20240508作业

1. 证明$f(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}n^\alpha e^{-nx}\quad\in C^\infty(0,+\infty)$, 这里$\alpha$是一实数.

2. 设函数$f_n(x)\quad(n=1,2,\cdots)$在任一有限区间上可积, 并且在$(-\infty,+\infty)$上内闭一致收敛到$f(x)$. 再设存在函数$g(x)$满足$|f_n(x)|\leqslant g(x)\quad(n=1,2,\cdots),\qquad\forall x\in(-\infty,+\infty)$, 且$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)\,\mathrm{d}x<+\infty$. 证明广义积分$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$收敛, 并且$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f_n(x)\,\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$.

3. (1) 设$f(x)$在区间$[a,b+1]$可导, 且$f'(x)$在$[a,b+1]$一致连续.
证明$F_n(x)=n\Big(f(x+\dfrac{1}{n})-f(x)\Big)\ (n=1,2,\cdots)$ 在$[a,b]$上一致收敛.
(2) 证明$f_n(x)=n\Big(\sqrt{x+\dfrac{1}{n}}-\sqrt{x}\Big)\ (n=1,2,\cdots)$ 在$(0,+\infty)$内闭一致收敛, 但在$(0,+\infty)$不一致收敛.

4. 设在$[-1,1]$定义的非负函数列$f_n(x)\quad(n=1,2,\cdots)$满足:
(1) 对$\forall n$, $\displaystyle\int_{-1}^{1}f_n(x)\,\mathrm{d}x=1$; (2) 对任意的$\delta>0$, $f_n(x)\rightrightarrows 0, x\in[-1,-\delta]\cup[\delta,1]$.
再设$g(x)\in R[-1,1]$且在$x=0$连续, 证明$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_{-1}^{1}f_n(x)g(x)\,\mathrm{d}x=g(0)$.

5. 证明: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1 t^n\sin\pi t\,\mathrm{d}t=\int_0^1\frac{\sin\pi t}{t}\,\mathrm{d}t$.

6. 证明函数$f(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(xe^n)}{n^n}$ 在$(-\infty,+\infty)$内具有连续的导函数.