20240515作业

1. 求幂级数的收敛半径和收敛域: $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\big(1+\dfrac{1}{n}\big)^{n^2}(x-2)^n$.

2. 求幂级数的收敛半径和收敛域: $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(2n)!!}{(2n+1)!!}x^n$.

3. 已知幂级数$\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$ 的收敛半径是r（$0<r<+\infty$）,给出下面幂级数的收敛半径,其中k为正整数.
(1) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_n^kx^n$; (2) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_{n^2}x^n$; (3) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_nx^{kn}$; (4) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_nx^{n^2}$.

4. 设$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$发散, 且幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$收敛半径为1. 是否一定有$\lim\limits_{x\to 1-}\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\infty$. 若是, 证明之; 若否, 给出例子.

5. 设$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$发散, 且幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$收敛半径为1. 是否一定有$\lim\limits_{x\to 1-}\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n\ \nexists$. 若是, 证明之; 若否, 给出例子.

6. 设$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$的收敛半径是$R=1$, 和函数是$S(x)$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$发散. 问$\lim\limits_{x\to 1-}S(x)$是否可能存在. 如可能存在, 给出例子; 若不可能存在, 说明原因.

7. 利用幂级数求级数的和（闭式）: $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{3n+1}$.

8. 利用幂级数求级数的和（闭式）: $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{1}{4n+1}+\dfrac{1}{4n+3}-\dfrac{1}{2n+2}\right)$.