图论

第三讲：树与最小生成树

方聪

2024 年秋季

1. 无向树的定义与性质
2. 生成树
3. 根树

无向树

- 无向树：连通无回路（指初级和简单回路）的无向图称为无向树
- 树：常用 T 表示树
- 森林：无向图至少有两个连通分支且每个连通分支都是树
- 平凡树：平凡图 (无树叶，无分支点)
- 树叶：树中 1 度的顶点，$d(v) = 1$
- 分支点：树中 2 度以上顶点，$d(v) \geq 2$

树的等价定义

定理 (树的等价定义)

设 $G = \langle V, E \rangle$ 是 n 阶 m 边无向图，则以下命题等价

1. G 是树 *(连通无回路)*
2. G 中任何 *2* 顶点之间有唯一路径
3. G 无圈 $\wedge$ $m = n - 1$
4. G 连通 $\wedge$ $m = n - 1$
5. G 极小连通*:* 连通 $\wedge$ 所有边是桥
6. G 极大无回*:* 无圈 $\wedge$ 增加任何新边得唯一圈

树的等价定义

证明.

$1 \Rightarrow 2$：根据 G 的连通性，任取 $u, v \in V$，u, v 之间存在通路，设 P_1 为 u, v 之间通路，根据 G 中无回路可知 P_1 一定为路径。设 P_1 不唯一，P_2 为 u, v 之间另一路径，则存在边 $e_1^{'} = (v_x, v_1^{'})$ 只在 P_1 上或只在 P_2 上，设 $e_1^{'}$ 只在 P_2 上，若还有与 $e_1^{'}$ 相邻的边 $e_2^{'}$ 只在 P_2 上，得通路 $e_1^{'}e_2^{'}$ 只在 P_2 上，以此类推得 $e_1^{'}e_2^{'}\cdots e_k^{'}$ 只在 P_2 上，$e_k^{'} = (v_k^{'}, v_y)$ 且 v_x, v_y 为 P_1 和 P_2 的公共顶点，因此可构造一条回路，矛盾 □

树的等价定义

证明.

$2 \Rightarrow 3$：先证明 G 中无圈，若 G 中存在顶点 v 上的环，则 v 到 v 存在两条路径，长度为 0 和 1，矛盾，若 G 中存在长度大于等于 2 的圈，则圈上任取 2 顶点均可构造两条路径，矛盾。
再证明 $m = n - 1$，$n = 1$ 时，由于 G 中无圈，$m = 0$，结论成立；设 $n \leq k$ 时结论成立，当 $n = k + 1$ 时，设 $e = (u, v)$ 为 G 中一条边，则 $G - e$ 一定有两个连通分支，否则若 $G - e$ 连通，u, v 之间有圈。设连通分支为 G_1, G_2，其顶点数和边数记为 n_1, n_2 和 m_1, m_2，根据归纳假设有 $m_i = n_i - 1$，则 $m = m_1 + m_2 + 1 = n - 1$ □

树的等价定义

证明.

$3 \Rightarrow 4$：只需证明 G 连通。若 G 不连通，则设 G 有 s 个连通分支 $G_1, \cdots, G_s$，G_i 均为连通无回路的图，即树。根据 3，$m_i = n_i - 1$，因此 $m = \sum_{i=1}^{s} m_i = n - s$，由于 $s \geq 2$，因此与 $m = n - 1$ 矛盾

$4 \Rightarrow 5$：任取 $e \in E$，有 $|E(G-e)| = n - 1 - 1 = n - 2$，根据定理 7.9（任何无向连通图的边数大于等于顶点数-1）可知，$G - e$ 不连通，因此 e 为桥 $\square$

树的等价定义

证明.

$5 \Rightarrow 6$：由于 G 中每条边均为桥，G 中一定没有圈，又 G 连通，则 G 为树。因此任取 $u, v \in V$，u, v 之间存在唯一路径 P，则 $P \cup (u, v)$ 为 $G \cup (u.v)$ 中唯一的圈

$6 \Rightarrow 1$: 只需证明 G 连通，由于任取 $u, v \in V$，$G \cup (u, v)$ 中存在唯一的圈 C，则 $C - (u, v)$ 为 G 中 u, v 之间的通路，根据 u, v 的任意性，G 连通 □

树的性质

:

定理 (树的性质)

n 阶非平凡树至少有 2 个树叶

证明.

设 T 有 x 个树叶，由树的等价定义和握手定理，有

$$\begin{aligned} 2m = 2(n-1) = 2n-2 &= \sum d(v) \\ &= \sum_{v\text{是树叶}} d(v) + \sum_{v\text{是分支点}} d(v) \\ &\geq x + 2(n-x) = 2n-x, \end{aligned} \tag{1}$$

所以 $x \geq 2$ □

无向树的计数

设 $t_n : n \geq 1$ 为 n 阶非同构无向树的个数

n	tn	n	tn	n	tn	n	tn
1	1	9	47	17	48629	25	104636890
2	1	10	106	18	123867	26	279793450
3	1	11	235	19	317955	27	751065460
4	2	12	551	20	823065	28	2023443032
5	3	13	1301	21	2144505	29	5469566585
6	6	14	3159	22	5623756	30	14830871802
7	11	15	7741	23	14828074	31	40330829030
8	23	16	19320	24	39299897	32	109972410221

图 1: 无向树的计数

无向树的计数

六阶非同构无向树： $n = 6$， $t_6 = 6$

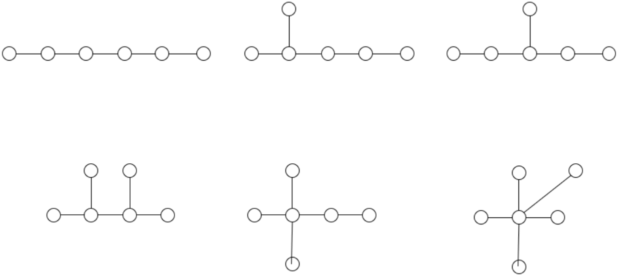

图 2: 六阶非同构无向树

无向树的计数

七阶非同构无向树：$n = 7$，$t_7 = 11$

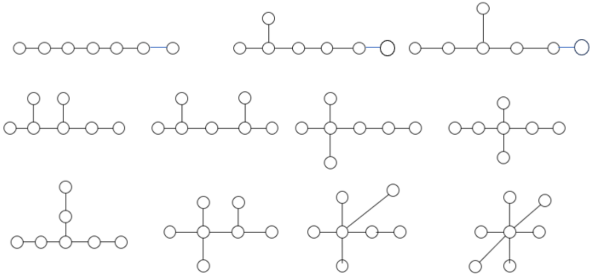

图 3: 七阶非同构无向树

无向树的定义与性质

例 1：如果树中没有度数为 2 的顶点，证明树叶的个数不少于分支节点的个数。

证明.

当 $n=1$ 时，树叶和分支节点的个数相等，都是 0；
当 $n\geq 2$ 时，设度数为 1，2，3，$\cdots$ 的顶点数分别为 $n_1,n_2,n_3,\cdots$，则有

$$n_1+n_2+n_3+\cdots=n$$

$$n_1+2n_2+3n_3+\cdots=2(n-1),$$

1 式乘 2 减 2 式可得 $n_1>n_3+2n_4+\cdots>n_2+n_3+n_4\cdots$ $(n_2=0)$ □

生成树的定义

- 生成树: $T \subseteq G \wedge V(T) = V(G) \wedge T$ 是树
- 树枝: $e \in E(T)$, 共有 $n-1$ 条
- 弦: $e \in E(G) - E(T)$, 共有 $m-n+1$ 条
- 余树: $G[E(G) - E(T)] = \overline{T}$

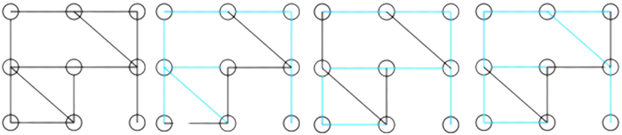

图 4: 生成树

存在生成树的充要条件

定理 (存在生成树的充要条件)

无向图 G 连通 $\Longleftrightarrow$ G 有生成树

证明.

(⇐) 显然，(⇒) 破圈法
若 G 无圈，则 G 为自己的生成树。若 G 中含圈，任取一个圈 C，任意删除 C 上任何一条边，所得图仍然是连通的，继续这一过程，直到最后得到的图无圈为止。设最后的图为 T，则 T 是连通的且是 G 的生成子图

□

存在生成树的充要条件

推论

- 推论 1: G 是 n 阶 m 边无向连通图 $\Rightarrow m \geq n-1$
- 推论 2: T 是 n 阶 m 边无向连通图 G 的生成树 $\Rightarrow$ $|E(\overline{T})| = m - n + 1$
- 推论 3: T 是连通图 G 中一棵生成树，$\overline{T}$ 是 T 的余树，C 为 G 中任意圈，则 $E(\overline{T}) \cap E(C) \neq \emptyset$

推论 3 的证明.

(反证法) 如果 $E(\overline{T}) \cap E(C) = \emptyset$，则 $E(C) = E(T)$，T 中有回路与 T 是树矛盾

$\square$

弦与圈

定理 (弦与圈)

T 是无向连通图 G 的生成树，e 为 T 的任意一条弦，则 $T \cup e$ 中含 G 的只含一条弦其余边均为树枝的圈，而且不同的弦对应的圈是不同的

证明.

设 $e = (u, v)$，则 u，v 之间在 T 中存在唯一的路径 $P(u, v)$。则 $P(u, v) \cup e$ 为 G 中只含弦 e 其余边均为树枝的圈。当 e_1, e_2 不同时，e_2 不在 e_1 对应的圈 C_{e_1} 中，e_1 不在 e_2 对应的圈 C_{e_2} 中 □

生成树的计数

- $\tau(G)$: 标定图 G 的生成树的个数
- 若 $E(T_1) \neq E(T_2)$，则认为 $T_1 \neq T_2$
- $G - e$: 删除
- $G \backslash e$: 收缩

生成树的计数

定理

n 阶无向连通标定图，对 G 的任意非环边 e，有
$\tau(G) = \tau(G-e) + \tau(G \backslash e)$

证明.

$\forall e$ 非环，则

- 不含 e 的 G 的生成树个数: $\tau(G-e)$,
- 含 e 的 G 的生成树个数: $\tau(G \backslash e)$

$\square$

注意：由于环不在任何生成树中，因而在计算过程中若出现环应自动将环去掉

Cayley 公式

定理 (Cayley 公式)

$\tau(K_n) = n^{n-2} (n \geq 2)$

证明.

令 $V(K_n) = \{1, 2, ..., n\}$，用 V 中元素构造长度为 $n-2$ 的序列，有 n^{n-2} 个不同序列，这些序列与 K_n 的生成树是一一对应的 $\square$

Cayley 公式

证明.

(1) 由树构造序列：设 T 是任意生成树. 不断提取树叶节点并将其从 T 中删除可得序列。即令

$$k_1 = \min\{r|d_T(r) = 1\}, N_T(k_1) = \{l_1\}, \tag{2}$$

其中 k_1 是叶子节点，(l_1, k_1) 是对应的悬挂边，以此类推

$$\begin{aligned} & k_2 = \min\{r|d_{T-\{k_1\}}(r) = 1\}, N_{T-\{k_1\}}(k_2) = \{l_2\}, \\ & \dots \\ & k_{n-2} = \min\{r|d_{T-\{k_1,k_2,\cdots k_{n-3}\}}(r) = 1\}, \\ & N_{T-\{k_1,k_2,\cdots k_{n-3}\}}(k_{n-2}) = \{l_{n-2}\}, \end{aligned} \tag{3}$$

得到序列 $(l_1, l_2, \cdots, l_{n-2})$ □

Cayley 公式

证明.

(2) 由序列构造树: 设 $(l_1, l_2, \cdots, l_{n-2})$ 是任意序列。令

$$k_1 = \min\{r | r = V - \{l_1, l_2, \cdots, l_{n-2}\}\}, \tag{4}$$

令 k_1 和 l_1 相邻，然后

$$k_2 = \min\{r | r = V - \{k_1, l_2, \cdots, l_{n-2}\}\}, \tag{5}$$

令 k_2 和 l_2 相邻，以此类推

$$k_{n-2} = \min\{r | r = V - \{k_1, k_2, \cdots, k_{n-3}, l_{n-2}\}\}, \tag{6}$$

令 k_{n-2} 和 l_{n-2} 相邻，最后令 $V - \{k_1, k_2, \cdots, k_{n-3}, k_{n-2}\}$ 中的两个元素相邻得到 K_n 的生成树 $\square$

Cayley 公式

证明.

由（1）可知，不同的生成树对应的序列不同，因此 $\tau(K_n) \le n^{n-2}$，由（2）可知，不同的序列对应的生成树不同，因此 $\tau(K_n) \ge n^{n-2}$ □

生成树

例 2：证明如果一个图 G 的生成树唯一，那么这个图就是树

证明.

反证。如果 G 不是树，分两种情况讨论：

- 如果 G 不连通，那么 G 没有生成树，矛盾；
- 如果 G 连通，则 G 有回路，考虑其唯一的生成树与任何一个回路，这个回路上的所有边不可能都在生成树上，把这个回路不在生成树上的边加入生成树，并且删除原来该回路在生成树上的一条边，就产生一个新的生成树，矛盾

□

生成树

例 3：设 K_n 是 n 阶标定无向完全图，e 为其中一条边，证明 $\tau(K_n - e) = (n-2)n^{n-3}$

证明.

根据完全图生成树计数，$\tau(K_n) = n^{n-2}$，下面计算删除一条边后的生成树个数

K_n 的每个生成树含有 $n-1$ 条边，则 n^{n-2} 个生成树一共含有 $(n-1)n^{n-2}$ 条边。考虑 K_n 中一共有 C_n^2 条边，每条边会出现在 $\frac{(n-1)n^{n-2}}{C_n^2} = 2n^{n-3}$ 个生成树中，因此

$\tau(K_n - e) = \tau(K_n) - 2n^{n-3} = (n-2)n^{n-3}$ □

1. 无向树的定义与性质
2. 生成树
3. 根树

根树的定义

- 有向树: 基图是树的有向图
- 根树: 若有向树 T 是平凡树或 T 中有一个顶点的入度为 0, 其余顶点的入度均为 1, 则 T 为根树
- 树根: 入度为 0 的顶点
- 树叶: 入度为 1 出度为 0 的顶点
- 内点: 入度为 1 出度不为 0 的顶点
- 分支点: 树根和内点
- 层数: 树根到 v 的路径长度
- 树高: 层数最大的顶点的层数

儿子，兄弟与父亲

- 儿子: u 在上方与 v 相邻，v 是 u 的儿子
- 父亲: u 在上方与 v 相邻，u 是 v 的父亲
- 兄弟: u 与 v 有相同父亲，u 是 v 的兄弟
- 祖先: 从 u 可达 v，u 是 v 的祖先
- 后代: 从 u 可达 v，u 是 v 的后代

有序树

有序树: 给相同层数的顶点标上次序的根树

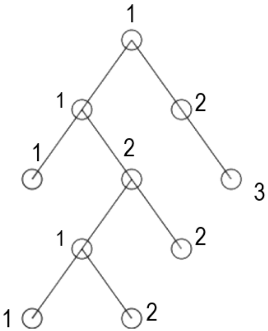

图 5: 有序树

r 叉树

- r 叉树: 每个分支点至多有 r 个儿子
- 正则 r 叉树: 每个分支点恰好有 r 个儿子
- 完全正则 r 叉树: 树叶的层数均为树高的 r 叉正则树
- 有序 r 叉树, 有序正则 r 叉树, 有序完全正则 r 叉树

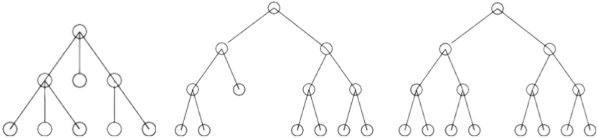

图 6: r 叉树

根子树

- 根子树：T 是根树，$v \in V(T)$，由 v 本身及其所有后代导出的子图 T_v
- 左子树, 右子树：二叉树中分支点的左右两个儿子导出的根子树

根树的周游

根树的周游: 列出根树的所有顶点，每个顶点恰好出现一次

- 中序行遍: 左子树，根，右子树
- 前序行遍: 根，左子树，右子树
- 后序行遍: 左子树，右子树，根

根数的周游举例

- 中序：dbigjehacf
- 前序：abdegijhcf
- 后序：dijghebfca

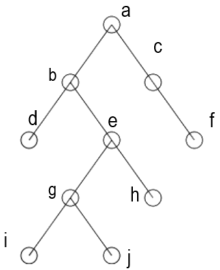

图 7: 根树的周游

中缀法，前缀法，后缀法

- 中缀: $((a*(b+c))*d-e)\div(f+g)\div(h*(i+j))$
- 前缀 (波兰): $\div\div-**a+bcde+fg*h+ij$
- 后缀 (逆波兰): $abc+*d*e-fg+\div hij+*\div$

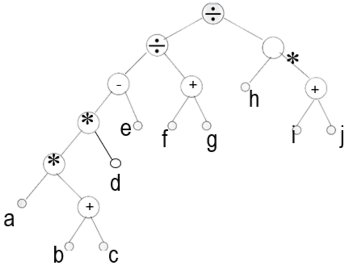

图 8: 表达式

根树

例 4：证明一个有向树 T 是根树，当且仅当 T 中有且仅有一个顶点的入度为 0

证明.

$\Rightarrow$ 显然

$\Leftarrow$ 若 T 为平凡树一定为真，下面证明非平凡树的情况，归纳
$n=2$ 时，T 两个顶点入度分别为 0，1，T 是根树；
设 $n=k$ 时结论为真，考虑 $n=k+1$ 时，设 T' 为 T 的基图，则 T' 为 $k+1$ 阶无向树，因此其至少有两片树叶（定理 9.2）。
则 T 中至少存在一个顶点 v_0 满足其入度为 1，出度为 0。设 $T_1=T-v_0$，则 T_1 为 k 阶树，且 T 中入度为 0 的顶点都在 T_1 中，根据条件与归纳假设，T_1 中有一个顶点的入度为 0，出度为 1，其为 k 阶根树。设 v_0 在 T 中的父亲为 v_1，则 $T=T_1\cup\langle v_1,v_0\rangle$，因此 T 中除一个顶点入度为 0 外其余顶点入度均为 1，其为根树