AI中的数学 图论补充作业 | 2300012929 尹锦润

8.4

⇒ 4. 设 G 为欧拉图，$v_0\in V(G)$，若从 v_0 开始行遍，无论行遍到那个顶点，只要未行遍过的边就可以行遍，最后行遍所有边回到 v_0，即得 G 中一条欧拉回路，则称 v_0 是可以任意行遍的. 证明：v_0 是可以任意行遍的当且仅当 $G-v_0$ 中无圈.

证：(⇒)：若 $G-v_0$ 中有圈 C. 则 $G'=G-E(C)$ 仍是欧拉图或若干独立的欧拉图之并.

1. 若 G' 联通 则从 v_0 开始行遍，先行遍 G' 中所有边. 最后可以回到 v_0. 最后剩 C 而 v_0 不在 C 上 无法完成 G 的欧拉行遍

2. 若 G' 不联通. $G'=G_1'\cup G_2'\cup G_3\cup\cdots\cup G_k'$. 其中 $G_1'\cdots G_k'$ 相互独立且是欧拉图，设 $v_0\in G_k'$. 则从 v_0 出发完成 G_k' 行遍回到 v_0，但无法到 C 上，无法行遍 G.

(⇐)：若 $G-v_0$ 无圈而 G 是欧拉图. 那么 $G=C_1\cup C_2\cdots C_k$ 即 G 为若干不交的圈之并且 $v_0\in C_i,\dots,C_k$

于是从 v_0 出发不断完成 C_i 即可完成对 G 行遍.

10.1 求关联矩阵

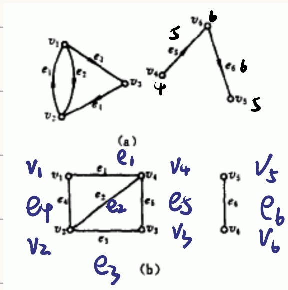

图 10.8

(a)：
$$\begin{pmatrix} -1 & +1 & +1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & +1 \end{pmatrix}$$

(b)
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

10.4

4. 有向图如图 10.10 所示.

(1) D 中 v_1 到 v_4 长度为 1,2,3,4 的通路各为多少条?

(2) v_1 到 v_4 长度小于等于 3 的通路为多少条?

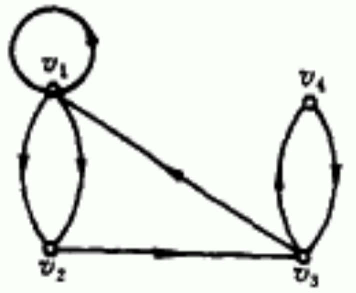

图 10.10

(3) v_1 到 v_1 长度为 1,2,3,4 的回路各为多少条?

(4) v_4 到 v_4 长度小于等于 3 的回路为多少条?

(5) D 中长度为 4 的通路(不含回路)有多少条?

(6) D 中长度为 4 的回路有多少条?

(7) D 中长度小于等于 4 的通路为多少条? 其中有多少条为回路

(8) 写出 D 的可达矩阵.

邻接矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}$ $A^2=\begin{pmatrix}1&2&2&0\\1&0&0&1\\1&2&1&0\\1&0&0&1\end{pmatrix}$

$A^3=\begin{pmatrix}3&2&2&2\\1&2&1&0\\2&2&2&1\\1&2&1&0\end{pmatrix}$ $A^4=\begin{pmatrix}5&6&4&2\\2&2&2&1\\4&4&3&2\\2&2&2&1\end{pmatrix}$

(1) 0, 0, 2, 2

(2) 2

(3) 1, 1, 3, 5

(4) 1

(5) $6+4+2+2+2+1+4+4+2+2+2+2=33$

(6) $5+2+3+1=11$

(7)

长度	通路(无回)	回
1	6	1
2	10	3
3	17	7
4	33	11

∴ 通路有 88条, 22条回路

(8) $\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}$

10.5

5. 已知标定的无向图如图 10.11 所示. A 是它的相邻矩阵,求 A^k 中的元素 $a_{22}^{(k)}, k=1,2,\cdots$.

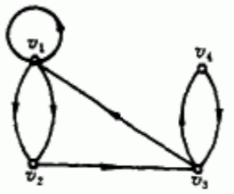

图 10.10

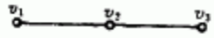

图 10.11

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$a_{22}^{(k)}$ 即从2出发长度为k的回路有多少

$k=1$: $\begin{cases} a_{21}=1 \\ a_{22}=0 \\ a_{23}=1 \end{cases}$ $k=2$: $\begin{cases} a_{21}=0 \\ a_{22}=2 \\ a_{23}=0 \end{cases}$

由此可得. $k=2n$ 时. $\begin{cases} a_{21}=0 \\ a_{22}=2^n \\ a_{23}=0 \end{cases}$ $k=2n+1$ 时. $\begin{cases} a_{21}=2^n \\ a_{22}=0 \\ a_{23}=2^n \end{cases}$

$$\therefore a_{22}^{(k)}=\begin{cases} 2^n, & k=2n \\ 0, & k=2n+1 \end{cases}, \quad n\in 0,1,\cdots$$