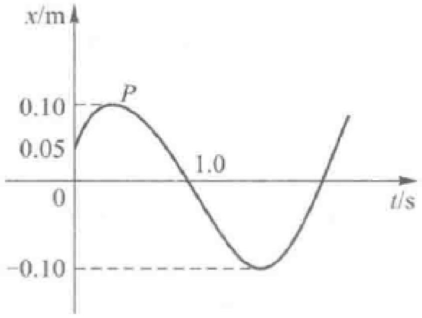
10-3. 一振动质点的振动曲线如习题 10-3 图所示，试求：(1) 运动学方程；(2) 点 P 对应的相位；(3) 从振动开始到达点 P 相应位置所需的时间。



习题 10-3 图

解：(1) 设质点振动的运动学方程为

$$x=A\cos(\omega t+\phi_0)$$

由振动曲线可知，$A=0.10$ m，初始值为 $x_0=0.05$ m，$v_0>0$，将初始值代入运动学方程，有

$$x_0=A\cos\phi_0$$

和 $$v_0=-A\omega\sin\phi_0>0$$

可得 $$\phi_0=-\frac{\pi}{3}$$

由振动曲线 $t=1.0$ s 时，$x_1=0$，$v_1<0$ 可知，

$$\left(\omega\times 1-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\pi}{2}$$

得 $$\omega=\frac{5\pi}{6}\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$$

所以，质点振动的运动学方程为

$$\boxed{x=0.10\cos\left(\frac{5}{6}\pi t-\frac{\pi}{3}\right)\quad(\text{SI 单位})}$$

(2) 在质点正方向位移的最大值处，有

$$(\omega t+\phi_0)=\left(\frac{5}{6}\pi t-\frac{\pi}{3}\right)=2k\pi,\quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

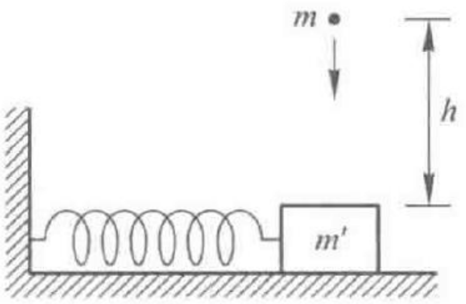
点 P 对应的相位取 $k=0$，即

$$\boxed{\left(\frac{5}{6}\pi t-\frac{\pi}{3}\right)_P=0}$$

(3) 由上式可得，振动开始后质点首次到达点正方向位移最大值所需的时间为

$$\boxed{t=\frac{\pi}{3}\times\frac{6}{5\pi}\text{ s}=\frac{2}{5}\text{ s}=0.4\text{ s}}$$

10-8. 一个光滑水平面上的弹簧振子，弹簧的劲度系数为 k，所系物体的质量为 m'，振幅为 A。有一质量为 m 的小物体从高度 h 处自由下落，如习题 10-8 图所示。(1) 当振子在最大位移处，物体正好落在 m' 上，并粘在一起，这时系统的振动周期、振幅和振动能量有何变化？(2) 如果小物体是在振子到达平衡位置时落在 m' 上，这些量又怎样变化？



习题 10-8 图

分析：小物体 m 粘到 m' 上，成为质量为 $(m+m')$ 的新振子，其固有频率(周期)不同于原振子，与 m 在何处与 m' 相粘无关。但新振子的振幅与其初始运动状态，即相粘位置及水平运动速度相关。在粘连过程中振动系统的机械能若有损耗，其振幅将变小。

解：记原振子为 0，新振子为 1，有

$$\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m'}}=\frac{2\pi}{T_0},\quad T_0=2\pi\sqrt{\frac{m'}{k}}$$

$$\omega_1=\sqrt{\frac{k}{m'+m}}=\frac{2\pi}{T_1},\quad T_1=2\pi\sqrt{\frac{m'+m}{k}}>T_0$$

(1) 小物体 m 在 m' 的最大位移处与其相粘。新振子的初始位置为 $x_{01}=A_0$，初始速率 $v_{01}=0$。新振子的振幅为

$$A_1=\sqrt{x_{01}^2+\left(\frac{v_{01}}{\omega_1}\right)^2}=A_0$$

振动能量为

$$E_1=\frac{1}{2}kA_1^2=\frac{1}{2}kA_0^2=E_0$$

新振子的振动周期变大，振幅和振动能量不变。

(2) 小物体 m 在 m' 的平衡位置处与其相粘。这是弹簧的原长处，也是新振子的平衡位置。此时 m' 有最大速率 $v_{0m}=A_0\omega_0$。记新振子为 2，有 $\omega_2=\omega_1$，初始位置 $x_{02}=0$。设新振子的初始速度为 v_{02}，由动量守恒定律，有

$$m'v_{0m}=(m'+m)\ v_{02}$$

得

$$v_{02}=\frac{m'v_{0m}}{m'+m}=\frac{m'A_0\omega_0}{m'+m}$$

由机械能守恒定律可知，v_{02} 也是新振子的最大振动速率，有

$$v_{02}=A_2\omega_2$$

所以，新振子的振幅为

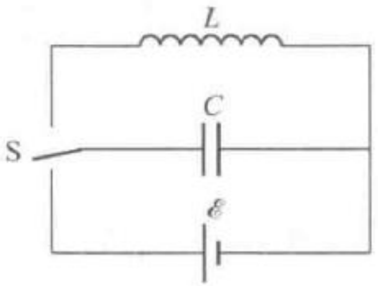
$$A_2=\frac{v_{02}}{\omega_2}=\frac{m'A_0}{m'+m}\frac{\omega_0}{\omega_1}=\frac{m'A_0}{m'+m}\sqrt{\frac{m'+m}{m'}}=\sqrt{\frac{m'}{m'+m}}A_0<A_0$$

新振子的振动能量为

$$E_2=\frac{1}{2}kA_2^2=\frac{1}{2}k\left(\frac{m'}{m'+m}\right)A_0^2=\frac{m'}{m'+m}E_0<E_0$$

新振子的振动周期变大，振幅和振动能量变小。

10-20. 如习题 10-20 图所示，将开关 S 按下后，电容器即由电池充电，放手后，电容器即经由线圈 L 放电。（1）若 $L=0.010\ \mathrm{H}$，$C=1.0\ \mu\mathrm{F}$，$\mathscr{E}=1.4\ \mathrm{V}$，求 L 中的最大电流（电阻极小，可略）；（2）当分布在电容和电感间的能量相等时，电容器上的电荷为多少？（3）从放电开始到电荷第一次为上述数值时，经过了多少时间？



习题 10-20 图

分析：充电后的电容器与线圈构成 LC 电磁振荡电路。不计电路的阻尼时，电容器极板上的电荷量随时间按谐振动的规律变化。振荡电路的固有振动频率由 L 和 C 的乘积决定，振幅和初相位由系统的初始状态决定，任意时刻电路的状态都可由振荡的相位决定。

解：无阻尼 LC 电磁振荡，电容器极板上电荷变化的规律为

$$q=Q_0\cos(\omega t+\phi_0)$$

q 为 t 时刻电容器极板上的电荷量，Q_0 为振幅

$$Q_0=CU=C\mathscr{E}=1.0\times10^{-6}\times1.4\ \mathrm{C}=1.4\times10^{-6}\ \mathrm{C}$$

系统的固有振动角频率为 $\omega=\dfrac{1}{\sqrt{LC}}$

（1）电路中的充放电电流 i 为

$$i=\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}=-Q_0\omega\sin(\omega t+\phi_0)=-I_m\sin(\omega t+\phi_0)$$

式中 I_m 为电流的最大值。

$$\boxed{I_m=Q_0\omega=C\mathscr{E}\frac{1}{\sqrt{LC}}=\mathscr{E}\sqrt{\frac{C}{L}}=1.4\times\sqrt{\frac{1.0\times10^{-6}}{0.01}}\ \mathrm{A}=1.4\times10^{-2}\ \mathrm{A}}$$

（2）分布在电容和电感间的能量相等时，有

$$\frac{1}{2}\frac{q^2}{C}=\frac{1}{2}Li^2$$

即

$$\frac{1}{2}\frac{Q_0^2}{C}\cos^2(\omega t+\phi_0)=\frac{1}{2}LQ_0^2\omega^2\sin^2(\omega t+\phi_0)=\frac{1}{2C}Q_0^2\sin^2(\omega t+\phi_0)$$

可得一个周期内电场能和磁场能相等时的相位为

$$(\omega t+\phi_0)=\frac{\pi}{4},\frac{3}{4}\pi,\frac{5}{4}\pi,\frac{7}{4}\pi$$

电场能和磁场能相等时电容器上的电荷量为

$$\boxed{q=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}Q_0=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\mathscr{E}C=\pm9.90\times10^{-7}\ \mathrm{C}}$$

（3）$t=0$ 的初始时刻，有 $q_0=Q_0$，$i_0=0$。可得 $\phi_0=0$。从开始放电到第一次电场能和磁场能相等所需时间由 $\omega t=\dfrac{\pi}{4}$，得

$$\boxed{t=\frac{\pi}{4\omega}=\frac{\pi\sqrt{LC}}{4}=7.85\times10^{-5}\ \text{s}}$$