图论部分习题答案

第七章习题:

1. 设无向图 G 有 16 条边，有 3 个 4 度顶点，4 个 3 度顶点，其余顶点的度数均小于 3，问 G 中至少有几个顶点?

解: 用握手定理解本题，设 G 至少有 n 个顶点，则 G 有 $n-7$ 个顶点的度数至多为 2，由握手定理可得 $2m = 32 \leqslant 3 \times 4 + 4 \times 3 + 2(n-7)$. 从此式解出 $n \geqslant 11$，即 G 中至少有 11 个顶点。当度数小于 3 的顶点都是 2 度顶点时，G 有 11 个顶点，其中 4 个是 2 度顶点。

2. 设 9 阶无向图 G 中，每个顶点的度数不是 5 就是 6，证明 G 中至少有 5 个 6 度顶点或至少有 6 个 5 度顶点。

解:【方法一**】**穷举法。设 G 有 x 个 5 度顶点，由握手定理的推论可知，x 只能取 $0, 2, 4, 6, 8$ 这 5 个值，G 有 $9-x$ 个 6 度顶点，于是 $(x, 9-x)$ 只有下面 5 种情况:

$$(1)(0,9); \quad (2)(2,7); \quad (3)(4,5); \quad (4)(6,3); \quad (5)(8,1).$$

在 (1), (2), (3) 中至少有 5 个 6 度顶点，而在 (4), (5) 中均至少有 6 个 5 度顶点。

【方法二**】**反证法。否则，G 至多有 4 个 6 度顶点，并且至多有 5 个 5 度顶点，但由握手定理的推论可知，G 不可能有 5 个 5 度顶点，于是 G 至多有 8 个顶点，这与 G 有 9 个顶点相矛盾。

3. 证明空间中不可能存在有奇数个面且每个面均有奇数条棱的多面体。

解: 用握手定理或握手定理的推论证明，使用反证法。

假设存在具有奇数个面且每个面均具有奇数条棱的多面体，要寻找出矛盾，就要做无向图 $G = \langle V, E \rangle$。其中，$V = \{v | v$ 为 G 的面$\}$，$E = \{(u,v) | u, v \in V \wedge u \neq v \wedge u$ 与 v 有公共棱$\}$。由假设可知，|V| (= 面数) 为奇数，且 $\forall v \in V$，$d(v)$ 为奇数，于是 G 有奇数个奇度顶点，这与握手定理推论相矛盾。所以，以上假设中的无向图 G 是不存在的，从而，具有奇数个面，每个面均有奇数条棱的多面体是不存在的。

14. 设 $n(n \geq 3)$ 阶无向简单图 G 是连通的，但不是完全图，证明存在 $u, v, w \in V(G)$，使得

$(u,v),(v,w)\in E(G)$, 而 $(u,w)\notin E(G)$.

解:【方法一】直接证明法.

由于 G 不是完全图，所以存在顶点 v_1 与 v_2 不相邻，即 $(v_1,v_2)\notin E(G)$。又由于 G 是连通图，所以 v_1,v_2 之间存在通路，设 $\Gamma=v_1u_1u_2\cdots u_rv_2$ 为 v_1 到 v_2 的通路，并且 Γ 是 v_1 到 v_2 的短程线。由于 $(v_1,v_2)\notin E(G)$，所以 $r\geqslant 1$。若 $r=1$，则 v_1,u_1,v_2 3 个顶点为所求，即 $(v_1,u_2)\in E(G)$，$(u_1,v_2)\in E(G)$，而 $(v_1,v_2)\notin E(G)$。

若 $r>1$，则 v_1,u_2,u_2 3 个顶点为所求。此时必有 $(v_1,u_2)\notin E(G)$，否则 v_1 与 v_2 之间的短程不应该是 Γ，因为 $v_1u_2u_3\cdots u_rv_2$ 比 Γ 短，所以，必有 $(v_1,u_2)\notin E(G)$，而 $(v_1,u_1)\in E(G)$ 且 $(u_1,u_2)\in E(G)$，因而 v_1,u_1,u_2 为所求。

【方法二】反证法.

否则，$\forall u,v,w\in V(G)$，只要 (u,v) 和 $(v,w)\in E(G)$，就有 $(u,w)\in E(G)$，记否定的结论为 $(*)$。下面利用 $(*)$ 推矛盾。

$\forall u,v\in V(G)$，由 G 的连通性可知，u 与 v 之间有通路，设 $P=uv_1v_2\cdots v_rv$ 为 u 与 v 之间的一条通路。因为 $(u,v_1),(v_1,v_2)\in E(G)$，由 $(*)$ 可知 $(u,v_2)\in E(G)$，又因为 $(u,v_2),(v_2,v_3)\in E(G)$，由 $(*)$ 可知 $(u,v_3)\in E(G)$，这样继续下去，必有 $(u,v)\in E(G)$，由 u,v 的任意性，可知 G 为无向完全图 K_n，这与 G 不是完全图矛盾。

15. 设 G 是无向简单图, $\delta(G)\geq 2$, 证明 G 中存在长度大于等于 $\delta(G)+1$ 的圈.

解: 用扩大路径法证明.

不妨设 G 是连通的，否则，G 的每个连通分支的最小度都 $\geqslant 2$。

设 $u,v\in V(G)$，由于 G 的连通性可知，u 与 v 之间存在路径，用扩大路径法扩大这条路径，设极大路径为 $\Gamma=v_1v_2\cdots v_{l-1}v_l$。由于最小度为 $\delta\geqslant 2$，易知，$l\geqslant\delta+1$。由极大路径的性质可知，Γ 中 v_1（还有 v_2）不与 Γ 外的顶点相邻，而 $d(v_1)\geqslant\delta(G)\geqslant 2$，因而在 Γ 上至少存在 $\delta(G)$ 个顶点，$v_{i_1}=v_2,v_{i_2},\cdots,v_{i_\delta}\cdots$ 与 v_1 相邻，如图1所示。于是圈 $v_1v_{i_1}\cdots v_{i_\delta}v_1$ 的长度 $\geqslant\delta(G)+1$。

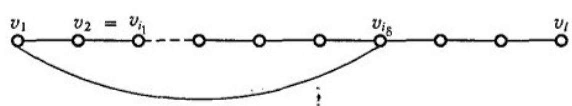

图 *1*

16. 设 G 是无向简单图, $\delta(G)\geq 3$, 证明 G 中各圈长度的最大公约数为 1 或 2.

解: 用扩大路径法找一条极大路径，在路径上找 3 个圈进行讨论。

不妨设 G 是连通简单图，否则可对 G 的某个连通分支进行讨论。

设 $P=v_0v_1\cdots v_l$ 为 G 中一条极大路径。则 $l\geqslant\delta(G)\geqslant 3$。由于 v_0 不与 P 外顶点相邻，又因为 G 为简单图，则在 P 上除 v_i 与 v_0 相邻外，由 $\delta(G)\geqslant 3$，还至少存在两个顶点，设其为 v_r，v_s（$1<r<s$）与 v_0 相邻，于是可得 3 个圈，如图 2 所示。

$$C_1=v_0v_1\cdots v_rv_0,\quad C_2=v_0v_1\cdots v_r\cdots v_sv_0,\quad C_3=v_0v_1\cdots v_sv_0$$

易知，C_1,C_2,C_3 的长度分别为 $r+1,s+1,s-r+2$。设 $\gcd(r+1,s+1,s-r+2)=k$，则 $k\mid r+1\wedge k\mid s+1\wedge k\mid s-r+2$, 由 $k\mid r+1\wedge k\mid s+1\Rightarrow k\mid s-r$, 又由 $k\mid s-r+2\wedge k\mid s-r\Rightarrow k\mid 2$, 于是 k 只能为 1 或 2。

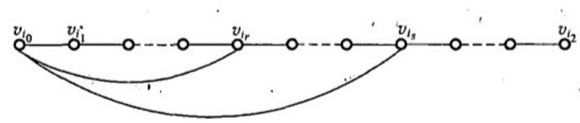

图 2

第九章习题：

2. 无向树 T 有 9 片树叶，3 个 3 度顶点，其余顶点的度数均为 4，问 T 中有几个 4 度顶点？根据 T 的度数列，你能画出多少棵非同构的无向树？

解： 设有 x 个 4 度顶点，则阶数 $n=x+9+3=12+x$，$m=n-1=11+x$，由握手定理可得 $2m=22+2x=9+3\times3+4x\Rightarrow x=2$, 即有 2 个 4 度顶点。于是所求树均为 14 阶树，度数列应为

$$1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,3,3,3,4,4,$$

求出上述度数列对应的所有非同构无向树，不是一件容易的事情。非树叶的顶点的不同排列可得不同构的树。

(1) 直径为 6 的非树叶顶点的排列可有下面 6 种不同方案，

$$(3,3,3,4,4),(3,3,4,3,4),(3,4,3,3,4),(4,3,3,3,4),(3,4,4,3,3),(3,4,3,4,3)$$

从而得 6 棵非同构的树，分别如图3(a), (b), (c), (d), (e), (f) 所示。

(2) 直径为 5 的可画出 7 棵非同构树，如图4(a),(b),(c),(d),(e),(f),(g) 所示。直径为 4 的如图4(h) 所示。

3. 一棵无向树 T，有 n_i 个 i 度顶点，$i=2,3,\ldots,k$，其余顶点都是树叶，问 T 有几片树叶？

解： 设有 x 片树叶，则阶数 $n=x+\sum_{i=2}^{x}n_i$，边数 $m=\sum_{i=2}^{x}n_i+(x-1)$，由握手定理可知

$$2m=\sum_{i=2}^{x}2n_i+2(x-1)=x+\sum_{i=2}^{x}in_i,$$

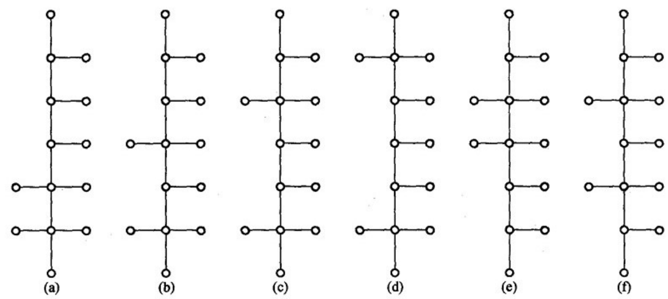

图 *3*

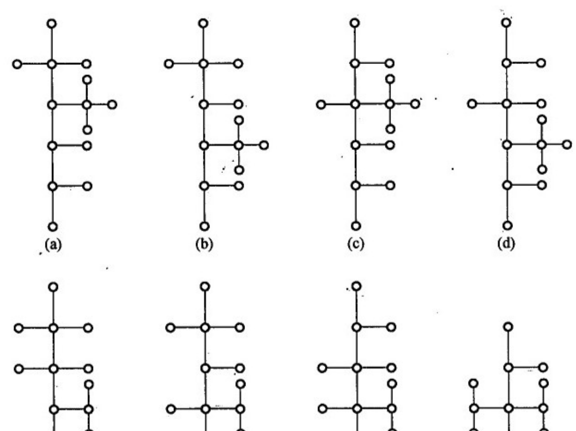

图 *4*

解得

$$x=\sum_{i=2}^{x}(i-2)n_i+2=\sum_{i=3}^{x}(i-2)n_i+2.$$

6. 设 G 为 $n(n\geqslant 5)$ 阶简单图，证明 G 或 $\overline{G}$ 中必含圈。

解:【方法一】设 G 与 $\overline{G}$ 的边数分别为 m 与 m'，连通分支数分别为 s 与 s' $(s\geqslant 1, s'\geqslant 1)$。

若 G 与 $\overline{G}$ 中都无圈，则它们的各连通分支都是树。设 G 的第 i 个连通分支的阶数和边数分别为 n_i 与 m_i $(1\leqslant i\leqslant s)$, $\overline{G}$ 的第 j 个连通分支的阶数和边数分别为 n'_j 与 m'_j $(1\leqslant j\leqslant s)$, 因此

$$\frac{n(n-1)}{2}=m+m'=\sum_{i=1}^{s}m_i+\sum_{i=1}^{s}m'_i=\sum_{i=1}^{s}n_i+\sum_{i=1}^{s}n'_i-(s+s')=2n-(s+s')\leqslant 2n-2,$$

整理后得 $n^2-5n+4\leqslant 0$.

解此不等式，得 $1\leqslant n\leqslant 4$，这与 $n\geqslant 5$ 相矛盾，所以 G 或 $\overline{G}$ 必含圈。

【方法二】不妨设 G 的边数不比 $\overline{G}$ 的边数少，下面证明 G 中必含圈。方法还是反证法。

否则，设 G 有 s $(s\geqslant 1)$ 个连通分支，它们都是树，于是 G 的边数 m 满足

$$\frac{n(n-1)}{4}\leqslant m=\sum_{i=1}^{s}m_i=\sum_{i=1}^{s}n_i-s=n-s\leqslant n-1,$$

得不等式 $n^2-5n+4\leqslant 0$,

解出 $1\leqslant n\leqslant 4$，这与 $n\geqslant 5$ 相矛盾，所以 G 中必含圈。

【方法三】直接利用 $n\geqslant 5$ 的条件。

不妨设 G 的边数不小于 $\overline{G}$ 的边数，即 $m\geqslant \frac{n(n-1)}{4}$，因为 $n\geqslant 5$，故得 $m\geqslant \frac{n(n-1)}{4}\geqslant n$，由于 $m\geqslant n$，则 G 中必含圈，否则，G 为含 s $(s\geqslant 1)$ 个连通分支的树 $(s=1)$ 或森林 $(s\geqslant 2)$，于是应有 $m\leqslant n-s\leqslant n-1$，这与 $m\geqslant n$ 相矛盾。

13. 设 T_1,T_2 是无向连通图 G 的两棵生成树。已知 $e_1\in E(T_1)$ 但 $e_1\notin E(T_2)$，证明存在 $e_2\in E(T_2)$ 但 $e_2\notin E(T_1)$，使得 $(T_1-e_1)\cup\{e_2\}$，$(T_2-e_2)\cup\{e_1\}$ 都是 G 的生成树。

解: 由于 e_1 是 T_1 的树枝，且 $e_1\notin E(T_2)$，所以 e_1 是 T_2 的弦，这说明 e_1 不是环（环不在任何生成树中），也不是桥（桥应在任何生成树中）。

设 $e_1=(u_1,v_1)$。则 u,v 之间在 T_2 中存在唯一的路径 $P(u_1,v_1)$，$P(u_1,v_1)\cup\{e_1\}$ 构成一个圈。e_1 将 T_1 分为两个连通分支 G_1,G_2。考虑圈 $P(u_1,v_1)\cup\{e_1\}$ 中的所有顶点，则存在 $u_2\in G_1, v_2\in G_2$ 且 $e_2=(u_2,v_2)\subseteq P(u_1,v_1)$，由于 G_1,G_2 之间不连通，因此 $(T_1-e_1)\cup\{e_2\}$ 连通无回路。同样，$T_2\cup\{e_1\}$ 存在唯一回路 $P(u_1,v_1)\cup\{e_1\}$，从回路中删去 e_2 得到 $(T_2-e_2)\cup\{e_1\}$ 是联通无回路的。

由以上分析可知，$(T_1-e_1)\cup\{e_2\}$ 连通无回路，且为 G 的生成树，同样，$(T_2-e_2)\cup\{e_1\}$ 也是 G 的生成树。

21. 求算式 $((a+(b*c)*d)-e)\div(f+g)+(h*i)*j$ 的波兰符号法和逆波兰符号法表示。

解： 用二叉正则树 T 存放算式，如图5所示。

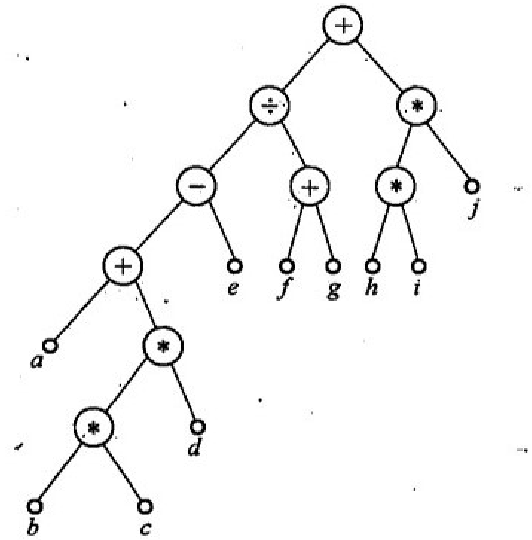

图 5

(1) 用前序行遍法访问 T，得波兰符号法算式为：$+\div-+a**bcde+fg**hij$.

(2) 用后序行遍法访问 T，得逆波兰符号法算式为：$abc*d*+e-fg+\div hi*j*+$.

第十章习题：

1. 求图6所示二图的关联矩阵。

解： 图 6(a) 中有向图 D 的关联矩阵为

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6
v_1	-1	1	1	0	0	0
v_2	1	-1	0	-1	0	0
v_3	0	0	-1	1	0	0
v_4	0	0	0	0	1	0
v_5	0	0	0	0	0	-1
v_6	0	0	0	0	-1	1

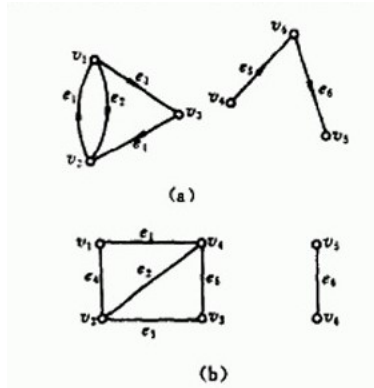

图 *6*

图 6(b) 中无向图 G 的关联矩阵为

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6
v_1	1	0	0	1	0	0
v_2	0	1	1	1	0	0
v_3	0	0	1	0	1	0
v_4	1	1	0	0	1	0
v_5	0	0	0	0	0	1
v_6	0	0	0	0	0	1

4. 有向图如图7所示.

(1) D 中 v_1 到 v_4 长度为 1, 2, 3, 4 的通路各为多少条?

(2) v_1 到 v_4 长度小于等于 3 的通路为多少条?

(3) v_1 到 v_1 长度为 1, 2, 3, 4 的回路各为多少条?

(4) v_4 到 v_4 长度小于等于 3 的回路为多少条?

(5) D 中长度为 4 的通路 (不含回路) 有多少条?

(6) D 中长度为 4 的回路有多少条?

(7) D 中长度小于等于 4 的通路为多少条? 其中有多少条为回路?

(8) 写出 D 的可达矩阵.

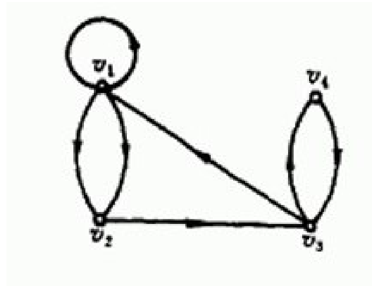

图 7

解： 只需计算有向图 D 的邻接矩阵 A 及 A^2, A^3, A^4 就可以回答所有问题。

$$A=\begin{pmatrix}1&2&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix},\quad A^2=\begin{pmatrix}1&2&2&0\\1&0&0&1\\1&2&1&0\\1&0&0&1\end{pmatrix},\quad A^3=\begin{pmatrix}3&2&2&2\\1&2&1&0\\2&2&2&1\\1&2&1&0\end{pmatrix},\quad A^4=\begin{pmatrix}5&6&4&2\\2&2&2&1\\4&4&3&2\\2&2&2&1\end{pmatrix}.$$

为计算方便，还可以计算出 B_1, B_2, B_3, B_4.

$$B_1=A=\begin{pmatrix}1&2&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix},\quad B_2=\begin{pmatrix}2&4&2&0\\1&0&1&1\\2&2&1&1\\1&0&1&1\end{pmatrix},\quad B_3=\begin{pmatrix}5&6&4&2\\2&2&2&1\\4&4&3&2\\2&2&2&1\end{pmatrix},\quad B_4=\begin{pmatrix}10&12&8&4\\4&4&4&2\\8&8&6&4\\4&4&4&2\end{pmatrix}.$$

根据以上计算回答各问题:

(1) v_1 到 v_4 长度为 1, 2, 3, 4 的通路分别为 0; 0; 2, 2 条；

(2) v_1 到 v_4 长度小于等于 3 的通路为 2 条；

(3) v_1 到 v_1 长度为 1, 2, 3, 4 的回路分别为 1, 1, 3, 5 条；

(4) v_4 到 v_4 长度小于等于 3 的回路为 1 条；

(5) D 中长度为 4 的通路 (不含回路) 为 33 条；

(6) D 中长度为 4 的回路为 11 条；

(7) D 中长度小于等于 4 的通路为 88 条，其中有 22 条回路；

(8) 可达矩阵

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

可见 D 是强连通图。

5. 已知标定的无向图如图8 所示. A 是它的相邻矩阵, 求 A^k 中的元素 $a_{22}^{(k)}$, $k = 1, 2, \cdots$.

图 8

解： 解本题首先写出图 G 的相邻矩阵 A，然后求 A 的前几次幂.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$A^k = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & 2^{\frac{k-1}{2}} & 0 \\ 2^{\frac{k-1}{2}} & 0 & 2^{\frac{k-1}{2}} \\ 0 & 2^{\frac{k-1}{2}} & 0 \end{pmatrix}, & k \text{ 为奇数;} \\ \begin{pmatrix} 2^{\frac{k}{2}-1} & 0 & 2^{\frac{k}{2}-1} \\ 0 & 2^{\frac{k}{2}} & 0 \\ 2^{\frac{k}{2}-1} & 0 & 2^{\frac{k}{2}-1} \end{pmatrix}, & k \text{ 为偶数.} \end{cases}$$

可见得

$$a_{22}^{(k)} = \begin{cases} 0, & k \text{ 为奇数;} \\ 2^{\frac{k}{2}}, & k \text{ 为偶数.} \end{cases}$$

第八章习题:

4. 设 G 为欧拉图，$v_0 \in V(G)$，若从 v_0 开始行遍，无论行遍到那个顶点，只要未行遍过的边就可以行遍，最后行遍所有边回到 v_0，即得 G 中一条欧拉回路，则称 v_0 是可以任意行遍的。证明：v_0 是可以任意行遍的当且仅当 $G - v_0$ 中无圈。

解：“$\Rightarrow$” 用反证法证明必要性。

否则，$G-v_0$ 中含圈，设 C' 为 $G-v_0$ 中的圈，则 v_0 不在 C' 上。设 $G'=G-E(C')$，由于在图中删除某个圈上的所有边，不影响图中顶点的奇偶性，所以 G' 中仍无奇度顶点，因而，若 G' 连通，G' 仍为欧拉图。

由于 v_0 是可以任意行遍的，在从 v_0 出发行遍 G 中欧拉回路时，只要 G' 中的边未行遍完就行遍 G' 中的边，由于 G' 也是欧拉图，当行遍出 G' 的欧拉回路时，必回到 v_0。但因 v_0 不在 C' 上，所以无法从 v_0 出发再行遍 C' 上的边，这与 v_0 是可以任意行遍的相矛盾。

若 G' 不连通，共有 $k(k\geqslant 2)$ 个连通分支，设为 $G_1,G_2,\cdots,G_k$，易知 $G_i(i=1,2,\cdots,k)$ 都是欧拉图。不妨设 v_0 在 G_1 中，在从 v_0 开始行遍 G 的欧拉回路时，先行遍 G_1 中的欧拉回路，由于不连通性，以及 v_0 不在 G' 上，所以 $G_2,G_3,\cdots,G_k$ 以及 C' 都无法行遍，这又矛盾于 v_0 是可以任意行遍的。

“$\Leftarrow$”：由于 G 为欧拉图，G 为若干个边不重的圈的并，即 $G=\bigcup_{i=1}^{d}C_i$，因为 $G-v_0$ 中无圈，所以 G 中每个圈都过 v_0，即 v_0 是 G 中所有圈的公共顶点，于是 $C_1,C_2,\cdots,C_d$ 都过 v_0。在走 G 中欧拉回路时，从 v_0 开始行遍，随意地行遍完 $C_1,C_2,\cdots,C_d$（可不按标定顺序），最后回到 v_0，走一条欧拉回路，所以 v_0 是可任意行遍的。