1,2,3,\cdots,\\ a_n=\dfrac{1}{\ell}\displaystyle\int_{-\ell}^{\ell}\tilde{f}(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}f(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}\,\mathrm{d}x, \quad n=0,1,2,3,\cdots, \end{cases}$

$$\tilde{f}(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{\ell},\quad x\in[-\ell,\ell]. \qquad f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{\ell},\quad x\in[0,\ell].$$



注12.1.3. *(1)*在具体求函数的正、余弦级数时，不必要总是写出延拓过程，只须按上述过程写出*Fourier* 系数即可.

$$b_n = \frac{2}{\ell}\int_0^\ell f(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}\,\mathrm{d}x,\quad n=1,2,3,\cdots \qquad f(x)\sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin\frac{n\pi x}{\ell},\quad x\in[0,\ell].$$

$$a_n = \frac{2}{\ell}\int_0^\ell f(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}\,\mathrm{d}x,\quad n=0,1,2,3,\cdots \qquad f(x)\sim \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\frac{n\pi x}{\ell},\quad x\in[0,\ell].$$

*(2)*由于延拓方法的不同将导致同一函数在$[0,\ell]$上对应的*Fourier*级数不同，这是正常的. 后面的收敛定理会证明，所有这些不同的级数在同一个点的值是相同的.

*(3)*如果函数$f(x)$是定义在区间$[a,b]$上的，则可以作一个横向平移变换，即令$t = x - \dfrac{a+b}{2}$，将其变为在$[-\dfrac{a+b}{2}, \dfrac{a+b}{2}]$ 上的函数， 也可移作$[0,(b-a)]$上的函数，然后求其*Fourier*级数.

例12.1.10. 求定义在 $[0,1]$ 上的函数 $f(x)=x+1$ 的余弦级数和正弦级数.

解.
$$f(x)\ \sim\ \frac{3}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{4}\frac{\cos(2n-1)\pi x}{(2n-1)^2},\quad x\in[0,1];$$

$$f(x)\ \sim\ \frac{2}{\pi}\sum\frac{1-2(-1)^n}{(2n-1)^2}\sin n\pi x,\quad x\in[0,1].$$

□

命题12.1.1. 如果2ℓ周期函数$f(x)$对应Fourier级数为$\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\dfrac{n\pi x}{\ell}+b_n\sin\dfrac{n\pi x}{\ell}\right)$，

则对任意$a\in\mathbb{R}$，$f(x)+a$对应的Fourier级数为$a+\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\dfrac{n\pi x}{\ell}+b_n\sin\dfrac{n\pi x}{\ell}\right)$. 此谓上下平移。

证明. $\dfrac{1}{\ell}\displaystyle\int_{-\ell}^{\ell}[a+f(x)]\cos\dfrac{n\pi x}{\ell}\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f(x)\cos\dfrac{n\pi x}{\ell}\,\mathrm{d}x=a_n,\quad n=1,2,\cdots;$

$$\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}[a+f(x)]\sin\frac{n\pi x}{\ell}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}\,\mathrm{d}x=b_n,\quad n=1,2,\cdots;$$

$$\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}[a+f(x)]\,\mathrm{d}x=2a+a_0.\qquad\Rightarrow\quad a+f(x)\sim a+\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{\ell}+b_n\sin\frac{n\pi x}{\ell}\right).\ \square$$

命题12.1.2. 如果$f(x)$对应Fourier级数为$\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\dfrac{n\pi x}{\ell}+b_n\sin\dfrac{n\pi x}{\ell}\right)$，

则对任意$x_0\in\mathbb{R}$，$f(x-x_0)$ 对应的Fourier级数为 $\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\dfrac{n\pi(x-x_0)}{\ell}+b_n\sin\dfrac{n\pi(x-x_0)}{\ell}\right)$

$$=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(a_n\cos\frac{n\pi x_0}{\ell}-b_n\sin\frac{n\pi x_0}{\ell}\right)\cos\frac{n\pi x}{\ell}+\left(a_n\sin\frac{n\pi x_0}{\ell}+b_n\cos\frac{n\pi x_0}{\ell}\right)\sin\frac{n\pi x}{\ell}\right].$$ 此谓左右平移.

引理12.2.1.【*Riemann-Lebesgue*引理】设$f(x)$在$[a,b]$上Riemann可积或广义绝对可积，

$$\text{则} \lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(x)\sin\lambda x\,\mathrm{d}x = \lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(x)\cos\lambda x\,\mathrm{d}x = 0.$$

证明. (1) $f(x)\in R[a,b]$情况. 已在定理7.5.11证明过.

> 定理7.5.11. 设$f(x)\in R[a,b]$, $g(x)=g(x+T)$, $x\in\mathbb{R}$; $g(x)\in R[0,T]$, 且$\int_0^T g(x)\,\mathrm{d}x=0$. 则$\lim_{p\to+\infty}\int_a^b f(x)g(px)\,\mathrm{d}x=0$.

(2) $f(x)$在$[a,b]$有一个瑕点的情况易证. 不妨设$x=a$为瑕点（如果瑕点在区间中间则分开区间讨论）.

$\forall\varepsilon>0$,

$$\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x\text{收敛} \;\Rightarrow\; \exists\delta>0 \text{ s.t. } \int_a^{a+\delta}|f(x)|\,\mathrm{d}x<\frac{\varepsilon}{2};$$

$$f(x)\in R[a+\delta,b] \;\Rightarrow\; \lim_{\lambda\to+\infty}\int_{a+\delta}^b f(x)\sin\lambda x\,\mathrm{d}x=0, \quad \therefore \exists\Lambda>0 \text{ s.t. } \left|\int_{a+\delta}^b f(x)\sin\lambda x\,\mathrm{d}x\right|<\frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall\lambda>\Lambda;$$

$$\text{从而}, \left|\int_a^b f(x)\sin\lambda x\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^{a+\delta}|f(x)|\,\mathrm{d}x + \left|\int_{a+\delta}^b f(x)\sin\lambda x\,\mathrm{d}x\right| < \varepsilon, \quad \forall\lambda>\Lambda.$$

(3) $f(x)$在$[a,b]$有有限个瑕点的情况, 累计可证. □