图论

第四、五讲：图的矩阵表示

方聪

2024 年秋季

有向图关联矩阵

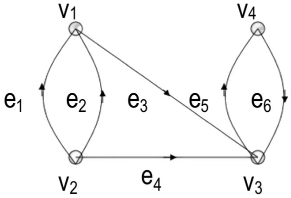
- 设 $D=<V,E>$ 是无环有向图，
  $V=\{v_1,v_2,...,v_n\}$，$E=\{e_1,e_2,...,e_m\}$
- 关联矩阵 (*incidence matrix*):

$$M(D)=[m_{ij}]_{n\times m}, m_{ij}=\begin{cases} 1, v_i\text{是}e_j\text{的起点} \\ 0, v_i\text{与}e_j\text{不关联} \\ -1\ v_i\text{是}e_j\text{的终点} \end{cases}$$

- D 与 $M(D)$ 是相互唯一确定的

有向图关联矩阵（例）

例：



$$
M(D) = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{array} \\
\begin{bmatrix}
-1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & -1 & 1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

图 1: 有向图关联矩阵

有向图关联矩阵 (性质)

- 每列和为零: $\sum_{i=1}^{n} m_{ij} = 0$(每条边关联两个顶点)
- 每行绝对值和为 $d(v_i)$: $d(v_i) = \sum_{j=1}^{m} m_{ij}$, 其中 1 的个数为 $d^{+}(v)$, -1 的个数为 $d^{-}(v)$
- 握手定理: $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} m_{ij} = 0$ (各顶点入度之和等于出度之和)
- 平行边: 相同两列

无向图关联矩阵

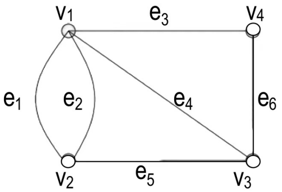
- 设 $G < V, E >$ 是无环无向图，
  $V = \{v_1, v_2, ..., v_n\}, E = \{e_1, e_2, ..., e_m\}$
- 关联矩阵 (incidence matrix):

$$M(G) = [m_{ij}]_{n\times m}, m_{ij} = \begin{cases} 1, v_i\text{与}e_j\text{关联} \\ 0, v_i\text{与}e_j\text{不关联} \end{cases}$$

- G 与 $M(G)$ 是相互唯一确定的

无向图关联矩阵（例）

例：



$$M(G) = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

图 2: 无向图关联矩阵

无向图关联矩阵 (性质)

- 每列和为 2: $\sum_{i=1}^{n} m_{ij} = 2$
- 每行和为 $d(v)$: $d(v_i) = \sum_{j=1}^{m} m_{ij}$
- 每行所有 1 对应的边组成的集合为 v_i 的关联集
- 平行边: 相同两列
- 伪对角阵: 若 G 有 k 个连通分支, 则 G 的关联矩阵 $M(G)$ 为伪对角阵

$$M(G) = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \qquad M(G) = \begin{bmatrix} M(G_1) & & & \\ & M(G_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & M(G_k) \end{bmatrix}$$

图 3: 无向图的关联矩阵

无向图基本关联矩阵

- 设 $G < V, E >$ 是无环无向图，
  $V = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$, $E = \{e_1, e_2, ..., e_m\}$
- 任意 1 个顶点
- 基本关联矩阵 (*fundamental incidence matrix*)：从 $M(G)$ 删除参考点对应的行，记作 $M_f(G)$

无向图关联矩阵的秩

定理

n 阶无向连通图 G 的关联矩阵的秩 $r(M(G)) = n-1$

证明.

在关联矩阵中删掉一行，依然可以复原原始矩阵，因此 $r \leq n-1$，下面证明 $r \geq n-1$。取 M 的前 $n-1$ 行，记为 $M_1, \cdots, M_{n-1}$，他们是线性无关的，否则必定存在不全为 0 的 $k_1, \cdots, k_{n-1} \in \{0, 1\}$，在模 2 加法意义下使得 $\sum_{i=1}^{n-1} k_i M_i = 0$，不妨设其中 $k_1, \cdots, k_s = 1$ 其余为 0，此处 $s \neq 1$，否则 v_1 为孤立点与连通矛盾；此时 M 的子阵 $[M_1, \cdots, M_s]^\top$ 每列恰有两个 1 或者每列均为 0，可以得到 G 至少有两个连通分支，矛盾 □

无向图基本关联矩阵的秩

定理

n 阶无向连通图 G 的基本关联矩阵的秩 $r(M_f(G)) = n - 1$

推论

- 推论 1: G 有 p 个连通分支, 则 $r(M(G)) = r(M_f(G)) = n - p$, 其中 $M_f(G)$ 是从 $M(G)$ 的每个对角块中删除任意 1 行而得到的
- 推论 2: G 连通 $\Leftrightarrow r(M(G)) = r(M_f(G)) = n - 1$

基本关联矩阵与生成树

定理

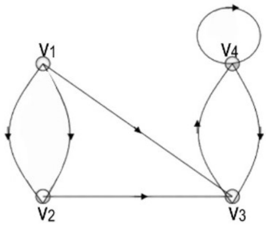
设 $M_f(G)$ 是 n 阶连通图 G 的一个基本关联矩阵。M_f' 是 $M_f(G)$ 中任意 $n-1$ 列组成的方阵，则 M_f' 各列所对应的边集 $\left\{e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_{n-1}}\right\}$ 的导出子图 $G\left[\left\{e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_{n-1}}\right\}\right]$ 是 G 的生成树当且仅当 M_f' 的行列式 $\left|M_f'\right| \neq 0$

用关联矩阵求所有生成树

- 忽略环，求关联矩阵
- 任选参考点，求基本关联矩阵
- 求所有 $n-1$ 阶子方阵，计算行列式，行列式非 0 的是生成树

有向图邻接矩阵

- 设 $D=<V,E>$ 是有向图，$V=v_1,v_2,...,v_n$
- 邻接矩阵 $(adjacencematrix)$：
  $A(D)=[a_{ij}]_{n\times n}$，$a_{ij}=$ 从v_i到v_j的边数



$$A(D)=\begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

图 4: 有向图的邻接矩阵

有向图邻接矩阵 (性质)

- 每行和为出度:$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = d^{+}(v_i)$
- 每列和为入度:$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = d^{-}(v_j)$
- 握手定理: $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = \sum_{i=1}^{n} d^{+}(v_i) = \sum_{j=1}^{n} d^{-}(v_j)$
- 环个数:$\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$

邻接矩阵与通路数

定理

设 $A(D) = A = [a_{ij}]_{n\times n}$, $A^r = A^{r-1}\cdot A, (r \geq 2), A^r = \left[a_{ij}^{(r)}\right]_{n\times n}$,

则

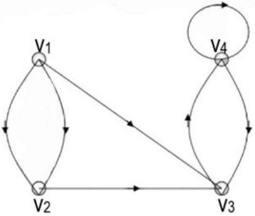
- $a_{ij}^{(r)} =$ 从 v_i 到 v_j 长度为 r 的通路总数
- $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{(r)} =$ 长度为 r 的通路总数
- $\sum_{i=1}^{n} a_{ii}^{(r)} =$ 长度为 r 的回路总数

推论

$B_r = A + A^2 + \ldots + A^r = \left[b_{ij}^{(r)}\right]_{n\times n}$,

- $b_{ij}^{(r)} =$ 从 v_i 到 v_j 长度小于等于 r 的通路总数
- $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}^{(r)} =$ 长度小于等于 r 的通路总数

用邻接矩阵求通路数（例）



$$A(D) = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad A^4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$B^2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad B^3 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 6 \end{bmatrix} \quad B^4 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 7 & 11 \end{bmatrix}$$

图 5: 邻接矩阵求通路数

用邻接矩阵求通路数 (例, 续)

- v_2 到 v_4 长度为 3 和 4 的通路数：$1, 2$
- v_2 到 v_4 长度 ≤ 4 的通路数：4
- v_4 到 v_4 长度为 4 的回路数：5
- v_4 到 v_4 长度 ≤ 4 的回路数：11

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad A^4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & \boxed{2} \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & \boxed{5} \end{bmatrix}$$

$$B^2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad B^3 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 6 \end{bmatrix} \quad B^4 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 3 & \boxed{4} \\ 0 & 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 7 & \boxed{11} \end{bmatrix}$$

图 6: 邻接矩阵求通路数

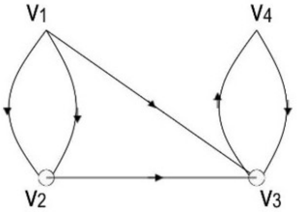
可达矩阵

- 设 $D=<V,E>$ 是 n 阶有向图,$V(D)=\{v_1,v_2,...,v_n\}$
- 可达矩阵: $P(D)=[p_{ij}]_{n\times n}, p_{ij}=\begin{cases}1, 从 v_i 可达 v_j\\0, 从 v_i 不可达 v_j\end{cases}$

可达矩阵 (性质)

- 主对角线元素都是 1: $\forall v_i \in V$, 从 v_i 可达 v_i
- $\forall i \neq j, p_{ij} = 1 \Leftrightarrow b_{ij}^{(n-1)} > 0$

可达矩阵（例）



$$A(D) = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

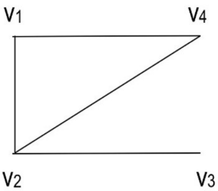
$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad A^4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$B^2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad B^3 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 6 \end{bmatrix} \quad B^4 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 7 & 11 \end{bmatrix}$$

无向图相邻矩阵

- 设 $G =< V, E >$ 是无向简单图，$V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$
- 相邻矩阵 (*adjacence matrix*) : $A(G) = [a_{ij}]_{n\times n}$, $a_{ii} = 0$,

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, v_i\text{与}v_j\text{相邻}, i \neq j \\ 0, v_i\text{与}v_j\text{不相邻} \end{cases}$$



$$A(G) = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

图 8: 无向图相邻矩阵

无向图相邻矩阵（性质）

- $A(G)$ 对称: $a_{ij} = a_{ji}$
- 每行（列）和为顶点度: $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = d(v_j)$
- 握手定理: $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = \sum_{i=1}^{n} d(v_j) = 2m$

相邻矩阵与通路数

定理

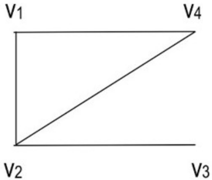
设 $A(G) = A = [a_{ij}]_{n\times n}$, $A^r = A^{r-1}\cdot A, (r \geq 2), A^r = \left[a_{ij}^{(r)}\right]_{n\times n}$, $B_r = A + A^2 + ... + A^r = \left[b_{ij}^{(r)}\right]_{n\times n}$, 则

- $a_{ij}^{(r)} =$ 从 v_i 到 v_j 长度为 r 的通路总数
- $\sum_{i=1}^{n} a_{ii}^{(r)} =$ 长度为 r 的回路总数

推论

- $a_{ii}^{(2)} = d(v_i)$
- G 连通 $\Rightarrow$ 距离 $d(v_i, v_j) = min\left\{r | a_{ij}^{(r)} \neq 0\right\}$

用相邻矩阵求通路数 (例)



$$A(G) = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad A^3 = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad A^4 = \begin{bmatrix} 7 & 6 & 4 & 6 \\ 6 & 11 & 2 & 6 \\ 4 & 2 & 3 & 4 \\ 6 & 6 & 4 & 7 \end{bmatrix}$$

图 9: 用相邻矩阵求通路数

用相邻矩阵求通路数 (例, 续)

- v_1 到 v_2 长度为 4 的通路数 : 6
  $14142, 14242, 14232, 12412, 14212, 12142$
- v_1 到 v_3 长度为 4 的通路数: 4
  $12423, 12323, 14123, 12123$
- v_1 到 v_1 长度为 4 的回路数: 7
  $14141, 14241, 14121, 12121, 12421, 12321, 12141$

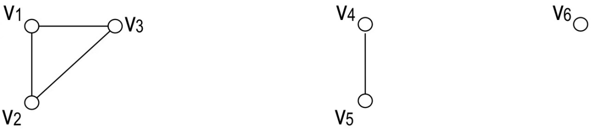
连通矩阵

- 设 $G=<V,E>$ 是 n 阶无向简单图,$V=\{v_1,v_2,\dots,v_n\}$
- 连通矩阵： $P(G)=[p_{ij}]_{n\times n}, p_{ij}=\begin{cases}1, 若 v_i 与 v_j 连通\\ 0, 若 v_i 与 v_j 不连通\end{cases}$

连通矩阵 (性质)

- 主对角线元素都是 1: $\forall v_i \in V$, v_i 与 v_i 连通
- 连通图： 所有元素都是 1
- 伪对角阵: 对角块是连通分支的连通矩阵
- 设 $B_r = A + A^2 + ... + A^r = \left[b_{ij}^{(r)}\right]_{n\times n}$, 则
  $\forall i \neq j, p_{ij} = 1 \Leftrightarrow b_{ij}^{(n-1)} > 0$

连通矩阵（例）



$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

图 10: 连通矩阵

度数矩阵与拉普拉斯矩阵

- 设 $G =< V, E >$ 是无向简单图, $V = \{v_1, v_2, ...v_n\}$
- G 的度数矩阵: $D = [d_{ij}]_{n\times n}, d_{ij} = \begin{cases} d(i), i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}$ ，其中 $d_{n\times 1} = (d(i))_{1\leq i\leq n} = \mathbf{A1_n}$， $\mathbf{A}$ 为 G 的相邻矩阵
- 拉普拉斯矩阵 $L = D - A$
- L 的二次型: $x^T Lx = \sum_{(a,b)\in E}(x_a - x_b)^2$

拉普拉斯二次型

证明.

$$x^\top Ax=\sum_{u\in V}\sum_{v\in V}A_{uv}x_ux_v=\sum_{u\in V}\sum_{v\in N(u)}x_ux_v=2\sum_{(u,v)\in E}x_ux_v \tag{1}$$

$$x^\top Dx=\sum_{u\in V}\sum_{v\in V}D_{uv}x_ux_v=\sum_{u\in V}d(u)x_u^2 \tag{2}$$

□

拉普拉斯二次型

证明.

结合 (1) 和 (2)，有

$$
\begin{aligned}
x^\top A x &= \sum_{u \in V} d(u) x_u^2 - 2 \sum_{(u,v) \in E} x_u x_v \\
&= \sum_{(u,v) \in E} (x_u^2 + x_v^2 - 2x_u x_v) \\
&= \sum_{(u,v) \in E} (x_u - x_v)^2
\end{aligned}
\tag{3}
$$

□

谱定理

定理 (谱定理)

若 M 为一个 $n \times n$ 的实对称矩阵，则存在实数 $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ 和 n 个相互正交的单位向量 $\psi_1, \psi_2, ..., \psi_n$，其中对于任意 $i \in \{1, 2, .., n\}$，向量 ψ_i 为矩阵 M 的特征向量，其对应的特征值为 λ_i $i.e. M\psi_i = \lambda_i \psi_i$

拉普拉斯矩阵性质

定理

对于简单无向图 $G =< V, E >$, 其拉普拉斯矩阵 L 是半正定的

证明.

取 x 为 L 的单位特征向量，则有 $x^TLx = x^T\lambda x = \lambda$

$\Rightarrow \lambda = x^TLx = \sum_{(a,b)\in E}(x_a - x_b)^2 \geq 0$ 故 L 半正定 □

拉普拉斯矩阵性质

定理

L 的最小特征值 $\lambda_1 = 0$

证明.

由于 $L1_n = (D - A)1_n = 0$, 知 0 为 L 的一个特征值，再由 L 半正定知 $\lambda_1 = 0$ □

拉普拉斯矩阵性质

定理

$0 = \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ... \leq \lambda_n$ 为图 $G =< V, E >$ 的拉普拉斯矩阵 L 的特征值，则 $\lambda_2 > 0$ 当且仅当图 G 是连通的

拉普拉斯矩阵性质

定理

$0 = \lambda_1 \le \lambda_2 \le ... \le \lambda_n$ 为图 $G =< V, E >$ 的拉普拉斯矩阵 L 的特征值，则 $\lambda_2 > 0$ 当且仅当图 G 是连通的

证明.

若图 G 不连通，则 G 可以写成两个不连通的子图 G_1, G_2 的并，

$L = \begin{bmatrix} L_{G_1} & 0 \\ 0 & L_{G_2} \end{bmatrix}$，取 $x_1 = \begin{bmatrix} 0_{G_1} \\ 1_{G_2} \end{bmatrix}, x_2 = \begin{bmatrix} 1_{G_1} \\ 0_{G_2} \end{bmatrix}, \Rightarrow Lx_1 = Lx_2 = 0,$

因此 L 关于特征值 0 至少有两个相互正交的特征向量 x_1, x_2，故 $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$

若 G 连通，设 ψ 为 L 关于特征值 0 对应的特征向量，$L\psi = 0$，$\psi^T L\psi = \sum_{(a,b)\in E} (\psi_a - \psi_b)^2 = 0, \Rightarrow \forall (a, b) \in E, \psi_a = \psi_b$，由于 G 连通，知 $\psi = c1_n$，因此 0 对应的特征空间维数为 1，

$\Rightarrow \lambda_2 > \lambda_1 = 0$

拉普拉斯矩阵 (例)

定理

完全图 K_n 的拉普拉斯矩阵存在特征值 0 和 n，其中 n 对应的特征空间重数为 $n-1$

证明.

设 ψ 为任意与 1_n 正交的非零向量，$i.e. \sum_{i=1}^{n}\psi(i)=0$, $L\psi(i)=\sum_{(i,j)\in E}(\psi_i-\psi_j)=\sum_{j\neq i}(\psi_i-\psi_j)=(n-1)\psi_i-\sum_{j\neq i}\psi_j=n\psi_i$
由 i 的任意性，$L\psi=n\psi$，因此全部与 1_n 正交的向量均为特征值 n 对应的特征向量，重数为 $n-1$ □

低频/高频特征值

- 对于图 G 的拉普拉斯矩阵 L 的全部特征值 $0 = \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ... \leq \lambda_n$，较小的 λ_i 被称为低频特征值，λ_n 被称为高频特征值，低频特征值对应的特征向量可以用于图的结构模拟

$Courant - Fischer Theorem$

定理 ($Courant - Fischer Theorem$)

对于对称矩阵 M 以及 n 个特征值 $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_n$，有:

$$\lambda_k = \max_{S \in R^n, dim S = k} \min_{x \in S, x \neq 0} \frac{x^T M x}{x^T x} = \min_{T \in R^n, dim T = n-k+1} \max_{x \in T, x \neq 0} \frac{x^T M x}{x^T x}$$