

hw5

2300012929 尹锦润

Problem1

教材 5.9, 5.10

- 5.9 设有 n 项任务由 k 个可并行操作的机器完成, 完成任务 i 所需要的时间是 t_i , 求一个最佳任务分配方案, 使得完成时间(从时刻 0 计时, 到最后一台机器停止的时间)达到最短.
- 5.10 在 5.9 题中, 假设每个任务有个完成期限 B_i , 以及超出期限的罚款数 f_i . 试求一个最佳任务分配方案使得完成所有任务的总罚款最少.

5.9

使用回溯法, 按照任务顺序进行分配, 每个节点代表: 将前 $i - 1$ 个任务分配完成, 分配第 i 个任务的选择情况【从 k 个操作机器中枚举】。

当枚举完 n 个任务后, 计算完成时间, 用长度为 k 的数组, 遍历所有任务, 累加其用时, 得到完成时间, 取所有节点最小时间。

节点数为 $\mathcal{O}(k^n)$, 单次计算用时 $\mathcal{O}(n)$, 最坏情况总用时为 $\mathcal{O}(n \cdot k^n)$ 。

5.10

使用回溯法, 按照任务顺序进行分配, 每个节点代表: 将前 $i - 1$ 个任务分配完成, 分配第 i 个任务的选择情况【从 k 个操作机器中枚举】以及优先级排序【从 $0 \sim n - 1$ 中选择一个没有被占据的】。

当枚举完 n 个任务后, 计算完成时间, 用长度为 k 的数组, 按照**优先级**遍历所有任务, 累加其用时, 得到完成时间, 如果超过界限, 则计算罚款, 取所有节点罚款最小时间。

节点数 $\mathcal{O}(k^n n!)$, 单次计算用时 $\mathcal{O}(n)$, 最坏情况总用时为 $\mathcal{O}(n \cdot n! k^n)$ 。

Problem 2

2 Minimizing Kendall tau distance

Given m rank lists denoted as P_1, P_2, \dots, P_m , each of which is a permutation of integers from 1 to n . We want to find an aggregation rank list S which is also a permutation of integers from 1 to n , and minimizes the *Kendall tau distance* between S and P_1, P_2, \dots, P_m .

Kendall tau distance is defined as:

$$K(S; P_1, P_2, P_3, \dots, P_m) = \sum_{k=1}^m |\{(i, j) \mid \text{rank}(i, P_k) < \text{rank}(j, P_k) \text{ and } \text{rank}(i, S) > \text{rank}(j, S)\}|$$

where $\text{rank}(i, P)$ represents the rank of i in permutation P . Please use the **branch-and-bound** method to solve this problem and provide **complexity analysis**.

节点 $\langle x_1, x_2, \dots, x_i \rangle$ 含义：已经选择了 S 中的前 i 个元素。

搜索时候枚举没有选中的元素，加入下一个位置中。

下界：已经产生的逆序对个数【每个节点都维护】，加入 x 时候，遍历 m 个 P_j ，求有多少个元素 $< x$ 但是还没有放置在 S 中【树状数组维护可以做到 $\mathcal{O}(\log n)$ 】。

上界：下界 + $m \binom{n-i}{2}$ 。

最坏情况用时： $\mathcal{O}(n!m \log n)$ 。

Problem 3

3 Circuit Routing

As shown in Figure 1, the printed circuit board (PCB) divides the wiring area into an $m \times n$ grid array. We want to determine the shortest routing scheme connecting the grid **a** to the grid **b**. To avoid crossing lines, the grid with already routed wires has been marked as blocked (as shown in 1 in Figure 1), and other lines are not allowed to pass through the blocked grid. When routing, the circuit wires can only be routed in a straight line or at a right angle. Please use the **branch-and-bound** method to solve this problem, explain the specific process, and analyze the **time complexity** of the algorithm (worst case).

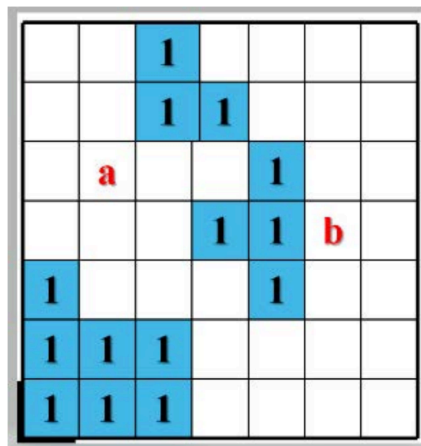


Figure 1: PCB routing example

节点 $\langle x, i \rangle$ 含义：从 a 出发，走到 x ，走了 i 步。

搜索的时候枚举四周可以移动的节点，拓展搜索树。

每次利用 branch-and-bound 选取最小代价的节点，然后拓展。

代价函数： $i + \text{dis}(b, x)$ ，其中 dis 为曼哈顿距离。

全局界为已经搜索出来的答案。

最坏时间复杂度 $\mathcal{O}(mn)$ 。