习题答案汇总

1 复习题

概率部分:

1. $\boxed{\text{设 } \xi \text{ 的分布函数为 } p(x) = \lambda e^{-\lambda x}\mathbf{1}(x \geq 0), \text{ (1) 求 } E\xi, \text{ (2) 求 } D\xi}$

证明:

$$\begin{aligned}
&E\xi = \int_0^{+\infty} x\lambda e^{-\lambda x}dx = -\int_0^{+\infty} xde^{-\lambda x} = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}dx = \frac{1}{\lambda}, \\
&E\xi^2 = \int_0^{+\infty} x^2\lambda e^{-\lambda x}dx = -\int_0^{+\infty} x^2de^{-\lambda x} \\
&= -x^2e^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} 2xe^{-\lambda x}dx = \frac{2}{\lambda}E\xi = \frac{2}{\lambda^2}, \\
&D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = \frac{1}{\lambda^2}
\end{aligned}$$

2. $\boxed{\text{设事件 } A \text{ 与 } B \text{ 独立，且 } P(B) = 0.5, P(A\bigcap B^c) = 0.3, \text{ 求 } P(A^c\bigcap B)}$

解:

$$\begin{aligned}
&P(A\bigcap B^c) = P(A) - P(AB) = P(A) - P(A)P(B) = 0.5P(A) = 0.3, \\
&\Rightarrow P(A) = 0.6 \\
&\Rightarrow P(A^c\bigcap B) = P(B) - P(AB) = P(B) - P(A)P(B) = 0.2
\end{aligned}$$

3. $\boxed{\text{事件 } A,B,C\text{，} A \text{ 与 } C \text{ 互斥, } P(AB) = \frac{1}{2}, P(C) = \frac{1}{3}, \text{ 求 } P(AB|C^c)}$

解:

$$P(AB|C^c) = \frac{P(ABC^c)}{P(C^c)} = \frac{P(AB) - P(ABC)}{1 - P(C)}$$
$$= \frac{P(AB)}{1 - P(C)} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{4}$$

4. 设 $X \sim U(0,1)$, 当给定 $X = x$ 时, 随机变量 Y 在 $(0,x)$ 上服从均匀分布. 求 $(1)(X,Y)$ 的概率密度; $(2)f_{X|Y}(x|y)$; $(3)P(X > e^{-1}|Y = e^{-2})$

证明:

$$(1)f_X(x) = \mathbf{1}(0 < x < 1), f_{Y|X}(y|x) = \frac{1}{x}\mathbf{1}(0 < y < x < 1),$$
$$f(x,y) = f_X(x)f_{Y|X}(y|x) = \frac{1}{x}\mathbf{1}(0 < y < x < 1)$$
$$(2)f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx = -\ln y\mathbf{1}(0 < y < 1),$$
$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = -\frac{1}{x\ln y}\mathbf{1}(0 < y < x < 1)$$

$$(3)P(X > e^{-1}|Y = e^{-2}) = \int_{e^{-1}}^{+\infty} f_{X|Y}(x|y = e^{-2})dx$$
$$= \int_{e^{-1}}^{1} \frac{1}{2x}dx$$
$$= \frac{1}{2}$$

5. 设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度 $p(x,y) = be^{-(x+y)}1(0 < x < 1, y > 0)$, (1) 求 b, (2) 令 $U = max\{X,Y\}$, 求 U 的分布函数 $F_U(u)$

解: (1)

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} p(x,y)dxdy = b\int_0^1 e^{-x}dx\int_0^{+\infty} e^{-y}dy,$$
$$\Rightarrow b = \frac{e}{e-1}$$

(2) 由分布函数定义:

$$F_U(u) = P\left(max\{X,Y\} \le u\right) = P\left(X \le u, Y \le u\right),$$

当 $u<0$ 时, $F_U(u)=0$,
当 $0\le u<1$ 时,

$$F_U(u)=\frac{e}{e-1}\int_0^u dx\int_0^u e^{-x}e^{-y}dy=\frac{e}{e-1}(1-e^{-u})^2,$$

当 $u\ge 1$ 时,

$$F_U(u)=\frac{e}{e-1}\int_0^1 dx\int_0^u e^{-x}e^{-y}dy=1-e^{-u}$$

6. 设 $\xi\sim N_3\left(0,\begin{pmatrix}1&\rho&0\\ \rho&1&\rho\\ 0&\rho&1\end{pmatrix}\right)$, 试问 ρ 取什么值时, $\xi_1+\xi_2+\xi_3$ 与 $\xi_1-\xi_2-\xi_3$ 相互独立

解：由 $\xi\sim N_3\left(0,\begin{pmatrix}1&\rho&0\\ \rho&1&\rho\\ 0&\rho&1\end{pmatrix}\right)$, 知 $\xi_1+\xi_2+\xi_3$ 与 $\xi_1-\xi_2-\xi_3$ 为二元正态分布,

$$Cov(\xi_1+\xi_2+\xi_3,\xi_1-\xi_2-\xi_3)=-1-2\rho,$$

当 $\rho=-\frac{1}{2}$ 时，$\xi_1+\xi_2+\xi_3$ 与 $\xi_1-\xi_2-\xi_3$ 相互独立

7. 设 $\xi=\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \xi_3\end{pmatrix}$, $Var(\xi)=\begin{bmatrix}5&2&3\\ 2&3&0\\ 3&0&2\end{bmatrix}$, (1) 求 $\xi_1-2\xi_2+\xi_3$ 的方差, (2) 求 $\eta_1=\xi_1+\xi_2$,$\eta_2=\xi_1+\xi_2+\xi_3$ 的协方差阵

解:

$$\begin{aligned}&(1)D(\xi_1-2\xi_2+\xi_3)\\ &\quad=D\xi_1+4D\xi_2+D\xi_3-4Cov(\xi_1,\xi_2)-4Cov(\xi_2,\xi_3)+2Cov(\xi_1,\xi_3)\\ &\quad=17,\\ &(2)D\eta_1=D\xi_1+D\xi_2+2Cov(\xi_1,\xi_2)=12,\\ &\quad D\eta_2=D\xi_1+D\xi_2+D\xi_3+2Cov(\xi_1,\xi_2)+2Cov(\xi_2,\xi_3)+2Cov(\xi_3,\xi_1)\\ &\quad=20,\\ &\quad Cov(\eta_1,\eta_2)\\ &\quad=D\xi_1+D\xi_2+2Cov(\xi_1,\xi_2)+Cov(\xi_2,\xi_3)+Cov(\xi_1,\xi_3)=15\end{aligned}$$

8. 若 (ξ,η) 服从 $N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$, 令 $U=a\xi+b\eta$, $V=c\xi+d\eta$, (1) 写出 (U,V) 的分布, (2) 求 U 与 V 的数学期望，方差以及相关系数, (3) 问何时 (u,V) 退化为一维分布, 何时 U 与 V 独立.

解:

$$(1)\begin{pmatrix}U\\V\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix},$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}U\\V\end{pmatrix}\sim N\left(\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mu_1\\\mu_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sigma_1^2&\rho\sigma_1\sigma_2\\\rho\sigma_1\sigma_2&\sigma_2^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&c\\b&d\end{pmatrix}\right)$$

$$=N(\begin{pmatrix}a\mu_1+b\mu_2\\c\mu_1+d\mu_2\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}a^2\sigma_1^2+b^2\sigma_2^2+2ab\sigma_1\sigma_2\rho & ac\sigma_1^2+bd\sigma_2^2+(ad+bc)\sigma_1\sigma_2\rho\\ac\sigma_1^2+bd\sigma_2^2+(ad+bc)\sigma_1\sigma_2\rho & c^2\sigma_1^2+d^2\sigma_2^2+2cd\sigma_1\sigma_2\rho\end{pmatrix})$$

(2) 由 (1) 知

$$EU=a\mu_1+b\mu_2, DU=a^2\sigma_1^2+b^2\sigma_2^2+2ab\sigma_1\sigma_2\rho,$$
$$EV=c\mu_1+d\mu_2, DV=c^2\sigma_1^2+d^2\sigma_2^2+2cd\sigma_1\sigma_2\rho,$$
$$cov(U,V)=ac\sigma_1^2+bd\sigma_2^2+(ad+bc)\sigma_1\sigma_2\rho,$$
$$\rho_{UV}=\frac{cov(U,V)}{\sqrt{DU}\sqrt{DV}}.$$

9. 设随机变量 X 和 Y 独立同分布，$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，证明：$\mathbb{E}\left(\max\{X,Y\}\right)=\mu+\frac{\sigma}{\sqrt{\pi}}$.

证明：令 $X_1=\frac{X-\mu}{\sigma}$，$Y_1=\frac{Y-\mu}{\sigma}$，则有

$$X_1,Y_1\sim N(0,1),\max\{X,Y\}=\mu+\sigma\max\{X_1,Y_1\}. \tag{1}$$

又 $\max\{X_1,Y_1\}=\frac{1}{2}\left(X_1+Y_1+|X_1-Y_1|\right)$，因此只需计算 $\mathbb{E}\left(|X_1-Y_1|\right)$.

有 $X_1-Y_1\sim N(0,2)$，因此有

$$\mathbb{E}\left(|X_1-Y_1|\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2}}\int_{-\infty}^{\infty}|x|\exp-\frac{x^2}{4}dx=\frac{2}{\sqrt{\pi}}. \tag{2}$$

因此有 $\mathbb{E}\left(\max\{X,Y\}\right)=\mu+\frac{\sigma}{\sqrt{\pi}}$.

10. 设随机变量序列 $\{X_n\}$ 为独立同分布，其密度函数为 $p(x)=e^{-(x-\alpha)}1(x\geq\alpha)$，令 $Y_n=min\{X_1,\dots X_n\}$, 证明:$Y_n\xrightarrow{P}\alpha$.

证明:

$$\begin{aligned} P(|Y_n-\alpha|\geq\epsilon) &= P(Y_n-\alpha\geq\epsilon) \\ &= P(\forall 1\leq i\leq n, X_i\geq\alpha+\epsilon) \\ &= \prod_{i=1}^{n} P(X_i\geq\alpha+\epsilon) \\ &= e^{-n\epsilon}\to 0. \end{aligned}$$

11. 设随机变量序列 $\{X_n\}$ 为独立同分布，且 $X_i\sim U(0,1)$, 证明 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} lnX_i \xrightarrow{P} -1$.

证明:

$$\begin{aligned} E(lnX_i) &= \int_0^1 lnxdx=-1, \\ E(lnX_i)^2 &= \int_0^1 (lnx)^2dx=2, Var(lnX_i)=1. \end{aligned}$$

由切比雪夫不等式，$\forall\epsilon>0$,

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} lnX_i-(-1)\right|\geq\epsilon\right)\leq\frac{1}{n\epsilon^2}\to 0.$$

12. 设随机变量序列 X_n 服从参数为 $\frac{1}{n}$ 的泊松分布（$P(x=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$），证明 X_n 依概率收敛于 0.

证明:

$$\begin{aligned} P\left(|X_n-0|\leq\epsilon\right) &= P\left(-\epsilon\leq X_n\leq\epsilon\right) \\ &= P\left(X_n=0\right) \\ &= e^{-\frac{1}{n}}\to 1. \end{aligned}$$

统计部分:

1. 设 $\xi_1,..,\xi_n$ 为总体 ξ 的样本, ξ 的概率密度函数为 $p(x,\theta)=\begin{cases}\frac{1}{\theta^2}2(\theta-x), 0<x<\theta \\ 0, \quad \text{else}\end{cases}$, $\theta>0$, 求未知参数 θ 的矩估计量.

证明:

$$\begin{aligned} E\xi &= \int_0^\theta x\frac{1}{\theta^2}2(\theta-x)dx=\frac{\theta}{3}, \\ &\Rightarrow\hat{\theta}=3\bar{\xi}. \end{aligned}$$

2. 设 $\xi_1,..,\xi_n$ 为总体 ξ 的样本, ξ 的概率密度函数为 $p(x,\theta)=\begin{cases}(\theta+1)x^{\theta}, 0<x<1\\ 0, \quad\quad \text{else}\end{cases}$, $\theta>0$, 求未知参数 θ 的矩估计量.

证明:

$$E\xi=\int_0^1 x(\theta+1)x^{\theta}dx=\frac{\theta+1}{\theta+2},$$
$$\Rightarrow \hat{\theta}=\frac{2\bar{\xi}-1}{1-\bar{\xi}}.$$

3. 设 $\xi_1,..,\xi_n$ 为总体 ξ 的样本, $\xi\sim N(\mu,\sigma^2)$, (1) 求 μ 与 σ^2 的极大似然估计量, (2) 求出 μ 与 σ^2 的 UMVUE.

证明:(1)

$$
\begin{aligned}
L(\mu,\sigma^2)&=\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(\xi_i-\mu)^2\right\}\right]\\
&=\frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma)^n}exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-\mu)^2\right\}\\
&\Rightarrow\begin{cases}\frac{\partial lnL(\mu,\sigma^2)}{\partial\mu}=\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-\mu)=0\\ \frac{\partial lnL(\mu,\sigma^2)}{\partial\sigma^2}=\frac{1}{2\sigma^4}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-\mu)^2-\frac{n}{2\sigma^2}=0\end{cases}\\
&\Rightarrow\begin{cases}\hat{\mu}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i=\bar{\xi}\\ \hat{\sigma^2}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-\bar{\xi})^2.\end{cases}
\end{aligned}
$$

(2)

$$
\begin{aligned}
p(x_1,..,x_n;\mu,\sigma^2)&=\frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma)^n}exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\right\}\\
&=\frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma)^n}e^{-\frac{n\mu^2}{2\sigma^2}}exp\left\{\left(\bar{x},\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)\begin{pmatrix}\frac{n\mu}{\sigma^2}\\ -\frac{1}{2\sigma^2}\end{pmatrix}\right\}
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow T(\xi_1,...,\xi_n)=(\bar{\xi},\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2)$ 为 (μ,σ^2) 的充分完备统计量, 而 $(\bar{\xi},\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-\bar{\xi})^2)$ 为 (μ,σ^2) 的无偏估计量, 且 $E\left(\bar{\xi}|\bar{\xi},\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2\right)=\bar{\xi}$, $E\left(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-\bar{\xi})^2|\bar{\xi},\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2\right)=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-\bar{\xi})^2$, 故 $(\bar{\xi},\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-\bar{\xi})^2)$ 为 (μ,σ^2) 的 UMVUE.

4. 考虑一元回归模型 $y=\beta x+\epsilon,\epsilon\sim N(0,\sigma^2)$, 现有样本 $(x_1,y_1),...,(x_n,y_n)$, (1) 求 β 的最小二乘估计 $\hat{\beta}$, (2) 证明 $\hat{\beta}$ 为 β 的无偏估计.

证明:

$$
\begin{aligned}
&(1)\frac{\partial}{\partial\beta}\sum_{i=1}^n(y_i-\beta x_i)^2=-\sum_{i=1}^n(y_i-\beta x_i)x_i=0,\\
&\Rightarrow\hat\beta=\frac{\sum_{i=1}^n x_iy_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2}.\\
&(2)E\hat\beta=E\frac{\sum_{i=1}^n x_iy_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2}=E\frac{\sum_{i=1}^n x_i(\beta x_i+\epsilon_i)}{\sum_{i=1}^n x_i^2}=\beta.
\end{aligned}
$$

5. 设总体 ξ 服从正态分布 $N(a,\sigma^2)$,a,σ^2 未知, $\xi_1,...,\xi_4$ 为取自总体 ξ 的样本，由样本观察值计算得 $\bar\xi=1267,S^*=\sqrt{\frac{1}{3}\sum_{i=1}^4(\xi_i-\bar\xi)^2}=3.65$, 求 a,σ^2 的置信度为 0.95 的置信区间 $(t_{0.975}(3)=3.18,\chi^2_{0.975}(3)=9.35,\chi^2_{0.025}(3)=0.22)$.

证明:

$$
\begin{aligned}
&\bar\xi\sim N(a,\frac{\sigma^2}{4})\\
&\Rightarrow\frac{2(\bar\xi-a)}{\sigma}\sim N(0,1),\frac{3(S^*)^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(3)\\
&\Rightarrow\frac{2(\bar\xi-a)}{S^*}\sim t(3)\\
&P(c_1<a<c_2)=P\left(\frac{2(\bar\xi-c_2)}{S^*}<\frac{2(\bar\xi-a)}{S^*}<\frac{2(\bar\xi-c_1)}{S^*}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow\frac{2(\bar\xi-c_1)}{S^*}=t_{0.975}(3)=3.18,\frac{2(\bar\xi-c_2)}{S^*}=-3.18\\
&\Rightarrow c_1=1261.1965,c_2=1272.8305.
\end{aligned}
$$

a 的置信度为 0.95 的置信区间为 $(1261.1965,1272.8035)$.

$$
\begin{aligned}
&\frac{3(S^*)^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(3)\\
&\Rightarrow P\left(\sigma_1<\sigma^2<\sigma_2\right)=P\left(\frac{3(S^*)^2}{\sigma_2}<\frac{3(S^*)^2}{\sigma^2}<\frac{3(S^*)^2}{\sigma_1}\right)\\
&\Rightarrow\frac{3(S^*)^2}{\sigma_1}=\chi^2_{0.975}(3)=9.35,\frac{3(S^*)^2}{\sigma_2}=\chi^2_{0.025}(3)=0.22,\\
&\Rightarrow\sigma_1=4.27\ \sigma_2=181.67.
\end{aligned}
$$

σ^2 的置信度为 0.95 的置信区间为 $(4.27,181.67)$.

6. 某厂生产的某种铝材的长度服从正态分布 $N(\mu,\sigma_0^2)$, 其中 $\sigma_0^2=0.16$, 长度超过 240cm 的铝材视为合格品, 满足出厂条件。现从该厂抽取 5 件产品, 测得其长度 (单位: cm) 为 239.7,239.6,239,240,239.2, 试判断在显著性水平 $\alpha=0.05$ 的条件下, 这一批铝材的平均长度是否超过 240cm。$z_{0.95}=1.65$

证明：原假设 $H_0: \mu \leq \mu_0 = 240$, 备选假设 $H_1: \mu > \mu_0 = 240$, 由于 σ_0 已知，铝材长度的分布为单参数指数族，其中 $T(x) = x$，因此拒绝域为 $\left\{\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu_0)}{\sigma_0} > z_{1-\alpha}\right\}$,
计算得 $\bar{X} = 239.5$, $\sqrt{5}(239.5-240)/0.4 = -2.795 < 1.65$, 故接受原假设，平均长度没有超过 240cm.

2 概率部分第一章作业答案

12. 一副扑克牌共 52 张，分为 4 种花色，每种花色 13 张，假设牌已经充分洗过，以致各张牌被抽到的概率是相等的，今从中任抽 6 张牌，试写出基本事件空间，并求：(1) 其中含有黑桃 K 的概率；

（2）这 6 张中各种花色都有的概率；

（3）至少有两张牌同点的概率。

解：（1）含有黑桃 K 的概率：$\frac{C_{51}^5}{C_{52}^6} = \frac{3}{26} \approx 0.1154$.

(2)6 种花色的可能组合为 3,1,1,1 和 2,2,1,1，所求概率为这两种情况之和：$\frac{C_4^1 C_{13}^3 (C_{13}^1)^3 + C_4^2 (C_{13}^2)^2 (C_{13}^1)^2}{C_{52}^6} \approx 0.4265$.

（3）6 张牌均不同的概率为 $\frac{C_{13}^6 \times 4^6}{C_{52}^6}$，至少两张牌相同的概率为 $1 - \frac{C_{13}^6 \times 4^6}{C_{52}^6} \approx 0.6548$.

14. 设 $P(AB) = 0$，问：下列说法那些是正确的？

（1）A 与 B 不相容；

（2）AB 是不可能事件；

（3）AB 不一定是不可能事件；

（4）$P(A) = 0$ 或 $P(B) = 0$；

（5）$P(A - B) = P(A)$；

解：（1）错误。注意到 $P(AB) = 0$ 不等价于 AB 是不可能事件。例如考虑 x 是数轴上的点，设 $A: x \geqslant 5$，$B: x \leqslant 5$，则 $P(AB) = P(x = 5) = 0$。

（2）错误。理由同（1）。

（3）正确。

（4）错误。反例和（1）相同。

（5）正确。

16. 市场调查员报道了以下数据：在被询问的 1000 名顾客中，有 811 人喜欢巧克力糖，752 人喜

欢夹心糖，418 人喜欢冰糖，570 人喜欢巧克力糖和夹心糖，356 人喜欢巧克力糖和冰糖，348 人喜欢夹心糖和冰糖，298 人喜欢全部三种糖。试说明这一报道有误。

解： 设集合 $A = \{$ 喜欢巧克力糖的人 $\}$，$B = \{$ 喜欢夹心糖的人 $\}$，$C = \{$ 喜欢冰糖的人 $\}$，至少喜欢一种糖的人组成的集合 $S = A \cup B \cup C$ 的大小为

$$|S| = |A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C| = 811+752+718-570-356-348+298 = 1005$$

超过调查的总人数为 1000 人，矛盾。

17. 设 A 和 B 是任何两个事件，试证明：

$$|P(AB) - P(A)P(B)| \leqslant \frac{1}{4}.$$

证明： 不妨设 $P(A) \leqslant P(B)$，注意到事件 $AB \subset A$，有

$$P(AB) - P(A)P(B) \leqslant P(A) - P(A)P(B) = P(A)(1 - P(B)) \leqslant P(A)(1 - P(A)) \leqslant \frac{1}{4}.$$

另一方面，由于 $P(A) + P(B) - P(AB) = P(A \cup B) \leqslant 1$，即 $P(B) \leqslant P(AB) + 1 - P(A)$，因此

$$P(A)P(B) - P(AB) \leqslant (1 - P(A))P(A) + P(AB)P(A) - P(AB) \leqslant (1 - P(A))P(A) \leqslant \frac{1}{4}.$$

19. 试证明：如事件 $A_1, \cdots, A_n (n \geqslant 2)$ 相互独立，且 B_i 等于 A_i 或 $\bar{A}_i (i = 1, \cdots, n)$ 或 U（必然事件)，则 $B_1, \cdots, B_n$ 也是相互独立的。

证明： 任取 k 个事件，设 $i_1, i_2, \cdots, i_k \in [n]$，由于事件顺序不影响独立性，不妨设

$$B_{i_j} = \begin{cases} A_{i_j} & 1 \leqslant j \leqslant s, \\ \bar{A}_{i_j} & s < j \leqslant m, \\ U & m < j \leqslant k. \end{cases}$$

其中 $1 \leqslant s \leqslant m \leqslant k$，则有

$$\begin{aligned} P(B_{i_1} \cdots B_{i_k}) &= P(A_{i_1} \cdots A_{i_s} \bar{A}_{i_{s+1}} \cdots \bar{A}_{i_m} U \cdots U) \\ &= P(A_{i_1}) \cdots P(A_{i_s})(1 - P(A_{i_{s+1}})) \cdots (1 - P(A_{i_m}))1 \cdots 1 \\ &= P(B_{i_1}) \cdots P(B_{i_s}) P(B_{i_{s+1}}) \cdots P(B_{i_m}) P(B_{i_{m+1}}) \cdots P(B_{i_k}) \end{aligned}$$

因此事件 $B_{i_1} \cdots B_{i_k}$ 相互独立。

24. 若 $P(A|B) > P(A|\bar{B})$，试证明：$P(B|A) > P(B|\bar{A})$。

证明： 由贝叶斯公式，$P(A|B) > P(A|\bar{B})$ 等价于

$$\frac{P(AB)}{P(B)} > \frac{P(A\bar{B})}{P(\bar{B})}$$

上式整理后，等价于

$$P(AB)(1-P(B)) > [P(A)-P(AB)]P(B)$$

即

$$P(AB) > P(A)P(B)$$

同理可得，$P(B|A) > P(B|\bar{A}) \Leftrightarrow P(AB) > P(A)P(B)$，因此 $P(A|B) > P(A|\bar{B}) \Leftrightarrow P(B|A) > P(B|\bar{A})$。

25. 为了寻找一本专著，一个学生决定到三个图书馆去试试，已知每一图书馆有这本书的概率为 50%，且如果有这本书则已经借出的概率为 50%，若各图书馆藏书是相互独立的，求这个学生能得到这本书的概率。

解： 每个图书馆能借到书的概率为 $50\% \times 50\% = \frac{1}{4}$，三个图书馆都借不到书的概率为 $\left(\frac{3}{4}\right)^3$，故能借到书的概率为 $1-\left(\frac{3}{4}\right)^3 = 0.578125$。

26. 在某种射击条件下，射手甲、乙、丙分别以概率 $0.6, 0.5, 0.4$ 中靶，今三位射手一齐射击，有两弹中靶，问：丙中靶的可能性大还是不中靶的可能性大？

解： 由题意，

$$P(\text{甲乙中靶}) = 0.6 \times 0.5 \times (1-0.4) = 0.18$$

$$P(\text{甲丙中靶}) = 0.6 \times (1-0.5) \times 0.4 = 0.12$$

$$P(\text{乙丙中靶}) = (1-0.6) \times 0.5 \times 0.4 = 0.08$$

$$P(\text{丙中靶}|\text{有两人中靶}) = \frac{0.12+0.08}{0.18+0.12+0.08} = \frac{10}{19} > \frac{1}{2}$$

因此丙中靶的可能性更大。

31. 甲和乙两人玩一个系列游戏。游戏的规则是：当乙赢 n 次以前，如果甲已经取胜 m 次，判甲赢得系列游戏；否则，乙赢得系列游戏。在单次游戏中，甲赢的概率是 p，乙赢的概率是 $q = 1-p$。问：甲赢得系列游戏的概率是多少？（这里 m 和 n 是给定的正整数。）

解： 设甲赢 m 次时，乙赢了 i 次，则当 $i = 0, \cdots, n-1$ 时甲能够获胜，甲获胜的概率为

$$P(\text{甲获胜}) = p^m \sum_{i=0}^{n-1} C_{m+i-1}^{i} q^i.$$

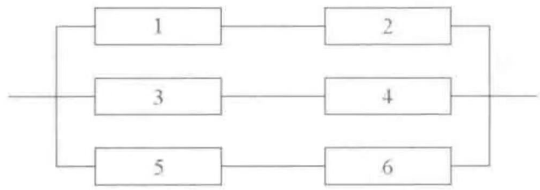
37. 一个部件由 6 个元件组成，这 6 个元件在指定的时间 T 内失效的概率分别为

$$p_1 = 0.6, \quad p_2 = 0.2, \quad p_3 = p_4 = p_5 = p_6 = 0.3.$$

试求下列两种情况下部件在时间 T 内失效的概率：

（1）部件由这些元件串联而成；

（2）部件的元件按下图连接：



解：（1）当所有元件不失效时，部件能正常正常工作，概率为 $(1-p_1)\cdots(1-p_6)=(1-0.6)\times(1-0.2)\times(1-0.3)^4=0.076832$，部件失效的概率为 $1-0.076832=0.923168$.

（2）由题意

$$P(\text{元件}1,2\text{至少一个失效})=1-0.4\times0.8=0.68.$$

$$P(\text{元件}3,4\text{至少一个失效})=1-0.7\times0.7=0.51.$$

$$P(\text{元件}5,6\text{至少一个失效})=1-0.7\times0.7=0.51.$$

部件失效需要上述事件同时发生，概率为 $0.68\times0.51\times0.51=0.176868$.

39. 在有三个孩子的家庭中，已知至少有一个是女孩，求至少有一个是男孩的概率。

解：三个孩子的性别有 8 种情况：{ 女男男，女男女，女女男，女女女，男男男，男男女，男女男，男女女 }，有女孩的情况有 7 种，在此条件下有男孩的情况有 6 种，所求概率为 $\frac{6}{7}\approx0.8571$。

40. 已知 8 支枪中 3 支未校正，5 支已校正。一射手用前者射击，中靶的概率为 0.3，而用后者射击，中靶的概率为 0.8。今有一人从 8 支枪中任取一支射击，结果中靶，求这支枪是已经校正过的概率。

解：中靶分为使用未校正和校正的枪两种情况，

$$P(\text{中靶})=\frac{3}{8}\times\frac{3}{10}+\frac{5}{8}\times\frac{8}{10}=\frac{49}{80}.$$

因此

$$P(\text{使用校正枪中靶}|\text{中靶})=\frac{\frac{5}{8}\times\frac{8}{10}}{\frac{49}{80}}=\frac{40}{49}\approx0.8163$$

41. 设有一质地均匀的正八面体，其第 $1,2,3,4$ 面染有红色；第 $1,2,3,5$ 面染有白色；第 $1,6,7,8$ 面染有黑色。在桌面上将次正八面体抛掷一次，然后观察与桌面接触的那一面出现何种颜色，令 $A=$ “出现红色”，$B=$ “出现白色”，$C=$ “出现黑色”，问：A,B,C 是否相互独立？

解：由题意，$P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{2}$，而 $P(AB)=\frac{3}{8}\neq P(A)P(B)$，因此事件 A,B,C 不相互独立。

42. 设事件 A, B, C 相互独立，求证：$A \cup B$，AB，$A-B$ 都与 C 相互独立。

证明： $A \cup B$ 与 C 独立：

$$
\begin{aligned}
P((A \cup B) \cap C) &= P((AC) \cup (BC)) = P(AC) + P(BC) - P((AC) \cap (BC)) \\
&= P(C)(P(A) + P(B) - P(A)P(B)) = P(A \cup B)P(C)
\end{aligned}
$$

AB 与 C 独立：

$$P(AB \cap C) = P(A)P(B)P(C) = P(AB)P(C)$$

$A - B$ 与 C 独立：

$$P((A-B) \cap C) = P(AC - BC) = P(AC) - P((AC) \cap (BC)) = (P(A) - P(A)P(B))P(C) = P(A-B)P(C)$$

43. 连续投掷一对均匀的骰子，如果掷出的两点数之和为 7，则甲赢，如果掷出的两点数之积为 5，则乙赢。不停的投掷直到有一方赢为止。求甲赢的概率。

解： 设第 n 次抛时甲赢的概率为

$$\left(1 - \frac{6}{36} - \frac{2}{36}\right)^{n-1} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \times \left(\frac{7}{9}\right)^{n-1}$$

则

$$P(\text{甲赢}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{6} \times \left(\frac{7}{9}\right)^{n-1} = \frac{1}{6} \times \frac{9}{2} = 0.75$$

3 概率部分第二章作业答案

1. 从一副扑克牌（共 52 张）中发出 5 张，求其中黑桃张数的概率分布。

解： 设黑桃的张数为随机变量 X，

$$P(X = k) = \frac{C_{13}^{k} C_{39}^{5-k}}{C_{52}^{5}}, \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

2. 设随机变量 X 服从泊松分布，$P(X = 1) = P(X = 2)$，求 $P(X = 4)$ 的值。

解： 设 $P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$，则

$$P(X = 1) = \lambda e^{-\lambda} = P(X = 2) = \frac{\lambda^2}{2} e^{-\lambda} \quad (\lambda > 0)$$

解得 $\lambda = 2$，进而 $P(X = 4) = \frac{2}{3} e^{-2}$.

3. 对圆的直径作近似测量，设其在区间 $[a,b](0<a<b)$ 上均匀分布，试求圆面积的概率分布及其均值、方差。

解： 设直径 $d\sim U(a,b)$，面积 $X=\frac{\pi d^2}{4}$。概率 $P(X\leqslant C)=P(d\leqslant\sqrt{\frac{4C}{\pi}})=\frac{\sqrt{\frac{4C}{\pi}}-a}{b-a},(\sqrt{\frac{4C}{\pi}}\leqslant b)$。

因此面积的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<\frac{\pi a^2}{4},\\ \frac{\sqrt{\frac{4x}{\pi}}-a}{b-a}, & \frac{\pi a^2}{4}\leqslant x\leqslant\frac{\pi b^2}{4},\\ 1, & x>\frac{\pi b^2}{4}.\end{cases}$$

期望为

$$E(X)=\int_a^b\frac{\pi}{4}x^2\frac{1}{b-a}dx=\frac{1}{b-a}\frac{\pi}{12}(b^3-a^3)=\frac{\pi}{12}(a^2+ab+b^2).$$

$$E(X^2)=\int_a^b\frac{\pi^2}{16}x^4\frac{1}{b-a}dx=\frac{1}{b-a}\frac{\pi^2}{80}(b^5-a^5).$$

方差为

$$\mathrm{var}(X)=E(X^2)-E(X)^2=\frac{\pi^2}{720}(b-a)^2(4a^2+7ab+4b^2).$$

4. 设 $p(x)$ 是随机变量 X 的分布密度，其中含有待定常数 c，试在下列情况求出 c 的值。

(1) $p(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ ce^{-x}, & x\geqslant 0;\end{cases}$

(2) $p(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ cx^{\alpha}e^{-\beta x}, & x\geqslant 0(\alpha>0,\beta>0);\end{cases}$

(3) $p(x)=\frac{c}{1+x^2}$.

解： (1)

$$\int_0^{\infty}ce^{-x}dx=c=1.$$

(2)

$$\int_0^{\infty}cx^{\alpha}e^{-\beta x}dx=c\int_0^{\infty}\frac{1}{\beta^{\alpha+1}}(\beta x)^{\alpha}e^{-\beta x}d(\beta x)=\frac{c\Gamma(\alpha+1)}{\beta^{\alpha+1}}=1.$$

因此

$$c=\frac{\beta^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1)}.$$

(3)

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{c}{1+x^2}dx=c\left(\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)=1.$$

因此 $c=\frac{1}{\pi}$.

5. 设随机变量 X 的分布函数是 $F(x)$，试证明，对任何 $a<b$，有

$$P(X=a)=F(a)-F(a-0),\quad P(a<X<b)=F(b-0)-F(a),$$

这里 $F(y-0)\triangleq\lim_{x\to y}F(x)$。

证明：

$$P(X=a)=\lim_{\varepsilon\to 0}P(a-\varepsilon<X\leqslant a)=\lim_{\varepsilon\to 0}F(a)-F(a-\varepsilon)=F(a)-F(a-0).$$

$$P(a<X<b)=\lim_{\varepsilon\to 0}(a<X\leqslant b-\varepsilon)=\lim_{\varepsilon\to 0}F(b-\varepsilon)-F(a)=F(b-0)-F(a).$$

6. 已知随机变量 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$,$Y=e^X$，试计算 Y 的期望和方差。

解：

$$\begin{aligned}E(Y)&=\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\{x\}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}dx\\&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left\{\mu+\frac{\sigma^2}{2}\right\}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left\{-\frac{(x-(\mu+\sigma^2))^2}{2\sigma^2}\right\}dx=\exp\left\{\mu+\frac{\sigma^2}{2}\right\}\end{aligned}$$

$$E(Y^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\{2x\}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}dx=\exp\{2\mu+2\sigma^2\}$$

因此

$$\mathrm{var}(Y)=E(Y^2)-E(Y)^2=(e^{\sigma^2}-1)\exp\{2\mu+\sigma^2\}.$$

9. 由统计物理学知道，分子运动的速率 X 服从麦克斯韦分布，即其分布密度是

$$p(x)=\begin{cases}\frac{4x^2}{\alpha^3\sqrt{\pi}}\exp\left\{-\frac{x^2}{\alpha^2}\right\}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0.\end{cases}$$

其中参数 $\alpha>0$，试求分子的动能 $Y=\frac{1}{2}mX^2$ 的分布密度。

解：

$$P(y\leqslant Y)=P(\frac{1}{2}mx^2\leqslant Y)=\int_0^{\sqrt{\frac{2Y}{m}}}\frac{4x^2}{\alpha^3\sqrt{\pi}}\exp\left\{-\frac{x^2}{\alpha^2}\right\}dx$$

令 $y=\frac{1}{2}mx^2$，得

$$P(y\leqslant Y)=\int_0^Y\frac{4\sqrt{2}}{\alpha^3m^{3/2}\sqrt{\pi}}\sqrt{y}\exp\left\{-\frac{2y}{m\alpha^2}\right\}dy.$$

因此

$$P_Y(y)=\begin{cases}\frac{4\sqrt{2}}{\alpha^3m^{3/2}\sqrt{\pi}}\sqrt{y}\exp\left\{-\frac{2y}{m\alpha^2}\right\}, & y>0,\\ 0, & y\leqslant 0.\end{cases}$$

11. 设随机变量 X 的分布密度为

$$p(x)=\begin{cases} x, & 0\leqslant x<1,\\ 2-x, & 1\leqslant x\leqslant 2,\\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

试求出 X 的分布函数，并作出 $p(x)$ 和 $F(x)$ 的图形。

解： 由于 X 的概率密度函数为

$$p(x)=\begin{cases} x, & 0\leqslant x<1,\\ 2-x, & 1\leqslant x\leqslant 2,\\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

得分布函数为

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<0,\\ \frac{1}{2}x^2, & 0\leqslant x<1,\\ 1-\frac{1}{2}(2-x)^2, & 1\leqslant x<2,\\ 1, & x\geqslant 2. \end{cases}$$

12. 设某产品的质量指标 $X\sim N(160,\sigma^2)$，若要求 $P(120\leqslant X\leqslant 200)\geqslant 0.80$，问：允许 σ 最多为多少?

解： 由 $X\sim N(160,\sigma^2)$，设 $Y=\frac{X-160}{\sigma}\sim N(0,1)$。因此

$$P(120\leqslant x\leqslant 200)=P(-\frac{40}{\sigma}\leqslant y\leqslant \frac{40}{\sigma})=2\Phi\left(\frac{40}{\sigma}\right)-1=0.8$$

查表得 $\sigma=31.25$。

18. 设 X 是只取非负整数的随机变量，若 $E(X)$ 存在，试证明：

$$E(X)=\sum_{k=1}^{+\infty}P(X\geqslant k).$$

证明：

$$E(X)=\sum_{i=1}^{+\infty}iP(X=i)=\sum_{i=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{i}P(X=i)=\sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{i=k}^{+\infty}P(X=i)=\sum_{k=1}^{+\infty}P(X\geqslant k).$$

19. 设 X 是非负随机变量，$g(x)$ 是 x 的增函数，$g(x)\geqslant 0$，且 $E(g(X))$ 存在，试证明，对任何 $\varepsilon>0$，只要 $g(\varepsilon)>0$，就有

$$P(X\geqslant\varepsilon)\leqslant\frac{1}{g(\varepsilon)}E(g(x)).$$

证明： 设 x 的概率密度函数为 $p(x)$,

$$E(g(x)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)p(x)dx \geqslant \int_{\varepsilon}^{+\infty} g(x)p(x)dx$$

由于 $g(x)$ 为增函数，因此

$$\int_{\varepsilon}^{+\infty} g(x)p(x)dx \geqslant g(\varepsilon)\int_{\varepsilon}^{+\infty} p(x)dx = g(\varepsilon)P(X \geqslant \varepsilon).$$

即

$$P(X \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{1}{g(\varepsilon)}E(g(x)).$$

20. 设随机变量 X 的分布密度为

$$p(x) = \begin{cases} \frac{2x}{\pi^2}, & 0 < x < \pi, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

试求 $Y = \sin X$ 的概率分布。

解： 当 $0 < y \leqslant 1$ 时,

$$\begin{aligned} F(y) &= P(0 < x \leqslant \arcsin y) + P(\pi - \arcsin y \leqslant X < \pi) = \int_0^{\arcsin y} \frac{2x}{\pi^2}dx + \int_{\pi-\arcsin y}^{\pi} \frac{2x}{\pi^2}dx \\ &= \frac{1}{\pi^2}(\arcsin y)^2 + (1 - \frac{1}{\pi^2}(\pi - \arcsin y)^2) = \frac{2}{\pi}\arcsin y. \end{aligned}$$

因此概率分布为

$$F(y) = \begin{cases} 0, & y < 0, \\ \frac{2\arcsin y}{\pi}, & 0 < y \leqslant 1, \\ 1, & y > 1. \end{cases}$$

21. 设随机变量 X 服从区间 $[0,5]$ 上的均匀分布,

$$Y = \begin{cases} X, & 1 < X < 3, \\ 0, & X \leqslant 1, \\ 5, & X \geqslant 3, \end{cases}$$

试求 Y 的分布函数。

解： 易知 $P(Y=0) = \frac{1}{5}$，$P(Y=5) = \frac{2}{5}$，$P(1 < Y < y \leq 3) = \frac{y-1}{5}$. 因此分布函数为

$$F(y) = \begin{cases} 0, & y < 0, \\ \frac{1}{5}, & 0 \leq\leqslant y \leqslant 1, \\ \frac{y}{5}, & 1 < y < 3, \\ \frac{3}{5}, & 3 \leqslant y < 5, \\ 1, & y \geqslant 5. \end{cases}$$

22. 设随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\leqslant 0 \\ \frac{x^2}{9}, & 0<x\leqslant 3, \\ 1, & x>3. \end{cases}$$

试求出 X 的分布密度，数学期望和 $p(0<p<1)$ 分位数。

解： 由分布函数得 X 的密度函数为

$$p(x)=\begin{cases} \frac{2x}{9}, & 0<x\leqslant 3, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

$$E(X)=\int_0^3 \frac{2x}{9}dx=2$$

p 分位数为 $3\sqrt{p}$。

26. 设随机变量 X 的可能取值是 $1,2,3,4,5,6$，且概率分布是

$$P(X=x)=cx, \quad (x=1,\cdots 6),$$

其中 c 是一个正数，试求 X 的期望和中位数。

解： 由于

$$\sum_{i=1}^{6} P(X=i)=21c=1$$

得 $c=\frac{1}{21}$，期望为

$$E(X)=\sum_{i=1}^{6} iP(X=i)=\sum_{i=1}^{6} ci^2=91c=\frac{91}{21}.$$

由于 $P(X\leqslant 5)=\frac{15}{21}$，$P(X\leqslant 4)=\frac{10}{21}$，$P(X<5)\leqslant 0.5\leqslant P(X\leqslant 5)$，故中位数为 5。

27. 设随机变量 $X\sim N(10,4)$，试求下列概率：

(1) $P(6<X\leqslant 9)$;

(2) $P(13\leqslant X\leqslant 15)$.

解： (1) 由于 $X\sim N(10,4)$，

$$p(x)=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-10)^2}{8}}$$

$$P(6<X<9)=\int_6^9 \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-10)^2}{8}}dx=\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\Phi(2)-\Phi\left(\frac{1}{2}\right)\approx 0.2857.$$

(2)

$$P(13 \leqslant X \leqslant 15) = \int_{13}^{15} \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-10)^2}{8}} dx = \int_{\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \Phi\left(\frac{5}{2}\right) - \Phi\left(\frac{3}{2}\right) \approx 0.0606.$$

28. 某商店某种商品每月销售量服从泊松分布（参数为 6），问：在月初该种商品应该进货多少才能保证当月不脱销的概率大于 0.99?

解： 设销量为 X，则

$$P(X = k) = \frac{6^k}{k!} e^{-6}$$

事件 A_n : 进货 n 件商品不脱销的概率为

$$P(A_n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{6^k}{k!} e^{-6}$$

求解最小的 n 使得 $P(A_n) > 0.99$，解得 $n = 12$。

33. 设随机变量 X 取值于区间 $[a,b]$ 内 $(-\infty < a < b < +\infty)$，试证明下列不等式成立：

$$a \leqslant E(X) \leqslant b, \quad \mathrm{var}(X) \leqslant \frac{(b-a)^2}{4}.$$

证明： 由于 $a \leqslant x \leqslant b$，

$$\int_a^b ap(x)dx \leqslant \int_a^b xp(x)dx \leqslant \int_a^b bp(x)dx$$

即

$$a \leqslant E(X) \leqslant b$$

注意到对任意实数 e，有 $\mathrm{var}(X) \leqslant E((X-e)^2)$，该式在 $e = E(X)$ 时取等，令 $e = \frac{a+b}{2}$，则

$$\begin{aligned} \mathrm{var}(X) &\leqslant E\left(\left(X - \frac{a+b}{2}\right)^2\right) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 p(x)dx \\ &\leqslant \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 p(x)dx = \frac{(b-a)^2}{4}. \end{aligned}$$

4 概率部分第三章作业及多元正态分布答案

3. 设二维随机向量 (X,Y) 的联合密度为

$$p(x,y) = \begin{cases} c(R - \sqrt{x^2+y^2}), & x^2+y^2 \leqslant R^2, \\ 0, & x^2+y^2 > R^2, \end{cases}$$

求：（1）系数 c；（2）向量 (X,Y) 落入圆 $x^2+y^2\leqslant r^2(0<r<R)$ 的概率。

解：（1）

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2} p(x,y)dxdy &= \int_{\{x^2+y^2\leqslant R^2\}} c(R-\sqrt{x^2+y^2})dxdy \\ &= \int_{0\leqslant r\leqslant R}\int_{0\leqslant\theta\leqslant 2\pi} c(R-r)rd\theta dr \\ &= 2\pi c\int_0^R (R-r)rdr = c\pi R^2 = 1\end{aligned}$$

因此 $c=\frac{1}{\pi R^2}$.

（2）

$$\begin{aligned}P(x^2+y^2\leqslant r^2) &= \int_{\{x^2+y^2\leqslant r^2\}} c(R-\sqrt{x^2+y^2})dxdy \\ &= \int_{0\leqslant r'\leqslant r}\int_{0\leqslant\theta\leqslant 2\pi} c(R-r')r'd\theta dr' \\ &= 2\pi c\int_0^r (R-r')r'dr' \\ &= 2\pi c(Rr-\frac{r^2}{2}) = \frac{2r}{R}-\frac{r^2}{R^2}.\end{aligned}$$

4. 设二维随机向量 (X,Y) 服从区域

$$D=\left\{(x,y):\frac{(x+y)^2}{2a^2}+\frac{(x-y)^2}{2b^2}\leqslant 1\right\}\quad (a,b>0)$$

上的均匀分布，求 (X,Y) 的联合密度。

解：设 $I_D(x,y)$ 为示性函数，$p(x,y)=cI_D(x,y)$。令 $u=\frac{x+y}{2}, v=\frac{x-y}{2}$ 得

$$\int_{\mathbb{R}^2} p(x,y)dxdy = \int_D cdxdy = c\int_{\{\frac{2u^2}{a^2}+\frac{2v^2}{b^2}\leqslant 1\}} 2dudv = c\pi ab = 1$$

解得 $c=\frac{1}{\pi ab}$，联合密度为 $p(x,y)=\frac{1}{\pi ab}I_D(x,y)$.

8. 设随机变量 X 与 Y 相互独立。分别服从自由度为 m,n 的 χ^2 分布，即

$$p_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{2^{m/2}\Gamma(\frac{m}{2})}x^{m/2-1}e^{-x/2}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0,\end{cases}$$

$$p_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2^{n/2}\Gamma(\frac{n}{2})}y^{n/2-1}e^{-y/2}, & y>0,\\ 0, & y\leqslant 0,\end{cases}$$

试证明，$X+Y$ 服从 χ^2 分布，其自由度为 $m+n$.

证明： 设 $Z=X+Y$，

$$\begin{aligned}
p_{X+Y}(z) &= \int_0^z p_X(t)p_Y(z-t)dt \\
&= \int_0^z \frac{1}{2^{m/2}\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}\frac{1}{2^{n/2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}t^{m/2-1}e^{-t/2}(z-t)^{n/2-1}e^{-(z-t)/2}dt \\
&= \int_0^z \frac{t^{m/2-1}(z-t)^{n/2-1}e^{-z/2}}{2^{(m+n)/2}B\left(\frac{m+n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}dt
\end{aligned}$$

令 $s=\frac{t}{z}$，则

$$\begin{aligned}
p_{X+Y}(z) &= \int_0^1 \frac{s^{m/2-1}(1-s)^{n/2-1}e^{-z/2}z^{(m+n)/2-1}}{2^{(m+n)/2}B\left(\frac{m+n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}ds \\
&= \frac{z^{(m+n)/2-1}e^{-z/2}}{2^{(m+n)/2}\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}
\end{aligned}$$

即 $X+Y\sim\chi^2\left(m+n\right)$

10. 设二维随机向量 (X,Y) 的联合密度为

$$p(x,y)=\begin{cases} 4xy\exp\{-(x^2+y^2)\}, & x>0,y>0, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

求 $Z=\sqrt{X^2+Y^2}$ 的均值。

解： 作极坐标变换 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$ 得

$$\begin{aligned}
E(Z) &= \int_0^\infty\int_0^\infty \sqrt{x^2+y^2}4xy\exp\{-(x^2+y^2)\}dxdy \\
&= \int_0^\infty\int_0^{\frac{\pi}{2}} r\cdot 4r^2\cos\theta\sin\theta e^{-r^2}rd\theta dr \\
&= \left(\int_0^\infty 4r^4e^{-r^2}dr\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\sin\theta d\theta\right) \\
&= \frac{3\sqrt{\pi}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3\sqrt{\pi}}{4}.
\end{aligned}$$

对于积分 $\int_0^\infty 4r^4e^{-r^2}dr$，做变量替换 $u=r^2$，原积分变为：

$$\int_0^\infty 4r^4e^{-r^2}dr=\int_0^\infty 4(u)^2e^{-u}\frac{1}{2\sqrt{u}}du=2\int_0^\infty u^{3/2}e^{-u}du=2\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{3\sqrt{\pi}}{2}$$

因此期望为

$$E(Z)=\left(\int_0^\infty 4r^4e^{-r^2}dr\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\sin\theta d\theta\right)$$

$$= \frac{3\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}.$$

11. 设二维随机向量 (X, Y) 服从区域

$$D = \{(x, y) : 0 < x < 1, 0 < y < x\}$$

上的均匀分布，求 $E(X), \mathrm{var}(X)$ 及 X 与 Y 的相关系数。

解： 设 $I_D(x, y)$ 为示性函数，$p(x, y) = cI_D(x, y)$。

由于 $\int_0^1 \int_0^x cdxdy = 1$，解得 $c = 2$.

$$E(X) = \int_{\mathbb{R}^2} x \cdot 2I_D(x, y)dxdy = \int_0^1 2x^2 dx = \frac{2}{3}.$$

$$E(X^2) = \int_{\mathbb{R}^2} x^2 \cdot 2I_D(x, y)dxdy = \int_0^1 2x^3 dx = \frac{1}{2}.$$

$$\mathrm{var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{1}{18}.$$

$$E(XY) = \int_{\mathbb{R}^2} xy \cdot 2I_D(x, y)dxdy = \int_0^1 \int_0^x 2xydydx = \frac{1}{4}.$$

$$E(Y) = \int_{\mathbb{R}^2} y \cdot 2I_D(x, y)dxdy = \int_0^1 \int_0^x 2ydydx = \frac{1}{3}.$$

$$E(Y^2) = \int_{\mathbb{R}^2} y^2 \cdot 2I_D(x, y)dxdy = \int_0^1 \int_0^x 2y^2 dydx = \frac{1}{6}.$$

$$\rho(X, Y) = \frac{E(XY) - E(X)E(Y)}{\sqrt{\mathrm{var}(X)}\sqrt{\mathrm{var}(Y)}} = \frac{1}{2}.$$

12. 设随机变量 $X \sim N(0, 1)$, $Y = X^n$ (n 是正整数), 求 X 与 Y 的相关系数.

解： 若随机变量 $X \sim N(0, 1)$，则对一切正整数 k，可以由递推得到

$$E(X^{2k-1}) = 0, \quad E(X^{2k}) = \prod_{0 \leqslant i < k} (2k - 1 - 2i)$$

若 n 为奇数，

$$E(Y) = E(X^n) = 0$$

$$E(XY) = E(X^{n+1}) = \prod_{0 \leqslant i < \frac{n+1}{2}} (n - 2i)$$

$$E(Y^2) = E(X^{2n}) = \prod_{0 \leqslant i < n} (2n - 1 - 2i)$$

$$\rho_{XY} = \frac{E(XY)-E(X)E(Y)}{\sqrt{\mathrm{var}(X)}\sqrt{\mathrm{var}(Y)}} = \frac{\prod_{0\leqslant i<\frac{n+1}{2}}(n-2i)-0}{1\cdot\sqrt{\prod_{0\leqslant i<n}(2n-1-2i)-0^2}} = \frac{\prod_{0\leqslant i<\frac{n+1}{2}}(n-2i)}{\sqrt{\prod_{0\leqslant i<n}(2n-1-2i)}}$$

若 n 为偶数,

$$E(Y) = E(X^n) = \prod_{0\leqslant i<\frac{n}{2}}(n-1-2i)$$

$$E(XY) = E(X^{n+1}) = 0$$

$$\mathrm{cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0$$

故相关系数 $\rho_{XY} = 0$

因此，相关系数

$$\rho_{XY} = \begin{cases} \frac{\prod_{0\leqslant i<\frac{n+1}{2}}(n-2i)}{\sqrt{\prod_{0\leqslant i<n}(2n-1-2i)}}, & n\text{为奇数}, \\ 0, & n\text{为偶数}. \end{cases}$$

13. 设随机变量 X_1 与 X_2 相互独立, 分布密度分别为

$$p_1(x) = \begin{cases} 2x, & 0\leqslant x\leqslant 1, \\ 0, & , \end{cases}$$

$$p_2(x) = \begin{cases} e^{-(x-5)}, & x>5, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

求 $E(X_1X_2)$.

解:

$$E(X_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} xp_1(x)dx = \int_0^1 2x^2dx = \frac{2}{3},$$

$$E(X_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} xp_2(x)dx = \int_5^{\infty} xe^{-(x-5)}dx = \int_0^{\infty}(u+5)e^u du = \int_0^{\infty} ue^u du + \int_0^{\infty} 5e^u du = 1+5 = 6$$

由于 X_1 和 X_2 相互独立，因此

$$E(X_1X_2) = E(X_1)E(X_2) = 4.$$

14. 设 X 和 Y 是随机变量, $\mathrm{var}(X) = 25$, $\mathrm{var}(Y) = 36$, 相关系数 $\rho_{XY} = 0.4$, 求 $\mathrm{var}(X+Y)$ 及 $\mathrm{var}(X-Y)$.

解: 不妨假设 X Y 零均值。

$$\mathrm{cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \rho_{XY}\sqrt{\mathrm{var}(X)}\sqrt{\mathrm{var}(Y)} = 12.$$

$$\mathrm{var}(X+Y) = \mathrm{var}(X) + \mathrm{var}(Y) + 2\,\mathrm{cov}(X,Y) = 85.$$

$$\mathrm{var}(X-Y) = \mathrm{var}(X) + \mathrm{var}(Y) - 2\,\mathrm{cov}(X,Y) = 37.$$

15. 设二维随机向量 (X,Y) 服从二维正态分布，$E(X) = E(Y) = 0$，$\mathrm{var}(X) = a^2$，$\mathrm{var}(Y) = b^2$，$\rho_{XY} = 0$. 试求 (X,Y) 落入区域

$$D = \left\{(x,y) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant k^2\right\} \quad (k > 0)$$

的概率。

解： 由题意得，联合密度函数

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{ab2\pi} e^{-\frac{x^2}{2a^2} - \frac{y^2}{2b^2}}$$

(X,Y) 落入区域 D 的概率为

$$P((X,Y) \in D) = \iint_D f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy = \iint_D \frac{1}{ab2\pi} e^{-\frac{x^2}{2a^2} - \frac{y^2}{2b^2}}\,dx\,dy$$

使用极坐标变换：$x = ar\cos\theta, \quad y = br\sin\theta.$

在这种变换下，雅可比行列式为：

$$J = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right| = abr$$

区域 D 变换后为：

$$\frac{(ar\cos\theta)^2}{a^2} + \frac{(br\sin\theta)^2}{b^2} = r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = r^2 \leq k^2$$

因此，积分可表示为

$$P((X,Y) \in D) = \int_0^{2\pi}\int_0^k \frac{1}{ab2\pi} e^{-\frac{(ar\cos\theta)^2}{2a^2} - \frac{(br\sin\theta)^2}{2b^2}} \cdot abr\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^k \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{r^2}{2}} r\,dr\,d\theta$$

令 $u = \frac{r^2}{2}$，则

$$P((X,Y) \in D) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{k^2}{2}} \frac{1}{2\pi} e^{-u}\,du\,d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi}(1 - e^{-\frac{k^2}{2}})\,d\theta = \frac{1}{2\pi}(1 - e^{-\frac{k^2}{2}})\int_0^{2\pi} d\theta = 1 - e^{-\frac{k^2}{2}}$$

16. 设三维随机向量 (X,Y,Z) 的联合密度为

$$p(x,y,z) = \begin{cases} e^{-(x+y+z)}, & x > 0, y > 0, z > 0, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

试分别求出随机变量 X, Y, Z 的分布密度，又问：X, Y, Z 相互独立吗?

解:

$$f_X(x) = \int_0^\infty \int_0^\infty p(x,y,z)\,dy\,dz = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x+y+z)}\,dy\,dz = \int_0^\infty e^{-x-z}\,dz = e^{-x}\cdot 1 = e^{-x}$$

因此，X 的边缘分布密度为:

$$f_X(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x > 0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \int_0^\infty \int_0^\infty p(x,y,z)\,dx\,dz = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x+y+z)}\,dx\,dz = \int_0^\infty e^{-y-z}\,dz = e^{-y}\cdot 1 = e^{-y}$$

因此，Y 的边缘分布密度为:

$$f_Y(y) = \begin{cases} e^{-y}, & y > 0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

$$f_Z(z) = \int_0^\infty \int_0^\infty p(x,y,z)\,dx\,dy = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x+y+z)}\,dx\,dy = \int_0^\infty e^{-y-z}\,dy = e^{-z}\cdot 1 = e^{-z}$$

因此，Z 的边缘分布密度为:

$$f_Z(z) = \begin{cases} e^{-z}, & z > 0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

注意到

$$f_X(x)\cdot f_Y(y)\cdot f_Z(z) = e^{-x}\cdot e^{-y}\cdot e^{-z} = e^{-(x+y+z)} = p(x,y,z)$$

因此，X, Y, Z 是相互独立的。

17. 设随机变量 X, Y, Z 相互独立，都服从标准正态分布，求 $\xi \triangleq \sqrt{X^2+Y^2+Z^2}$ 的概率分布.

解: 由于 X, Y, Z 都服从标准正态分布 $N(0,1)$，因此 X^2, Y^2, Z^2 都服从卡方分布 $\chi^2(1)$，它们的和 ξ^2 服从自由度为 3 的卡方分布 $\chi^2(3)$。

设 $\xi^2 = W$，则 $W \sim \chi^2(3)$，密度函数为

$$f_W(w) = \frac{w^{1.5-1}e^{-w/2}}{2^{1.5}\Gamma(1.5)} = \frac{w^{0.5}e^{-w/2}}{2^{1.5}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}} = \frac{w^{0.5}e^{-w/2}}{\sqrt{2\pi}}$$

其中利用了 $\Gamma(1.5) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$。

设 $g(w) = \sqrt{w}$，则 $g'(w) = \frac{1}{2\sqrt{w}}$。逆变换为 $w = g^{-1}(\xi) = \xi^2$。

由变换公式，ξ 的概率密度函数为:

$$f_\xi(\xi) = f_W(g^{-1}(\xi))\left|\frac{d}{d\xi}g^{-1}(\xi)\right| = f_W(\xi^2)\left|\frac{d}{d\xi}(\xi^2)\right| = \frac{(\xi^2)^{0.5}e^{-(\xi^2)/2}}{\sqrt{2\pi}}\cdot 2\xi = \frac{\xi e^{-(\xi^2)/2}}{\sqrt{2\pi}}\cdot 2\xi = \frac{2\xi^2 e^{-(\xi^2)/2}}{\sqrt{2\pi}}$$

因此，ξ 的概率密度函数为：

$$f_\xi(\xi) = \frac{2\xi^2 e^{-(\xi^2)/2}}{\sqrt{2\pi}}, \quad (\xi \geqslant 0)$$

.

18. 设随机变量 $X_1, \ldots, X_n$ 独立同分布，共同的分布是威布尔分布，即共同的分布函数是 $F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\left(\frac{x}{\eta}\right)^m}, & x > 0, \\ 0, & x \leqslant 0, \end{cases} \quad (m > 0, \eta > 0),$

试证明 $\xi \triangleq \min\{X_1, \ldots, X_n\}$ 仍服从威布尔分布。

证明： 由于 $\xi = \min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$，所以 $\xi > x$ 当且仅当所有 $X_i > x$（$i = 1, 2, \ldots, n$）。因为 X_i 是独立的，我们有：

$$P(\xi > x) = P(X_1 > x, X_2 > x, \ldots, X_n > x) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i > x) = \prod_{i=1}^{n} (1 - F(x)) = e^{-n\left(\frac{x}{\eta}\right)^m}$$

所以：

$$F_\xi(x) = 1 - P(\xi > x) = 1 - e^{-n\left(\frac{x}{\eta}\right)^m}$$

设 $\eta' = \eta \left(\frac{1}{n}\right)^{1/m}$，则：

$$F_\xi(x) = 1 - e^{-\left(\frac{x}{\eta'}\right)^m}$$

因此，$\xi = \min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ 仍然服从威布尔分布，其参数为：

$$\eta' = \eta \left(\frac{1}{n}\right)^{1/m}.$$

19. 对于随机变量 X, Y, Z, 已知

$$E(X) = E(Y) = 1, \quad E(Z) = -1,$$
$$\mathrm{var}(X) = \mathrm{var}(Y) = \mathrm{var}(Z) = 1,$$
$$\rho_{XY} = 0, \quad \rho_{XZ} = 1/2, \quad \rho_{YZ} = -1/2,$$

试求 $E(X + Y + Z)$ 及 $\mathrm{var}(X + Y + Z)$.

解：

$$E(X + Y + Z) = E(X) + E(Y) + E(Z) = 1 + 1 - 1 = 1$$

$$\mathrm{var}(X + Y + Z) = \mathrm{var}(X) + \mathrm{var}(Y) + \mathrm{var}(Z) + 2\left(\mathrm{cov}(X, Y) + \mathrm{cov}(X, Z) + \mathrm{cov}(Y, Z)\right)$$

计算协方差：

$$\mathrm{cov}(X, Y) = \rho_{XY}\sqrt{\mathrm{var}(X)\mathrm{var}(Y)} = 0 \cdot \sqrt{1 \cdot 1} = 0$$

$$\text{cov}(X,Z) = \rho_{XZ}\sqrt{\text{var}(X)\text{var}(Z)} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{1\cdot 1} = \frac{1}{2}$$

$$\text{cov}(Y,Z) = \rho_{YZ}\sqrt{\text{var}(Y)\text{var}(Z)} = -\frac{1}{2}\cdot\sqrt{1\cdot 1} = -\frac{1}{2}$$

代入方差公式：

$$\text{var}(X+Y+Z) = 1+1+1+2\left(0+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right) = 3$$

因此，$E(X+Y+Z)=1$，$\text{var}(X+Y+Z)=3$。

20. 设随机变量 X 与 Y 相互独立, $X\sim N(0,1), Y\sim N(0,1)$, 试求 $U=X+Y$, $V=X-Y$ 的联合密度.

解： 设变换：

$$\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

变换矩阵 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$，逆变换矩阵 $\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

由于 X 和 Y 相互独立且都服从标准正态分布，它们的联合密度函数为：

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$$

代入逆变换：

$$x(u,v) = \frac{u+v}{2}, \quad y(u,v) = \frac{u-v}{2}, \quad |\det(\mathbf{A}^{-1})| = \left|\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$$

所以，U,V 的联合密度为：

$$f_{U,V}(u,v) = f_{X,Y}(x(u,v),y(u,v))\cdot|\det(\mathbf{A}^{-1})| = \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{\left(\frac{u+v}{2}\right)^2+\left(\frac{u-v}{2}\right)^2}{2}}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{u^2+v^2}{4}}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4\pi}e^{-\frac{u^2+v^2}{4}}$$

21. 设随机变量 X 与 Y 相互独立, $X\sim N(0,1), Y\sim N(0,1)$, 试证: $U=X^2+Y^2$ 与 $V=X/Y$ 是相互独立的.

证明： 作极坐标变换：$X=R\cos\Theta,\quad Y=R\sin\Theta$，雅可比行列式 J 为：

$$J = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right| = r$$

X 和 Y 的联合密度函数为：

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$$

因此，R 和 Θ 的联合密度函数为：

$$f_{R,\Theta}(r,\theta)=f_{X,Y}(r\cos(\theta),r\sin(\theta))\cdot|J|=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{r^2}{2}}\cdot r=\frac{r}{2\pi}e^{-\frac{r^2}{2}}$$

R 的边缘密度函数：

$$f_R(r)=\int_0^{2\pi}f_{R,\Theta}(r,\theta)\,d\theta=\int_0^{2\pi}\frac{r}{2\pi}e^{-\frac{r^2}{2}}\,d\theta=re^{-\frac{r^2}{2}}$$

Θ 的边缘密度函数：

$$f_\Theta(\theta)=\int_0^{\infty}f_{R,\Theta}(r,\theta)\,dr=\int_0^{\infty}\frac{r}{2\pi}e^{-\frac{r^2}{2}}\,dr=\frac{1}{2\pi}$$

注意到 $f_{R,\Theta}(r,\theta)=f_R(r)\cdot f_\Theta(\theta)$，这表明 R 和 Θ 是相互独立的。

又由于

$$U=X^2+Y^2=R^2,\quad V=\frac{X}{Y}=\frac{\cos(\Theta)}{\sin(\Theta)}=\cot(\Theta)$$

因为 R 和 Θ 是相互独立的，而 U 只依赖于 R，V 只依赖于 Θ，所以 U 和 V 也是相互独立的。

22. 设随机变量 X 与 Y 相互独立, X 服从区间 $[0,1]$ 上的均匀分布, Y 服从区间 $[1,3]$ 上的均匀分布, 试求 $E(XY)$ 及 $\mathrm{var}(XY)$.

解：

$$E(X)=\frac{0+1}{2}=\frac{1}{2},\quad E(Y)=\frac{1+3}{2}=2$$

由于 X 和 Y 相互独立，

$$E(XY)=E(X)\cdot E(Y)=\frac{1}{2}\cdot 2=1$$

$$E(X^2)=\int_0^1 x^2\,dx=\frac{1}{3},\quad E(Y^2)=\int_1^3\frac{1}{2}y^2\,dy=\frac{27}{6}-\frac{1}{6}=\frac{13}{3}$$

同样，X^2 和 Y^2 相互独立，

$$E((XY)^2)=E(X^2)\cdot E(Y^2)=\frac{1}{3}\cdot\frac{13}{3}=\frac{13}{9}$$

因此

$$\mathrm{var}(XY)=E((XY)^2)-[E(XY)]^2=\frac{13}{9}-1^2=\frac{4}{9}$$

23. 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且 $\mathrm{var}(X)$ 和 $\mathrm{var}(Y)$ 存在, 试证:

$$\mathrm{var}(XY)\geqslant\mathrm{var}(X)\,\mathrm{var}(Y).$$

证明： 由于 X 和 Y 相互独立，有：

$$E((XY)^2)=E(X^2Y^2)=E(X^2)E(Y^2),\quad E(XY)=E(X)E(Y)$$

计算方差:

$$\begin{aligned}\operatorname{var}(X)\operatorname{var}(Y) &= (E(X^2)-[E(X)]^2)(E(Y^2)-[E(Y)]^2)\\ &= E(X^2)E(Y^2)-E(X^2)[E(Y)]^2-[E(X)]^2E(Y^2)+[E(X)]^2[E(Y)]^2\end{aligned}$$

$$\operatorname{var}(XY)=E(X^2)E(Y^2)-[E(X)E(Y)]^2$$

由于:

$$E(X^2)\geqslant [E(X)]^2,\quad E(Y^2)\geqslant [E(Y)]^2$$

因此

$$E(X^2)[E(Y)]^2+[E(X)]^2E(Y^2)\geqslant 2[E(X)]^2[E(Y)]^2$$

$$\operatorname{var}(X)\operatorname{var}(Y)-\operatorname{var}(XY)=2[E(X)]^2[E(Y)]^2-E(X^2)[E(Y)]^2+[E(X)]^2E(Y^2)\leqslant 0$$

即

$$\operatorname{var}(XY)\geqslant \operatorname{var}(X)\operatorname{var}(Y)$$

24. 设一城市有 n 个区, 其中住有 x_j 个居民的区共有 n_j 个 ($\sum n_j=n$). 令

$$m=\sum_j \frac{n_jx_j}{n},\quad \sigma^2=\sum_j\frac{n_jx_j^2}{n}-m^2.$$

(m 是每个区的居民民数的平均均数). 现在随机选取 r 个区, 并数出其中每个区中的居民民数, 设 $X_1,\cdots,X_r$ 分别为这 r 个区的居民民数, 试证:

$$E(X_1+\cdots+X_r)=mr,\quad \operatorname{var}(X_1+\cdots+X_r)=\frac{\sigma^2r(n-r)}{n-1}.$$

证明: 由于每个区被选中的概率相等, 每个区的居民数的期望为:

$$E(X_i)=\sum_j x_j\cdot P(X_i=x_j)=\sum_j x_j\cdot\frac{n_j}{n}=\frac{1}{n}\sum_j n_jx_j=m$$

$$E(X_i^2)=\sum_j x_j^2\cdot P(X_i=x_j)=\sum_j x_j^2\cdot\frac{n_j}{n}=\frac{1}{n}\sum_j n_jx_j^2$$

因此:

$$\operatorname{var}(X_i)=\frac{1}{n}\sum_j n_jx_j^2-m^2=\sigma^2$$

$$E(X_1+X_2+\cdots+X_r)=E(X_1)+E(X_2)+\cdots+E(X_r)=r\cdot E(X_i)=r\cdot m$$

对于任意两个变量 X_i 和 X_j , $E(X_iX_j)$ 可以表示为:

$$E(X_iX_j)=\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i\neq j}x_ix_j=\frac{1}{n(n-1)}\left[\left(\sum_j x_j\right)^2-\sum_j x_j^2=n^2m^2-n\sum_j\frac{n_jx_j^2}{n}\right]$$

$$= \frac{1}{n(n-1)}(n^2m^2 - n\left(n\sigma^2 + nm^2\right)) = \frac{-n^2\sigma^2}{n(n-1)}$$

协方差为

$$\operatorname{cov}(X_i, X_j) = \frac{-n\sigma^2}{n-1} - m^2 = \frac{-n\sigma^2 - (n-1)m^2}{n-1} = \frac{-\sigma^2}{n-1}$$

$$\operatorname{var}(X_1+X_2+\cdots+X_r) = \sum_{i=1}^{r}\operatorname{var}(X_i)+2\sum_{1\le i<j\le r}\operatorname{cov}(X_i,X_j) = r\sigma^2 - \frac{r(r-1)\sigma^2}{n-1} = \sigma^2\left(\frac{r(n-r)}{n-1}\right)$$

25. 设 $X_1, \ldots, X_n$ 是独立同分布的正值随机变列, 试证:

$$E\left(\frac{X_1+\cdots+X_k}{X_1+\cdots+X_n}\right) = \frac{k}{n} \quad (k=1,\ldots,n).$$

证明: 设 $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ 和 $S_k = X_1 + X_2 + \cdots + X_k$。由于 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 是独立同分布的正值随机变量,

$$E(S_n) = E(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = n\mu, \quad E(S_k) = E(X_1 + X_2 + \cdots + X_k) = k\mu$$

对于任意 i 和 j，$\frac{X_i}{S_n}$ 和 $\frac{X_j}{S_n}$ 的期望值相同。因此，我们可以考虑所有 $\frac{X_i}{S_n}$ 的和:

$$E\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{X_i}{S_n}\right) = E(1) = 1$$

由于 $\frac{X_i}{S_n}$ 的期望值相同，因此:

$$E\left(\frac{X_i}{S_n}\right) = \frac{1}{n} \quad \text{对于所有} i = 1, 2, \ldots, n$$

$$E\left(\frac{S_k}{S_n}\right) = E\left(\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_k}{S_n}\right) = E\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{X_i}{S_n}\right) = \sum_{i=1}^{k} E\left(\frac{X_i}{S_n}\right) = k\cdot\frac{1}{n} = \frac{k}{n}$$

26. 设随机变量 $X_1, \cdots, X_n$ 独立同分布, $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, 记

$$\xi = \sum_{i=1}^{m} X_i, \quad \eta = \sum_{i=1}^{n} X_i \quad (1 \leqslant m < n),$$

试求 (ξ, η) 的联合密度.

解: ξ , η 是 m 个独立正态随机变量的和，因此 ξ , η 也服从正态分布:

$$\xi \sim N(m\mu, m\sigma^2), \quad \eta \sim N(n\mu, n\sigma^2)$$

由于 X_i 独立同分布，只有当 $i = j$ 时，$\operatorname{cov}(X_i, X_j) = \sigma^2$，否则为 0。因此 ξ 和 η 的协方差为:

$$\operatorname{cov}(\xi, \eta) = \operatorname{cov}\left(\sum_{i=1}^{m} X_i, \sum_{j=1}^{n} X_j\right) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\operatorname{cov}(X_i, X_j) = \sum_{i=1}^{m}\operatorname{cov}(X_i, X_i) = m\sigma^2$$

ξ 和 η 的联合分布是一个二维正态分布，其均值向量和协方差矩阵分别为:

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} m\mu \\ n\mu \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} m\sigma^2 & m\sigma^2 \\ m\sigma^2 & n\sigma^2 \end{pmatrix}$$

二维正态分布的联合密度函数为:

$$f_{\xi,\eta}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\det(\boldsymbol{\Sigma})}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{\mu})^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{\mu})\right)$$

其中，$\boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$，协方差矩阵的逆

$$\boldsymbol{\Sigma}^{-1} = \frac{1}{\det(\boldsymbol{\Sigma})} \begin{pmatrix} n\sigma^2 & -m\sigma^2 \\ -m\sigma^2 & m\sigma^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{m\sigma^4(n-m)} \begin{pmatrix} n\sigma^2 & -m\sigma^2 \\ -m\sigma^2 & m\sigma^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{m\sigma^2(n-m)} \begin{pmatrix} n & -m \\ -m & m \end{pmatrix}$$

代入得联合密度函数

$$f_{\xi,\eta}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{m\sigma^4(n-m)}} \exp\left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{m\sigma^2(n-m)} \left[n(x-m\mu)^2 - 2m(x-m\mu)(y-n\mu) + m(y-n\mu)^2\right]\right)$$

27. 设随机变量 X 与 Y 独立同分布, $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, α, β 是两个实数 (全不为 0).

(1) 求 $\alpha X + \beta Y$ 与 $\alpha X - \beta Y$ 的相关系数和联合密度;

(2) 证明: $E(\max\{X,Y\}) = \mu + \frac{\sigma}{\sqrt{\pi}}$.

解: (1) 设 $U = \alpha X + \beta Y, \quad V = \alpha X - \beta Y$，期望为

$$E(U) = E(\alpha X + \beta Y) = \alpha E(X) + \beta E(Y) = \alpha\mu + \beta\mu = (\alpha+\beta)\mu$$

$$E(V) = E(\alpha X - \beta Y) = \alpha E(X) - \beta E(Y) = \alpha\mu - \beta\mu = (\alpha-\beta)\mu$$

由于 X 和 Y 独立同分布:

$$\operatorname{Var}(U) = \operatorname{Var}(\alpha X + \beta Y) = \alpha^2 \operatorname{Var}(X) + \beta^2 \operatorname{Var}(Y) = \alpha^2\sigma^2 + \beta^2\sigma^2 = (\alpha^2+\beta^2)\sigma^2$$

$$\operatorname{Var}(V) = \operatorname{Var}(\alpha X - \beta Y) = \alpha^2 \operatorname{Var}(X) + \beta^2 \operatorname{Var}(Y) = \alpha^2\sigma^2 + \beta^2\sigma^2 = (\alpha^2+\beta^2)\sigma^2$$

U, V 的协方差为

$$\operatorname{Cov}(U,V) = \operatorname{Cov}(\alpha X+\beta Y, \alpha X-\beta Y) = \alpha^2 \operatorname{Cov}(X,X) - \beta^2 \operatorname{Cov}(Y,Y) = \alpha^2\sigma^2 - \beta^2\sigma^2 = (\alpha^2-\beta^2)\sigma^2$$

相关系数

$$\rho_{UV} = \frac{\operatorname{Cov}(U,V)}{\sqrt{\operatorname{Var}(U)\operatorname{Var}(V)}} = \frac{(\alpha^2-\beta^2)\sigma^2}{\sqrt{(\alpha^2+\beta^2)\sigma^2(\alpha^2+\beta^2)\sigma^2}} = \frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}$$

由于 X 和 Y 独立同分布且均为正态分布，U 和 V 也是正态分布的线性组合，因此 (U,V) 也是二维正态分布，参数为

$$\boldsymbol{\mu}=\begin{pmatrix}(\alpha+\beta)\mu\\(\alpha-\beta)\mu\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\Sigma}=\begin{pmatrix}(\alpha^2+\beta^2)\sigma^2 & (\alpha^2-\beta^2)\sigma^2\\(\alpha^2-\beta^2)\sigma^2 & (\alpha^2+\beta^2)\sigma^2\end{pmatrix}$$

$$\det(\boldsymbol{\Sigma})=\det\begin{pmatrix}(\alpha^2+\beta^2)\sigma^2 & (\alpha^2-\beta^2)\sigma^2\\(\alpha^2-\beta^2)\sigma^2 & (\alpha^2+\beta^2)\sigma^2\end{pmatrix}=((\alpha^2+\beta^2)\sigma^2)((\alpha^2+\beta^2)\sigma^2)-((\alpha^2-\beta^2)\sigma^2)^2$$

$$=(\alpha^2+\beta^2)^2\sigma^4-(\alpha^2-\beta^2)^2\sigma^4=4\alpha^2\beta^2\sigma^4$$

$$\boldsymbol{\Sigma}^{-1}=\frac{1}{4\alpha^2\beta^2\sigma^4}\begin{pmatrix}(\alpha^2+\beta^2)\sigma^2 & -(\alpha^2-\beta^2)\sigma^2\\-(\alpha^2-\beta^2)\sigma^2 & (\alpha^2+\beta^2)\sigma^2\end{pmatrix}=\frac{1}{4\alpha^2\beta^2\sigma^2}\begin{pmatrix}\alpha^2+\beta^2 & -(\alpha^2-\beta^2)\\-(\alpha^2-\beta^2) & \alpha^2+\beta^2\end{pmatrix}$$

代入二维正态分布的联合密度函数：

$$f_{U,V}(u,v)=\frac{1}{4\pi\alpha\beta\sigma^2}\exp\left(-\frac{1}{8\alpha^2\beta^2\sigma^2}\left[(\alpha^2+\beta^2)(u-(\alpha+\beta)\mu)^2\right.\right.$$
$$\left.\left.-2(\alpha^2-\beta^2)(u-(\alpha+\beta)\mu)(v-(\alpha-\beta)\mu)+(\alpha^2+\beta^2)(v-(\alpha-\beta)\mu)^2\right]\right)$$

(2) 令 $X_1=\frac{X-\mu}{\sigma}$,$Y_1=\frac{Y-\mu}{\sigma}$，X_1,Y_1 均服从标准正态分布，$\max\{X,Y\}=\mu+\sigma\max\{X_1,Y_1\}$. 注意到

$$\max\{X_1,Y_1\}=\frac{1}{2}(X_1+Y_1+|X_1-Y_1|)$$

由于 $X_1-Y_1\sim N(0,2)$,

$$E|X_1-Y_1|=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|x|\exp\left\{-\frac{x^2}{4}\right\}dx=\frac{2}{\sqrt{\pi}}$$

因此 $E(\max\{X,Y\})=\mu+\frac{\sigma}{\sqrt{\pi}}$.

28. 考虑 $m(m\geqslant 2)$ 个独立试验. 每个试验具有 $r(r\geqslant 2)$ 个可能的试验结果，相应出现的概率分别为 $p_1,\cdots,p_r\left(\sum\limits_{i=1}^{r}p_i=1\right)$. 用 X_i 表示 m 个试验中结果 $i(i=1,\cdots,r)$ 出现的次数. 试求出：

(1) r 维随机向量 $(X_1,\cdots,X_r)$ 的概率分布；

(2) X_i 与 $X_j(i\neq j)$ 的协方差。

解： (1) 设 X_i 是 m 次试验中结果 i 出现的次数，则 r 维随机向量 $(X_1,X_2,\ldots,X_r)$ 的概率分布是一个多项式分布，其分布可以表示为：

$$P(X_1=x_1,X_2=x_2,\ldots,X_r=x_r)=\frac{m!}{x_1!x_2!\cdots x_r!}p_1^{x_1}p_2^{x_2}\cdots p_r^{x_r}$$

(2) 由于 X_i 服从二项分布，其期望和方差为:

$$E(X_i) = mp_i, \quad \mathrm{Var}(X_i) = mp_i(1-p_i), \quad E(X_i^2) = (mp_i)^2 + mp_i(1-p_i)$$

对于任意的 X_i, X_j，$X_i + X_j \sim B(m, p_i + p_j)$，我们有:

$$E(X_i + X_j)^2 = (m(p_i+p_j))^2 + m(p_i+p_j)(1-p_i-p_j)$$

$$\begin{aligned}
E(X_iX_j) &= \frac{1}{2}(E(X_i+X_j)^2 - E(X_i^2) - E(X_j^2)) \\
&= \frac{1}{2}[(m(p_i+p_j))^2 + m(p_i+p_j)(1-p_i-p_j) - ((mp_i)^2 + mp_i(1-p_i)) - ((mp_j)^2 + mp_j(1-p_je)] \\
&= m^2p_ip_j - mp_ip_j
\end{aligned}$$

因此:

$$\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = E(X_iX_j) - E(X_i)E(X_j) = m^2p_ip_j - mp_ip_j - (mp_i)(mp_j) = -mp_ip_j$$

29. 设 $X_1, \cdots, X_n (n \geqslant 2)$ 是独立同分布的随机变量列，且 $E[(X_1 - E(X_1))^3] = 0$ ，试证：随机变量 $\xi = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ 与 $\eta = \sum_{i=1}^{n}(X_i - \xi)^2$ 是不相关的。

证明： 设 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 中每个 X_i 的期望为 μ，方差为 σ^2。由独立同分布:

$$\begin{aligned}
\mathrm{cov}(\xi, \eta) &= \mathrm{cov}(\xi - \mu, \eta) = E((\xi-\mu)\eta) \\
&= \sum_{i=1}^{n} E((\xi-\mu)(X_i - \mu + \mu - \xi)^2) \\
&= \sum_{i=1}^{n} E(\xi-\mu)(X_i-\mu)^2 - 2E\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)(\xi-\mu)^2\right) + \sum_{i=1}^{n} E(\xi-\mu)^3 \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n} E(X_j-\mu)(X_i-\mu)^2 - nE(\xi-\mu)^3
\end{aligned}$$

其中对于 $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{n}E(X_j-\mu)(X_i-\mu)^2$，在 $i=j$ 时 $E(X_i-\mu)^3 = 0$，在 $i \neq j$ 时 $E(X_j-\mu)(X_i-\mu)^2 = E(X_j-\mu)E(X_i-\mu)^2 = 0$，因此 $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{n}E(X_j-\mu)(X_i-\mu)^2 = 0$。

对于 $nE(\xi-\mu)^3 = \frac{1}{n^2}E\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)\right)^3$，展开后形如 $E(X_i-\mu)^3$ 项期望为 0，形如 $E(X_i-\mu)^2(X_j-\mu)$ 和 $E(X_i-\mu)(X_j-\mu)(X_k-\mu)$ 项由独立性，期望也为 0，因此 $nE(\xi-\mu)^3 = 0$.

因此协方差

$$\mathrm{cov}(\xi, \eta) = 0$$

30. 若 X 的分布密度是偶函数，且 $E(X^2)$ 存在，试证：$|X|$ 与 X 不相关，但它们不相互独立. 若 $X_1, \cdots, X_n (n \geqslant 2)$ 相互独立, $\mathrm{var}(X_i) = \sigma_i^2 (i = 1, \cdots, n)$, 试找"权" $a_1, \cdots, a_n$ $\left(a_i \geqslant 0, \sum_{i=1}^{n} a_i = 1\right)$, 使得 $\sum_{i=1}^{n} a_i X_i$ 的方差最小。

解： 由于 $f(x)$ 是偶函数，X 的期望 $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx = 0$，

$$E(|X|X) = \int_{-\infty}^{\infty} |x| x f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{0} (-x) x f(x)\, dx + \int_{0}^{\infty} x x f(x)\, dx = 0$$

$$\mathrm{Cov}(|X|, X) = E(|X|X) - E(|X|)E(X) = 0 - 0 = 0$$

因此，$|X|$ 和 X 不相关。

考虑 X 的具体分布，例如 $X \sim N(0,1)$。在这种情况下，$|X|$ 的分布为半正态分布。显然，$P(|X| = x, X = -x) = 0$，而 $P(|X| = x)P(X = -x) > 0$，这说明 $|X|$ 和 X 不独立。

因此，$|X|$ 和 X 不相关但不独立。

考虑线性组合 $Y = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i$，其方差为：

$$\mathrm{Var}(Y) = \mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2\, \mathrm{Var}(X_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sigma_i^2$$

其中，若有方差 $\sigma_{i_0}^2 = 0$，则由约束条件 $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$ 知，应取 $a_{i_0} = 1, a_i = 0 (i \neq i_0)$。

若所有方差 $\sigma_i^2 > 0$，则为了使 $\mathrm{Var}(Y)$ 最小，我们需要最小化 $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sigma_i^2$。这是一个带约束的优化问题，可以使用拉格朗日乘数法解决。定义拉格朗日函数：

$$L(a_1, a_2, \ldots, a_n, \lambda) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sigma_i^2 + \lambda \left(1 - \sum_{i=1}^{n} a_i\right)$$

对 a_i 求导并令导数为零：

$$\frac{\partial L}{\partial a_i} = 2 a_i \sigma_i^2 - \lambda = 0 \implies a_i = \frac{\lambda}{2\sigma_i^2}$$

利用 $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$：

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda}{2\sigma_i^2} = 1 \implies \lambda \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2\sigma_i^2} = 1 \implies \lambda = \frac{2}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma_i^2}}$$

代入 λ 得到最优权重：

$$a_i = \frac{1}{\sigma_i^2 \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\sigma_j^2}}$$

31. 若 X 与 Y 都是只取两个值的随机变量，试证明：若 X 与 Y 不相关，则 X 与 Y 相互独立。

证明: 不妨设 X, Y 分别取 x_1, x_2 和 y_1, y_2，$P(X=x_1)=q_1$，$P(X=x_2)=1-q_1$；$P(Y=y_1)=q_2$，$P(Y=y_2)=1-q_2$；$P(X=x_1, Y=y_1)=p_1$，$P(X=x_1, Y=y_2)=p_2$，$P(X=x_2, Y=y_1)=p_3$，$P(X=x_2, Y=y_2)=p_4$.

由于不相关，

$$\operatorname{cov}(X, Y)=x_1 y_1 p_1+x_1 y_2 p_2+x_2 y_1 p_3+x_2 y_2 p_4-(x_1 q_1+x_2(1-q_1))(y_1 q_2+y_2(1-q_2))=0$$

其中 $q_1=p_1+p_2, q_2=p_1+p_3, p_1+p_2+p_3+p_4=1$

假设 q_1, q_2 已知，求解方程组得

$$p_1=q_1 q_2, \quad p_2=q_1(1-q_2), \quad p_3=(1-q_1) q_2, \quad p_4=(1-q_1)(1-q_2).$$

故 X 与 Y 相互独立。

33. 设函数

$$\delta(x)= \begin{cases}1, & x \geqslant 0, \\ 0, & x<0,\end{cases}$$

试证: 随机变量 X 与 Y 相互独立的充分必要条件是

$$E(\delta(a-X) \delta(b-Y))=E(\delta(a-X)) E(\delta(b-Y)) \quad (\text{一切} a, b).$$

证明: 充分性:

假设 X 和 Y 相互独立。

$$E(\delta(a-X))=P(a-X \geqslant 0)=P(X \leq a)$$

$$E(\delta(b-Y))=P(b-Y \geqslant 0)=P(Y \leq b)$$

由于 X 和 Y 相互独立，我们有:

$$E(\delta(a-X) \delta(b-Y))=P((a-X \geqslant 0) \cap(b-Y \geqslant 0))=P(X \leq a, Y \leq b)$$

$$P(X \leq a, Y \leq b)=P(X \leq a) P(Y \leq b)=E(\delta(a-X)) E(\delta(b-Y))$$

因此，如果 X 和 Y 相互独立，则 $E(\delta(a-X) \delta(b-Y))=E(\delta(a-X)) E(\delta(b-Y))$ 对于所有 a 和 b 成立。

必要性:

假设 $E(\delta(a-X) \delta(b-Y))=E(\delta(a-X)) E(\delta(b-Y))$ 对于所有 a 和 b 成立。

设 $A=\{X\leq a\}$ 和 $B=\{Y\leq b\}$。

$$P(A\cap B)=P(X\leq a,Y\leq b)=E(\delta(a-X)\delta(b-Y))$$

根据假设 $E(\delta(a-X)\delta(b-Y))=E(\delta(a-X))E(\delta(b-Y))$，我们有：

$$P(X\leq a,Y\leq b)=P(X\leq a)P(Y\leq b)$$

对于任意的 a 和 b，我们都有 $P(X\leq a,Y\leq b)=P(X\leq a)P(Y\leq b)$。这意味着对于任意的 A 和 B，有 $P(A\cap B)=P(A)P(B)$。因此，X 和 Y 相互独立。

34. 一辆交通车送 25 名乘客到 7 个站, 假设每一个乘客等可能地在任一站下车, 且他们行动独立, 交通车只在有人下车时才停站, 问: 该交通车停站的期望次数是多少?

解: 设 X_i 是一个指示变量, 表示第 i 站是否有乘客下车 (如果有乘客下车则 $X_i=1$, 否则 $X_i=0$)。交通车停站的总次数 X 可以表示为 $X=X_1+X_2+\cdots+X_7$, 期望为

$$E[X]=E[X_1+X_2+\cdots+X_7]=E[X_1]+E[X_2]+\cdots+E[X_7]$$

第 i 站至少有一名乘客下车的概率为:

$$P(\text{第}i\text{ 站至少有一名乘客下车})=1-\left(\frac{6}{7}\right)^{25}$$

因此,

$$E[X_i]=1-\left(\frac{6}{7}\right)^{25}$$

$$E[X]=7\times\left(1-\left(\frac{6}{7}\right)^{25}\right)$$

35. 50 个人排队作肺部透视, 假设他们中有 4 个阳性患者, 问: 在出现第一个阳性患者之前, 阴性反应者的人数平均是多少?

解: 设 X 为第一位阳性患者出现的位置，则

$$P(X\geqslant k)=\frac{C_{51-k}^4}{C_{50}^4}$$

因此所求平均值为

$$E(X)-1=\sum_{k=1}^{47}P(X\geqslant k)-1=\sum_{k=1}^{47}\frac{C_{51-k}^4}{C_{50}^4}-1=\frac{C_{51}^5}{C_{50}^4}-1=\frac{46}{5}$$

38. 若对于随机变量 $X,E(e^{aX})$ 存在 (a 是正常数), 试证:

$$P(X\geqslant\varepsilon)\leqslant e^{-a\varepsilon}E(e^{aX})\quad(\text{一切 }\varepsilon>0).$$

证明: 设随机变量 $Y = e^{aX}$，其中 $a > 0$。显然，Y 是非负的。

由马尔可夫不等式，得:

$$P(X \geqslant \varepsilon) = P(Y \geqslant e^{a\varepsilon}) \leqslant \frac{E(Y)}{e^{a\varepsilon}}.$$

因此:

$$P(X \geqslant \varepsilon) \leqslant e^{-a\varepsilon} E(e^{aX}).$$

39. 设随机变量 X 与 Y 相互独立，$X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$，已知 $\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2$，试求 $P(X > Y)$.

解: 设 $Z = X - Y$。由于 X 和 Y 是相互独立的，Z 也是一个正态随机变量，$Z \sim N(\mu_1 - \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$。

令 $W = \frac{Z - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}$，则 W 服从标准正态分布 $N(0,1)$。因此:

$$P(Z > 0) = P\left(W > \frac{\mu_2 - \mu_1}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}\right)$$

设 $d = \frac{\mu_1 - \mu_2}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}$，则:

$$P(Z > 0) = P(W > -d) = 1 - P(W \leq -d) = P(W \leq d) = \Phi\left(\frac{\mu_1 - \mu_2}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}\right)$$

其中第三个等号利用了标准正态分布的对称性。因此

$$P(X > Y) = \Phi\left(\frac{\mu_1 - \mu_2}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}\right)$$

40. 设二维随机向量 (X, Y) 的概率分布如图1所示。

$X \backslash Y$	0	1	2	3	4
0	0.08	0.07	0.06	0.01	0.01
1	0.06	0.10	0.12	0.05	0.02
2	0.05	0.06	0.09	0.04	0.03
3	0.02	0.03	0.03	0.03	0.04

图 *1:* (X, Y) 的概率分布

求出下列概率: $P(X = 2), P(Y \geqslant 2), P(X = Y), P(X \leqslant 2, Y \leqslant 2), P(X > Y)$.

解:

$$P(X = 2) = \sum_{i=0}^{4} P(X = 2, Y = i) = 0.27$$

$$P(Y \geqslant 2) = \sum_{i=2}^{4} \sum_{j=0}^{3} P(X=j, Y=i) = 0.69$$

$$P(X=Y) = \sum_{i=0}^{3} P(X=i, Y=i) = 0.3$$

$$P(X \leqslant 2, Y \leqslant 2) = \sum_{i=0}^{2} \sum_{j=0}^{2} P(X=i, Y=j) = 0.69$$

$$P(X>Y) = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=0}^{i-1} P(X=i, Y=j) = 0.25$$

43. 设随机变量 X 与 Y 独立同分布,共同分布是几何分布,即 $P(X=k) = pq^k \quad (k=0,1,\cdots; q=1-p)$, 试证:(1) $\min\{X,Y\}$ 与 $X-Y$ 相互独立;(2) $Z=\min\{X,Y\}$ 与 $W=\max\{X,Y\}-Z$ 相互独立。

证明: (1)

$$\begin{aligned}
P(\min\{X,Y\}=k) &= P(X=k, Y \geqslant k) + P(Y=k, X \geqslant k) - P(X=k, Y=k) \\
&= 2pq^k \sum_{j=k}^{\infty} pq^j - (pq^k)^2 \\
&= 2pq^k \cdot \frac{pq^k}{p} - (pq^k)^2 = pq^{2k}(2-p)
\end{aligned}$$

考虑 $X-Y$ 的概率分布:

$$P(X-Y=n) = \begin{cases} \sum_{k=0}^{\infty} P(X=k+n, Y=k) = p^2q^n \sum_{k=0}^{\infty} q^{2k} = p^2q^n \cdot \frac{1}{1-q^2} = \frac{p^2q^n}{1-q^2}, & n>0, \\ \sum_{k=-n}^{\infty} P(X=k+n, Y=k) = p^2q^n \sum_{k=-n}^{\infty} q^{2k} = p^2q^n \cdot \frac{q^{-2n}}{1-q^2} = \frac{p^2q^{-n}}{1-q^2}, & n \leqslant 0, \end{cases}$$

计算联合概率:

$$P(\min\{X,Y\}=k, X-Y=n) = \begin{cases} P(X=k+n, Y=k) = p^2q^{2k+n}, & n>0, \\ P(X=k, Y=k-n) = p^2q^{2k-n}, & n \leqslant 0, \end{cases}$$

因此,

$$P(\min\{X,Y\}=k) P(X-Y=n) = P(\min\{X,Y\}=k, X-Y=n).$$

$\min\{X,Y\}$ 与 $X-Y$ 相互独立。

(2) 考虑 X 和 Y 的所有可能组合,计算 W 的概率分布

$$P(W=n) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X=k+n, Y=k) + P(X=k, Y=k+n)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}(p^2q^{2k+n} + p^2q^{2k+n}) = 2p^2q^n \sum_{k=0}^{\infty} q^{2k} = 2p^2q^n \cdot \frac{1}{1-q^2} = \frac{2p^2q^n}{1-q^2}.$$

联合概率:

$$P(Z = k, W = n) = P(X = k+n, Y = k) + P(X = k, Y = k+n) = 2p^2q^{2k+n}.$$

另一方面:

$$P(Z = k)P(W = n) = q^{2k}(2-p^2) \cdot \frac{2p^2q^n}{1-q^2} = 2p^2q^{2k+n}.$$

因此，Z 和 W 相互独立。

44. 设 a 是区间 $[0,1]$ 中的一个定点，随机变量 X 服从 $[0,1]$ 上的均匀分布，$Y = |X-a|$。问：a 取何值时，X 与 Y 不相关。

解:

$$E(X) = \int_0^1 x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}.$$

$$E(Y) = E(|X-a|) = \int_0^1 |x-a|\,dx = \int_0^a (a-x)\,dx + \int_a^1 (x-a)\,dx = \frac{a^2}{2} + \frac{1}{2} - a + \frac{a^2}{2} = a^2 - a + \frac{1}{2}.$$

$$E(XY) = E(X|X-a|) = \int_0^1 x|x-a|\,dx = \int_0^a x(a-x)\,dx + \int_a^1 x(x-a)\,dx = \frac{a^3}{6} + \frac{1}{3} - \frac{a}{2} + \frac{a^3}{6} = \frac{a^3}{3} + \frac{1}{3} - \frac{a}{2}.$$

协方差为

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \left(\frac{a^3}{3} + \frac{1}{3} - \frac{a}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}\right)\left(a^2 - a + \frac{1}{2}\right) = \frac{a^3}{3} - \frac{a^2}{2} + \frac{1}{12}.$$

为了使 X 和 Y 不相关，需要:

$$\frac{a^3}{3} - \frac{a^2}{2} + \frac{1}{12} = 0.$$

解方程可得 $a = \frac{1}{2}$ 是方程的一个根。

45. 设二维随机向量 (X,Y) 有联合密度 $p(x,y) = \begin{cases} 3x, & 0 < x < 1 \text{ 且} 0 < y < x, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$ 试求条件分布密度 $p_{Y|X}(y|x)$ 和 $p_{X|Y}(x|y)$。

解:

$$p_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x,y)\,dy = \int_0^x 3x\,dy = 3x\int_0^x 1\,dy = 3x \cdot x = 3x^2 \quad (0 < x < 1).$$

$$p_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x,y)\,dx = \int_y^1 3x\,dx = 3\int_y^1 x\,dx = 3\left(\frac{1}{2} - \frac{y^2}{2}\right) = \frac{3}{2}(1-y^2) \quad (0 < y < 1).$$

条件分布密度为

$$p_{Y|X}(y|x) = \frac{p(x,y)}{p_X(x)} = \frac{3x}{3x^2} = \frac{1}{x} \quad (0 < y < x).$$

$$p_{X|Y}(x|y) = \frac{p(x,y)}{p_Y(y)} = \frac{3x}{\frac{3}{2}(1-y^2)} = \frac{2x}{1-y^2} \quad (y < x < 1).$$

46. 已知二维随机向量 (X,Y) 的联合密度为

$$p(x,y) = \begin{cases} \dfrac{21}{4}x^2 y, & x^2 \leqslant y \leqslant 1, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

求条件概率 $P(Y \geqslant 0.75 \mid X = 0.5)$.

解:

$$p_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x,y)\,dy = \int_{x^2}^{1} \frac{21}{4}x^2 y\,dy = \frac{21}{4}x^2 \cdot \frac{1-x^4}{2} = \frac{21}{8}x^2(1-x^4).$$

$$p_{Y|X}(y|x) = \frac{p(x,y)}{p_X(x)} = \frac{\frac{21}{4}x^2 y}{\frac{21}{8}x^2(1-x^4)} = \frac{2y}{1-x^4} \quad (x^2 \leq y \leq 1).$$

因此,

$$P(Y \geqslant 0.75 \mid X = 0.5) = \int_{0.75}^{1} p_{Y|X}(y \mid 0.5)\,dy.$$

代入 $x = 0.5$:

$$P(Y \geqslant 0.75 \mid X = 0.5) = \int_{0.75}^{1} \frac{32y}{15}\,dy = \frac{32}{15}\left(\frac{1}{2} - \frac{0.75^2}{2}\right) = \frac{7}{15}.$$

47. 设二维随机向量 (X,Y) 有联合密度

$$p(x,y) = \begin{cases} 24(1-x)y, & 0 < y < x < 1, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

当 $0 < y < 1$ 时, 试求条件期望 $E(X \mid Y = y)$.

解:

$$p_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x,y)\,dx = \int_{y}^{1} 24(1-x)y\,dx = 24y\left(\left(1-\frac{1}{2}\right) - \left(y - \frac{y^2}{2}\right)\right) = 12y(1-y)^2.$$

$$p_{X|Y}(x|y) = \frac{p(x,y)}{p_Y(y)} = \frac{24(1-x)y}{12y(1-y)^2} = \frac{2(1-x)}{(1-y)^2} \quad (y < x < 1).$$

条件期望为

$$E(X \mid Y = y) = \int_{-\infty}^{\infty} x\,p_{X|Y}(x|y)\,dx = \int_{y}^{1} x \cdot \frac{2(1-x)}{(1-y)^2}\,dx$$

$$= \frac{2}{(1-y)^2}\int_y^1 x(1-x)\,dx = \frac{2}{(1-y)^2}\cdot\frac{1-3y^2+2y^3}{6} = \frac{2y+1}{3}.(0<y<1)$$

48. 设随机变量 X 与 Y 独立同分布, 都服从参数为 λ 的指数分布, 令

$$Z = \begin{cases} 3X+1, & X \geqslant Y, \\ 6Y, & X < Y, \end{cases}$$

试求 $E(Z)$.

解:

$$\begin{aligned}
E(Z) &= E(3X+1)I(X \geqslant Y) + E(6Y)I(X<Y) \\
&= \int_{x \geqslant y > 0} (3x+1)\lambda^2 e^{-\lambda x} e^{-\lambda y} dxdy + \int_{0<x<y} 6y\lambda^2 e^{-\lambda x} e^{-\lambda y} dxdy \\
&= \int_0^{+\infty} (3x+1)\lambda^2 e^{-\lambda x} \int_0^x e^{-\lambda y} dydx + \int_0^{+\infty} 6y\lambda^2 e^{-\lambda y} \int_0^y e^{-\lambda x} dxdy \\
&= \int_0^{+\infty} (3x+1)\lambda e^{-\lambda x}(1-e^{-\lambda x})dx + \int_0^{+\infty} 6y\lambda e^{-\lambda y}(1-e^{-\lambda y})dy \\
&= \int_0^{+\infty} (9x+1)\lambda e^{-\lambda x}(1-e^{-\lambda x})dx \\
&= \int_0^{+\infty} 9\lambda x e^{-\lambda x} dx + \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx - \int_0^{+\infty} 9\lambda x e^{-2\lambda x} dx - \int_0^{+\infty} \lambda e^{-2\lambda x} dx \\
&= \frac{9}{\lambda} + 1 - \frac{9}{4\lambda} - \frac{1}{2} = \frac{27}{4\lambda} + \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

49. 设随机变量 $X_1, \ldots, X_n (n \geqslant 2)$ 都是随机变量，它们的期望、方差都存在，试证协方差矩阵:

$$\Sigma = (\sigma_{ij})_{n\times n}, \quad \sigma_{ij} \triangleq \operatorname{cov}(X_i, X_j)$$

是非负定的，即对一切实数 $t_1, \ldots, t_n$，均有

$$\sum_{i,j} \sigma_{ij} t_i t_j \geqslant 0.$$

证明:

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j} \sigma_{ij} t_i t_j &= \sum_{i,j} (E(X_i X_j) - E(X_i)E(X_j)) t_i t_j \\
&= \sum_{i,j} (E(t_i X_i t_j X_j) - E(t_i X_i)E(t_j X_j))
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= E(\sum_{i,j} t_i X_i t_j X_j) - [E(\sum_i t_i X_i)]^2 \\
&= E((\sum_i t_i X_i)^2) - [E(\sum_i t_i X_i)]^2 \\
&= \mathrm{var}(\sum_i t_i X_i) \geqslant 0
\end{aligned}
$$

51. 设随机变量 X 与 U 相互独立,X 的分布密度是 $p_x(x)$,U 服从区间 $[0,1]$ 上的均匀分布, 又函数 $q(x)$ 满足:

1. $q(x) \geq 0$, 且 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} q(x)dx = 1$;
2. 存在 $a > 0$, 使得 $p_x(x)/q(x) \geq a$ (当 $q(x) > 0$ 时);

令 $r(x) = a\frac{q(x)}{p_x(x)}$ (当 $p_x(x) = 0$ 时, 规定 $r(x) = 0$),

$M = \{U \leq r(X)\}$,

试证明: $P(X \leq z|M) = \int_{-\infty}^{z} q(x)dx$,

即在 M 发生的条件下 X 的条件分布密度恰好是 $q(x)$.

证明:

$$
\begin{aligned}
P(X \leq z|M) &= \frac{P(\{x \leq z, U \leq r(x)\})}{P(\{U \leq r(x)\})} \\
&= \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} P(X \leq z, U \leq r(X)|X = x)p(x)dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} P(U \leq r(X)|X = x)p(x)dx} \\
&= \frac{\int_{-\infty}^{z} P(U \leq r(x))p(x)dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} P(U \leq r(x))p(x)dx} \\
&= \frac{\int_{-\infty}^{z} r(x)p(x)dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} r(x)p(x)dx} \\
&= \frac{\int_{-\infty}^{z} aq(x)dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} aq(x)dx} \\
&= \int_{-\infty}^{z} q(x)dx
\end{aligned}
$$

多元正态分布习题参考答案

1. 随机向量 $(X, Y) \sim N\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}\right)$, 求

(1) X 的边际密度函数 $f_X(x)$；

(2) $E(Y|X=x)$；

(3) 相关系数 ρ_{XY}.

解： (1) 边际密度函数：

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_X^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu_X)^2}{2\sigma_X^2}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-1)^2}{8}\right).$$

(2)(3) 相关系数

$$\rho_{XY} = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y} = \frac{3}{2\cdot 3} = 0.5.$$

由协方差矩阵 Σ ，$\sigma_X^2 = 4$ ，$\sigma_Y^2 = 9$，条件期望

$$E(Y|X=x) = \mu_Y + \rho\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x-\mu_X) = 2 + \rho\frac{3}{2}(x-1) = \frac{3}{4}x + \frac{5}{4}.$$

2. 设随机向量 $\mathbf{X} \sim N\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}\right)$，$\mathbf{Y} \sim N\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$，$X, Y$ 的密度函数分别为 $p(x), q(x) (x \in \mathbb{R}^2)$，求期望 $E_X \log\frac{p(X)}{q(X)}$.

解： 期望值 $E_{\mathbf{X}} \log\frac{p(\mathbf{X})}{q(\mathbf{X})}$ 可以通过积分计算：

$$E_{\mathbf{X}} \log\frac{p(\mathbf{X})}{q(\mathbf{X})} = \int p(\mathbf{x}) \left[\log|\Sigma_{\mathbf{Y}}|^{1/2} - \log|\Sigma_{\mathbf{X}}|^{1/2} - \frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mu_{\mathbf{X}})^\top\Sigma_{\mathbf{X}}^{-1}(\mathbf{x}-\mu_{\mathbf{X}}) + \frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mu_{\mathbf{Y}})^\top\Sigma_{\mathbf{Y}}^{-1}(\mathbf{x}-\mu_{\mathbf{Y}})\right] d\mathbf{x}$$

其中，$\Sigma_{\mathbf{X}}^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \Sigma_{\mathbf{Y}}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$,

$$\begin{aligned}\int p(\mathbf{x})(\mathbf{x}-\mu_{\mathbf{X}})^\top\Sigma_{\mathbf{X}}^{-1}(\mathbf{x}-\mu_{\mathbf{X}})d\mathbf{x} &= E_{\mathbf{X}}\begin{bmatrix} x_1-1 \\ x_2 \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1-1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ &= 5E_{\mathbf{X}}((x_1-1)^2) - 4E_{\mathbf{X}}((x_1-1)x_2) + E_{\mathbf{X}}(x_2^2) = 2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int p(\mathbf{x})(\mathbf{x}-\mu_{\mathbf{Y}})^\top\Sigma_{\mathbf{Y}}^{-1}(\mathbf{x}-\mu_{\mathbf{Y}})d\mathbf{x} &= E_{\mathbf{X}}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2-1 \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2-1 \end{bmatrix} \\ &= E_{\mathbf{X}}(x_1^2) + E_{\mathbf{X}}((x_2-1)^2) = 8\end{aligned}$$

将上述结果代入并计算：

$$E_{\mathbf{X}} \log \frac{p(\mathbf{X})}{q(\mathbf{X})} = 0 - \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 8 = 3$$

3. 若随机向量 $\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} \sim N\left(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix}\right)$，试求 $P(\xi \geqslant a, \eta \geqslant b)$。

解： 设 $X = \xi - a$，$Y = \eta - b$，则 $\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \sim N\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix}\right)$，

$$P(\xi \geqslant a, \eta \geqslant b) = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(x^2 + y^2 - 2\rho xy)\right\} dxdy$$

将协方差矩阵的逆矩阵对角化 $\mathbf{\Sigma}^{-1} = \mathbf{U}^\top \mathbf{D} \mathbf{U}$, 则 $\mathbf{U} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ 为正交阵, $\mathbf{D} = \operatorname{diag}\left(\frac{1}{1+\rho}, \frac{1}{1-\rho}\right)$.

作变量替换 $\begin{bmatrix} X' \\ Y' \end{bmatrix} = \mathbf{U} \operatorname{diag}\ \left(\sqrt{1+\rho}, \sqrt{1-\rho}\right) \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$, 积分区域变为

$$\Omega' = \{(x', y') : y' \geqslant \sqrt{\frac{1-\rho}{1+\rho}} x', y' \geqslant -\sqrt{\frac{1-\rho}{1+\rho}} x'\},$$

该区域如图2所示。

雅可比矩阵

$$J = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(x', y')} \right| = \sqrt{1-\rho^2}$$

因此

$$\begin{aligned} P(\xi \geqslant a, \eta \geqslant b) &= \iint_{\Omega'} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x'^2 + y'^2)\right) \sqrt{1-\rho^2}\, \mathrm{d}x'\mathrm{d}y' \\ &= \int_{\arctan\sqrt{\frac{1-\rho}{1+\rho}}}^{\pi - \arctan\sqrt{\frac{1-\rho}{1+\rho}}} \mathrm{d}\theta \int_0^{+\infty} \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{1}{2}r^2\right) r\, \mathrm{d}r \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \arctan\sqrt{\frac{1-\rho}{1+\rho}}. \end{aligned}$$

4. 已知 $X \sim N(\mathbf{0}, I_2)$，向量 $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ 满足 $||\mathbf{u}|| = ||\mathbf{v}|| = 1$，求：

(1) $\operatorname{cov}(\langle \mathbf{u}, \mathbf{x} \rangle, \langle \mathbf{v}, \mathbf{x} \rangle)$；

(2)（选做）$E\operatorname{sign}(\langle \mathbf{u}, \mathbf{x} \rangle)\operatorname{sign}(\langle \mathbf{v}, \mathbf{x} \rangle)$，这里符号函数满足 $\operatorname{sign}\ (X) = \begin{cases} 1, & x \geqslant 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$.

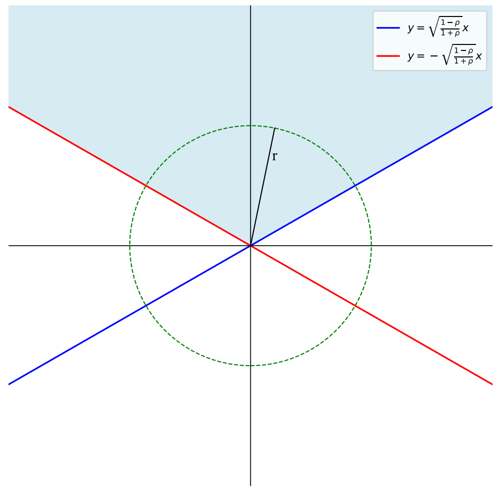


图 2: 区域 Ω' 示意图

解: (1) $E[\langle \mathbf{u}, \mathbf{x}\rangle] = E[\mathbf{u}^T\mathbf{x}] = \mathbf{u}^T E[\mathbf{x}] = \mathbf{u}^T\mathbf{0} = 0$，同理 $E[\langle \mathbf{v}, \mathbf{x}\rangle] = 0$。

所以，

$$\operatorname{cov}(\langle \mathbf{u}, \mathbf{x}\rangle, \langle \mathbf{v}, \mathbf{x}\rangle) = E[\langle \mathbf{u}, \mathbf{x}\rangle\langle \mathbf{v}, \mathbf{x}\rangle] = E[(\mathbf{u}^T\mathbf{x})(\mathbf{v}^T\mathbf{x})] = E[\mathbf{u}^T(\mathbf{x}\mathbf{x}^T)\mathbf{v}]$$

由于 $\mathbf{x} \sim N(\mathbf{0}, I_2)$，我们有 $E[\mathbf{x}\mathbf{x}^T] = I_2$，因此：

$$\operatorname{cov}(\langle \mathbf{u}, \mathbf{x}\rangle, \langle \mathbf{v}, \mathbf{x}\rangle) = \mathbf{u}^T I_2 \mathbf{v} = \mathbf{u}^T\mathbf{v} = \mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$$

(2) 设 $\xi = \langle \mathbf{u}, \mathbf{x}\rangle$，$\eta = \langle \mathbf{v}, \mathbf{x}\rangle$，则方差 $\operatorname{var}(\xi) = \mathbf{u}^\top I_2\mathbf{u} = ||\mathbf{u}|| = 1$，$\operatorname{var}(\eta) = \mathbf{v}^\top I_2 \mathbf{v} = ||\mathbf{v}|| = 1$，相关系数 $\rho = \operatorname{cov}(\langle \mathbf{u}, \mathbf{x}\rangle, \langle \mathbf{v}, \mathbf{x}\rangle) = \mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$，因此

$$\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} \sim N\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix}\right)$$

利用第 3 题的结果，有

$$P(\xi \geqslant 0, \eta \geqslant 0) = P(\xi < 0, \eta < 0) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\arctan\sqrt{\frac{1-\rho}{1+\rho}}$$

类似的，

$$P(\xi < 0, \eta \geqslant 0) = P(\xi \geqslant 0, \eta < 0) = \frac{1}{\pi}\arctan\sqrt{\frac{1-\rho}{1+\rho}}$$

因此

$$E\text{sign}(\langle \mathbf{u},\mathbf{x}\rangle)\text{sign}(\langle \mathbf{v},\mathbf{x}\rangle) = P(\xi \geqslant 0, \eta \geqslant 0) + P(\xi < 0, \eta < 0) - P(\xi < 0, \eta \geqslant 0) - P(\xi \geqslant 0, \eta < 0)$$
$$= 1 - \frac{4}{\pi}\arctan\sqrt{\frac{1-\rho}{1+\rho}} = 1 - \frac{4}{\pi}\arctan\sqrt{\frac{1-\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{1+\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}}$$

其中若 $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = -1$，投影方向完全相反，$E\text{sign}(\langle \mathbf{u},\mathbf{x}\rangle)\text{sign}(\langle \mathbf{v},\mathbf{x}\rangle) = -1$.

5（选做）．随机变量 $\xi_1, \cdots, \xi_n \sim N(0, \sigma^2)$，i.i.d.，矩阵 $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 且是对称矩阵，记 $\xi = (\xi_1, \cdots, \xi_n)^\top$，求 $\text{cov}(\xi^\top \mathbf{A}\xi, \xi^\top \mathbf{B}\xi)$.

解： 由独立同分布条件，$E(\xi_i\xi_j) = \delta_{ij}$，这里 δ_{ij} 当 $i=j$ 时为 1，否则为 0。$\xi^\top\mathbf{A}\xi$ 和 $\xi^\top\mathbf{B}\xi$ 的期望为:

$$E[\xi^\top\mathbf{A}\xi] = \sum_{i,j} A_{ij}E(\xi_i\xi_j) = \sigma^2\,\text{tr}(\mathbf{A}), \quad E[\xi^\top\mathbf{B}\xi] = \sum_{i,j} B_{ij}E(\xi_i\xi_j) = \sigma^2\,\text{tr}(\mathbf{B})$$
$$E(\xi^\top\mathbf{A}\xi\xi^\top\mathbf{B}\xi) = E\,\text{tr}(\xi^\top\mathbf{A}\xi\xi^\top\mathbf{B}\xi) = \text{tr}(\mathbf{A}E(\xi\xi^\top\mathbf{B}\xi\xi^\top))$$

对称矩阵 A 对角化 $\mathbf{A} = \mathbf{U}^\top\mathbf{D}\mathbf{U}$，其中对角阵 $\mathbf{D} = \text{diag}(d_1, \cdots, d_n)$，设 $\eta = \frac{\mathbf{U}\xi}{\sigma}$，

$$E(\xi\xi^\top\mathbf{B}\xi\xi^\top) = \sigma^4 E(\mathbf{U}^\top\eta\eta^\top\mathbf{D}\eta\eta^\top\mathbf{U}) = \sigma^4\mathbf{U}^\top E\left(\sum_{i=1}^n d_i\eta_i^2\cdot\eta\eta^\top\right)\mathbf{U}$$

η 为标准正态向量，$E\left(\sum_{i=1}^n d_i\eta_i^2\cdot\eta\eta^\top\right)$ 的非对角元期望为 0，利用 $E(\eta_i^2) = 1, E(\eta_i^4) = 3$，我们有

$$E\left(\sum_{i=1}^n d_i\eta_i^2\cdot\eta\eta^\top\right) = \sum_{i=1}^n d_i\cdot\mathbf{I} + 2\mathbf{D}$$

又由于 $\text{tr}(\mathbf{B}) = \text{tr}(\mathbf{U}^\top\mathbf{D}\mathbf{U}) = \text{tr}(\mathbf{D}\mathbf{U}^\top\mathbf{U}) = \text{tr}(\mathbf{D})$，因此

$$E(\xi\xi^\top\mathbf{B}\xi\xi^\top) = \sigma^4\left[\sum_{i=1}^n d_i\cdot\mathbf{I} + 2\mathbf{B}\right] = \sigma^4(\text{tr}(\mathbf{B})\mathbf{I} + 2\mathbf{B})$$

协方差

$$\text{cov}(\xi^\top\mathbf{A}\xi, \xi^\top\mathbf{B}\xi) = E(\xi^\top\mathbf{A}\xi\xi^\top\mathbf{B}\xi) - E(\xi^\top\mathbf{A}\xi)E(\xi^\top\mathbf{B}\xi)$$
$$= \sigma^4(\text{tr}(\mathbf{A})\,\text{tr}(\mathbf{B}) + 2\,\text{tr}(\mathbf{AB}) - \text{tr}(\mathbf{A})\,\text{tr}(\mathbf{B})) = 2\sigma^4\,\text{tr}(\mathbf{AB})$$

5 概率部分第四章及统计部分作业答案

概率论分册:

2. 设 $X_1, X_2, \cdots$ 是随机变量序列，且 X_n 取值 0 或 n^2，$P(X_n = n^2) = \frac{1}{n^2} = 1 - P(X_n = 0)$ $(n = 1, 2, \cdots)$，易知 $E(X_n) = 1$ (一切 n)。试证：随机变量序列 $X_1, X_2, \cdots$ 不服从大数律。

解： 事件 $D_n : \forall 2 \le i \le n, X_i = 0$，其概率

$$P(D_n) = \prod_{i=2}^{n}\left(1 - \frac{1}{i^2}\right) = \prod_{i=2}^{n}\frac{(i-1)(i+1)}{i^2} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

若 $n \to \infty$，

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{S_n - E(S_n)}{n} = -1\right) \ge \lim_{n\to\infty} P(D_n) = \frac{1}{2}$$

可见 $\frac{S_n - E(S_n)}{n}$ 不依概率收敛于 0，不服从大数定律。

3. 设随机变量序列 $\xi_1, \xi_2, \cdots$ 满足

$$\xi_n \xrightarrow{w} 0 \quad (n \to \infty),$$

试证：

$$\xi_n \xrightarrow{P} 0 \quad (n \to \infty).$$

证明： 记 $F_n(x) = P(\xi_n < x)$，由于 $\xi_n \xrightarrow{w} 0 \quad (n \to \infty)$，令 $\varepsilon > 0$，则 $\lim_{n\to\infty} F_n(\varepsilon) = 1$，$\lim_{n\to\infty} F_n(-\varepsilon) = 0$.

$$\lim_{n\to\infty} P(|\xi_n| > \epsilon) = \lim_{n\to\infty} P(\xi_n > \epsilon) + \lim_{n\to\infty} P(\xi_n < -\epsilon) = \lim_{n\to\infty} 1 - F_n(\varepsilon) + \lim_{n\to\infty} F_n(-\varepsilon) = 0$$

因此 $\xi_n \xrightarrow{P} 0$。

6. 设 $X_1, X_2, \cdots$ 是独立同分布的随机变量序列，共同分布是区间 $[0, a]$ 上的均匀分布 $(a > 0)$，$\xi_n = \max\{X_1, \cdots, X_n\}$ $(n = 1, 2, \cdots)$，试证：

$$\xi_n \xrightarrow{P} a \quad (n \to \infty).$$

证明： $\xi_n = \max\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$ 的分布函数为：

$$F_{\xi_n}(x) = P(\max\{X_1, X_2, \cdots, X_n\} \le x) = P(X_1 \le x) \cdot P(X_2 \le x) \cdots P(X_n \le x) = \left(\frac{x}{a}\right)^n.$$

对于任意 $\epsilon > 0$，当 $n \to \infty$ 时，我们有：

$$P(\xi_n > a - \epsilon) = 1 - \left(\frac{a - \epsilon}{a}\right)^n \to 1, \quad P(\xi_n < a + \epsilon) = 1.$$

$$P(a - \epsilon < \xi_n < a + \epsilon) \to 1$$

因此

$$\xi_n \xrightarrow{P} a \quad (n \to \infty).$$

9. 试证下列条件对应的各个相互独立的随机变量序列服从大数律：

(1) $P(X_k=\sqrt{\ln k})=P(X_k=-\sqrt{\ln k})=\frac{1}{2}\quad(k=2,3,\cdots)$;

(2) $P\left(X_k=\frac{2^n}{n^2}\right)=\frac{1}{2^n}\quad(k=1,2,\cdots;n=1,2,\cdots)$;

(3) $P(X_k=n)=\frac{c}{n^2\ln^2 n}\quad(k=1,2,\cdots;n=2,3,\cdots)$，其中 $c=\left(\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2\ln^2 n}\right)^{-1}$.

证明： (1) 随机变量的期望和方差为 $E(X_k)=0,\operatorname{var}(X_K)=\ln k$，序列和的方差为 $\operatorname{var}(S_n)=\sum_{k=2}^{n}\ln k$，由切比雪夫不等式，

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n}\right|\geq\varepsilon\right)\leq\frac{1}{\varepsilon^2}\frac{\sum_{k=2}^{n}\ln k}{n^2}<\frac{\ln n}{\varepsilon^2 n}$$

对于任意 $\varepsilon>0$，有 $\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\varepsilon^2 n}=0$，因此 $\frac{S_n}{n}$ 依概率收敛于 0，服从大数定律。

(2) 独立同分布随机变量的期望为 $E(X_k)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\frac{2^n}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$ 存在，由 Kolmogorov’s SLLN 知 $\frac{1}{n}S_n\overset{\text{a.s.}}{\to}\frac{\pi^2}{6}$，服从大数定律。

(3) 独立同分布随机变量的期望为 $E(X_k)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c}{n\ln^2 n}$，该级数收敛，因此期望 $E(X_k),k=1,2,\cdots$ 存在，由 Kolmogorov’s SLLN 知 $\frac{1}{n}S_n\overset{\text{a.s.}}{\to}E(X_1)$，服从大数定律。

12. 计算机在进行加法运算时，对每个加数取整，设所有的取整误差相互独立且都服从 $[-0.5,0.5]$ 上的均匀分布。

(1) 若将 1500 个数相加，问：误差总和的绝对值超过 15 的概率是多少?

(2) 多少个数相加在一起可使得误差总和的绝对值小于 10 的概率为 0.90?

解： (1) 设 $\xi_n\sim U[-0.5,0.5],S_n=\sum_{i=0}^{n}\xi_i$，显然，

$$E(\xi_n=0),\quad\operatorname{var}(\xi_n)=\frac{1}{12},\quad E(S_n)=0,\quad\operatorname{var}(S_n)=\frac{n}{12}$$

因此

$$S_n^*=\frac{S_n}{\sqrt{\frac{n}{12}}}=\frac{S_n}{\sqrt{125}}\xrightarrow{\omega}N(0,1)$$

$$P(|S_n|>15)=P\left(|S_n^*|>\frac{15}{\sqrt{125}}\right)=2\left(1-\Phi\left(\frac{3}{\sqrt{5}}\right)\right)\approx 0.18$$

(2)

$$P(|S_n|<10)=P\left(|S_n^*|<10\sqrt{\frac{12}{n}}\right)=2\left(1-\Phi\left(10\sqrt{\frac{12}{n}}\right)\right)=0.9$$

解得 $n\approx 441$。

15. 对足够多的选民进行民意调查，以确定赞成某一候选人的百分比。假设选民中有未知的百分比 p 的人赞成该候选人，并且选民彼此是独立行动的，问：为了有 95% 的把握预测 p 的值在 0.045 的误差幅度内，应该调查多少人？

解： 设 $X_i = \begin{cases} 1, & 选民i赞成, \\ 0, & 选民i不赞成, \end{cases}$，$S_n = \sum_{i=1}^n X_i$，显然

$$E(S_n) = np, \quad \mathrm{var}(S_n) = n(p - p^2)$$

当 n 足够大时：

$$S_n^* = \frac{S_n - np}{\sqrt{n(p - p^2)}} \sim N(0,1)$$

所求概率为

$$P\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^n X_i - np}{n}\right| < 0.045\right) = P\left(\left|\frac{\sqrt{n(p-p^2)}S_n^*}{n}\right| < 0.045\right) \geqslant 0.95$$

在 $p = 0.5$ 时为最坏情况，此时有 $2\Phi(0.09\sqrt{n}) - 1 \geqslant 0.95$，解得 n 最小为 475.

统计分册：

1. 设 X 的分布为几何分布：

$$P(X = k) = p(1-p)^{k-1} \quad (k = 1, 2, \cdots),$$

其中 $p \in (0,1)$. 这个分布的实际背景为独立同分布试验序列，其中 p 为一次试验成功的概率，X 为试验序列中取得第一次成功所需的试验次数。设 $X_1, \cdots, X_n$ 为来自总体 X 的样本。

(1) 写出这个模型的似然函数；

(2) 求出参数 p 的 ML 估计；

(3) 求出参数 p 的矩估计。

解： (1) 似然函数为

$$L(p; x_1, x_2, \cdots, x_n) = \prod_{i=1}^n P(X_i = x_i) = \prod_{i=1}^n p(1-p)^{x_i - 1} = p^n (1-p)^{\sum_{i=1}^n x_i - n}$$

(2) 对数似然函数：

$$\ell(p; x_1, x_2, \cdots, x_n) = \log L(p; x_1, x_2, \cdots, x_n) = n \log p + \left(\sum_{i=1}^n x_i - n\right) \log(1-p)$$

求导并令导数为零：

$$\frac{d\ell}{dp}=\frac{n}{p}-\frac{\sum_{i=1}^n x_i-n}{1-p}=0$$

解出 p：

$$p=\frac{n}{\sum_{i=1}^n x_i}$$

令样本均值 $\bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$，因此，最大似然估计为：

$$\hat{p}_{\mathrm{MLE}}=\frac{n}{\sum_{i=1}^n x_i}=\frac{1}{\bar{x}}$$

(3) 几何分布期望为 $E(X)=\frac{1}{p}$，由矩估计，

$$\hat{p}=\frac{1}{\bar{x}}$$

3. 设 X 具有分布密度

$$p(x,\theta)=\begin{cases}\exp\{-(x-\theta)\}, & x\geq\theta,\\ 0, & x<\theta\end{cases}\quad(\theta\in(-\infty,+\infty)).$$

$X_1,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的样本，求 θ 的 ML 估计 T_1.

解： 似然函数为：

$$L(\theta;x_1,x_2,\cdots,x_n)=\prod_{i=1}^n p(x_i,\theta)=\prod_{i=1}^n \exp\{-(x_i-\theta)\}\cdot I(x_i\geq\theta)$$

似然函数在 $x_i<\theta$ 时为 0。当 $x_i\geq\theta$ 时，似然函数随着 θ 增大而减小。然而，θ 必须满足 $x_i\geq\theta$ 对所有 i 成立，因此，θ 的最大似然估计为样本中的最小值：

$$\hat{\theta}_{\mathrm{MLE}}=\min_{1\leq i\leq n} x_i$$

4. 设 $X_1,\cdots,X_n\sim\mathrm{iid}B(1,p)$，即 $P(X_i=1)=p,P(X_i=0)=1-p$ $(i=1,\cdots,n)$.

(1) 计算 $\mathrm{var}(X_1)$;

(2) 求 $\mathrm{var}(X_1)$ 的 ML 估计 $T(X_1,\cdots,X_n)$;

(3) 求 $E(T(X_1,\cdots,X_n))$.

解： (1) 随机变量 X_i 的期望和方差分别为：

$$E(X_i)=p,\quad \mathrm{var}(X_i)=p(1-p)$$

(2) 似然函数:

$$L(p; x_1, x_2, \cdots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} p^{x_i}(1-p)^{1-x_i}$$

对数似然函数:

$$\ell(p; x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} (x_i \log p + (1-x_i)\log(1-p))$$

求导并令导数为零:

$$\frac{d\ell}{dp} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i}{p} - \frac{1-x_i}{1-p}\right) = 0$$

解得 p 的最大似然估计为:

$$\hat{p}_{\text{MLE}} = \bar{x}$$

$\text{var}(X_1)$ 的 MLE 为:

$$T(X_1, \cdots, X_n) = \hat{p}_{\text{MLE}}(1-\hat{p}_{\text{MLE}}) = \bar{x}(1-\bar{x})$$

(3) $\bar{x}$ 的期望和方差分别为:

$$E(\bar{x}) = p, \quad \text{var}(\bar{x}) = \frac{p(1-p)}{n}$$

因此,

$$E(T(X_1, \cdots, X_n)) = E(\bar{x}(1-\bar{x})) = E(\bar{x}) - \text{var}(\bar{x}) - [E(\bar{x})]^2 = p - \left(\frac{p(1-p)}{n} + p^2\right) = p(1-p)\frac{n-1}{n}$$

5. 在例 1.2 中，求:

(1) $\text{var}(\hat{p})$，其中 $\hat{p}$ 为参数 p 的 ML 估计;

(2) $\text{var}(\hat{p})$ 的 ML 估计.

解: (1) 总体 $X \sim B(1,p), p \in [0,1]$。参数 p 的最大似然估计:

$$\hat{p} = \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

期望和方差分别为:

$$E(\hat{p}) = p, \quad \text{var}(\hat{p}) = \frac{p(1-p)}{n}$$

(2) 将 p 的最大似然估计 $\hat{p}$ 代入得 $\text{var}(\hat{p})$ 的 ML 估计:

$$\text{var}(\hat{p})_{ML} = \frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n} = \frac{\bar{x}(1-\bar{x})}{n}$$

6. 在第 3 题中，求:

(1) θ 的矩估计 $T_2(X_1, \cdots, X_n)$;

(2) θ 的 ML 估计 T_1 和矩估计 T_2 的均方误差 $E_\theta[(T_1-\theta)^2]$ 和 $E_\theta[(T_2-\theta)^2]$.

解: (1) 注意到随机变量 $Z = X - \theta$ 服从参数为 1 的指数分布，因此 X 的期望为:

$$E(X) = E(Z) + \theta = \theta + 1$$

因此，θ 的矩估计为:

$$T_2(X_1, \cdots, X_n) = \bar{X} - 1$$

(2) 已经知道 θ 的最大似然估计（MLE）为:

$$T_1(X_1, \cdots, X_n) = \min_{1\le i\le n} X_i$$

其分布函数为:

$$F_{T_1}(x) = 1 - P(X_1 > x, X_2 > x, \cdots, X_n > x) = 1 - [\exp\{-(x-\theta)\}]^n$$

密度函数为:

$$f_{T_1}(x) = \frac{d}{dx} F_{T_1}(x) = n\exp\{-n(x-\theta)\} \quad \text{for } x \ge \theta$$

令 $Y = T_1 - \theta$，Y 服从参数为 n 的指数分布，T_1 的期望和方差:

$$E(T_1) = E(Y) + \theta = \frac{1}{n} + \theta, \quad \operatorname{var}(T_1) = \operatorname{var}(Y) = \frac{1}{n^2}$$

因此，T_1 的均方误差为:

$$E_\theta[(T_1-\theta)^2] = \operatorname{var}(T_1) + [E(T_1-\theta)]^2 = \frac{2}{n^2}$$

对于矩估计,

$$E(T_2) = E(\bar{X} - 1) = E(\bar{X}) - 1 = \theta + 1 - 1 = \theta$$

由于 $Z = X - \theta$ 服从指数分布,

$$\operatorname{var}(T_2) = \operatorname{var}(\bar{X} - 1) = \operatorname{var}(\bar{X}) = \frac{\operatorname{var}(X)}{n} = \frac{\operatorname{var}(Z)}{n} = \frac{1}{n}$$

因此，T_2 的均方误差为:

$$E_\theta[(T_2-\theta)^2] = \operatorname{var}(T_2) + [E(T_2-\theta)]^2 = \frac{1}{n}$$

7. 在例 1.4 中, 求出 $\hat{\theta} = \max\limits_{1\le i\le n}\{X_i\}$ 的

(1) $\mathrm{E}_\theta(\hat{\theta})$;　(2) 分布.

解： 由独立同分布，$P(\hat{\theta} \leqslant t) = \left(\frac{t}{\theta}\right)^n, (0 \leqslant t \leqslant \theta)$，因此分布为

$$p_{\hat{\theta}}(t) = \frac{dF_{\hat{\theta}}(t)}{dt} = \begin{cases} \frac{n}{\theta}\left(\frac{t}{\theta}\right)^{n-1}, & (0 \leqslant t \leqslant \theta), \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

期望为

$$\mathrm{E}_\theta(\hat{\theta}) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{\hat{\theta}}(t) t dt = \int_0^\theta \frac{n}{\theta}\left(\frac{t}{\theta}\right)^{n-1} t dt = \frac{n\theta}{n+1}$$

8. 设 $X_1, \cdots, X_n$ 为来自总体 X 的一个样本, 又总体 X 的分布密度为

$$p(x,\theta) = \begin{cases} \theta x^{\theta-1}, & 0 \le x \le 1, \\ 0, & \text{其他} \end{cases} (\theta > 0).$$

(1) 求 θ 的矩估计;　(2) 求 θ 的 ML 估计.

解： (1) X 的期望为:

$$E[X] = \int_0^1 x \cdot \theta x^{\theta-1} dx = \theta \int_0^1 x^\theta dx = \frac{\theta}{\theta+1}.$$

因此 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}$ 为

$$\hat{\theta} = \frac{\bar{x}}{1-\bar{x}}.$$

(2) 对数似然函数:

$$l(\theta) = \ln(L(\theta)) = \ln \prod_{i=1}^n \theta X_i^{\theta-1} = n\ln(\theta) + (\theta-1)\sum_{i=1}^n \ln(X_i).$$

求导并令导数等于零:

$$\frac{d}{d\theta} l(\theta) = \frac{n}{\theta} + \sum_{i=1}^n \ln(X_i) = 0.$$

解这个方程可得 ML 估计为

$$\hat{\theta}_{\mathrm{ML}} = -\frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln(X_i)}.$$

10. 设 $\xi \sim N(0,1)$, $\eta \sim \chi^2(n)$, 且 ξ 和 η 相互独立, 证明: $\xi/\sqrt{\eta/n}$ 服从 $t(n)$ 分布.

证明： 给定 $\xi \sim N(0,1)$，则 $\xi^2 \sim \chi^2(1)$。ξ^2 和 η 是相互独立的。设 ξ^2, η 的密度函数分别为 $p_1(x), p_2(\eta)$，利用对称性，$Z = \xi/\sqrt{\eta/n}$ 的分布函数为

$$F_Z(u) = \frac{1}{2} P(\xi^2 n/\eta \leqslant u^2) = \frac{1}{2} P\left(\xi^2 \geqslant \frac{u^2}{n}\eta\right) = \frac{1}{2}\int_0^\infty \int_0^{\frac{u^2\eta}{n}} p_1(x) p_2(\eta) dx d\eta$$

对 u 求导，得概率密度函数

$$\begin{aligned}
p_Z(u) &= \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{2u\eta}{n} p_1\left(\frac{u^2\eta}{n}\right) p_2(\eta) d\eta \\
&= \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{2u\eta}{n} \frac{1}{2^{1/2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \left(\frac{u^2\eta}{n}\right)^{1/2-1} e^{-\frac{u^2\eta}{2n}} \frac{1}{2^{n/2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \eta^{n/2-1} e^{-\eta/2} d\eta \\
&= \frac{1}{2^{1/2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \frac{1}{2^{n/2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^\infty \eta^{\frac{n-1}{2}} e^{-\frac{u^2\eta}{2n}-\frac{\eta}{2}} d\eta \\
&= \frac{1}{2^{1/2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \frac{1}{2^{n/2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^\infty \left(\frac{1}{\frac{u^2}{n}+1}\right)^{\frac{n+1}{2}} y^{\frac{n-1}{2}} e^{-\frac{y}{2}} dy
\end{aligned}$$

其中最后一行用到了替换 $y = \left(\frac{u^2}{n}+1\right)\eta$，注意到由参数为 $n+1$ 的卡方分布的归一性，

$$\int_0^\infty \frac{1}{2^{(n+1)/2}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} y^{\frac{n-1}{2}} e^{-y/2} dy = 1$$

因此概率密度函数为

$$p_Z(u) = \frac{1}{2^{1/2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \frac{1}{2^{n/2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \left(\frac{1}{\frac{u^2}{n}+1}\right)^{\frac{n+1}{2}} 2^{(n+1)/2}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot \left(\frac{u^2}{n}+1\right)^{-\frac{n+1}{2}}$$

因此 $Z = \xi/\sqrt{\eta/n}$ 服从 t 分布。

可不用证明，当成定义。

13. 在 (4.6) 式中将 e 指数上的表达式写成

$$\left(\bar{x}, \bar{y}, \sum_{i=1}^n (x_i-\bar{x})^2, \sum_{i=1}^n (y_i-\bar{y})^2, \sum_{i=1}^n (x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})\right)$$

的函数.

解： 原始的指数部分为：

$$-\frac{1}{2(1-\rho^2)} \sum_{i=1}^n \left[\left(\frac{x_i-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - \frac{2\rho(x_i-\mu_1)(y_i-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \left(\frac{y_i-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right].$$

其中

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 = \frac{1}{\sigma_1^2}\sum_{i=1}^n (x_i-\mu_1)^2 = \frac{1}{\sigma_1^2}\left[\sum_{i=1}^n (x_i-\bar{x})^2 + n(\bar{x}-\mu_1)^2\right].$$

$$\sum_{i=1}^n (x_i-\mu_1)(y_i-\mu_2) = \sum_{i=1}^n \left((x_i-\bar{x})+(\bar{x}-\mu_1)\right)\left((y_i-\bar{y})+(\bar{y}-\mu_2)\right) = S_{xy} + n(\bar{x}-\mu_1)(\bar{y}-\mu_2).$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{y_i-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2=\frac{1}{\sigma_2^2}\sum_{i=1}^{n}((y_i-\bar{y})+(\bar{y}-\mu_2))^2=\frac{1}{\sigma_2^2}\left[\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2+n(\bar{y}-\mu_2)^2\right].$$

合并所有项，e 指数上的表达式可以写成

$$-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{S_x^2}{\sigma_1^2}+\frac{S_y^2}{\sigma_2^2}-\frac{2\rho S_{xy}}{\sigma_1\sigma_2}+n\left[\frac{(\bar{x}-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-\frac{2\rho(\bar{x}-\mu_1)(\bar{y}-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(\bar{y}-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right).$$

14. 设 $X\sim B(n,\theta)$，即 X 的分布由下式给出：

$$P_\theta(X=k)=C_n^k\theta^k(1-\theta)^{n-k}\quad(k=0,1,\cdots,n).$$

(1) 求 θ 和 $\theta(1-\theta)$ 的无偏估计；　(2) 求 θ 的无偏估计 $\hat{\theta}$ 的均方误差.

解： (1) 注意到 $n\theta$ 和 $n\theta(1-\theta)$ 分别为分布的期望和方差，因此只需考虑对均值和方差的无偏估计，对于均值，X 的期望为：

$$E[X]=n\theta.$$

这表明 $\frac{x}{n}$ 是 θ 的无偏估计。

代入 $\theta(1-\theta)$ ，得到 $\hat{\theta}(1-\hat{\theta})=\frac{X}{n}\left(1-\frac{X}{n}\right)$，其期望：

$$E\left[\frac{X}{n}\left(1-\frac{X}{n}\right)\right]=\frac{1}{n}E[X]-\frac{1}{n^2}E[X^2]=\frac{1}{n}(n\theta)-\frac{1}{n^2}\left(n\theta(1-\theta)+n^2\theta^2\right)=\frac{\theta(1-\theta)(n-1)}{n}.$$

据此修正这个估计: $\frac{X}{n}\left(1-\frac{X}{n}\right)\cdot\frac{n}{n-1}$. 这样，我们得到无偏估计

$$\frac{x}{n}\left(1-\frac{x}{n}\right)\cdot\frac{n}{n-1}=\frac{x(n-x)}{n(n-1)}.$$

(2) 由于 $\bar{X}$ 是无偏估计，因此均方误差等于方差，样本均值 $\bar{X}$ 的方差为：

$$\mathrm{Var}(\bar{X})=\mathrm{Var}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Var}(X_i)=\frac{1}{n^2}\cdot n\theta(1-\theta)=\frac{\theta(1-\theta)}{n}.$$

因此，$\bar{X}$ 的均方误差为 $\frac{\theta(1-\theta)}{n}$.

16. 设 $X_1,\cdots,X_n\sim\mathrm{iid}N(\mu,1)$，$\mu\in(-\infty,+\infty)$，求 μ,μ^2,μ^3 的 UMVU 估计.

解： 根据指数分布性质与 $\overline{X}$ 的无偏性，$\overline{X}$ 是 μ 的 UMVU 估计量。

由于 $\overline{X}$ 是 μ 的完全充分统计量，可以构造一个依赖于 $\overline{X}$ 的函数作为 μ^2 的估计。

$$E[\overline{X}^2]=\mathrm{Var}(\overline{X})+[E(\overline{X})]^2=\frac{1}{n}+\mu^2.$$

因此，μ^2 的 UMVU 估计为:

$$\hat{\mu^2} = \overline{X}^2 - \frac{1}{n}.$$

由于:

$$E[\overline{X}^3] = \mu^3 + 3\mu \cdot \frac{1}{n} + 3\mu \cdot \frac{1}{n} = \mu^3 + \frac{3\mu}{n}.$$

因此，μ^3 的 UMVU 估计为:

$$\hat{\mu^3} = \overline{X}^3 - \frac{3\overline{X}}{n}.$$

17. 设 $X_1, \cdots, X_n \sim \mathrm{iid} N(\mu, \sigma^2)$，$\mu \in (-\infty, +\infty)$，$\sigma^2 > 0$，证明:

$$T(X_1, \cdots, X_n) = \bar{X}^2 - \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n(n-1)}$$

是 μ^2 的 UMVU 估计.

解: 样本均值 $\bar{X}$ 也是正态分布的，且其均值为 μ，均值的方差为 $\frac{\sigma^2}{n}$。因此，

$$E[\bar{X}^2] = \mathrm{Var}(\bar{X}) + [E(\bar{X})]^2 = \frac{\sigma^2}{n} + \mu^2.$$

$$E\left[\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n(n-1)}\right] = \frac{(n-1)\sigma^2}{n(n-1)} = \frac{\sigma^2}{n}.$$

估计是无偏的:

$$E[T] = E\left[\bar{X}^2 - \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n(n-1)}\right] = \left(\frac{\sigma^2}{n} + \mu^2\right) - \frac{\sigma^2}{n} = \mu^2.$$

对于正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$，$(\bar{X}, S^2)$ 是 (μ, σ^2) 的完全充分统计量，其中 $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ 是样本方差。

注意到 T 只依赖于 $\bar{X}$ 和 $\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$，因此，$T$ 是完全充分统计量的函数。因此 T 是 μ^2 的 UMVU 估计。

20. 设 $X_1, \cdots, X_n \sim \mathrm{iid} B(1, p), 0 < p < 1$, 证明 $(X_1, \cdots, X_n)$ 的分布为指数族分布, 并找出其完全充分统计量.

解: 考虑 $X_1, \cdots, X_n$ 的联合概率分布:

$$\begin{aligned} P(X_1 = x_1, \cdots, X_n = x_n) &= \prod_{i=1}^n P(X_i = x_i) = \prod_{i=1}^n p^{x_i}(1-p)^{1-x_i} = p^{\sum_{i=1}^n x_i}(1-p)^{n-\sum_{i=1}^n x_i} \\ &= \exp\left(\sum_{i=1}^n x_i \log(p) + (n - \sum_{i=1}^n x_i) \log(1-p)\right) \end{aligned}$$

$$= \exp\left(\sum_{i=1}^{n} x_i(\log(p) - \log(1-p)) + n\log(1-p)\right)$$

$(X_1, \cdots, X_n)$ 的联合分布具备指数族分布的形式。

由指数族分布的形式知，$T(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i$ 是完全充分统计量。

21. 设 $X_1, \cdots, X_n \sim \text{iid} p(x,\theta), 0 < \theta < 1$, 其中 $p(x,\theta)$ 为离散型随机变量的分布列:

$$p(x,\theta) = \theta(1-\theta)^{x-1} \quad (x = 1, 2, \cdots),$$

证明 $(X_1, \cdots, X_n)$ 的分布为指数族分布, 并找出其完全充分统计量.

解： 联合分布为:

$$\begin{aligned} P(X_1 = x_1, \cdots, X_n = x_n) &= \prod_{i=1}^{n} p(x_i,\theta) = \prod_{i=1}^{n} \theta(1-\theta)^{x_i-1} = \theta^n(1-\theta)^{\sum_{i=1}^{n}(x_i-1)} \\ &= \exp\left(n\log(\theta) + \sum_{i=1}^{n}(x_i-1)\log(1-\theta)\right) \\ &= \exp\left(\log(1-\theta)\sum_{i=1}^{n} x_i + n(\log(\theta) - \log(1-\theta))\right) \end{aligned}$$

$(X_1, \cdots, X_n)$ 的联合分布属于指数族分布。

由指数族分布的形式，$T(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i$ 是完全充分统计量。

26. 证明：例 6.1 中 σ^2 的 ML 估计 $\hat{\sigma}^2$ 与 σ^2 的 UMVU 估计 S_n 具有相同的渐近分布。

证明： 已经知道，σ^2 的 MLE 是:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

UMVUE S_n 是样本方差:

$$S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

$(n-1)S_n^2/\sigma^2$ 服从自由度为 $n-1$ 的卡方分布。设 $\xi_1, \cdots, \xi_{n-1} \sim \text{iid} N(0,1)$，则 $\sum_{i=1}^{n-1}\xi_i^2$ 的分布是自由度为 $n-1$ 的 χ^2 分布. 这样 $(n-1)S_n^2 - (n-1)\sigma^2$ 与 $\sum_{i=1}^{n-1}(\xi_i^2 - 1)\sigma^2$ 具有相同的分布, 或 $\sqrt{n-1}S_n^2 - \sqrt{(n-1)}\sigma^2$ 与 $\sqrt{(n-1)}\left[\sum_{i=1}^{n-1}(\xi_i^2-1)\sigma^2\right]/(n-1)$ 具有相同的分布. 由于 $\text{var}(\xi_i^2)) = 2$，利用中心极限定理可知, 当 $n \to \infty$ 时,

$$\sigma^2\sqrt{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n-1}(\xi_i^2 - 1)\right]/(n-1) \xrightarrow{w} N(0, 2\sigma^4).$$

因此，S_n 的渐近分布可以写成：

$$\sqrt{n}(S_n - \sigma^2) \xrightarrow{d} N(0, 2\sigma^4)$$

同样的，对于 MLE $\hat{\sigma}^2 = \frac{n-1}{n} S_n$，有

$$\sqrt{n}(\frac{n}{n-1}\hat{\sigma}^2 - \sigma^2) \xrightarrow{d} N(0, 2\sigma^4)$$

因此，当 $n \to \infty$ 时，$\hat{\sigma}^2$ 的渐近分布可以写成：

$$\sqrt{n}(\hat{\sigma}^2 - \sigma^2) \xrightarrow{d} N(0, 2\sigma^4)$$

即 ML 估计 $\hat{\sigma}^2$ 与 σ^2 的 UMVU 估计 S_n 具有相同的渐近分布。

33. 已知某统计工作者对某种面值纸币的长度(单位:mm)进行测量,得数据:$156.2, 155.3, 155.5, 155.1, 155.3, 15$
(1) 求出该种纸币长度均值的置信度为 0.95 的置信区间；(2) 求出该种纸币长度标准差的置信度为 0.95 的置信上限。

解： (1) 样本均值和标准差 $\bar{x}$ 和 s 为：

$$\bar{x} = \frac{156.2 + 155.3 + 155.5 + 155.1 + 155.3 + 154.5 + 154.9 + 155.1 + 154.7 + 154.7}{10} = 155.04$$

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} = \sqrt{\frac{2.242}{9}} \approx 0.4991$$

t 分布的临界值 $t_{\alpha/2,df}$ 可以从 t 表中查找，其中 $df = n - 1 = 9$，对于 0.95 的置信水平，$\alpha = 0.05$，查表得到 $t_{0.025,9} \approx 2.262$。

$$CI = \left(\bar{x} - t_{0.025,9} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + t_{0.025,9} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}\right) \approx (154.78, 155.48)$$

(2) 选取 $\frac{1}{\sigma^2}(n-1)s^2$ 为枢轴量，对于 0.95 置信水平，自由度 $df = n-1 = 9$，查表得到 $\chi^2_{0.05,9} \approx 3.325$。置信上限为：

$$\sqrt{\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{0.05,9}}} \approx 0.8062$$

34. 设 $\mathbf{X} = (X_1, X_2)^\top$，$X_1, X_2 \sim \mathrm{iid} N(\mu, \sigma^2)$。(1) 求 $X_1 + X_2$ 与 $X_1 - X_2$ 的联合分布密度；(2) 证明：$X_1 + X_2$ 与 $X_1 - X_2$ 相互独立。

解： (1) 设：$\mathbf{Y} = \mathbf{AX}$，其中 $\mathbf{A}$ 是一个转换矩阵：

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

随机变量 $\mathbf{Y}$ 的联合分布也是一个二维正态分布，其均值向量和协方差矩阵：

$$\mu_{\mathbf{Y}} = \mathbf{A}\mu_{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\mu \\ 0 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{Y}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{A}^\top = \sigma^2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = 2\sigma^2\mathbf{I}$$

即 $X_1 + X_2$ 与 $X_1 - X_2$ 服从二维正态分布 $N\left(\begin{pmatrix} 2\mu \\ 0 \end{pmatrix}, 2\sigma^2\mathbf{I}\right)$

(2) 由于 Y_1 和 Y_2 的联合分布是二维正态分布，并且它们的协方差矩阵是对角矩阵，因此 Y_1 和 Y_2 是相互独立的。

36. 设 $\mathbf{X} = (X_1, X_2)^\top \sim N(\mu, \mathbf{M})$，其中 μ 为 2 维向量，$\mathbf{M}$ 为 2×2 正定矩阵，求系数 b，使得 X_1 与 $X_2 - bX_1$ 相互独立。

解： X_1 与 $X_2 - bX_1$ 的协方差：

$$\mathrm{Cov}(X_1, X_2 - bX_1) = \mathrm{Cov}(X_1, X_2) - b \cdot \mathrm{Cov}(X_1, X_1) = m_{12} - bm_{11}$$

令协方差为 0，解得 b：

$$b = \frac{m_{12}}{m_{11}}$$

37. 设 $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3)^\top \sim N(\mu, \mathbf{I}_3)$，其中 $\mu^\top = (1, 0, 3)$，又设

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

求 $\mathbf{Y} = \mathbf{AX} + \mathbf{d}$ 的分布.

解： $\mathbf{Y}$ 的均值向量 μ_Y 和协方差矩阵 $\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{Y}}$：

$$\mu_Y = \mathbf{A}\mu + \mathbf{d} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{Y}} = \mathbf{A}\mathbf{I}_3\mathbf{A}^\top = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{Y}$ 服从参数为 μ_Y 和 $\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{Y}}$ 的正态分布。

假设检验部分：

1. 设 $X_1, \ldots, X_n \sim \mathrm{iid} N(\mu, \sigma_0^2)$，$\sigma_0^2$ 为已知，假设检验问题为

$$H_0 : \mu \geq \mu_0 \leftrightarrow H_1 : \mu < \mu_0,$$

求出它的水平为 α 的 UMP 否定域。

解： 跟单参指数族性质，使用样本均值 $\bar{X}$ 作为检验统计量。样本均值 $\bar{X}$ 也服从正态分布：

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma_0^2}{n}\right)$$

标准化后的检验统计量 Z 为：

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}$$

在原假设 $H_0 : \mu \geq \mu_0$ 下，Z 服从标准正态分布 $N(0,1)$。设 z_α 是标准正态分布的 α 分位数，即 $P(Z \leq z_\alpha) = \alpha$。因此，水平为 α 的 UMP 否定域可以表示为：$\{z : z \leq z_\alpha\}$.

将 Z 表达式代入上述不等式中，我们得到水平为 α 的 UMP 否定域：

$$\{\mathbf{x} : \frac{\bar{\mathbf{x}} - \mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}} \leq z_\alpha\}$$

2. 设某接收站收到的信号为 X，当对方发信号时，X 的分布为 $U(0,2)$；当对方不发信号时，X 的分布为 $U(-1,1)$。考虑如下的假设检验问题：

$$H_0 : X \sim U(-1,1) \leftrightarrow H_1 : X \sim U(0,2).$$

求出此假设检验问题依赖于观察值 $X = x$ 的水平为 α 的 UMP 否定域。

解： 设 $f_0(x)$ 和 $f_1(x)$ 分别是原假设 H_0 和备择假设 H_1 下的密度函数, 似然比 $\Lambda(x)$ 定义为：

$$\Lambda(x) = \frac{f_1(x)}{f_0(x)} = \begin{cases} 0, & -1 \leq x \leq 0, \\ 1, & 0 \leq x \leq 1, \\ \infty, & 1 \leq x \leq 2, \end{cases}$$

因此，否定域应该是 $\{x : x \geq c\}, (0 < c < 1)$。需要调整否定域以确保其概率等于 α，即 $P(X > c|H_0) = \alpha$。

$$P(X > c|H_0) = \frac{1-c}{2} = \alpha$$

因此，水平为 α 的 UMP 否定域是：

$$\{x : x > 1 - 2\alpha\}$$

3. 设 X 可能来自两个不同的总体，它们的分布密度分别为 $f_0(x)$ 和 $f_1(x)$，其中 $f_0(x)$ 为区间 $(0,1)$ 上均匀分布 $U(0,1)$ 的分布密度，$f_1(x)=3x^2, x\in(0,1)$。相应的假设检验问题为

$$H_0: f=f_0(x) \leftrightarrow H_1: f=f_1(x).$$

求出相应的依赖于观察值 $X=x$ 的水平为 α 的 UMP 否定域。

解: 似然比 $\Lambda(x)$ 定义为:

$$\Lambda(x)=\frac{f_1(x)}{f_0(x)}=\frac{3x^2}{1}=3x^2$$

设似然比的临界值 c，使得当 $3x^2>c$ 时，拒绝 H_0。由于 $x\in(0,1)$ ，所以否定域 $\left\{x: x>\sqrt{\frac{c}{3}}\right\}$。

令否定域的大小等于 α，即

$$P\left(X>\sqrt{\frac{c}{3}}\middle|H_0\right)=1-\sqrt{\frac{c}{3}}=\alpha$$

解得:

$$c=3(1-\alpha)^2$$

因此，水平为 α 的 UMP 否定域是:

$$\{x: x>1-\alpha\}$$

6. 已知矿井中瓦斯的含量(浓度)为随机变量,其分布为 $N(\mu,\sigma^2),\sigma^2>0$。按规定,$\mu\geq\mu_0$ 为危险浓度。为了保证安全,矿里决定设立 10 个监测点。为了通过监测值监测矿上的安全状况,采用假设检验的方法。假设检验问题有两种提法: (1) $H_0:\mu\geq\mu_0\leftrightarrow H_1:\mu<\mu_0$; (2) $H_0:\mu\leq\mu_0\leftrightarrow H_1:\mu>\mu_0$. 你认为应采用哪一种提法? 并说明理由。

解: 应采用提法 (1)。在提法 (1) 中，第一类错误（错误地拒绝 H_0）意味着我们在实际上瓦斯浓度不安全的情况下错误地认为它是安全的，这将导致严重的安全风险。假设检验问题提法 (1) 能够尽可能避免这种错误。

10. 设总体 $X\sim N(\mu_0,\sigma^2)$，μ_0 为已知，$\mathbf{X}=(X_1,\ldots,X_n)$ 为来自 X 的一个样本，假设检验问题为

$$H_0:\sigma^2\leq\sigma_0^2\leftrightarrow H_1:\sigma^2>\sigma_0^2.$$

(1) 利用单参数指数族中的方法求出该假设检验问题的水平为 α 的否定域; (2) 利用广义似然比方法求出该假设检验问题的水平为 α 的否定域。

解: (1) 正态分布总体为单参数指数族，$T(X)=(x-\mu_0)^2$，UMP 否定域形如

$$\mathscr{W}=\{\mathbf{x}:\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2>c\}$$

在方差 σ_0^2 条件下 $\frac{(x_i-\mu_0)}{\sigma_0^2} \sim N(0,1)$, 故 $\frac{1}{\sigma_0^2}\sum_{i=1}^n (x_i-\mu_0)^2 \sim \chi^2(n)$. $P_{\sigma_0^2}(\mathbf{X} \in \mathscr{W}) = P(\frac{1}{\sigma_0^2}\sum_{i=1}^n (x_i-\mu_0)^2 > \frac{c}{\sigma_0^2}) = \alpha$，卡方分布的 $1-\alpha$ 分位数记为 $\chi^2_{1-\alpha}(n)$，因此 $c = \sigma_0^2\chi^2_{1-\alpha}(n)$。否定域为

$$\left\{\mathbf{x} : \sum_{i=1}^n (x_i-\mu_0)^2 > \sigma_0^2\chi^2_{1-\alpha}(n)\right\}$$

(2) 似然函数为：

$$L(\sigma^2) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(X_i-\mu_0)^2}{2\sigma^2}\right)$$

设 $U = \frac{1}{\sigma_0^2}\sum_{i=1}^n (X_i-\mu_0)^2$ 。对似然函数求导得，方差的最大似然估计为

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{U\sigma_0^2}{n}$$

在原假设 $H_0 : \sigma^2 \le \sigma_0^2$ 下，最大似然估计为：

$$\hat{\sigma}_0^2 = \min\left(\frac{U\sigma_0^2}{n}, \sigma_0^2\right)$$

因此，广义似然比为：

$$\Lambda = \frac{L(\hat{\sigma}^2)}{L(\hat{\sigma}_0^2)} = \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\hat{\sigma}^2}}\right)^n \exp\left(-\frac{U\sigma_0^2}{2\hat{\sigma}^2}\right)}{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\hat{\sigma}_0^2}}\right)^n \exp\left(-\frac{U\sigma_0^2}{2\hat{\sigma}_0^2}\right)} = \left(\frac{\hat{\sigma}^2}{\hat{\sigma}_0^2}\right)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(\frac{U\sigma_0^2}{2}\left(\frac{1}{\hat{\sigma}_0^2} - \frac{1}{\hat{\sigma}^2}\right)\right)$$

当 $\frac{U}{n} \le 1$ 时，$\Lambda = 1$；当 $\frac{U}{n} > 1$ 时，$\Lambda = \left(\frac{U}{n}\right)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(\frac{n}{2}\left(\frac{U}{n}-1\right)\right)$。否定域形如

$$\left\{\mathbf{x} : \frac{U}{n} > 1, \quad \left(\frac{U}{n}\right)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(\frac{n}{2}\left(\frac{U}{n}-1\right)\right) > c\right\} = \left\{\mathbf{x} : \frac{U}{n} > 1, \quad U^{-\frac{n}{2}} \exp\left(\frac{U}{2}\right) > \tilde{c}\right\}$$

当 $\frac{U}{n} > 1$ 时，$U^{-\frac{n}{2}} \exp\left(\frac{U}{2}\right)$ 关于 U 单调增，因此否定域可以写为

$$\{\mathbf{x} : U > c'\}$$

$\forall\sigma > \sigma_0^2, U \ge \frac{\sum_{i=1}^n (X_i-\mu_0)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n)$. 在 $\sigma^2 = \sigma_0^2$ 时等号成立，因此取 $c' = \chi^2_{1-\alpha}(n)$ 即可满足

$$\max_{\sigma^2 \ge \sigma_0^2} P_{\sigma^2}(U > \chi^2_{1-\alpha}(n)) = \alpha$$

所求否定域为

$$\left\{\mathbf{x} : \frac{1}{\sigma_0^2}\sum_{i=1}^n (x_i-\mu_0)^2 > \chi^2_{1-\alpha}(n)\right\}$$

11. 设总体 $X \sim N(\mu, \sigma_0^2)$，$\sigma_0^2$ 为已知，$\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ 为来自 X 的一个样本，假设检验问题为

$$H_0 : \mu \le \mu_0 \leftrightarrow H_1 : \mu > \mu_0,$$

利用广义似然比方法求出该假设检验问题的水平为 α 的否定域。

解： 在 $H_0 : \mu \le \mu_0$ 下，MLE 为：$\hat{\mu}_0 = \min\left(\bar{X}, \mu_0\right)$, 在无约束下，MLE 为：$\hat{\mu} = \bar{X}$.

因此，似然比为：

$$\Lambda = \frac{L(\hat{\mu})}{L(\hat{\mu}_0)} = \frac{\exp\left(-\frac{1}{2\sigma_0^2}\sum_{i=1}^n (X_i - \hat{\mu})^2\right)}{\exp\left(-\frac{1}{2\sigma_0^2}\sum_{i=1}^n (X_i - \hat{\mu}_0)^2\right)} = \exp\left(\frac{1}{2\sigma_0^2}\left(\sum_{i=1}^n (X_i - \hat{\mu}_0)^2 - \sum_{i=1}^n (X_i - \hat{\mu})^2\right)\right)$$

$$= \exp\left(\frac{n}{2\sigma_0^2}(\hat{\mu}_0 - \hat{\mu})^2\right) = \exp\left(\frac{n}{2\sigma_0^2}(\min(\bar{X}, \mu_0) - \bar{X})^2\right) = \begin{cases} 1, & \bar{X} \le \mu_0 \\ \exp\left(\frac{n}{2\sigma_0^2}(\mu_0 - \bar{X})^2\right), & \bar{X} > \mu_0, \end{cases}$$

由正态分布性质，$\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$，因此取标准正态分布的 $1-\alpha$ 分位数 $z_{1-\alpha}$。我们拒绝 H_0 当且仅当：

$$\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}} > z_{1-\alpha}$$

即：

$$\bar{X} > \mu_0 + \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha}$$

因此，水平为 α 的广义似然比检验的否定域是：

$$\left\{\mathbf{x} : \bar{x} > \mu_0 + \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha}\right\}$$

回归分析部分

1. 设 b_0 和 b 是一元线性回归模型 (1.9) 中的截距和回归系数，而 $\hat{b}_0$ 和 $\hat{b}$ 是相应的最小二乘估计，记 $\hat{y}_i = \hat{b}_0 + \hat{b} x_i$，证明：

$$\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i) = 0, \quad \sum_{i=1}^n x_i (y_i - \hat{y}_i) = 0.$$

解： 最小二乘估计需要使得残差平方和（RSS）最小化：

$$RSS = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - (\hat{b}_0 + \hat{b} x_i))^2$$

对 $\hat{b}_0$ 和 $\hat{b}$ 求偏导数，并令其等于零。

$$\frac{\partial RSS}{\partial \hat{b}_0} = -2\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{b}_0 - \hat{b} x_i) = 0$$

$$\frac{\partial RSS}{\partial \hat{b}} = -2\sum_{i=1}^n x_i (y_i - \hat{b}_0 - \hat{b} x_i) = 0$$

简化得到：

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i-\hat{b}_0-\hat{b}x_i)=\sum_{i=1}^{n}(y_i-\hat{y}_i)=0,\quad \sum_{i=1}^{n}x_i(y_i-\hat{b}_0-\hat{b}x_i)=\sum_{i=1}^{n}x_i(y_i-\hat{y}_i)=0$$

6 图论部分作业答案

第七章习题：

1. 设无向图 G 有 16 条边，有 3 个 4 度顶点，4 个 3 度顶点，其余顶点的度数均小于 3，问 G 中至少有几个顶点？

解： 用握手定理解本题，设 G 至少有 n 个顶点，则 G 有 $n-7$ 个顶点的度数至多为 2，由握手定理可得 $2m=32\leqslant 3\times 4+4\times 3+2(n-7)$. 从此式解出 $n\geqslant 11$，即 G 中至少有 11 个顶点。当度数小于 3 的顶点都是 2 度顶点时，G 有 11 个顶点，其中 4 个是 2 度顶点。

2. 设 9 阶无向图 G 中，每个顶点的度数不是 5 就是 6，证明 G 中至少有 5 个 6 度顶点或至少有 6 个 5 度顶点。

解：【方法一】穷举法。设 G 有 x 个 5 度顶点，由握手定理的推论可知，x 只能取 $0, 2, 4, 6, 8$ 这 5 个值，G 有 $9-x$ 个 6 度顶点，于是 $(x, 9-x)$ 只有下面 5 种情况：

$$(1)(0,9);\quad (2)(2,7);\quad (3)(4,5);\quad (4)(6,3);\quad (5)(8,1).$$

在 (1), (2), (3) 中至少有 5 个 6 度顶点，而在 (4), (5) 中均至少有 6 个 5 度顶点。

【方法二】反证法。否则，G 至多有 4 个 6 度顶点，并且至多有 5 个 5 度顶点，但由握手定理的推论可知，G 不可能有 5 个 5 度顶点，于是 G 至多有 8 个顶点，这与 G 有 9 个顶点相矛盾。

3. 证明空间中不可能存在有奇数个面且每个面均有奇数条棱的多面体。

解： 用握手定理或握手定理的推论证明，使用反证法。

假设存在具有奇数个面且每个面均具有奇数条棱的多面体，要寻找出矛盾，就要做无向图 $G=\langle V,E\rangle$。其中，$V=\{v|v$ 为 G 的面$\}$，$E=\{(u,v)|u,v\in V\wedge u\neq v\wedge u$ 与 v 有公共棱$\}$。由假设可知，|V| (= 面数) 为奇数，且 $\forall v\in V$，$d(v)$ 为奇数，于是 G 有奇数个奇度顶点，这与握手定理推论相矛盾。所以，以上假设中的无向图 G 是不存在的，从而，具有奇数个面，每个面均有奇数条棱的多面体是不存在的。

14. 设 $n(n\geq 3)$ 阶无向简单图 G 是连通的, 但不是完全图, 证明存在 $u,v,w\in V(G)$, 使得 $(u,v),(v,w)\in E(G)$, 而 $(u,w)\notin E(G)$.

解:【方法一】直接证明法.

由于 G 不是完全图，所以存在顶点 v_1 与 v_2 不相邻，即 $(v_1,v_2)\notin E(G)$。又由于 G 是连通图，所以 v_1,v_2 之间存在通路，设 $\Gamma=v_1u_1u_2\cdots u_rv_2$ 为 v_1 到 v_2 的通路，并且 Γ 是 v_1 到 v_2 的短程线。由于 $(v_1,v_2)\notin E(G)$，所以 $r\geqslant 1$。若 $r=1$，则 v_1,u_1,v_2 3 个顶点为所求，即 $(v_1,u_2)\in E(G)$，$(u_1,v_2)\in E(G)$，而 $(v_1,v_2)\notin E(G)$。

若 $r>1$，则 v_1,u_2,u_2 3 个顶点为所求。此时必有 $(v_1,u_2)\notin E(G)$，否则 v_1 与 v_2 之间的短程不应该是 Γ，因为 $v_1u_2u_3\cdots u_rv_2$ 比 Γ 短，所以，必有 $(v_1,u_2)\notin E(G)$，而 $(v_1,u_1)\in E(G)$ 且 $(u_1,u_2)\in E(G)$，因而 v_1,u_1,u_2 为所求。

【方法二】反证法.

否则，$\forall u,v,w\in V(G)$，只要 (u,v) 和 $(v,w)\in E(G)$，就有 $(u,w)\in E(G)$，记否定的结论为 $(*)$。下面利用 $(*)$ 推矛盾。

$\forall u,v\in V(G)$，由 G 的连通性可知，u 与 v 之间有通路，设 $P=uv_1v_2\cdots v_rv$ 为 u 与 v 之间的一条通路。因为 $(u,v_1),(v_1,v_2)\in E(G)$，由 $(*)$ 可知 $(u,v_2)\in E(G)$，又因为 $(u,v_2),(v_2,v_3)\in E(G)$，由 $(*)$ 可知 $(u,v_3)\in E(G)$，这样继续下去，必有 $(u,v)\in E(G)$，由 u,v 的任意性，可知 G 为无向完全图 K_n，这与 G 不是完全图矛盾。

15. 设 G 是无向简单图, $\delta(G)\geq 2$, 证明 G 中存在长度大于等于 $\delta(G)+1$ 的圈.

解: 用扩大路径法证明.

不妨设 G 是连通的，否则，G 的每个连通分支的最小度都 $\geqslant 2$。

设 $u,v\in V(G)$，由于 G 的连通性可知，u 与 v 之间存在路径，用扩大路径法扩大这条路径，设极大路径为 $\Gamma=v_1v_2\cdots v_{l-1}v_l$。由于最小度为 $\delta\geqslant 2$，易知，$l\geqslant\delta+1$。由极大路径的性质可知，Γ 中 v_1（还有 v_2）不与 Γ 外的顶点相邻，而 $d(v_1)\geqslant\delta(G)\geqslant 2$，因而在 Γ 上至少存在 $\delta(G)$ 个顶点，$v_{i_1}=v_2,v_{i_2},\cdots,v_{i_\delta}\cdots$ 与 v_1 相邻，如图3所示。于是圈 $v_1v_{i_1}\cdots v_{i_\delta}v_1$ 的长度 $\geqslant\delta(G)+1$。

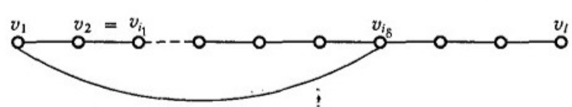


图 3

16. 设 G 是无向简单图, $\delta(G)\geq 3$, 证明 G 中各圈长度的最大公约数为 1 或 2.

解: 用扩大路径法找一条极大路径，在路径上找 3 个圈进行讨论。

不妨设 G 是连通简单图，否则可对 G 的某个连通分支进行讨论。

设 $P = v_0v_1\cdots v_l$ 为 G 中一条极大路径。则 $l \geqslant \delta(G) \geqslant 3$。由于 v_0 不与 P 外顶点相邻，又因为 G 为简单图，则在 P 上除 v_i 与 v_0 相邻外，由 $\delta(G) \geqslant 3$，还至少存在两个顶点，设其为 v_r，v_s（$1 < r < s$）与 v_0 相邻，于是可得 3 个圈，如图 4 所示。

$$C_1 = v_0v_1\cdots v_rv_0,\quad C_2 = v_0v_1\cdots v_r\cdots v_sv_0,\quad C_3 = v_0v_1\cdots v_sv_0$$

易知，C_1, C_2, C_3 的长度分别为 $r+1, s+1, s-r+2$。设 $\gcd(r+1, s+1, s-r+2) = k$，则 $k \mid r+1 \wedge k \mid s+1 \wedge k \mid s-r+2$，由 $k \mid r+1 \wedge k \mid s+1 \Rightarrow k \mid s-r$，又由 $k \mid s-r+2 \wedge k \mid s-r \Rightarrow k \mid 2$，于是 k 只能为 1 或 2。

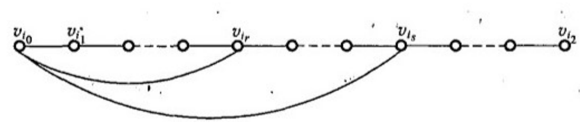


图 4

第九章习题：

2. 无向树 T 有 9 片树叶，3 个 3 度顶点，其余顶点的度数均为 4，问 T 中有几个 4 度顶点？根据 T 的度数列，你能画出多少棵非同构的无向树？

解： 设有 x 个 4 度顶点，则阶数 $n = x + 9 + 3 = 12 + x$，$m = n - 1 = 11 + x$，由握手定理可得 $2m = 22 + 2x = 9 + 3 \times 3 + 4x \Rightarrow x = 2$，即有 2 个 4 度顶点。于是所求树均为 14 阶树，度数列应为

$$1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 3, 3, 3, 4, 4,$$

求出上述度数列对应的所有非同构无向树，不是一件容易的事情。非树叶的顶点的不同排列可得不同构的树。

(1) 直径为 6 的非树叶顶点的排列可有下面 6 种不同方案，

$$(3,3,3,4,4), (3,3,4,3,4), (3,4,3,3,4), (4,3,3,3,4), (3,4,4,3,3), (3,4,3,4,3)$$

从而得 6 棵非同构的树，分别如图5(a), (b), (c), (d), (e), (f) 所示。

(2) 直径为 5 的可画出 7 棵非同构树，如图6(a),(b),(c),(d),(e),(f),(g) 所示。直径为 4 的如图6(h) 所示。

3. 一棵无向树 T，有 n_i 个 i 度顶点，$i = 2, 3, \ldots, k$，其余顶点都是树叶，问 T 有几片树叶？

解： 设有 x 片树叶，则阶数 $n = x + \sum_{i=2}^{x} n_i$，边数 $m = \sum_{i=2}^{x} n_i + (x-1)$，由握手定理可知

$$2m = \sum_{i=2}^{x} 2n_i + 2(x-1) = x + \sum_{i=2}^{x} in_i,$$

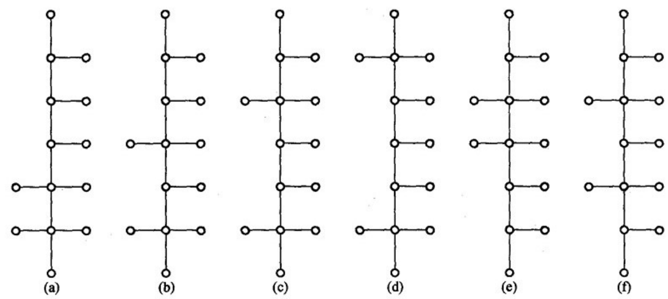


图 *5*

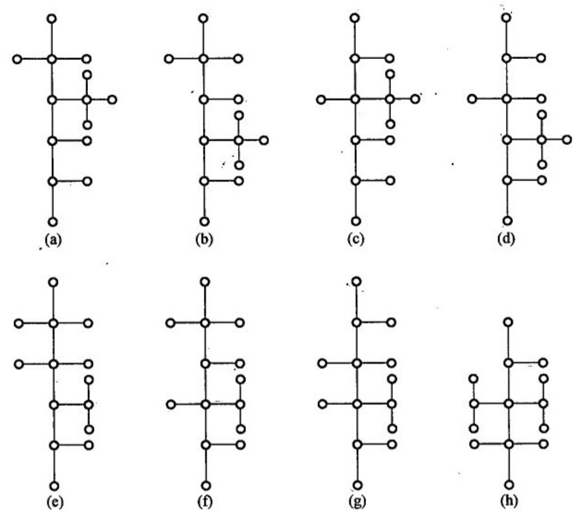


图 *6*

解得

$$x=\sum_{i=2}^{x}(i-2)n_i+2=\sum_{i=3}^{x}(i-2)n_i+2.$$

6. 设 G 为 $n(n\geqslant 5)$ 阶简单图，证明 G 或 $\overline{G}$ 中必含圈。

解:【方法一】设 G 与 $\overline{G}$ 的边数分别为 m 与 m'，连通分支数分别为 s 与 s' $(s\geqslant 1, s'\geqslant 1)$。

若 G 与 $\overline{G}$ 中都无圈，则它们的各连通分支都是树。设 G 的第 i 个连通分支的阶数和边数分别为 n_i 与 m_i $(1\leqslant i\leqslant s)$, $\overline{G}$ 的第 j 个连通分支的阶数和边数分别为 n'_j 与 m'_j $(1\leqslant j\leqslant s)$, 因此

$$\frac{n(n-1)}{2}=m+m'=\sum_{i=1}^{s}m_i+\sum_{i=1}^{s}m'_i=\sum_{i=1}^{s}n_i+\sum_{i=1}^{s}n'_i-(s+s')=2n-(s+s')\leqslant 2n-2,$$

整理后得 $n^2-5n+4\leqslant 0$.

解此不等式，得 $1\leqslant n\leqslant 4$，这与 $n\geqslant 5$ 相矛盾，所以 G 或 $\overline{G}$ 必含圈。

【方法二】不妨设 G 的边数不比 $\overline{G}$ 的边数少，下面证明 G 中必含圈。方法还是反证法。

否则，设 G 有 s $(s\geqslant 1)$ 个连通分支，它们都是树，于是 G 的边数 m 满足

$$\frac{n(n-1)}{4}\leqslant m=\sum_{i=1}^{s}m_i=\sum_{i=1}^{s}n_i-s=n-s\leqslant n-1,$$

得不等式 $n^2-5n+4\leqslant 0$,

解出 $1\leqslant n\leqslant 4$，这与 $n\geqslant 5$ 相矛盾，所以 G 中必含圈。

【方法三】直接利用 $n\geqslant 5$ 的条件。

不妨设 G 的边数不小于 $\overline{G}$ 的边数，即 $m\geqslant\frac{n(n-1)}{4}$，因为 $n\geqslant 5$，故得 $m\geqslant\frac{n(n-1)}{4}\geqslant n$，由于 $m\geqslant n$，则 G 中必含圈，否则，G 为含 s $(s\geqslant 1)$ 个连通分支的树 $(s=1)$ 或森林 $(s\geqslant 2)$，于是应有 $m\leqslant n-s\leqslant n-1$，这与 $m\geqslant n$ 相矛盾。

13. 设 T_1,T_2 是无向连通图 G 的两棵生成树。已知 $e_1\in E(T_1)$ 但 $e_1\notin E(T_2)$, 证明存在 $e_2\in E(T_2)$ 但 $e_2\notin E(T_1)$，使得 $(T_1-e_1)\cup\{e_2\}$，$(T_2-e_2)\cup\{e_1\}$ 都是 G 的生成树。

解: 由于 e_1 是 T_1 的树枝，且 $e_1\notin E(T_2)$，所以 e_1 是 T_2 的弦，这说明 e_1 不是环（环不在任何生成树中），也不是桥（桥应在任何生成树中）。

设 $e_1=(u_1,v_1)$。则 u,v 之间在 T_2 中存在唯一的路径 $P(u_1,v_1)$，$P(u_1,v_1)\cup\{e_1\}$ 构成一个圈。e_1 将 T_1 分为两个连通分支 G_1,G_2。考虑圈 $P(u_1,v_1)\cup\{e_1\}$ 中的所有顶点，则存在 $u_2\in G_1,v_2\in G_2$ 且 $e_2=(u_2,v_2)\subseteq P(u_1,v_1)$，由于 G_1,G_2 之间不连通，因此 $(T_1-e_1)\cup\{e_2\}$ 连通无回路。同样，$T_2\cup\{e_1\}$ 存在唯一回路 $P(u_1,v_1)\cup\{e_1\}$，从回路中删去 e_2 得到 $(T_2-e_2)\cup\{e_1\}$ 是联通无回路的。

由以上分析可知，$(T_1-e_1)\cup\{e_2\}$ 连通无回路，且为 G 的生成树，同样，$(T_2-e_2)\cup\{e_1\}$ 也是 G 的生成树。

21. 求算式 $((a+(b*c)*d)-e)\div(f+g)+(h*i)*j$ 的波兰符号法和逆波兰符号法表示。

解： 用二叉正则树 T 存放算式，如图7所示。

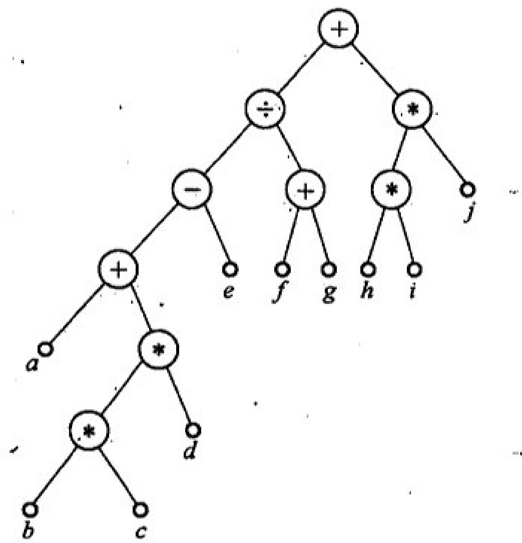


图 7

(1) 用前序行遍法访问 T，得波兰符号法算式为：$+\div-+a**bcde+fg**hij$.

(2) 用后序行遍法访问 T，得逆波兰符号法算式为：$abc*d*+e-fg+\div hi*j*+$.

第十章习题：

1. 求图8所示二图的关联矩阵。

解： 图 8(a) 中有向图 D 的关联矩阵为

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6
v_1	-1	1	1	0	0	0
v_2	1	-1	0	-1	0	0
v_3	0	0	-1	1	0	0
v_4	0	0	0	0	1	0
v_5	0	0	0	0	0	-1
v_6	0	0	0	0	-1	1

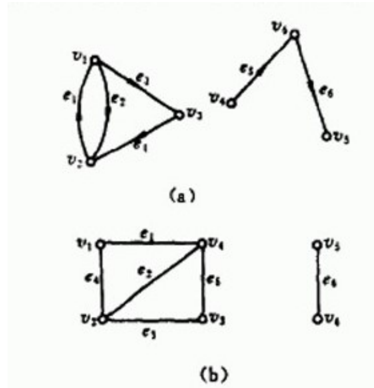


图 *8*

图 8(b) 中无向图 G 的关联矩阵为

$$
\begin{array}{c|cccccc}
 & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \\
\hline
v_1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
v_2 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
v_3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
v_4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
v_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
v_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}
$$

4. 有向图如图9所示.

(1) D 中 v_1 到 v_4 长度为 1, 2, 3, 4 的通路各为多少条?

(2) v_1 到 v_4 长度小于等于 3 的通路为多少条?

(3) v_1 到 v_1 长度为 1, 2, 3, 4 的回路各为多少条?

(4) v_4 到 v_4 长度小于等于 3 的回路为多少条?

(5) D 中长度为 4 的通路 (不含回路) 有多少条?

(6) D 中长度为 4 的回路有多少条?

(7) D 中长度小于等于 4 的通路为多少条? 其中有多少条为回路?

(8) 写出 D 的可达矩阵.

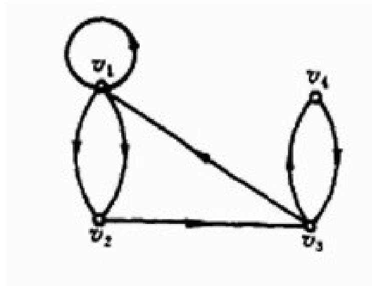


图 *9*

解：只需计算有向图 D 的邻接矩阵 A 及 A^2, A^3, A^4 就可以回答所有问题。

$$A=\begin{pmatrix}1&2&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix},\quad A^2=\begin{pmatrix}1&2&2&0\\1&0&0&1\\1&2&1&0\\1&0&0&1\end{pmatrix},\quad A^3=\begin{pmatrix}3&2&2&2\\1&2&1&0\\2&2&2&1\\1&2&1&0\end{pmatrix},\quad A^4=\begin{pmatrix}5&6&4&2\\2&2&2&1\\4&4&3&2\\2&2&2&1\end{pmatrix}.$$

为计算方便，还可以计算出 B_1, B_2, B_3, B_4.

$$B_1=A=\begin{pmatrix}1&2&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix},\quad B_2=\begin{pmatrix}2&4&2&0\\1&0&1&1\\2&2&1&1\\1&0&1&1\end{pmatrix},\quad B_3=\begin{pmatrix}5&6&4&2\\2&2&2&1\\4&4&3&2\\2&2&2&1\end{pmatrix},\quad B_4=\begin{pmatrix}10&12&8&4\\4&4&4&2\\8&8&6&4\\4&4&4&2\end{pmatrix}.$$

根据以上计算回答各问题：

(1) v_1 到 v_4 长度为 1, 2, 3, 4 的通路分别为 0; 0; 2, 2 条；

(2) v_1 到 v_4 长度小于等于 3 的通路为 2 条；

(3) v_1 到 v_1 长度为 1, 2, 3, 4 的回路分别为 1, 1, 3, 5 条；

(4) v_4 到 v_4 长度小于等于 3 的回路为 1 条；

(5) D 中长度为 4 的通路 (不含回路) 为 33 条；

(6) D 中长度为 4 的回路为 11 条；

(7) D 中长度小于等于 4 的通路为 88 条，其中有 22 条回路；

(8) 可达矩阵

$$P=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}.$$

可见 D 是强连通图。

5. 已知标定的无向图如图10 所示. A 是它的相邻矩阵, 求 A^k 中的元素 $a_{22}^{(k)}, k=1,2,\cdots$.

图 *10*

解： 解本题首先写出图 G 的相邻矩阵 A，然后求 A 的前几次幂.

$$A=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}.$$

$$A^k=\begin{cases}\begin{pmatrix}0&2^{\frac{k-1}{2}}&0\\2^{\frac{k-1}{2}}&0&2^{\frac{k-1}{2}}\\0&2^{\frac{k-1}{2}}&0\end{pmatrix}, & k\text{ 为奇数;}\\ \begin{pmatrix}2^{\frac{k}{2}-1}&0&2^{\frac{k}{2}-1}\\0&2^{\frac{k}{2}}&0\\2^{\frac{k}{2}-1}&0&2^{\frac{k}{2}-1}\end{pmatrix}, & k\text{ 为偶数.}\end{cases}$$

可见得

$$a_{22}^{(k)}=\begin{cases}0, & k\text{ 为奇数;}\\ 2^{\frac{k}{2}}, & k\text{ 为偶数.}\end{cases}$$

第八章习题:

4. 设 G 为欧拉图，$v_0\in V(G)$，若从 v_0 开始行遍，无论行遍到那个顶点，只要未行遍过的边就可以行遍，最后行遍所有边回到 v_0，即得 G 中一条欧拉回路，则称 v_0 是可以任意行遍的。证明：v_0 是可以任意行遍的当且仅当 $G-v_0$ 中无圈。

解：“$\Rightarrow$”用反证法证明必要性。

否则，$G-v_0$ 中含圈，设 C' 为 $G-v_0$ 中的圈，则 v_0 不在 C' 上。设 $G'=G-E(C')$，由于在图中删除某个圈上的所有边，不影响图中顶点的奇偶性，所以 G' 中仍无奇度顶点，因而，若 G' 连通，G' 仍为欧拉图。

由于 v_0 是可以任意行遍的，在从 v_0 出发行遍 G 中欧拉回路时，只要 G' 中的边未行遍完就行遍 G' 中的边，由于 G' 也是欧拉图，当行遍出 G' 的欧拉回路时，必回到 v_0。但因 v_0 不在 C' 上，所以无法从 v_0 出发再行遍 C' 上的边，这与 v_0 是可以任意行遍的相矛盾。

若 G' 不连通，共有 $k(k \geqslant 2)$ 个连通分支，设为 $G_1, G_2, \cdots, G_k$，易知 $G_i(i=1,2,\cdots,k)$ 都是欧拉图。不妨设 v_0 在 G_1 中，在从 v_0 开始行遍 G 的欧拉回路时，先行遍 G_1 中的欧拉回路，由于不连通性，以及 v_0 不在 G' 上，所以 $G_2, G_3, \cdots, G_k$ 以及 C' 都无法行遍，这又矛盾于 v_0 是可以任意行遍的。

“$\Leftarrow$”：由于 G 为欧拉图，G 为若干个边不重的圈的并，即 $G=\bigcup_{i=1}^{d} C_i$，因为 $G-v_0$ 中无圈，所以 G 中每个圈都过 v_0，即 v_0 是 G 中所有圈的公共顶点，于是 $C_1, C_2, \cdots, C_d$ 都过 v_0。在走 G 中欧拉回路时，从 v_0 开始行遍，随意地行遍完 $C_1, C_2, \cdots, C_d$（可不按标定顺序），最后回到 v_0，走一条欧拉回路，所以 v_0 是可任意行遍的。