定理10.3.7. 设$\{f_n(x)\}$在$[a,b]$等度连续，且$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$, $x\in[a,b]$,

则$f_n(x)\rightrightarrows f(x)$, $x\in[a,b]$.【对等度连续的函数列，点收敛就是一致收敛】.

证明: (1)先证$f(x)\in C[a,b]$, 即$f(x)$于$[a,b]$一致连续.

$\forall\varepsilon>0$, 因为$\{f_n(x)\}$在$[a,b]$等度连续, 所以

$\exists\delta>0 \quad \text{s.t.} \quad |f_n(x')-f_n(x'')|<\varepsilon,\ \ \forall x',x''\in[a,b] \ \text{ with } \ |x'-x''|<\delta, \forall n\in\mathbb{N}.$

令$n\to\infty$, 由于$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$, $x\in[a,b]$, 所以

$\exists\delta>0 \quad \text{s.t.} \quad |f(x')-f(x'')|\le\varepsilon,\ \ \forall x',x''\in[a,b] \ \text{ with } \ |x'-x''|<\delta, \forall n\in\mathbb{N}.$

所以$f(x)$于$[a,b]$一致连续.

(2)证明$f_n(x)\rightrightarrows f(x)$, $x\in[a,b]$. 用反证法.

首先$f(x)\in C[a,b]$, $\{f_n(x)\}$在$[a,b]$等度连续 $\Rightarrow$ $\{f_n(x)\}\cup\{f(x)\}$在$[a,b]$等度连续.

假设$f_n(x)\not\rightrightarrows f(x)$, $x\in[a,b]$, 则 $\exists\varepsilon_0>0, \{f_{n_k}\}, \{x_{n_k}\}$ with $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}=x_0\in[a,b]$ s.t.

$|f_{n_k}(x_{n_k})-f(x_{n_k})|>\varepsilon_0>0, \quad k\in\mathbb{N}.$

但是$|f_{n_k}(x_{n_k})-f(x_{n_k})|\le|f_{n_k}(x_{n_k})-f_{n_k}(x_0)|+|f_{n_k}(x_0)-f(x_0)|+|f(x_0)-f(x_{n_k})|$,

这与[illegible]

一致矛盾. □

定理10.3.6. 设$\{f_n(x)\}$在$[a,b]$上一致收敛，若$f_n(x)\in C[a,b]$，$n=1,2,3,\cdots$，则$\{f_n(x)\}$在$[a,b]$等度连续. (闭区间上一致收敛的连续函数列等度连续.)

定理10.3.7. 设$\{f_n(x)\}$在$[a,b]$等度连续，且$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$，$x\in[a,b]$，则$f_n(x)\rightrightarrows f(x)$，$x\in[a,b]$. **【对等度连续的函数列，点收敛就是一致收敛】**.

可以把上述两个定理结合在一起，写成如下结论.

推论10.3.4. 闭区间上的连续函数序列，在点收敛的情况下，等度连续等价于一致收敛.

定理10.3.8. 设$f_n(x)\in R[a,b]$, $n=1,2,3,\cdots$ 且$f_n(x)\rightrightarrows f(x)$, $x\in[a,b]$,

$$\text{则} f(x)\in R[a,b] \text{ 且} \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

定理10.3.9. 设$u_n(x)\in R[a,b]$, $n=1,2,3,\cdots$ 且$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在$[a,b]$一致收敛,

$$\text{则}\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\text{在}[a,b] \text{ 可积, 且}\int_a^b\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b u_n(x)dx.$$

上述两定理更经常使用的方式是

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^x f_n(t)\,\mathrm{d}t=\int_a^x \lim_{n\to\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t,\quad \int_a^x\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)\right)\,\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^x u_n(t)\,\mathrm{d}t,\quad \forall x\in[a,b].$$

或者,

$$\lim_{n\to\infty}\int_{x_0}^x f_n(t)\,\mathrm{d}t=\int_{x_0}^x \lim_{n\to\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t,\quad \int_{x_0}^x\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)\right)\,\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{x_0}^x u_n(t)\,\mathrm{d}t,\quad \forall x_0,x\in[a,b].$$

如果收敛是在(a,b)上内闭一致收敛, 则使用公式为

$$\lim_{n\to\infty}\int_{x_0}^x f_n(t)\,\mathrm{d}t=\int_{x_0}^x \lim_{n\to\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t,\quad \int_{x_0}^x\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)\right)\,\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{x_0}^x u_n(t)\,\mathrm{d}t,\quad \forall x_0,x\in(a,b).$$