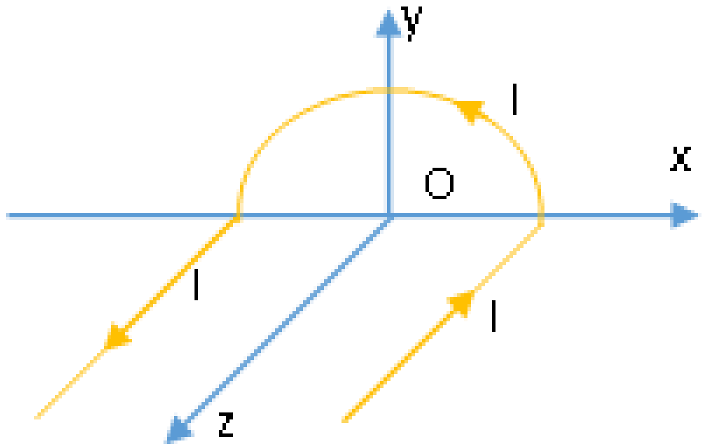
习题课-04

一.磁场计算



- 如图所示的无限长导线弯折成如图所示的形状，通有稳恒电流*I*，方向如图所示，其中半圆形导线的圆心在O点，半径为R，且在*OXY*平面内。另外两个半无限长的载流直导线在*OXZ*面内，且与*Z*轴平行，求O点的磁感应强度.

- 首先计算半圆形导线在O点的磁场，根据毕-萨定律，知

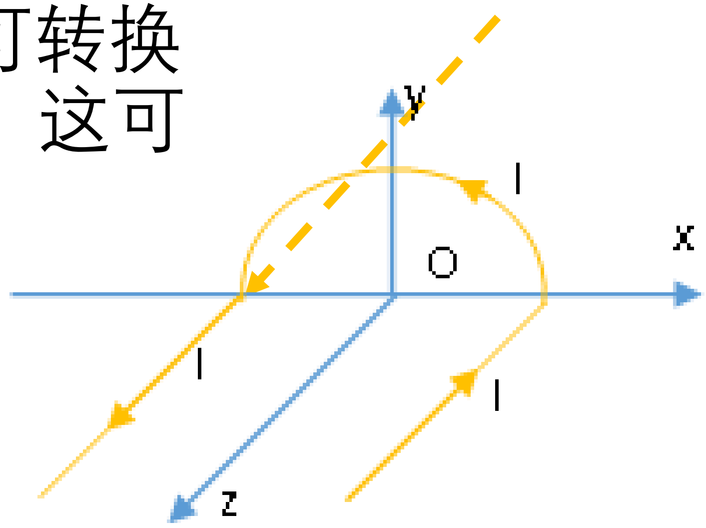
$$d\vec{B_1}=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\cdot\frac{dl}{R^2}\cdot\hat{k} \qquad \vec{B_1}=\int d\vec{B_1}=\frac{\mu_0 I\hat{k}}{4\pi R^2}\int dl=\frac{\mu_0 I\hat{k}}{4\pi R^2}\cdot\pi R=\frac{\mu_0 I}{4R}\hat{k}$$

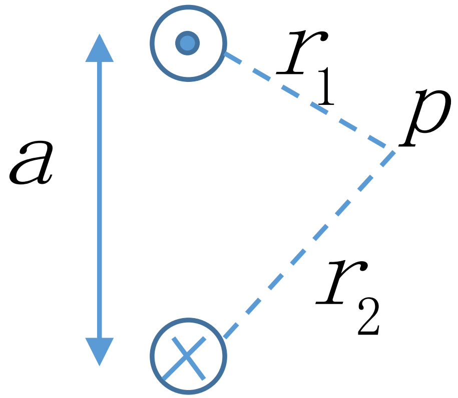
- 然后计算两个半无限长导线的电流在O点的磁场: 由对称性分析知右边的半无限长电流与虚线所示的半无限长电流在O点产生的磁场相同，因此问题可转换为O点左侧的一条全无限长电流在O点的磁场，这可以由环路定理求出为

$$\vec{B_2}=\frac{\mu_0 I}{2\pi R}\hat{j}$$

- 因此O点的总磁场为

$$\vec{B}=\frac{\mu_0 I}{2\pi R}\hat{j}+\frac{\mu_0 I}{4R}\hat{k}$$



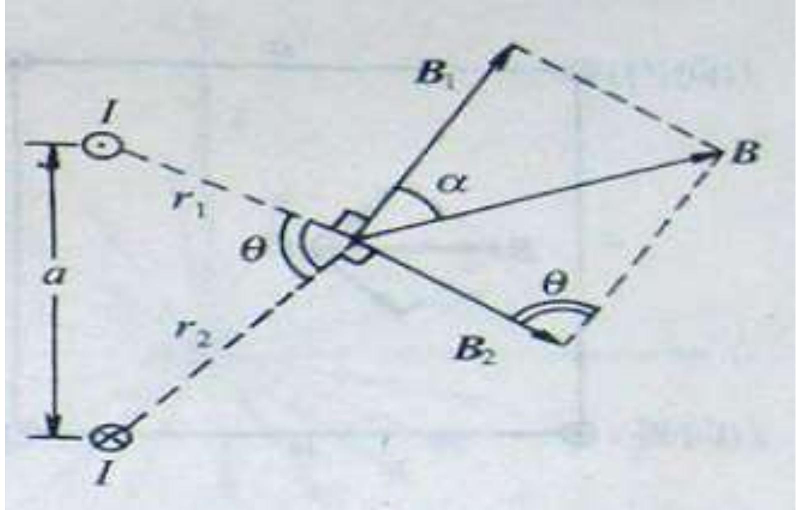


两条无穷长的平行直导线相距为 a，载有大小相等而方向相反的电流 I；空间任一点 P 到两导线的垂直距离分别为和 r_1 和 r_2，如图所示。试求 P 点的磁感应强度 B。

【解】由安培环路定理得出，两电流在 P 点所产生的磁感应强度 B_1 和 B_2 的大小分别为

$$B_1=\frac{\mu_0 I_1}{2\pi r_1},\qquad B_2=\frac{\mu_0 I_2}{2\pi r_2}\qquad(1)$$

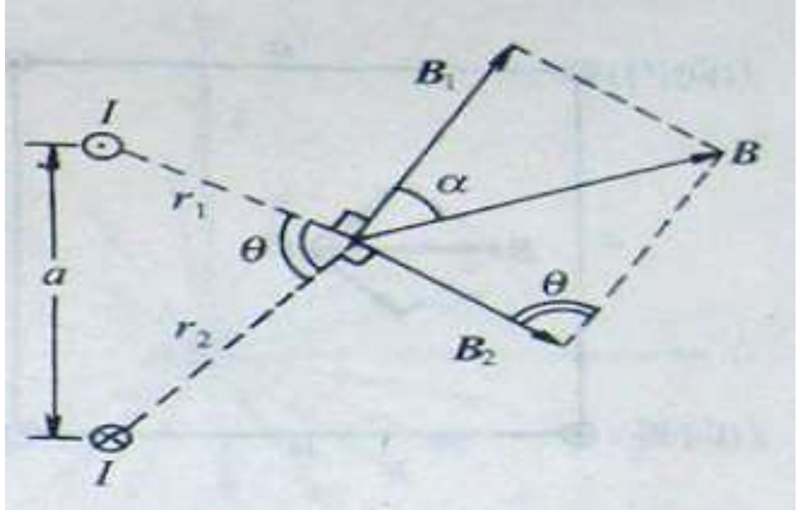
它们的方向如图 所示，则P点 、的磁感应强度为



$$\vec{B}=\vec{B}_1+\vec{B}_2\qquad(2)$$

$\vec{B}$ 的大小为

$$
\begin{aligned}
B &= \sqrt{B_1^2 + B_2^2 - 2B_1B_2\cos\theta} \\
&= \sqrt{B_1^2 + B_2^2 - 2B_1B_2\left(\frac{r_1^2 + r_2^2 - a^2}{2r_1r_2}\right)} \\
&= \frac{\mu_0 I}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} - \frac{1}{r_1r_2}\left(\frac{r_1^2 + r_2^2 - a^2}{r_1r_2}\right)} \\
&= \frac{\mu_0 I a}{2\pi r_1 r_2}
\end{aligned}
\qquad (3)
$$

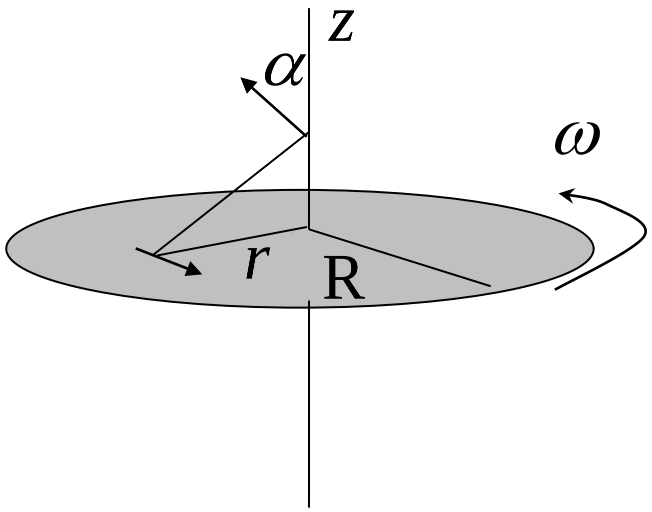


B 的方向如图所示。B 与 B_1 的夹角 α 满足下式：

$$B_2^2 = B_1^2 + B^2 - 2B_1\cos\alpha \qquad (4)$$

将式（1）、（3）代入式（4），解得

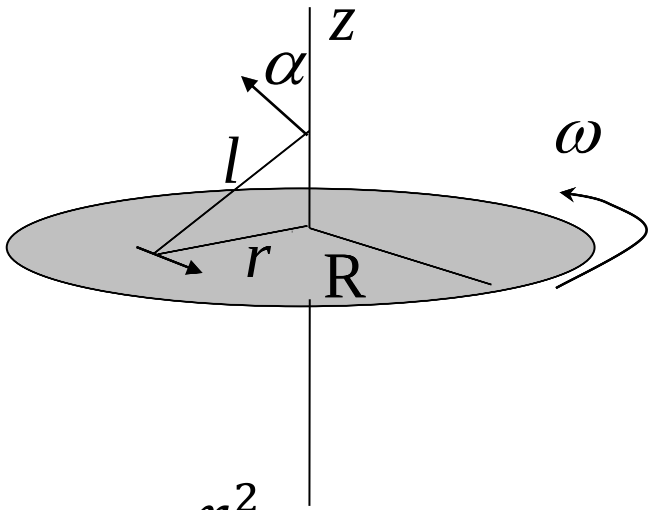
$$\cos\alpha = \frac{a^2 + r_2^2 - r_1^2}{2ar_2} \qquad (5)$$



- 如图，有均匀带电圆板，半径R，电荷面密度 σ ，围绕过中心垂直圆板的轴匀速旋转，角速度为ω，求轴线上任意一点的磁感应强度

解：根据 $\vec{j} = nq\vec{v}$ 得 $\vec{j} = \sigma\omega r \cdot \hat{\varphi}$ （取如图柱坐标系）

根据对称性 z 轴上的磁场只有 z 分量。



注意 $\frac{r^2}{l^2} = \cos\alpha^2$

$$B = \int dB = \int \frac{\mu_0 j dr \cdot r d\varphi}{4\pi l^2} Cos\alpha = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi \int \frac{\sigma\omega r^2 dr}{l^2} Cos\alpha$$

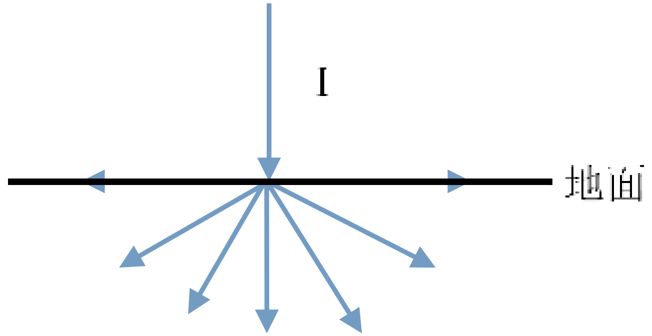
$$= \frac{\mu_0\sigma\omega}{2}\int_0^R Cos^3\alpha \cdot dr = \frac{\mu_0\sigma\omega}{2}\int Cos^3\alpha \cdot |z| \frac{d\alpha}{-Sin^2\alpha}$$

$$= \frac{\mu_0\sigma\omega|z|}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha_1}\left(1 - \frac{1}{Sin^2\alpha}\right) d(Sin\alpha)$$

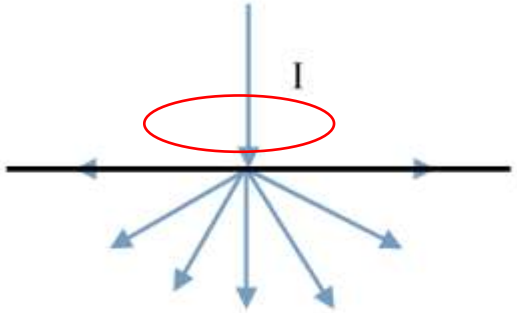
$$= \frac{\mu_0\sigma\omega}{2}\left(\frac{2z^2 + R^2}{\sqrt{z^2 + R^2}} - 2|z|\right)$$

B 的方向是沿 z 轴向上

一载有电流 I 半无穷长直导线垂直到地面，I 到达地面后， 便分散开来，均匀地向各个方向流去，如图所示。把地面当作无穷大的平面，设大地的磁导率为 μ_0，试求地面以上和地面以下各处的磁感强度。



【解】建立柱坐标系。在地面以上，在导线上取一点为圆心，以 r 为半径作一圆，圆的几何轴线为导线；根据对称性（？），在这圆上各点，磁感强度 B 的大小 B 都应相等。于是由安培环路定律得



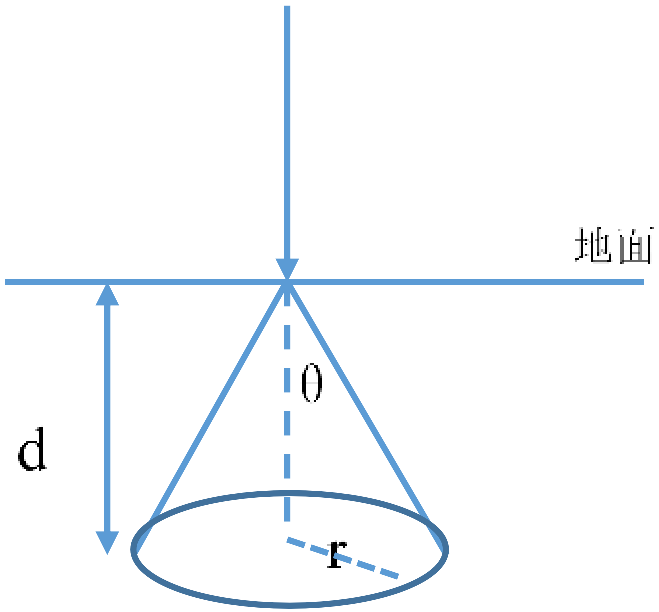
$$\vec{B}=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\hat{\varphi} \qquad (1)$$

在地面以下，离地面为 d 处，在 I 的延长线上取一点为圆心，以 r 为半径作一圆，圆的几何轴线与地面上的导线及其延长线重合，如图所示。根据对称性，这个圆上的各点，磁感强度 B 的大小都应相等（？）；

这个圆所套住的（即穿过这个圆的）电流为

$$i=\iint_S j\cdot dS=\int_0^{\theta}\int_0^{2\pi}\frac{I}{2\pi(r^2+d^2)}\cdot(r^2+d^2)\sin\theta d\theta d\phi$$

$$=I\int_0^{\theta}\sin\theta d\theta=I(1-\cos\theta)=I(1-\frac{d}{\sqrt{r^2+d^2}})\qquad（3）$$

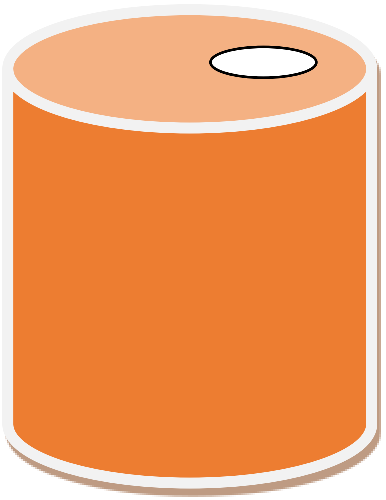


于是由安培环路定理得

$$\vec{B}=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}(1-\frac{d}{\sqrt{r^2+d^2}})\hat{\varphi}$$

- 设有放射源在O点，向空间各个方向均匀辐射带电粒子，形成连续的电流，问空间磁场分布？

- 答：空间磁场为零。



外半径为 R 的无穷长圆柱形导体管，管内空心部分的半径为 r，空心部分的轴线与圆柱的轴线平行但不重合，相距为 a，管的一段如图所示。今有电流 I 沿轴线方向流动，I 均匀分布在管的横截面上。

（1）试分别求圆柱轴线上和空心轴线上的磁感应强度 B 的大小($r<a$)。（2）当 R=1.0cm，r=0.5mm，a=5.0mm 和 I=31A 时，试计算上述两处 B 的值。

【解】（1）空心部分可看作实心圆柱体的均匀电流加上该部分的反向电流构成。设实心圆柱体的均匀电流在离轴线为 a 处产生的磁感应强度 B_1 的大小为 B_1，则由安培环路定理得

$$\oint_L B_1 \cdot dl = B_1 \cdot 2\pi a = \mu_0 \frac{I \cdot \pi a^2}{\pi\left(R^2 - r^2\right)} = \frac{\mu_0 I a^2}{R^2 - r^2} \qquad （1）$$

所以

$$B_1 = \frac{\mu_0 I a}{2\pi\left(R^2 - r^2\right)} \qquad （2）$$

反向的小圆柱电流在大圆柱轴线上（在小圆柱外）产生的磁感应强度 B_2 的大小为 B_2，由安培环路定理得

$$\oint_L B_1 \cdot dl = B_1 \cdot 2\pi a = \mu_0 \frac{I \cdot \pi a^2}{\pi\left(R^2 - r^2\right)} = \frac{\mu_0 I a^2}{R^2 - r^2} \qquad (3)$$

所以 $$B_2 = \frac{\mu_0 I r^2}{2\pi a(R^2 - r^2)} \qquad (4)$$

均匀圆柱电流在各自的轴线上产生的磁感强度均为零，于是

得圆柱轴线上的磁感应强度的大小为 $B = B_2 = \dfrac{\mu_0 I r^2}{2\pi a(R^2 - r^2)}$ （5）

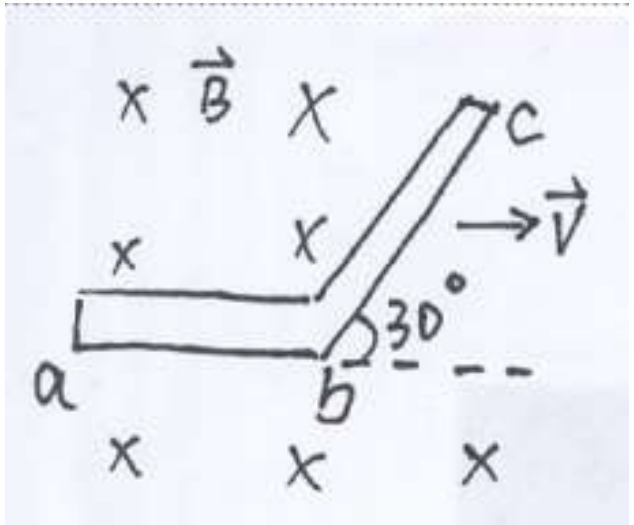
空心部分轴线上的磁感应强度的大小为 $B' = B_1 = \dfrac{\mu_0 I a}{2\pi(R^2 - r^2)}$ （6）

$$B = \frac{\mu_0 I r^2}{2\pi a(R^2 - r^2)} = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 31 \times (0.5 \times 10^{-3})^2}{2\pi \times 5.0 \times 10^{-3} \times [(1.0 \times 10^{-2})^2 - (0.5 \times 10^{-3})^2]} = 3.1 \times 10^{-6}(\mathrm{T})$$

$$B' = \frac{\mu_0 I a}{2\pi(R^2 - r^2)} = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 31 \times 0.5 \times 10^{-3}}{2\pi \times [(1.0 \times 10^{-2})^2 - (0.5 \times 10^{-3})^2]} = 3.1 \times 10^{-4}(\mathrm{T})$$

二. 电磁感应

1.动生电动势与感生电动势



如图，导体*abc*，在*b*处弯折，在匀强磁场中匀速$\vec{V} \parallel \overrightarrow{ab}$运动。已知*ab*=*bc*=*l*，求*a*、*c*间电势差？哪端电势高？

解：

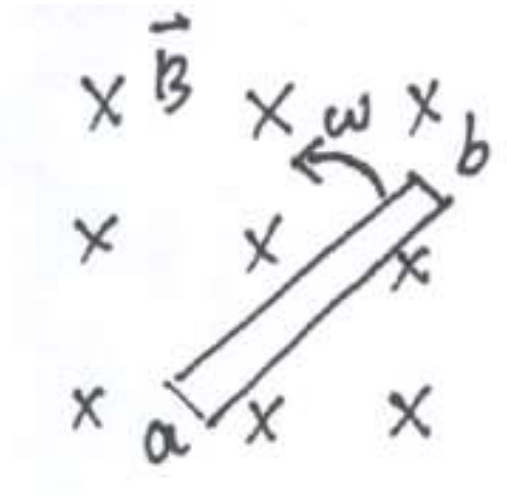
$$\varepsilon_{ac} = \int \vec{V} \times \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_a^b \vec{V} \times \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_b^c \vec{V} \times \vec{B} \cdot d\vec{l}$$

$$= 0 + \int_b^c V \cdot B \cdot \cos 60° \cdot dl = \frac{1}{2} VBl$$

则$U_{ac} = -\varepsilon_{ac} = -\frac{1}{2} VBl$**，可见*C*端电势高。**

（注意电压和电动势的关系）

讲义例题9-2
教材1,第223页例题1

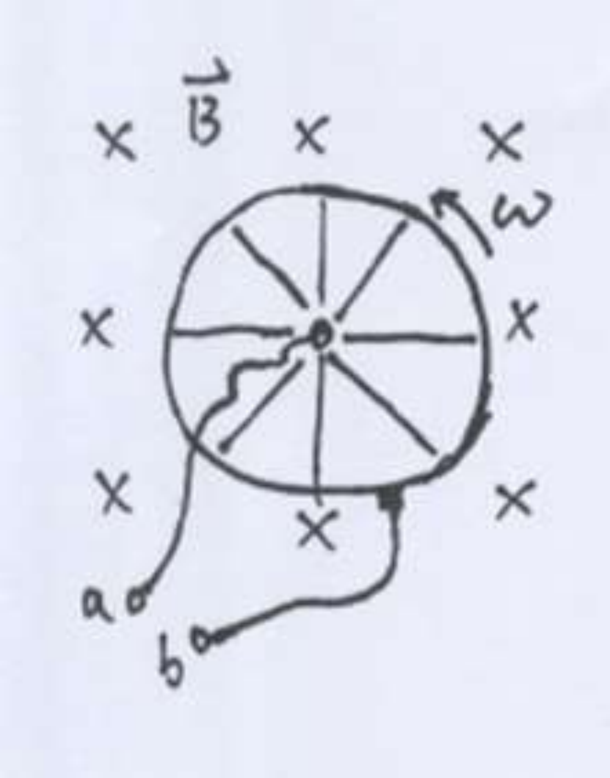


如图，导体 **ab** 长 ***l***，以 ***a*** 为中心，以匀角速 ω 在垂直 $\vec{B}$ 的平面内旋转。$\vec{B}$ 为匀强磁场，求 ***ab*** 间电势差。

解：

$$\varepsilon_{ab} = \int \vec{V} \times \vec{B} \cdot d\vec{l} = -\int_0^{r} B\omega r dr = -\frac{1}{2}\omega B l^2$$

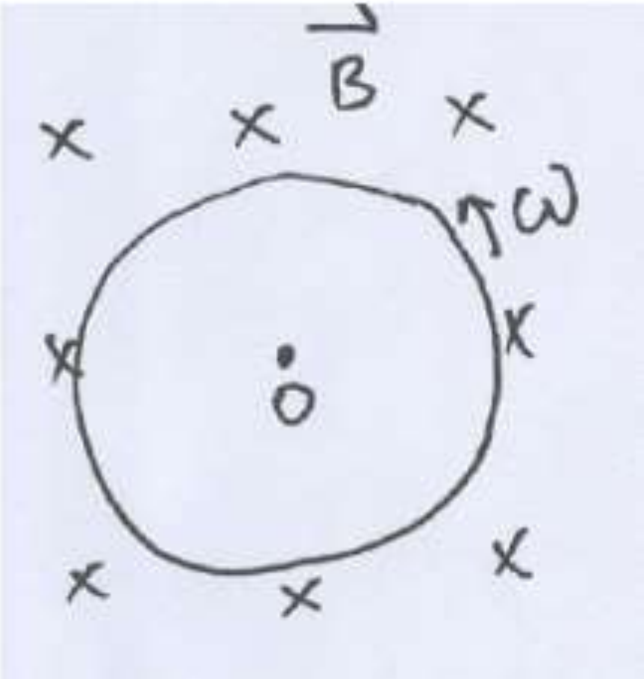
$$U_{ab} = -\varepsilon_{ab} = +\frac{1}{2}\omega B l^2$$



如图，有导体圆环，并有多根导体辐条连接于圆心，自圆心接出导线至 ***a*** 点，并以导电刷将圆环连通至 ***b*** 点，辐条及圆环在垂直匀强磁场 $\bar{B}$ 的平面内以角速度 ω 匀速旋转，圆环半径 ***R*** 已知，求 ***a***、***b*** 点间的电势差。

解：每根辐条产生的动生电动势都相等，圆环上不产生电动势，故：

$$U_{ab} = -\varepsilon_{ab} = +\int \omega r \cdot B \cdot dr = +\frac{1}{2}\omega B R^2$$



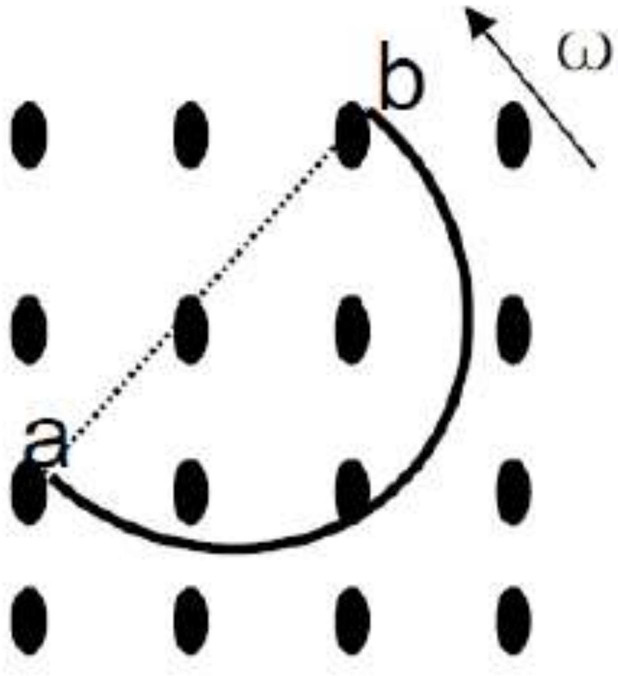
有导体圆盘，如图，绕过圆心 **O** 且垂直圆盘的轴旋转，有匀强磁场 $\vec{B}$ 垂直圆盘，问①导体上的电势分布，②导体上是否有电流？

解：**O** 点电势最高，边缘电势最低。

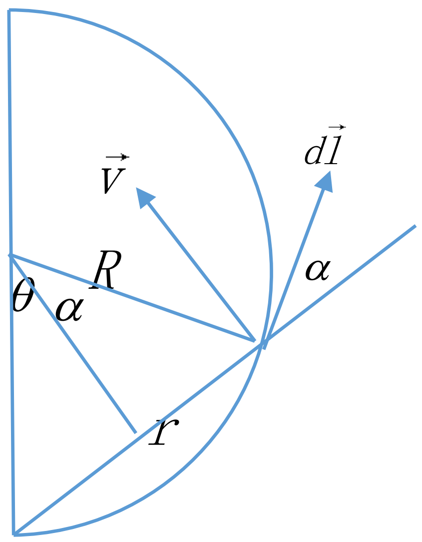
圆盘上任一点 P：$U_{\mathrm{op}} = \dfrac{1}{2}\omega B\overline{op}^{2}$

导体上无电流（与旋转导体棒同理）。

作业题：如图，有匀强磁场B 垂直纸面向外，有半径为R 的半圆弧导体ab，围绕端点a 在纸面内以角速度ω匀速旋转，求导体两端之间的电动势和电势差。



方法1：



$$2\alpha=\theta\ \ ;r=2RSin\alpha$$

$$d\varepsilon=VBCos\alpha\cdot dl=r\omega BCos\alpha\cdot dl$$

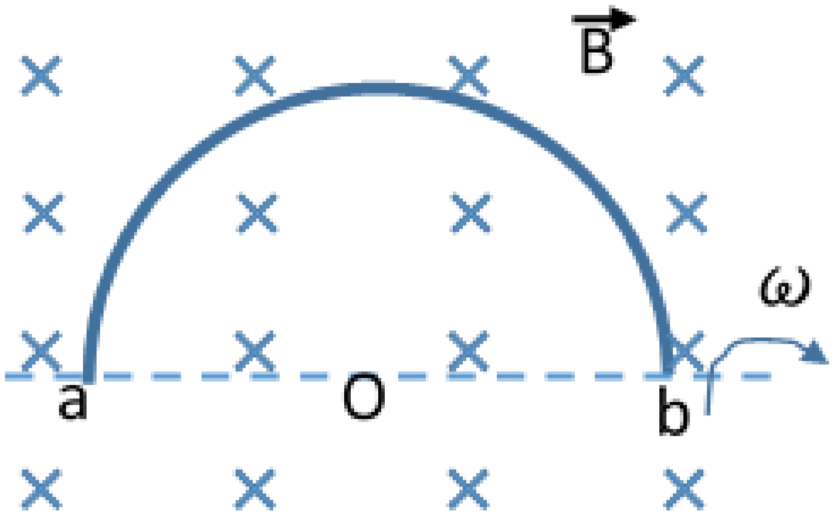
$$=2R\omega BSin\alpha Cos\alpha\cdot dl=R^2\omega BSin2\alpha\cdot d\theta=R^2\omega BSin\theta\cdot d\theta$$

$$\int d\varepsilon=\int_0^{\pi}R^2\omega BSin\theta\cdot d\theta=2R^2\omega B$$

方法2：直导体连接ab，形成闭合回路，则穿过回路的磁通量不变，故 ε =0，所以半圆弧ab与直线段ab的电动势相等。

电动势方向是 a 指向 b，电势差是 $U_{ba}=2B\omega R^2$

- 如图，半圆形导线 绕其直径ab匀角速ω旋转。已知其半径R，及垂直其直径ab的匀强磁场，求ab间电动势的频率和最大值。



解 1：直径 ab 间接入（虚拟的）导体$\overline{ab}$，因$\overline{ab}$不动，故其动生电动势为 0，不影响结果，则可以求闭合回路的感应电动势，代替动生电动势计算：设如图状态为 t=0 时刻。

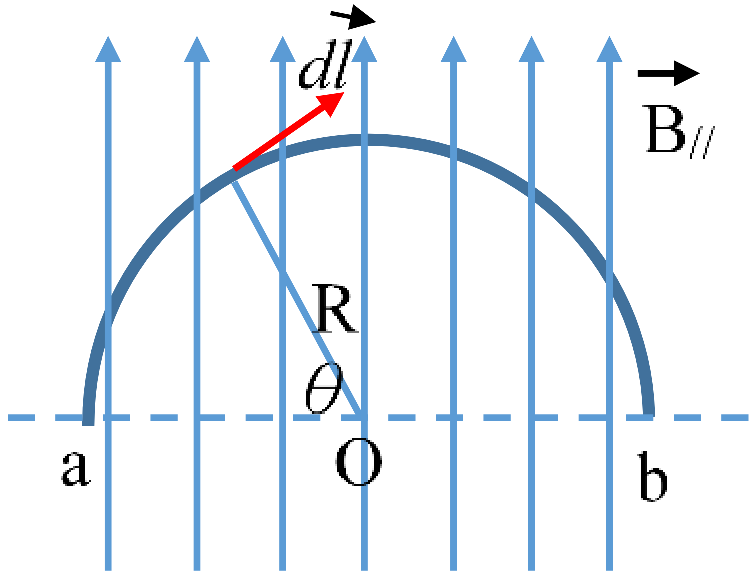
则：$\varepsilon = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{d}{dt}(B \cdot \frac{\pi R^2}{2} \cdot \cos \omega t) = \frac{1}{2}\pi R^2 B\omega \sin \omega t$

可见 ε 变化的圆频率为 ω 。 ε 变化的最大值为$\frac{1}{2}\pi R^2 B\omega$

解 2：该题的积分解法：

任意时刻 t 磁场$\bar{B}$分解为垂直导线平面及平行导线平面的分量。

$B_{\perp} = B\cos\omega t \quad B_{//} = B\sin\omega t$



根据$d\varepsilon = (\vec{V}\times\vec{B})\cdot d\vec{l}$ 知，$\vec{B}_{\perp}$分量

产生的 ε =0

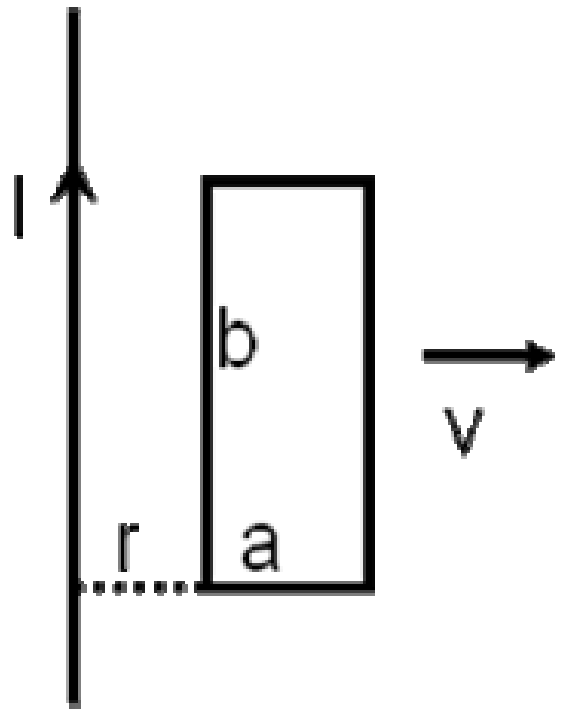
考虑$\vec{B}_{//}$，如图示，环上一点的

$V = \omega R\sin\theta$ 垂直纸面向里

$$d\varepsilon = \omega R\sin\theta\cdot B\sin\omega t\cdot Rd\theta\cdot\sin\theta$$

$$\varepsilon = \omega R^2 B\sin\omega t\int_0^{\pi}\sin^2\theta d\theta = \frac{1}{2}\pi\omega R^2 B\sin\omega t$$

作业题：如图长直载流导线，电流为I，距离r 处有一共面的方形线圈，线圈宽和长分别是a 和b，b 平行导线，线圈以速度v 运动，运动方向与导线垂直，求线圈中的感应电动势（线圈电阻看作无限大）



解：根据安培环路定律可知长直导线的磁感应强度

$$B(r)=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

方形线圈中的磁通量为

$$\begin{aligned}\Phi&=\int B(r)b\,\mathrm{d}r\\&=\int_{r+vt}^{r+vt+a}\frac{\mu_0 Ib}{2\pi r}\mathrm{d}r\\&=\frac{\mu_0 Ib}{2\pi}\ln\frac{r+vt+a}{r+vt}\end{aligned}$$

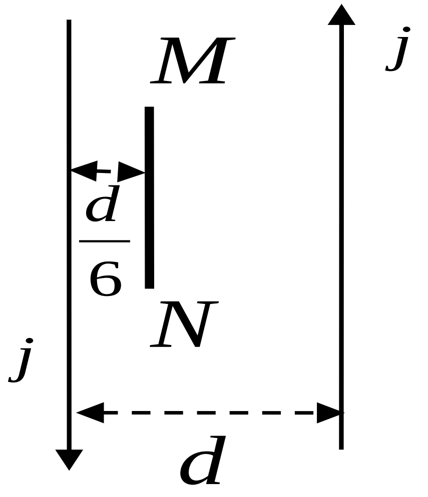
线圈中的感应电动势为

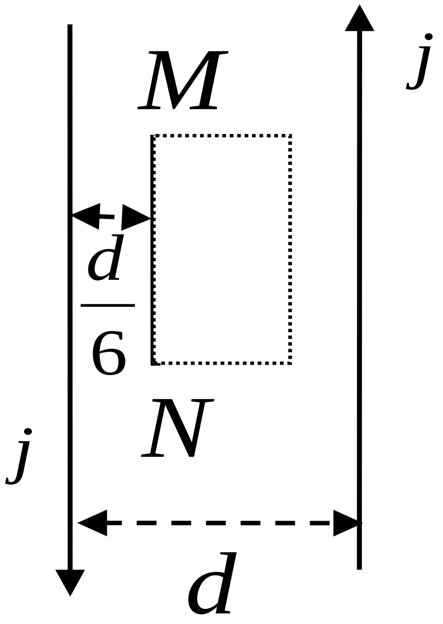
$$\begin{aligned}\varepsilon&=-\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}\\&=-\frac{\mu_0 Ib}{2\pi}\left(\frac{1}{r+vt+a}-\frac{1}{r+vt}\right)\\&=\frac{\mu_0 Iabv}{2\pi(r+vt)(r+vt+a)}\end{aligned}$$

2. 关于感生电动势和涡旋电场的计算

2011 年期末第 5 题

下图为两个互相平行、间距为 d 的无限大电流面的横截面图，电流面密度大小相等方向相反，电流方向如图所示。在两个平面之间有一根长度为 a 的金属棒 MN，该棒与电流面平行且与左侧电流面间距为 d/6。已知面电流密度大小为 j=kt，t 为时间，k 为常数。计算金属棒两端的电势差U_{MN}





解，电流面之间存在均匀磁场，$B=\mu_0 j=\mu_0 kt$，方向为垂直纸面向外。

根据对称性，取如图的虚线方框，根据 $\oint_L \vec{E}_v \cdot d\vec{l}=-\iint \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{s}$，有：

$$2E_v \Delta l=-\mu_0 k\cdot \Delta l\cdot \frac{2d}{3}\quad , \qquad E_v=-\frac{\mu_0 kd}{3}\quad ,$$

$$U_{MN}=\frac{\mu_0 kda}{3}$$

3.互感

例题 9-9

如图 9-27 所示，两只水平放置的同心圆线圈 1 和 2，半径分别为 r 和 R，且 $R \gg r$，已知小线圈 1 内通有电流 $I_1 = I_0 \cos \omega t$，求在大线圈 2 上产生的感应电动势．

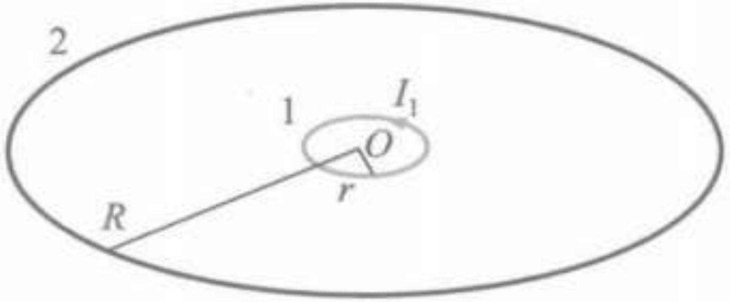


图 9-27

考虑小线圈很小，不妨近似认为I_2在小线圈中产生的磁场为匀强场，

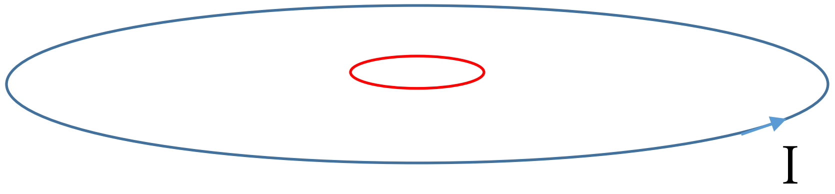
为I_2 圆心处磁场 $B = \dfrac{\mu_0 I_2}{2R}$

小线圈的磁通量近似为 $\Phi_{12} = BS = \dfrac{\mu_0 I_2}{2R} \pi r^2$

则互感系数： $M = \dfrac{\Phi_{12}}{I_2} = \dfrac{\mu_0 \pi r^2}{2R}$

基于M求解题目 $\mathscr{E}_{21} = -M \dfrac{dI_1}{dt} = \dfrac{\mu_0 \pi r^2}{2R} I_0 \omega \sin \omega t$

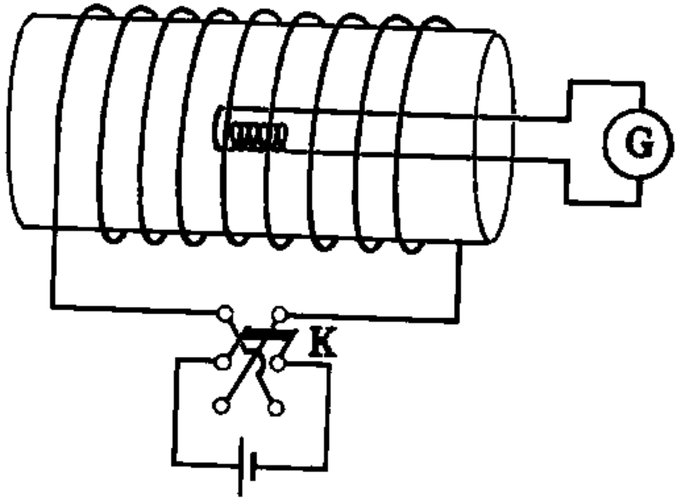
- 半径为r_1的小圆环初始时刻与一半径为r_2 ($r_2>>r_1$)的很大的圆环共面且同心。大环中通以稳恒电流I，另外施加一个外力矩，使小环以角速度ω绕其一条直径做匀角速转动。设小环电阻为R，假设小环的自感可忽略，试求：
- (1) 小环中的感应电流；
- (2) 使小环做匀角速转动时须作用在其上的外力矩；
- (3) 大环中的感生电动势。(不再考虑感应电动势对大环电流的影响，即假设大环电流依然保持为稳恒电流I)



答：(a) 大圆环中的电流在其中心产生的磁感应强度的大小为 $\mathrm{B}=\frac{\mu_0 I}{2r_2}$，而方向垂直于该环所在平面。因为 $r_2>>r_1$，可以认为小圆环处于一匀强磁场中，故通过小圆环的磁通量为 $\phi=\mathrm{BS}\cos\omega t=\frac{\mu_0 I\pi r_1^2}{2r_2}\cos\omega t$，则小圆环中的感应电动势为 $\varepsilon=-\frac{d\phi}{dt}=\frac{\mu_0 I\omega\pi r_1^2}{2r_2}\sin\omega t$ 。因而小圆环中的电流为 $i_1=\frac{\varepsilon}{R}=\frac{\mu_0 I\omega\pi r_1^2}{2r_2 R}\sin\omega t$ 。(b) 小圆环转动时受到的磁力矩的大小为 $\tau=\left|\vec{m}\times\vec{B}\right|=\pi r_1^2 i_1 B\sin\omega t=\frac{\mu_0^2 I^2\pi^2 r_1^4\omega}{4r_2^2 R}\sin^2\omega t$，其中 $\vec{m}$ 为小圆环的磁矩。磁力矩 $\vec{\tau}$ 的方向沿小环的转轴。要使小圆环匀速转动，则外力矩应为 $\vec{\tau}_{external}=-\vec{\tau}$ 。(c) 由小圆环中的磁通量 $\phi_{12}=\frac{\mu_0 I\pi r_1^2}{2r_2}\cos\omega t=MI$ 可得两环之间的互感系数为 $M=\frac{\mu_0\pi r_1^2}{2r_2}\cos\omega t$ 。因此，大环中的感应电动势为 $\varepsilon_2=-\frac{d(Mi_1)}{dt}=-\frac{\mu_0^2 I\pi^2 r_1^4\omega^2}{4r_2^2 R}\cos 2\omega t$ 。

4. 电磁感应的瞬态过程

测量磁场--电磁感应的瞬态过程



题 1. 如图所示为一种测试磁场方法的示意图。有一个密绕的通电螺线管，欲测试螺线管内的磁场。测试装置是一个非常小的密绕螺线圈和一个冲击电流计 G 串联成的闭合回路。用反向开关 K 迅速使螺线管的电流反向时，就可以用小螺线圈测出螺线管中某点的磁感应强度。请说明测试磁场的原理，并给出相应的计算式和必需知道的物理量。（冲击电流计是一种可以测量通过它的电量的仪器。）

答：原理：电流反向，小螺线圈中的磁场方向发生变化，（1）磁通量改变，（2）产生感应电动势，（3）产生电流，（4）闭合回路中通过电荷 Q。

（1）$\Delta\Phi = -2nBS$ （小线圈内的磁通变化量，n是小线圈的总匝数）

（2）$\varepsilon = -\dfrac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$

（3）$i = \dfrac{\varepsilon}{R}$ （小线圈内的电流，R是小线圈回路的总电阻）

（4）$Q = \int i\mathrm{d}t = \int \dfrac{\varepsilon}{R}\mathrm{d}t = \int (-\dfrac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t})\dfrac{1}{R}\mathrm{d}t = -\int \dfrac{\mathrm{d}\Phi}{R} = -\dfrac{\Delta\Phi}{R} = \dfrac{2nBS}{R}$ 故，$B = \dfrac{QR}{2nS}$

需要知道的量：总电阻 R， 冲击电流计的读数Q ，线圈截面积 S（或半径 r） 小线圈的匝数n