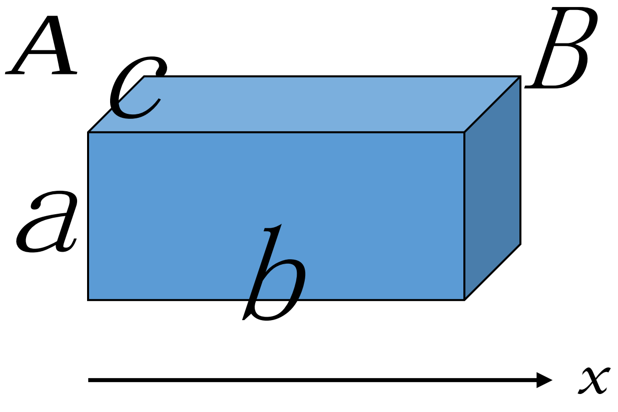
习题课-03

电阻与电路

电阻计算

- 如图有导体AB，A和B两个端面是长宽为a和c的矩形，AB间距b，导体内任一点的电阻率表示为$kx+\rho_0$(x是该点到端面A的距离)，求导体的AB之间的电阻。

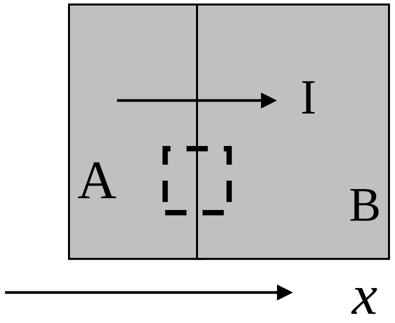


$$R = \int_0^b \frac{\rho}{S}\,dx = \int_0^b \frac{kx + \rho_0}{ac}\,dx = \frac{kb^2 + 2\rho_0 b}{2ac}$$

电路的电场问题

- 1. 讨论电路中导线和电源中的电场方向。
- 2. 习题：（教材1习题3.1）

  如图，有导体A，B连接在一起，通有电流I，电流均匀分布，导体截面积S，已知导体A和B的电导率分别是σ_1和σ_2，求**净**电荷分布。



解：电流密度 $\vec{j}=\hat{i}\dfrac{I}{S}$ A中的电场：$\vec{E}_A=\dfrac{\vec{j}}{\sigma_1}=\hat{i}\dfrac{I}{\sigma_1 S}$

同理，B中电场为：$\vec{E}_B=\hat{i}\dfrac{I}{\sigma_2 S}$ 取如图虚线的高斯面

取如图虚线的高斯面，应用高斯定理得电荷面密度 $\eta=\dfrac{\varepsilon_0 I}{S}\left(\dfrac{1}{\sigma_2}-\dfrac{1}{\sigma_1}\right)$

载流子迁移率与电导率

$$\vec{j} = \frac{nq^2\bar{\tau}}{2m_e}\vec{E}$$

$$\vec{j} = \sigma\vec{E}$$

$$\sigma = \frac{nq^2\bar{\tau}}{2m_e}$$

$$\left.\begin{aligned}\vec{j} &= nq\vec{\mathrm{v}} \\ \vec{\mathrm{v}} &= \mu\vec{E}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{\vec{j} = nq\mu\vec{E}}$$

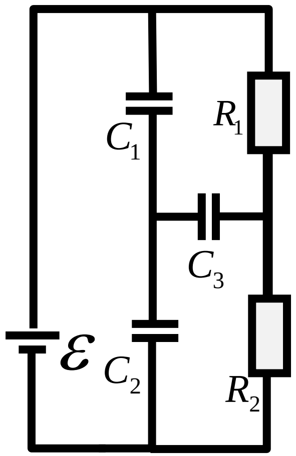
$$\mu = \frac{e\bar{\tau}}{2m_e}$$

$\boldsymbol{\mu}$ 称为**载流子迁移率**

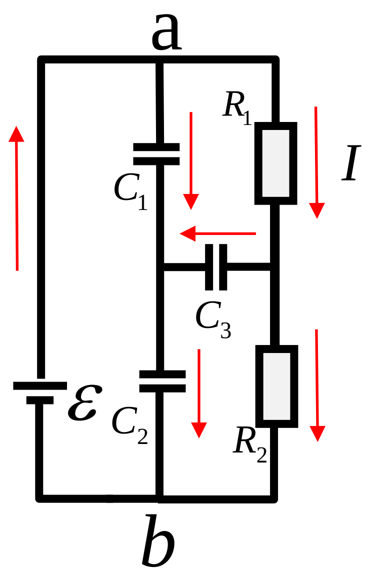
基尔霍夫方程组求解电路总结

- 假设并标识出各个支路的正方向，计算结果的正负号含义，以正方向为参考。
- 分别列出回路电压方程（电场环路定理）和节点电流方程（电荷守恒定律）。
- 独立方程的数目要够，缺少方程则无法求解。

$$\boxed{\sum I_{\text{流入结点}} = \sum I_{\text{流出结点}}} \qquad \boxed{\sum_{\text{回路}} U = 0}$$



- 如图，已知电路，三个电容器的值相等为C。求三个电容器各自所带的电荷量。



假设电路中各条支路上的正方向（电流或者电压的正方向）如图所示，支路电流假设为I，列三个回路电压方程如下

$$-\varepsilon + IR_1 + IR_2 = 0 \qquad IR_1 + \frac{Q_3}{C} - \frac{Q_1}{C} = 0 \qquad IR_2 - \frac{Q_2}{C} - \frac{Q_3}{C} = 0$$

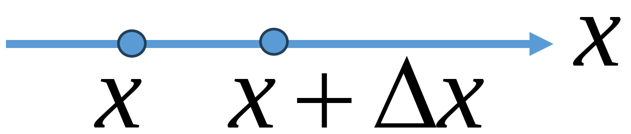
式中的电容的电荷量是正极板上的电荷量。

考虑三个电容连接点的**节点方程**： $-Q_1 + Q_2 - Q_3 = 0$

联立如上方程求得：

$$Q_1 = \frac{2R_1 + R_2}{2(R_1 + R_2)}\varepsilon C \qquad Q_2 = \frac{R_1 + 2R_2}{2(R_1 + R_2)}\varepsilon C \qquad Q_3 = \frac{R_2 - R_1}{2(R_1 + R_2)}\varepsilon C$$

* 扩散定律



- 假设有一维系统，x和x+dx两个临近微元的载流子浓度n(x)与n(x+Δx), 考虑热运动导致的电流，利用公式J=nqv（注意这里v表示热运动速度，而非漂移速度）
- 热运动导致载流子向x正方向和负方向运动的概率相等，为1/2
- 则 $$J=\frac{1}{2}(n(x)-n(x+\Delta x))q\mathrm{v}\approx\frac{1}{2}q\mathrm{v}\cdot(-\frac{dn}{dx}\Delta x)$$

这就是扩散定律： $$J=-qD\cdot\frac{dn}{dx}$$

$D=\mathrm{v}\cdot\Delta x$ 称为扩散系数（单位是m^2/s），
Δx是平均自由程，即热运动平均运动步长

* 扩散电流

- Fick 第一扩散定律

(C表示浓度，J表示流密度，D表示扩散系数)

$$J = -\mathrm{D}\frac{\partial \mathrm{C}}{\partial x}$$ 一维形式

$$\boldsymbol{J} = -D \cdot \nabla C$$ 三维形式

扩散电流密度

(J表示电流密度)

$$J = -q\mathrm{D}\frac{\partial C}{\partial x}$$

$$\boldsymbol{J} = -\mathrm{q}D \cdot \nabla C$$

- Fick 第二扩散定律

已知连续方程：$$\frac{\partial C}{\partial t} = -\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{J}$$

带入第一扩散定律 ⇨ $$\frac{\partial C}{\partial t} = D\,\nabla^2 C$$

电流连续方程

(J表示电流密度)

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{J}$$

⇨ $$\frac{\partial C}{\partial t} = qD\,\nabla^2 C$$

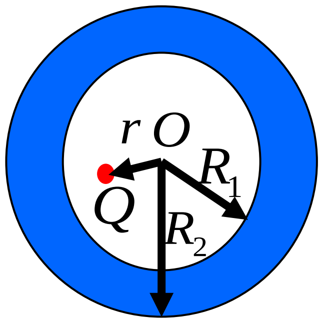
关于温差电动势和接触电动势

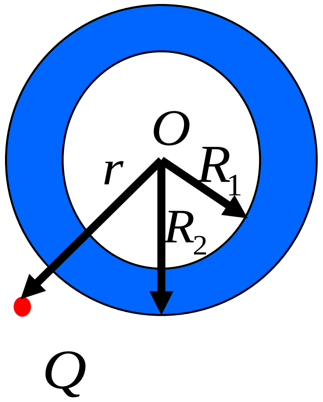
- 非静电力驱动电荷运动形成电流的机制，都可称为电动势。
- 载流子通过热扩散作用也可形成电流，称为**扩散电流**。也可等效视为一种电动势。
  - 如果导体两端存在温度差异，则可以形成扩散电流，因载流子温度不同，热运动速度不同，形成载流子从高温端向低温端扩散，称为汤姆逊电动势。（热电效应）
  - 如果不同种类的材料接触，因两种材料的载流子浓度差异，载流子会从高浓度区向低浓度区扩散，称为佩尔捷电动势。
  - 其他名称：塞贝克电动势，温差电动势

导体的静电平衡

空腔导体平衡1

- 有金属球壳原本不带电，已知内外半径为R_1和R_2，请考虑如下两种情况，请对于球壳内外表面电荷分布以及球壳内外电场分布进行简要说明。可以用文字、公式、图示（包括电力线、电荷分布）。
  - (1) 若将点电荷Q>0置于球内离球心r处，且$r<R_1$，
  - (2)若将点电荷Q>0置于球外离球心r处，且$r>R_2$，

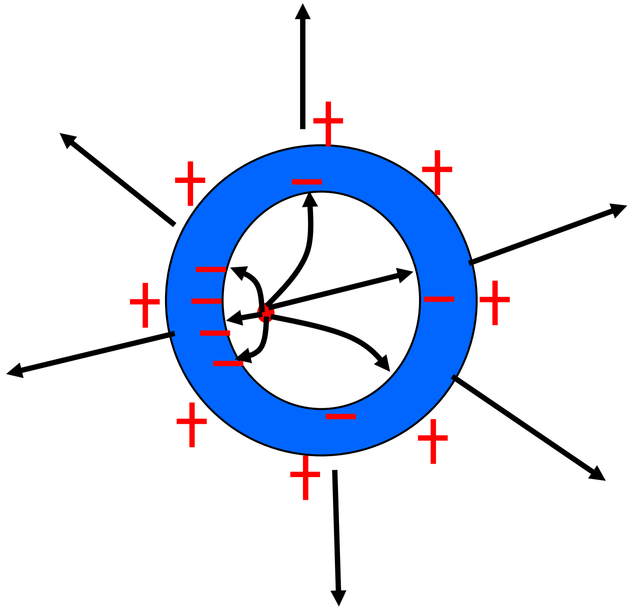




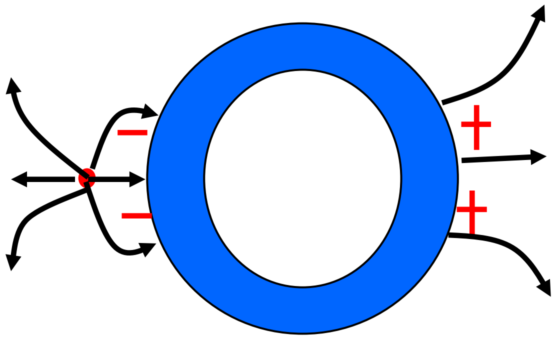
空腔导体平衡1

- (1) 若将点电荷Q>0置于球内离球心r处，且$r<R_1$
  - 球壳内表面带电量-Q；外表面Q，且外表面是均匀电荷分布，表面外场强是

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\hat{r}$$



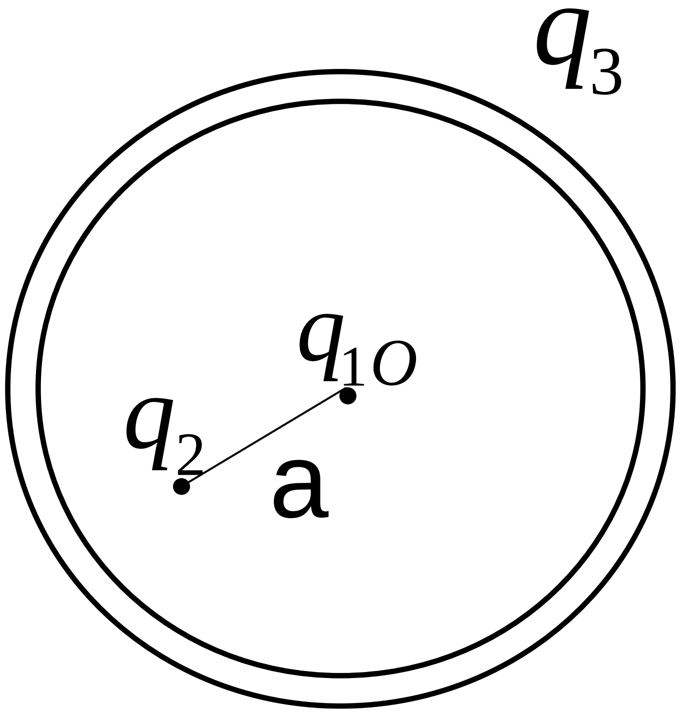
- (2)若将点电荷Q>0置于球外离球心r处，且$r>R_2$
  - 球壳内表面无电荷分布；外表面有正和负电荷，总电量为零。



（注意：电场线与导体表面是垂直的）

空腔导体平衡2

习题2.3



有导体球壳， 原带电量 q_3，外半径为R ，厚度d

如图球内放入两个点电荷 q_1和 q_2

求导体球壳的电势

$$U = \frac{q_1 + q_2 + q_3}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

球外是球对称电场分布

导体平衡-技巧题

- 有一个半径为R的导体球，原本带电Q，现在放一个电量为q的点电荷在球外，距离球心2R，求导体球的电势。

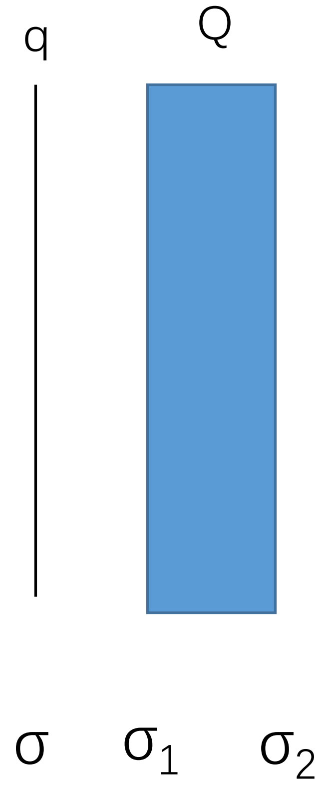
- 解：导体为等势体，计算球心处的电势：

注意球面上的感应电荷总量为零

$$U = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 \cdot 2R} + \int_{球面} \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 \cdot R} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 R}\left(\frac{q}{2} + Q\right)$$

7-44题

- 如图，有一均匀带电面，总电量q，平行放置的导体带电量Q，间距为d且远小于板的线度,两板面积均为S。求两者的电势差



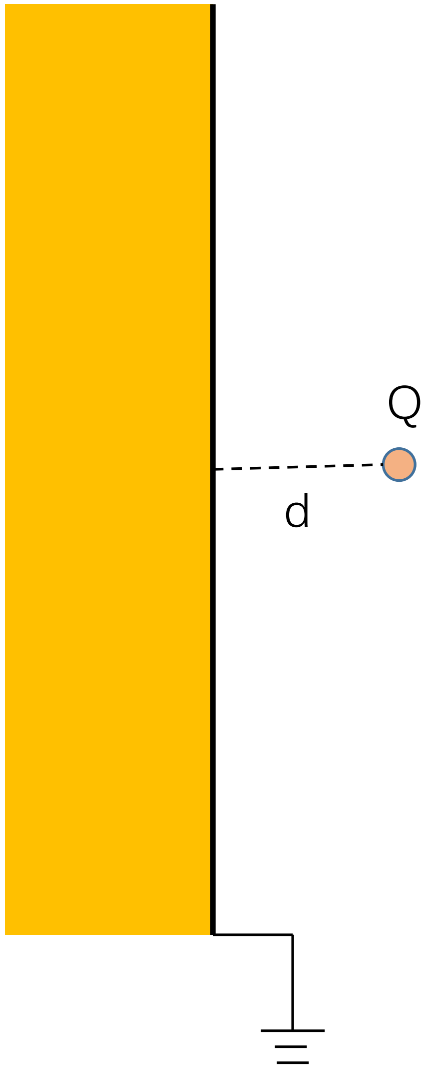
如图，设三个面电荷密度, 可得无限大面电荷的电场强度分布

导体静电平衡条件得: $\frac{1}{2\varepsilon_0}(\sigma+\sigma_1-\sigma_2)=0$ $\quad \sigma=\frac{q}{S} \quad \sigma_1+\sigma_2=\frac{Q}{S}$

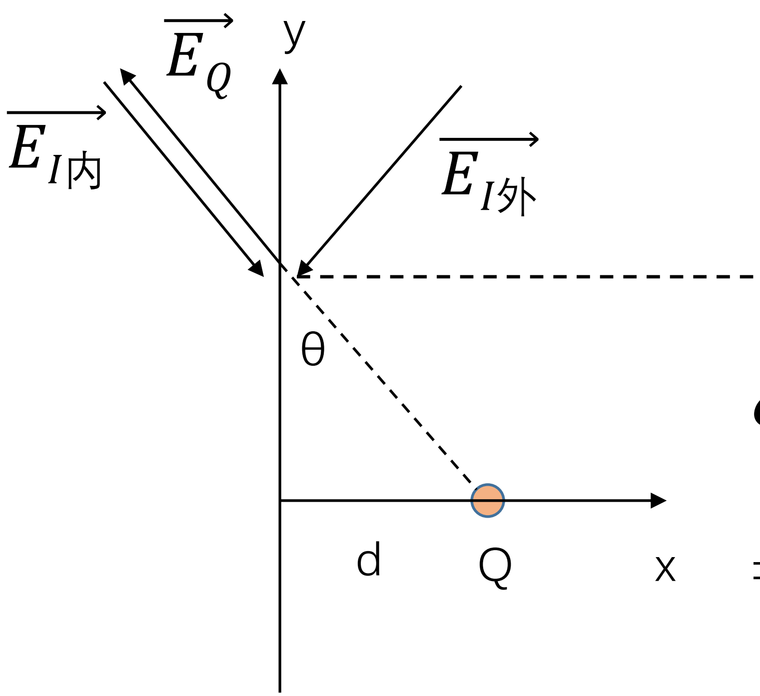
$$\sigma_1=\frac{Q-q}{2S} \qquad \sigma_2=\frac{Q+q}{2S}$$

$$E=\frac{1}{2\varepsilon_0}(\sigma-\sigma_1-\sigma_2)=\frac{(q-Q)}{2\varepsilon_0 S} \qquad U_{AB}=\frac{(q-Q)d}{2\varepsilon_0 S}$$

如图，半无限大导体接地，表面前距离d处有一点电荷Q，求导体表面上的电荷分布。



- 如图，$E_{I内}$和$E_{I外}$是感应电荷在内外两侧产生的对称的电场强度



$$E_{Qx} = E_{I外x}$$

$$\sigma_e = \varepsilon_0 (E_{I外x} + E_{Qx}) = 2\varepsilon_0 E_{Qx}$$

$$= -2\varepsilon_0 \left|E_Q\right| Sin\theta = -\frac{Q}{2\pi}\frac{d}{\left(d^2 + y^2\right)^{3/2}}$$

电介质

填充两种介质的三块金属板

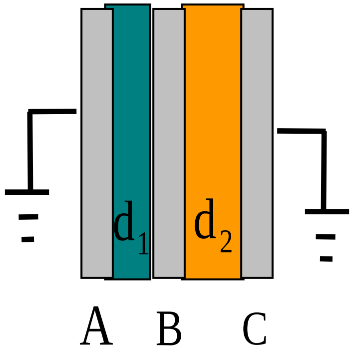
- 如图，三块大金属板，平行正对，间距d_1和d_2均远小于金属板的线度，边缘效应可以忽略，板的面积均为S，其中B板的带电量为Q，A板和C板接地。AB之间填充电介质,相对介电常数 ε_{r1}，BC间填充相对介电常数 ε_{r2}的电介质，求B板的电势。

$$U_B = E_{BA}\times d_1 = E_{BC}\times d_2 \qquad (1)$$

$$S\sigma_{B右面} + S\sigma_{B左面} = Q \qquad (2)$$

$$D_{\mathrm{BA}} = \sigma_{B左面} \Rightarrow \mathrm{E}_{\mathrm{BA}} = \frac{\sigma_{B左面}}{\varepsilon_0\varepsilon_{\mathrm{r}1}} \qquad (3)$$

$$D_{\mathrm{BC}} = \sigma_{B右面} \Rightarrow \mathrm{E}_{\mathrm{BC}} = \frac{\sigma_{B右面}}{\varepsilon_0\varepsilon_{r2}} \qquad (4)$$



(1)代入（3）（4）再代入（2）

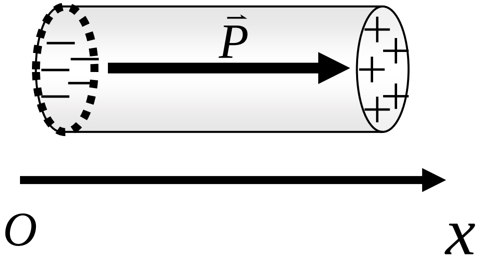
$$\frac{U_B}{d_1}\varepsilon_0\varepsilon_{r1} + \frac{U_B}{d_2}\varepsilon_0\varepsilon_{r2} = \frac{Q}{S}$$

可得 $$U_B = \frac{Qd_1d_2}{S\varepsilon_0(\varepsilon_{r1}d_2 + \varepsilon_{r2}d_1)}$$

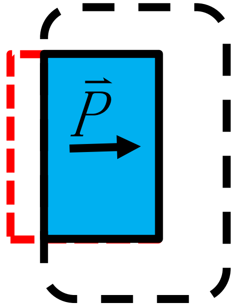
极化强度与极化电荷

- 极化电荷与极化强度：

$$\boxed{\sigma_P = \vec{P}\cdot\hat{n}}$$



$$\boxed{Q_{p内} = -\oiint_S \vec{P}\cdot d\vec{S}}$$



$$Q_{p内} = -\oiint_S \vec{P}\cdot d\vec{S}$$

- 极化电荷体密度

$$\left.\begin{aligned} Q &= -\oiint_S \vec{P}\cdot d\vec{S} \\ Q &= \iiint_V \rho_p d\tau \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} -\oiint_S \vec{P}\cdot d\vec{S} &= \iiint_V \rho_p \cdot d\tau \\ \oiint_S \vec{P}\cdot d\vec{S} &= \iiint_V \nabla\cdot\vec{P}\cdot d\tau \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{\nabla\cdot\vec{P} = -\rho_p}$$

矢量场的高斯定理

ρ_p是极化电荷体密度

均匀线性各向同性电介质的极化电荷

- 若均匀电介质在连续外场下极化，体内极化强度应连续，则此时有如下结论：
  - 电介质体内极化电荷体密度处处为零。证明：

$$\left.\begin{aligned}\nabla\cdot\vec{P}&=-\rho_p\\ \vec{P}&=\chi_e\varepsilon_0\vec{E}\end{aligned}\right\}\quad \left.\begin{aligned}\rho_p=-\nabla\cdot\vec{P}=-\chi_e\varepsilon_0\nabla\cdot\vec{E}\\ \nabla\cdot\vec{E}=\rho_p/\varepsilon_0\end{aligned}\right\}$$

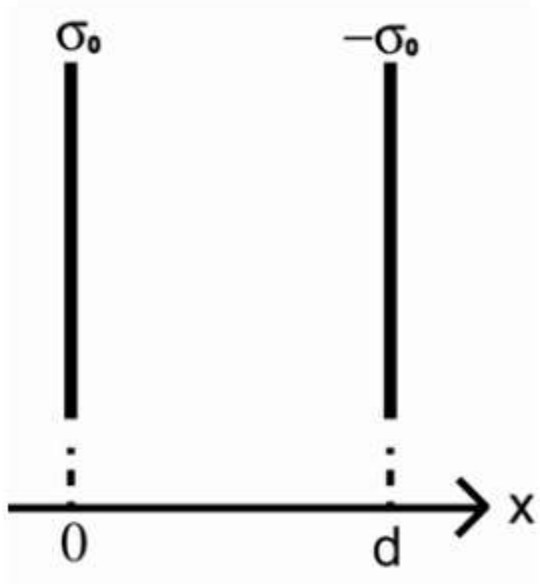
注：如果有自由电荷：

$$\nabla\cdot\vec{E}=(\rho_p+\rho_0)/\varepsilon_0$$

$$\Rightarrow\quad \rho_P=-\chi_e\rho_P\quad\Rightarrow\quad \rho_p=0$$

- **故均匀各向同性线性电介质的极化电荷只能分布在表面上，只有极化面电荷。**

- 2011年期末试题
- (2011年期末) 如图所示，平行板电容器两极板上的自由电荷面密度分别为σ_0和-σ_0(其中σ_0是常数)，两极板间距为d，在两个极板之间充满了各向同性线性非均匀电介质，而且电介质的电极化率$\chi_e(x)$为 $\chi_e(x)= \chi_0(1+ \alpha x)$
- 其中χ_0和α为常数。求(1)电介质两个表面上的极化面电荷密度$\sigma'(0)$和$\sigma'(d)$；(2)电介质内极化体电荷密度的分布$\rho'(x)$。



由高斯定理可得 $D=\sigma_0$ $E(x)=\frac{D}{\varepsilon_r(x)\varepsilon_0}=\frac{\sigma_0}{[1+\chi_e(x)]\varepsilon_0}$

$$P(x)=\chi_e(x)\varepsilon_0 E=\frac{\chi_e(x)}{1+\chi_e(x)}\sigma_0$$

$$\sigma'(0)=\vec{P}\cdot\vec{n}=-P(0)=-\frac{\chi_e(0)}{1+\chi_e(0)}\sigma_0=-\frac{\chi_0}{1+\chi_0}\sigma_0$$

$$\sigma'(d)=\vec{P}\cdot\vec{n}=P(d)=\frac{\chi_e(d)}{1+\chi_e(d)}\sigma_0=\frac{\chi_0(1+\alpha d)}{1+\chi_0(1+\alpha d)}\sigma_0$$

$$\rho'(x)=-\nabla\cdot\vec{P}=-\frac{dP(x)}{dx}=-\frac{d}{dx}[1-\frac{1}{1+\chi_e(x)}]\sigma_0=\sigma_0\frac{d}{dx}\frac{1}{1+\chi_e(x)}=-\sigma_0\frac{\alpha\chi_0}{[1+\chi_0(1+\alpha x)]^2}$$