命题7.2.5. 设$f(x)$定义在$[a,b]$上，$c\in(a,b)$.

则$f(x)\in BV[a,b] \quad \Leftrightarrow \quad f(x)\in BV[a,c],\ \ f(x)\in BV[c,b]$；并且有 $\displaystyle\bigvee_a^b f(x)=\bigvee_a^c f(x)+\bigvee_c^b f(x).$

命题7.2.6. $f(x)\in BV[a,b],\ g(x)\in BV[a,b] \ \Rightarrow\ f(x)\pm g(x)\in BV[a,b],\ f(x)g(x)\in BV[a,b].$

命题7.2.7. 若$f(x),g(x)\in BV[a,b]$ 且$|g(x)|\geqslant m>0,\quad x\in[a,b]$. 则$\dfrac{f(x)}{g(x)}\in BV[a,b]$.

命题7.2.8. 改变$f(x)$于$[a,b]$上的有限个点的值，不改变$f(x)$于$[a,b]$的有界变差性质.

命题7.2.9. $[a,b]$上分段单调的有界函数是有界变差函数.

所谓分段单调是指，存在$[a,b]$ 的一个分割Δ_n： $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$， 使得$f(x)$在每一个子区间(x_{k-1},x_k)上都是单调的.[1]

[1]有些文献上定义“分段单调”时，称$f(x)$在每一个闭子区间$[x_{k-1},x_k]$上是单调的（比如[?]），但是若$f(x)$在分点处发生跳跃间断时，无法保证闭子区间上的单调性. 所以这里使用开子区间来定义，但是使用开子区间定义就有可能包含无界函数（分点处无穷间断），所以我们使用“分段单调”和“有界”来限定函数.

命题7.2.10. $[a,b]$上Lipschitz连续函数是有界变差的.

题7.2.5. 设$f(x)$定义在$[a,b]$上, $c\in(a,b)$.

则$f(x)\in BV[a,b] \iff f(x)\in BV[a,c],\ f(x)\in BV[c,b]$; 并且有 $\bigvee_a^b f(x)=\bigvee_a^c f(x)+\bigvee_c^b f(x)$.

题7.2.6. $f(x)\in BV[a,b],\ g(x)\in BV[a,b] \Rightarrow f(x)\pm g(x)\in BV[a,b],\ f(x)g(x)\in BV[a,b]$.

命题7.2.7. 若$f(x),g(x)\in BV[a,b]$ 且$|g(x)|\geqslant m>0,\ x\in[a,b]$. 则$\dfrac{f(x)}{g(x)}\in BV[a,b]$.

命题7.2.8. 改变$f(x)$于$[a,b]$上的有限个点的值, 不改变$f(x)$于$[a,b]$的有界变差性质.

命题7.2.9. $[a,b]$上分段单调的有界函数是有界变差函数.

所谓分段单调是指, 存在$[a,b]$ 的一个分割Δ_n: $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$, 使得$f(x)$在每一个子区间(x_{k-1},x_k)上都是单调的.[1]

[1]有些文献上定义"分段单调"时, 称$f(x)$在每一个闭子区间$[x_{k-1},x_k]$上是单调的(比如[?]), 但是若$f(x)$在分点处发生跳跃间断时, 无法保证闭子区间上的单调性. 所以这里使用开子区间来定义, 但是使用开子区间定义就有可能包含无界函数(分点处无穷间断), 所以我们使用"分段单调"和"有界"来限定函数.

命题7.2.10. $[a,b]$上Lipschitz连续函数是有界变差的.

证明. 设$|f(x')-f(x'')|\leqslant L|x'-x''|,\ \forall x',x''\in[a,b]$. 则对于$[a,b]$的任何分割$\Delta$: $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$,

$$\sigma(f,\Delta)=\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})|\leqslant L\sum_{i=1}^{n}|x_i-x_{i-1}|=L(b-a).$$

命题7.2.11. 如果$f(x)\in D[a,b]$, 且$\exists L>0$ s.t. $|f'(x)|\leqslant L,\ x\in[a,b]$. 则$f(x)\in BV[a,b]$.

命题7.2.14. $f(x)\in BV[a,b]$的充要条件是，存在$[a,b]$上的单增函数$g(x),h(x)$ 使得 $f(x)=g(x)-h(x)$.

证明. 若存在$[a,b]$上的单增函数$g(x),h(x)$使得 $f(x)=g(x)-h(x)$， 则命题7.2.2已经证明，$f(x)\in BV[a,b]$.

若$f(x)\in BV[a,b]$，则据命题7.2.12，$F(x)=\bigvee\limits_a^x f(t)$是$[a,b]$上的单增函数. 令$h(x)=F(x)-f(x)$， $x\in[a,b]$. 若能证明$h(x)$在$[a,b]$单增，则命题证毕.

事实上，对任意的$a\leqslant x'<x''\leqslant b$，

$$\begin{aligned}h(x'')-h(x')&=[F(x'')-f(x'')]-[F(x')-f(x')]\\&=[F(x'')-F(x')]-[f(x'')-f(x')].\end{aligned}$$

据$F(x)$的强函数性质，$h(x'')-h(x')\geqslant 0$， $\forall\ a\leqslant x'<x''\leqslant b$. 即$h(x)$单增. $\square$

本命题看似简单，但并不直观.

又根据单调有界函数各点的单侧极限存在, 显有如下结论.

命题7.2.15. 设$f(x) \in BV[a,b]$, 则$\lim\limits_{x\to a+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to b-} f(x)$; $\lim\limits_{t\to x+} f(t)$, $\lim\limits_{t\to x-} f(t)$, $\forall x \in (a,b)$均存在.

有界变差函数$f(x)$的强函数$F(x)$, 在单调性方面较之$f(x)$有所提高. 但是, 它们的连续性却只有如下的等价性.

命题7.2.16. 设$f(x) \in BV[a,b]$, $F(x) = \bigvee\limits_a^x f(t)$, $x \in [a,b]$. 则$f(x)$于$x_0 \in [a,b]$点连续的充要条件是$F(x)$于$x_0 \in [a,b]$点连续.

证明. 据命题7.2.13, $|f(x) - f(x_0)| \leqslant |F(x) - F(x_0)|$, $\forall x \in [a,b]$,

这导致, $F(x)$于$x_0 \in [a,b]$点连续时, $f(x)$于$x_0 \in [a,b]$点连续. 充分性得证.

下证必要性. 首先, 设$f(x)$于$x_0 \in [a,b)$点右连续时, 往证$F(x)$于x_0点右连续. 即往证: $\forall \varepsilon > 0, \exists x_1 > x_0$ s.t. $0 \leqslant F(x) - F(x_0) \leqslant 2\varepsilon$, $\forall x \in (x_0, x_1)$.

$f(x)$于$x_0 \in [a,b)$点右连续导致$\exists \delta > 0$ s.t. $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, $\forall x \in (x_0, x_0+\delta)$.

由$\bigvee\limits_{x_0}^b f(x)$的定义知, 存在$[x_0,b]$的一个分割$\Delta$: $x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ 使得 $\sum\limits_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})| \geqslant \bigvee\limits_{x_0}^b f(x) - \varepsilon$, 同时, $x_1 \in (x_0, x_0+\delta)$

—— 能做到这一点是命题7.2.4保证的, 即若$x_1 \notin (x_0, x_0+\delta)$, 则在$x_0, x_0+\delta$之间添加一个分点, 结果是$\sum\limits_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})|$更大了.

此时, $\bigvee\limits_{x_0}^b f(x) < \varepsilon + \sum\limits_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})| < 2\varepsilon + \sum\limits_{i=2}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})| \leqslant 2\varepsilon + \bigvee\limits_{x_1}^b f(x)$

$$\Rightarrow \bigvee_{x_0}^b f(x) - \bigvee_{x_1}^b f(x) \leqslant 2\varepsilon \Rightarrow F(x_1) - F(x_0) \leqslant 2\varepsilon.$$

定理7.4.1. (1) $f(x) \in R[a,b] \Rightarrow F(x) \in C[a,b]$;

(2) $f(x) \in C[a,b] \Rightarrow F(x) \in D[a,b]$, 且 $F'(x) = f(x)$, $x \in [a,b]$.

命题7.4.1. $f(x) \in R[a,b]$ 时, $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 在 $f(x)$ 的所有连续点处可导,

且在这样的点 $F'(x) = f(x)$.

由于前一节我们已经知道, 可积函数是几乎处处连续的,

所以本命题说明, 纵然一个可积函数不一定是一个导函数,

但一定存在一个几乎处处可导的函数, 使得在可导点上以该可积函数为导数.

这为后续的更广意义上微积分理论做好了铺垫.

设 $x \in [a,b]$ 时, $\varphi(x), \psi(x) \in [c,d]$, 且 $f(x) \in C[c,d]$, $\varphi(x), \psi(x) \in D[a,b]$. 则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_c^{\varphi(x)} f(t)\,\mathrm{d}t\right) = f(\varphi(x))\varphi'(x), \qquad x \in [a,b];$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t)\,\mathrm{d}t\right) = f(\varphi(x))\varphi'(x) - f(\psi(x))\psi'(x), \qquad x \in [a,b].$$

证明.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_c^{\varphi(x)} f(t)\,\mathrm{d}t\right) \xlongequal{u=\varphi(x)} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_c^{u} f(t)\,\mathrm{d}t\right)$$

$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left(\int_c^{u} f(t)\,\mathrm{d}t\right) \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$