点收敛在一定条件下可以成为一致收敛.

定理10.3.5.【Dini定理】 $f_n(x) \not\rightrightarrows f(x),\ x\in I \ \Leftrightarrow\ \exists\varepsilon_0>0,\ \exists\{n_k\}\subset\mathbb{N},\ \exists\{x_k\}\subset I\ s.t.\ |f_{n_k}(x_k)-f(x_k)|>\varepsilon_0.$

如果$\exists x_0\in[a,b]$ s.t. $|f_{n_k}(x_0)-f(x_0)|>\varepsilon_0,\ n_k\to\infty\ (k\to\infty)$, 则导致矛盾.

设(1) $f_n(x)\in C[a,b],\ n\in\mathbb{N}$;

(2) $f_n(x)$关于n单调;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=f(x),\ x\in[a,b].$

则 $f(x)\in C[a,b] \ \Leftrightarrow\ f_n(x)\rightrightarrows f(x),\ x\in[a,b].$

证明:"$\Leftarrow$"显然. "$\Rightarrow$" 往证$f(x)-f_n(x)\rightrightarrows 0,\ x\in[a,b]$. 记$R_n(x)=|f(x)-f_n(x)|$,

据条件知$R_n(x)\geq R_{n+1}(x),\ R_n(x)\in C[a,b],\ \forall n\in\mathbb{N}$且$\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0,\ \forall x\in[a,b].$

【反证法】 如果$R_n(x)\not\rightrightarrows 0,\ x\in[a,b]$, 则 从而$\exists x_0\in[a,b]$为$\{x_k\}$的某一收敛子列的极限点,

即$\exists\{x_{k_i}\}\subset[a,b]$ s.t. $\lim\limits_{i\to\infty}x_{k_i}=x_0$,且$R_{n_{k_i}}(x_{k_i})\geq\varepsilon_0$. $\forall$fixed n_k, $\exists i_0\in\mathbb{N}\ s.t.\ n_{k_i}>n_{k_{i_0}}\geq n_k,\ \forall i>i_0$,

而$R_n(x)$关于n单降, 所以, 对这个固定的n_k, $R_{n_k}(x_{k_i})\geq R_{n_{k_i}}(x_{k_i})>\varepsilon_0,\ \forall i>i_0$.

在此式中令$i\to+\infty$, 则$R_{n_k}(x_0)\geq\varepsilon_0,\quad \forall n_k,\ k=1,2,\cdots.$