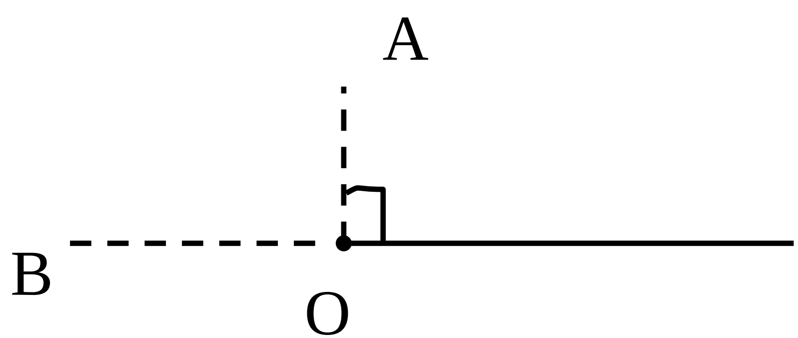
习题课 02

- 电场强度的积分计算
- 高斯定理
- 叠加原理
- 电势
- 电偶极子

均匀带电的半无限长直线

- 有如图所示的均匀带电的半无限长直线，求A、B点的电场，已知OA长度a，OB长度b，电荷密度 λ

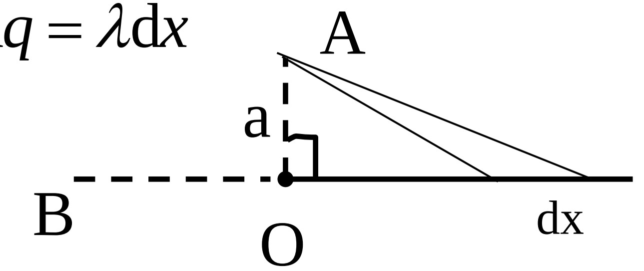


类似教材1 P15 例题3

关于积分计算-积分的技巧

方法1：

将半无限长线条分为小段，dx小段的电量为 $\mathrm{d}q = \lambda \mathrm{d}x$



dx小段在A点处的场强为 $\mathrm{d}E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \bullet \frac{\lambda \mathrm{d}x}{a^2 + x^2}$

与直线平行的场强大小为

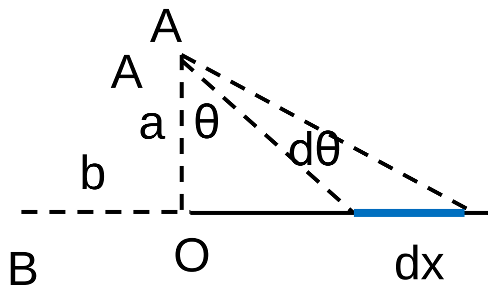
$$E_{\parallel} = \int \mathrm{d}E \bullet \frac{x}{(a^2 + x^2)^{1/2}} = \int_0^{\infty} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \bullet \frac{x\lambda \mathrm{d}x}{(a^2 + x^2)^{3/2}} = -\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \bullet \frac{1}{(a^2 + x^2)^{1/2}}\bigg|_0^{\infty} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}$$

与直线垂直的场强大小为 $E_{\perp} = \int \mathrm{d}E \bullet \frac{a}{(a^2 + x^2)^{1/2}} = \int_0^{+\infty} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \bullet \frac{a\lambda \mathrm{d}x}{(a^2 + x^2)^{3/2}}$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{a\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \bullet \frac{\mathrm{d}x / x^3}{((a/x)^2 + 1)^{3/2}} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a} \bullet \frac{1}{((a/x)^2 + 1)^{1/2}}\bigg|_0^{+\infty} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}$$

关于积分计算-积分的技巧

方法2： **线元转化为角微元的方法：**



定义角 θ 和小角 $d\theta$， $x = a \cdot tg\theta$ 左右求导 $\mathrm{d}x = \dfrac{a}{\cos^2\theta}\mathrm{d}\theta$

每个小角对应的线段带电量为：$\mathrm{d}q = \lambda \mathrm{d}x = \dfrac{\lambda a}{\cos^2\theta}\mathrm{d}\theta$

在A点电场为 $\mathrm{d}E = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \bullet \dfrac{\lambda a \mathrm{d}\theta / \cos^2\theta}{(a/\cos\theta)^2} = \dfrac{\lambda \mathrm{d}\theta}{4\pi\varepsilon_0 a}$

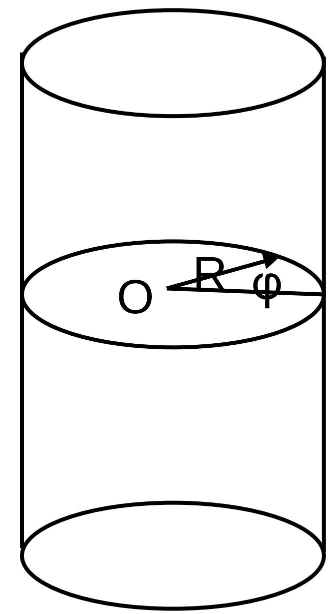
A点与直线平行的场强分量方向向左，大小为：$E_{//} = \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}E \bullet \mathrm{Sin}\,\theta = \int_0^{\pi/2} \dfrac{\lambda \mathrm{d}\theta}{4\pi\varepsilon_0 a} \bullet \sin\theta = \dfrac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}$

A点与直线垂直的场强分量方向向上，大小为：$E_{\perp} = \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}E \bullet \cos\theta = \int_0^{\pi/2} \dfrac{\lambda \mathrm{d}\theta}{4\pi\varepsilon_0 a} \bullet \cos\theta = \dfrac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}$

B点场强方向向左，大小为：$E = \int \mathrm{d}E = \int_0^{+\infty} \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \bullet \dfrac{\lambda \mathrm{d}x}{(b+x)^2} = -\dfrac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \bullet \dfrac{1}{b+x}\Bigg|_0^{+\infty} = \dfrac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 b}$

关于积分计算-微元的划分

- 有无限长圆柱面，半径R，电荷面密度 $\sigma=\sigma_0 Cos\varphi$ ，求轴线上各点的电场强度。



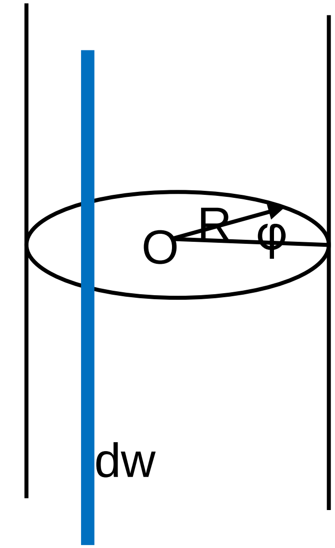
此例中，将柱面划分成无限长细条，比较好解。

注意此例中面元的表示方法，要理解其含义，将窄面元看作线来计算，但是它仍然是面电荷而不是线电荷。好比面微元看作点电荷计算，但它不是点电荷。

- 圆盘、球面等，可以不必划分为圆环，直接用小微元积分。

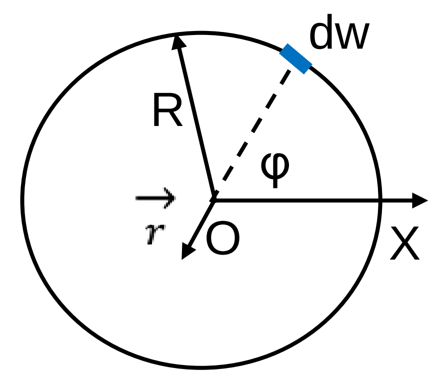
关于积分计算-微元的划分

- 如图取窄条宽度dw，则等价的线电荷密度为 $\lambda=\sigma\cdot dw$ $dw=Rd\varphi$
- 根据高斯定理，窄条在O点场强：



$$d\vec{E}=\frac{\sigma\cdot dw}{2\pi R\varepsilon_0}\hat{r}=\frac{\sigma_0 Cos\varphi}{2\pi\varepsilon_0}d\varphi\cdot\hat{r}$$

如图所示，根据电荷分布对称性，场强只有x分量



$$dE_x=-\frac{\sigma_0 Cos^2\varphi}{2\pi\varepsilon_0}d\varphi$$

$$E_x=-4\cdot\frac{\sigma_0}{2\pi\varepsilon_0}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{Cos}^2\phi d\phi=-\frac{2\sigma_0}{\pi\varepsilon_0}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{Cos}\,2\phi+1}{2}d\phi=-\frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}$$

高斯定理

- 讨论：
  - 如果闭合面内总电荷量为零，闭合面上电场强度E处处为零？
  - 如果闭合面上电场强度处处为零，闭合面内没有电荷？
- 求电场强度
  - 对称性：球对称，轴对称，平面对称
  - 电荷：点，线，面，体

高斯定理习题1

- 1. 有半径为R的均匀带电球面，电荷面密度是 σ 求任意一点的场强。

解：选取以球心为中心，建立球坐标系，半径为r的球面作为高斯面，

$4\pi r^2 E(r)=Q/\varepsilon_0$ ；

r<R, Q=0, E(r)=0;

r>R, $Q=4\pi R^2\sigma$, $E(r)=R^2\sigma/ r^2\varepsilon_0$

$$\vec{E}=\frac{R^2\sigma}{r^2\varepsilon_0}\hat{r}$$

高斯定理习题2

- 2.有半径是R的无限长带电圆柱体，电荷体密度是 ρ 求任意一点的场强

解：选取以轴线为z轴，半径为r，高为*L*的柱面作为高斯面，建立柱坐标系

$2\pi r L E(r)=Q/\varepsilon_0$

r<R，Q=$\pi r^2 L\rho$，E(r)=$\rho r/2\varepsilon_0$

$$\vec{E}=\frac{\rho r}{2\varepsilon_0}\hat{\rho}$$

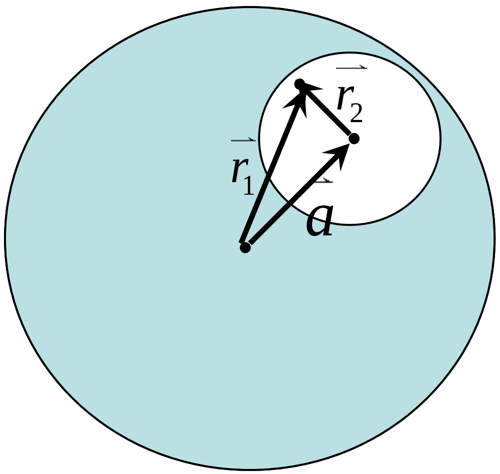
r>R，Q=$\pi R^2 L\rho$，E(r)=$\rho R^2/2r\varepsilon_0$

$$\vec{E}=\frac{\rho R^2}{2r\varepsilon_0}\hat{\rho}$$

教材例题7

叠加原理习题1

- 1.电荷均匀分布在一球体内，体密度为ρ，在球内挖出一个球形空腔，两个球心间距a，如图所示，求空腔内的电场强度



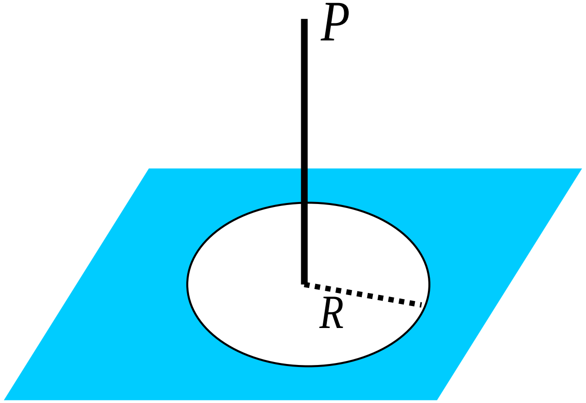
解：将空腔的形成看作是带电为-ρ的小球，与一个带电为ρ的大球叠加的结果。分别计算两个带电球的电场，再将电场叠加。

$$\vec{E}_1 = \frac{\rho\vec{r}_1}{3\varepsilon_0} \qquad \vec{E}_2 = \frac{-\rho\vec{r}_2}{3\varepsilon_0}$$

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{\rho\vec{r}_1}{3\varepsilon_0} - \frac{\rho\vec{r}_2}{3\varepsilon_0} = \frac{\rho\vec{a}}{3\varepsilon_0}$$

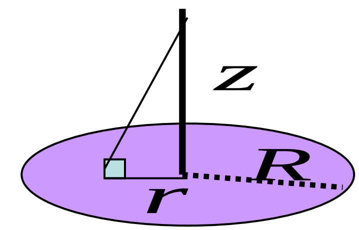
叠加原理习题2

- 2. 无限大带电平面，面电荷密度为 σ其上挖去一半径为 R 的圆洞，求圆洞轴线上离洞心为 h 处的电场强度。



解：将系统看作是一个无限大均匀带电平面（电荷面密度σ），与一个带电圆面（电荷面密度-σ）叠加而成。前者应用高斯定理，后者应用积分，分别计算电场，后叠加。

叠加原理习题2



- 根据对称性，圆面的电场沿z轴，只要求z轴方向的电场即可。对-σ的圆面

$$E=E_z=\int dE_z=\int\cos\theta\cdot dE=\int\frac{-\sigma\cdot rd\varphi dr}{4\pi\varepsilon_0(z^2+r^2)}\frac{z}{(z^2+r^2)^{1/2}}$$

$$=\frac{-\sigma z}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi}d\phi\int_0^R\frac{rdr}{(z^2+r^2)^{3/2}}=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\frac{z}{(z^2+R^2)^{1/2}}-1\right)$$

- 又据高斯定理可以求无限大带电平面的电场沿z轴方向：$\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$
- 叠加可得：

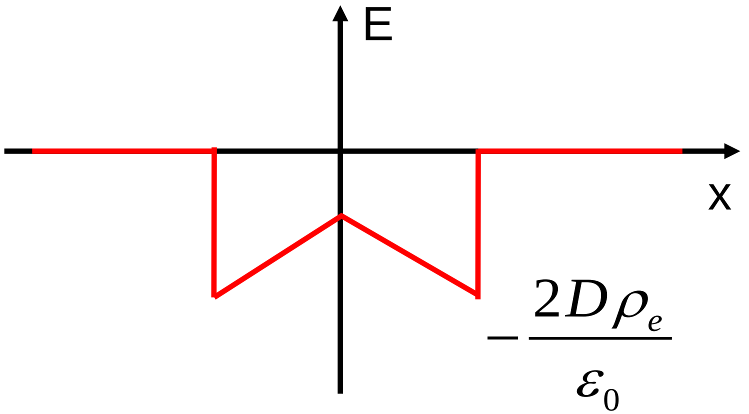
$$\vec{E}=\hat{k}\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\frac{h}{(h^2+R^2)^{1/2}}$$ 在平面的另一侧 $$\vec{E}=-\hat{k}\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\frac{h}{(h^2+R^2)^{1/2}}$$

(注意h>0) (注意z轴负半轴的结果, Z=0的结果)

求电荷分布例题

- 已知全空间的电场分布如下，求空间电荷分布，其中ρ_e ，D均为常量，且D>0

$$E_x(x)=\begin{cases}-\dfrac{\rho_e}{\varepsilon_0}(D-x) & (0>x>-D)\\ -\dfrac{\rho_e}{\varepsilon_0}(D+x) & (D>x>0)\end{cases}$$



其他处电场为零

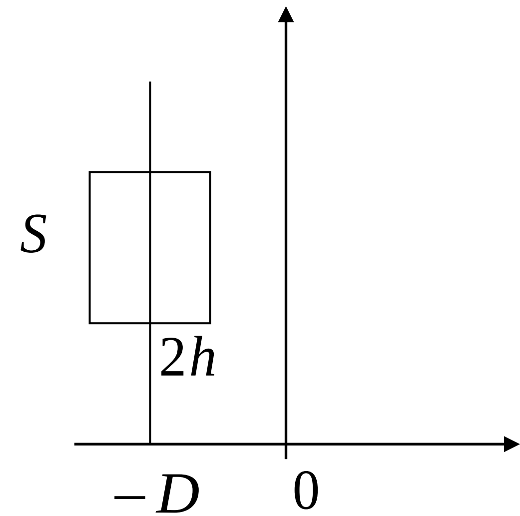
求电荷分布例题

- 在区域-D<x<0，计算电场的散度，利用散度定理可求该区域的电荷分布。

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_e}{\varepsilon_0} \Rightarrow \rho = \rho_e$$

可以得到 $$\rho = \begin{cases} \rho_e & (0 > x > -D) \\ -\rho_e & (D > x > 0) \end{cases}$$

求电荷分布例题



- 设X=-D平面上有面电荷分布 σ_{-D}，

如图取圆柱高斯面，底面积S

高度2h，被x=-D平面垂直平分

高斯用高斯定理得：$q_{内} = -\rho_e S(2D-h)$

- 令h->0,则得：X=-D面上有电荷密度 $-2D\rho_e$
- 同理可求x=D平面上的电荷，有：

$$\sigma(x) = \begin{cases} -2D\rho_e & (x=-D) \\ 2D\rho_e & (x=D) \end{cases}$$

•注意要求出体电荷后演算一下电场分布，一确定是否还有点、线、面电荷！

矢量场的分类和分解

- 无旋场(有势场)
  – 处处旋度为零的矢量场称无旋场
  – 无旋场的充要条件是该场是另一标量场的梯度场。
- 无散场(无源场)
  – 处处散度为零的矢量场称无散场
  – 无散场的充要条件是该场是另一矢量场的旋度场。（比如磁场，后面会讲到）
- 调和场(谐和场)
  – 无散且无旋的矢量场。比如匀强场
- 矢量场的分解（亥姆霍兹分解定理）：
  – 任意矢量场可以分解为无旋场、无散场和调和场的叠加。

参见 赵凯华新概念物理《电磁学》，附录

#哈密顿算子∇ (1)

- 哈米顿算子是一个矢量微分运算符号

$$\nabla=\hat{i}\frac{\partial}{\partial x}+\hat{j}\frac{\partial}{\partial y}+\hat{k}\frac{\partial}{\partial z}=\hat{e}_\rho\frac{\partial}{\partial\rho}+\hat{e}_\varphi\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi}+\hat{e}_z\frac{\partial}{\partial z}=\hat{e}_r\frac{\partial}{\partial r}+\hat{e}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}+\hat{e}_\varphi\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}$$

梯度

$$\begin{aligned}\mathrm{grad}u&=\nabla u\\&=\hat{i}\frac{\partial u}{\partial x}+\hat{j}\frac{\partial u}{\partial y}+\hat{k}\frac{\partial u}{\partial z}\\&=\hat{e}_\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}+\hat{e}_\varphi\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\varphi}+\hat{e}_z\frac{\partial u}{\partial z}\\&=\hat{e}_r\frac{\partial u}{\partial r}+\hat{e}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}+\hat{e}_\varphi\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial\varphi}\end{aligned}$$

散度

$$\begin{aligned}div\vec{A}&=\nabla\bullet\vec{A}\\&=\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}\\&=\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho A_\rho)}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{\partial A_z}{\partial z}\\&=\frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2A_r)}{\partial r}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta A_\theta)}{\partial\theta}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(A_\varphi)}{\partial\varphi}\end{aligned}$$

旋度

$$\begin{aligned}rot\vec{A}&=\nabla\times\vec{A}\\&=\hat{i}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)+\hat{j}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)+\hat{k}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\\&=\hat{e}_\rho\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial\varphi}-\frac{\partial A_\varphi}{\partial z}\right)+\hat{e}_\varphi\left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial\rho}\right)+\hat{e}_z\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho A_\varphi)}{\partial\rho}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\rho}{\partial\varphi}\right)\\&=\hat{e}_r\left[\frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial(\sin\theta A_\varphi)}{\partial\theta}-\frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}\right)\right]+\hat{e}_\theta\left[\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi}-\frac{1}{r}\frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial r}\right]+\hat{e}_\varphi\left[\frac{1}{r}\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r}-\frac{1}{r}\frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right]\end{aligned}$$

*#哈密顿算子∇ (2)

$$\nabla(au+\beta\upsilon)=a\nabla u+\beta\nabla\upsilon$$
$$\nabla\cdot(a\vec{\boldsymbol{A}}+\beta\vec{\boldsymbol{B}})=a\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{A}}+\beta\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{B}}$$
$$\nabla\times(a\vec{\boldsymbol{A}}+\beta\vec{\boldsymbol{B}})=a\nabla\times\vec{\boldsymbol{A}}+\beta\nabla\times\vec{\boldsymbol{B}}$$
（α β 是标量常数）

$$\nabla(uv)=u\nabla v+v\nabla u$$
$$\nabla\bullet(u\vec{\boldsymbol{A}})=u\nabla\bullet\vec{\boldsymbol{A}}+\nabla u\bullet\vec{A}$$
$$\nabla\times(u\vec{\boldsymbol{A}})=u\nabla\times\vec{\boldsymbol{A}}+\nabla u\times\vec{\boldsymbol{A}}$$

$$\nabla(\vec{\boldsymbol{A}}\cdot\vec{\boldsymbol{B}})=\vec{\boldsymbol{A}}\times(\nabla\times\vec{\boldsymbol{B}})+\vec{\boldsymbol{B}}\times(\nabla\times\vec{\boldsymbol{A}})+(\vec{\boldsymbol{A}}\cdot\nabla)\vec{\boldsymbol{B}}+(\vec{\boldsymbol{B}}\cdot\vec{\boldsymbol{A}})\vec{\boldsymbol{A}}$$
$$\nabla\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=(\nabla\times\boldsymbol{A})\cdot\boldsymbol{B}-(\nabla\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{A}$$
$$\nabla\times(\vec{\boldsymbol{A}}\times\vec{\boldsymbol{B}})=(\vec{\boldsymbol{B}}\cdot\nabla)\vec{\boldsymbol{A}}-(\vec{\boldsymbol{A}}\cdot\nabla)\vec{\boldsymbol{B}}+\vec{\boldsymbol{A}}(\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{B}})-\vec{\boldsymbol{B}}(\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{A}})$$

$$\nabla\cdot(\nabla u)=\nabla^2 u \quad \nabla\times(\nabla u)=0 \quad \nabla\cdot(\nabla\times\vec{A})=0 \quad \nabla\times(\nabla\times\vec{\boldsymbol{A}})=\nabla(\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{A}})-\nabla^2\vec{\boldsymbol{A}}$$

补充：拉普拉斯算子：$\Delta=\nabla^2=\nabla\cdot\nabla$

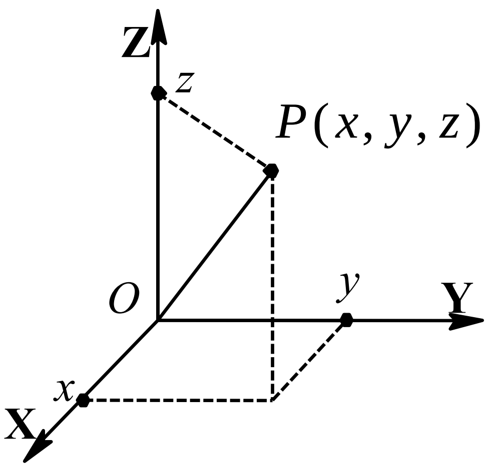
$$\nabla^2 u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho})+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$
$$=\frac{1}{r^2}[\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial u}{\partial r})]+\frac{1}{r\sin\theta}[\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta})]+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}$$

补充：$\vec{A}\bullet\nabla$

$$=A_x\frac{\partial}{\partial x}+A_y\frac{\partial}{\partial y}+A_z\frac{\partial}{\partial z}$$

#三维坐标系-坐标

- 常用的坐标系有：直角坐标系，柱坐标系，球坐标系，如图所示空间任意一点P在三种坐标系下的坐标。

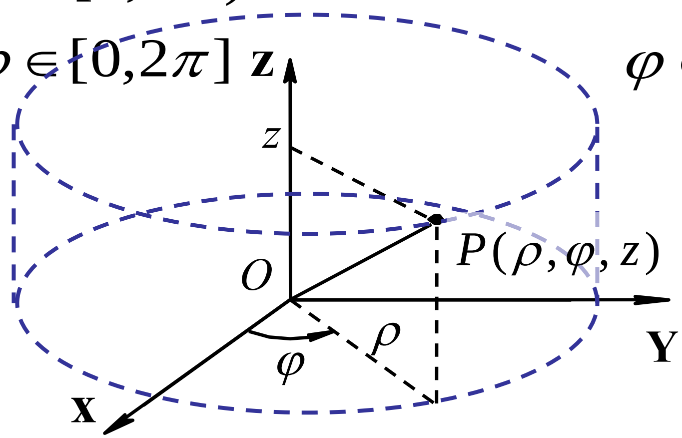


直角坐标系

$z \in (-\infty,+\infty)$

$\rho \in [0,+\infty)$

$\varphi \in [0,2\pi]$

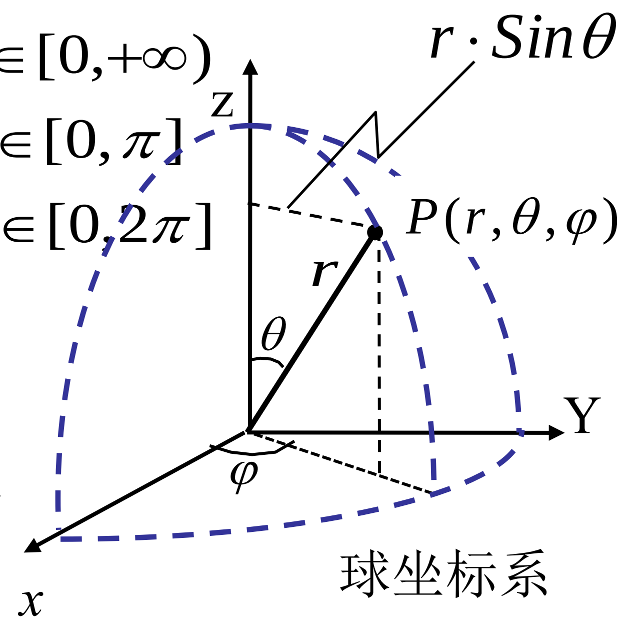


柱坐标系

$r \in [0,+\infty)$

$\theta \in [0,\pi]$

$\varphi \in [0,2\pi]$



球坐标系

不同坐标下坐标的变换：

$$\begin{cases} x = \rho \cdot Cos\varphi \\ y = \rho \cdot Sin\varphi \\ z = z \end{cases}$$

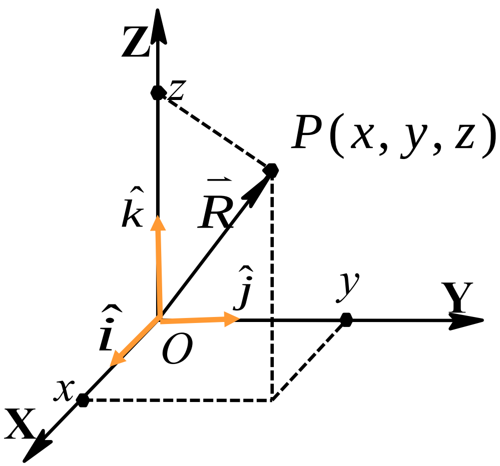
直角坐标系和柱坐标系

$$\begin{cases} x = r \cdot Sin\theta \cdot Cos\varphi \\ y = r \cdot Sin\theta \cdot Sin\varphi \\ z = r \cdot Cos\theta \end{cases}$$

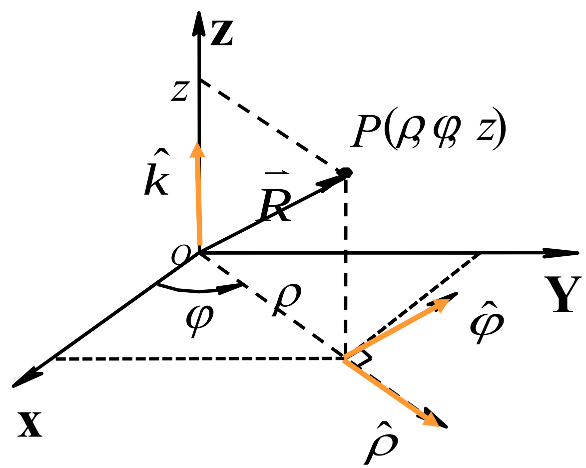
直角坐标系和球坐标系

#三维坐标系-单位矢量

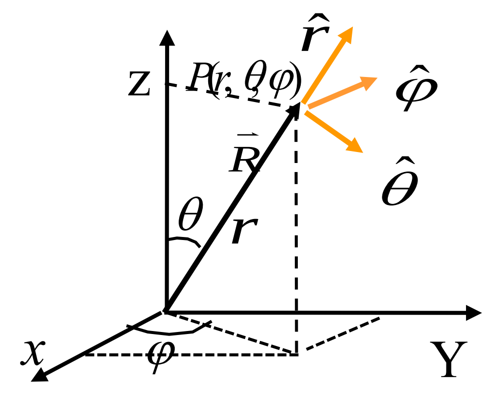
- 常用的坐标系有：直角坐标系，柱坐标系，球坐标系，如图所示。
  - 注意，在柱坐标系中的 $\hat{\rho}\,\hat{\varphi}$ 以及球坐标系中的 $\hat{r}\,\hat{\varphi}\ \hat{\theta}$ 都不是常矢量，是随P点的位置而变化的。



直角坐标系



柱坐标系



球坐标系

#三维坐标系-单位矢量变换

- 矢量的坐标表示: $\vec{R} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$
- *矢量的坐标变换:

直角坐标系和柱坐标系

$$\hat{\rho} = Cos\varphi\hat{i} + Sin\varphi\hat{j}$$
$$\hat{\varphi} = -Sin\varphi\hat{i} + Cos\varphi\hat{j}$$
$$\hat{k} = \hat{k}$$

$$\hat{i} = Cos\varphi\hat{\rho} - Sin\varphi\hat{\varphi}$$
$$\hat{j} = Sin\varphi\hat{\rho} + Cos\varphi\hat{\varphi}$$
$$\hat{k} = \hat{k}$$

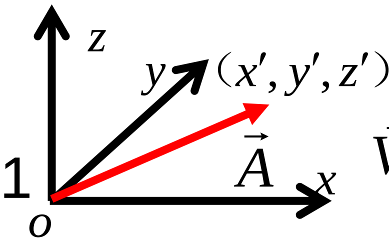
直角坐标系和球坐标系

$$\hat{r} = Sin\theta Cos\varphi\hat{i} + Sin\theta Sin\varphi\hat{j} + Cos\theta\hat{k}$$
$$\hat{\theta} = Cos\theta Cos\varphi\hat{i} + Cos\theta Sin\varphi\hat{j} - Sin\theta\hat{k}$$
$$\hat{\varphi} = -Sin\varphi\hat{i} + Cos\varphi\hat{j}$$

$$\hat{i} = Sin\theta Cos\varphi\hat{r} + Cos\theta Cos\varphi\hat{\theta} - Sin\varphi\hat{\varphi}$$
$$\hat{j} = Sin\theta Sin\varphi\hat{r} + Cos\theta Sin\varphi\hat{\theta} + Cos\varphi\hat{\varphi}$$
$$\hat{k} = Cos\theta\hat{r} - Sin\theta\hat{\theta}$$

#矢量的坐标表示

- 《数学手册》高等教育出版社，P.441



$$\vec{V} = v_\xi \hat{e}_\xi + v_\eta \hat{e}_\eta + v_\varsigma \hat{e}_\varsigma$$

	直角坐标系	柱坐标系	球坐标系
矢端坐标	x', y', z'	$x' = \rho' \cdot Cos\varphi'$ $y' = \rho' \cdot Sin\varphi'$ $z' = z'$	$x' = r' \cdot Sin\theta' Cos\varphi'$ $y' = r' \cdot Sin\theta' Sin\varphi'$ $z' = r' \cdot Cos\theta'$
单位矢量	$\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$	$\hat{e}_\rho = Cos\varphi \hat{i} + Sin\varphi \hat{j}$ $\hat{e}_\varphi = -Sin\varphi \hat{i} + Cos\varphi \hat{j}$ $\hat{e}_z = \hat{k}$	$\hat{e}_r = Sin\theta Cos\varphi \hat{i} + Sin\theta Sin\varphi \hat{j} + Cos\theta \hat{k}$ $\hat{e}_\theta = Cos\theta Cos\varphi \hat{i} + Cos\theta Sin\varphi \hat{j} - Sin\theta \hat{k}$ $\hat{e}_\varphi = -Sin\varphi \hat{i} + Cos\varphi \hat{j}$
矢量表示	$v_x \hat{i} + v_y \hat{j} + v_z \hat{k}$	$v_\rho = v_x Cos\varphi + v_y Sin\varphi$ $v_\varphi = -v_x Sin\varphi + v_y Cos\varphi$ $v_z = v_z$	$v_r = v_x Sin\theta Cos\varphi + v_y Sin\theta Sin\varphi + v_z Cos\theta$ $v_\theta = v_x Cos\theta Cos\varphi + v_y Cos\theta Sin\varphi - v_z Sin\theta$ $v_\varphi = -v_x Sin\varphi + v_y Cos\varphi$
例子	$2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}$	$\vec{V} = (2Cos\varphi + 3Sin\varphi)\hat{e}_\rho$ $+ (-2Sin\varphi + 3Cos\varphi)\hat{e}_\varphi + 4\hat{e}_z$	$\vec{V} = (2Sin\theta Cos\varphi + 3Sin\theta Sin\varphi + 4Cos\theta)\hat{e}_r$ $+ (2Cos\theta Cos\varphi + 3Cos\theta Sin\varphi - 4Sin\theta)\hat{e}_\theta$ $+ (-2Sin\varphi + 3Cos\varphi)\hat{e}_\varphi$

三种坐标系中的弧微分矢量

- 直角坐标系 $d\vec{l} = \hat{i}dx + \hat{j}dy + \hat{k}dz$

- 柱坐标系 $d\vec{l} = \hat{r}dr + \hat{\varphi}rd\varphi + \hat{k}dz$

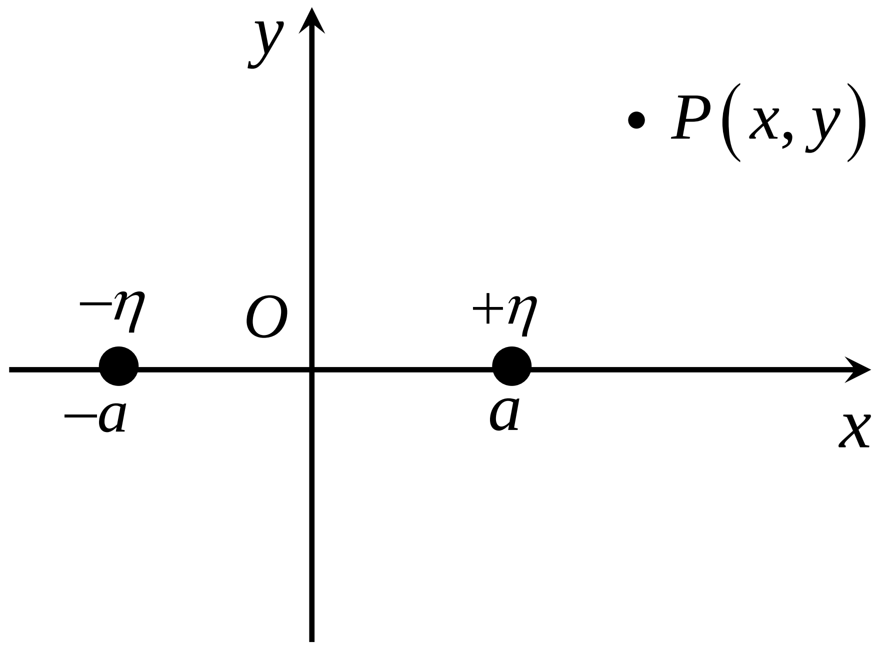
- 球坐标系 $d\vec{l} = \hat{r}dr + \hat{\theta}rd\theta + \hat{\varphi}rSin\theta d\varphi$

《应用电磁学基础》pp. 100

求电势

教材1习题1.25

- 两条无限长均匀带电直线与纸面垂直，如图，求空间任一点P的电势



无限长直带电线，电荷线密度是λ，求电势分布：

设到直线距离记为*ρ*,以距离带电线ρ_0处为零电势

$$\vec{E}=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\rho}\hat{\rho} \qquad U=\int_{\rho}^{\rho_0}Ed\rho=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{\rho_0}{\rho}$$

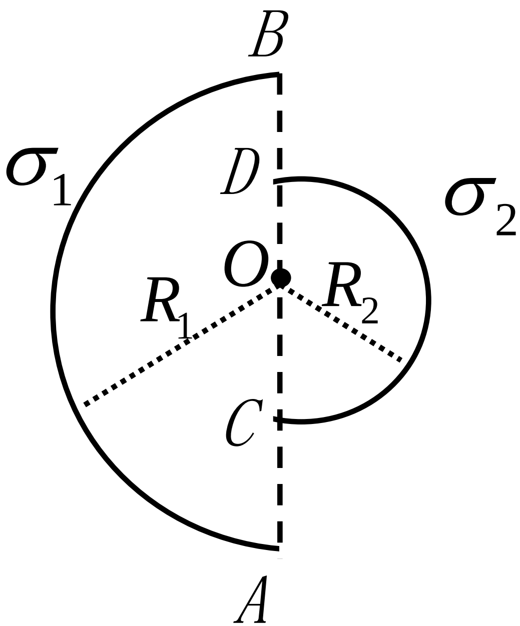
以O为零电势点

$$U=U_{+}+U_{-}=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left(\ln\frac{a}{r_{+}}-\ln\frac{a}{r_{-}}\right)$$

$$=\frac{\eta}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_{-}}{r_{+}}=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\ln\frac{(x+a)^2+y^2}{(x-a)^2+y^2}$$

求电势-技巧题

习题1.23



两个同心半球面相对放置，半径分别为R_1与R_2，都均匀带电，面密度分别为σ_1与σ_2，求大的半球面底面直径AOB上的电势分布

$$U=\frac{\sigma_1 R_1+\sigma_2 R_2}{2\varepsilon_0}$$ （COD上）

$$U=\frac{1}{2\varepsilon_0}\left(\sigma_1 R_1+\frac{\sigma_2 {R_2}^2}{r}\right)$$ （AC和BD处）

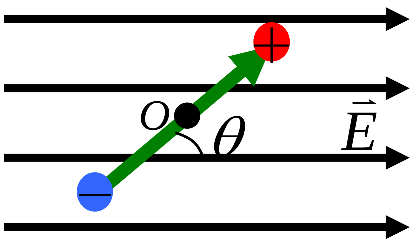
电势叠加原理：半球面切面电势是球面电势的一半

电偶极子

- 对照教材1 例题10，例题11，习题1.5
- 对照教材1 习题1.6，1.7

电偶极子在外场中受的力矩（1）

- 计算电偶极子在均匀电场中受的力矩。

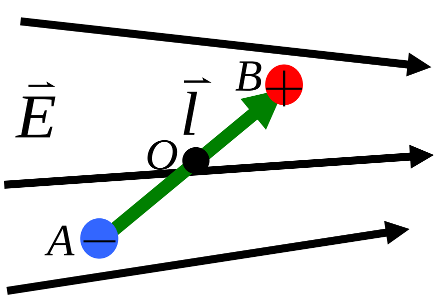


如图所示，电偶极子两个电荷对其中心O点的力偶矩为：

$$L = F_+ \frac{l}{2} Sin\theta + F_- \frac{l}{2} Sin\theta = qlESin\theta$$

写成矢量形式：$\vec{L} = \vec{p} \times \vec{E}$

* • 在非均匀电场中受的力矩：为计算简单，这里只求对O点的力矩



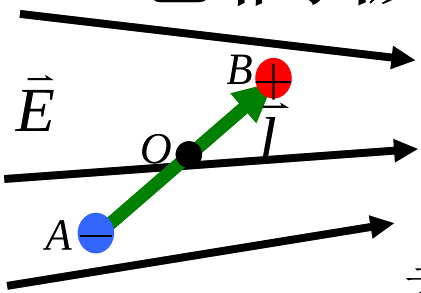
$$\vec{L} = \overrightarrow{OB} \times q\vec{E}_+ + \overrightarrow{OA} \times (-q)\vec{E}_-$$

$$\vec{L} = \frac{\vec{l}}{2} \times q[\vec{E}_0 + (\vec{E}_+ - \vec{E}_0)] + (-\frac{\vec{l}}{2}) \times (-q)[\vec{E}_0 + (\vec{E}_- - \vec{E}_0)]$$

$$= q\vec{l} \times \vec{E}_0 + \frac{q}{2}\vec{l} \times [(\vec{E}_+ - \vec{E}_0) + (\vec{E}_- - \vec{E}_0)]$$

上面的E_0，E_+, E_-分别表示0点和正负电荷处的场强

* 电偶极子在外场中受的力矩（2）



注意到场强矢量的直角坐标表示式：

$$\boxed{\vec{E}=\hat{i}E_x(x,y,z)+\hat{j}E_y(x,y,z)+\hat{k}E_z(x,y,z)}$$

考虑l是小量，应用全微分的概念可以得到：

$$(\vec{E}_+-\vec{E}_O)_x=E_{+x}-E_{Ox}=E_{x+}-E_{xO}\approx\left.\left(\frac{\partial E_x}{\partial x}\frac{l_x}{2}+\frac{\partial E_x}{\partial y}\frac{l_y}{2}+\frac{\partial E_x}{\partial z}\frac{l_z}{2}\right)\right|_{E_{xO}}$$

$$(\vec{E}_--\vec{E}_O)_x=E_{-x}-E_{Ox}=E_{x-}-E_{xO}\approx\left.\left(\frac{\partial E_x}{\partial x}\frac{(-l_x)}{2}+\frac{\partial E_x}{\partial y}\frac{(-l_y)}{2}+\frac{\partial E_x}{\partial z}\frac{(-l_z)}{2}\right)\right|_{E_{xO}}$$

同理可得其y和z的分量，由此代入下式易得：

$$\vec{L}=q\vec{l}\times\vec{E}_0+\frac{q}{2}\vec{l}\times[(\vec{E}_+-\vec{E}_0)+(\vec{E}_--\vec{E}_0)]=q\vec{l}\times\vec{E}_0=\vec{p}\times\vec{E}$$

结论中的 $\vec{E}$ 称为电偶极子所在处的电场强度，但一般并不严格限于O点的场强，因为l很小。

*电偶极子在非均匀静电场中受到的力

- 在空间变化小距离*l*，E_x的变化量是$d\,E_x$
- 根据全微分定义 $dE_x = l_x \frac{\partial}{\partial x} E_x + l_y \frac{\partial}{\partial y} E_x + l_z \frac{\partial}{\partial z} E_x$
- 所以偶极子受力是：

$$\vec{F} = q(\vec{E}_+ - \vec{E}_-) = q[(E_{+x} - E_{-x})\vec{i} + (E_{+y} - E_{-y})\vec{j} + (E_{+z} - E_{-z})\vec{k}]$$

$$= q(l_x \frac{\partial}{\partial x} + l_y \frac{\partial}{\partial y} + l_z \frac{\partial}{\partial z})(E_x \vec{i} + E_y \vec{j} + E_z \vec{k})$$

$$= \vec{p} \bullet \nabla \vec{E}$$

$$\vec{p} \bullet \nabla \vec{E} = (p_x \frac{\partial}{\partial x} + p_y \frac{\partial}{\partial y} + p_z \frac{\partial}{\partial z})\vec{E}$$

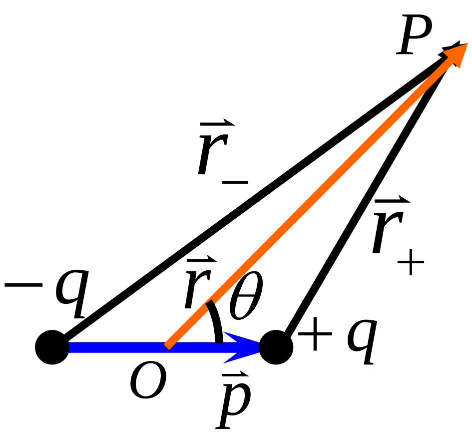
$$= q(l_x \frac{\partial}{\partial x} E_x + l_y \frac{\partial}{\partial y} E_x + l_z \frac{\partial}{\partial z} E_x)\vec{i}$$

$$+ q(l_x \frac{\partial}{\partial x} E_y + l_y \frac{\partial}{\partial y} E_y + l_z \frac{\partial}{\partial z} E_y)\vec{j}$$

$$+ q(l_x \frac{\partial}{\partial x} E_z + l_y \frac{\partial}{\partial y} E_z + l_z \frac{\partial}{\partial z} E_z)\vec{z}$$

电偶极子的电势

- 设电偶极子间距为*l*，求空间任一点电势



$$U = U_+ + U_- = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-}\right)$$

余弦定理

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\left(r^2 + \frac{l^2}{4} - rl\cdot Cos\,\theta\right)^{-\frac{1}{2}} - \left(r^2 + \frac{l^2}{4} + rl\cdot Cos\,\theta\right)^{-\frac{1}{2}}\right]$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\left[\left(1 + \frac{l^2}{4r^2} - \frac{l}{r}\cdot Cos\,\theta\right)^{-\frac{1}{2}} - \left(1 + \frac{l^2}{4r^2} + \frac{l}{r}\cdot Cos\,\theta\right)^{-\frac{1}{2}}\right]$$

利用多项式展开

$$\approx \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\left[\left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{l^2}{4r^2} - \frac{l\cdot Cos\,\theta}{r}\right)\right) - \left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{l^2}{4r^2} + \frac{l\cdot Cos\,\theta}{r}\right)\right)\right]$$

$$= \frac{ql\cdot Cos\,\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{p\cdot Cos\,\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

写成矢量表示形式 $$\frac{\vec{p}\cdot\hat{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

*电偶极子的场强分布

- 求空间任意一点场强(取球坐标系如图所示)

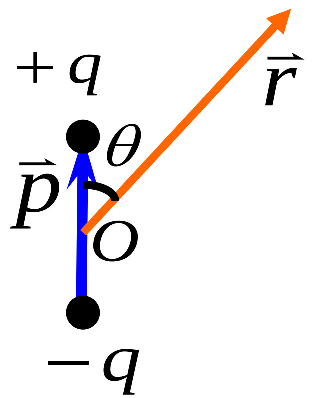
已得：$U=\dfrac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$ 则

$$\vec{E}=-\nabla U$$

$$=-\left(\hat{e}_r\frac{\partial U}{\partial r}+\hat{e}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial\theta}+\hat{e}_\varphi\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial U}{\partial\varphi}\right)$$

$$=-\left[\hat{e}_r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\right)+\hat{e}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2p\cos\theta}{r^3}\hat{e}_r+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p\sin\theta}{r^3}\hat{e}_\theta$$



矢量表示：$\vec{E}=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left(\dfrac{3(\vec{p}\cdot\vec{r})\vec{r}}{r^2}-\vec{p}\right)$