定义11.4.2. 设$f(x)$在$[0,1]$上有定义，称多项式$B_n(f,x)=\sum\limits_{k=0}^{n} f(\frac{k}{n})C_n^k x^k(1-x)^{n-k}$ 为$f(x)$ 的n 阶Bernstein多项式.

例如，$f(x)=x^2$的n阶Bernstein多项式为 $B_n(f,x)=\sum\limits_{k=0}^{n}(\frac{k}{n})^2C_n^k x^k(1-x)^{n-k}$

$$=\sum_{k=0}^{n}[(\frac{k}{n}-x)+x]^2C_n^k x^k(1-x)^{n-k}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}(\frac{k}{n}-x)^2C_n^k x^k(1-x)^{n-k}+2x\sum_{k=0}^{n}(\frac{k}{n}-x)C_n^k x^k(1-x)^{n-k}+x^2\sum_{k=0}^{n}C_n^k x^k(1-x)^{n-k}$$

$$\frac{x(1-x)}{n}+x^2.$$

$\sum C_n^k\frac{k}{n}x^k(1-x)^{n-k}=x,\quad \forall n\in\mathbb{N},\ x\in\mathbb{R}.$ 或者写成$\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k(\frac{k}{n}-x)x^k(1-x)^{n-k}=0$

$)^2x^k(1-x)^{n-k}=\frac{x(1-x)}{n},\quad \forall n\in\mathbb{N},\ x\in\mathbb{R}.$

定义11.4.2. 设$f(x)$在$[0,1]$上有定义，称多项式$B_n(f,x)=\sum_{k=0}^{n}f(\frac{k}{n})C_n^k x^k(1-x)^{n-k}$为$f(x)$ 的n 阶$Bernstein$多项式。

例11.4.1. 设$f(x) \in C[a,b]$, 若有$\int_a^b x^n f(x)\,\mathrm{d}x = 0,\quad n = 0,1,2,\cdots$, 则$f(x) \equiv 0,\ x \in [a,b]$。

证明. 往证: $\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x = 0.$

首先, $\int_a^b x^n f(x)\,\mathrm{d}x = 0,\ \forall n \quad \Rightarrow \quad \int_a^b P(x) f(x)\,\mathrm{d}x = 0,\quad \forall P(x)($ 多项式$)$。

其次, $f(x) \in C[a,b] \quad \Rightarrow \quad \forall \varepsilon > 0,\ \exists P(x)\ \text{ s.t. } \quad |f(x) - P(x)| < \varepsilon,\quad \forall x \in [a,b].$

$$\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)[f(x) - P(x)]\,\mathrm{d}x$$

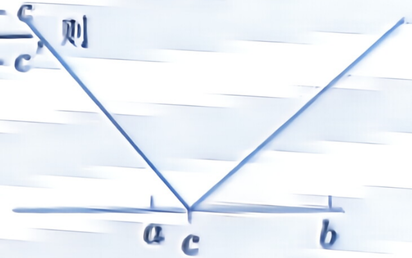
$$\leqslant \int_a^b |f(x)||f(x) - P(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant \varepsilon \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x,\quad \forall \varepsilon > 0.$$

$\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$是确定的数, 所以由$\varepsilon > 0$的任意性, $\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x = 0.$

引理11.4.9. $\forall c\in\mathbb{R}$, $f(x)=|x-c|$ 于任意的$[a,b]$上可被多项式逼近.

证明. 如果$c\notin(a,b)$, 则$f(x)=x-c$ 或者 $f(x)=c-x$ 都是多项式, 无须证明.

当$c\in(a,b)$时, $f(x)=|x-c|$, 设$b-c>c-a$, 令$t=\dfrac{x-c}{b-c}$, 则



$x=(b-c)t+c$, $g(t)=f(x)=(b-c)|t|$.

$x\in[a,b] \Rightarrow t\in[\dfrac{a-c}{b-c},1]\subset[-1,1]$,

且$g(t)=f((b-c)t+c)=(b-c)|t|$,

因为$|t|$于$[-1,1]$可被多项式逼近, 所以$g(t)$于$[\dfrac{a-c}{b-c},1]$ 可被多项式逼近.

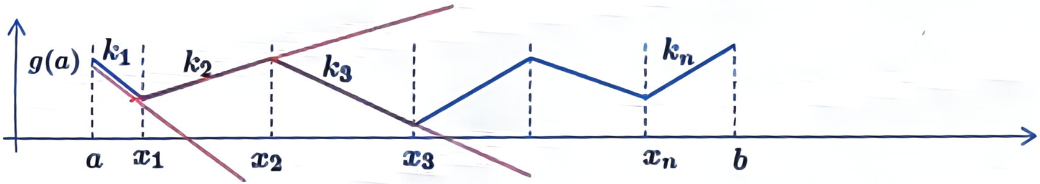
所以$f(x)=|x-c|$于$[a,b]$上可被多项式逼近. $\square$

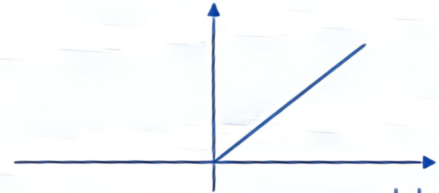
记$H(x)=\dfrac{x+|x|}{2}=\max\{x,0\}$, $x\in\mathbb{R}$.

则 $\forall c\in\mathbb{R}$, $H(x-c)$于任意的$[a,b]$上可被多项式逼近.

引理11.4.10. $[a,b]$上的连续分段线性函数(折线函数，折点为x_i，$i=1,\cdots,n$) $g(x)$可以表示成$H(x)$的平移组合，即$g(x)=g(a)+\sum_{i=1}^{n}c_iH(x-x_{i-1})$，$x\in[a,b]$，$c_i\in\mathbb{R}$，$(x_0=a)$。

证明. 对折线的折点$\{x_i\}$的个数作归纳法。





$$H(x)=\frac{x+|x|}{2}$$

$x\in[a,x_1]$时，$g(x)=g(a)+k_1H(x-a)\xlongequal[x_0=a]{c_1=k_1}g(a)+k_1H(x-x_0)$；

$x\in[x_1,x_2]$时，$g(x)=\Big[g(a)+c_1H(x-x_0)\Big]+(k_2-k_1)H(x-x_1)\xlongequal{c_2=k_2-k_1}g(a)+c_1H(x-x_0)+c_2H(x-x_1)$；

$x\in[x_2,x_3]$时，$g(x)=\Big[g(a)+c_1H(x-x_0)+c_2H(x-x_1)\Big]+(k_3-k_2)H(x-x_2)$

$$\xlongequal{c_3=k_3-k_2}g(a)+c_1H(x-x_0)+c_2H(x-x_1)+c_3H(x-x_2);$$

$\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots$ □

引理11.4.6. 如果$f(x),g(x)$在区间$[a,b]$上可被多项式逼近，
则对任意的$\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $\alpha f(x)+\beta g(x)$在$[a,b]$上可被多项式逼近。

引理11.4.7. 设$\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$在区间$[a,b]$上有定义，$f_n(x)\rightrightarrows f(x)$, $x\in[a,b]$, 且$\forall n\in\mathbb{N}$, $f_n(x)$可被多项式逼近，则$f(x)$于$[a,b]$可被多项式逼近。

引理11.4.8. $f(x)=|x|$于$[-1,1]$可被多项式逼近。

引理11.4.9. $\forall c\in\mathbb{R}$, $f(x)=|x-c|$ 于任意的$[a,b]$上可被多项式逼近。

引理11.4.10. $[a,b]$上的连续分段线性函数(折线函数，折点为x_i, $i=1,\cdots,n$) $g(x)$可以表示成$H(x)$的平移组合，即$g(x)=g(a)+\sum\limits_{i=1}^{n}c_iH(x-x_{i-1})$, $x\in[a,b]$, $c_i\in\mathbb{R}$, $(x_0=a)$.

定理11.4.2. 如果$f(x)\in C[a,b]$, 则$f(x)$于$[a,b]$ 可被多项式逼近。

证明。因为$f(x)$在$[a,b]$一致[illegible]可以被折线函数逼近，