AI 中的数学第三章习题答案

3. 设二维随机向量 (X, Y) 的联合密度为

$$p(x,y)=\begin{cases} c(R-\sqrt{x^2+y^2}), & x^2+y^2\leqslant R^2, \\ 0, & x^2+y^2>R^2, \end{cases}$$

求：(1) 系数 c；(2) 向量 (X, Y) 落入圆 $x^2+y^2\leqslant r^2(0<r<R)$ 的概率。

解：(1)

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2} p(x,y)dxdy &= \int_{\{x^2+y^2\leqslant R^2\}} c(R-\sqrt{x^2+y^2})dxdy \\ &= \int_{0\leqslant r\leqslant R}\int_{0\leqslant\theta\leqslant 2\pi} c(R-r)rd\theta dr \\ &= 2\pi c\int_0^R (R-r)rdr = c\pi R^2 = 1\end{aligned}$$

因此 $c=\frac{1}{\pi R^2}$.

(2)

$$\begin{aligned}P(x^2+y^2\leqslant r^2) &= \int_{\{x^2+y^2\leqslant r^2\}} c(R-\sqrt{x^2+y^2})dxdy \\ &= \int_{0\leqslant r'\leqslant r}\int_{0\leqslant\theta\leqslant 2\pi} c(R-r')r'd\theta dr' \\ &= 2\pi c\int_0^r (R-r')r'dr' \\ &= 2\pi c(Rr-\frac{r^2}{2}) = \frac{2r}{R}-\frac{r^2}{R^2}.\end{aligned}$$

4. 设二维随机向量 (X, Y) 服从区域

$$D=\left\{(x,y):\frac{(x+y)^2}{2a^2}+\frac{(x-y)^2}{2b^2}\leqslant 1\right\}\quad (a,b>0)$$

上的均匀分布，求 (X, Y) 的联合密度。

解： 设 $I_D(x,y)$ 为示性函数，$p(x,y)=cI_D(x,y)$。令 $u=\frac{x+y}{2}, v=\frac{x-y}{2}$ 得

$$\int_{\mathbb{R}^2} p(x,y)dxdy=\int_D cdxdy=c\int_{\{\frac{2u^2}{a^2}+\frac{2v^2}{b^2}\leqslant 1\}} 2dudv=c\pi ab=1$$

解得 $c=\frac{1}{\pi ab}$，联合密度为 $p(x,y)=\frac{1}{\pi ab}I_D(x,y)$.

8. 设随机变量 X 与 Y 相互独立。分别服从自由度为 m,n 的 χ^2 分布，即

$$p_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{2^{m/2}\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}x^{m/2-1}e^{-x/2}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0,\end{cases}$$

$$p_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2^{n/2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}y^{n/2-1}e^{-y/2}, & y>0,\\ 0, & y\leqslant 0,\end{cases}$$

试证明，$X+Y$ 服从 χ^2 分布，其自由度为 $m+n$.

证明： 设 $Z=X+Y$,

$$\begin{aligned}p_{X+Y}(z)&=\int_0^z p_X(t)p_Y(z-t)dt\\&=\int_0^z \frac{1}{2^{m/2}\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}\frac{1}{2^{n/2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}t^{m/2-1}e^{-t/2}(z-t)^{n/2-1}e^{-(z-t)/2}dt\\&=\int_0^z \frac{t^{m/2-1}(z-t)^{n/2-1}e^{-z/2}}{2^{(m+n)/2}B\left(\frac{m+n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}dt\end{aligned}$$

令 $s=\frac{t}{z}$，则

$$\begin{aligned}p_{X+Y}(z)&=\int_0^1 \frac{s^{m/2-1}(1-s)^{n/2-1}e^{-z/2}z^{(m+n)/2-1}}{2^{(m+n)/2}B\left(\frac{m+n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}ds\\&=\frac{z^{(m+n)/2-1}e^{-z/2}}{2^{(m+n)/2}\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}\end{aligned}$$

即 $X+Y\sim\chi^2(m+n)$

10. 设二维随机向量 (X,Y) 的联合密度为

$$p(x,y)=\begin{cases}4xy\exp\{-(x^2+y^2)\}, & x>0,y>0,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

求 $Z=\sqrt{X^2+Y^2}$ 的均值。

解： 作极坐标变换 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$ 得

$$E(Z)=\int_0^\infty\int_0^\infty \sqrt{x^2+y^2}4xy\exp\{-(x^2+y^2)\}dxdy$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^\infty \int_0^{\frac{\pi}{2}} r \cdot 4r^2 \cos\theta \sin\theta e^{-r^2} r d\theta dr \\
&= \left(\int_0^\infty 4r^4 e^{-r^2} dr\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \sin\theta d\theta\right) \\
&= \frac{3\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}.
\end{aligned}
$$

对于积分 $\int_0^\infty 4r^4 e^{-r^2} dr$，做变量替换 $u = r^2$，原积分变为：

$$
\int_0^\infty 4r^4 e^{-r^2} dr = \int_0^\infty 4(u)^2 e^{-u} \frac{1}{2\sqrt{u}} du = 2\int_0^\infty u^{3/2} e^{-u} du = 2\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3\sqrt{\pi}}{2}
$$

因此期望为

$$
\begin{aligned}
E(Z) &= \left(\int_0^\infty 4r^4 e^{-r^2} dr\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \sin\theta d\theta\right) \\
&= \frac{3\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}.
\end{aligned}
$$

11. 设二维随机向量 (X, Y) 服从区域

$$
D = \{(x, y) : 0 < x < 1, 0 < y < x\}
$$

上的均匀分布，求 $E(X), \mathrm{var}(X)$ 及 X 与 Y 的相关系数。

解： 设 $I_D(x, y)$ 为示性函数，$p(x, y) = cI_D(x, y)$。

由于 $\int_0^1 \int_0^x c dx dy = 1$，解得 $c = 2$.

$$
E(X) = \int_{\mathbb{R}^2} x \cdot 2I_D(x, y) dx dy = \int_0^1 2x^2 dx = \frac{2}{3}.
$$

$$
E(X^2) = \int_{\mathbb{R}^2} x^2 \cdot 2I_D(x, y) dx dy = \int_0^1 2x^3 dx = \frac{1}{2}.
$$

$$
\mathrm{var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{1}{18}.
$$

$$
E(XY) = \int_{\mathbb{R}^2} xy \cdot 2I_D(x, y) dx dy = \int_0^1 \int_0^x 2xy dy dx = \frac{1}{4}.
$$

$$
E(Y) = \int_{\mathbb{R}^2} y \cdot 2I_D(x, y) dx dy = \int_0^1 \int_0^x 2y dy dx = \frac{1}{3}.
$$

$$
E(Y^2) = \int_{\mathbb{R}^2} y^2 \cdot 2I_D(x, y) dx dy = \int_0^1 \int_0^x 2y^2 dy dx = \frac{1}{6}.
$$

$$\rho(X,Y)=\frac{E(XY)-E(X)E(Y)}{\sqrt{\mathrm{var}(X)}\sqrt{\mathrm{var}(Y)}}=\frac{1}{2}.$$

12. 设随机变量 $X\sim N(0,1)$, $Y=X^n$ (n 是正整数), 求 X 与 Y 的相关系数.

解: 若随机变量 $X\sim N(0,1)$，则对一切正整数 k，可以由递推得到

$$E(X^{2k-1})=0,\quad E(X^{2k})=\prod_{0\leqslant i<k}(2k-1-2i)$$

若 n 为奇数,

$$E(Y)=E(X^n)=0$$

$$E(XY)=E(X^{n+1})=\prod_{0\leqslant i<\frac{n+1}{2}}(n-2i)$$

$$E(Y^2)=E(X^{2n})=\prod_{0\leqslant i<n}(2n-1-2i)$$

$$\rho_{XY}=\frac{E(XY)-E(X)E(Y)}{\sqrt{\mathrm{var}(X)}\sqrt{\mathrm{var}(Y)}}=\frac{\prod_{0\leqslant i<\frac{n+1}{2}}(n-2i)-0}{1\cdot\sqrt{\prod_{0\leqslant i<n}(2n-1-2i)-0^2}}=\frac{\prod_{0\leqslant i<\frac{n+1}{2}}(n-2i)}{\sqrt{\prod_{0\leqslant i<n}(2n-1-2i)}}$$

若 n 为偶数,

$$E(Y)=E(X^n)=\prod_{0\leqslant i<\frac{n}{2}}(n-1-2i)$$

$$E(XY)=E(X^{n+1})=0$$

$$\mathrm{cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0$$

故相关系数 $\rho_{XY}=0$

因此，相关系数

$$\rho_{XY}=\begin{cases}\frac{\prod_{0\leqslant i<\frac{n+1}{2}}(n-2i)}{\sqrt{\prod_{0\leqslant i<n}(2n-1-2i)}}, & n\text{为奇数},\\ 0, & n\text{为偶数}.\end{cases}$$

13. 设随机变量 X_1 与 X_2 相互独立, 分布密度分别为

$$p_1(x)=\begin{cases}2x, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 0, & ,\end{cases}$$

$$p_2(x)=\begin{cases}e^{-(x-5)}, & x>5,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求 $E(X_1X_2)$.

解:

$$E(X_1)=\int_{-\infty}^{+\infty}xp_1(x)dx=\int_0^1 2x^2dx=\frac{2}{3},$$

$$E(X_2)=\int_{-\infty}^{+\infty}xp_2(x)dx=\int_5^{\infty}xe^{-(x-5)}dx=\int_0^{\infty}(u+5)e^u du=\int_0^{\infty}ue^u du+\int_0^{\infty}5e^u du=1+5=6$$

由于 X_1 和 X_2 相互独立，因此

$$E(X_1X_2)=E(X_1)E(X_2)=4.$$

14. 设 X 和 Y 是随机变量, $\mathrm{var}(X)=25$, $\mathrm{var}(Y)=36$, 相关系数 $\rho_{XY}=0.4$, 求 $\mathrm{var}(X+Y)$ 及 $\mathrm{var}(X-Y)$.

解: 不妨假设 X Y 零均值。

$$\mathrm{cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\rho_{XY}\sqrt{\mathrm{var}(X)}\sqrt{\mathrm{var}(Y)}=12.$$

$$\mathrm{var}(X+Y)=\mathrm{var}(X)+\mathrm{var}(Y)+2\,\mathrm{cov}(X,Y)=85.$$

$$\mathrm{var}(X-Y)=\mathrm{var}(X)+\mathrm{var}(Y)-2\,\mathrm{cov}(X,Y)=37.$$

15. 设二维随机向量 (X,Y) 服从二维正态分布, $E(X)=E(Y)=0$, $\mathrm{var}(X)=a^2$, $\mathrm{var}(Y)=b^2$, $\rho_{XY}=0$. 试求 (X,Y) 落入区域

$$D=\left\{(x,y):\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant k^2\right\}\quad(k>0)$$

的概率。

解: 由题意得，联合密度函数

$$f_{X,Y}(x,y)=\frac{1}{ab2\pi}e^{-\frac{x^2}{2a^2}-\frac{y^2}{2b^2}}$$

(X,Y) 落入区域 D 的概率为

$$P((X,Y)\in D)=\iint_D f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy=\iint_D\frac{1}{ab2\pi}e^{-\frac{x^2}{2a^2}-\frac{y^2}{2b^2}}\,dx\,dy$$

使用极坐标变换: $x=ar\cos\theta,\quad y=br\sin\theta.$

在这种变换下，雅可比行列式为:

$$J=\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right|=abr$$

区域 D 变换后为:

$$\frac{(ar\cos\theta)^2}{a^2}+\frac{(br\sin\theta)^2}{b^2}=r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)=r^2\leq k^2$$

因此，积分可表示为

$$P((X,Y)\in D)=\int_0^{2\pi}\int_0^k\frac{1}{ab2\pi}e^{-\frac{(ar\cos\theta)^2}{2a^2}-\frac{(br\sin\theta)^2}{2b^2}}\cdot abr\,dr\,d\theta=\int_0^{2\pi}\int_0^k\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{r^2}{2}}r\,dr\,d\theta$$

令 $u=\frac{r^2}{2}$，则

$$P((X,Y)\in D)=\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{k^2}{2}}\frac{1}{2\pi}e^{-u}\,du\,d\theta=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2\pi}(1-e^{-\frac{k^2}{2}})\,d\theta=\frac{1}{2\pi}(1-e^{-\frac{k^2}{2}})\int_0^{2\pi}d\theta=1-e^{-\frac{k^2}{2}}$$

16. 设三维随机向量 (X,Y,Z) 的联合密度为

$$p(x,y,z)=\begin{cases}e^{-(x+y+z)}, & x>0,y>0,z>0,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

试分别求出随机变量 X,Y,Z 的分布密度，又问：X,Y,Z 相互独立吗?

解:

$$f_X(x)=\int_0^\infty\int_0^\infty p(x,y,z)\,dy\,dz=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(x+y+z)}\,dy\,dz=\int_0^\infty e^{-x-z}\,dz=e^{-x}\cdot 1=e^{-x}$$

因此，X 的边缘分布密度为:

$$f_X(x)=\begin{cases}e^{-x}, & x>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_0^\infty\int_0^\infty p(x,y,z)\,dx\,dz=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(x+y+z)}\,dx\,dz=\int_0^\infty e^{-y-z}\,dz=e^{-y}\cdot 1=e^{-y}$$

因此，Y 的边缘分布密度为:

$$f_Y(y)=\begin{cases}e^{-y}, & y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

$$f_Z(z)=\int_0^\infty\int_0^\infty p(x,y,z)\,dx\,dy=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(x+y+z)}\,dx\,dy=\int_0^\infty e^{-y-z}\,dy=e^{-z}\cdot 1=e^{-z}$$

因此，Z 的边缘分布密度为:

$$f_Z(z)=\begin{cases}e^{-z}, & z>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

注意到

$$f_X(x) \cdot f_Y(y) \cdot f_Z(z) = e^{-x} \cdot e^{-y} \cdot e^{-z} = e^{-(x+y+z)} = p(x,y,z)$$

因此，X, Y, Z 是相互独立的。

17. 设随机变量 X, Y, Z 相互独立，都服从标准正态分布，求 $\xi \triangleq \sqrt{X^2+Y^2+Z^2}$ 的概率分布.

解： 由于 X, Y, Z 都服从标准正态分布 $N(0,1)$，因此 X^2, Y^2, Z^2 都服从卡方分布 $\chi^2(1)$，它们的和 ξ^2 服从自由度为 3 的卡方分布 $\chi^2(3)$。

设 $\xi^2 = W$，则 $W \sim \chi^2(3)$，密度函数为

$$f_W(w) = \frac{w^{1.5-1}e^{-w/2}}{2^{1.5}\Gamma(1.5)} = \frac{w^{0.5}e^{-w/2}}{2^{1.5} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2}} = \frac{w^{0.5}e^{-w/2}}{\sqrt{2\pi}}$$

其中利用了 $\Gamma(1.5) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$。

设 $g(w) = \sqrt{w}$，则 $g'(w) = \frac{1}{2\sqrt{w}}$。逆变换为 $w = g^{-1}(\xi) = \xi^2$。

由变换公式，ξ 的概率密度函数为：

$$f_\xi(\xi) = f_W(g^{-1}(\xi)) \left| \frac{d}{d\xi} g^{-1}(\xi) \right| = f_W(\xi^2) \left| \frac{d}{d\xi}(\xi^2) \right| = \frac{(\xi^2)^{0.5}e^{-(\xi^2)/2}}{\sqrt{2\pi}} \cdot 2\xi = \frac{\xi e^{-(\xi^2)/2}}{\sqrt{2\pi}} \cdot 2\xi = \frac{2\xi^2 e^{-(\xi^2)/2}}{\sqrt{2\pi}}$$

因此，ξ 的概率密度函数为：

$$f_\xi(\xi) = \frac{2\xi^2 e^{-(\xi^2)/2}}{\sqrt{2\pi}}, \quad (\xi \geqslant 0)$$

.

18. 设随机变量 $X_1, \ldots, X_n$ 独立同分布，共同的分布是威布尔分布，即共同的分布函数是 $F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\left(\frac{x}{\eta}\right)^m}, & x > 0, \\ 0, & x \leqslant 0, \end{cases} \quad (m > 0, \eta > 0),$

试证明 $\xi \triangleq \min\{X_1, \ldots, X_n\}$ 仍服从威布尔分布。

证明： 由于 $\xi = \min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$，所以 $\xi > x$ 当且仅当所有 $X_i > x$（$i = 1, 2, \ldots, n$）。因为 X_i 是独立的，我们有：

$$P(\xi > x) = P(X_1 > x, X_2 > x, \ldots, X_n > x) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i > x) = \prod_{i=1}^{n}(1 - F(x)) = e^{-n\left(\frac{x}{\eta}\right)^m}$$

所以：

$$F_\xi(x) = 1 - P(\xi > x) = 1 - e^{-n\left(\frac{x}{\eta}\right)^m}$$

设 $\eta' = \eta\left(\frac{1}{n}\right)^{1/m}$，则：

$$F_\xi(x) = 1 - e^{-\left(\frac{x}{\eta'}\right)^m}$$

因此，$\xi = \min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ 仍然服从威布尔分布，其参数为：

$$\eta' = \eta \left(\frac{1}{n}\right)^{1/m}.$$

19. 对于随机变量 X, Y, Z, 已知

$$\begin{aligned} E(X) = E(Y) = 1, \quad E(Z) = -1, \\ \mathrm{var}(X) = \mathrm{var}(Y) = \mathrm{var}(Z) = 1, \\ \rho_{XY} = 0, \quad \rho_{XZ} = 1/2, \quad \rho_{YZ} = -1/2, \end{aligned}$$

试求 $E(X+Y+Z)$ 及 $\mathrm{var}(X+Y+Z)$.

解：

$$E(X+Y+Z) = E(X) + E(Y) + E(Z) = 1 + 1 - 1 = 1$$

$$\mathrm{var}(X+Y+Z) = \mathrm{var}(X) + \mathrm{var}(Y) + \mathrm{var}(Z) + 2\left(\mathrm{cov}(X,Y) + \mathrm{cov}(X,Z) + \mathrm{cov}(Y,Z)\right)$$

计算协方差：

$$\begin{aligned} \mathrm{cov}(X,Y) &= \rho_{XY}\sqrt{\mathrm{var}(X)\mathrm{var}(Y)} = 0 \cdot \sqrt{1 \cdot 1} = 0 \\ \mathrm{cov}(X,Z) &= \rho_{XZ}\sqrt{\mathrm{var}(X)\mathrm{var}(Z)} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{1 \cdot 1} = \frac{1}{2} \\ \mathrm{cov}(Y,Z) &= \rho_{YZ}\sqrt{\mathrm{var}(Y)\mathrm{var}(Z)} = -\frac{1}{2} \cdot \sqrt{1 \cdot 1} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

代入方差公式：

$$\mathrm{var}(X+Y+Z) = 1 + 1 + 1 + 2\left(0 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) = 3$$

因此，$E(X+Y+Z) = 1$，$\mathrm{var}(X+Y+Z) = 3$。

20. 设随机变量 X 与 Y 相互独立, $X \sim N(0,1), Y \sim N(0,1)$, 试求 $U = X+Y$, $V = X-Y$ 的联合密度.

解： 设变换：

$$\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

变换矩阵 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$，逆变换矩阵 $\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

由于 X 和 Y 相互独立且都服从标准正态分布，它们的联合密度函数为：

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$$

代入逆变换：

$$x(u,v)=\frac{u+v}{2},\quad y(u,v)=\frac{u-v}{2},\quad |\det(\mathbf{A}^{-1})|=\left|\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}$$

所以，U,V 的联合密度为：

$$f_{U,V}(u,v)=f_{X,Y}(x(u,v),y(u,v))\cdot|\det(\mathbf{A}^{-1})|=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{\left(\frac{u+v}{2}\right)^2+\left(\frac{u-v}{2}\right)^2}{2}}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{u^2+v^2}{4}}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4\pi}e^{-\frac{u^2+v^2}{4}}$$

21. 设随机变量 X 与 Y 相互独立, $X\sim N(0,1), Y\sim N(0,1)$, 试证: $U=X^2+Y^2$ 与 $V=X/Y$ 是相互独立的.

证明： 作极坐标变换：$X=R\cos\Theta,\quad Y=R\sin\Theta$，雅可比行列式 J 为：

$$J=\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right|=r$$

X 和 Y 的联合密度函数为：

$$f_{X,Y}(x,y)=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$$

因此，R 和 Θ 的联合密度函数为：

$$f_{R,\Theta}(r,\theta)=f_{X,Y}(r\cos(\theta),r\sin(\theta))\cdot|J|=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{r^2}{2}}\cdot r=\frac{r}{2\pi}e^{-\frac{r^2}{2}}$$

R 的边缘密度函数：

$$f_R(r)=\int_0^{2\pi}f_{R,\Theta}(r,\theta)\,d\theta=\int_0^{2\pi}\frac{r}{2\pi}e^{-\frac{r^2}{2}}\,d\theta=re^{-\frac{r^2}{2}}$$

Θ 的边缘密度函数：

$$f_\Theta(\theta)=\int_0^{\infty}f_{R,\Theta}(r,\theta)\,dr=\int_0^{\infty}\frac{r}{2\pi}e^{-\frac{r^2}{2}}\,dr=\frac{1}{2\pi}$$

注意到 $f_{R,\Theta}(r,\theta)=f_R(r)\cdot f_\Theta(\theta)$，这表明 R 和 Θ 是相互独立的。

又由于

$$U=X^2+Y^2=R^2,\quad V=\frac{X}{Y}=\frac{\cos(\Theta)}{\sin(\Theta)}=\cot(\Theta)$$

因为 R 和 Θ 是相互独立的，而 U 只依赖于 R，V 只依赖于 Θ，所以 U 和 V 也是相互独立的。

22. 设随机变量 X 与 Y 相互独立, X 服从区间 $[0,1]$ 上的均匀分布, Y 服从区间 $[1,3]$ 上的均匀分布, 试求 $E(XY)$ 及 $\mathrm{var}(XY)$.

解：

$$E(X)=\frac{0+1}{2}=\frac{1}{2},\quad E(Y)=\frac{1+3}{2}=2$$

由于 X 和 Y 相互独立，

$$E(XY) = E(X) \cdot E(Y) = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$$

$$E(X^2) = \int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}, \quad E(Y^2) = \int_1^3 \frac{1}{2} y^2\,dy = \frac{27}{6} - \frac{1}{6} = \frac{13}{3}$$

同样，X^2 和 Y^2 相互独立，

$$E((XY)^2) = E(X^2) \cdot E(Y^2) = \frac{1}{3} \cdot \frac{13}{3} = \frac{13}{9}$$

因此

$$\operatorname{var}(XY) = E((XY)^2) - [E(XY)]^2 = \frac{13}{9} - 1^2 = \frac{4}{9}$$

23. 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且 $\operatorname{var}(X)$ 和 $\operatorname{var}(Y)$ 存在, 试证:

$$\operatorname{var}(XY) \geqslant \operatorname{var}(X)\operatorname{var}(Y).$$

证明： 由于 X 和 Y 相互独立，有：

$$E((XY)^2) = E(X^2Y^2) = E(X^2)E(Y^2), \quad E(XY) = E(X)E(Y)$$

计算方差：

$$\begin{aligned}\operatorname{var}(X)\operatorname{var}(Y) &= (E(X^2) - [E(X)]^2)(E(Y^2) - [E(Y)]^2)\\ &= E(X^2)E(Y^2) - E(X^2)[E(Y)]^2 - [E(X)]^2E(Y^2) + [E(X)]^2[E(Y)]^2\end{aligned}$$

$$\operatorname{var}(XY) = E(X^2)E(Y^2) - [E(X)E(Y)]^2$$

由于：

$$E(X^2) \geqslant [E(X)]^2, \quad E(Y^2) \geqslant [E(Y)]^2$$

因此

$$E(X^2)[E(Y)]^2 + [E(X)]^2E(Y^2) \geqslant 2[E(X)]^2[E(Y)]^2$$

$$\operatorname{var}(X)\operatorname{var}(Y) - \operatorname{var}(XY) = 2[E(X)]^2[E(Y)]^2 - E(X^2)[E(Y)]^2 + [E(X)]^2E(Y^2) \leqslant 0$$

即

$$\operatorname{var}(XY) \geqslant \operatorname{var}(X)\operatorname{var}(Y)$$

24. 设一城市有 n 个区, 其中住有 x_j 个居民的区共有 n_j 个 ($\sum n_j = n$). 令

$$m = \sum_j \frac{n_j x_j}{n}, \quad \sigma^2 = \sum_j \frac{n_j x_j^2}{n} - m^2.$$

(m 是每个区的居民民数的平均均数). 现在随机选取 r 个区, 并数出其中每个区中的居民民数, 设 $X_1, \cdots, X_r$ 分别为这 r 个区的居民民数, 试证:

$$E(X_1+\cdots+X_r)=mr, \quad \operatorname{var}(X_1+\cdots+X_r)=\frac{\sigma^2 r(n-r)}{n-1}.$$

证明: 由于每个区被选中的概率相等，每个区的居民数的期望为:

$$E(X_i)=\sum_j x_j \cdot P(X_i=x_j)=\sum_j x_j \cdot \frac{n_j}{n}=\frac{1}{n}\sum_j n_j x_j=m$$

$$E(X_i^2)=\sum_j x_j^2 \cdot P(X_i=x_j)=\sum_j x_j^2 \cdot \frac{n_j}{n}=\frac{1}{n}\sum_j n_j x_j^2$$

因此:

$$\operatorname{var}(X_i)=\frac{1}{n}\sum_j n_j x_j^2-m^2=\sigma^2$$

$$E(X_1+X_2+\cdots+X_r)=E(X_1)+E(X_2)+\cdots+E(X_r)=r\cdot E(X_i)=r\cdot m$$

对于任意两个变量 X_i 和 X_j ， $E(X_iX_j)$ 可以表示为:

$$E(X_iX_j)=\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i\neq j} x_i x_j=\frac{1}{n(n-1)}\left[\left(\sum_j x_j\right)^2-\sum_j x_j^2=n^2m^2-n\sum_j \frac{n_j x_j^2}{n}\right]$$
$$=\frac{1}{n(n-1)}\left(n^2m^2-n\left(n\sigma^2+nm^2\right)\right)=\frac{-n^2\sigma^2}{n(n-1)}$$

协方差为

$$\operatorname{cov}(X_i,X_j)=\frac{-n\sigma^2}{n-1}-m^2=\frac{-n\sigma^2-(n-1)m^2}{n-1}=\frac{-\sigma^2}{n-1}$$

$$\operatorname{var}(X_1+X_2+\cdots+X_r)=\sum_{i=1}^{r}\operatorname{var}(X_i)+2\sum_{1\leq i<j\leq r}\operatorname{cov}(X_i,X_j)=r\sigma^2-\frac{r(r-1)\sigma^2}{n-1}=\sigma^2\left(\frac{r(n-r)}{n-1}\right)$$

25. 设 $X_1, \ldots, X_n$ 是独立同分布的正值随机变列, 试证:

$$E\left(\frac{X_1+\cdots+X_k}{X_1+\cdots+X_n}\right)=\frac{k}{n} \quad (k=1,\ldots,n).$$

证明: 设 $S_n=X_1+X_2+\cdots+X_n$ 和 $S_k=X_1+X_2+\cdots+X_k$。由于 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 是独立同分布的正值随机变量，

$$E(S_n)=E(X_1+X_2+\cdots+X_n)=n\mu, \quad E(S_k)=E(X_1+X_2+\cdots+X_k)=k\mu$$

对于任意 i 和 j，$\frac{X_i}{S_n}$ 和 $\frac{X_j}{S_n}$ 的期望值相同。因此，我们可以考虑所有 $\frac{X_i}{S_n}$ 的和:

$$E\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{X_i}{S_n}\right)=E(1)=1$$

由于 $\frac{X_i}{S_n}$ 的期望值相同，因此：

$$E\left(\frac{X_i}{S_n}\right)=\frac{1}{n}\quad 对于所有 i=1,2,\ldots,n$$

$$E\left(\frac{S_k}{S_n}\right)=E\left(\frac{X_1+X_2+\cdots+X_k}{S_n}\right)=E\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{X_i}{S_n}\right)=\sum_{i=1}^{k}E\left(\frac{X_i}{S_n}\right)=k\cdot\frac{1}{n}=\frac{k}{n}$$

26. 设随机变量 $X_1,\cdots,X_n$ 独立同分布, $X_i\sim N(\mu,\sigma^2)$, 记

$$\xi=\sum_{i=1}^{m}X_i,\quad \eta=\sum_{i=1}^{n}X_i\quad(1\leqslant m<n),$$

试求 (ξ,η) 的联合密度.

解： ξ ，η 是 m 个独立正态随机变量的和，因此 ξ ，η 也服从正态分布：

$$\xi\sim N(m\mu,m\sigma^2),\quad \eta\sim N(n\mu,n\sigma^2)$$

由于 X_i 独立同分布，只有当 $i=j$ 时，$\operatorname{cov}(X_i,X_j)=\sigma^2$，否则为 0。因此 ξ 和 η 的协方差为：

$$\operatorname{cov}(\xi,\eta)=\operatorname{cov}\left(\sum_{i=1}^{m}X_i,\sum_{j=1}^{n}X_j\right)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\operatorname{cov}(X_i,X_j)=\sum_{i=1}^{m}\operatorname{cov}(X_i,X_i)=m\sigma^2$$

ξ 和 η 的联合分布是一个二维正态分布，其均值向量和协方差矩阵分别为：

$$\boldsymbol{\mu}=\begin{pmatrix}m\mu\\ n\mu\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\Sigma}=\begin{pmatrix}m\sigma^2 & m\sigma^2\\ m\sigma^2 & n\sigma^2\end{pmatrix}$$

二维正态分布的联合密度函数为：

$$f_{\xi,\eta}(x,y)=\frac{1}{2\pi\sqrt{\det(\boldsymbol{\Sigma})}}\exp\left(-\frac{1}{2}(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{\mu})^{\top}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{\mu})\right)$$

其中，$\boldsymbol{z}=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$，协方差矩阵的逆

$$\boldsymbol{\Sigma}^{-1}=\frac{1}{\det(\boldsymbol{\Sigma})}\begin{pmatrix}n\sigma^2 & -m\sigma^2\\ -m\sigma^2 & m\sigma^2\end{pmatrix}=\frac{1}{m\sigma^4(n-m)}\begin{pmatrix}n\sigma^2 & -m\sigma^2\\ -m\sigma^2 & m\sigma^2\end{pmatrix}=\frac{1}{m\sigma^2(n-m)}\begin{pmatrix}n & -m\\ -m & m\end{pmatrix}$$

代入得联合密度函数

$$f_{\xi,\eta}(x,y)=\frac{1}{2\pi\sqrt{m\sigma^4(n-m)}}\exp\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{m\sigma^2(n-m)}\left[n(x-m\mu)^2-2m(x-m\mu)(y-n\mu)+m(y-n\mu)^2\right]\right)$$

27. 设随机变量 X 与 Y 独立同分布, $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, α, β 是两个实数 (全不为 0).

(1) 求 $\alpha X + \beta Y$ 与 $\alpha X - \beta Y$ 的相关系数和联合密度;

(2) 证明: $E(\max\{X, Y\}) = \mu + \frac{\sigma}{\sqrt{\pi}}$.

解: (1) 设 $U = \alpha X + \beta Y, \quad V = \alpha X - \beta Y$，期望为

$$E(U) = E(\alpha X + \beta Y) = \alpha E(X) + \beta E(Y) = \alpha\mu + \beta\mu = (\alpha + \beta)\mu$$

$$E(V) = E(\alpha X - \beta Y) = \alpha E(X) - \beta E(Y) = \alpha\mu - \beta\mu = (\alpha - \beta)\mu$$

由于 X 和 Y 独立同分布:

$$\operatorname{Var}(U) = \operatorname{Var}(\alpha X + \beta Y) = \alpha^2 \operatorname{Var}(X) + \beta^2 \operatorname{Var}(Y) = \alpha^2\sigma^2 + \beta^2\sigma^2 = (\alpha^2 + \beta^2)\sigma^2$$

$$\operatorname{Var}(V) = \operatorname{Var}(\alpha X - \beta Y) = \alpha^2 \operatorname{Var}(X) + \beta^2 \operatorname{Var}(Y) = \alpha^2\sigma^2 + \beta^2\sigma^2 = (\alpha^2 + \beta^2)\sigma^2$$

U, V 的协方差为

$$\operatorname{Cov}(U, V) = \operatorname{Cov}(\alpha X + \beta Y, \alpha X - \beta Y) = \alpha^2 \operatorname{Cov}(X, X) - \beta^2 \operatorname{Cov}(Y, Y) = \alpha^2\sigma^2 - \beta^2\sigma^2 = (\alpha^2 - \beta^2)\sigma^2$$

相关系数

$$\rho_{UV} = \frac{\operatorname{Cov}(U, V)}{\sqrt{\operatorname{Var}(U)\operatorname{Var}(V)}} = \frac{(\alpha^2 - \beta^2)\sigma^2}{\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2)\sigma^2(\alpha^2 + \beta^2)\sigma^2}} = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2}$$

由于 X 和 Y 独立同分布且均为正态分布，U 和 V 也是正态分布的线性组合，因此 (U, V) 也是二维正态分布，参数为

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} (\alpha + \beta)\mu \\ (\alpha - \beta)\mu \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} (\alpha^2 + \beta^2)\sigma^2 & (\alpha^2 - \beta^2)\sigma^2 \\ (\alpha^2 - \beta^2)\sigma^2 & (\alpha^2 + \beta^2)\sigma^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\det(\boldsymbol{\Sigma}) = \det \begin{pmatrix} (\alpha^2 + \beta^2)\sigma^2 & (\alpha^2 - \beta^2)\sigma^2 \\ (\alpha^2 - \beta^2)\sigma^2 & (\alpha^2 + \beta^2)\sigma^2 \end{pmatrix} &= ((\alpha^2 + \beta^2)\sigma^2)((\alpha^2 + \beta^2)\sigma^2) - ((\alpha^2 - \beta^2)\sigma^2)^2 \\
&= (\alpha^2 + \beta^2)^2\sigma^4 - (\alpha^2 - \beta^2)^2\sigma^4 = 4\alpha^2\beta^2\sigma^4
\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{\Sigma}^{-1} = \frac{1}{4\alpha^2\beta^2\sigma^4} \begin{pmatrix} (\alpha^2 + \beta^2)\sigma^2 & -(\alpha^2 - \beta^2)\sigma^2 \\ -(\alpha^2 - \beta^2)\sigma^2 & (\alpha^2 + \beta^2)\sigma^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4\alpha^2\beta^2\sigma^2} \begin{pmatrix} \alpha^2 + \beta^2 & -(\alpha^2 - \beta^2) \\ -(\alpha^2 - \beta^2) & \alpha^2 + \beta^2 \end{pmatrix}$$

代入二维正态分布的联合密度函数:

$$\begin{gathered}
f_{U,V}(u, v) = \frac{1}{4\pi\alpha\beta\sigma^2} \exp\left(-\frac{1}{8\alpha^2\beta^2\sigma^2} \big[(\alpha^2 + \beta^2)(u - (\alpha + \beta)\mu)^2 \right. \\
\left. -2(\alpha^2 - \beta^2)(u - (\alpha + \beta)\mu)(v - (\alpha - \beta)\mu) + (\alpha^2 + \beta^2)(v - (\alpha - \beta)\mu)^2 \big] \right)
\end{gathered}$$

(2) 令 $X_1=\frac{X-\mu}{\sigma}$,$Y_1=\frac{Y-\mu}{\sigma}$，X_1,Y_1 均服从标准正态分布，$\max\{X,Y\}=\mu+\sigma\max\{X_1,Y_1\}$. 注意到

$$\max\{X_1,Y_1\}=\frac{1}{2}(X_1+Y_1+|X_1-Y_1|)$$

由于 $X_1-Y_1\sim N(0,2)$,

$$E|X_1-Y_1|=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|x|\exp\left\{-\frac{x^2}{4}\right\}dx=\frac{2}{\sqrt{\pi}}$$

因此 $E(\max\{X,Y\})=\mu+\frac{\sigma}{\sqrt{\pi}}$.

28. 考虑 $m(m\geqslant 2)$ 个独立试验. 每个试验具有 $r(r\geqslant 2)$ 个可能的试验结果，相应出现的概率分别为 $p_1,\cdots,p_r\left(\sum_{i=1}^{r}p_i=1\right)$. 用 X_i 表示 m 个试验中结果 $i(i=1,\cdots,r)$ 出现的次数. 试求出:

(1) r 维随机向量 $(X_1,\cdots,X_r)$ 的概率分布;

(2) X_i 与 $X_j(i\neq j)$ 的协方差。

解: (1) 设 X_i 是 m 次试验中结果 i 出现的次数，则 r 维随机向量 $(X_1,X_2,\ldots,X_r)$ 的概率分布是一个多项式分布，其分布可以表示为:

$$P(X_1=x_1,X_2=x_2,\ldots,X_r=x_r)=\frac{m!}{x_1!x_2!\cdots x_r!}p_1^{x_1}p_2^{x_2}\cdots p_r^{x_r}$$

(2) 由于 X_i 服从二项分布，其期望和方差为:

$$E(X_i)=mp_i,\quad \mathrm{Var}(X_i)=mp_i(1-p_i),\quad E(X_i^2)=(mp_i)^2+mp_i(1-p_i)$$

对于任意的 X_i,X_j，$X_i+X_j\sim B(m,p_i+p_j)$，我们有:

$$E(X_i+X_j)^2=(m(p_i+p_j))^2+m(p_i+p_j)(1-p_i-p_j)$$

$$\begin{aligned}E(X_iX_j)&=\frac{1}{2}(E(X_i+X_j)^2-E(X_i^2)-E(X_j^2))\\&=\frac{1}{2}[(m(p_i+p_j))^2+m(p_i+p_j)(1-p_i-p_j)-((mp_i)^2+mp_i(1-p_i))-((mp_j)^2+mp_j(1-p_je)]\\&=m^2p_ip_j-mp_ip_j\end{aligned}$$

因此:

$$\mathrm{Cov}(X_i,X_j)=E(X_iX_j)-E(X_i)E(X_j)=m^2p_ip_j-mp_ip_j-(mp_i)(mp_j)=-mp_ip_j$$

29. 设 $X_1,\cdots,X_n(n\geqslant 2)$ 是独立同分布的随机变量列，且 $E[(X_1-E(X_1))^3]=0$ ，试证：随机变量 $\xi=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$ 与 $\eta=\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\xi)^2$ 是不相关的。

证明： 设 $X_1,X_2,\ldots,X_n$ 中每个 X_i 的期望为 μ，方差为 σ^2。由独立同分布：

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(\xi,\eta)&=\operatorname{cov}(\xi-\mu,\eta)=E((\xi-\mu)\eta)\\&=\sum_{i=1}^{n}E((\xi-\mu)(X_i-\mu+\mu-\xi)^2)\\&=\sum_{i=1}^{n}E(\xi-\mu)(X_i-\mu)^2-2E\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)(\xi-\mu)^2\right)+\sum_{i=1}^{n}E(\xi-\mu)^3\\&=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{n}E(X_j-\mu)(X_i-\mu)^2-nE(\xi-\mu)^3\end{aligned}$$

其中对于 $\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\frac{1}{n}E(X_j-\mu)(X_i-\mu)^2$，在 $i=j$ 时 $E(X_i-\mu)^3=0$，在 $i\neq j$ 时 $E(X_j-\mu)(X_i-\mu)^2=E(X_j-\mu)E(X_i-\mu)^2=0$，因此 $\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\frac{1}{n}E(X_j-\mu)(X_i-\mu)^2=0$。

对于 $nE(\xi-\mu)^3=\frac{1}{n^2}E\left(\sum_{i=1}^n(X_i-\mu)\right)^3$，展开后形如 $E(X_i-\mu)^3$ 项期望为 0，形如 $E(X_i-\mu)^2(X_j-\mu)$ 和 $E(X_i-\mu)(X_j-\mu)(X_k-\mu)$ 项由独立性，期望也为 0，因此 $nE(\xi-\mu)^3=0$.

因此协方差

$$\operatorname{cov}(\xi,\eta)=0$$

30. 若 X 的分布密度是偶函数，且 $E(X^2)$ 存在，试证：$|X|$ 与 X 不相关，但它们不相互独立. 若 $X_1,\cdots,X_n(n\geqslant 2)$ 相互独立, $\operatorname{var}(X_i)=\sigma_i^2(i=1,\cdots,n)$, 试找“权”$a_1,\cdots,a_n$ $\left(a_i\geqslant 0,\sum\limits_{i=1}^{n}a_i=1\right)$, 使得 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_iX_i$ 的方差最小。

解： 由于 $f(x)$ 是偶函数，X 的期望 $E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)\,dx=0$，

$$E(|X|X)=\int_{-\infty}^{\infty}|x|xf(x)\,dx=\int_{-\infty}^{0}(-x)xf(x)\,dx+\int_{0}^{\infty}xxf(x)\,dx=0$$

$$\operatorname{Cov}(|X|,X)=E(|X|X)-E(|X|)E(X)=0-0=0$$

因此，$|X|$ 和 X 不相关。

考虑 X 的具体分布，例如 $X\sim N(0,1)$。在这种情况下，$|X|$ 的分布为半正态分布。显然，$P(|X|=x,X=-x)=0$，而 $P(|X|=x)P(X=-x)>0$，这说明 $|X|$ 和 X 不独立。

因此，$|X|$ 和 X 不相关但不独立。

考虑线性组合 $Y=\sum_{i=1}^{n}a_iX_i$，其方差为：

$$\mathrm{Var}(Y)=\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n}a_iX_i\right)=\sum_{i=1}^{n}a_i^2\,\mathrm{Var}(X_i)=\sum_{i=1}^{n}a_i^2\sigma_i^2$$

其中，若有方差 $\sigma_{i_0}^2=0$，则由约束条件 $\sum_{i=1}^{n}a_i=1$ 知，应取 $a_{i_0}=1,a_i=0(i\neq i_0)$。

若所有方差 $\sigma_i^2>0$，则为了使 $\mathrm{Var}(Y)$ 最小，我们需要最小化 $\sum_{i=1}^{n}a_i^2\sigma_i^2$。这是一个带约束的优化问题，可以使用拉格朗日乘数法解决。定义拉格朗日函数：

$$L(a_1,a_2,\ldots,a_n,\lambda)=\sum_{i=1}^{n}a_i^2\sigma_i^2+\lambda\left(1-\sum_{i=1}^{n}a_i\right)$$

对 a_i 求导并令导数为零：

$$\frac{\partial L}{\partial a_i}=2a_i\sigma_i^2-\lambda=0\implies a_i=\frac{\lambda}{2\sigma_i^2}$$

利用 $\sum_{i=1}^{n}a_i=1$：

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda}{2\sigma_i^2}=1\implies\lambda\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2\sigma_i^2}=1\implies\lambda=\frac{2}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sigma_i^2}}$$

代入 λ 得到最优权重：

$$a_i=\frac{1}{\sigma_i^2\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{\sigma_j^2}}$$

31. 若 X 与 Y 都是只取两个值的随机变量，试证明：若 X 与 Y 不相关，则 X 与 Y 相互独立。

证明: 不妨设 X,Y 分别取 x_1,x_2 和 y_1,y_2，$P(X=x_1)=q_1$，$P(X=x_2)=1-q_1$；$P(Y=y_1)=q_2$，$P(Y=y_2)=1-q_2$；$P(X=x_1,Y=y_1)=p_1$，$P(X=x_1,Y=y_2)=p_2$，$P(X=x_2,Y=y_1)=p_3$，$P(X=x_2,Y=y_2)=p_4$.

由于不相关，

$$\mathrm{cov}(X,Y)=x_1y_1p_1+x_1y_2p_2+x_2y_1p_3+x_2y_2p_4-(x_1q_1+x_2(1-q_1))(y_1q_2+y_2(1-q_2))=0$$

其中 $q_1=p_1+p_2,q_2=p_1+p_3,p_1+p_2+p_3+p_4=1$

假设 q_1,q_2 已知，求解方程组得

$$p_1=q_1q_2,\quad p_2=q_1(1-q_2),\quad p_3=(1-q_1)q_2,\quad p_4=(1-q_1)(1-q_2).$$

故 X 与 Y 相互独立。

33. 设函数

$$\delta(x)=\begin{cases}1, & x\geqslant 0,\\ 0, & x<0,\end{cases}$$

试证: 随机变量 X 与 Y 相互独立的充分必要条件是

$$E(\delta(a-X)\delta(b-Y))=E(\delta(a-X))E(\delta(b-Y))\quad(\text{一切}a,b).$$

证明： 充分性:

假设 X 和 Y 相互独立。

$$E(\delta(a-X))=P(a-X\geqslant 0)=P(X\leq a)$$

$$E(\delta(b-Y))=P(b-Y\geqslant 0)=P(Y\leq b)$$

由于 X 和 Y 相互独立，我们有:

$$E(\delta(a-X)\delta(b-Y))=P((a-X\geqslant 0)\cap(b-Y\geqslant 0))=P(X\leq a,Y\leq b)$$

$$P(X\leq a,Y\leq b)=P(X\leq a)P(Y\leq b)=E(\delta(a-X))E(\delta(b-Y))$$

因此，如果 X 和 Y 相互独立，则 $E(\delta(a-X)\delta(b-Y))=E(\delta(a-X))E(\delta(b-Y))$ 对于所有 a 和 b 成立。

必要性:

假设 $E(\delta(a-X)\delta(b-Y))=E(\delta(a-X))E(\delta(b-Y))$ 对于所有 a 和 b 成立。

设 $A=\{X\leq a\}$ 和 $B=\{Y\leq b\}$。

$$P(A\cap B)=P(X\leq a,Y\leq b)=E(\delta(a-X)\delta(b-Y))$$

根据假设 $E(\delta(a-X)\delta(b-Y))=E(\delta(a-X))E(\delta(b-Y))$，我们有:

$$P(X\leq a,Y\leq b)=P(X\leq a)P(Y\leq b)$$

对于任意的 a 和 b，我们都有 $P(X\leq a,Y\leq b)=P(X\leq a)P(Y\leq b)$。这意味着对于任意的 A 和 B，有 $P(A\cap B)=P(A)P(B)$。因此，X 和 Y 相互独立。

34. 一辆交通车送 25 名乘客到 7 个站, 假设每一个乘客等可能地在任一站下车, 且他们行动独立, 交通车只在有人下车时才停站, 问: 该交通车停站的期望次数是多少?

解: 设 X_i 是一个指示变量, 表示第 i 站是否有乘客下车 (如果有乘客下车则 $X_i=1$, 否则 $X_i=0$)。交通车停站的总次数 X 可以表示为 $X=X_1+X_2+\cdots+X_7$, 期望为

$$E[X]=E[X_1+X_2+\cdots+X_7]=E[X_1]+E[X_2]+\cdots+E[X_7]$$

第 i 站至少有一名乘客下车的概率为:

$$P(\text{第}i\text{ 站至少有一名乘客下车}) = 1 - \left(\frac{6}{7}\right)^{25}$$

因此,

$$E[X_i] = 1 - \left(\frac{6}{7}\right)^{25}$$

$$E[X] = 7 \times \left(1 - \left(\frac{6}{7}\right)^{25}\right)$$

35. 50 个人排队作肺部透视, 假设他们中有 4 个阳性患者, 问: 在出现第一个阳性患者之前, 阴性反应者的人数平均是多少?

解: 设 X 为第一位阳性患者出现的位置，则

$$P(X \geqslant k) = \frac{C_{51-k}^4}{C_{50}^4}$$

因此所求平均值为

$$E(X) - 1 = \sum_{k=1}^{47} P(X \geqslant k) - 1 = \sum_{k=1}^{47} \frac{C_{51-k}^4}{C_{50}^4} - 1 = \frac{C_{51}^5}{C_{50}^4} - 1 = \frac{46}{5}$$

38. 若对于随机变量 $X, E(e^{aX})$ 存在 (a 是正常数), 试证:

$$P(X \geqslant \varepsilon) \leqslant e^{-a\varepsilon} E(e^{aX}) \quad (\text{一切 } \varepsilon > 0).$$

证明: 设随机变量 $Y = e^{aX}$，其中 $a > 0$。显然，Y 是非负的。

由马尔可夫不等式，得:

$$P(X \geqslant \varepsilon) = P(Y \geqslant e^{a\varepsilon}) \leqslant \frac{E(Y)}{e^{a\varepsilon}}.$$

因此:

$$P(X \geqslant \varepsilon) \leqslant e^{-a\varepsilon} E(e^{aX}).$$

39. 设随机变量 X 与 Y 相互独立, $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$, 已知 $\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2$, 试求 $P(X > Y)$.

解: 设 $Z = X - Y$。由于 X 和 Y 是相互独立的, Z 也是一个正态随机变量, $Z \sim N(\mu_1 - \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$。

令 $W=\frac{Z-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}$，则 W 服从标准正态分布 $N(0,1)$。因此：

$$P(Z>0)=P\left(W>\frac{\mu_2-\mu_1}{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}\right)$$

设 $d=\frac{\mu_1-\mu_2}{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}$，则：

$$P(Z>0)=P(W>-d)=1-P(W\leq -d)=P(W\leq d)=\Phi\left(\frac{\mu_1-\mu_2}{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}\right)$$

其中第三个等号利用了标准正态分布的对称性。因此

$$P(X>Y)=\Phi\left(\frac{\mu_1-\mu_2}{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}\right)$$

40. 设二维随机向量 (X,Y) 的概率分布如图1所示。

X \ Y	0	1	2	3	4
0	0.08	0.07	0.06	0.01	0.01
1	0.06	0.10	0.12	0.05	0.02
2	0.05	0.06	0.09	0.04	0.03
3	0.02	0.03	0.03	0.03	0.04

图 *1:* (X,Y) 的概率分布

求出下列概率: $P(X=2),P(Y\geqslant 2),P(X=Y),P(X\leqslant 2,Y\leqslant 2),P(X>Y)$.

解:

$$P(X=2)=\sum_{i=0}^{4}P(X=2,Y=i)=0.27$$

$$P(Y\geqslant 2)=\sum_{i=2}^{4}\sum_{j=0}^{3}P(X=j,Y=i)=0.69$$

$$P(X=Y)=\sum_{i=0}^{3}P(X=i,Y=i)=0.3$$

$$P(X\leqslant 2,Y\leqslant 2)=\sum_{i=0}^{2}\sum_{j=0}^{2}P(X=i,Y=j)=0.69$$

$$P(X>Y)=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=0}^{i-1}P(X=i,Y=j)=0.25$$

43. 设随机变量 X 与 Y 独立同分布,共同分布是几何分布,即 $P(X=k)=pq^k \quad (k=0,1,\cdots;q=1-p)$, 试证:(1) $\min\{X,Y\}$ 与 $X-Y$ 相互独立;(2) $Z=\min\{X,Y\}$ 与 $W=\max\{X,Y\}-Z$ 相互独立。

证明: (1)

$$\begin{aligned}
P(\min\{X,Y\}=k) &= P(X=k,Y\geqslant k)+P(Y=k,X\geqslant k)-P(X=k,Y=k)\\
&= 2pq^k\sum_{j=k}^{\infty}pq^j-(pq^k)^2\\
&= 2pq^k\cdot\frac{pq^k}{p}-(pq^k)^2=pq^{2k}(2-p)
\end{aligned}$$

考虑 $X-Y$ 的概率分布:

$$P(X-Y=n)=\begin{cases}\sum_{k=0}^{\infty}P(X=k+n,Y=k)=p^2q^n\sum_{k=0}^{\infty}q^{2k}=p^2q^n\cdot\frac{1}{1-q^2}=\frac{p^2q^n}{1-q^2}, & n>0,\\ \sum_{k=-n}^{\infty}P(X=k+n,Y=k)=p^2q^n\sum_{k=-n}^{\infty}q^{2k}=p^2q^n\cdot\frac{q^{-2n}}{1-q^2}=\frac{p^2q^{-n}}{1-q^2}, & n\leqslant 0,\end{cases}$$

计算联合概率:

$$P(\min\{X,Y\}=k,X-Y=n)=\begin{cases}P(X=k+n,Y=k)=p^2q^{2k+n}, & n>0,\\ P(X=k,Y=k-n)=p^2q^{2k-n}, & n\leqslant 0,\end{cases}$$

因此,

$$P(\min\{X,Y\}=k)P(X-Y=n)=P(\min\{X,Y\}=k,X-Y=n).$$

$\min\{X,Y\}$ 与 $X-Y$ 相互独立。

(2) 考虑 X 和 Y 的所有可能组合,计算 W 的概率分布

$$\begin{aligned}
P(W=n) &= \sum_{k=0}^{\infty}P(X=k+n,Y=k)+P(X=k,Y=k+n)\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}(p^2q^{2k+n}+p^2q^{2k+n})=2p^2q^n\sum_{k=0}^{\infty}q^{2k}=2p^2q^n\cdot\frac{1}{1-q^2}=\frac{2p^2q^n}{1-q^2}.
\end{aligned}$$

联合概率:

$$P(Z=k,W=n)=P(X=k+n,Y=k)+P(X=k,Y=k+n)=2p^2q^{2k+n}.$$

另一方面:

$$P(Z=k)P(W=n)=q^{2k}(2-p^2)\cdot\frac{2p^2q^n}{1-q^2}=2p^2q^{2k+n}.$$

因此，Z 和 W 相互独立。

44. 设 a 是区间 $[0,1]$ 中的一个定点，随机变量 X 服从 $[0,1]$ 上的均匀分布，$Y=|X-a|$。问：a 取何值时，X 与 Y 不相关。

解：

$$E(X)=\int_0^1 x\,dx=\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1=\frac{1}{2}.$$

$$E(Y)=E(|X-a|)=\int_0^1|x-a|\,dx=\int_0^a(a-x)\,dx+\int_a^1(x-a)\,dx=\frac{a^2}{2}+\frac{1}{2}-a+\frac{a^2}{2}=a^2-a+\frac{1}{2}.$$

$$E(XY)=E(X|X-a|)=\int_0^1 x|x-a|\,dx=\int_0^a x(a-x)\,dx+\int_a^1 x(x-a)\,dx=\frac{a^3}{6}+\frac{1}{3}-\frac{a}{2}+\frac{a^3}{6}=\frac{a^3}{3}+\frac{1}{3}-\frac{a}{2}.$$

协方差为

$$\operatorname{Cov}(X,Y)=\left(\frac{a^3}{3}+\frac{1}{3}-\frac{a}{2}\right)-\left(\frac{1}{2}\right)\left(a^2-a+\frac{1}{2}\right)=\frac{a^3}{3}-\frac{a^2}{2}+\frac{1}{12}.$$

为了使 X 和 Y 不相关，需要:

$$\frac{a^3}{3}-\frac{a^2}{2}+\frac{1}{12}=0.$$

解方程可得 $a=\frac{1}{2}$ 是方程的一个根。

45. 设二维随机向量 (X,Y) 有联合密度 $p(x,y)=\begin{cases}3x, & 0<x<1 \text{ 且} 0<y<x,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$ 试求条件分布密度 $p_{Y|X}(y|x)$ 和 $p_{X|Y}(x|y)$。

解：

$$p_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}p(x,y)\,dy=\int_0^x 3x\,dy=3x\int_0^x 1\,dy=3x\cdot x=3x^2\quad(0<x<1).$$

$$p_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}p(x,y)\,dx=\int_y^1 3x\,dx=3\int_y^1 x\,dx=3\left(\frac{1}{2}-\frac{y^2}{2}\right)=\frac{3}{2}(1-y^2)\quad(0<y<1).$$

条件分布密度为

$$p_{Y|X}(y|x)=\frac{p(x,y)}{p_X(x)}=\frac{3x}{3x^2}=\frac{1}{x}\quad(0<y<x).$$

$$p_{X|Y}(x|y)=\frac{p(x,y)}{p_Y(y)}=\frac{3x}{\frac{3}{2}(1-y^2)}=\frac{2x}{1-y^2}\quad(y<x<1).$$

46. 已知二维随机向量 (X,Y) 的联合密度为

$$p(x,y)=\begin{cases}\dfrac{21}{4}x^2y, & x^2\leqslant y\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

求条件概率 $P(Y\geqslant 0.75 \mid X=0.5)$.

解:

$$p_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x,y)\,dy = \int_{x^2}^{1} \frac{21}{4}x^2 y\,dy = \frac{21}{4}x^2 \cdot \frac{1-x^4}{2} = \frac{21}{8}x^2(1-x^4).$$

$$p_{Y|X}(y|x) = \frac{p(x,y)}{p_X(x)} = \frac{\frac{21}{4}x^2 y}{\frac{21}{8}x^2(1-x^4)} = \frac{2y}{1-x^4} \quad (x^2 \le y \le 1).$$

因此,

$$P(Y \geqslant 0.75 \mid X = 0.5) = \int_{0.75}^{1} p_{Y|X}(y \mid 0.5)\,dy.$$

代入 $x = 0.5$:

$$P(Y \geqslant 0.75 \mid X = 0.5) = \int_{0.75}^{1} \frac{32y}{15}\,dy = \frac{32}{15}\left(\frac{1}{2} - \frac{0.75^2}{2}\right) = \frac{7}{15}.$$

47. 设二维随机向量 (X,Y) 有联合密度

$$p(x,y) = \begin{cases} 24(1-x)y, & 0 < y < x < 1, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

当 $0 < y < 1$ 时, 试求条件期望 $E(X \mid Y = y)$.

解:

$$p_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x,y)\,dx = \int_{y}^{1} 24(1-x)y\,dx = 24y\left(\left(1-\frac{1}{2}\right) - \left(y - \frac{y^2}{2}\right)\right) = 12y(1-y)^2.$$

$$p_{X|Y}(x|y) = \frac{p(x,y)}{p_Y(y)} = \frac{24(1-x)y}{12y(1-y)^2} = \frac{2(1-x)}{(1-y)^2} \quad (y < x < 1).$$

条件期望为

$$\begin{aligned} E(X \mid Y = y) &= \int_{-\infty}^{\infty} x\,p_{X|Y}(x|y)\,dx = \int_{y}^{1} x \cdot \frac{2(1-x)}{(1-y)^2}\,dx \\ &= \frac{2}{(1-y)^2}\int_{y}^{1} x(1-x)\,dx = \frac{2}{(1-y)^2} \cdot \frac{1-3y^2+2y^3}{6} = \frac{2y+1}{3}.(0<y<1) \end{aligned}$$

48. 设随机变量 X 与 Y 独立同分布, 都服从参数为 λ 的指数分布, 令

$$Z = \begin{cases} 3X+1, & X \geqslant Y, \\ 6Y, & X < Y, \end{cases}$$

试求 $E(Z)$.

解:

$$E(Z) = E(3X+1)I(X \geqslant Y) + E(6Y)I(X < Y)$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{x \geqslant y > 0} (3x+1)\lambda^2 e^{-\lambda x} e^{-\lambda y} dxdy + \int_{0<x<y} 6y\lambda^2 e^{-\lambda x} e^{-\lambda y} dxdy \\
&= \int_0^{+\infty} (3x+1)\lambda^2 e^{-\lambda x} \int_0^x e^{-\lambda y} dydx + \int_0^{+\infty} 6y\lambda^2 e^{-\lambda y} \int_0^y e^{-\lambda x} dxdy \\
&= \int_0^{+\infty} (3x+1)\lambda e^{-\lambda x}(1-e^{-\lambda x})dx + \int_0^{+\infty} 6y\lambda e^{-\lambda y}(1-e^{-\lambda y})dy \\
&= \int_0^{+\infty} (9x+1)\lambda e^{-\lambda x}(1-e^{-\lambda x})dx \\
&= \int_0^{+\infty} 9\lambda x e^{-\lambda x} dx + \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx - \int_0^{+\infty} 9\lambda x e^{-2\lambda x} dx - \int_0^{+\infty} \lambda e^{-2\lambda x} dx \\
&= \frac{9}{\lambda} + 1 - \frac{9}{4\lambda} - \frac{1}{2} = \frac{27}{4\lambda} + \frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

49. 设随机变量 $X_1, \ldots, X_n (n \geqslant 2)$ 都是随机变量，它们的期望、方差都存在，试证协方差矩阵：

$$
\Sigma = (\sigma_{ij})_{n\times n}, \quad \sigma_{ij} \triangleq \mathrm{cov}(X_i, X_j)
$$

是非负定的，即对一切实数 $t_1, \ldots, t_n$，均有

$$
\sum_{i,j} \sigma_{ij} t_i t_j \geqslant 0.
$$

证明:

$$
\begin{aligned}
\sum_{i,j} \sigma_{ij} t_i t_j &= \sum_{i,j} (E(X_iX_j) - E(X_i)E(X_j))t_it_j \\
&= \sum_{i,j} (E(t_iX_it_jX_j) - E(t_iX_i)E(t_jX_j)) \\
&= E(\sum_{i,j} t_iX_it_jX_j) - [E(\sum_i t_iX_i)]^2 \\
&= E((\sum_i t_iX_i)^2) - [E(\sum_i t_iX_i)]^2 \\
&= \mathrm{var}(\sum_i t_iX_i) \geqslant 0
\end{aligned}
$$

51. 设随机变量 X 与 U 相互独立,X 的分布密度是 $p_x(x)$,U 服从区间 $[0,1]$ 上的均匀分布, 又函数 $q(x)$ 满足:

1. $q(x) \geq 0$, 且 $\int_{-\infty}^{+\infty} q(x)dx = 1$;

2. 存在 $a>0$, 使得 $p_x(x)/q(x)\geq a$ (当 $q(x)>0$ 时);

令 $r(x)=a\frac{q(x)}{p_x(x)}$ (当 $p_x(x)=0$ 时, 规定 $r(x)=0$),

$M=\{U\leq r(X)\}$,

试证明: $P(X\leq z|M)=\int_{-\infty}^{z}q(x)dx$,

即在 M 发生的条件下 X 的条件分布密度恰好是 $q(x)$.

证明:

$$\begin{aligned}
P(X\leq z|M) &= \frac{P(\{x\leq z, U\leq r(x)\})}{P(\{U\leq r(x)\})} \\
&= \frac{\int_{-\infty}^{+\infty}P(X\leq z, U\leq r(X)|X=x)p(x)dx}{\int_{-\infty}^{+\infty}P(U\leq r(X)|X=x)p(x)dx} \\
&= \frac{\int_{-\infty}^{z}P(U\leq r(x))p(x)dx}{\int_{-\infty}^{+\infty}P(U\leq r(x))p(x)dx} \\
&= \frac{\int_{-\infty}^{z}r(x)p(x)dx}{\int_{-\infty}^{+\infty}r(x)p(x)dx} \\
&= \frac{\int_{-\infty}^{z}aq(x)dx}{\int_{-\infty}^{+\infty}aq(x)dx} \\
&= \int_{-\infty}^{z}q(x)dx
\end{aligned}$$

多元正态分布习题参考答案

1. 随机向量 $(X,Y)\sim N\left(\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}4&3\\3&9\end{bmatrix}\right)$, 求

(1) X 的边际密度函数 $f_X(x)$;

(2) $E(Y|X=x)$;

(3) 相关系数 ρ_{XY}.

解: (1) 边际密度函数:

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_X^2}}\exp\left(-\frac{(x-\mu_X)^2}{2\sigma_X^2}\right)=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(x-1)^2}{8}\right).$$

(2)(3) 相关系数

$$\rho_{XY}=\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y}=\frac{3}{2\cdot 3}=0.5.$$

由协方差矩阵 Σ ，$\sigma_X^2=4$ ，$\sigma_Y^2=9$，条件期望

$$E(Y|X=x)=\mu_Y+\rho\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x-\mu_X)=2+\rho\frac{3}{2}(x-1)=\frac{3}{4}x+\frac{5}{4}.$$

2. 设随机向量 $\mathbf{X}\sim N\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&2\\2&5\end{bmatrix}\right)$，$\mathbf{Y}\sim N\left(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\right)$，$X,Y$ 的密度函数分别为 $p(x),q(x)(x\in\mathbb{R}^2)$，求期望 $E_X\log\frac{p(X)}{q(X)}$.

解： 期望值 $E_{\mathbf{X}}\log\frac{p(\mathbf{X})}{q(\mathbf{X})}$ 可以通过积分计算：

$$E_{\mathbf{X}}\log\frac{p(\mathbf{X})}{q(\mathbf{X})}=\int p(\mathbf{x})\left[\log|\Sigma_{\mathbf{Y}}|^{1/2}-\log|\Sigma_{\mathbf{X}}|^{1/2}-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mu_{\mathbf{X}})^\top\Sigma_{\mathbf{X}}^{-1}(\mathbf{x}-\mu_{\mathbf{X}})+\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mu_{\mathbf{Y}})^\top\Sigma_{\mathbf{Y}}^{-1}(\mathbf{x}-\mu_{\mathbf{Y}})\right]d\mathbf{x}$$

其中，$\Sigma_{\mathbf{X}}^{-1}=\begin{bmatrix}5&-2\\-2&1\end{bmatrix},\Sigma_{\mathbf{Y}}^{-1}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$,

$$\begin{aligned}\int p(\mathbf{x})(\mathbf{x}-\mu_{\mathbf{X}})^\top\Sigma_{\mathbf{X}}^{-1}(\mathbf{x}-\mu_{\mathbf{X}})d\mathbf{x}&=E_{\mathbf{X}}\begin{bmatrix}x_1-1\\x_2\end{bmatrix}^\top\begin{bmatrix}5&-2\\-2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1-1\\x_2\end{bmatrix}\\&=5E_{\mathbf{X}}((x_1-1)^2)-4E_{\mathbf{X}}((x_1-1)x_2)+E_{\mathbf{X}}(x_2^2)=2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int p(\mathbf{x})(\mathbf{x}-\mu_{\mathbf{Y}})^\top\Sigma_{\mathbf{Y}}^{-1}(\mathbf{x}-\mu_{\mathbf{Y}})d\mathbf{x}&=E_{\mathbf{X}}\begin{bmatrix}x_1\\x_2-1\end{bmatrix}^\top\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2-1\end{bmatrix}\\&=E_{\mathbf{X}}(x_1^2)+E_{\mathbf{X}}((x_2-1)^2)=8\end{aligned}$$

将上述结果代入并计算：

$$E_{\mathbf{X}}\log\frac{p(\mathbf{X})}{q(\mathbf{X})}=0-\frac{1}{2}\cdot 2+\frac{1}{2}\cdot 8=3$$

3. 若随机向量 $\begin{bmatrix}\xi\\\eta\end{bmatrix}\sim N\left(\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&\rho\\\rho&1\end{bmatrix}\right)$，试求 $P(\xi\geqslant a,\eta\geqslant b)$。

解： 设 $X=\xi-a$，$Y=\eta-b$，则 $\begin{bmatrix}X\\Y\end{bmatrix}\sim N\left(\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&\rho\\\rho&1\end{bmatrix}\right)$,

$$P(\xi\geqslant a,\eta\geqslant b)=\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(x^2+y^2-2\rho xy)\right\}dxdy$$

将协方差矩阵的逆矩阵对角化 $\mathbf{\Sigma}^{-1} = \mathbf{U}^\top \mathbf{D}\mathbf{U}$, 则 $\mathbf{U} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ 为正交阵, $\mathbf{D} = \operatorname{diag}\left(\frac{1}{1+\rho}, \frac{1}{1-\rho}\right)$.

作变量替换 $\begin{bmatrix} X' \\ Y' \end{bmatrix} = \mathbf{U}\ \operatorname{diag}\ \left(\sqrt{1+\rho}, \sqrt{1-\rho}\right)\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$, 积分区域变为

$$\Omega' = \{(x', y') : y' \geqslant \sqrt{\frac{1-\rho}{1+\rho}} x', y' \geqslant -\sqrt{\frac{1-\rho}{1+\rho}} x'\},$$

该区域如图2所示。

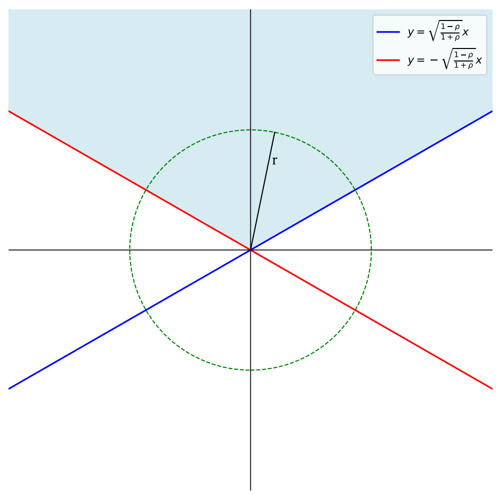

图 2: 区域 Ω' 示意图

雅可比矩阵

$$J = \left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(x', y')}\right| = \sqrt{1-\rho^2}$$

因此

$$\begin{aligned} P(\xi \geqslant a, \eta \geqslant b) &= \iint_{\Omega'} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x'^2 + y'^2)\right) \sqrt{1-\rho^2}\, \mathrm{d}x' \mathrm{d}y' \\ &= \int_{\arctan\sqrt{\frac{1-\rho}{1+\rho}}}^{\pi - \arctan\sqrt{\frac{1-\rho}{1+\rho}}} \mathrm{d}\theta \int_0^{+\infty} \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{1}{2}r^2\right) r\, \mathrm{d}r \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \arctan \sqrt{\frac{1-\rho}{1+\rho}}.$$

4. 已知 $X \sim N(\mathbf{0}, I_2)$，向量 $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ 满足 $||\mathbf{u}|| = ||\mathbf{v}|| = 1$，求：

(1) $\text{cov}(\langle \mathbf{u}, \mathbf{x} \rangle, \langle \mathbf{v}, \mathbf{x} \rangle)$；

(2)（选做）$E\text{sign}(\langle \mathbf{u}, \mathbf{x} \rangle)\text{sign}(\langle \mathbf{v}, \mathbf{x} \rangle)$，这里符号函数满足 $\text{sign}\ (X) = \begin{cases} 1, & x \geqslant 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$.

解：(1) $E[\langle \mathbf{u}, \mathbf{x} \rangle] = E[\mathbf{u}^T \mathbf{x}] = \mathbf{u}^T E[\mathbf{x}] = \mathbf{u}^T \mathbf{0} = 0$，同理 $E[\langle \mathbf{v}, \mathbf{x} \rangle] = 0$。

所以，

$$\text{cov}(\langle \mathbf{u}, \mathbf{x} \rangle, \langle \mathbf{v}, \mathbf{x} \rangle) = E[\langle \mathbf{u}, \mathbf{x} \rangle \langle \mathbf{v}, \mathbf{x} \rangle] = E[(\mathbf{u}^T \mathbf{x})(\mathbf{v}^T \mathbf{x})] = E[\mathbf{u}^T (\mathbf{x}\mathbf{x}^T) \mathbf{v}]$$

由于 $\mathbf{x} \sim N(\mathbf{0}, I_2)$，我们有 $E[\mathbf{x}\mathbf{x}^T] = I_2$，因此：

$$\text{cov}(\langle \mathbf{u}, \mathbf{x} \rangle, \langle \mathbf{v}, \mathbf{x} \rangle) = \mathbf{u}^T I_2 \mathbf{v} = \mathbf{u}^T \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$$

(2) 设 $\xi = \langle \mathbf{u}, \mathbf{x} \rangle$，$\eta = \langle \mathbf{v}, \mathbf{x} \rangle$，则方差 $\text{var}(\xi) = \mathbf{u}^\top I_2 \mathbf{u} = ||\mathbf{u}|| = 1$，$\text{var}(\eta) = \mathbf{v}^\top I_2 \mathbf{v} = ||\mathbf{v}|| = 1$，相关系数 $\rho = \text{cov}(\langle \mathbf{u}, \mathbf{x} \rangle, \langle \mathbf{v}, \mathbf{x} \rangle) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$，因此

$$\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} \sim N\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix} \right)$$

利用第 3 题的结果，有

$$P(\xi \geqslant 0, \eta \geqslant 0) = P(\xi < 0, \eta < 0) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \arctan \sqrt{\frac{1-\rho}{1+\rho}}$$

类似的，

$$P(\xi < 0, \eta \geqslant 0) = P(\xi \geqslant 0, \eta < 0) = \frac{1}{\pi} \arctan \sqrt{\frac{1-\rho}{1+\rho}}$$

因此

$$\begin{aligned} E\text{sign}(\langle \mathbf{u}, \mathbf{x} \rangle)\text{sign}(\langle \mathbf{v}, \mathbf{x} \rangle) &= P(\xi \geqslant 0, \eta \geqslant 0) + P(\xi < 0, \eta < 0) - P(\xi < 0, \eta \geqslant 0) - P(\xi \geqslant 0, \eta < 0) \\ &= 1 - \frac{4}{\pi} \arctan \sqrt{\frac{1-\rho}{1+\rho}} = 1 - \frac{4}{\pi} \arctan \sqrt{\frac{1-\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{1+\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}} \end{aligned}$$

其中若 $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = -1$，投影方向完全相反，$E\text{sign}(\langle \mathbf{u}, \mathbf{x} \rangle)\text{sign}(\langle \mathbf{v}, \mathbf{x} \rangle) = -1$.

5（选做）. 随机变量 $\xi_1, \cdots, \xi_n \sim N(0, \sigma^2)$，i.i.d.，矩阵 $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 且是对称矩阵，记 $\xi = (\xi_1, \cdots, \xi_n)^\top$，求 $\text{cov}(\xi^\top \mathbf{A} \xi, \xi^\top \mathbf{B} \xi)$.

解：由独立同分布条件，$E(\xi_i\xi_j)=\delta_{ij}$，这里 δ_{ij} 当 $i=j$ 时为 1，否则为 0。$\xi^\top\mathbf{A}\xi$ 和 $\xi^\top\mathbf{B}\xi$ 的期望为：

$$E[\xi^\top\mathbf{A}\xi]=\sum_{i,j}A_{ij}E(\xi_i\xi_j)=\sigma^2\operatorname{tr}(\mathbf{A}),\quad E[\xi^\top\mathbf{B}\xi]=\sum_{i,j}B_{ij}E(\xi_i\xi_j)=\sigma^2\operatorname{tr}(\mathbf{B})$$

$$E(\xi^\top\mathbf{A}\xi\xi^\top\mathbf{B}\xi)=E\operatorname{tr}(\xi^\top\mathbf{A}\xi\xi^\top\mathbf{B}\xi)=\operatorname{tr}(\mathbf{A}E(\xi\xi^\top\mathbf{B}\xi\xi^\top))$$

对称矩阵 A 对角化 $\mathbf{A}=\mathbf{U}^\top\mathbf{D}\mathbf{U}$，其中对角阵 $\mathbf{D}=\operatorname{diag}(d_1,\cdots,d_n)$，设 $\eta=\frac{\mathbf{U}\xi}{\sigma}$，

$$E(\xi\xi^\top\mathbf{B}\xi\xi^\top)=\sigma^4E(\mathbf{U}^\top\eta\eta^\top\mathbf{D}\eta\eta^\top\mathbf{U})=\sigma^4\mathbf{U}^\top E\left(\sum_{i=1}^n d_i\eta_i^2\cdot\eta\eta^\top\right)\mathbf{U}$$

η 为标准正态向量，$E\left(\sum_{i=1}^n d_i\eta_i^2\cdot\eta\eta^\top\right)$ 的非对角元期望为 0，利用 $E(\eta_i^2)=1,E(\eta_i^4)=3$，我们有

$$E\left(\sum_{i=1}^n d_i\eta_i^2\cdot\eta\eta^\top\right)=\sum_{i=1}^n d_i\cdot\mathbf{I}+2\mathbf{D}$$

又由于 $\operatorname{tr}(\mathbf{B})=\operatorname{tr}(\mathbf{U}^\top\mathbf{D}\mathbf{U})=\operatorname{tr}(\mathbf{D}\mathbf{U}^\top\mathbf{U})=\operatorname{tr}(\mathbf{D})$，因此

$$E(\xi\xi^\top\mathbf{B}\xi\xi^\top)=\sigma^4\left[\sum_{i=1}^n d_i\cdot\mathbf{I}+2\mathbf{B}\right]=\sigma^4(\operatorname{tr}(\mathbf{B})\mathbf{I}+2\mathbf{B})$$

协方差

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(\xi^\top\mathbf{A}\xi,\xi^\top\mathbf{B}\xi)&=E(\xi^\top\mathbf{A}\xi\xi^\top\mathbf{B}\xi)-E(\xi^\top\mathbf{A}\xi)E(\xi^\top\mathbf{B}\xi)\\&=\sigma^4(\operatorname{tr}(\mathbf{A})\operatorname{tr}(\mathbf{B})+2\operatorname{tr}(\mathbf{AB})-\operatorname{tr}(\mathbf{A})\operatorname{tr}(\mathbf{B}))=2\sigma^4\operatorname{tr}(\mathbf{AB})\end{aligned}$$