(3) $-1<\alpha<0$时,

首先$x=-1$不可能使$(1+x)^\alpha=1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}C_\alpha^n x^n$成立(左端的极限是无穷), 所以$1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}C_\alpha^n(-1)^n$发散.

$x=1$时, 级数为$1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}C_\alpha^n=1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$为交错级数,

且$\left|\dfrac{C_\alpha^{n+1}}{C_\alpha^n}\right|=\dfrac{n-\alpha}{n+1}<1$, 即$|C_\alpha^n|$单调下降。又 $|C_\alpha^n|=\left|\dfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}\right|$

$$=\frac{|\alpha|}{1}\frac{1-\alpha}{2}\frac{2-\alpha}{3}\cdots\frac{n-(1+\alpha)}{n}=\left(1-\frac{\alpha+1}{1}\right)\left(1-\frac{1+\alpha}{2}\right)\left(1-\frac{1+\alpha}{3}\right)\cdots\left(1-\frac{\alpha+1}{n-1}\right)\left(1-\frac{\alpha+1}{n}\right),$$

$\ln|C_\alpha^n|=\sum\limits_{k=1}^{n}\ln(1-\dfrac{1+\alpha}{k})$. 因为$\ln(1-\dfrac{1+\alpha}{k})\leqslant-\dfrac{1+\alpha}{k}$, $k=1,2,3,\cdots$, 而$\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k}=+\infty$,

所以$\sum\limits_{k=1}^{\infty}\ln(1-\dfrac{1+\alpha}{k})=-\infty$。即$\ln|C_\alpha^n|\to-\infty$, $|C_\alpha^n|\to 0\ (n\to+\infty)$.

据Leibniz判别法, $1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}C_\alpha^n$收敛,

故$(1+x)^\alpha=1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}C_\alpha^n x^n$, $x\in(-1,1]$, $-1<\alpha<0$. □

关于本部分的内容, 有如下的相关说明.

1. 要注意“幂级数”和“Taylor级数”是两个概念. 前者是从形式上定义的, 后者是从来源定义的.

   “一个Taylor级数”的完整说法是:

   “一个在某点无穷次可微的函数所定义（生成）的Taylor级数”.

2. 对于在$x=0$点无穷次可微的函数$f(x)$, 即使$f^{(n)}(x)$在$x=0$的邻域中是$n!q^n$ $(|q|>1)$量级的无穷大量, $f(x)$ 仍可以在$x=0$ 点Taylor展开.

   函数$f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0, \\ 0, & x=0 \end{cases}$ 于$x=0$点附近的各阶导数为

$$f'(x)=2\,\frac{1}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}, \qquad f''(x)=-3!\,\frac{1}{x^4}e^{-\frac{1}{x^2}}+\cdots, \qquad f'''(x)=4!\,\frac{1}{x^5}e^{-\frac{1}{x^2}}+\cdots, \quad \cdots\cdots$$

$$f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}n!\frac{1}{x^{n+1}}e^{-\frac{1}{x^2}}+\cdots, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

$$|f^{(n)}(\xi)| \sim n!\left(\frac{1}{|\xi|}\right)^{n+1} e^{-\frac{1}{\xi^2}}+\cdots.$$

3. 函数$f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$ 本身显示，不可Taylor展开的函数远远多于可Taylor 展开的函数.

4. 在概念上, 要区分一个函数的Taylor级数和它的Taylor展式.

   由于函数在x_0 点的Taylor级数只由函数在x_0点的各阶导数决定，是函数的局部性质决定的，

   因此在改变函数远离x_0点的性态时, 不改变x_0 点相应的Taylor级数. 从而,

   一方面, 任何一个Taylor级数可以来自无穷多个函数;

   另一方面, 一个函数在某点的Taylor级数可能收敛域很大, 而可展开的区间可能很小.

5. 既然$f(x)$的Taylor展式是唯一的.

$$\left(\text{即如果} f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n,\quad |x-x_0|<\delta, \text{则必有} a_n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!},\ \forall n\in\mathbb{N}\right).$$

   同时, 一个幂级数的收敛半径$R>0$时, 其和函数是唯一的.

   所以, 函数在可Taylor展开的区间内与其Taylor展式是1-1 对应的.

6. 若一个函数不能在x_0处Taylor展开, 则其对应的Taylor级数在x_0附近必不以此函数为和函数, 即此函数在x_0附近必定不是某幂级数的和函数.

7. 可以证明, 任何一个幂级数都是某个在$(-\infty,+\infty)$上无穷次可微的函数的Taylor 级数, 哪怕其收敛半径为0.

. 在表达式$f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$, $(x\in I)$ 中, 要注意区分$f(x)$与$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$.

前者作为后者的和函数, 只在后者的收敛域中与后者是同一个函数.

但是前者作为一个函数, 有自己的定义域, 在后者的收敛域之外的前者的定义域中, 只有前者没有后者.

比如$f(x)=\dfrac{1}{1-x}$的定义域是$(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$.

等式$f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n$只在$x\in(-1,1)$上成立.

比如$f(x)=\dfrac{1}{1-x}$的定义域是$(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$. 等式$f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n$只在$x\in(-1,1)$上成立.

$f(x)$在$x=0$点的Taylor展式是$\dfrac{1}{1-x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n$, 收敛半径是1, 收敛域是 $(0-1,0+1)=(-1,1)$.

$f(x)$在$x=\frac{1}{2}$点的Taylor展式是 $\dfrac{1}{1-x}=\dfrac{2}{1-\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}}=2\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{x-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}\right)^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}2^{n+1}(x-\dfrac{1}{2})^n$,

收敛半径是$\dfrac{1}{2}$, 收敛域是 $(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2})=(0,1)$.

$f(x)$在$x=\dfrac{2}{3}$点的Taylor展式是 $\dfrac{1}{1-x}=\dfrac{1}{\frac{1}{3}-(x-\frac{2}{3})}=\dfrac{3}{1-\frac{x-\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}}}=3\sum\limits_{n=0}^{\infty}3^n(x-\dfrac{2}{3})^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}3^{n+1}(x-\dfrac{2}{3})^n$,

收敛半径是$\dfrac{1}{3}$, 收敛域是 $(\dfrac{2}{3}-\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{3})=(\dfrac{1}{3},1)$.

$f(x)$在$x=-\dfrac{1}{2}$点的Taylor展式是 $\dfrac{1}{1-x}=\dfrac{1}{\frac{3}{2}-(x+\frac{1}{2})}=\dfrac{2}{3}\dfrac{1}{1-\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}}}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(\dfrac{2}{3})^{n+1}(x+\dfrac{1}{2})^n$,

收敛半径是$\dfrac{3}{2}$, 收敛域是 $(-\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{2},-\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2})=(-2,1)$.

可见, $f(x)$的Taylor展开式的收敛半径会随着中心点的变动而变动, 但是收敛域总是以"奇异点"$x=1$为边界点.

这具有一般性, 将在复变函数论中看的更清楚.

例11.3.12. 证明: $\int_0^1 x^{-x}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-n}$.

证明. $x^{-x} = e^{-x\ln x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n \ln^n x}{n!}$, $x \in (0,1]$.

令$u_n(x) = \begin{cases} \frac{(-1)^n x^n \ln^n x}{n!}, & x \in (0,1] \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, 则$u_n(x) \in C[0,1]$, $D(0,1)$.

又$u_n'(x) = \frac{(-1)^n}{n!}\left[n x^{n-1}\ln^n x + x^n\, n \ln^{n-1}\frac{1}{x}\right] = \frac{(-1)^n}{n!} n x^{n-1} \ln^{n-1} x[\ln x + 1]$, $n = 1, 2, \cdots$.

$u_n(x)$在$[0,1]$具有唯一驻点. 且$u_n(0) = 0$, $u_n(1) = 0$, $u_n(x) \not\equiv const.$,

所以, $\max_{x\in[0,1]} |u_n(x)| = \left|u_n(e^{-1})\right| = \frac{1}{n!e^n}$, $n = 0, 1, 2, \cdots$.

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!e^n}$ 收敛 $\Rightarrow$ $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$在$x \in [0,1]$绝对一致收敛,

$$\Rightarrow \int_0^1 x^{-x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 u_n(x)\,\mathrm{d}x.$$