

## 20240325作业

1. 讨论积分的敛散性:  $I = \int_0^1 \frac{\sin \frac{1}{x}}{x^{\frac{3}{2}} \ln(1 + \frac{1}{x})} dx$ .
2. 讨论积分敛散性:  $I = \int_0^{+\infty} \left( \left( 1 - \frac{\sin x}{x} \right)^{-\alpha} - 1 \right) dx, \quad \alpha > 0$ .
3. 讨论  $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x^2}{x^p} dx$  的敛散性和绝对收敛性, 其中  $p \in \mathbb{R}$  是常数.
4. 讨论积分的收敛性与绝对收敛性:  $I = \int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha \sin x}{1 + x^\beta} dx$ , 其中  $\alpha, \beta$  为常数.
5. 设  $f(x) \in C[0, +\infty)$ ,  $\alpha = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ,  $\int_0^1 \frac{f(x)}{x} dx$  收敛, 证明:  

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = \alpha \ln \frac{a}{b}, \quad \forall 0 < a < b.$$