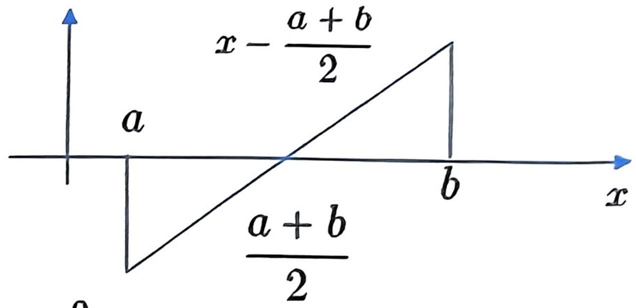
**例7.5.2.** 设 $f(x)$ 于 $[a,b]$ 单调上升，则 $\int_a^b xf(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

**证明.** 往证 $\int_a^b xf(x)\,\mathrm{d}x - \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0 \Leftarrow \int_a^b \left(x-\frac{a+b}{2}\right) f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$.

【法一】$\int_a^b \left(x-\frac{a+b}{2}\right) f(x)\,\mathrm{d}x$




$$= \int_a^{\frac{a+b}{2}} \left(x-\frac{a+b}{2}\right) f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{a+b}{2}}^b \left(x-\frac{a+b}{2}\right) f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\geqslant \int_a^{\frac{a+b}{2}} \left(x-\frac{a+b}{2}\right) f\left(\frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}x + \int_{\frac{a+b}{2}}^b \left(x-\frac{a+b}{2}\right) f\left(\frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}x \quad = 0.$$

【法二】根据第二积分中值定理，

$$\exists \xi \in [a,b] \quad \text{s.t.} \quad \int_a^b \left(x-\frac{a+b}{2}\right) f(x)\,\mathrm{d}x = f(a)\int_a^{\xi} \left(x-\frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}x + f(b)\int_{\xi}^b \left(x-\frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}x$$

$$= [f(b)-f(a)]\frac{(b-\xi)(\xi-a)}{2} \geqslant 0,$$ 从而结论成立. □

例7.5.3. 设$g(x)=\begin{cases}\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$，令$f(x)=\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t$.

往证：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t=0.$

证明 $f(x)$ 于 $x=0$ 处可导，且 $f'(0)=0$.

**证明.** 【法二】

谢惠民等书上利用技巧性分部积分法，更简洁地证明了本题：

$\forall x\neq 0$,

$$\boxed{f(x)=\int_0^x t^2\,\mathrm{d}\cos\frac{1}{t}}=t^2\cos\frac{1}{t}\Big|_0^x-\int_0^x\cos\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t^2=x^2\cos\frac{1}{x}-2\int_0^x t\cos\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t.$$

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}x\cos\frac{1}{x}-\lim_{x\to 0}\frac{2\int_0^x t\cos\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t}{x}$$

$$=-\lim_{x\to 0}\frac{2\int_0^x t\cos\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t}{x}\ \underline{\underline{\text{诺必达}}}\ -\lim_{x\to 0}2x\cos\frac{1}{x}=0.\quad\square$$

我们回顾一下上一节中的分部积分公式及其推广的三个定理, 定理7.4.4、7.4.5、7.4.6.

即使是在要求最低的定理7.4.6中, 也是要求被积函数各因子在开区间上是可导的.

定理7.4.4换一种书写形式的话, 是这样的:

设 $f(x), g(x) \in C[a,b]$, 记$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t,\ G(x) = \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t$,

则 $\mathrm{d}\Big[F(x)G(x)\Big] = F(x)\,\mathrm{d}G(x) + G(x)\,\mathrm{d}F(x)$

$$\Rightarrow \int_a^b \mathrm{d}\Big[F(x)G(x)\Big] = \int_a^b F(x)\,\mathrm{d}G(x) + \int_a^b G(x)\,\mathrm{d}F(x).$$

所以有
$$\boxed{\int_a^b F(x)g(x)\,\mathrm{d}x = F(x)G(x)\Big|_a^b - \int_a^b G(x)f(x)\,\mathrm{d}x. \qquad (7.5.10)}$$

**定理7.4.4.** 设 $u(x), v(x) \in D[a,b]$ 且 $u'(x), v'(x) \in R[a,b]$. 则
$$\int_a^b u(x)\,\mathrm{d}v(x) = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)\,\mathrm{d}u(x).$$

定理7.5.9. 【广义分部积分公式】

设 $f(x), g(x) \in R[a,b]$，记 $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$，$G(x) = \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t$. 则

$$\int_a^b F(x)g(x)\,\mathrm{d}x = F(x)G(x)\Big|_a^b - \int_a^b G(x)f(x)\,\mathrm{d}x$$

证明. 因为 $f(x), g(x) \in R[a,b]$，所以 $F(x), G(x) \in C[a,b]$，从而 $F(x), G(x) \in R[a,b]$.

$\forall \Delta$，据Abel变换，$F(x)G(x)\Big|_a^b = \sum_{i=1}^n [F(x_i)G(x_i) - F(x_{i-1})G(x_{i-1})]$

$$= \sum_{i=1}^n [F(x_i)G(x_i) - F(x_{i-1})G(x_i) + F(x_{i-1})G(x_i) - F(x_{i-1})G(x_{i-1})]$$

$$= \sum_{i=1}^n G(x_i)\,[F(x_i) - F(x_{i-1})] + \sum_{i=1}^n F(x_{i-1})\,[G(x_i) - G(x_{i-1})]$$

$$= \sum_{i=1}^n G(x_i) \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)\,\mathrm{d}t + \sum_{i=1}^n F(x_{i-1}) \int_{x_{i-1}}^{x_i} g(t)\,\mathrm{d}t.$$

由前引理7.5.1,

$$\lim_{\lambda_\Delta \to 0} \sum_{i=1}^n G(x_i) \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b G(x)f(x)\,\mathrm{d}x \qquad \lim_{\lambda_\Delta \to 0} \sum_{i=1}^n F(x_{i-1}) \int_{x_{i-1}}^{x_i} g(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b F(x)g(x)\,\mathrm{d}x. \quad \square$$

**定理7.5.11.** 设$f(x)\in R[a,b]$, $g(x)=g(x+T)$, $x\in\mathbb{R}$; $g(x)\in R[0,T]$, 且$\displaystyle\int_0^T g(x)\,\mathrm{d}x=0$.

则 $\displaystyle\lim_{p\to+\infty}\int_a^b f(x)g(px)\,\mathrm{d}x=0$.

$$\boxed{\text{往证: } \forall\varepsilon>0,\ \exists P>0 \ \text{ s.t. } \left|\int_a^b f(x)g(px)\,\mathrm{d}x\right|<\varepsilon,\ \ \forall p>P.}$$

**证明.** $f(x)\in R[a,b] \Rightarrow \exists M_f>0$ s.t. $|f(x)|\leqslant M_f$, $\forall x\in[a,b]$.

$\forall\varepsilon>0,\exists\ \Delta:\ a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ s.t. $\displaystyle\sum_{i=1}^n (M_i-m_i)\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{2M_g}$,

其中, $\displaystyle M_i=\sup_{[x_{i-1},x_i]}f(x), m_i=\inf_{[x_{i-1},x_i]}f(x)$, $i=1,\cdots,n$.

$$\boxed{M_g=\sup_{[0,T]}|g(x)|}$$

$$\left|\int_a^b f(x)g(px)\,\mathrm{d}x\right| = \left|\sum_{i=1}^n\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)g(px)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \left|\sum_{i=1}^n\int_{x_{i-1}}^{x_i}[f(x)-m_i]g(px)\,\mathrm{d}x\right| + \left|\sum_{i=1}^n\int_{x_{i-1}}^{x_i} m_i g(px)\,\mathrm{d}x\right|$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^n (M_i-m_i)M_g\Delta x_i + \left|\sum_{i=1}^n m_i\int_{x_{i-1}}^{x_i} g(px)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}+\sum_{i=1}^n|m_i|\left|\int_{x_{i-1}}^{x_i} g(px)\,\mathrm{d}x\right|$$

$$\xlongequal{px=t} \frac{\varepsilon}{2}+\sum_{i=1}^n|m_i|\left|\frac{1}{p}\int_{px_{i-1}}^{px_i} g(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}+\frac{1}{p}\sum_{i=1}^n M_f\ TM_g = \frac{\varepsilon}{2}+\frac{nTM_fM_g}{p}.$$

$$\lim_{p\to\infty}\frac{nTM_fM_g}{p}=0 \Rightarrow \exists P>0 \ \text{ s.t. } 0<\frac{nTM_fM_g}{p}<\frac{\varepsilon}{2},\ \ \forall p>P. \qquad \square$$

**定理7.5.11.** 设$f(x)\in R[a,b]$, $g(x)=g(x+T)$, $x\in\mathbb{R}$; $g(x)\in R[0,T]$, 且$\displaystyle\int_0^T g(x)\,\mathrm{d}x=0$.

则$\displaystyle\lim_{p\to+\infty}\int_a^b f(x)g(px)\,\mathrm{d}x=0$. 定理7.5.11称为Riemann-Lebesgue引理, 简称R-L引理.

定理7.5.11中条件$\displaystyle\int_0^T g(x)\,\mathrm{d}x=0$是关键的, 但是我们知道,

有界周期函数总可以上下平移(减去平均值)使得一个周期内的积分为零.

**推论7.5.3.** 设$f(x)\in R[a,b]$, $g(x)=g(x+T)$, $x\in\mathbb{R}$; $g(x)\in R[0,T]$,

则$$\lim_{p\to+\infty}\int_a^b f(x)g(px)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{T}\int_0^T g(x)\,\mathrm{d}x\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

**证明.** 以$g(x)-\bar{g}$代替定理7.5.11中的$g(x)$, 即得. □

**定理7.5.12.** 设单调函数 $f(x) \in R[a,b]$, $g(x) = g(x+T)$, $x \in \mathbf{R}$; $g(x) \in R[0,T]$,

$$\text{且} \int_0^T g(x)\,\mathrm{d}x = 0. \quad \text{则} \lim_{p\to+\infty} \int_a^b f(x)g(px)\,\mathrm{d}x = 0.$$

**证明.** 不妨假设 $f(x)$ 单调增加, 则 $f(x)-f(a) \geqslant 0$ 且单增, 据积分第二中值定理,

$$\exists \xi \in [a,b] \ \text{ s.t. } \int_a^b [f(x)-f(a)]g(px)\,\mathrm{d}x = [f(b)-f(a)]\int_\xi^b g(px)\,\mathrm{d}x = \frac{f(b)-f(a)}{p}\int_{p\xi}^{pb} g(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\Rightarrow \left|\int_a^b [f(x)-f(a)]g(px)\,\mathrm{d}x\right| = \left|\frac{f(b)-f(a)}{p}\int_{p\xi}^{pb} g(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{|f(b)-f(a)|}{p} TM_g \to 0 \quad (p\to+\infty).$$

同时, $\displaystyle\int_a^b f(a)g(px)\,\mathrm{d}x = f(a)\int_a^b g(px)\,\mathrm{d}x = \frac{f(a)}{p}\int_{ap}^{bp} g(x)\,\mathrm{d}x.$ $\boxed{\text{所以, } \displaystyle\lim_{p\to+\infty}\int_a^b f(a)g(px)\,\mathrm{d}x = 0.}$

记 $\left[\dfrac{bp-ap}{T}\right] = K$, 则 $\displaystyle\left|\int_{ap}^{bp} g(x)\,\mathrm{d}x\right| = \left|\int_{ap}^{ap+KT} g(x)\,\mathrm{d}x + \int_{ap+KT}^{bp} g(x)\,\mathrm{d}x\right| = \left|\int_{a+KT}^{bp} g(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant TM_g.$

$$\text{从而,} \quad \lim \int^b f(x)g(px)\,\mathrm{d}x = \lim_{p\to+\infty}\int_a^b [f(x)-f(a)]g(px)\,\mathrm{d}x + \lim_{p\to+\infty}\int_a^b f(a)g(px)\,\mathrm{d}x = 0. \quad \square$$