AI 中的数学 第八次作业

2300012929 尹锦润

概率-教材 4.2

考虑 $D=\bigcup\limits_{m=1}^{\infty}\bigcap\limits_{n=m}^{\infty}\{X_n=0\}$，$\forall\omega\notin D$，有 $\forall N>0,\exists n>N\ s.t.\ X_n\neq 0$，因此 $\forall N>0,P(\omega\notin D)\leqslant\frac{1}{N^2}$，于是 $P(\omega\notin D)=0$。

而 $\forall\omega\in D$，有 $\lim_{n\to\infty}E(X_n)=0$，进而 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(X_1+\cdots+X_n)-1=-1$，不服从大数律。

概率-教材 4.3

对于 $\eta=0$，有 $F_\eta(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ 1 & x\geqslant 0\end{cases}$，其中 $x\neq 0$ 为连续点。

$\xi_n\xrightarrow{\omega}0(n\to\infty)\Rightarrow\forall x\neq 0,\lim_{n\to\infty}P(\{\omega:\xi_n(\omega)\leqslant x\})=P(\{\omega:0\leqslant x\})=\begin{cases}0 & x<0\\ 1 & x>0\end{cases}$

$\Rightarrow\forall\varepsilon>0,\lim_{n\to\infty}P(\{\omega:|\xi_n(\omega)|\geqslant\varepsilon\})=P(\omega:\xi_n(\omega)\leqslant-\varepsilon)+P(\omega:\xi_n(\omega)\geqslant\varepsilon)=0\Rightarrow$
$\xi_n\xrightarrow{P}0(n\to\infty)$

概率-教材 4.6

$P(\xi_n=x_0)=\left(\frac{x_0}{a}\right)^n$，$\forall\varepsilon>0,\lim_{n\to\infty}P(\{\omega:|\xi_n-a|\geqslant\varepsilon\})=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a-\varepsilon}{a}\right)^n=0$，因此 $\xi_n\xrightarrow{P}a$。

概率-教材 4.12

（1）$E(X_1)=0,var(X_1)=1/12$，因此 $\frac{S_n-E(S_n)}{\sqrt{var(S_n)}}=\frac{S_n}{\sqrt{1500/12}}\sim N(0,1)$，$P(|S_n|\geqslant 15)=P(|\frac{S_n}{\sqrt{1500/12}}|\geqslant\frac{15}{\sqrt{1500/12}})=2(1-\Phi(\frac{15}{\sqrt{1500/12}}))\doteq 0.18$。

（2）$\frac{S_n}{\sqrt{n/12}}\sim N(0,1)$，$P(|S_n|\leqslant 10)=P(|\frac{S_n}{\sqrt{n/12}}|\leqslant\frac{10}{\sqrt{n/12}})\geqslant 0.90\Rightarrow n\geqslant 441$。

概率-教材 4.15

$E(X_i)=p,var(X_i)=p(1-p)$，$\frac{S_n-np}{\sqrt{np(1-p)}}\sim N(0,1)$，

$P(p-0.045 \leqslant p \leqslant p+0.045)=P(-0.045n \leqslant S_n-np \leqslant 0.045n)=P(|\frac{S_n-np}{\sqrt{np(1-p)}}| \leqslant \frac{0.045n}{\sqrt{np(1-p)}}) \geqslant 0.95 \Rightarrow 0.045\sqrt{n} \geqslant 1.96\sqrt{p(1-p)}$

而 $\sqrt{p(1-p)} \leqslant 0.5$，因此 $n \geqslant 474.23 \Rightarrow n \geqslant 475$。

统计-教材 7.1

（1）

$$L(p)=\prod_i p(1-p)^{X_i-1}=p^n(1-p)^{\sum X_i-n}$$

（2）

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dp}}L(p)=p^{n-1}(1-p)^{\sum X_i-n-1}[n(1-p)-(\sum X_i-n)p]$$

因此，

$$\hat{p}=\frac{1}{\overline{\overline{X}}}$$

（3）矩估计为

$$\frac{1}{\overline{\overline{X}}}$$

教材 7.3

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^n \exp\{-(X_i-\theta)\}=\exp\{-\sum X_i+n\theta\}$$

因为 $X_i \geqslant \theta$，于是 $L(\theta)$ 递减，有 ML 估计 $\hat{\theta}=T_1=\min\{X_1,\cdots,X_n\}$。

教材 7.4

（1）$var(X_1)=p(1-p)$。

（2）

$$L(p) = p^{\sum X}(1-p)^{n-\sum X}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dp}}L(p) = p^{\sum X - 1}(1-p)^{n-\sum X-1}(\sum X(1-p) - (n - \sum X)p)$$

因此

$$\hat{p} = \overline{X}$$

$$T(X_1, \cdots, X_n) = \overline{X}(1-\overline{X})$$

（3）

$$E(\overline{X} - \overline{X}^2) = p - \frac{(n-1)}{n}p^2 = \frac{n-1}{n}p(1-p)$$

教材 7.5

（1）

$$\hat{p} = \frac{s}{n}$$
$$E(\hat{p}) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} = p$$
$$var(\hat{p}) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}(\frac{k}{n}-p)^2 = \frac{1}{n}p(1-p)$$

（2）

$$va\hat{r}(\hat{p}) = \frac{s(n-s)}{n^3}$$

其中 s 是不合格产品数。

教材 7.6

（1）

$$E(X) = \int_{\theta}^{+\infty} xe^{-x+\theta}\mathrm{d}x = \int_{0}^{+\infty}(x+\theta)e^{-x}\mathrm{d}x = \theta + 1$$

因此

$$T_2 = \overline{X} - 1$$

（2）

$$T_1 = \min\{X_1, \cdots, X_n\}$$

而 $f_{T_1}(y) = n\exp\{-n(y-\theta)\}$，因此有 $T_1 - \theta \sim \mathrm{Exp}(n)$，进而有 $E(T_1-\theta) = \frac{1}{n}, var(T_1 - \theta) = \frac{1}{n^2}$，

对于 $E[(T_1-\theta)^2] = var(T_1-\theta) + E(T_1-\theta)^2 = \frac{2}{n^2}$。

$$T_2 = \overline{X} - 1$$

因为 $E(X) = \theta + 1, var(X) = 1$，于是 $E(T_2) = \theta, var(T_2 - \theta) = var(T_2) = \frac{1}{n}\overline{X} = \frac{1}{n}$，因此 $E((T_2-\theta)^2) = var(T_2-\theta) + E(T_2-\theta)^2 = \frac{1}{n}$。