信物作业参考解答

1 作业二

题 7

解. 设内筒外表面电荷的线密度为 λ, 因内外筒之间电场分布具有轴对称性, 作长为 l, 半径为 $r(R_1 < r < R_2)$ 的同轴圆柱形高斯面, 由高斯定理

$$\oint_{(S)} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = E \cdot 2\pi r l = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{(S内)} q = \frac{\lambda l}{\varepsilon_0}.$$

故与轴相距为 r 处 $(R_1 < r < R_2)$ 的场强为

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

因内、外筒电势分别为 U_1 和 U_2, 电势差为

$$U_{12} = U_1 - U_2 = \int \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_{R_1}^{R_2} E \ \mathrm{d}r = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} \ \mathrm{d}r = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

故

$$\lambda = \frac{2\pi\varepsilon_0 \left(U_1 - U_2\right)}{\ln \frac{R_2}{R_1}}.$$

设与轴距 r 处 $(R_1 < r < R_2)$ 电势为 $U = U_r$, 则该处与内筒的电势差为

$$\begin{aligned} U_{1r} = U_1 - U_r &= \int_{R_1}^{r} E \ \mathrm{d}r = \int_{R_1}^{r} \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} \ \mathrm{d}r \\ &= \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{r}{R_1} = \frac{2\pi\varepsilon_0 \left(U_1 - U_2\right)}{2\pi\varepsilon_0 \ln \frac{R_2}{R_1}} \ln \frac{r}{R_1} = \frac{\left(U_1 - U_2\right) \ln \frac{r}{R_1}}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \end{aligned}$$

故

$$U = U_r = U_1 - U_{1r} = U_1 - \frac{\left(U_1 - U_2\right) \ln \frac{r}{R_1}}{\ln \frac{R_2}{R_1}}$$

或

$$\begin{aligned} U = U_r = U_2 + U_{r2} &= U_2 + \int_{r}^{R_2} E \ \mathrm{d}r \\ &= U_2 + \frac{\left(U_1 - U_2\right) \ln \frac{R_2}{r}}{\ln \frac{R_2}{R_1}}. \end{aligned}$$

□

题 8

解. 已知 B 板带电 Q 且均匀分布 (忽略边缘效应), 设平衡后其左、右表面分别带电 q_1, q_2, 则

$$q = q_1 + q_2. \tag{1}$$

静电感应使 A 板右表面带电 $-q_1$, C 板左表面带电 $-q_2$, 都均匀分布 (可用高斯定理证明). 再用高斯定理求出 A,B 板间的场强 E_1 和 B,C 板间的 E_2, 为

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{q_1}{\varepsilon_0 S}, \\ E_2 &= \frac{q_2}{\varepsilon_0 S}. \end{aligned} \tag{2}$$

$\boldsymbol{E}_1$ 的方向垂直平板向左, $\boldsymbol{E}_2$ 的方向垂直平板向右, S 是三板的面积. 因 B,C 板接地, $U_{BA} = U_{BC}$. 因 A,B 间和 A,C 间都是均匀电场，故

$$U_{BA} = E_1 d_1 = U_{BC} = E_2 d_2,$$

式中 d_1 是 A,B 板间距, d_2 是 B,C 板间距.

由以上 (1)(2)(3) 式, 解出

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{Qd_2}{d_1+d_2}, \\ q_2 &= Q - q_1 = \frac{Qd_1}{d_1+d_2}. \end{aligned}$$

故 A,C 板上的感应电荷分别为

$$\begin{aligned} q_C &= -q_2 = -\frac{Qd_1}{d_1+d_2}, \\ q_A &= -q_1 = -\frac{Qd_2}{d_1+d_2}. \end{aligned}$$

B 板电势为

$$U_B = U_{BC} = U_{BA} = \frac{q_1 d_1}{\varepsilon_0 S} = \frac{d_1 d_2}{d_1+d_2}\frac{Q}{\varepsilon_0 S}.$$

□

题 9

解. (1) 作同心球形高斯面，由 $\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{E}$ 的高斯定理以及二者的关系，得

$$\begin{aligned} r<R, &\quad D=0, & E&=0, \\ R<r<a, &\quad D=\tfrac{Q}{4\pi r^2}, & E&=\tfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \\ a<r<b, &\quad D=\tfrac{Q}{4\pi r^2}, & E&=\tfrac{D}{\varepsilon_0\varepsilon_r}=\tfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2}, \\ b<r, &\quad D=\tfrac{Q}{4\pi r^2}, & E&=\tfrac{D}{\varepsilon_0}=\tfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \end{aligned}$$

(2) 介质内 $(a<r<b)$ 的极化强度 P 和介质表面 $r=a$ 和 $r=b$ 的 σ' 为

$$\begin{aligned} P &= \chi_{\mathrm{e}}\varepsilon_0 E = \varepsilon_0(\varepsilon_{\mathrm{r}}-1)\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{\mathrm{r}} r^2} = \frac{(\varepsilon_{\mathrm{r}}-1)Q}{4\pi\varepsilon_{\mathrm{r}} r^2}, \\ \sigma'|_{r=a} &= P_n|_{r=a} = -\frac{(\varepsilon_{\mathrm{r}}-1)Q}{4\pi\varepsilon_{\mathrm{r}} a^2}, \\ \sigma'|_{r=b} &= P_n|_{r=b} = \frac{(\varepsilon_{\mathrm{r}}-1)Q}{4\pi\varepsilon_{\mathrm{r}} b^2}, \end{aligned}$$

介质表面 $r=a$ 处的极化电荷与 Q 异号, $r=b$ 处与 Q 同号.

(3) 在介质内任取闭合高斯面 S, 其中极化电荷 q' 为

$$q' = -\oint_{(S)} \boldsymbol{P} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = -\oint_{(S)} \chi_{\mathrm{e}} \varepsilon_0 \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = -\frac{\chi_e}{\varepsilon_{\mathrm{r}}} \oint_{(S)} \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

因介质内无自由电荷,

$$\oint_{(S)} \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0$$

故 $q'=0, \rho'=0$. □