AI 中的数学 第一次作业

2300012929 尹锦润

教材 1.12

基本事件空间：$\Omega=\{$从 52 张牌 中抽取 6 张牌的$\binom{52}{6}$种可能情况$\}$。

(1) $P(\text{含有黑桃 K})=\dfrac{\dbinom{51}{5}}{\dbinom{52}{6}}$。

(2) $P(\text{各种花色都有})=\dfrac{\dbinom{4}{1}\dbinom{13}{3}13^3+\dbinom{4}{2}\dbinom{13}{2}^2 13^2}{\dbinom{52}{6}}$。

(3) $P(\text{至少两个同点})=\dfrac{\dbinom{52}{6}-\dbinom{13}{6}4^6}{\dbinom{52}{6}}$。

教材 1.14

$P(AB)=0$ 但是 AB 仍然是可能事件，于是有：

（1）错误，AB 仍然可能。

（2）错误，AB 仍然可能。

（3）正确。

（4）错误，类似 2。

（5）正确，$P(A-B)=P(A-AB)=P(A)-P(AB)=P(A)$。

教材 1.16

可以求出不喜欢任何一种糖的顾客人数为：

$$1000-(811+752+418-570-356-348+298)=-5$$

矛盾。

教材 1.17

有 $P(AB)-P(A)P(B)=P(A|B)P(B)-P(A)P(B)=(P(A|B)-P(A))P(B)$，假设 $P(A|B)=t\in[0,1]$，以及 $P(A)=x\in[0,1]$，于是

$$|P(AB)-P(A)P(B)|=(t-x)(1-x)$$

可以求得，当 $t=1$ 有此式子最大值 $(1-x)^2\leqslant\frac{1}{4}$，证毕。

教材 1.19

假如 $A_1,\cdots,A_n(n\geqslant 2)$ 都是独立的，则有 $\forall i,j(i\neq j),P(A_iA_j)=P(A_i)P(A_j)$。

对于 $B_1,\cdots,B_n$，有 $\forall i,j(i\neq j)$，我们可以证明都有 $P(B_iB_j)=P(B_i)P(B_j)$。

1. $B_i=A_i,B_j=A_j$，显然成立。
2. $B_i=\overline{A}_i,B_j=A_j$ 或者 $B_i=\overline{A}_i,B_j=\overline{A}_j$ 或者 $B_i=A_i,B_j=\overline{A}_j$，因为 A_i,A_j 独立，所以 $\overline{A}_i,A_j$ 还是独立的，其他情况类似，都成立。
3. B_i,B_j 中有一个是 U，因为 U 对于所有事件 T 都满足 $P(UT)=P(U)P(T)$，因此也是成立的。

综上，$B_1,\cdots,B_n$ 也是互相独立的。

教材 1.24

利用贝叶斯公式展开：

$$\begin{gathered}P(A|B)>P(A|\overline{B})\Rightarrow\frac{P(B|A)P(A)}{P(B|\overline{A})P(\overline{A})+P(B|A)P(A)}>\frac{P(\overline{B}|A)P(A)}{P(\overline{B}|\overline{A})P(\overline{A})+P(\overline{B}|A)P(A)}\\ \Rightarrow P(B|A)\left(P(\overline{B}|\overline{A})P(\overline{A})+P(\overline{B}|A)P(A)\right)>P(\overline{B}|A)\left(P(B|\overline{A})P(\overline{A})+P(B|A)P(A)\right)\\ \Rightarrow P(B|A)P(\overline{B}|\overline{A})>P(\overline{B}|A)P(B|\overline{A})\end{gathered}$$

继续展开，有

$$\begin{gathered}\Rightarrow P(B|A)[1-P(\overline{B}|\overline{A})]>P(\overline{B}|A)P(B|\overline{A})\\ \Rightarrow P(B|A)>P(B|\overline{A})\end{gathered}$$

证毕。

教材 1.25

$P(\text{得不到概率})=\ (1-(0.5*0.5))^3=(\frac{3}{4})^3$，$P(\text{得到概率})=1-P(\text{得不到概率})=1-(\frac{3}{4})^3$。

教材 1.26

记 A,B,C 分别为甲乙丙中靶，D 为两弹中靶。

$P(D)=P(AB\overline{C}+A\overline{B}C+\overline{A}BC)=0.6*0.5*0.6+0.6*0.5*0.4+0.4*0.5*0.4=0.38$。

$P(\overline{C}D) = P(AB\overline{C}) = 0.6 * 0.5 * 0.6 = 0.18$。

因此 $P(\overline{C}|D) = \dfrac{P(\overline{C}D)}{P(D)} = \dfrac{9}{19}$，因此丙中靶可能性更大。

教材 1.31

甲赢得游戏条件：在赢 m 次以前乙没有赢到 n 次。

因此概率为 $p^m \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+k-1}{k} q^k$。

教材 1.37

(1) $P(\text{失效}) = 1 - \prod(1-p_i) = 0.923168$。

(2) $P(\text{失效}) = (1-(1-p_1)(1-p_2))(1-(1-p_3)(1-p_4))(1-(1-p_5)(1-p_6)) = 0.176868$。

教材 1.39

记事件 A 为至少一个女孩，事件 B 为至少一个男孩。

$P(A) = P(B) = 1 - 0.5^3 = \dfrac{7}{8}$

$P(AB) = 1 - 0.5^3 * 2 = \dfrac{3}{4}$

$P(B|A) = \dfrac{P(AB)}{P(A)} = \dfrac{6}{7}$

教材 1.40

A：抽中矫正的枪，B：中靶。

$P(A) = \frac{5}{8}, P(B|A) = 0.8, P(B|\overline{A}) = 0.3$

$P(A|B) = \dfrac{P(A)P(B|A)}{P(B|A)P(A)+P(B|\overline{A})P(\overline{A})} = \dfrac{40}{49}$

教材 1.41

$P(A) = P(B) = P(C) = 0.5$

$P(AB) = \frac{3}{8} \neq P(A)P(B), P(BC) = \frac{1}{8} \neq P(B)P(C), P(AC) = \frac{1}{8} \neq P(A)P(C)$

因此都不互相独立。

教材 1.42

因为 ABC 互相独立，所以 $A \cup B$、AB 和 $A - B$ 作为 AB 的组合 与 C 也独立。

教材 1.43

记甲赢的概率为 $p(A)$，那么有

$$p(A)=\frac{6}{36}+\frac{36-6-2}{36}p(A)\Rightarrow p(A)=\frac{3}{4}$$

教材 1.44

$$P(A在B之前)=\frac{2+2p(A在B之前)}{6}=\frac{1}{2}$$