例10.2.1. 设$f_n(x) \in C[a,b]$, $\forall n \in \mathbb{N}$, 且$\{f_n(x)\}$于(a,b)一致收敛, 则$\{f_n(x)\}$于$[a,b]$一致收敛.

(闭区间上连续函数列的一致收敛不可能抛开端点.)

证明. 往证: $f_n(a), f_n(b)$都收敛.

设$\{f_n(x)\}$于(a,b)一致收敛于$f(x)$, 则 $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N$ s.t. $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$, $\forall n, m > N$, $\forall x \in (a,b)$.

在上式中任意固定n和m, 分别令$x \to a+0$和$x \to b-0$, 则由$f_n(x)$在$[a,b]$的连续性得

$$|f_n(a) - f_m(a)| \leqslant \varepsilon, \quad |f_n(b) - f_m(b)| \leqslant \varepsilon, \quad \forall n, m > N.$$

即$\{f_n(a)\}$, $\{f_n(b)\}$是两个Cauchy列, 所以存在$A, B \in \mathbb{R}$使得 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(a) = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(b) = B$.

i.e. $\exists N_1$ s.t. $|f_n(a) - A| < \varepsilon$, $\forall n > N_1$; $\exists N_2$ s.t. $|f_n(b) - B| < \varepsilon$, $\forall n > N_2$.

令$\tilde{f}(x) = \begin{cases} A, & x = a \\ f(x), & x \in (a,b) \\ B, & x = b \end{cases}$, 则$\forall \varepsilon > 0$, 取$N_0 = \max\{N, N_1, N_2\}$时,

$$|f_n(x) - \tilde{f}(x)| < \varepsilon, \quad \forall n > N_0, \quad \forall x \in [a,b]. \text{ 所以, } f_n(x) \rightrightarrows \tilde{f}(x), \quad x \in [a,b]. \qquad \square$$

例10.2.4. 证明函数列$f_n(x)=n^2(e^{\frac{1}{nx}}-1)\sin\frac{1}{nx}$ $(n\in\mathbb{N})$于$[a,+\infty)$ $(a>0)$一致收敛性.

解:

(1)对任意固定的$x\in[a,+\infty)$,

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\lim_{n\to\infty}n^2(e^{\frac{1}{nx}}-1)\sin\frac{1}{nx}\ \overset{\frac{1}{nx}=t}{=\!=\!=}\ \lim_{t\to0+0}\frac{1}{x^2t^2}(e^t-1)\sin t\ =\frac{1}{x^2},$$

$$i.e.\ \ f_n(x)\to\frac{1}{x^2}\ \ (n\to\infty),\ x\in[a,+\infty).$$

(2) $$\left|f_n(x)-\frac{1}{x^2}\right|=\left|n^2(e^{\frac{1}{nx}}-1)\sin\frac{1}{nx}-\frac{1}{x^2}\right|$$

$$\boxed{f(t)=e^t,\quad f(t)=f(0)+f'(0)t+\frac{f''(\xi)}{2}t^2,\ \xi\in(0,t).\quad\Rightarrow\quad e^t-1=t+\frac{e^\xi}{2}t^2.}$$

由于$e^{\frac{1}{nx}}-1=\frac{1}{nx}+\frac{e^\xi}{2}(\frac{1}{nx})^2,\quad 0\leq\xi\leq\frac{1}{nx};$

$$\sin\frac{1}{nx}=\frac{1}{nx}+\frac{\sin(\eta+\frac{3\pi}{2})}{6}(\frac{1}{nx})^3,\quad 0\leqslant\eta\leqslant\frac{1}{nx};$$

$$e^{\frac{1}{nx}}-1=\frac{1}{nx}+\frac{e^\xi}{2}(\frac{1}{nx})^2,\quad 0\leqslant\xi\leqslant\frac{1}{nx};$$

所以, $$\left|f_n(x)-\frac{1}{x^2}\right|=\left|n^2\left[\frac{1}{nx}+\frac{e^\xi}{2}(\frac{1}{nx})^2\right]\ \left[\frac{1}{nx}+\frac{\sin(\eta+\frac{3\pi}{2})}{6}(\frac{1}{nx})^3\right]-\frac{1}{x^2}\right|$$

$$=n^2\left|\frac{e^\xi}{2}(\frac{1}{nx})^3+\frac{\sin(\eta+\frac{3\pi}{2})}{6}(\frac{1}{nx})^4+\frac{e^\xi\sin(\eta+\frac{3\pi}{2})}{12}(\frac{1}{nx})^5\right|\leqslant\frac{e^\xi}{2}\frac{1}{nx^3}+\frac{1}{6}\frac{1}{n^2x^4}+\frac{e^\xi}{12}\frac{1}{n^3x^5}$$

$$\leqslant\frac{e^{\frac{1}{na}}}{2}\frac{1}{na^3}+\frac{1}{6}\frac{1}{n^2a^4}+\frac{e^{\frac{1}{na}}}{12}\frac{1}{n^3a^5}\ \to\ 0\quad(n\to\infty).$$ 所以$f_n(x)\rightrightarrows\frac{1}{x^2},\ \ x\in[a,+\infty)$. □

例10.2.4. 证明函数列$f_n(x) = n^2(e^{\frac{1}{nx}} - 1)\sin\frac{1}{nx}$ $(n \in \mathbb{N})$于$[a, +\infty)$ $(a > 0)$一致收敛性.

注10.2.4. 这里使用$Lagrange$余项型$Taylor$公式是关键之所在!

注意到当$t \to 0$时有 $e^t - 1 \sim t + o(t)$, $\sin t \sim t + o(t)$, 从而当$x \in [a, +\infty)$且$n \to \infty$时有

$$\left|n^2(e^{\frac{1}{nx}} - 1)\sin\frac{1}{nx} - \frac{1}{x^2}\right| = n^2\left|(e^{\frac{1}{nx}} - 1)\sin\frac{1}{nx} - \frac{1}{n^2x^2}\right|$$

$$= n^2\left|\left(\frac{1}{nx} + o(\frac{1}{nx})\right)\left(\frac{1}{nx} + o(\frac{1}{nx})\right) - \frac{1}{n^2x^2}\right| \boxed{= n^2 o\left(\frac{1}{n^2x^2}\right).}$$

因此我们有 $\sup\limits_{x\in[a,+\infty)}\left|n^2(e^{\frac{1}{nx}} - 1)\sin\frac{1}{nx} - \frac{1}{x^2}\right| \boxed{\leq n^2 o\left(\frac{1}{n^2a^2}\right) \to 0, (n \to \infty).}$?

例10.2.4. 证明函数列$f_n(x)=n^2(e^{\frac{1}{nx}}-1)\sin\dfrac{1}{nx}$ $(n\in\mathbb{N})$于$[a,+\infty)$ $(a>0)$一致收敛性.

注10.2.4. 这里使用*Lagrange*余项型*Taylor*公式是关键之所在!

注意到当$t\to 0$时有 $e^t-1\sim t+o(t)$, $\sin t\sim t+o(t)$, 从而当$x\in[a,+\infty)$且$n\to\infty$时有

$$\left|n^2(e^{\frac{1}{nx}}-1)\sin\frac{1}{nx}-\frac{1}{x^2}\right|=n^2\left|(e^{\frac{1}{nx}}-1)\sin\frac{1}{nx}-\frac{1}{n^2x^2}\right|$$

$$=n^2\left|\Big(\frac{1}{nx}+o(\frac{1}{nx})\Big)\Big(\frac{1}{nx}+o(\frac{1}{nx})\Big)-\frac{1}{n^2x^2}\right|\boxed{=n^2o\Big(\frac{1}{n^2x^2}\Big).}$$

因此我们有 $$\sup_{x\in[a,+\infty)}\left|n^2(e^{\frac{1}{na}}-1)\sin\frac{1}{nx}-\frac{1}{x^2}\right|\boxed{\le n^2o\Big(\frac{1}{n^2a^2}\Big)\to 0,(n\to\infty).}\qquad ?$$

所以, $$\left|f_n(x)-\frac{1}{x^2}\right|=\left|n^2\left[\frac{1}{nx}+\frac{e^\xi}{2}(\frac{1}{nx})^2\right]\left[\frac{1}{nx}+\frac{\sin(\eta+\frac{3\pi}{2})}{6}(\frac{1}{nx})^3\right]-\frac{1}{x^2}\right|$$

$$=n^2\left|\frac{e^\xi}{2}(\frac{1}{nx})^3+\frac{\sin(\eta+\frac{3\pi}{2})}{6}(\frac{1}{nx})^4+\frac{e^\xi\sin(\eta+\frac{3\pi}{2})}{12}(\frac{1}{nx})^5\right|$$

$$\le\frac{e^\xi}{2}\frac{1}{nx^3}+\frac{1}{6}\frac{1}{n^2x^4}+\frac{e^\xi}{12}\frac{1}{n^3x^5}\le\frac{e^{\frac{1}{na}}}{2}\frac{1}{na^3}+\frac{1}{6}\frac{1}{n^2a^4}+\frac{e^{\frac{1}{na}}}{12}\frac{1}{n^3a^5}\to 0\quad(n\to\infty).$$

$$\boxed{o((\frac{1}{nx})^2) \quad \leq \quad o((\frac{1}{na})^2), \quad x > a,\ n \to \infty.}$$

$$\boxed{o((\frac{1}{nx})^2) \quad = \quad (\frac{1}{nx})^2 o(1), \quad x > a,\ n \to \infty. \qquad (*)}$$

本来，在只有一个变元的情况下，$o(t) = t\,o(1)$，$t \to 0$，是完全正确的，但在含有两个及以上的变元的时候，等式$(*)$是不准确的。它的右端$o(1)$是在$n \to \infty$ 过程中关于x的一致无穷小量，而左端的无穷小量是否关于x一致是未知的。

比如，对任意$x > a$，$w_n(x) = \frac{1}{(nx)^2}\frac{1}{(x-a)n} = o((\frac{1}{nx})^2)$，$(n \to \infty)$， 但是$g_n(x) = \frac{w_n(x)}{\frac{1}{(na)^2}} = (\frac{a}{x})^2\frac{1}{(x-a)n} \not\rightrightarrows 0$，$x > a$.

事实上， 当$x_n = a + \frac{1}{n}$时，$g_n(x_n) = (\frac{a}{a+\frac{1}{n}})^2 \to 1$，$(n \to \infty) \ \Rightarrow \ g_n(x) \not\rightrightarrows 0$，$(x > a)$.

更有甚者，在$x_n' = a + \frac{1}{n^2}$时，$g_n(x_n') \to +\infty \ (n \to \infty)$， 即$\frac{w_n(x)}{\frac{1}{(na)^2}}$于$[a, +\infty)$并不有界，所以不可能有$w_n(x) \ \leq \ o((\frac{1}{na})^2)$，$x > a$.

问题出在哪里呢？事实上，

$$o((\frac{1}{nx})^2) = (\frac{1}{nx})^2\,\alpha(x,n), \quad n \to +\infty,\ x \in I,\ \text{其中} \lim_{n\to+\infty}\alpha(x,n) = 0,\ \forall x \in I.$$

如果 $\alpha(x,n) \not\rightrightarrows 0$，$n \to +\infty$，$x \in I$，则 $\alpha(x,n) \neq o(1)$，$n \to +\infty$.

由此可见，在使用Taylor公式或等价无穷小量讨论一致收敛问题时，要特别注意一致性。

如果(在某些情况下)一定要使用Peano余项型Taylor公式，则需要如下的结论。

命题10.2.1. 若$g(t) = o(t)$，$(t \to 0)$ 且 $\alpha(x,n) \rightrightarrows 0$，$n \to +\infty$，$x \in I$. 则$o(\alpha(x,n)) = \alpha(x,n)\ o(1)$，$n \to +\infty$.