AI 中的数学 第四次作业

2300012929 尹锦润

教材 2.18

$E(X)=\sum_{x=1}^{+\infty}kP(X=x)=\sum_{x=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{x}P(X=x)=\sum_{k=1}^{+\infty}P(X\geqslant k)$。

教材 2.19

$$Eg(x)\geqslant\int_{g(\varepsilon)}^{+\infty}tP(g(X)=t)\mathrm{d}t\geqslant\int_{t=g(\varepsilon)}^{+\infty}g(\varepsilon)P(g(X)=t)\mathrm{d}t=g(\varepsilon)P(X\geqslant\varepsilon)$$

进而 $\dfrac{Eg(x)}{g(\varepsilon)}\geqslant P(X\geqslant\varepsilon)$。

教材 2.20

令 Z 的分布密度有 $q(z)=\begin{cases}p(z)+p(\pi-z)=\dfrac{2}{\pi} & ,0<z<\dfrac{\pi}{2}\\ 0 & ,others\end{cases}$，$Y=\sin X$ 的分布密度和 $Y=\sin Z$ 的分布密度是一致的。

进而，Y 的分布密度 $f(y)=q(\arcsin y)(\arcsin y)'=\dfrac{2}{\pi}\dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}},y\in[0,1]$，$Y$ 的概率分布是 $F(y)=\int_0^y f(t)\mathrm{d}t=\dfrac{2}{\pi}\arcsin y,y\in[0,1]$，考虑其余部分，有

$$F(y)=\begin{cases}0 & y<0\\ \frac{2}{\pi}\arcsin y & y\in[0,1]\\ 1 & y>1\end{cases}$$

教材 2.21

$$F(y)=\begin{cases}0 & y<0\\ \frac{1}{5} & 0\leqslant y\leqslant 1\\ \frac{y}{5} & 1<y\leqslant 3\\ \frac{3}{5} & 3<y<5\\ 1 & y\geqslant 5\end{cases}$$

教材 2.22

$$p(x)=F'(x)=\begin{cases}0, & x \leqslant 0 \; or \; x>3 \\ \frac{2x}{9}, & 0<x \leqslant 3\end{cases}$$

$$E(X)=\int_0^3 p(x)x\mathrm{d}x=\frac{2}{27}x^3\Big|_0^3=2$$

$$\frac{x^2}{9}=p \Rightarrow x=3\sqrt{p}$$

教材 2.26

$$c(1+\cdots+6)=1 \Rightarrow c=\frac{1}{21}$$

$$E(X)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{6}x^2=\frac{13}{3}$$

中位数为 5。

教材 2.27

$\sigma=2$,

$$P(6<X<9)=\frac{1}{2}\left(P(6<X<14)-P(9<X<11)\right)\doteq 0.2857$$

$$P(13 \leqslant X \leqslant 15)=\frac{1}{2}\left(P(5 \leqslant X \leqslant 15)-P(7 \leqslant X \leqslant 13)\right)\doteq 0.0606$$

教材 2.28

python

```python
>>> ret = 0
>>> for k in range(1, 10000):
...     ret += math.e**(-l) * (l**k)/math.factorial(k)
...     if ret > 0.99:
...             print(k)
...             break
...
13
```

```
>>> ret
0.9938927550846113
```

计算可得答案为 13。

教材 2.33

令 $t=\frac{X-a}{b-a}$，则 $t\in[0,1]$ 且 $var(t)=\frac{var(X)}{(b-a)^2}$，对于 t，有 $var(t)=E(t^2)-E^2(t)$，而 $t^2\leqslant t$，进而 $var(t)\leqslant t-t^2=t(1-t)\leqslant\frac{1}{4}$，于是 $var(X)\leqslant\frac{(b-a)^2}{4}$。