

# AI 中的数学

## 第九、十讲

方聪，概率统计部分参考章复熹和张原老师课件

2024 年秋季

- #### ④ 随机变量的独立性



- $$f(X, Y, Z) = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}.$$

$n$  维随机向量: 称  $n$  个随机变量  $X_1, \dots, X_n$  的整体  $\xi = (X_1, \dots, X_n)$  为  $n$  维随机向量 (或者  $n$  维随机变量), 一维随机向量简称随机变量。

$n$  维随机变量数学上的精确定义: 设  $X_1 = X_1(\omega), \dots, X_n = X_n(\omega)$  都是概率空间  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  上的随机变量, 则称

$$\xi = \xi(\Omega) \triangleq (X_1(\omega), \dots, X_n(\omega))$$

为概率空间  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  上的  $n$  维随机向 (变) 量。

例如, 用炮弹向远处目标攻击, 炮弹的落点用平面坐标系中的坐标表示为  $(X, Y)$ , 是一个二维随机向量。

随机向量的函数: 设  $X_1 = X_1(\omega), \dots, X_n = X_n(\omega)$  是  $n$  个随机变量,  $f(x_1, \dots, x_n)$  是  $n$  元实值函数, 则称随机变量  $Y \triangleq f(x_1, \dots, x_n)$  为随机变量  $X_1, \dots, X_n$  的函数 (即随机向量  $(X_1, \dots, X_n)$  的函数)。

## 离散型情形

### §3.2 二维随机向量的联合分布与边缘分布, §3.7 条件分布

- 定义 2.1&2.2. 若  $\xi = (X, Y)$  取有限个或可列个“值”(二维向量), 则称  $\xi$  为离散型.
- $\xi$  是离散型当且仅当  $X, Y$  都是离散型.
- 定义 2.2. 设  $X, Y$  的可能值分别为  $x_i, y_j$ , 则称

$$p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j), \quad i, j = 1, 2, \dots$$

为  $\xi$  的联合分布 (列).

- 联合分布列满足:  $p_{ij} \geq 0, i, j = 1, 2, \dots$  (非负性);

$$\sum_{i,j} p_{ij} = 1 \text{ (规范性).}$$

例 2.2&2.3: 有大量粉笔, 含白、黄、红三种颜色, 比例分别为  $p_1, p_2, p_3$ . 从中抽取  $n$  支. 求: 恰好抽到  $k_1$  支白,  $k_2$  支黄的概率.

- 设恰好抽到  $X$  支白,  $Y$  支黄, 即求  $(X, Y) = (k_1, k_2)$  的概率.
- 可以理解为放回抽样, 连续抽取  $n$  次.
- 所求事件包含了

$$C_n^{k_1} C_{n-k_1}^{k_2} = \frac{n!}{k_1! k_2! (n - k_1 - k_2)!}$$

个基本事件, 其中, 每一个的概率都为

$$p_1^{k_1} p_2^{k_2} p_3^{n-k_1-k_2}.$$

- 故,  $\forall k_1, k_2 \geq 0, k_1 + k_2 \leq n,$

$$P(X = k_1, Y = k_2) = C_n^{k_1} C_{n-k_1}^{k_2} p_1^{k_1} p_2^{k_2} p_3^{n-k_1-k_2}.$$

- 称  $\xi = (X, Y)$  服从三项分布.

例：有一大批量粉笔，其中 60% 是白的，25% 是黄的，15% 是红的，现从中随机的依次取出 6 支，问：其中恰有 3 支白色，1 支黄色，2 支红色的概率是多少？



例：有一大批量粉笔，其中 60% 是白的，25% 是黄的，15% 是红的，现从中随机的依次取出 6 支，问：其中恰有 3 支白色，1 支黄色，2 支红色的概率是多少？

解：令  $X =$  “6 支中白粉笔的个数”， $Y =$  “6 支中黄粉笔的个数”，则事件 “6 支中恰有 3 支白色，1 支黄色，2 支红色” 就是事件

$$\{X = 3, Y = 1\}, \text{即} \{(X, Y) = (3, 1)\}.$$

由三项分布，概率可表示为

$$P((X, Y) = (3, 1)) = \frac{6!}{3!1!2!} 0.6^3 \times 0.25 \times 0.15^2.$$

用组合数方法同样可以得到上述结果。

一般的，对于满足  $k_1 \geq 0, k_2 \geq 0$  及  $k_1 + k_2 \leq 6$  的  $k_1, k_2$ ，由三项分布有

$$P((X, Y) = (k_1, k_2)) = \frac{6!}{k_1!k_2!(6 - k_1 - k_2)!} 0.6^{k_1} \times 0.25^{k_2} \times 0.15^{6 - k_1 - k_2}.$$

二维随机向量的边缘分布：对于二维随机向量  $\xi = (X, Y)$ ，分量  $X$  的概率分布称为  $\xi$  关于  $X$  的边缘分布，分量  $Y$  的概率分布称为  $\xi$  关于  $Y$  的边缘分布。

二维随机向量  $\xi = (X, Y)$  的两个边缘分布均由  $\xi$  的概率分布完全确定。

例：从 1, 2, 3, 4 中任取一数记为  $X$ ，再从  $1, \dots, X$  中任取一数记为  $Y$ ，求  $(X, Y)$  的联合分布列及  $P(X = Y)$ 。

解：易知  $X$  的分布列为：

$$P(X = i) = \frac{1}{4}, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

显然， $P(X = i, Y = j) = 0, j > i, i = 1, 2, 3, 4$ ，当  $1 \leq j \leq i \leq 4$  时，由乘法公式得

$$P(X = i, Y = j) = P(X = i)P(Y = j|X = i) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{i} = \frac{1}{4i}.$$

$Y \setminus X$	1	2	3	4
1	$\frac{1}{4}$	0	0	0
2	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	0	0
3	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	0
4	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$

$$P(X = Y) = \sum_{i=1}^4 P(X = Y = i) = \sum_{i=1}^4 \frac{1}{4i} = \frac{25}{48}.$$

例：（对应郑书例 2.5）设随机变量  $X$  取值是 0 或 1，随机变量  $Y$  取值也是 0 或 1，且二维随机向量  $(X, Y)$  的概率分布是

$$P((X, Y) = (0, 0)) = \frac{1}{4} + \varepsilon, \quad P((X, Y) = (0, 1)) = \frac{1}{4} - \varepsilon,$$

$$P((X, Y) = (1, 0)) = \frac{1}{4} - \varepsilon, \quad P((X, Y) = (1, 1)) = \frac{1}{4} + \varepsilon,$$

其中  $0 \leq \varepsilon \leq \frac{1}{4}$ 。

易知不同的  $\varepsilon$  对应不同的联合分布，但是

$$P(X = 0) = P((X, Y) = (0, 0)) + P((X, Y) = (0, 1)) = \frac{1}{2},$$

$$P(X = 1) = P((X, Y) = (1, 0)) + P((X, Y) = (1, 1)) = \frac{1}{2}.$$

同理，

$$P(Y = 0) = P(Y = 1) = \frac{1}{2},$$

有无穷多个不同的联合分布具有相同的边缘分布。

## 2. 连续型情形

- 定义 2.4. 设  $\xi = (X, Y)$ . 若存在  $p(x, y)$  使得

$$P(\xi \in D) = \iint_D p(x, y) dx dy,$$

对任意开矩形  $D$  成立, 则称  $\xi$  为连续型随机向量, 称  $p(x, y)$  为  $\xi$  的联合密度 (函数), 也记为  $p_{X,Y}(x, y)$ .

- 联合密度满足:

$$p(x, y) \geq 0; \quad \iint_{\mathbb{R}^2} p(x, y) dx dy = 1.$$

- ★ 对更一般的集合  $D$  都成立, 例如,  $D$  是单位圆盘.

例：(对应郑书例 2.6) 设二维随机向量  $\xi = (X, Y)$  的联合密度为

$$p(x, y) = \begin{cases} ce^{-(x+y)}, & x \geq 0 \text{ 且 } y \geq 0, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$$

其中  $c$  是一个常数, 求:

(1)  $c$  的值; (2)  $P(0 < X < 1, 0 < Y < 1)$ .

解: (1) 由归一性知

$$1 = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} ce^{-(x+y)} dx dy = c \int_0^{+\infty} e^{-x} dx \cdot \int_0^{+\infty} e^{-y} dy$$

于是  $c = 1$ 。

(2) 取  $D = \{(x, y) : 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$ , 由定义知

$$\begin{aligned} P(0 < X < 1, 0 < Y < 1) &= \int_0^1 \int_0^1 e^{-(x+y)} dx dy \\ &= \int_0^1 e^{-x} dx \cdot \int_0^1 e^{-y} dy = (1 - e^{-1})^2. \end{aligned}$$

设  $G$  是平面上面积为  $a(0 < a < +\infty)$  的区域, 称二维随机向量  $\xi = (X, Y)$  服从  $G$  上的均匀分布, 若  $P((X, Y) \in G) = 1$ , 且  $(X, Y)$  取值属于  $G$  的任何部分  $A$  ( $A$  是  $G$  的子区域) 的概率与  $A$  的面积成正比。容易推知二维随机向量  $\xi = (X, Y)$  有联合密度为

$$p(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{a}, & (x, y) \in G, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases} \quad (1)$$

- 定理 2.1. 若  $\xi = (X, Y)$  是连续型, 则  $X, Y$  都是连续型, 且

$$p_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{X,Y}(x, y) dy, \quad p_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{X,Y}(x, y) dx.$$

- 称  $p_X(\cdot)$  与  $p_Y(\cdot)$  为  $\xi$  的边缘密度.



例 2.7.  $G$  为由  $y = x^2$  和  $y = x$  所围成的有限区域.  $\xi \sim U(G)$ .  
求:  $\xi$  的联合密度与边缘密度.

- $G$  的面积:  $a = \int_0^1 x dx - \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{6}$ .
- 联合密度:  $p(x, y) = 6, (x, y) \in G$ .
- 边缘密度:

$$p_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x, y) dy = \int_{x^2}^x 6 dy = 6(x - x^2), \quad 0 < x < 1.$$

$$p_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x, y) dx = \int_y^{\sqrt{y}} 6 dx = 6(\sqrt{y} - y), \quad 0 < y < 1.$$

- 注:  $X, Y$  都取遍  $(0, 1)$ , 但  $\xi$  不能取遍  $(0, 1) \times (0, 1)$ .

例：设二维随机向量  $\xi = (X, Y)$  有联合密度

$$p_1(x, y) = \frac{1}{2\pi} \exp\left\{-\frac{1}{2}(x^2 + y^2)\right\},$$

二维随机向量  $\eta = (U, V)$  有联合密度

$$p_2(x, y) = \begin{cases} 2p_1(x, y), & xy \geq 0, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

则  $X$  与  $U$  有相同的分布密度， $Y$  与  $V$  有相同的分布密度。

一方面, 当  $x \leq 0$  时,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} p_2(x, y) dy &= \int_{-\infty}^0 2p_1(x, y) dy = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^0 e^{-(x^2+y^2)/2} dy \\ &= \frac{1}{\pi} e^{-x^2/2} \int_{-\infty}^0 e^{-y^2/2} dy = \frac{1}{\pi} e^{-x^2/2} \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2/2} dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}. \end{aligned}$$

类似的, 当  $x > 0$  时,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} p_2(x, y) dy &= \int_0^{+\infty} 2p_1(x, y) dy \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)/2} dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}. \end{aligned}$$

即, 对一切  $x$ ,  $\int_{-\infty}^{+\infty} p_2(x, y) dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ 。

同理, 对一切  $y$ ,  $\int_{-\infty}^{+\infty} p_2(x, y) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2}$ 。

- 定义 2.6, 例 2.8 & 例 7.5. 若  $\xi = (X, Y)$  的联合密度  $p(x, y)$  有如下表达式, 则称  $\xi$  服从二维 (元) 正态分布.

$$\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp \left\{ -\frac{u^2 + v^2 - 2\rho uv}{2(1-\rho^2)} \right\},$$

其中,

$$u = \frac{x - \mu_1}{\sigma_1}, \quad v = \frac{y - \mu_2}{\sigma_2},$$

有 5 个参数:  $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ ,

$$\sigma_1, \sigma_2 > 0$$

$$\rho \in (-1, 1)$$

一般二维随机向量及其联合分布函数：设  $\xi = (X, Y)$  是二维随机向量，则称

$$F(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y) \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

为  $\xi$  的分布函数。也称为  $(X, Y)$  的联合分布函数。

分布函数  $F(x, y)$  有以下性质：

- (1)  $0 \leq F(x, y) \leq 1$ ;
- (2)  $F(x, y)$  是  $x$  的右连续增函数，也是  $y$  的右连续增函数；
- (3)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x, y) = 0, \lim_{y \rightarrow -\infty} F(x, y) = 0$ ;
- (4)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x, y) = P(Y \leq y), \lim_{y \rightarrow +\infty} F(x, y) = P(X \leq x)$ ;
- (5) 对任何  $x_1 \leq x_2, y_1 \leq y_2$ ，有

$$F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1) \geq 0.$$

关于性质 (5), 对一切  $x_1 \leq x_2, y_1 \leq y_2$ , 有

$$\begin{aligned}
 & P(x_1 < X \leq x_2, y_1 < Y \leq y_2) \\
 &= P(x_1 < X \leq x_2, Y \leq y_2) - P(x_1 < X \leq x_2, Y \leq y_1) \\
 &= P(X \leq x_2, Y \leq y_2) - P(X \leq x_1, Y \leq y_2) \\
 &\quad - [P(X \leq x_2, Y \leq y_1) - P(X \leq x_1, Y \leq y_1)] \\
 &= F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2) - [F(x_2, y_1) - F(x_1, y_1)]
 \end{aligned}$$

由  $P(x_1 < X \leq x_2, y_1 < Y \leq y_2) \geq 0$  知性质 (5) 成立。

若二维随机向量  $\xi = (X, Y)$  有联合密度  $p(x, y)$ , 则  $\xi$  的联合分布函数  $F(x, y)$  与联合密度  $p(x, y)$  有关系式

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y p(u, v) du dv. \quad (2)$$

例：设二维随机向量  $(X, Y)$  有密度函数

$$p(x, y) = \begin{cases} Ce^{-(2x+y)}, & x > 0, y > 0, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

求 (1) 常数  $C$  的值；(2) 联合分布函数  $F(x, y)$ ；(3) 概率  $P(X \leq Y)$ 。



例：设二维随机向量  $(X, Y)$  有密度函数

$$p(x, y) = \begin{cases} Ce^{-(2x+y)}, & x > 0, y > 0, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

求 (1) 常数  $C$  的值；(2) 联合分布函数  $F(x, y)$ ；(3) 概率  $P(X \leq Y)$ 。

解：(1) 由于

$$1 = C \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y) dx dy = C \int_0^{+\infty} e^{-2x} dx \int_0^{+\infty} e^{-y} dy = \frac{C}{2}$$

得  $C = 2$ 。

## (2) 利用公式

$$\begin{aligned}
 F(x, y) &= \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^x p(t, r) dt dr \\
 &= \begin{cases} \int_0^y \int_0^x 2e^{-2t-r} dt dr, & x > 0, y > 0, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases} \\
 &= \begin{cases} (1 - e^{-2x})(1 - e^{-y}), & x > 0, y > 0, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}
 \end{aligned}$$

(3) 设区域  $G = \{(x, y) | x \leq y\}$ , 则

$$\begin{aligned}
 P(X \leq Y) &= P((X, Y) \in G) = \iint_G p(x, y) dy dx \\
 &= \int_0^{+\infty} \int_x^{+\infty} 2e^{-2x-y} dy dx = \frac{2}{3}.
 \end{aligned}$$

例：设  $(X, Y)$  的联合密度函数为

$$p(x, y) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1, |y| < x, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

求边际密度函数。

解：根据定义

$$p_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y) dy = \begin{cases} \int_{-x}^x 1 dy = 2x & x \in (0, 1), \\ 0, & x \notin (0, 1). \end{cases}$$

$$p_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y) dx = \begin{cases} \int_y^1 1 dx = 1 - y & y \in [0, 1), \\ \int_{-y}^1 1 dx = 1 + y, & y \in (-1, 0), \\ 0, & y \notin (-1, 1). \end{cases}$$

- 联合密度:  $u = \frac{x-\mu_1}{\sigma_1}, v = \frac{y-\mu_2}{\sigma_2},$

$$\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp \left\{ -\frac{u^2 + v^2 - 2\rho uv}{2(1-\rho^2)} \right\}.$$

- 边缘密度:  $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)^2$ . 例如,

$$\begin{aligned} p_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} p(x, y) dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}} \exp \left\{ -\frac{(v-2\rho u)^2 + (1-\rho^2)u^2}{2(1-\rho^2)} \right\} dv \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{(1-\rho^2)u^2}{2(1-\rho^2)}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{(v-2\rho u)^2}{2(1-\rho^2)} \right\} dv \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2}u^2} \sqrt{2\pi(1-\rho^2)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}. \end{aligned}$$



$$\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{u^2+v^2-2\rho uv}{2(1-\rho^2)}\right\}, \quad (3)$$
$$u = \frac{X - \mu_1}{\sigma_1}, \quad v = \frac{Y - \mu_2}{\sigma_2},$$

共有 5 个参数:  $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}, \sigma_1, \sigma_2 > 0, \rho \in (-1, 1)$

解: 设  $X$  的分布密度为  $p_X(x)$ , 做变量代换  $v = \frac{y - \mu_2}{\sigma_2}$ , 得

$$\begin{aligned} p_X(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y) dy \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2\right\} \\ &\quad \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2 - 2\rho\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right]\right\} dy \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2\right\} \\ &\quad \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[v^2 - 2\rho v\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right]\right\} dv \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left\{ -\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left[ v^2 - 2\rho v \frac{x-\mu_1}{\sigma_1} \right] \right\} dv \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left\{ -\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left[ \left( v - \rho \frac{x-\mu_1}{\sigma_1} \right)^2 - \rho^2 \left( \frac{x-\mu_1}{\sigma_1} \right)^2 \right] \right\} dv \\
&= \exp \left\{ \frac{\rho^2}{2(1-\rho^2)} \left( \frac{x-\mu_1}{\sigma_1} \right)^2 \right\} \cdot \\
& \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left\{ -\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left( v - \rho \frac{x-\mu_1}{\sigma_1} \right)^2 \right\} dv \\
&= \exp \left\{ \frac{\rho^2}{2(1-\rho^2)} \left( \frac{x-\mu_1}{\sigma_1} \right)^2 \right\} \sqrt{2\pi(1-\rho^2)}.
\end{aligned}$$



于是

$$p_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \exp \left\{ -\frac{(x - \mu_1)^2}{2\sigma_1^2} \right\}.$$

同理知

$$p_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} \exp \left\{ -\frac{(y - \mu_2)^2}{2\sigma_2^2} \right\}.$$

这表明  $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ ,  $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ .

例：假定  $(\xi_1, \xi_2) \sim N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$ ，试求  $(\xi_1, \xi_2)$  落在

$$D = \left\{ (x, y) \mid \left( \frac{x - \mu_1}{\sigma_1} \right)^2 - 2\rho \frac{(x - \mu_1)(y - \mu_2)}{\sigma_1 \sigma_2} + \left( \frac{y - \mu_2}{\sigma_2} \right)^2 \leq \lambda^2 \right\}$$

内的概率。

$$\iint_D p(x, y) dx dy = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \times$$

$$\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right]\right\}$$
$$\left| \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \right| = \left| \begin{array}{cc} \frac{1}{\sigma_1} & 0 \\ -\frac{\rho}{\sigma_2} & \frac{\sqrt{1-\rho^2}}{\sigma_2} \end{array} \right| = \frac{\sqrt{1-\rho^2}}{\sigma_1 \sigma_2}, \quad |J| = \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sqrt{1-\rho^2}}.$$

从而

$$\begin{aligned}
 \iint_D p(x, y) dx dy &= \frac{1}{2\pi(1-\rho^2)} \iint_{\{u^2+v^2\} \leq \lambda^2} \exp\left\{-\frac{u^2+v^2}{2(1-\rho^2)}\right\} dudv \\
 &= \frac{1}{2\pi(1-\rho^2)} \int_0^{2\pi} \int_0^\lambda \exp\left\{-\frac{r^2}{2(1-\rho^2)}\right\} r dr d\theta \\
 &= \int_0^{\frac{\lambda^2}{2(1-\rho^2)}} e^{-t} dt = 1 - \exp\left\{-\frac{\lambda^2}{2(1-\rho^2)}\right\}.
 \end{aligned}$$



$$F_{X|Y}(x|y) = \frac{P(X \leq x, Y = y)}{P(Y = y)}.$$

$$P(X = x_i, Y = y_j) = p_{ij} \quad (j = 1, 2, \dots : i =$$

$P(Y = v_j) > 0 \quad (j \geq 1)$ , 则在  $Y = v_j$  的条件下  $X$  的

$$P(X = x_i, Y = y_j) = p_{ij} \quad (i, j = 1, 2, \dots)$$

38 / 57



解: 由于  $X+Y$  服从参数为  $\lambda_1 + \lambda_2$  的泊松分布, 故对  $k=0, 1, \dots, n$  有

这表明, 在  $X + Y = n$  的条件下  $X$  的条件分布列为参数为  $n, \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$  的二项分布。

例：设随机变量  $X$  与  $Y$  相互独立，都服从参数是  $n, p$  的二项分布，试求在  $X + Y = m (0 \leq m \leq 2n)$  条件下  $X$  的条件分布。



于是, 当  $k = 0, 1, \dots, l$  时,

$$\begin{aligned}
 P(X = k | X + Y = m) &= \frac{P(X = k, X + Y = m)}{P(X + Y = m)} \\
 &= \frac{C_n^k p^k (1-p)^{n-k} C_m^{m-k} p^{m-k} (1-p)^{n-m+k}}{C_{2n}^m p^m (1-p)^{2n-m}} \\
 &= \frac{C_n^k C_n^{m-k}}{C_{2n}^m}.
 \end{aligned}$$

当  $k > l$  时, 显然  $P(X = k | X + Y = m) = 0$ 。

由此可见, 在  $X + Y = m$  条件下  $X$  的条件分布是超几何分布。

例：一射手进行射击，击中目标的概率  $p \in (0, 1)$ ，射击至击中目标两次为止。若以  $X$  表示首次击中目标所进行的射击次数，以  $Y$  表示总共进行的射击次数。试求  $X$  和  $Y$  的联合分布列及条件分布列。

例：一射手进行射击，击中目标的概率  $p \in (0, 1)$ ，射击至击中目标两次为止。若以  $X$  表示首次击中目标所进行的射击次数，以  $Y$  表示总共进行的射击次数。试求  $X$  和  $Y$  的联合分布列及条件分布列。

解： $Y = n$  表示第  $n$  次击中目标且前  $n-1$  次恰有一次击中目标，

$$P(X = m, Y = n) = p^2(1-p)^{n-2}, \quad n = 2, 3, \dots, m = 1, \dots, n-1.$$

从而

$$\begin{aligned} P(X = m) &= \sum_{n=m+1}^{\infty} P(X = m, Y = n) \\ &= \sum_{n=m+1}^{\infty} p^2(1-p)^{n-2} \\ &= p(1-p)^{m-1}, \quad m = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned} P(Y = n) &= \sum_{m=1}^{n-1} P(X = m, Y = n) \\ &= \sum_{m=1}^{n-1} p^2(1-p)^{n-2} \\ &= (n-1)p^2(1-p)^{n-2}, \quad n = 2, 3, \dots \end{aligned}$$

于是当  $n = 2, 3, \dots$  时,

$$P(X = m|Y = n) = \frac{p^2(1-p)^{n-2}}{(n-1)p^2(1-p)^{n-2}} = \frac{1}{n-1}, \quad m = 1, \dots, n-1.$$

当  $m = 1, 2, \dots$  时,

$$P(Y = n|X = m) = \frac{p^2(1-p)^{n-2}}{p(1-p)^{m-1}} = p(1-p)^{n-m-1}, \quad n = m+1, m+2, \dots$$

## 连续型

设二维随机向量  $(X, Y)$  有联合分布函数  $F(x, y)$ , 联合密度  $p(x, y)$ , 若  $p_Y(y) > 0$ , 则在  $Y = y$  条件下  $X$  的条件分布函数为

$$F_{X|Y}(x|y) = \int_{-\infty}^x \frac{p(u, y)}{p_Y(y)} du.$$

自然, 在  $Y = y$  条件下  $X$  的条件分布密度为

$$p_{X|Y}(x|y) = \frac{p(x, y)}{p_Y(y)}.$$



连续场合的全概率公式：由基本公式

$$p(x, y) = p_Y(y)p(x|y) = p_X(x)p(y|x),$$

连续场合的全概率公式为：

$$p_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} p_Y(y)p(x|y) dy,$$

$$p_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} p_X(x)p(y|x) dx.$$

连续场合的贝叶斯公式：

$$p(y|x) = \frac{p_Y(y)p(x|y)}{\int_{-\infty}^{+\infty} p_Y(y)p(x|y) dy},$$

$$p(x|y) = \frac{p_X(x)p(y|x)}{\int_{-\infty}^{+\infty} p_X(x)p(y|x) dx}.$$

$$p_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} \exp \left\{ -\frac{(y - \mu_2)^2}{2\sigma_2^2} \right\}.$$
$$\begin{aligned} p_{X|Y}(x|y) &= \frac{p(x, y)}{p_Y(y)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\rho^2)}\sigma_1} \exp \left\{ -\frac{(x-m)^2}{2(1-\rho^2)\sigma_1^2} \right\}, \end{aligned}$$

45 / 57





例：设随机变量  $X$  在区间  $(0, 1)$  上随机取值，当观察到  $X = x (0 < x < 1)$  时，随机变量  $Y$  在区间  $(x, 1)$  上随机取值，求  $Y$  的概率密度函数  $p_Y(y)$ 。

解:  $X$  服从区间  $(0,1)$  上的均匀分布, 对任意的  $x \in (0,1)$ , 在  $X=x$  条件下,  $Y$  的条件概率密度为

$$p(y|x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x}, & y \in (x, 1), \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

从而,

$$p(x, y) = p(y|x)p_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x}, & 0 < x < y < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

故

$$p_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y) dx = \begin{cases} \int_0^y \frac{1}{1-x} dx = -\ln(1-y), & 0 < y < 1, \\ 0, & y \notin (0, 1). \end{cases}$$

- #### ④ 随机变量的独立性





证明：充分性：设  $p_X(x)p_Y(y)$  是  $(X, Y)$  的联合密度，则对于任何  $a < b$ ,  $c < d$  有

$$\begin{aligned} P(a < X < b, c < Y < d) &= \int_a^b \int_c^d p_X(x)p_Y(y) dx dy \\ &= \int_a^b p_X(x) dx \cdot \int_c^d p_Y(y) dy = P(a < X < b)P(c < Y < d). \end{aligned}$$

表明  $X$  与  $Y$  相互独立

必要性：设  $X$  与  $Y$  相互独立，则对任何  $a < b$ ,  $c < d$  有

$$\begin{aligned} P(a < X < b, c < Y < d) &= P(a < X < b)P(c < Y < d) \\ &= \int_a^b p_X(x) dx \cdot \int_c^d p_Y(y) dy = \int_a^b \int_c^d p_X(x)p_Y(y) dx dy \end{aligned}$$

表明  $p_X(x)p_Y(y)$  是  $(X, Y)$  的联合密度。

$$p(x, y) = f(x)g(y),$$

$$p(x, y) = f(x)g(y),$$

其中  $f(x) \geq 0$ ,  $g(y) \geq 0$ , 且  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$  收敛, 则  $X$  与  $Y$  相互独立。

$$F(x, y) = F_X(x)F_Y(y). \quad (4)$$

定理：设  $\xi = (X, Y)$  是二维随机向量， $X$  的分布函数是  $F_X(x)$ ， $Y$  的分布函数是  $F_Y(y)$ ，则  $X$  和  $Y$  相互独立的充分必要条件是  $\xi$  的分布函数  $F(x, y)$  等于  $F_X(x)$  与  $F_Y(y)$  之积，即

$$F(x, y) = F_X(x)F_Y(y). \quad (4)$$

证明：必要性：设  $X$  与  $Y$  相互独立，则对任何  $n \geq 1$ ，事件  $\{-n < X \leq x\}$  与事件  $\{-n < Y \leq y\}$  相互独立，于是

$$P(-n < X \leq x, -n < Y \leq y) = P(-n < X \leq x)P(-n < Y \leq y).$$

令  $n \rightarrow \infty$ ，即知4式成立。

充分性：设4式成立，对任何  $a < b$ ， $c < d$ ，有

$$\begin{aligned} P(a < X \leq b, c < Y \leq d) &= F(b, d) - F(a, d) - F(b, c) + F(a, c) \\ &= F_X(b)F_Y(d) - F_X(a)F_Y(d) - F_X(b)F_Y(c) \\ &= (F_X(b) - F_X(a))(F_Y(d) - F_Y(c)) \\ &= P(a < X \leq b)P(c < Y \leq d). \end{aligned}$$



例：设二维随机向量  $(X, Y)$  服从参数为  $\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, \rho$  的二维正态分布，则  $X$  与  $Y$  相互独立的充分必要条件是  $\rho = 0$ 。

证明: 已求出  $X$  和  $Y$  的分布密度:

$$p_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} \exp \left\{ -\frac{(y - \mu_2)^2}{2\sigma_2^2} \right\}.$$

于是

$$p_X(x)p_Y(y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \exp\left\{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2} - \frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}\right\}.$$

结合联合密度  $p(x, y)$  (式3), 知当  $\rho = 0$  时,

$$p(x, y) = p_X(x)p_Y(y).$$

故  $X$  与  $Y$  相互独立。反之, 成立.

例：设  $(X, Y)$  联合密度为

$$p(x, y) = \begin{cases} 8xy, & 0 \leq x \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

问  $X$  与  $Y$  是否独立?



$$p(x, y) = \begin{cases} 8xy, & 0 \leq x \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

解：易得

$$p_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y) dy = \begin{cases} \int_x^1 8xy dy = 4x(1 - x^2), & x \in [0, 1], \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

$$p_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y) dx = \begin{cases} \int_0^y 8xy dx = 4y^3, & y \in [0, 1], \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

从而，

$$p(x, y) \neq p_X(x)p_Y(y) = \begin{cases} 16x(1-x^2)y^3, & x, y \in [0, 1], \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

故  $X, Y$  不独立。

56 / 57



故  $i \in \mathbb{N}$

$$P(X = i) = e^{-\lambda p} \frac{(\lambda p)^i}{i!} \sum_{j=0}^{+\infty} e^{-\lambda(1-p)} \frac{(\lambda(1-p))^j}{j!} = e^{-\lambda p} \frac{(\lambda p)^i}{i!}.$$

且  $j \in \mathbb{N}$

$$P(X = j) = e^{-\lambda(1-p)} \frac{(\lambda(1-p))^j}{j!} \sum_{i=0}^{+\infty} e^{-\lambda p} \frac{(\lambda p)^i}{i!} = e^{-\lambda(1-p)} \frac{(\lambda(1-p))^j}{j!}.$$