近似算法（10 分）

最小顶点覆盖问题：给定图 $G = (V, E)$，G 的顶点覆盖是顶点子集 $S \subseteq V$，使得每条边至少有一个端点属于 S。求 G 的最小的顶点覆盖。

$$\begin{aligned} & \min \sum_{i \in V} x_i \\ s.t. \quad & x_i + x_j \geq 1 \quad \forall e = (i, j) \in E \\ & x_i \in \{0, 1\} \quad \forall i \in V \end{aligned}$$

令 $V = \{1, 2, \cdots, n\}$，$\forall e \in E$，存在 $i, j \in V$，使得 $e = (i, j)$；$\forall i \in V$，定义变量 $x_i \in \{0,1\}$，且 $x_i = 1 \Leftrightarrow i \in S$。

那么顶点覆盖问题其实可以转化为（如右图所示的）整数规划问题。

这个整数规划问题属于 NP 难问题。现在用线性规划来设计近似算法，思路如下：

1. 放松顶点$x_i = 0,1$ 的约束条件，令 x_i 为[0,1]区间任意实数，转化为线性规划问题。
2. 用线性规划算法找到一组 $x_i \in [0,1]$，$i = 1,2,\cdots,n$，使得其和达到最小。
3. 令 $S = \{ i \mid x_i \geq 1/2 \}$。

请证明上述近似算法的近似比为 2。

参考答案：LP(I)≤OPT(I)、A(I)≤2*LP(I)，因此 A(I)≤2*OPT(I)。

随机算法（10 分）

已知输入规模为 n 的问题Π不存在时间复杂度为 O(f(n))的有效的蒙特卡洛型随机算法。证明：问题Π不存在期望运行时间小于等于 f(n)的拉斯维加斯型随机算法。

// 相关知识：非负随机变量 X 相关的概率和期望，满足马尔可夫不等式$\mathbb{P}(X \geq a) \leq \mathbb{E}(X)/a$，其中 $a > 0$。

假设存在一个期望时间复杂度的拉斯维加斯随机算法 A。(1 分)

设计如下算法：令 T = 3f(n)，运行算法 A，当运行时间超过 3f(n) 还没得到答案的时候，就退出直接返回一个任意的解。(设计算法，4 分)

显然这个算法的时间复杂度是 O(f(n))，现在考虑它的错误率。(时间复杂度 1 分)

根据马尔科夫不等式 Pr[e] ≤ Pr[T > 3f(n)] ≤ E[T]/3f(n) ≤ 1/3。(分析错误率，3 分)

因此该算法是蒙特卡洛型随机算法，时间复杂度为 O(f(n))，矛盾。所以不存在期望时间复杂度小于等于 f(n) 的拉斯维加斯型随机算法。(1 分)

支配集问题（随机算法）（15 分）

支配集：给定一个无向图 $G = \langle V, E \rangle$，求图的一个支配集 S，满足 $S \subseteq V$，且 $V - S$ 中的每一个顶点都至少与 S 中的一个顶点相邻。

（1）（8 分）假设图 G 中每个顶点的度数都为 d，现构造如下 BoolDomSet 算法计算图 G 的一个支配集（不需要是最小支配集）:

```
BoolDomSet 算法
输入：无向图 G，循环次数 k
输出：布尔值 isDomSet，顶点子集 S
S ← ∅
for i in 1..k do
    u ←以 1/|V|概率在 V 中选择一个顶点
    S ← S ∪ {u} //  将顶点 u 加入顶点子集 S
end for
if   S 是支配集   then return True, S
                  else return False, S
```

记 $n = |V|$，证明当 $k = 2n\ln n/(d+1)$时，BoolDomSet 算法返回的 isDomSet 为假（即返回的 S 不是支配集）的概率小于 $1/n$。（提示：当 $x \geqslant 1$ 时，$(1-1/x)^x < 1/e$）

参考答案：

对于给定顶点 v，由于其度数为 d，均匀概率随机选择一个顶点，选中 v 或 v 的邻居的概率是(d+1)/n。即 v 未被支配的概率是 1-(d+1)/n。独立地重复 k 次，v 未被支配的概率是(1-(d+1)/n)^k。取 k=2nln(n)/(d+1)，v 未被支配的概率

$$\left(1-\frac{d+1}{n}\right)^{\frac{2n\ln n}{d+1}} = \left(\left(1-\frac{d+1}{n}\right)^{\frac{n}{d+1}}\right)^{2\ln n} < \left(\frac{1}{e}\right)^{2\ln n} = \frac{1}{n^2}$$

对于所有 n 个顶点，根据 Union Bound，存在未被支配顶点的概率小于 1/n。

（2）（7 分）仍假设图中每个点的度数都为 d，将 BoolDomSet 算法修改为一个拉斯维加斯型的随机算法 RanDomSet。

```
RanDomSet 算法
输入：无向图 G
输出：支配集 S
do
    (isDomSet, S) ← BoolDomSet(G, 2n ln n/(d + 1))
while isDomSet == False
return S
```

证明 RanDomSet 是一个有效的拉斯维加斯型随机算法。

参考答案：

解法 1：记 RanDomSet 算法 do-while 循环期望次数是 N，则有 N=1*pS+(1+N)*pF ≤ 1*(n-1)/n+(1+N)*1/n 。求解可得 N ≤ n/(n-1) 。RanDomSet 算法运行时间的期望 O(N*2nln(n)/(d+1))=O(nln(n))。

解法 2：N≤1*(n-1)/n+2*(1/n)*(n-1)/n+3*(1/n)^2*(n-1)/n+...=n/(n-1)。

支配集问题（近似算法）（15 分）

最小支配集：给定无向图 $G = \langle V, E \rangle$，求图的一个最小支配集 S（即|S|最小），使得 $V - S$ 中的每一个顶点都至少与 S 中的一个顶点相邻。记 $n = |V|$。

（1）（4 分）举例说明图的最小支配集的大小不一定等于最小顶点覆盖的大小。

参考答案：

V = {1,2,3}, E = {(1,2), (1,3), (2,3)}。

最小支配集大小是 1（例如{1}），最小点覆盖大小是 2（例如{(1,2),(2,3)}）。

（2）（5 分）现在我们希望设计一个近似算法求解最小支配集问题。将本题当前所有内容输入给 G*T-4，AI 借鉴了课程讲授过的最小顶点覆盖近似算法，得到如下算法：

```
G*T-4 最小支配集近似算法
输入：无向图 G = ⟨V, E⟩
输出：最小支配集 S
S ← ∅;   V' ← V;
while V' ≠ Ø do
    if 存在{u, v} ⊆ V'且(u, v) ∈ E then
        S ← S ∪ {u, v};
        V' ← V' − ({u, v} ∪ N(u) ∪ N(v)); // N(x)是 x 的所有相邻顶点
    else
        S ← S ∪ V'; break;
    end if
end while
return S
```

请构造实例，论证该算法的近似比α(n)与 n 同阶，即 $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha(n)\big/n > 0$。

（3）（6 分）请设计一个近似算法求解最小支配集问题，并分析算法的近似比α(n)。要求 $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha(n)\big/n = 0$。（提示：考虑贪心法）

平摊分析（15 分）

在无穷大的二维网格上，每个格点(i, j)（$-\infty < i, j < +\infty$）都有一个模 M 计数器（$M \geqslant 5$），计数器数值为 x[i][j]。计数器初值为 0。每次 tick(i,j)函数执行如下算法：

```
void tick(i,j) {
    incr(i,j);
```

```
}
void incr(i,j) {
    x[i][j] = x[i][j] + 1;
    if (x[i][j] >= M) {
        x[i][j] = 0;
        incr(i-1,j);
        incr(i,j+1);
        incr(i+1,j);
        incr(i,j-1);
    }
}
```

（1）（3 分）假设在某次 tick(i,j)函数的完整执行过程，总共调用 incr 函数 $N = u+v$ 次（包括第 2 行和第 8-11 行的调用）。其中有 u 次调用的执行过程触发了第 6 行的条件，递归地调用了另外 4 个 incr 函数；另外的 $v = N - u$ 次调用中运行第 5 行后，未触发第 6 行的条件而直接返回。证明 $v = 3u + 1$。

（2）（3 分）定义网格所有计数器值的总和为 q。证明每次 tick(i,j)函数调用前后，$\triangle q = (4 - M)u + 1$。

（3）（9 分）利用势能法或其他方法分析 tick(i,j)函数的平摊执行时间。

参考答案：

1）$1+4u = u+v \Rightarrow v = 3u+1$。

2）不考虑递归部分，$\Delta q_v=1$；$\Delta q_u=1-M$。$\Delta q=u*(1-M)+v*1=(4-M)*u+1$。

3）定义势能 $4q/(M-4)$，平摊代价$=4/(M-4)+1=O(1)$。