

AI 中的数学

第十四讲

方聪，概率统计部分参考章复熹和张原老师课件

2024 年秋季

① 第二章课程作业

① 第二章课程作业

1. 从一副扑克牌（共 52 张）中发出 5 张，求其中黑桃张数的概率分布。

解：设黑桃的张数为随机变量 X ，

$$P(X = k) = \frac{C_{13}^k C_{39}^{5-k}}{C_{52}^5}, \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

2. 设随机变量 X 服从泊松分布, $P(X=1) = P(X=2)$, 求 $P(X=4)$ 的值。

解: 设 $P(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$, 则

$$P(X=1) = \lambda e^{-\lambda} = P(X=2) = \frac{\lambda^2}{2} e^{-\lambda} \quad (\lambda > 0)$$

解得 $\lambda = 2$, 进而 $P(X=4) = \frac{2}{3} e^{-2}$.

3. 对圆的直径作近似测量，设其在区间 $[a, b]$ 上均匀分布，试求圆面积的概率分布及其均值、方差。

解：设直径 $d \sim U(a, b)$ ，面积 $X = \frac{\pi d^2}{4}$ 。概率

$$P(X \leq C) = P(d \leq \sqrt{\frac{4C}{\pi}}) = \frac{\sqrt{\frac{4C}{\pi}} - a}{b - a}, (\sqrt{\frac{4C}{\pi}} \leq b)。$$

因此面积的分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < \frac{\pi a^2}{4}, \\ \frac{\sqrt{\frac{4x}{\pi}} - a}{b - a}, & \frac{\pi a^2}{4} \leq x \leq \frac{\pi b^2}{4}, \\ 1, & x > \frac{\pi b^2}{4}. \end{cases}$$

期望为

$$E(X) = \int_a^b \frac{\pi}{4} x^2 \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \frac{\pi}{12} (b^3 - a^3) = \frac{\pi}{12} (a^2 + ab + b^2).$$

$$E(X^2) = \int_a^b \frac{\pi^2}{16} x^4 \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \frac{\pi^2}{80} (b^5 - a^5).$$

方差为

$$\text{var}(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{\pi^2}{720} (b-a)^2 (4a^2 + 7ab + 4b^2).$$

4. 设 $p(x)$ 是随机变量 X 的分布密度, 其中含有待定常数 c , 试在下列情况求出 c 的值。

$$(1) p(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ ce^{-x}, & x \geq 0; \end{cases}$$

$$(2) p(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ cx^{\alpha}e^{-\beta x}, & x \geq 0 (\alpha > 0, \beta > 0); \end{cases}$$

$$(3) p(x) = \frac{c}{1+x^2}.$$

解: (1)

$$\int_0^{\infty} ce^{-x} dx = c = 1.$$

(2)

$$\int_0^{\infty} cx^{\alpha} e^{-\beta x} dx = c \int_0^{\infty} \frac{1}{\beta^{\alpha+1}} (\beta x)^{\alpha} e^{-\beta x} d(\beta x) = \frac{c\Gamma(\alpha+1)}{\beta^{\alpha+1}} = 1.$$

因此

$$c = \frac{\beta^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1)}.$$

(3)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{c}{1+x^2} dx = c \left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right) = 1.$$

因此 $c = \frac{1}{\pi}$.

5. 设随机变量 X 的分布函数是 $F(x)$, 试证明, 对任何 $a < b$, 有

$$P(X = a) = F(a) - F(a - 0), \quad P(a < X < b) = F(b - 0) - F(a),$$

这里 $F(y - 0) \triangleq \lim_{x \rightarrow y} F(x)$ 。

证明:

$$P(X = a) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} P(a - \varepsilon < X \leq a) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F(a) - F(a - \varepsilon) = F(a) - F(a - 0).$$

$$P(a < X < b) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (a < X \leq b - \varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F(b - \varepsilon) - F(a).$$

6. 已知随机变量 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $Y = e^X$, 试计算 Y 的期望和方差。

解:

$$\begin{aligned} E(Y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\{x\} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right\} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{(x-(\mu+\sigma^2))^2}{2\sigma^2}\right\} dx \\ &= \exp\left\{\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right\} \\ E(Y^2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\{2x\} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} dx = \exp\{2\mu + 2\sigma^2\} \end{aligned}$$

因此

$$\text{var}(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2 = (e^{\sigma^2} - 1) \exp\{2\mu + \sigma^2\}.$$

9. 由统计物理学知道, 分子运动的速率 X 服从麦克斯韦分布, 即其分布密度是

$$p(x) = \begin{cases} \frac{4x^2}{\alpha^3\sqrt{\pi}} \exp\left\{-\frac{x^2}{\alpha^2}\right\}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

其中参数 $\alpha > 0$, 试求分子的动能 $Y = \frac{1}{2}mX^2$ 的分布密度。

解:

$$P(y \leq Y) = P\left(\frac{1}{2}mX^2 \leq Y\right) = \int_0^{\sqrt{\frac{2Y}{m}}} \frac{4x^2}{\alpha^3\sqrt{\pi}} \exp\left\{-\frac{x^2}{\alpha^2}\right\} dx$$

令 $y = \frac{1}{2}mX^2$, 得

$$P(y \leq Y) = \int_0^Y \frac{4\sqrt{2}}{\alpha^3 m^{3/2} \sqrt{\pi}} \sqrt{y} \exp\left\{-\frac{2y}{m\alpha^2}\right\} dy.$$

因此

$$P_Y(y) = \begin{cases} \frac{4\sqrt{2}}{\alpha^3 m^{3/2} \sqrt{\pi}} \sqrt{y} \exp \left\{ -\frac{2y}{m\alpha^2} \right\}, & y > 0, \\ 0, & y \leq 0. \end{cases}$$

11. 设随机变量 X 的分布密度为

$$p(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1, \\ 2 - x, & 1 \leq x \leq 2, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$$

试求出 X 的分布函数, 并作出 $p(x)$ 和 $F(x)$ 的图形。

解: 得分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{1}{2}x^2, & 0 \leq x < 1, \\ 1 - \frac{1}{2}(2-x)^2, & 1 \leq x < 2, \\ 1, & x \geq 2. \end{cases}$$

12. 设某产品的质量指标 $X \sim N(160, \sigma^2)$, 若要求 $P(120 \leq X \leq 200) \geq 0.80$, 问: 允许 σ 最多为多少?

解: 由 $X \sim N(160, \sigma^2)$, 设 $Y = \frac{X-160}{\sigma} \sim N(0, 1)$ 。因此

$$P(120 \leq x \leq 200) = P\left(-\frac{40}{\sigma} \leq y \leq \frac{40}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{40}{\sigma}\right) - 1 = 0.8$$

查表得 $\sigma = 31.25$ 。

18. 设 X 是只取非负整数的随机变量, 若 $E(X)$ 存在, 试证明:

$$E(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X \geq k).$$

证明:

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{i=1}^{+\infty} iP(X=i) = \sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^i P(X=i) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{i=k}^{+\infty} P(X=i) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X \geq k). \end{aligned}$$

19. 设 X 是非负随机变量, $g(x)$ 是 x 的增函数, $g(x) \geq 0$, 且 $E(g(X))$ 存在, 试证明, 对任何 $\varepsilon > 0$, 只要 $g(\varepsilon) > 0$, 就有

$$P(X \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{g(\varepsilon)} E(g(x)).$$

证明: 设 x 的概率密度函数为 $p(x)$,

$$E(g(x)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)p(x)dx \geq \int_{\varepsilon}^{+\infty} g(x)p(x)dx$$

由于 $g(x)$ 为增函数, 因此

$$\int_{\varepsilon}^{+\infty} g(x)p(x)dx \geq g(\varepsilon) \int_{\varepsilon}^{+\infty} p(x)dx = g(\varepsilon)P(X \geq \varepsilon).$$

即

$$P(X \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{g(\varepsilon)} E(g(x)).$$

20. 设随机变量 X 的分布密度为

$$p(x) = \begin{cases} \frac{2x}{\pi^2}, & 0 < x < \pi, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

试求 $Y = \sin X$ 的概率分布。

解：当 $0 < y \leq 1$ 时，

$$\begin{aligned} F(y) &= P(0 < x \leq \arcsin y) + P(\pi - \arcsin y \leq X < \pi) \\ &= \int_0^{\arcsin y} \frac{2x}{\pi^2} dx + \int_{\pi - \arcsin y}^{\pi} \frac{2x}{\pi^2} dx \\ &= \frac{1}{\pi^2} (\arcsin y)^2 + (1 - \frac{1}{\pi^2} (\pi - \arcsin y)^2) = \frac{2}{\pi} \arcsin y. \end{aligned}$$

因此概率分布为

$$F(y) = \begin{cases} 0, & y < 0, \\ \frac{2 \arcsin y}{\pi}, & 0 < y \leq 1, \\ 1, & y > 1. \end{cases}$$

21. 设随机变量 X 服从区间 $[0, 5]$ 上的均匀分布,

$$Y = \begin{cases} X, & 1 < X < 3, \\ 0, & X \leq 1, \\ 5, & X \geq 3, \end{cases}$$

试求 Y 的分布函数。

解: 易知 $P(Y = 0) = \frac{1}{5}$, $P(Y = 5) = \frac{2}{5}$,
 $P(1 < Y < y \leq 3) = \frac{y-1}{5}$. 因此分布函数为

$$F(y) = \begin{cases} 0, & y < 0, \\ \frac{1}{5}, & y \leq 1, \\ \frac{y}{5}, & 1 < y < 3, \\ \frac{3}{5}, & 3 \leq y < 5, \\ 1, & y \geq 5. \end{cases}$$

22. 设随机变量 X 的分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{x^2}{9}, & 0 < x \leq 3, \\ 1, & x > 3. \end{cases}$$

试求出 X 的分布密度, 数学期望和 $p(0 < p < 1)$ 分位数。

解: 由分布函数得 X 的密度函数为

$$p(x) = \begin{cases} \frac{2x}{9}, & 0 < x \leq 3, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

$$E(X) = \int_0^3 \frac{2x}{9} dx = 2$$

p 分位数为 $3\sqrt{p}$ 。

26. 设随机变量 X 的可能取值是 1, 2, 3, 4, 5, 6, 且概率分布是

$$P(X = x) = cx, \quad (x = 1, \cdots, 6),$$

其中 c 是一个正数, 试求 X 的期望和中位数。

解: 由于

$$\sum_{i=1}^6 P(X = i) = 21c = 1$$

得 $c = \frac{1}{21}$, 期望为

$$E(X) = \sum_{i=1}^6 iP(X = i) = \sum_{i=1}^6 ci^2 = 91c = \frac{91}{21}$$

由于 $P(X \leq 5) = \frac{15}{21}$, $P(X \leq 4) = \frac{10}{21}$,
 $P(X < 5) \leq 0.5 \leq P(X \leq 5)$, 故中位数为 5。

27. 设随机变量 $X \sim N(10, 4)$, 试求下列概率:

(1) $P(6 < X \leq 9)$;

(2) $P(13 \leq X \leq 15)$.

解: (1) 由于 $X \sim N(10, 4)$,

$$p(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-10)^2}{8}}$$

$$\begin{aligned} P(6 < X < 9) &= \int_6^9 \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-10)^2}{8}} dx \\ &= \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \Phi(2) - \Phi\left(\frac{1}{2}\right) \approx 0.2857. \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} P(13 \leq X \leq 15) &= \int_{13}^{15} \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-10)^2}{8}} dx \\ &= \int_{\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \Phi\left(\frac{5}{2}\right) - \Phi\left(\frac{3}{2}\right) \approx 0.0606. \end{aligned}$$

28. 某商店某种商品每月销售量服从泊松分布（参数为 6），问：在月初该种商品应该进货多少才能保证当月不脱销的概率大于 0.99？

解：设销量为 X ，则

$$P(X = k) = \frac{6^k}{k!} e^{-6}$$

事件 A_n ：进货 n 件商品不脱销的概率为

$$P(A_n) = \sum_{k=0}^n \frac{6^k}{k!} e^{-6}$$

求解最小的 n 使得 $P(A_n) > 0.99$ ，解得 $n = 12$ 。

33. 设随机变量 X 取值于区间 $[a, b]$ 内 $(-\infty < a < b < +\infty)$, 试证明下列不等式成立:

$$a \leq E(X) \leq b, \quad \text{var}(X) \leq \frac{(b-a)^2}{4}.$$

证明: 由于 $a \leq x \leq b$,

$$\int_a^b ap(x)dx \leq \int_a^b xp(x)dx \leq \int_a^b bp(x)dx$$

即

$$a \leq E(X) \leq b$$

注意到对任意实数 e , 有 $\text{var}(X) \leq E((X - e)^2)$, 该式在 $e = E(X)$ 时取等, 令 $e = \frac{a+b}{2}$, 则

$$\begin{aligned}\text{var}(X) &\leq E\left(\left(X - \frac{a+b}{2}\right)^2\right) \\&= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 p(x) dx \\&\leq \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} p(x) dx = \frac{(b-a)^2}{4}.\end{aligned}$$