

图论

第三讲：树与最小生成树

方聪

2024 年秋季

① 无向树的定义与性质

② 生成树

③ 根树

① 无向树的定义与性质

② 生成树

③ 根树

无向树

- 无向树：连通无回路（指初级和简单回路）的无向图称为无向树
- 树：常用 T 表示树
- 森林：无向图至少有两个连通分支且每个连通分支都是树
- 平凡树：平凡图（无树叶，无分支点）
- 树叶：树中 1 度的顶点， $d(v) = 1$
- 分支点：树中 2 度以上顶点， $d(v) \geq 2$

树的等价定义

定理 (树的等价定义)

设 $G = \langle V, E \rangle$ 是 n 阶 m 边无向图, 则以下命题等价

- ① G 是树 (连通无回路)
- ② G 中任何 2 顶点之间有唯一路径
- ③ G 无圈 $\wedge m = n - 1$
- ④ G 连通 $\wedge m = n - 1$
- ⑤ G 极小连通: 连通 \wedge 所有边是桥
- ⑥ G 极大无回: 无圈 \wedge 增加任何新边得唯一圈

树的等价定义

证明.

$1 \Rightarrow 2$: 根据 G 的连通性, 任取 $u, v \in V$, u, v 之间存在通路, 设 P_1 为 u, v 之间通路, 根据 G 中无回路可知 P_1 一定为路径。设 P_1 不唯一, P_2 为 u, v 之间另一路径, 则存在边 $e'_1 = (v_x, v'_1)$ 只在 P_1 上或只在 P_2 上, 设 e'_1 只在 P_2 上, 若还有与 e'_1 相邻的边 e'_2 只在 P_2 上, 得通路 $e'_1 e'_2$ 只在 P_2 上, 以此类推得 $e'_1 e'_2 \cdots e'_k$ 只在 P_2 上, $e'_k = (v'_k, v_y)$ 且 v_x, v_y 为 P_1 和 P_2 的公共顶点, 因此可构造一条回路, 矛盾 \square

树的等价定义

证明.

$2 \Rightarrow 3$: 先证明 G 中无圈, 若 G 中存在顶点 v 上的环, 则 v 到 v 存在两条路径, 长度为 0 和 1, 矛盾, 若 G 中存在长度大于等于 2 的圈, 则圈上任取 2 顶点均可构造两条路径, 矛盾。

再证明 $m = n - 1$, $n = 1$ 时, 由于 G 中无圈, $m = 0$, 结论成立; 设 $n \leq k$ 时结论成立, 当 $n = k + 1$ 时, 设 $e = (u, v)$ 为 G 中一条边, 则 $G - e$ 一定有两个连通分支, 否则若 $G - e$ 连通, u, v 之间有圈。设连通分支为 G_1, G_2 , 其顶点数和边数记为 n_1, n_2 和 m_1, m_2 , 根据归纳假设有 $m_i = n_i - 1$, 则

$$m = m_1 + m_2 + 1 = n - 1$$


树的等价定义

证明.

$3 \Rightarrow 4$: 只需证明 G 连通。若 G 不连通, 则设 G 有 s 个连通分支 G_1, \dots, G_s , G_i 均为连通无回路的图, 即树。根据 3, $m_i = n_i - 1$, 因此 $m = \sum_{i=1}^s m_i = n - s$, 由于 $s \geq 2$, 因此与 $m = n - 1$ 矛盾

$4 \Rightarrow 5$: 任取 $e \in E$, 有 $|E(G - e)| = n - 1 - 1 = n - 2$, 根据定理 7.9 (任何无向连通图的边数大于等于顶点数-1) 可知, $G - e$ 不连通, 因此 e 为桥 □

树的等价定义

证明.

$5 \Rightarrow 6$: 由于 G 中每条边均为桥, G 中一定没有圈, 又 G 连通, 则 G 为树。因此任取 $u, v \in V$, u, v 之间存在唯一路径 P , 则 $P \cup (u, v)$ 为 $G \cup (u, v)$ 中唯一的圈

$6 \Rightarrow 1$: 只需证明 G 连通, 由于任取 $u, v \in V$, $G \cup (u, v)$ 中存在唯一的圈 C , 则 $C - (u, v)$ 为 G 中 u, v 之间的通路, 根据 u, v 的任意性, G 连通 □

树的性质

:

定理 (树的性质)

n 阶非平凡树至少有 2 个树叶

证明.

设 T 有 x 个树叶, 由树的等价定义和握手定理, 有

$$\begin{aligned} 2m &= 2(n-1) = 2n-2 = \sum d(v) \\ &= \sum_{v \text{ 是树叶}} d(v) + \sum_{v \text{ 是分支点}} d(v) \\ &\geq x + 2(n-x) = 2n-x, \end{aligned} \tag{1}$$

所以 $x \geq 2$

□

无向树的计数

设 $t_n : n \geq 1$ 为 n 阶非同构无向树的个数

n	t_n	n	t_n	n	t_n	n	t_n
1	1	9	47	17	48629	25	104636890
2	1	10	106	18	123867	26	279793450
3	1	11	235	19	317955	27	751065460
4	2	12	551	20	823065	28	2023443032
5	3	13	1301	21	2144505	29	5469566585
6	6	14	3159	22	5623756	30	14830871802
7	11	15	7741	23	14828074	31	40330829030
8	23	16	19320	24	39299897	32	109972410221

图 1: 无向树的计数

无向树的计数

六阶非同构无向树: $n = 6$, $t_6 = 6$

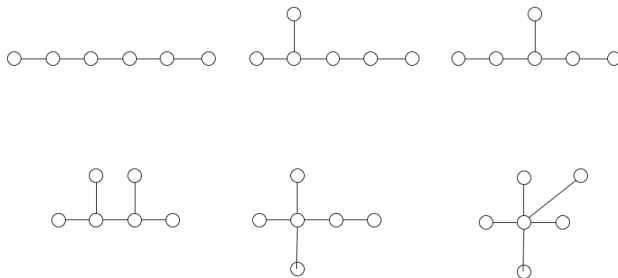


图 2: 六阶非同构无向树

无向树的计数

七阶非同构无向树: $n = 7$, $t_7 = 11$

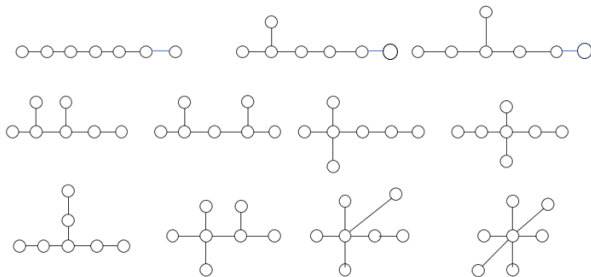


图 3: 七阶非同构无向树

无向树的定义与性质

例 1: 如果树中没有度数为 2 的顶点, 证明树叶的个数不少于分支节点的个数。

证明.

当 $n = 1$ 时, 树叶和分支节点的个数相等, 都是 0;

当 $n \geq 2$ 时, 设度数为 1, 2, 3, \dots 的顶点数分别为 n_1, n_2, n_3, \dots , 则有

$$n_1 + n_2 + n_3 + \dots = n$$

$$n_1 + 2n_2 + 3n_3 + \dots = 2(n - 1),$$

1 式乘 2 减 2 式可得 $n_1 > n_3 + 2n_4 + \dots > n_2 + n_3 + n_4 \dots$
($n_2 = 0$)



① 无向树的定义与性质

② 生成树

③ 根树

生成树的定义

- 生成树: $T \subseteq G \wedge V(T) = V(G) \wedge T$ 是树
- 树枝: $e \in E(T)$, 共有 $n - 1$ 条
- 弦: $e \in E(G) - E(T)$, 共有 $m - n + 1$ 条
- 余树: $G[E(G) - E(T)] = \overline{T}$

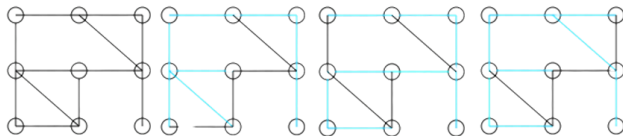


图 4: 生成树

存在生成树的充要条件

定理 (存在生成树的充要条件)

无向图 G 连通 $\iff G$ 有生成树

证明.

(\Leftarrow) 显然, (\Rightarrow) 破圈法

若 G 无圈, 则 G 为自己的生成树。若 G 中含圈, 任取一个圈 C , 任意删除 C 上任何一条边, 所得图仍然是连通的, 继续这一过程, 直到最后得到的图无圈为止。设最后的图为 T , 则 T 是连通的且是 G 的生成子图



存在生成树的充要条件

推论

- 推论 1: G 是 n 阶 m 边无向连通图 $\Rightarrow m \geq n - 1$
- 推论 2: T 是 n 阶 m 边无向连通图 G 的生成树 $\Rightarrow |E(\bar{T})| = m - n + 1$
- 推论 3: T 是连通图 G 中一棵生成树, \bar{T} 是 T 的余树, C 为 G 中任意圈, 则 $E(\bar{T}) \cap E(C) \neq \emptyset$

推论 3 的证明.

(反证法) 如果 $E(\bar{T}) \cap E(C) = \emptyset$, 则 $E(C) = E(T)$, T 中有回路与 T 是树矛盾



弦与圈

定理 (弦与圈)

T 是无向连通图 G 的生成树, e 为 T 的任意一条弦, 则 $T \cup e$ 中含 G 的只含一条弦其余边均为树枝的圈, 而且不同的弦对应的圈是不同的

证明.

设 $e = (u, v)$, 则 u, v 之间在 T 中存在唯一的路径 $P(u, v)$ 。则 $P(u, v) \cup e$ 为 G 中只含弦 e 其余边均为树枝的圈。当 e_1, e_2 不同时, e_2 不在 e_1 对应的圈 C_{e_1} 中, e_1 不在 e_2 对应的圈 C_{e_2} 中 \square

生成树的计数

- $\tau(G)$: 标定图 G 的生成树的个数
- 若 $E(T_1) \neq E(T_2)$, 则认为 $T_1 \neq T_2$
- $G - e$: 删除
- $G \setminus e$: 收缩

生成树的计数

定理

n 阶无向连通标定图, 对 G 的任意非环边 e , 有
$$\tau(G) = \tau(G - e) + \tau(G \setminus e)$$

证明.

$\forall e$ 非环, 则

- 不含 e 的 G 的生成树个数: $\tau(G - e)$,
- 含 e 的 G 的生成树个数: $\tau(G \setminus e)$



注意: 由于环不在任何生成树中, 因而在计算过程中若出现环应自动将环去掉

例：计算图 5 标定图中生成树的个数，并画出所有不同的生成树。

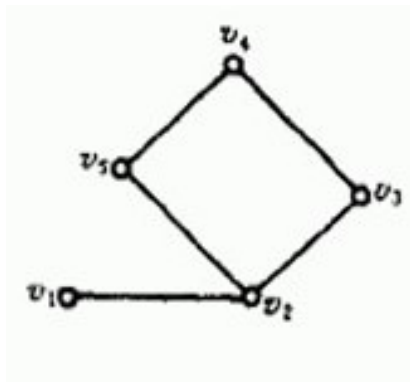


图 5:

解：图 6(a) 给出了求 $\tau(G)$ 的计算过程，带杠边表示在下一步删除和收缩的边。图 6(b) 给出了 G 的 4 棵不同的生成树。

$$\begin{aligned}
 & \tau(G) \\
 &= \tau(G - e_1) + \tau(G - e_2) \\
 &= 0 + \tau(G - e_1 - e_2) + \tau(G - e_1 - e_2 - e_3) \\
 &= 1 + \tau(G - e_1 - e_2 - e_3 - e_4) + \tau(G - e_1 - e_2 - e_3 - e_4 - e_5) \\
 &= 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 4
 \end{aligned}$$

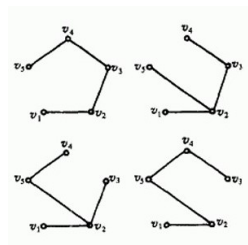


图 6:

① 无向树的定义与性质

② 生成树

③ 根树

根树的定义

- 有向树: 基图是树的有向图
- 根树: 若有向树 T 是平凡树或 T 中有一个顶点的入度为 0, 其余顶点的入度均为 1, 则 T 为根树
- 树根: 入度为 0 的顶点
- 树叶: 入度为 1 出度为 0 的顶点
- 内点: 入度为 1 出度不为 0 的顶点
- 分支点: 树根和内点
- 层数: 树根到 v 的路径长度
- 树高: 层数最大的顶点的层数

儿子，兄弟与父亲

- 儿子: u 在上方与 v 相邻, v 是 u 的儿子
- 父亲: u 在上方与 v 相邻, u 是 v 的父亲
- 兄弟: u 与 v 有相同父亲, u 是 v 的兄弟
- 祖先: 从 u 可达 v , u 是 v 的祖先
- 后代: 从 u 可达 v , u 是 v 的后代

有序树

有序树: 给相同层数的顶点标上次序的根树

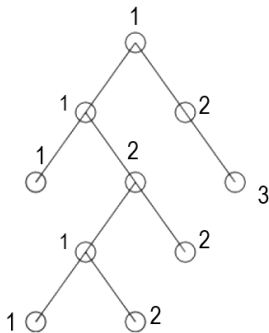


图 7: 有序树

r 叉树

- r 叉树: 每个分支点至多有 r 个儿子
- 正则 r 叉树: 每个分支点恰好有 r 个儿子
- 完全正则 r 叉树: 树叶的层数均为树高的 r 叉正则树
- 有序 r 叉树, 有序正则 r 叉树, 有序完全正则 r 叉树

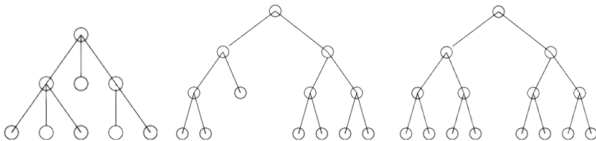


图 8: r 叉树

根子树

- 根子树: T 是根树, $v \in V(T)$, 由 v 本身及其所有后代导出的子图 T_v
- 左子树, 右子树: 二叉树中分支点的左右两个儿子导出的根子树

根树的周游

根树的周游: 列出根树的所有顶点, 每个顶点恰好出现一次

- 中序行遍: 左子树, 根, 右子树
- 前序行遍: 根, 左子树, 右子树
- 后序行遍: 左子树, 右子树, 根

根数的周游举例

- 中序: dbigjehacf
- 前序: abdegijhcf
- 后序: dijghebfc

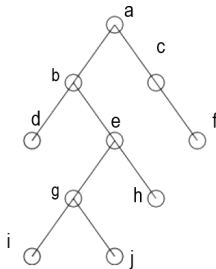


图 9: 根树的周游

中缀法，前缀法，后缀法

- 中缀: $((a * (b + c)) * d - e) \div (f + g) \div (h * (i + j))$
- 前缀 (波兰): $\div \div - * * a + bcde + fg * h + ij$
- 后缀 (逆波兰): $abc + * d * e - fg + \div hij + * \div$

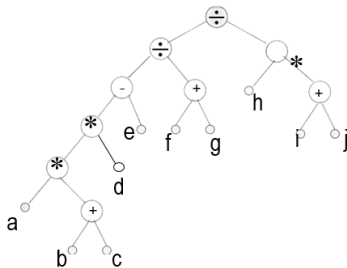


图 10: 表达式

根树

例 4: 证明一个有向树 T 是根树, 当且仅当 T 中有且仅有一个顶点的入度为 0

证明.

\Rightarrow 显然

\Leftarrow 若 T 为平凡树一定为真, 下面证明非平凡树的情况, 归纳 $n=2$ 时, T 两个顶点入度分别为 0, 1, T 是根树;

设 $n=k$ 时结论为真, 考虑 $n=k+1$ 时, 设 T' 为 T 的基图, 则 T' 为 $k+1$ 阶无向树, 因此其至少有两片树叶 (定理 9.2).

则 T 中至少存在一个顶点 v_0 满足其入度为 1, 出度为 0. 设 $T_1 = T - v_0$, 则 T_1 为 k 阶树, 且 T 中入度为 0 的顶点都在 T_1 中, 根据条件与归纳假设, T_1 中有一个顶点的入度为 0, 出度为 1, 其为 k 阶根树. 设 v_0 在 T 中的父亲为 v_1 , 则 $T = T_1 \cup \langle v_1, v_0 \rangle$, 因此 T 中除一个顶点入度为 0 外其余顶点入度均为 1, 其为根树