AI 中的数学第三章习题答案

3. 设二维随机向量 (X,Y) 的联合密度为

$$p(x,y)=\begin{cases} c(R-\sqrt{x^2+y^2}), & x^2+y^2\leqslant R^2,\\ 0, & x^2+y^2>R^2,\end{cases}$$

求：（1）系数 c；（2）向量 (X,Y) 落入圆 $x^2+y^2\leqslant r^2(0<r<R)$ 的概率。

解：（1）

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2}p(x,y)dxdy&=\int_{\{x^2+y^2\leqslant R^2\}}c(R-\sqrt{x^2+y^2})dxdy\\&=\int_{0\leqslant r\leqslant R}\int_{0\leqslant\theta\leqslant 2\pi}c(R-r)rd\theta dr\\&=2\pi c\int_0^R(R-r)rdr=c\pi R^2=1\end{aligned}$$

因此 $c=\frac{1}{\pi R^2}$.

（2）

$$\begin{aligned}P(x^2+y^2\leqslant r^2)&=\int_{\{x^2+y^2\leqslant r^2\}}c(R-\sqrt{x^2+y^2})dxdy\\&=\int_{0\leqslant r'\leqslant r}\int_{0\leqslant\theta\leqslant 2\pi}c(R-r')r'd\theta dr'\\&=2\pi c\int_0^r(R-r')r'dr'\\&=2\pi c(Rr-\frac{r^2}{2})=\frac{2r}{R}-\frac{r^2}{R^2}.\end{aligned}$$

4. 设二维随机向量 (X,Y) 服从区域

$$D=\left\{(x,y):\frac{(x+y)^2}{2a^2}+\frac{(x-y)^2}{2b^2}\leqslant 1\right\}\quad(a,b>0)$$

上的均匀分布，求 (X,Y) 的联合密度。

解： 设 $I_D(x,y)$ 为示性函数，$p(x,y)=cI_D(x,y)$。令 $u=\frac{x+y}{2}, v=\frac{x-y}{2}$ 得

$$\int_{\mathbb{R}^2} p(x,y)dxdy=\int_D cdxdy=c\int_{\{\frac{2u^2}{a^2}+\frac{2v^2}{b^2}\leqslant 1\}} 2dudv=c\pi ab=1$$

解得 $c=\frac{1}{\pi ab}$，联合密度为 $p(x,y)=\frac{1}{\pi ab}I_D(x,y)$.

8. 设随机变量 X 与 Y 相互独立。分别服从自由度为 m,n 的 χ^2 分布，即

$$p_X(x)=\begin{cases} \frac{1}{2^{m/2}\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}x^{m/2-1}e^{-x/2}, & x>0, \\ 0, & x\leqslant 0, \end{cases}$$

$$p_Y(y)=\begin{cases} \frac{1}{2^{n/2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}y^{n/2-1}e^{-y/2}, & y>0, \\ 0, & y\leqslant 0, \end{cases}$$

试证明，$X+Y$ 服从 χ^2 分布，其自由度为 $m+n$.

证明： 设 $Z=X+Y$，

$$\begin{aligned} p_{X+Y}(z) &= \int_0^z p_X(t)p_Y(z-t)dt \\ &= \int_0^z \frac{1}{2^{m/2}\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}\frac{1}{2^{n/2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}t^{m/2-1}e^{-t/2}(z-t)^{n/2-1}e^{-(z-t)/2}dt \\ &= \int_0^z \frac{t^{m/2-1}(z-t)^{n/2-1}e^{-z/2}}{2^{(m+n)/2}B\left(\frac{m+n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}dt \end{aligned}$$

令 $s=\frac{t}{z}$，则

$$\begin{aligned} p_{X+Y}(z) &= \int_0^1 \frac{s^{m/2-1}(1-s)^{n/2-1}e^{-z/2}z^{(m+n)/2-1}}{2^{(m+n)/2}B\left(\frac{m+n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}ds \\ &= \frac{z^{(m+n)/2-1}e^{-z/2}}{2^{(m+n)/2}\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)} \end{aligned}$$

即 $X+Y\sim\chi^2\left(m+n\right)$

10. 设二维随机向量 (X,Y) 的联合密度为

$$p(x,y)=\begin{cases} 4xy\exp\{-(x^2+y^2)\}, & x>0,y>0, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

求 $Z=\sqrt{X^2+Y^2}$ 的均值。

解： 作极坐标变换 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$ 得

$$E(Z)=\int_0^\infty\int_0^\infty \sqrt{x^2+y^2}4xy\exp\{-(x^2+y^2)\}dxdy$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^\infty \int_0^{\frac{\pi}{2}} r \cdot 4r^2 \cos\theta \sin\theta e^{-r^2} r d\theta dr \\
&= \left(\int_0^\infty 4r^4 e^{-r^2} dr\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \sin\theta d\theta\right) \\
&= \frac{3\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}.
\end{aligned}
$$

对于积分 $\int_0^\infty 4r^4 e^{-r^2} dr$，做变量替换 $u = r^2$，原积分变为：

$$
\int_0^\infty 4r^4 e^{-r^2} dr = \int_0^\infty 4(u)^2 e^{-u} \frac{1}{2\sqrt{u}} du = 2\int_0^\infty u^{3/2} e^{-u} du = 2\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3\sqrt{\pi}}{2}
$$

因此期望为

$$
\begin{aligned}
E(Z) &= \left(\int_0^\infty 4r^4 e^{-r^2} dr\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \sin\theta d\theta\right) \\
&= \frac{3\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}.
\end{aligned}
$$

11. 设二维随机向量 (X, Y) 服从区域

$$
D = \{(x, y) : 0 < x < 1, 0 < y < x\}
$$

上的均匀分布，求 $E(X), \mathrm{var}(X)$ 及 X 与 Y 的相关系数。

解： 设 $I_D(x, y)$ 为示性函数，$p(x, y) = cI_D(x, y)$。

由于 $\int_0^1 \int_0^x c dx dy = 1$，解得 $c = 2$.

$$
E(X) = \int_{\mathbb{R}^2} x \cdot 2I_D(x, y) dx dy = \int_0^1 2x^2 dx = \frac{2}{3}.
$$

$$
E(X^2) = \int_{\mathbb{R}^2} x^2 \cdot 2I_D(x, y) dx dy = \int_0^1 2x^3 dx = \frac{1}{2}.
$$

$$
\mathrm{var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{1}{18}.
$$

$$
E(XY) = \int_{\mathbb{R}^2} xy \cdot 2I_D(x, y) dx dy = \int_0^1 \int_0^x 2xy dy dx = \frac{1}{4}.
$$

$$
E(Y) = \int_{\mathbb{R}^2} y \cdot 2I_D(x, y) dx dy = \int_0^1 \int_0^x 2y dy dx = \frac{1}{3}.
$$

$$
E(Y^2) = \int_{\mathbb{R}^2} y^2 \cdot 2I_D(x, y) dx dy = \int_0^1 \int_0^x 2y^2 dy dx = \frac{1}{6}.
$$

$$\rho(X,Y)=\frac{E(XY)-E(X)E(Y)}{\sqrt{\mathrm{var}(X)}\sqrt{\mathrm{var}(Y)}}=\frac{1}{2}.$$

12. 设随机变量 $X\sim N(0,1)$, $Y=X^n$ (n 是正整数), 求 X 与 Y 的相关系数.

解: 若随机变量 $X\sim N(0,1)$，则对一切正整数 k，可以由递推得到

$$E(X^{2k-1})=0,\quad E(X^{2k})=\prod_{0\leqslant i<k}(2k-1-2i)$$

若 n 为奇数，

$$E(Y)=E(X^n)=0$$

$$E(XY)=E(X^{n+1})=\prod_{0\leqslant i<\frac{n+1}{2}}(n-2i)$$

$$E(Y^2)=E(X^{2n})=\prod_{0\leqslant i<n}(2n-1-2i)$$

$$\rho_{XY}=\frac{E(XY)-E(X)E(Y)}{\sqrt{\mathrm{var}(X)}\sqrt{\mathrm{var}(Y)}}=\frac{\prod_{0\leqslant i<\frac{n+1}{2}}(n-2i)-0}{1\cdot\sqrt{\prod_{0\leqslant i<n}(2n-1-2i)-0^2}}=\frac{\prod_{0\leqslant i<\frac{n+1}{2}}(n-2i)}{\sqrt{\prod_{0\leqslant i<n}(2n-1-2i)}}$$

若 n 为偶数，

$$E(Y)=E(X^n)=\prod_{0\leqslant i<\frac{n}{2}}(n-1-2i)$$

$$E(XY)=E(X^{n+1})=0$$

$$\mathrm{cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0$$

故相关系数 $\rho_{XY}=0$

因此，相关系数

$$\rho_{XY}=\begin{cases}\frac{\prod_{0\leqslant i<\frac{n+1}{2}}(n-2i)}{\sqrt{\prod_{0\leqslant i<n}(2n-1-2i)}}, & n\text{为奇数},\\ 0, & n\text{为偶数}.\end{cases}$$

13. 设随机变量 X_1 与 X_2 相互独立, 分布密度分别为

$$p_1(x)=\begin{cases}2x, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 0, & ,\end{cases}$$

$$p_2(x)=\begin{cases}e^{-(x-5)}, & x>5,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求 $E(X_1X_2)$.

解：

$$E(X_1)=\int_{-\infty}^{+\infty} xp_1(x)dx=\int_0^1 2x^2dx=\frac{2}{3},$$

$$E(X_2)=\int_{-\infty}^{+\infty} xp_2(x)dx=\int_5^{\infty} xe^{-(x-5)}dx=\int_0^{\infty}(u+5)e^u du=\int_0^{\infty} ue^u du+\int_0^{\infty} 5e^u du=1+5=6$$

由于 X_1 和 X_2 相互独立，因此

$$E(X_1X_2)=E(X_1)E(X_2)=4.$$

14. 设 X 和 Y 是随机变量, $\mathrm{var}(X)=25$, $\mathrm{var}(Y)=36$, 相关系数 $\rho_{XY}=0.4$, 求 $\mathrm{var}(X+Y)$ 及 $\mathrm{var}(X-Y)$.

解：不妨假设 X Y 零均值。

$$\mathrm{cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\rho_{XY}\sqrt{\mathrm{var}(X)}\sqrt{\mathrm{var}(Y)}=12.$$

$$\mathrm{var}(X+Y)=\mathrm{var}(X)+\mathrm{var}(Y)+2\,\mathrm{cov}(X,Y)=85.$$

$$\mathrm{var}(X-Y)=\mathrm{var}(X)+\mathrm{var}(Y)-2\,\mathrm{cov}(X,Y)=37.$$

15. 设二维随机向量 (X,Y) 服从二维正态分布, $E(X)=E(Y)=0$, $\mathrm{var}(X)=a^2$, $\mathrm{var}(Y)=b^2$, $\rho_{XY}=0$. 试求 (X,Y) 落入区域

$$D=\left\{(x,y):\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant k^2\right\}\quad (k>0)$$

的概率。

解：由题意得，联合密度函数

$$f_{X,Y}(x,y)=\frac{1}{ab2\pi}e^{-\frac{x^2}{2a^2}-\frac{y^2}{2b^2}}$$

(X,Y) 落入区域 D 的概率为

$$P((X,Y)\in D)=\iint_D f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy=\iint_D \frac{1}{ab2\pi}e^{-\frac{x^2}{2a^2}-\frac{y^2}{2b^2}}\,dx\,dy$$

使用极坐标变换：$x=ar\cos\theta,\quad y=br\sin\theta.$

在这种变换下，雅可比行列式为：

$$J=\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right|=abr$$

区域 D 变换后为:

$$\frac{(ar\cos\theta)^2}{a^2}+\frac{(br\sin\theta)^2}{b^2}=r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)=r^2\le k^2$$

因此，积分可表示为

$$P((X,Y)\in D)=\int_0^{2\pi}\int_0^k\frac{1}{ab2\pi}e^{-\frac{(ar\cos\theta)^2}{2a^2}-\frac{(br\sin\theta)^2}{2b^2}}\cdot abr\,dr\,d\theta=\int_0^{2\pi}\int_0^k\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{r^2}{2}}r\,dr\,d\theta$$

令 $u=\frac{r^2}{2}$，则

$$P((X,Y)\in D)=\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{k^2}{2}}\frac{1}{2\pi}e^{-u}\,du\,d\theta=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2\pi}(1-e^{-\frac{k^2}{2}})\,d\theta=\frac{1}{2\pi}(1-e^{-\frac{k^2}{2}})\int_0^{2\pi}d\theta=1-e^{-\frac{k^2}{2}}$$

16. 设三维随机向量 (X,Y,Z) 的联合密度为

$$p(x,y,z)=\begin{cases}e^{-(x+y+z)}, & x>0,y>0,z>0,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

试分别求出随机变量 X,Y,Z 的分布密度，又问：X,Y,Z 相互独立吗?

解:

$$f_X(x)=\int_0^\infty\int_0^\infty p(x,y,z)\,dy\,dz=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(x+y+z)}\,dy\,dz=\int_0^\infty e^{-x-z}\,dz=e^{-x}\cdot 1=e^{-x}$$

因此，X 的边缘分布密度为:

$$f_X(x)=\begin{cases}e^{-x}, & x>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_0^\infty\int_0^\infty p(x,y,z)\,dx\,dz=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(x+y+z)}\,dx\,dz=\int_0^\infty e^{-y-z}\,dz=e^{-y}\cdot 1=e^{-y}$$

因此，Y 的边缘分布密度为:

$$f_Y(y)=\begin{cases}e^{-y}, & y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

$$f_Z(z)=\int_0^\infty\int_0^\infty p(x,y,z)\,dx\,dy=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(x+y+z)}\,dx\,dy=\int_0^\infty e^{-y-z}\,dy=e^{-z}\cdot 1=e^{-z}$$

因此，Z 的边缘分布密度为:

$$f_Z(z)=\begin{cases}e^{-z}, & z>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

注意到

$$f_X(x) \cdot f_Y(y) \cdot f_Z(z) = e^{-x} \cdot e^{-y} \cdot e^{-z} = e^{-(x+y+z)} = p(x,y,z)$$

因此，X, Y, Z 是相互独立的。

17. 设随机变量 X, Y, Z 相互独立，都服从标准正态分布，求 $\xi \triangleq \sqrt{X^2+Y^2+Z^2}$ 的概率分布.

解： 由于 X, Y, Z 都服从标准正态分布 $N(0,1)$，因此 X^2, Y^2, Z^2 都服从卡方分布 $\chi^2(1)$，它们的和 ξ^2 服从自由度为 3 的卡方分布 $\chi^2(3)$。

设 $\xi^2 = W$，则 $W \sim \chi^2(3)$，密度函数为

$$f_W(w) = \frac{w^{1.5-1}e^{-w/2}}{2^{1.5}\Gamma(1.5)} = \frac{w^{0.5}e^{-w/2}}{2^{1.5}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}} = \frac{w^{0.5}e^{-w/2}}{\sqrt{2\pi}}$$

其中利用了 $\Gamma(1.5) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$。

设 $g(w) = \sqrt{w}$，则 $g'(w) = \frac{1}{2\sqrt{w}}$。逆变换为 $w = g^{-1}(\xi) = \xi^2$。

由变换公式，ξ 的概率密度函数为：

$$f_\xi(\xi) = f_W(g^{-1}(\xi))\left|\frac{d}{d\xi}g^{-1}(\xi)\right| = f_W(\xi^2)\left|\frac{d}{d\xi}(\xi^2)\right| = \frac{(\xi^2)^{0.5}e^{-(\xi^2)/2}}{\sqrt{2\pi}}\cdot 2\xi = \frac{\xi e^{-(\xi^2)/2}}{\sqrt{2\pi}}\cdot 2\xi = \frac{2\xi^2 e^{-(\xi^2)/2}}{\sqrt{2\pi}}$$

因此，ξ 的概率密度函数为：

$$f_\xi(\xi) = \frac{2\xi^2 e^{-(\xi^2)/2}}{\sqrt{2\pi}}, \quad (\xi \geqslant 0)$$

.

18. 设随机变量 $X_1, \ldots, X_n$ 独立同分布，共同的分布是威布尔分布，即共同的分布函数是 $F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\left(\frac{x}{\eta}\right)^m}, & x > 0, \\ 0, & x \leqslant 0, \end{cases} \quad (m > 0, \eta > 0)$，

试证明 $\xi \triangleq \min\{X_1, \ldots, X_n\}$ 仍服从威布尔分布。

证明： 由于 $\xi = \min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$，所以 $\xi > x$ 当且仅当所有 $X_i > x$（$i = 1, 2, \ldots, n$）。因为 X_i 是独立的，我们有：

$$P(\xi > x) = P(X_1 > x, X_2 > x, \ldots, X_n > x) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i > x) = \prod_{i=1}^{n}(1 - F(x)) = e^{-n\left(\frac{x}{\eta}\right)^m}$$

所以：

$$F_\xi(x) = 1 - P(\xi > x) = 1 - e^{-n\left(\frac{x}{\eta}\right)^m}$$

设 $\eta' = \eta\left(\frac{1}{n}\right)^{1/m}$，则：

$$F_\xi(x) = 1 - e^{-\left(\frac{x}{\eta'}\right)^m}$$

因此，$\xi = \min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ 仍然服从威布尔分布，其参数为：

$$\eta' = \eta \left(\frac{1}{n}\right)^{1/m}.$$

19. 对于随机变量 X, Y, Z, 已知

$$\begin{aligned} E(X) = E(Y) = 1, \quad E(Z) = -1, \\ \mathrm{var}(X) = \mathrm{var}(Y) = \mathrm{var}(Z) = 1, \\ \rho_{XY} = 0, \quad \rho_{XZ} = 1/2, \quad \rho_{YZ} = -1/2, \end{aligned}$$

试求 $E(X+Y+Z)$ 及 $\mathrm{var}(X+Y+Z)$.

解：

$$E(X+Y+Z) = E(X) + E(Y) + E(Z) = 1 + 1 - 1 = 1$$

$$\mathrm{var}(X+Y+Z) = \mathrm{var}(X) + \mathrm{var}(Y) + \mathrm{var}(Z) + 2\left(\mathrm{cov}(X,Y) + \mathrm{cov}(X,Z) + \mathrm{cov}(Y,Z)\right)$$

计算协方差：

$$\begin{aligned} \mathrm{cov}(X,Y) &= \rho_{XY}\sqrt{\mathrm{var}(X)\mathrm{var}(Y)} = 0 \cdot \sqrt{1 \cdot 1} = 0 \\ \mathrm{cov}(X,Z) &= \rho_{XZ}\sqrt{\mathrm{var}(X)\mathrm{var}(Z)} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{1 \cdot 1} = \frac{1}{2} \\ \mathrm{cov}(Y,Z) &= \rho_{YZ}\sqrt{\mathrm{var}(Y)\mathrm{var}(Z)} = -\frac{1}{2} \cdot \sqrt{1 \cdot 1} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

代入方差公式：

$$\mathrm{var}(X+Y+Z) = 1 + 1 + 1 + 2\left(0 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) = 3$$

因此，$E(X+Y+Z) = 1$，$\mathrm{var}(X+Y+Z) = 3$。

20. 设随机变量 X 与 Y 相互独立, $X \sim N(0,1), Y \sim N(0,1)$, 试求 $U = X+Y$, $V = X-Y$ 的联合密度.

解： 设变换：

$$\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

变换矩阵 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$，逆变换矩阵 $\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

由于 X 和 Y 相互独立且都服从标准正态分布，它们的联合密度函数为：

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$$

代入逆变换:

$$x(u,v)=\frac{u+v}{2},\quad y(u,v)=\frac{u-v}{2},\quad |\det(\mathbf{A}^{-1})|=\left|\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}$$

所以, U,V 的联合密度为:

$$f_{U,V}(u,v)=f_{X,Y}(x(u,v),y(u,v))\cdot|\det(\mathbf{A}^{-1})|=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{\left(\frac{u+v}{2}\right)^2+\left(\frac{u-v}{2}\right)^2}{2}}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{u^2+v^2}{4}}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4\pi}e^{-\frac{u^2+v^2}{4}}$$

21. 设随机变量 X 与 Y 相互独立, $X\sim N(0,1),Y\sim N(0,1)$, 试证: $U=X^2+Y^2$ 与 $V=X/Y$ 是相互独立的.

证明: 作极坐标变换: $X=R\cos\Theta,\quad Y=R\sin\Theta$, 雅可比行列式 J 为:

$$J=\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right|=r$$

X 和 Y 的联合密度函数为:

$$f_{X,Y}(x,y)=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$$

因此, R 和 Θ 的联合密度函数为:

$$f_{R,\Theta}(r,\theta)=f_{X,Y}(r\cos(\theta),r\sin(\theta))\cdot|J|=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{r^2}{2}}\cdot r=\frac{r}{2\pi}e^{-\frac{r^2}{2}}$$

R 的边缘密度函数:

$$f_R(r)=\int_0^{2\pi}f_{R,\Theta}(r,\theta)\,d\theta=\int_0^{2\pi}\frac{r}{2\pi}e^{-\frac{r^2}{2}}\,d\theta=re^{-\frac{r^2}{2}}$$

Θ 的边缘密度函数:

$$f_\Theta(\theta)=\int_0^\infty f_{R,\Theta}(r,\theta)\,dr=\int_0^\infty\frac{r}{2\pi}e^{-\frac{r^2}{2}}\,dr=\frac{1}{2\pi}$$

注意到 $f_{R,\Theta}(r,\theta)=f_R(r)\cdot f_\Theta(\theta)$, 这表明 R 和 Θ 是相互独立的。

又由于

$$U=X^2+Y^2=R^2,\quad V=\frac{X}{Y}=\frac{\cos(\Theta)}{\sin(\Theta)}=\cot(\Theta)$$

因为 R 和 Θ 是相互独立的, 而 U 只依赖于 R, V 只依赖于 Θ, 所以 U 和 V 也是相互独立的。

22. 设随机变量 X 与 Y 相互独立, X 服从区间 $[0,1]$ 上的均匀分布, Y 服从区间 $[1,3]$ 上的均匀分布, 试求 $E(XY)$ 及 $\mathrm{var}(XY)$.

解:

$$E(X)=\frac{0+1}{2}=\frac{1}{2},\quad E(Y)=\frac{1+3}{2}=2$$

由于 X 和 Y 相互独立，

$$E(XY) = E(X)\cdot E(Y) = \frac{1}{2}\cdot 2 = 1$$

$$E(X^2) = \int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3},\quad E(Y^2) = \int_1^3 \frac{1}{2}y^2\,dy = \frac{27}{6} - \frac{1}{6} = \frac{13}{3}$$

同样，X^2 和 Y^2 相互独立，

$$E((XY)^2) = E(X^2)\cdot E(Y^2) = \frac{1}{3}\cdot\frac{13}{3} = \frac{13}{9}$$

因此

$$\operatorname{var}(XY) = E((XY)^2) - [E(XY)]^2 = \frac{13}{9} - 1^2 = \frac{4}{9}$$

23. 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且 $\operatorname{var}(X)$ 和 $\operatorname{var}(Y)$ 存在, 试证:

$$\operatorname{var}(XY) \geqslant \operatorname{var}(X)\operatorname{var}(Y).$$

证明： 由于 X 和 Y 相互独立，有：

$$E((XY)^2) = E(X^2Y^2) = E(X^2)E(Y^2),\quad E(XY) = E(X)E(Y)$$

计算方差：

$$\begin{aligned}\operatorname{var}(X)\operatorname{var}(Y) &= (E(X^2) - [E(X)]^2)(E(Y^2) - [E(Y)]^2)\\ &= E(X^2)E(Y^2) - E(X^2)[E(Y)]^2 - [E(X)]^2E(Y^2) + [E(X)]^2[E(Y)]^2\end{aligned}$$

$$\operatorname{var}(XY) = E(X^2)E(Y^2) - [E(X)E(Y)]^2$$

由于：

$$E(X^2) \geqslant [E(X)]^2,\quad E(Y^2) \geqslant [E(Y)]^2$$

因此

$$E(X^2)[E(Y)]^2 + [E(X)]^2E(Y^2) \geqslant 2[E(X)]^2[E(Y)]^2$$

$$\operatorname{var}(X)\operatorname{var}(Y) - \operatorname{var}(XY) = 2[E(X)]^2[E(Y)]^2 - E(X^2)[E(Y)]^2 + [E(X)]^2E(Y^2) \leqslant 0$$

即

$$\operatorname{var}(XY) \geqslant \operatorname{var}(X)\operatorname{var}(Y)$$

24. 设一城市有 n 个区, 其中住有 x_j 个居民的区共有 n_j 个 ($\sum n_j = n$). 令

$$m = \sum_j \frac{n_j x_j}{n},\quad \sigma^2 = \sum_j \frac{n_j x_j^2}{n} - m^2.$$

(m 是每个区的居民民数的平均均数). 现在随机选取取 r 个区, 并数出其中每个区中的居民民数, 设 $X_1, \cdots, X_r$ 分别为这 r 个区的居民民数, 试证:

$$E(X_1 + \cdots + X_r) = mr, \quad \mathrm{var}(X_1 + \cdots + X_r) = \frac{\sigma^2 r(n-r)}{n-1}.$$

证明： 由于每个区被选中的概率相等，每个区的居民数的期望为：

$$E(X_i) = \sum_j x_j \cdot P(X_i = x_j) = \sum_j x_j \cdot \frac{n_j}{n} = \frac{1}{n} \sum_j n_j x_j = m$$

$$E(X_i^2) = \sum_j x_j^2 \cdot P(X_i = x_j) = \sum_j x_j^2 \cdot \frac{n_j}{n} = \frac{1}{n} \sum_j n_j x_j^2$$

因此：

$$\mathrm{var}(X_i) = \frac{1}{n} \sum_j n_j x_j^2 - m^2 = \sigma^2$$

由于 $X_1, X_2, \ldots, X_r$ 相互独立，

$$E(X_1 + X_2 + \cdots + X_r) = E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_r) = r \cdot E(X_i) = r \cdot m$$

对于任意两个变量 X_i 和 X_j ，$E(X_i X_j)$ 可以表示为：

$$\begin{aligned} E(X_i X_j) &= \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i \neq j} x_i x_j = \frac{1}{n(n-1)} \left[\left(\sum_j x_j \right)^2 - \sum_j x_j^2 = n^2 m^2 - n \sum_j \frac{n_j x_j^2}{n} \right] \\ &= \frac{1}{n(n-1)} (n^2 m^2 - n \left(n\sigma^2 + nm^2 \right)) = \frac{-n^2 \sigma^2}{n(n-1)} \end{aligned}$$

协方差为

$$\mathrm{cov}(X_i, X_j) = \frac{-n\sigma^2}{n-1} - m^2 = \frac{-n\sigma^2 - (n-1)m^2}{n-1} = \frac{-\sigma^2}{n-1}$$

$$\mathrm{var}(X_1 + X_2 + \cdots + X_r) = \sum_{i=1}^{r} \mathrm{var}(X_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq r} \mathrm{cov}(X_i, X_j) = r\sigma^2 - \frac{r(r-1)\sigma^2}{n-1} = \sigma^2 \left(\frac{r(n-r)}{n-1} \right)$$

25. 设 $X_1, \ldots, X_n$ 是独立同分布的正值随机变列, 试证:

$$E\left(\frac{X_1 + \cdots + X_k}{X_1 + \cdots + X_n} \right) = \frac{k}{n} \quad (k = 1, \ldots, n).$$

证明： 设 $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ 和 $S_k = X_1 + X_2 + \cdots + X_k$。由于 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 是独立同分布的正值随机变量，

$$E(S_n) = E(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = n\mu, \quad E(S_k) = E(X_1 + X_2 + \cdots + X_k) = k\mu$$

对于任意 i 和 j，$\frac{X_i}{S_n}$ 和 $\frac{X_j}{S_n}$ 的期望值相同。因此，我们可以考虑所有 $\frac{X_i}{S_n}$ 的和：

$$E\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{X_i}{S_n}\right)=E(1)=1$$

由于 $\frac{X_i}{S_n}$ 的期望值相同，因此：

$$E\left(\frac{X_i}{S_n}\right)=\frac{1}{n}\quad \text{对于所有} i=1,2,\ldots,n$$

$$E\left(\frac{S_k}{S_n}\right)=E\left(\frac{X_1+X_2+\cdots+X_k}{S_n}\right)=E\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{X_i}{S_n}\right)=\sum_{i=1}^{k}E\left(\frac{X_i}{S_n}\right)=k\cdot\frac{1}{n}=\frac{k}{n}$$

26. 设随机变量 $X_1,\cdots,X_n$ 独立同分布, $X_i\sim N(\mu,\sigma^2)$, 记

$$\xi=\sum_{i=1}^{m}X_i,\quad \eta=\sum_{i=1}^{n}X_i\quad (1\leqslant m<n),$$

试求 (ξ,η) 的联合密度.

解： ξ ，η 是 m 个独立正态随机变量的和，因此 ξ ，η 也服从正态分布：

$$\xi\sim N(m\mu,m\sigma^2),\quad \eta\sim N(n\mu,n\sigma^2)$$

由于 X_i 独立同分布，只有当 $i=j$ 时，$\operatorname{cov}(X_i,X_j)=\sigma^2$，否则为 0。因此 ξ 和 η 的协方差为：

$$\operatorname{cov}(\xi,\eta)=\operatorname{cov}\left(\sum_{i=1}^{m}X_i,\sum_{j=1}^{n}X_j\right)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\operatorname{cov}(X_i,X_j)=\sum_{i=1}^{m}\operatorname{cov}(X_i,X_i)=m\sigma^2$$

ξ 和 η 的联合分布是一个二维正态分布，其均值向量和协方差矩阵分别为：

$$\boldsymbol{\mu}=\begin{pmatrix}m\mu\\ n\mu\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\Sigma}=\begin{pmatrix}m\sigma^2 & m\sigma^2\\ m\sigma^2 & n\sigma^2\end{pmatrix}$$

二维正态分布的联合密度函数为：

$$f_{\xi,\eta}(x,y)=\frac{1}{2\pi\sqrt{\det(\boldsymbol{\Sigma})}}\exp\left(-\frac{1}{2}(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{\mu})^\top\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{\mu})\right)$$

其中，$\boldsymbol{z}=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$，协方差矩阵的逆

$$\boldsymbol{\Sigma}^{-1}=\frac{1}{\det(\boldsymbol{\Sigma})}\begin{pmatrix}n\sigma^2 & -m\sigma^2\\ -m\sigma^2 & m\sigma^2\end{pmatrix}=\frac{1}{m\sigma^4(n-m)}\begin{pmatrix}n\sigma^2 & -m\sigma^2\\ -m\sigma^2 & m\sigma^2\end{pmatrix}=\frac{1}{m\sigma^2(n-m)}\begin{pmatrix}n & -m\\ -m & m\end{pmatrix}$$

代入得联合密度函数

$$f_{\xi,\eta}(x,y)=\frac{1}{2\pi\sqrt{m\sigma^4(n-m)}}\exp\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{m\sigma^2(n-m)}\left[n(x-m\mu)^2-2m(x-m\mu)(y-n\mu)+m(y-n\mu)^2\right]\right)$$

27. 设随机变量 X 与 Y 独立同分布, $X\sim N(\mu,\sigma^2)$, α,β 是两个实数 (全不为 0).

(1) 求 $\alpha X+\beta Y$ 与 $\alpha X-\beta Y$ 的相关系数和联合密度;

(2) 证明: $E(\max\{X,Y\})=\mu+\frac{\sigma}{\sqrt{\pi}}$.

解: (1) 设 $U=\alpha X+\beta Y,\quad V=\alpha X-\beta Y$，期望为

$$E(U)=E(\alpha X+\beta Y)=\alpha E(X)+\beta E(Y)=\alpha\mu+\beta\mu=(\alpha+\beta)\mu$$

$$E(V)=E(\alpha X-\beta Y)=\alpha E(X)-\beta E(Y)=\alpha\mu-\beta\mu=(\alpha-\beta)\mu$$

由于 X 和 Y 独立同分布:

$$\operatorname{Var}(U)=\operatorname{Var}(\alpha X+\beta Y)=\alpha^2\operatorname{Var}(X)+\beta^2\operatorname{Var}(Y)=\alpha^2\sigma^2+\beta^2\sigma^2=(\alpha^2+\beta^2)\sigma^2$$

$$\operatorname{Var}(V)=\operatorname{Var}(\alpha X-\beta Y)=\alpha^2\operatorname{Var}(X)+\beta^2\operatorname{Var}(Y)=\alpha^2\sigma^2+\beta^2\sigma^2=(\alpha^2+\beta^2)\sigma^2$$

U,V 的协方差为

$$\operatorname{Cov}(U,V)=\operatorname{Cov}(\alpha X+\beta Y,\alpha X-\beta Y)=\alpha^2\operatorname{Cov}(X,X)-\beta^2\operatorname{Cov}(Y,Y)=\alpha^2\sigma^2-\beta^2\sigma^2=(\alpha^2-\beta^2)\sigma^2$$

相关系数

$$\rho_{UV}=\frac{\operatorname{Cov}(U,V)}{\sqrt{\operatorname{Var}(U)\operatorname{Var}(V)}}=\frac{(\alpha^2-\beta^2)\sigma^2}{\sqrt{(\alpha^2+\beta^2)\sigma^2(\alpha^2+\beta^2)\sigma^2}}=\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}$$

由于 X 和 Y 独立同分布且均为正态分布，U 和 V 也是正态分布的线性组合，因此 (U,V) 也是二维正态分布，参数为

$$\boldsymbol{\mu}=\begin{pmatrix}(\alpha+\beta)\mu\\(\alpha-\beta)\mu\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\Sigma}=\begin{pmatrix}(\alpha^2+\beta^2)\sigma^2 & (\alpha^2-\beta^2)\sigma^2\\(\alpha^2-\beta^2)\sigma^2 & (\alpha^2+\beta^2)\sigma^2\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\det(\boldsymbol{\Sigma})&=\det\begin{pmatrix}(\alpha^2+\beta^2)\sigma^2 & (\alpha^2-\beta^2)\sigma^2\\(\alpha^2-\beta^2)\sigma^2 & (\alpha^2+\beta^2)\sigma^2\end{pmatrix}=((\alpha^2+\beta^2)\sigma^2)((\alpha^2+\beta^2)\sigma^2)-((\alpha^2-\beta^2)\sigma^2)^2\\&=(\alpha^2+\beta^2)^2\sigma^4-(\alpha^2-\beta^2)^2\sigma^4=4\alpha^2\beta^2\sigma^4\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{\Sigma}^{-1}=\frac{1}{4\alpha^2\beta^2\sigma^4}\begin{pmatrix}(\alpha^2+\beta^2)\sigma^2 & -(\alpha^2-\beta^2)\sigma^2\\-(\alpha^2-\beta^2)\sigma^2 & (\alpha^2+\beta^2)\sigma^2\end{pmatrix}=\frac{1}{4\alpha^2\beta^2\sigma^2}\begin{pmatrix}\alpha^2+\beta^2 & -(\alpha^2-\beta^2)\\-(\alpha^2-\beta^2) & \alpha^2+\beta^2\end{pmatrix}$$

代入二维正态分布的联合密度函数：

$$f_{U,V}(u,v)=\frac{1}{4\pi\alpha\beta\sigma^2}\exp\left(-\frac{1}{8\alpha^2\beta^2\sigma^2}\left[(\alpha^2+\beta^2)(u-(\alpha+\beta)\mu)^2\right.\right.$$
$$\left.\left.-2(\alpha^2-\beta^2)(u-(\alpha+\beta)\mu)(v-(\alpha-\beta)\mu)+(\alpha^2+\beta^2)(v-(\alpha-\beta)\mu)^2\right]\right)$$

(2) 令 $X_1=\frac{X-\mu}{\sigma}$,$Y_1=\frac{Y-\mu}{\sigma}$，X_1,Y_1 均服从标准正态分布，$\max\{X,Y\}=\mu+\sigma\max\{X_1,Y_1\}$. 注意到

$$\max\{X_1,Y_1\}=\frac{1}{2}(X_1+Y_1+|X_1-Y_1|)$$

由于 $X_1-Y_1\sim N(0,2)$,

$$E|X_1-Y_1|=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|x|\exp\left\{-\frac{x^2}{4}\right\}dx=\frac{2}{\sqrt{\pi}}$$

因此 $E(\max\{X,Y\})=\mu+\frac{\sigma}{\sqrt{\pi}}$.