图论

第四讲：图的矩阵表示

方聪

2024 年秋季

1 关联矩阵

1 关联矩阵

有向图关联矩阵

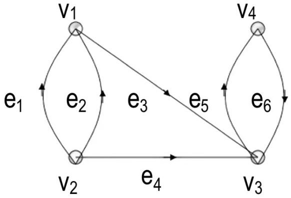
- 设 $D = < V, E >$ 是无环有向图，
  $V = \{v_1, v_2, ..., v_n\}, E = \{e_1, e_2, ..., e_m\}$
- 关联矩阵 (*incidence matrix*):

$$M(D) = [m_{ij}]_{n \times m}, m_{ij} = \begin{cases} 1, v_i\text{是}e_j\text{的起点} \\ 0, v_i\text{与}e_j\text{不关联} \\ -1\ v_i\text{是}e_j\text{的终点} \end{cases}$$

- D 与 $M(D)$ 是相互唯一确定的

有向图关联矩阵（例）

例:



$$M(D) = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

图 1: 有向图关联矩阵

有向图关联矩阵 (性质)

- 每列和为零: $\sum_{i=1}^{n} m_{ij} = 0$(每条边关联两个顶点)
- 每行绝对值和为 $d(v_i)$: $d(v_i) = \sum_{j=1}^{m} m_{ij}$, 其中 1 的个数为 $d^+(v)$, -1 的个数为 $d^-(v)$
- 握手定理: $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} m_{ij} = 0$ (各顶点入度之和等于出度之和)
- 平行边: 相同两列

无向图关联矩阵

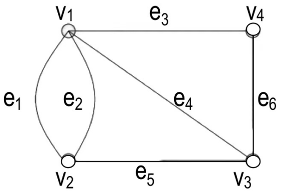
- 设 $G<V,E>$ 是无环无向图，
  $V=\{v_1,v_2,...,v_n\}$, $E=\{e_1,e_2,...,e_m\}$
- 关联矩阵 (incidence matrix):

$$M(G)=[m_{ij}]_{n\times m}\,,\,m_{ij}=\begin{cases}1, v_i\text{与}e_j\text{关联}\\0, v_i\text{与}e_j\text{不关联}\end{cases}$$

- G 与 $M(G)$ 是相互唯一确定的

无向图关联矩阵（例）

例：



$$M(G)=\begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

图 2: 无向图关联矩阵

无向图关联矩阵 (性质)

- 每列和为 2: $\sum_{i=1}^{n} m_{ij} = 2$
- 每行和为 $d(v)$: $d(v_i) = \sum_{j=1}^{m} m_{ij}$
- 每行所有 1 对应的边组成的集合为 v_i 的关联集
- 平行边: 相同两列
- 伪对角阵: 若 G 有 k 个连通分支, 则 G 的关联矩阵 $M(G)$ 为伪对角阵

$$M(G) = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \qquad M(G) = \begin{bmatrix} M(G_1) & & & \\ & M(G_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & M(G_k) \end{bmatrix}$$

图 3: 无向图的关联矩阵

无向图基本关联矩阵

- 设 $G < V, E >$ 是无环无向图，
  $V = \{v_1, v_2, ..., v_n\}, E = \{e_1, e_2, ..., e_m\}$
- 任意 1 个顶点
- 基本关联矩阵 (*fundamental incidence matrix*)：从 $M(G)$ 删除参考点对应的行，记作 $M_f(G)$

无向图关联矩阵的秩

定理

n 阶无向连通图 G 的关联矩阵的秩 $r(M(G)) = n-1$

证明.

在关联矩阵中删掉一行，依然可以复原原始矩阵，因此 $r \leq n-1$，下面证明 $r \geq n-1$。取 M 的前 $n-1$ 行，记为 $M_1, \cdots, M_{n-1}$，他们是线性无关的，否则必定存在不全为 0 的 $k_1, \cdots, k_{n-1} \in \{0,1\}$，在模 2 加法意义下使得 $\sum_{i=1}^{n-1} k_i M_i = 0$，不妨设其中 $k_1, \cdots, k_s = 1$ 其余为 0，此处 $s \neq 1$，否则 v_1 为孤立点与连通矛盾；此时 M 的子阵 $[M_1, \cdots, M_s]^\top$ 每列恰有两个 1 或者每列均为 0，可以得到 G 至少有两个连通分支，矛盾 □

无向图基本关联矩阵的秩

定理

n 阶无向连通图 G 的基本关联矩阵的秩 $r(M_f(G)) = n-1$

推论

- 推论 1: G 有 p 个连通分支, 则 $r(M(G)) = r(M_f(G)) = n-p$, 其中 $M_f(G)$ 是从 $M(G)$ 的每个对角块中删除任意 1 行而得到的
- 推论 2: G 连通 $\Leftrightarrow r(M(G)) = r(M_f(G)) = n-1$

基本关联矩阵与生成树

定理

设 $M_f(G)$ 是 n 阶连通图 G 的一个基本关联矩阵。M_f' 是 $M_f(G)$ 中任意 $n-1$ 列组成的方阵，则 M_f' 各列所对应的边集 $\left\{e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_{n-1}}\right\}$ 的导出子图 $G\left[\left\{e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_{n-1}}\right\}\right]$ 是 G 的生成树当且仅当 M_f' 的行列式 $\left|M_f'\right| \neq 0$

用关联矩阵求所有生成树

- 忽略环，求关联矩阵
- 任选参考点，求基本关联矩阵
- 求所有 $n-1$ 阶子方阵，计算行列式，行列式非 0 的是生成树