注8.1.1. 正如注**对*Riemann*积分所说的情况类似，在计算广义积分时，如果被积函数分为几个部分的代数和，而各个原函数部分的极限都存在，则可以各个部分分别求极限，理论依据是"和差的极限等于极限的和差".

但是如果原函数有些部分极限不存在时，不能判定原积分是否发散， 要整个原函数极限不存在时，才能断定原积分发散！

例8.1.5. $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x(x-1)}=\int_2^{+\infty}(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x})\,\mathrm{d}x$

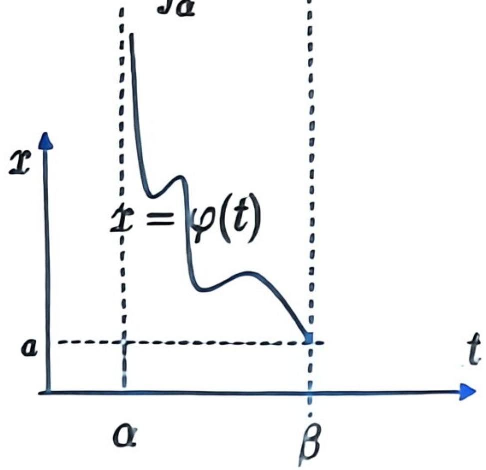
$$=\Big[\ln(x-1)-\ln x\Big]\Big|_2^{+\infty}=\ln\frac{x-1}{x}\Big|_2^{+\infty}=\ln 1-\ln\frac{1}{2}=\ln 2.$$

定理8.1.1. 设$\varphi(t)$在$[\alpha,\beta)$（β可以是$+\infty$）上连续可微，严格单调递增并且满足$a=\varphi(\alpha)\leqslant\varphi(t)\leqslant\lim\limits_{t\to\beta-0}\varphi(t)=+\infty$，则 $\int_a^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$ 与 $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$ 同敛散性，且收敛时

$$\int_a^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x\xlongequal{x=\varphi(t)}\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

定理8.1.2. 设 $f(x)$ 于 $[a,+\infty)$ 上有定义，且 $f(x)\in R[a,b]$，$\forall b>a$. 又设 $\varphi(t)$ 在 $[\alpha,\beta)$（β 可以为 $+\infty$）上连续可微且$\varphi(t)\in[a,+\infty)$，$\varphi(\alpha)=a$，$\lim\limits_{t\to\beta-}\varphi(t)=+\infty$，则 $\int_a^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$ 与 $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$ 同敛散性，且收敛时 $\int_a^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x\xlongequal{x=\varphi(t)}\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$

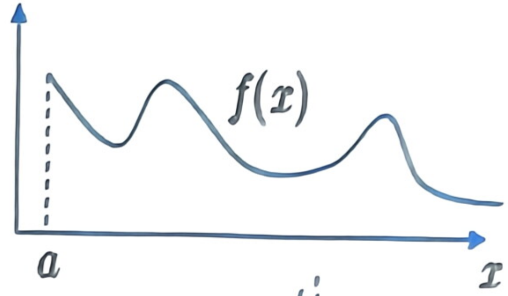
定理8.1.1、定理8.1.2中积分区间换成 $(-\infty,b]$、$(-\infty,+\infty)$，以及$\varphi(\beta)=a$，$\lim\limits_{t\to\alpha+}\varphi(t)=+\infty$时，也成立相应的结论.



关于无穷积分的换元积分法，也有与Riemann积分换元法类似的结论.

定理8.1.1. 设$\varphi(t)$在$[\alpha,\beta)$（β可以是$+\infty$）上连续可微，严格单调递增并且满足$a=\varphi(\alpha)\leqslant \varphi(t)\leqslant \lim\limits_{t\to\beta-0}\varphi(t)=+\infty$，则 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 与 $\int_\alpha^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$ 同敛散性，且收敛时

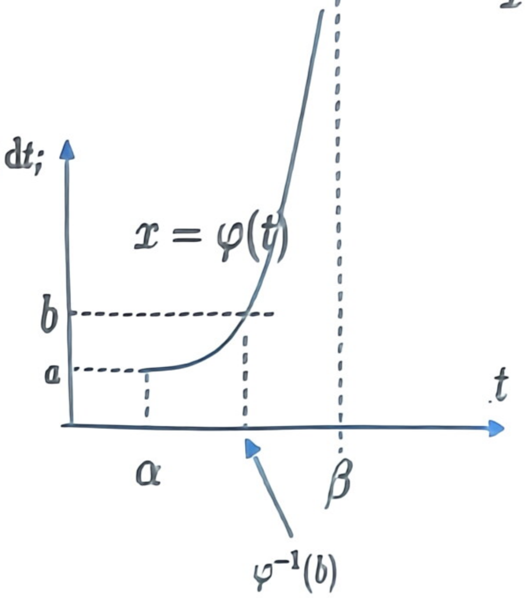
$$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \xlongequal{x=\varphi(t)} \int_\alpha^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$



证明. 因为 $x=\varphi(t)$ 严格单调上升，且 $\lim\limits_{t\to\beta-}\varphi(t)=+\infty$.

所以$x=\varphi(t)$：$[\alpha,\beta)\ \to\ [a,+\infty)$有反函数$t=\varphi^{-1}(x)$ 且 $b\to+\infty \Leftrightarrow \varphi^{-1}(b)\to\beta-$.

因为 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x=\lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$，而正常积分$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \xlongequal{x=\varphi(t)} \int_\alpha^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$;



对上式两边同时取极限，则

$$\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \quad 与 \quad \lim_{b\to+\infty}\int_\alpha^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t \xlongequal{\gamma=\varphi^{-1}(b)} \lim_{\gamma\to\beta-}\int_\alpha^{\gamma} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$$

要么同时存在且值相等，要么同时不存在. 证毕. $\square$

定义8.1.3中的无穷积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{a\to-\infty}\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \lim\limits_{b\to+\infty}\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \forall c\in\mathbb{R}.$

与 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \xlongequal{\text{定义}} \lim\limits_{a\to+\infty}\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x$ 是不同的.

后者是另外一种积分, 被称为Cauchy 主值积分. 具体为:

设 $f(x)$ 于 $(-\infty,+\infty)$ 有定义, 且 $f(x)\in R[-a,a]$, $\forall a>0$. 如果 $\lim\limits_{a\to+\infty}\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x$存在, 则称其值为 $f(x)$ 于 $(-\infty,+\infty)$ 的Cauchy主值积分. 记作:

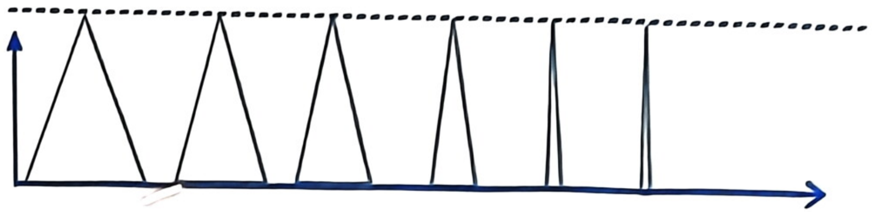
$$\text{V.P.}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to+\infty}\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

例如 V.P. $\int_{-\infty}^{+\infty} x\,\mathrm{d}x = 0$ 但 $\int_{-\infty}^{+\infty} x\,\mathrm{d}x$ 发散.

如果积分$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$按照定义8.1.3是收敛的, 当然有 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \text{V.P.}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x.$

例8.2.8. 对$[1,+\infty)$ 上的有界连续函数

$$f(x)=\begin{cases}1+2^{n+1}(x-n), & x\in[n-\frac{1}{2^{n+1}},n),\quad n\in\mathbb{N},\ n>1,\\ 1-2^{n+1}(x-n), & x\in[n,n+\frac{1}{2^{n+1}}],\quad n\in\mathbb{N},\ n>1,\\ 0, & others.\end{cases}$$



就有$\int_1^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛，但是，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\nexists$.

事实上，记$F(x)=\int_1^{x}f(t)\,\mathrm{d}t$, $x>1$, 则$f(x)\geqslant 0\ \Rightarrow\ F(x)$于$[1,+\infty)$单调上升.

例8.2.8. 对$[1,+\infty)$ 上的有界连续函数

$$f(x)=\begin{cases}1+2^{n+1}(x-n), & x\in[n-\frac{1}{2^{n+1}},n), \quad n\in\mathbb{N},\ n>1,\\ 1-2^{n+1}(x-n), & x\in[n,n+\frac{1}{2^{n+1}}], \quad n\in\mathbb{N},\ n>1,\\ 0, & \text{others}.\end{cases}$$

就有$\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, 但是, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\nexists$.

用例8.2.8的方法, 还可以证明, 对$[1,+\infty)$上的无界函数

$$f(x)=\begin{cases}n, & x\in[n-\frac{1}{2n^3},n+\frac{1}{2n^3}], \quad n\in\mathbb{N}, \quad n>1,\\ 0, & \text{others}.\end{cases}$$

和无界连续函数

$$g(x)=\begin{cases}n+2^{n+1}n(x-n), & x\in[n-\frac{1}{2^{n+1}},n), \quad n\in\mathbb{N}, \quad n>1,\\ n-2^{n+1}n(x-n), & x\in[n,n+\frac{1}{2^{n+1}}], \quad n\in\mathbb{N}, \quad n>1,\\ 0, & \text{others}.\end{cases}$$

都有, $\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$, $\int_1^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$ (绝对) 收敛.

例8.2.9. 判别$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^\alpha}\mathrm{d}x\ (\alpha>0)$ 的收敛性和绝对收敛性.

解. $\alpha>0$时, 由于 $\frac{1}{x^\alpha}$ 于 $[1,+\infty)$ 单调趋于 0 $(x\to+\infty)$, 而 $\left|\int_1^x \sin t\,\mathrm{d}t\right|\leqslant 2,\ \forall x>1.$

所以由Dirichlet判别法, 此无穷积分收敛.

$\alpha>1$时, $\left|\frac{\sin x}{x^\alpha}\right|<\frac{1}{x^\alpha}$, 而$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^\alpha}$ 收敛, 所以, 积分绝对收敛.

$0<\alpha\leqslant 1$时, $\int_\pi^{N\pi}\frac{|\sin x|}{x^\alpha}\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{N-1}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{|\sin x|}{x^\alpha}\mathrm{d}x$

$$\geqslant\sum_{n=1}^{N-1}\frac{1}{((n+1)\pi)^\alpha}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}|\sin x|\,\mathrm{d}x\geqslant\sum_{n=1}^{N-1}\frac{1}{(n+1)\pi}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}|\sin x|\,\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{N-1}\frac{2}{(n+1)\pi}.$$

前述(数列极限部分)已知, $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\infty$发散. 所以, 积分不绝对收敛.

原无穷积分条件收敛. □

例8.2.10.

(1) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sin\beta x}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x\ (\alpha>0,\ \beta\neq 0)$ 的收敛性和绝对收敛性与$\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x\ (\alpha>0)$相同.

(2) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\cos\beta x}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x\ (\alpha>0,\ \beta\neq 0)$ 也有相同的收敛性和绝对收敛性.

证明. (1) $$\int_1^{+\infty}\frac{\sin\beta x}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x \overset{\beta x=t}{\underset{\beta>0}{=\!=}} \int_\beta^{+\infty}\frac{\sin t}{\left(\frac{t}{\beta}\right)^\alpha}\,\mathrm{d}\frac{t}{\beta}=\beta^{\alpha-1}\int_\beta^{+\infty}\frac{\sin t}{t^\alpha}\mathrm{d}t.$$

(2) $\dfrac{1}{x^\alpha}$在$[1,+\infty)$单调下降趋于零; $\left|\displaystyle\int_1^x\cos\beta t\,\mathrm{d}t\right|=\left|\dfrac{1}{\beta}\sin\beta t\Big|_1^x\right|\leqslant\dfrac{2}{\beta},\ \forall x>1.$

据*Dirichlet*判敛法, $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\cos\beta x}{x^\alpha}\mathrm{d}x$在$\alpha>0,\ \beta>0$时收敛.

$\alpha>1$时, $\left|\dfrac{\cos\beta x}{x^\alpha}\right|\leqslant\dfrac{1}{x^\alpha},\ \ x\in[1,+\infty)$导致$\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\cos\beta x}{x^\alpha}\mathrm{d}x$绝对收敛.

$\alpha\leqslant 1$时, $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{|\cos\beta x|}{x^\alpha}\mathrm{d}x$与$\displaystyle\int_{\frac{\pi}{\beta}}^{+\infty}\frac{|\cos\beta x|}{x^\alpha}\mathrm{d}x$同敛散.

对$n\in\mathbb{N}^+$, $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{\beta}}^{\frac{n\pi}{\beta}}\frac{|\cos\beta x|}{x^\alpha}\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{n-1}\int_{\frac{k\pi}{\beta}}^{\frac{(k+1)\pi}{\beta}}\frac{|\cos\beta x|}{x^\alpha}\mathrm{d}x\geqslant\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{\beta}{(k+1)\pi}\right)^\alpha\int_{\frac{k\pi}{\beta}}^{\frac{(k+1)\pi}{\beta}}|\cos\beta x|\,\mathrm{d}x=$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{\beta}{(k+1)\pi}\right)^\alpha\times 2=2\pi^\alpha\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{(k+1)^\alpha}\ \to\ +\infty,\ \ (n\to+\infty).$

所以, $\alpha\in(0,1]$时, $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\cos\beta x}{x^\alpha}\mathrm{d}x$条件收敛. □