算分实验班小班课 2025.02.21

陈知轩

内容回顾

渐进记号

O, Ω

渐进记号

- 大 O 记号, $f(n) = O(g(n))$

  $f(n) \leq cg(n) \forall n > M$

  $f(n)" \leq "g(n)$，“不高于”

- 大 Ω 记号, $f(n) = \Omega(g(n))$

  $f(n) \geq cg(n) \forall n > M$

  $f(n)" \geq "g(n)$，“不低于”

渐进记号

o, ω

渐进记号

- 小 o 记号, $f(n) = o(g(n))$

  $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$

  $f(n) \ll g(n)$, “低于”

- 小 ω 记号, $f(n) = \omega(g(n))$

  $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = +\infty$

  $f(n) \gg g(n)$, “高于”

渐进记号

Θ

渐进记号

Θ

$c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n), \forall n > M$

$f(n)" \sim "g(n)$

渐进记号

Θ

$c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n), \forall n > M$

$f(n)" \sim "g(n)$

Q: O, Ω, Θ 可以用 $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{f(n)}{g(n)}$ 判断吗?

渐进记号

Soft-O 记号：$\tilde{O}$

$f(n) = \tilde{O}(g(n))$：$f(n) = O\big(g(n) \log^k g(n)\big)$

渐进记号

设问题规模为 n，用上述符号表达一些常见的复杂度表述

linear:

exponential:

polynomial:

almost linear:

渐进记号

设问题规模为 n，用上述符号表达一些常见的复杂度表述

linear: $O(n)$ or $\Theta(n)$

exponential: $O(c^n)$

polynomial: $O(n^c)$

almost linear: $\tilde{O}(n)$

阶比较

比较下列函数的阶并排序（从小到大）。

$\log n!, (\log n)^{\log n}, 2^{\log n \log\log n}, nH_n, n\log n + n\log\log n$

其中 H_n 表示调和级数

阶比较

比较下列函数的阶并排序（从小到大）。

$\log n!, (\log n)^{\log n}, 2^{\log n \log\log n}, nH_n, n\log n + n\log\log n$

其中 H_n 表示调和级数

$\log n! = nH_n = n\log n + n\log\log n = n\log n \ll 2^{\log n \log\log n} = (\log n)^{\log n}$

递推

概述

形如 $T(n) = \sum T(f_i(n)) + g(n)$ 的复杂度表示都算作递推。

主要分为三种情形

- 主定理：$T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$
- 数列递推：$T(n) = T(n-1) + 2T(n-2) + n$
- 其他情况：随机应变

主定理

$T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$

迭代展开 $T(n) = \sum_{k=0}^{\log_b n} a^k f\left(n/b^k\right)$

主定理仅能处理以下三种情况:

1. $f(n) = O\left(n^{\log_b a - \varepsilon}\right)$： 此时首项（ $k = 0$ ）的值远大于其他所有项的和。
2. $f(n) = \Omega\left(n^{\log_b a + \varepsilon}\right)$：此时首项（ $k = 0$ ）的值远大于其他所有项的和。
3. $f(n) = O\left(n^{\log_b a}\right)$：此时和式的每一项**近似视作**等比数列。

主定理

$T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$

迭代展开 $T(n) = \sum_{k=0}^{\log_b n} a^k f\left(n/b^k\right)$

主定理仅能处理以下三种情况：

1. $f(n) = O\left(n^{\log_b a-\varepsilon}\right)$： 此时首项（ $k = 0$ ）的值远大于其他所有项的和。
2. $f(n) = \Omega\left(n^{\log_b a+\varepsilon}\right)$： 此时首项（ $k = 0$ ）的值远大于其他所有项的和。
3. $f(n) = O\left(n^{\log_b a}\right)$： 此时和式的每一项**近似视作**等比数列。

不属于三类的典型例子：$f(n) = \tilde{O}\left(n^{\log_b a}\right)$

例题

1. $T(n) = 0 \forall n \leq 1$
    - $T(n) = T(\sqrt{n}) + \log n$
    - $T(n) = 2T(\sqrt{n}) + \log n$
    - $T(n) = 3T(\sqrt{n}) + \log n$
2. $T(n) = 1 \forall n \leq 1$
    - $T(n) = nT(\sqrt{n})$
    - $T(n) = nT^2(\sqrt{n})$
    - $T(n) = nT^3(\sqrt{n})$

例题解

令 $m = \log n, F(m) = T(2^m), T(n) = F(\log n)$

1. $F(m) = F\left(\frac{m}{2}\right) + m = 2m - 1,$

   $T(n) = \Theta(\log n)$

2. $F(m) = 2F\left(\frac{m}{2}\right) + m = m \log m,$

   $T(n) = \Theta(\log n \log \log n)$

3. $F(m) = 3F\left(\frac{m}{2}\right) + m = \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{\log_2 m} - 1}{\frac{3}{2} - 1} m = 2\left(m^{\log_2 3 - 1} - 1\right)m = 2m^{\log_2 3} - 2m$

   $T(n) = \Theta\left((\log n)^{\log_2 3}\right)$

例题解 (cont.)

令 $m = \log n, F(m) = \log T(2^m), T(n) = 2^{F(\log n)}$

1. $F(m) = F\left(\frac{m}{2}\right) + m = 2m - 1,$

   $T(n) = 2^{2\log n - 1} = \Theta\left(n^2\right)$

2. $F(m) = 2F\left(\frac{m}{2}\right) + m = m\log m,$

   $T(n) = 2^{\log n \log\log n} = \Theta\left(n^{\log\log n}\right)$

3. $F(m) = 3F\left(\frac{m}{2}\right) + m = \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{\log_2 m} - 1}{\frac{3}{2} - 1} m = 2\left(m^{\log_2 3 - 1} - 1\right)m = 2m^{\log_2 3} - 2m$

   $T(n) = 2^{2\log n^{\log_2 3} - 2\log n} = \Theta\left(n^{2\log_2^3 n - 2}\right)$

注意 $f(n) = \Theta(g(n))$ 不意味着 $2^{f(n)} = \Theta\left(2^{g(n)}\right)$ 即可.

数列递推

一般形如 $a_n = \sum_{k=1}^{L} r_k a_{n-k} + f(n)$ 的式子。

当 $f(n)$ 为常数时，这类递推称为常系数线性齐次递推。

注意我们不需要求出精确的值，只需要渐进界。

OGF 法

用无穷次多项式 $F(x)$ 的第 n 项系数 $[x^n]F(x)$ 表示 a_n。

数列和多项式一一对应

例题

已知数列 a_n 对应多项式 $A(x)$，写出下列多项式对应的数列 b_n 的表达式。

(1) $B(x) = A(x) + 1 + x$

(2) $B(x) = A(x)(1 + x)$

(3) $B(x) = A^2(x)$

例题

已知数列 a_n 对应多项式 $A(x)$，写出下列多项式对应的数列 b_n 的表达式。

(1) $B(x) = A(x) + 1 + x$

(2) $B(x) = A(x)(1 + x)$

(3) $B(x) = A^2(x)$

(1) $b_n = \begin{cases} a_0+1 & n=0 \\ a_1+1 & n=1 \\ a_n & n>1 \end{cases}$

(2) $b_n = \begin{cases} a_0 & n=0 \\ a_n+a_{n-1} & n=1 \end{cases}$

(3) $b_n = \sum_{i=0}^{n} a_i a_{n-i}$

OGF 的收敛形式

对于一个函数 $f(x)$，它的多项式形式就是其 Taylor Series.

写出下列式函数的展开形式：

$\frac{a}{1-x} = a + ax + ax^2 + \cdots, [x^n]\frac{a}{1-x} = a$

$\frac{1}{1-x^k} =$

$\frac{1}{1-ax} =$

$\ln \frac{1}{1-x} =$

OGF 的收敛形式

对于一个函数 $f(x)$，它的多项式形式就是其 Taylor Series.

写出下列式函数的展开形式：

$\frac{a}{1-x} = a + ax + ax^2 + \cdots, [x^n]\frac{a}{1-x} = a$

$\frac{1}{1-x^k} = 1 + x^k + x^{2k} + \cdots, [x^n]\frac{1}{1-x^k} = I[k \mid n]$

$\frac{1}{1-ax} = 1 + ax + (ax)^2 + \cdots, [x^n]\frac{1}{1-ax} = a^n$

$\ln\frac{1}{1-x} = = \int \frac{1}{1-x} = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots, [x^n]\frac{1}{1-ax} = a^n$

OGF 的收敛形式

对于一个函数 $f(x)$，它的多项式形式就是其 Taylor Series.

写出下列式函数的展开形式：

$\frac{a}{1-x} = a + ax + ax^2 + \cdots, [x^n]\frac{a}{1-x} = a$

$\frac{1}{1-x^k} = 1 + x^k + x^{2k} + \cdots, [x^n]\frac{1}{1-x^k} = I[k \mid n]$

$\frac{1}{1-ax} = 1 + ax + (ax)^2 + \cdots, [x^n]\frac{1}{1-ax} = a^n$

$\ln\frac{1}{1-x} == \int \frac{1}{1-x} = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots, [x^n]\frac{1}{1-ax} = a^n$

多项式的有限函数形式我们可以称为收敛形式。

巧妙利用收敛形式可以有效简化数列的表示和运算。

常系数线性齐次递推

对于 $a_n = ua_{n-1} + va_{n-2} + w$

$$
\begin{aligned}
F(x) &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \cdots \\
uxF(x) &= ua_0x + ua_1x^2 + ua_2x^3 + ua_3x^4 + \cdots \\
vx^2F(x) &= va_0x^2 + va_1x^3 + va_2x^4 + \cdots \\
w\frac{1}{1-x} &= w + wx + wx^2 + wx^3 + wx^4 + \cdots
\end{aligned}
$$

$F(x) = uxF(x) + vx^2F(x) + \frac{w}{1-x} + (a_0 - w) + (a_1 - ua_0 - w)x$

更一般的，写作 $F(x) = \sum_{k=1}^{L} r_kx^kF(x) + \frac{w}{1-x} + \sum_{k=0}^{r-1} b_kx^k$

常系数线性齐次递推

进一步写做 $P(x)F(x) = Q(x)$，即 $F(x) = \frac{Q(x)}{P(x)}$.

其中 $P(x) = \left(1 - \sum_{k=1}^{r} r_k x^k\right)(1 - x)$

例题

写出下列数列的收敛形式

(1) $a_0 = a_1 = 0, a_2 = 1, a_n = 5a_{n-1} + 3a_{n-2} + 4a_{n-3}$

(2) $a_0 = a_1 = 0, a_n = 5a_{n-1} + 3a_{n-2} + 1$

(3) $A(x) = xA^2(x) + 1$

例题

写出下列数列的收敛形式

(1) $a_0 = a_1 = 0, a_2 = 1, a_n = 5a_{n-1} + 3a_{n-2} + 4a_{n-3}$

(2) $a_0 = a_1 = 0, a_n = 5a_{n-1} + 3a_{n-2} + 1$

(3) $A(x) = xA^2(x) + 1$

(1) $A(x) = \frac{x^2}{1-5x+3x^2+4x^3}$

(2) $A(x) = \left(5x + 3x^2\right)A(x) + \frac{1}{1-x} + r(x) \Longrightarrow A(x) = \frac{x^2}{(1-5x-3x^2)(1-x)}$

(3) $xA^2(x) - A(x) + 1 = 0 \Longrightarrow A(x) = \frac{1\pm\sqrt{1-4x}}{2x} \Longrightarrow A(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$

Partial fraction decomposition

定理：对于任何真分式 $\frac{F(x)}{G(x)}$

设 $G(x)$ 在域 $R[x]$ 中的唯一分解为 $G(x) = \prod_{c=1}^{m} p_i^{e_i}(x)$，其中 $p_i(x)$ 为域中的不可约多项式。

则 $\frac{F(x)}{G(x)}$ 可以表示为若干个以 $p_i^j(x)(j < e_i)$ 为分母的真分式的和。

例题

写出下列分式的 fraction decomposition

$\frac{1}{x^2-4x+3} =$

$\frac{1}{x^3-1} =$

例题

写出下列分式的 fraction decomposition

$\frac{1}{x^2-4x+3} = \frac{1/2}{x-3} - \frac{1/2}{x-1}$

$\frac{1}{x^3-1} = \frac{(-x-2)/3}{x^2+x+1} + \frac{1/3}{x-1}$

例题

写出下列分式的 fraction decomposition

$\frac{1}{x^2-4x+3} = \frac{1/2}{x-3} - \frac{1/2}{x-1}$

$\frac{1}{x^3-1} = \frac{(-x-2)/3}{x^2+x+1} + \frac{1/3}{x-1}$

搜索 fraction decomposition

wolframalpha 上有 decomp 计算器，可以课后去玩一玩。

渐进界

回顾：$F(x) = \frac{Q(x)}{P(x)}$

考虑取域 $R = \mathbb{C}$，则 $P(x)$ 总有完全复根， $P(x) = c \prod (x - x_i)^{e_i}$

(实际上这里的 x_i 就是所谓的特征根)。

渐进界

回顾：$F(x)=\frac{Q(x)}{P(x)}$

考虑取域 $R=\mathbb{C}$，则 $P(x)$ 总有完全复根， $P(x)=c\prod(x-x_i)^{e_i}$

(实际上这里的 x_i 就是所谓的特征根)。

由上页定理，$\frac{1}{P(x)}$ 可以分解为 $\sum\frac{f_{i,j}(x)}{(x-x_i)^j}$

$F(x)$ 就表示为若干个 $\frac{q_{i,j}(x)}{(x-x_i)^j}$ 的和，其中 j 为常数。

计算渐进界时我们只需要考虑量级最大的一项。

渐进界(cont.)

考虑

$$\begin{aligned}[x^n]\frac{1}{(x-x_i)^k} &= \left(-\frac{1}{x_i}\right)^k [x^n]\left(\frac{1}{1-(1/x_i)x}\right)^k \\ &= \left(-\frac{1}{x_i}\right)^k \binom{n+k-1}{k-1}\frac{1}{(x_i)^n} \\ &= O\left(n^{k-1}\frac{1}{(x_i)^n}\right)\end{aligned}$$

容易发现 $[x^n]\frac{q(x)}{(x-x_i)^k}$ 与 $[x^n]\frac{1}{(x-x_i)^k}$ 同阶。

渐进界(cont.)

最终呈现的结果就是：答案为特征根的 n 次方的组合：

$a_n = \sum_{k=1}^{L} t_k (1/x_k)^n$。

设 $\left\| \frac{1}{x_i} \right\|_2^2$ 最大的根为 $(x - x_i)^{e_i}$，则渐进界为 $O\left(n^{e_i - 1} \left(\left\| \frac{1}{x_i} \right\|_2^2 \right)^n \right)$

例题

(1)

$$f(0) = f(1) = f(2) = 0$$

$$f(n) = \frac{31}{6} f(n-1) + \frac{29}{6} f(n-2) + f(n-3) + 1 \forall n > 2$$

(2)

$$f(0) = f(1) = 0$$

$$f(n) = 4f(n-1) - 4f(n-2) + 1$$

例题解

(1)

$P(x) = (x-1)\left(x-\frac{1}{6}\right)(x+2)(x+3)$

故渐进为 $\Theta(6^n)$

(2)

$P(x) = n\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$

故渐进为 $\Theta(n2^n)$

可以使用简单的 `python` 程序验证。

验证代码

```
import matplotlib.pyplot as plt
N = 500
f = [0] * N
r = [4, -4]
for n in range(len(r), N):
  f[n] = 1 # 计算递推
  for j in range(len(r)):
    f[n] += f[n - j - 1] * r[j]
def approx(n): # 渐进函数
  return 2. ** n * max(n,1)
g = [v / approx(n)  for (n, v) in enumerate(f)]
sli = g[200:220]
print(max(sli) - min(sli))
plt.plot(g) # 绘制渐进比曲线
```

精确值?

对于无重根的情况，答案一定为 $\left(\frac{1}{x_i}\right)^n$ 的线性组合（可能带常数项）

取前若干项，待定系数解方程即可。

非常系数线性齐次递推

简单情况：$f(n) = cn^k$, 用 $\frac{a_n}{n^k}$ 重写递推式。

其他情况：

非常系数线性齐次递推

简单情况：$f(n) = cn^k$, 用 $\frac{a_n}{n^k}$ 重写递推式。

其他情况： 其实我也不会

sth more

华为的题

https://developer.huaweicloud.com/hackathon