第9讲 网络流问题 (下)

罗国杰

gluo@pku.edu.cn

2025年春季学期

算法设计与分析『实验班』

PKU-04833060

网络流的应用

- 二部图的最大匹配
- 赋权二部图的匹配
- 带需求的流通
- 边不相交和点不相交路径
- 项目选择（最大权闭包）
- 经典图像分割算法
- 最小密度子图

二部图匹配

定义 设简单二部图G=<A,B,E>, $M\subseteq E$, 如果M中任意两条边都不相邻, 则称M是G的匹配. 边数最多的匹配称作最大匹配. 当$|A|=|B|=n$时, 边数为n的匹配称作完美匹配.

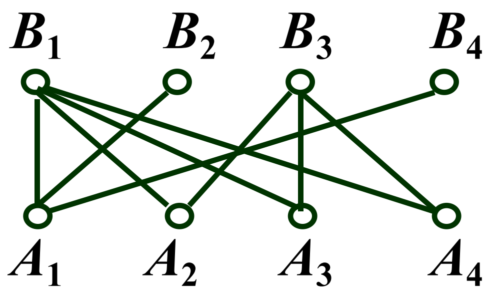
例5 有4名新入学的硕士生和4位硕导, A_1申请B_1,B_2或B_4作导师, A_2,A_3和A_4都申请B_1或B_3作导师. 每名硕士生有一位导师, 每位硕导只收一名新生. 如何分配才能尽可能满足学生要求.

作二部图G=<A,B,E>, 其中

$$A=\{ A_i \mid 1\le i \le 4 \}$$

$$B=\{ B_j \mid 1\le j \le 4 \}$$

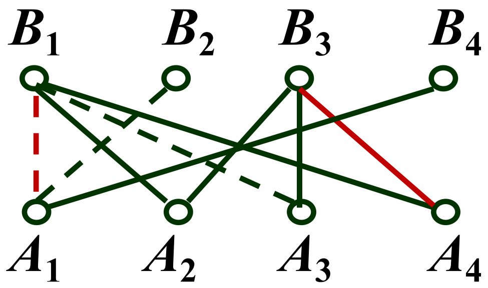
$$E=\{ (A_i,B_j) \mid A_i \text{ 申请 } B_j \text{ 作导师}, 1\le i \le 4, 1\le j \le 4 \}$$



增广交错路径

定义 设 M 是二部图 G 的匹配.

- 称 M中的边为**匹配边**
- 不属于 M 的边为**非匹配边**
- 与匹配边关联的顶点为**饱和点**
- 不与匹配边关联的顶点为**非饱和点**
- G 中由匹配边和非匹配边交替构成的路径称为**交错路径**
- 起点和终点都是非饱和点的交错路径称为**增广交错路径**



M与 P

$M=\{ (B_1,A_1), (B_3,A_4) \}$

饱和点：B_1, B_3, A_1, A_4

非饱和点：A_2, A_3, B_2, B_4

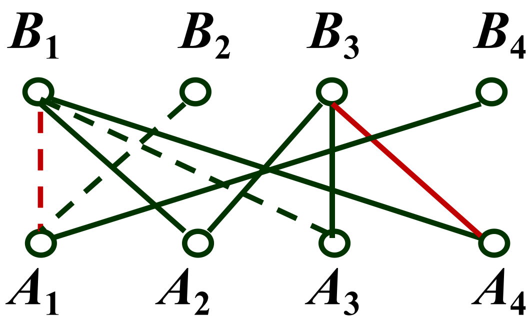
增广交错路径 P：$A_3B_1A_1B_2$

最大匹配的条件

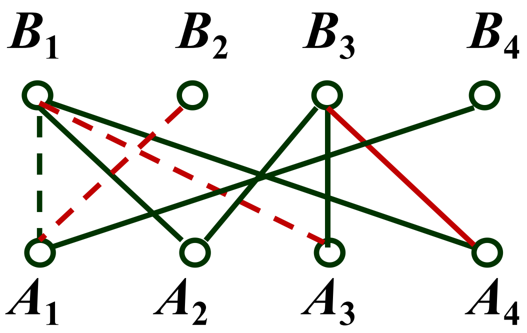
引理14 设 M 是二部图 G 的一个匹配, P是一条关于M 的增广交错路径，则

$$M' = M \oplus E(P)$$

是一个匹配 且 $|M'| = |M| + 1$.



M与 $E(P)$

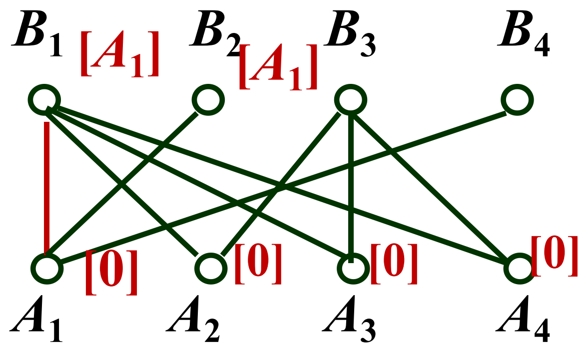


M'

定理8 二部图的匹配是最大匹配当且仅当不存在关于它的增广交错路径.

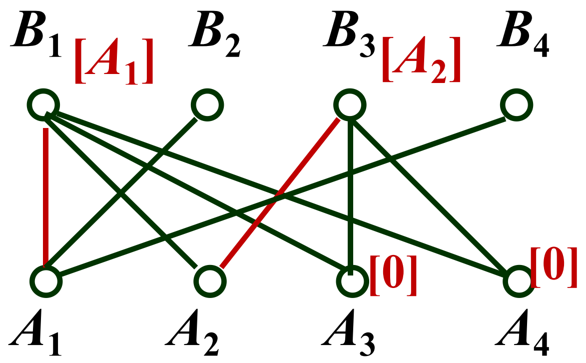
匈牙利算法

匈牙利算法 从一个初始匹配 M 开始, 每次找一条增广交错路径 P, 令 $M \leftarrow M \oplus E(P)$, 直到不存在增广交错路径为止.



增广交错路径：A_1B_1

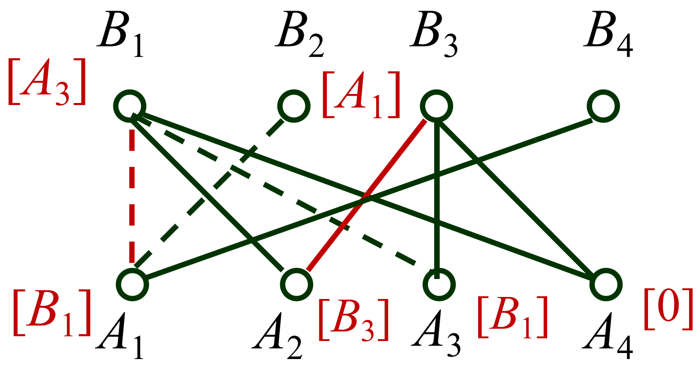
M={(A_1,B_1)}



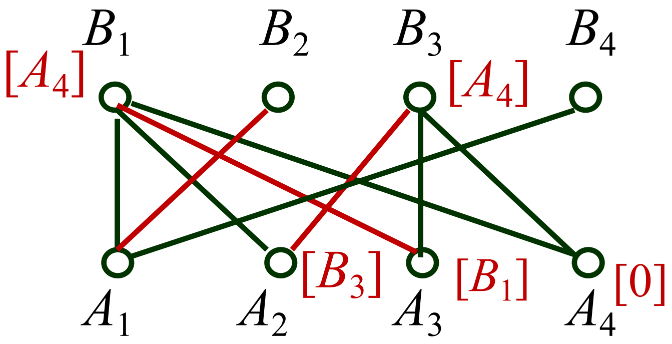
增广交错路径：A_2B_3

M={(A_1,B_1),(A_2,B_3)}

匈牙利算法（续）



增广交错路径：$B_2A_1B_1A_3$



匹配 $M\oplus E(P)$
$=\{(A_1,B_2),(A_2,B_3),(A_3,B_1)\}$

算法时间：$O(\min\{|A|,|B|\}\cdot|E|)$
阶段数：$\min\{|A|,|B|\}+1$, 每个阶段检查时间： $O(|E|)$

二部图最大匹配与最大流

最大匹配转化成最大流

设 G=<A,B,E>，作容量网络 $N_G = \langle V, E', c, s, t \rangle$, 其中 $c \equiv 1$,

V={ s, t }$\cup A \cup B$

$E' = \{\langle s, A_i \rangle \mid A_i \in A\} \cup \{\langle B_j, t \rangle \mid B_j \in B\} \cup \{\langle A_i, B_j \rangle \mid (A_i, B_j) \in E\}$

G 的匹配 $\Leftrightarrow$ N_G 上的 0-1可行流

前向边是非饱和边, 后向边是饱和边, 增广链$\Leftrightarrow$增广交错路径.

匈牙利算法是FF算法的应用.

算法设计思想：

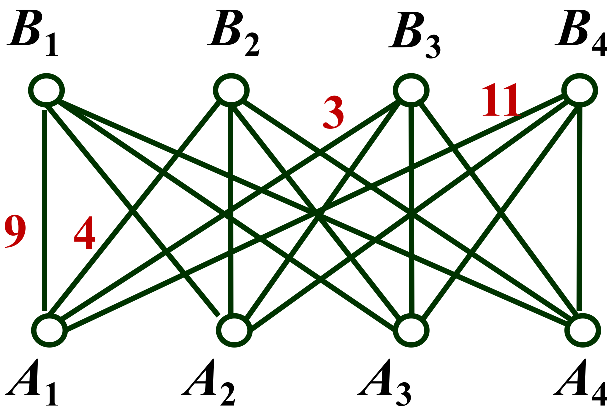
1. 构造对应容量网络 N_G
2. 对 N_G 应用 Dinic 算法求最大流 f
3. 再把 f 转化为G的匹配 M

时间： $O(n^{1/2}m)$

赋权二部图完美匹配

指派问题 给定赋权完全二部图$G=\langle A,B,E,w\rangle$, 其中$|A|=|B|=n$, $w: E\to R$, 求 G 的权最小的完美匹配 M.

例6 有4项任务由4个人完成, 每人完成一项. 预计每个人完成每一项任务的时间如下表所示. 如何分配才能是完成任务的总时间最少?



		任务			
		B_1	B_2	B_3	B_4
	A_1	9	4	3	11
人	A_2	8	5	8	4
员	A_3	3	8	3	1
	A_4	10	6	9	6

使用匈牙利算法，时间 $O(n^3)$

指派问题与线性规划

指派问题可表成 线性规划(P)

$$x_{ij}=\begin{cases}1, & (A_i,B_j)\in M,\\ 0, & \text{否则},\end{cases}$$

$$\min \quad \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_{ij}x_{ij}$$

$$s.t. \quad \sum_{j=1}^{n} x_{ij}=1, \qquad 1\le i\le n$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij}=1, \qquad 1\le j\le n$$

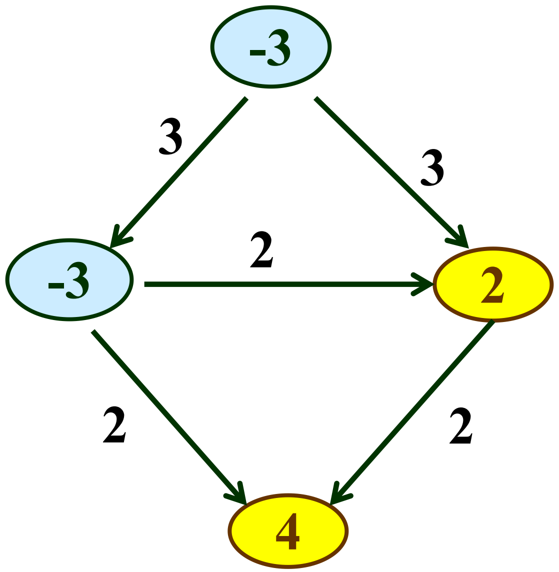
$$x_{ij}\ge 0, \qquad 1\le i\le n, 1\le j\le n$$

带需求的流通

给定带需求的流通图 $N=<V,E,c,S,T>$, $\forall v\in V$ 存在需求 d_v，所有发点集合 S，所有收点集合T.

- 收点：$d_v > 0$，表示 v 对流有d_v的需求
- 发点：$d_v < 0$，表示 v 有$-d_v$的供给
- 结点：$d_v = 0$，v 不是发点和收点

所有容量和需求都是整数



带需求的流通

问是否存在可行流通? 即存在函数 $f: E\to\mathrm{R}^*$，满足

(1) 容量条件: $\forall e\in E$，$0\le f(e)\le c_e$

(2) 需求条件: $\forall v\in V$，$f^{\text{in}}(v) - f^{\text{out}}(v) = d_v$

带需求的流通：必要条件

命题1 如果存在一个带需求$\{d_v\}$的可行流通，那么 $\sum_v d_v = 0$

证　假设存在可行流通 f. 那么

$$\sum_v d_v = \sum_v (f^{\text{in}}(v) - f^{\text{out}}(v))$$

对于每条边 $e=<u,v>$，值$f(e)$恰好在f^{in}和f^{out}中各出现1次.
两项抵消；总和是0.

根据命题1，有

$$\sum_{v:d_v>0} d_v = \sum_{v:d_v<0} -d_v$$

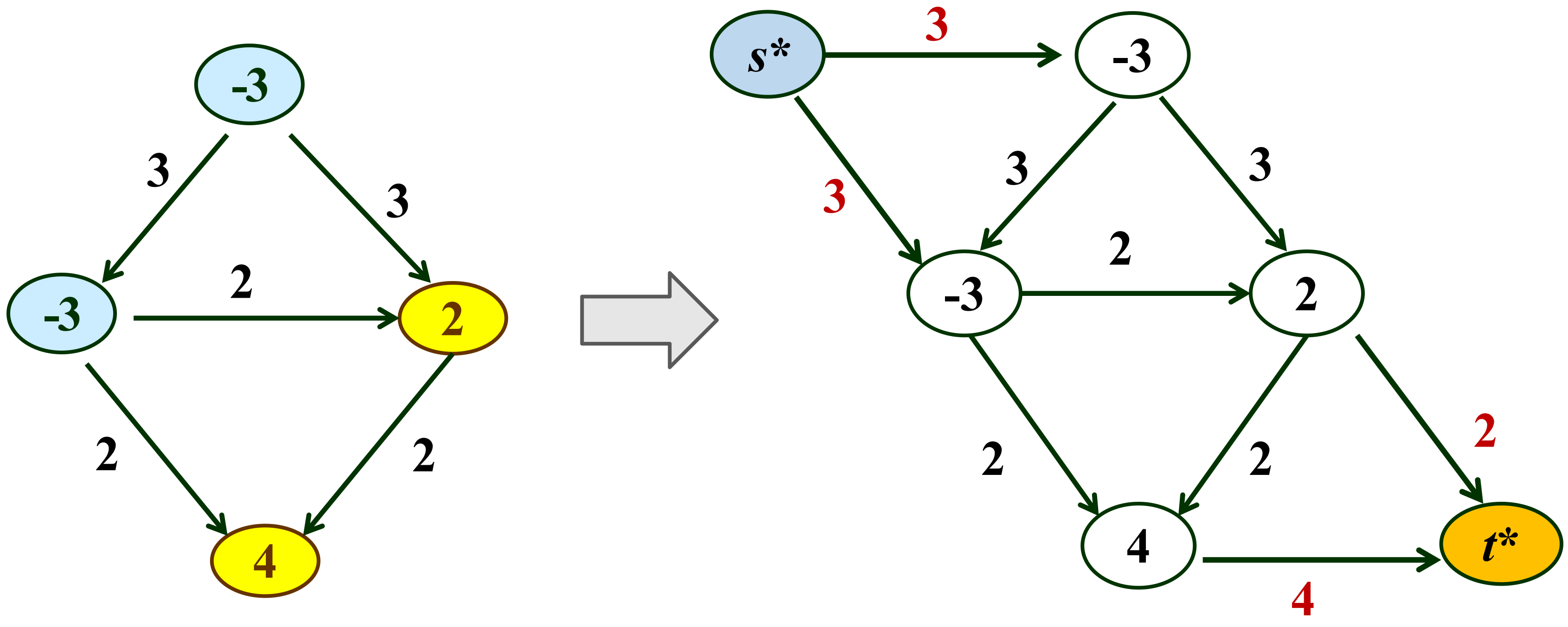
将该和记作D.

带需求的流通：用最大流建模

加超结点 s^* 和 t^*，构造单发点单收点的容量网络 G'

从 s^*到每个 $v\in S$ 加边 $e=<s^*,v>$，令 $c_e=-d_v$

从每个 $v\in T$ 加边 $e=<v,t^*>$，令 $c_e=d_v$



G　　G'

带需求的流通：算法与拓展

命题2 G'没有大于D的 s^*-t^* 流，因为 $c(\{s^*\},V\cup\{t^*\})=D$, 其中

$$D=\sum_{v:d_v>0} d_v=\sum_{v:d_v<0} -d_v$$

定理 G 中存在一个带需求$\{d_v\}$的可行流通，当且仅当G'的最大 s^*-t^* 流有值 D.

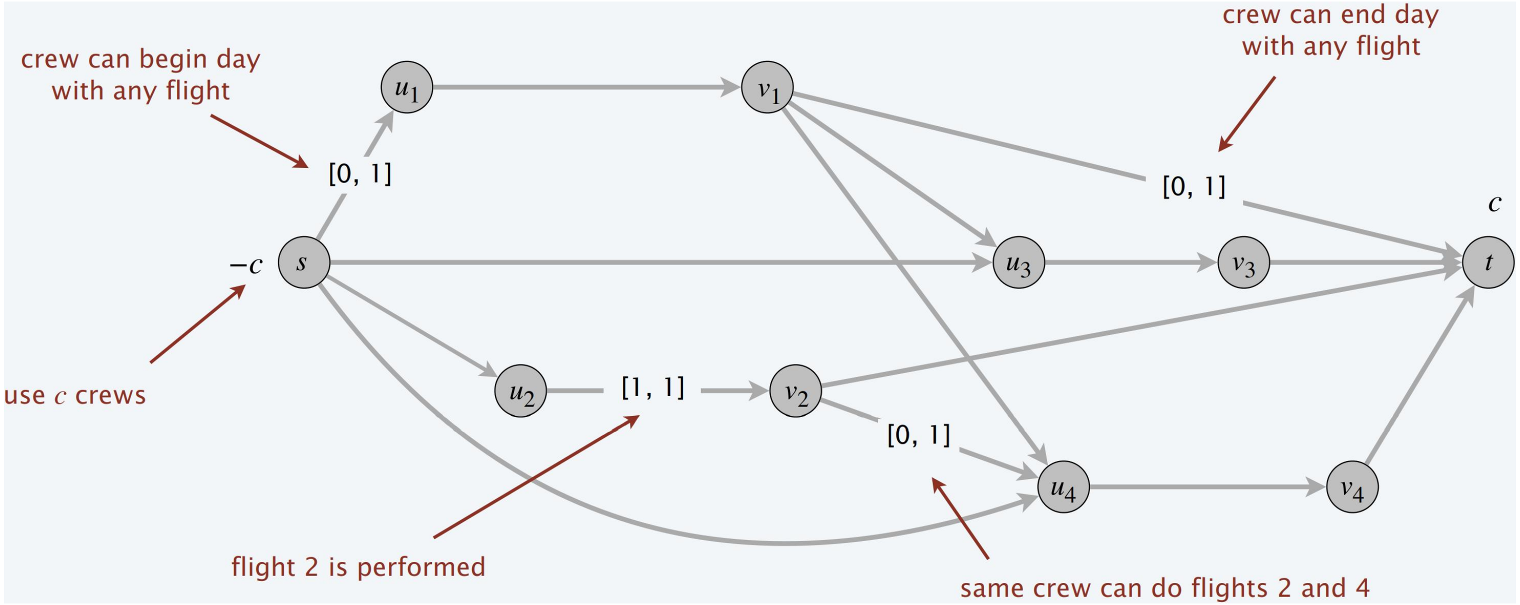
算法

1. 将流通图 G 转换为对应的容量网络 G'
2. 对 G'运行最大流算法找到 s^*-t^*最大流 f
3. 如果 $v(f)=D$，则 G 存在带需求$\{d_v\}$的可行流通
   否则在该需求下不存在可行流通

拓展 带需求和下界的可行流通. 每条边增加下界 l_e , $0\le l_e\le c_e$.
修改容量条件，对每个$e\in E$，$l_e\le f(e)\le c_e$. 需求条件不变.

Airline Scheduling (1/2)

- "Toy problem."
  - Manage flight crews by reusing them over multiple flights.
  - Input: set of k flights for a given day.
  - Flight i leaves origin o_i at time s_i and arrives at destination d_i at time f_i
  - Minimize number of flight crews.



from J. Kleinberg and É. Tardos, "Algorithm Design", Pearson 2006.

Airline Scheduling (2/2)

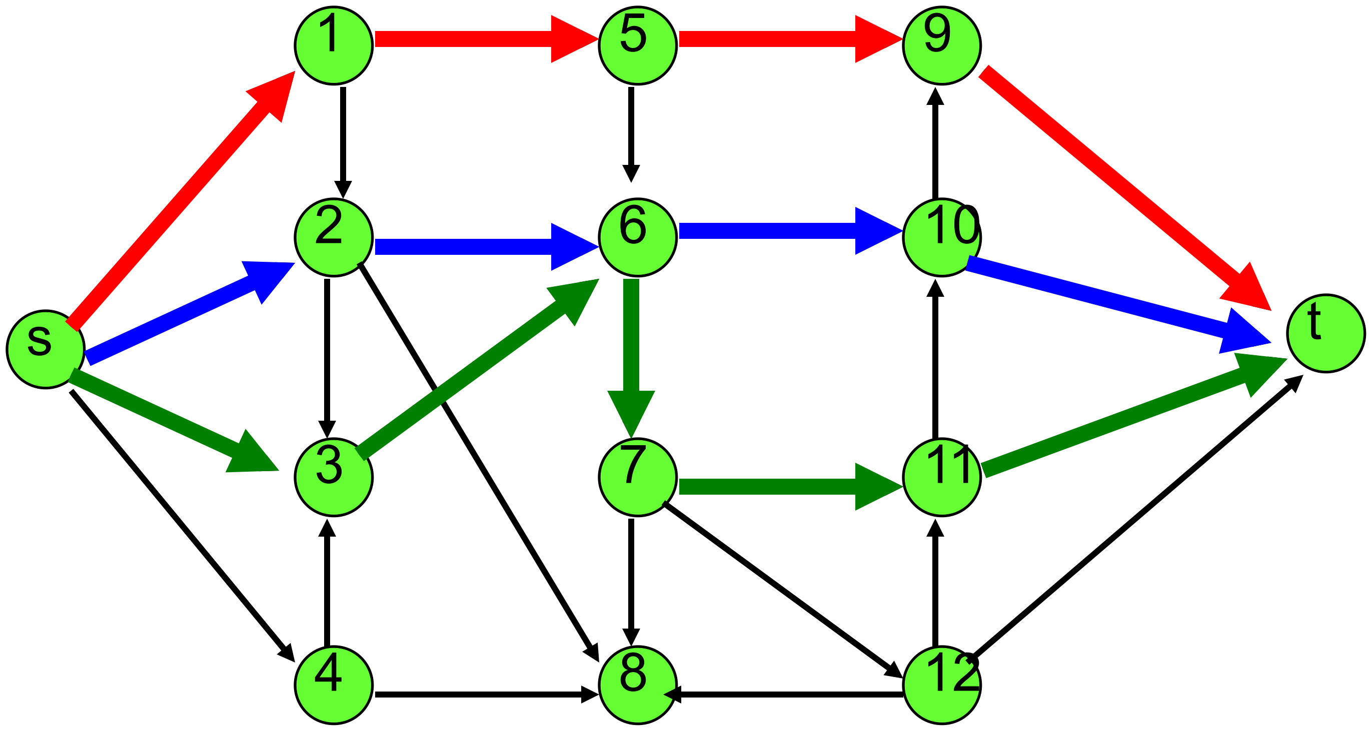
- Real-world problem models countless other factors:
  - Union regulations: e.g., flight crews can fly only a certain number of hours in a given time window.
  - Need optimal schedule over planning horizon, not just one day.
  - Deadheading has a cost.
  - Flights don't always leave or arrive on schedule.
  - Simultaneously optimize both flight schedule and fare structure.
- Message
  - Our solution is a generally useful technique for efficient reuse of limited resources but trivializes real airline scheduling problem.
  - Flow techniques useful for solving airline scheduling proble

from J. Kleinberg and É. Tardos, "Algorithm Design", Pearson 2006.

Network Reliability

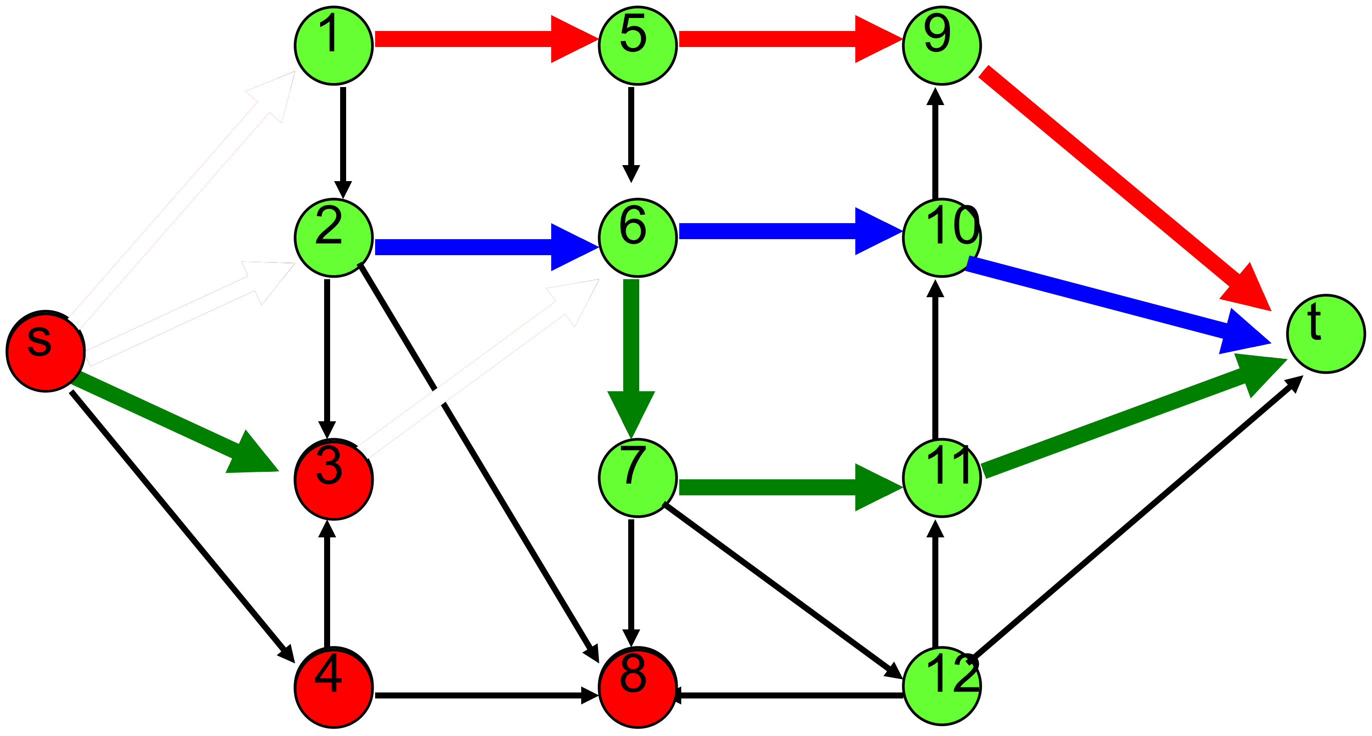
- Communication Network
- What is the maximum number of edge-disjoint paths from s to t?
  - How can we determine this number?

There are 3 edge-disjoint s-t paths



Deleting 3 edges disconnects s and t

- Theorem [Menger 1927]. The max number of edge-disjoint s-t paths equals the min number of edges whose removal disconnects t from s.

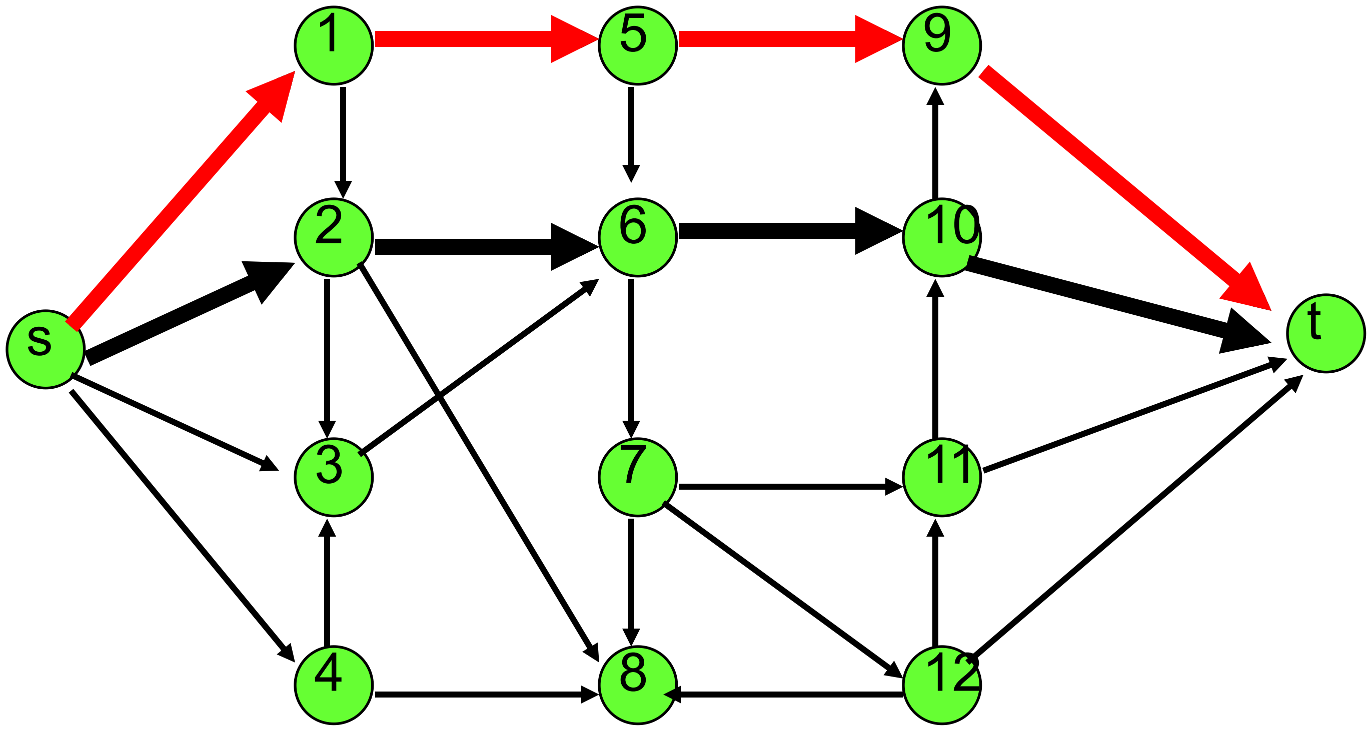


Let S = {s, 3, 4, 8}. The only arcs from S to T = N\S are the 3 deleted arcs.

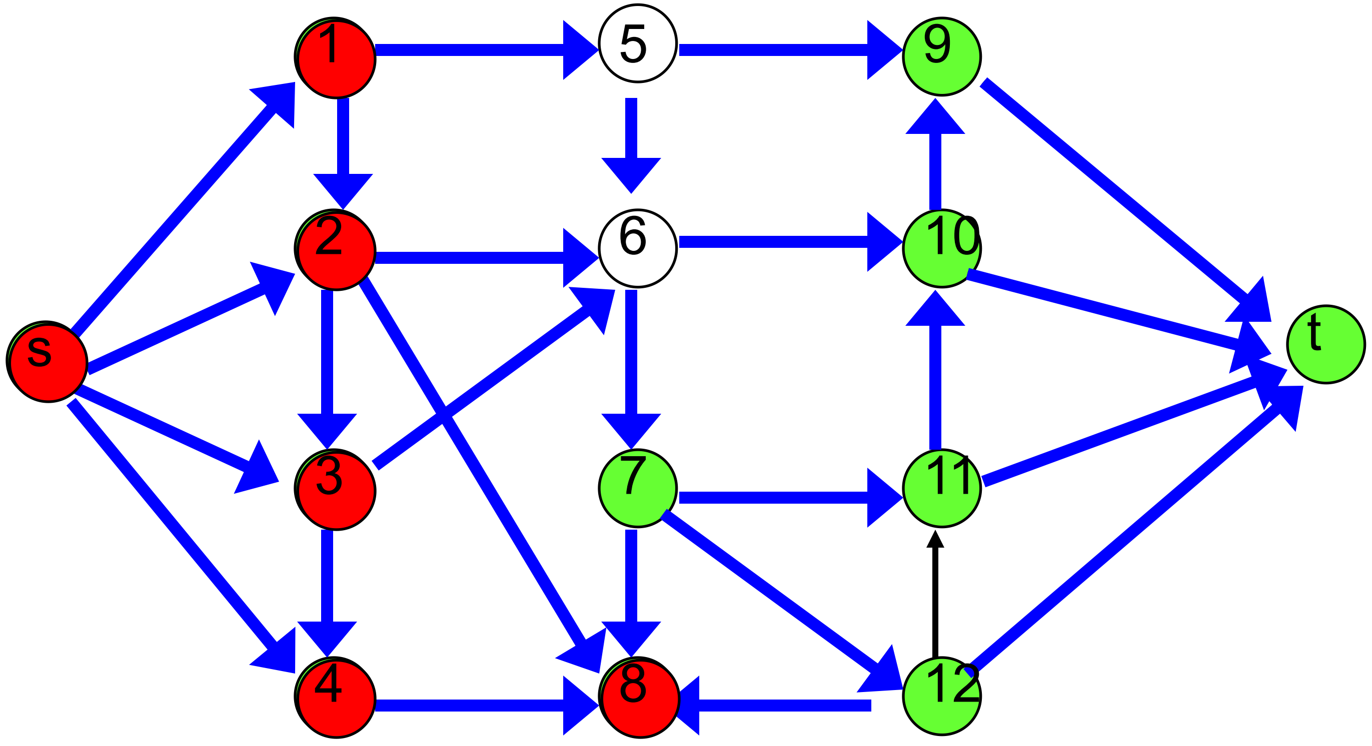
Node-disjoint paths

- Two s-t paths P and P' are said to be node-disjoint iff the only nodes in common to P and P' are s and t).
- How can one determine the maximum number of node disjoint s-t paths?
- Answer: node splitting
- Theorem. Let G = (N,A) be a network with no arc from s to t. The maximum number of node-disjoint paths from s to t equals the minimum number of nodes in N\{s,t} whose removal from G disconnects all paths from nodes s to node t.

There are 2 node-disjoint s-t paths.



Deleting 5 and 6 disconnects t from s.



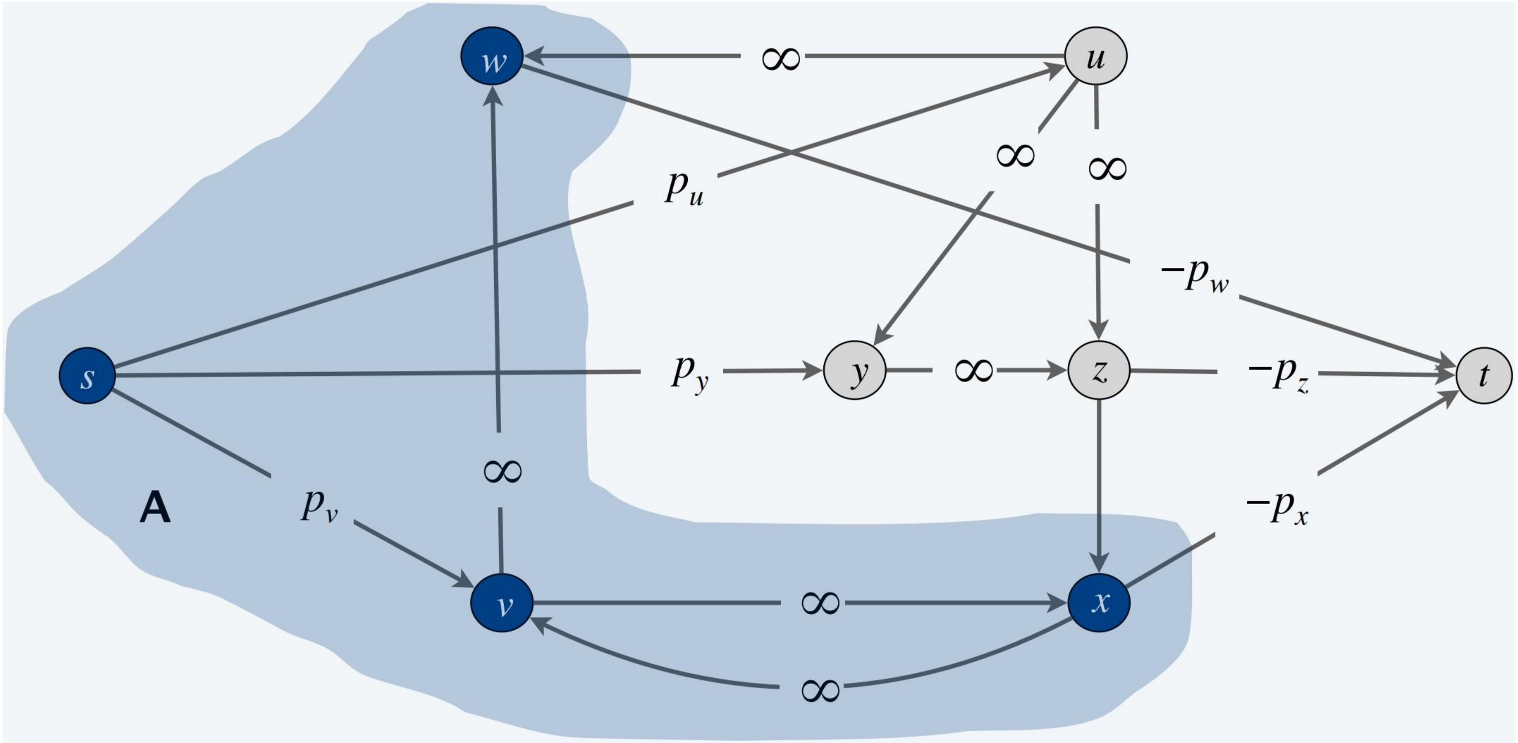
Let S = {s, 1, 2, 3, 4, 8}

Let T = {7, 9, 10, 11, 12, t}

There is no arc directed from S to T.

Project Selection (Maximum Weight Closure)

- 最大化项目收益 ⇔ 最小化 cap(A,B) = $\Sigma_{v\in B:\ pv>0}\ p_v + \Sigma_{v\in A:\ pv<0}\ (-p_v) = \Sigma_{v:pv>0}\ p_v - \Sigma_{v\in A}\ p_v$
- 容量网络构造
  - 虚拟源 s 和汇 t
  - 项目 v 价值 $p_v > 0$
    - (s,v) 容量 p_v 的边
  - 项目 v 价值 $p_v < 0$
    - (v,t) 容量 $-p_v$ 的边
  - 项目 v 依赖 w
    - (v,w) 容量 ∞ 的边
- 最大流求解最小 cap(A,B)



picture from J. Kleinberg and É. Tardos, "Algorithm Design", Pearson 2006.

Jean-Claude Picard. 1976. "Maximal Closure of a Graph and Applications to Combinatorial Problems." Manage. Sci. 22, 11 (July 1976), 1268–1272.

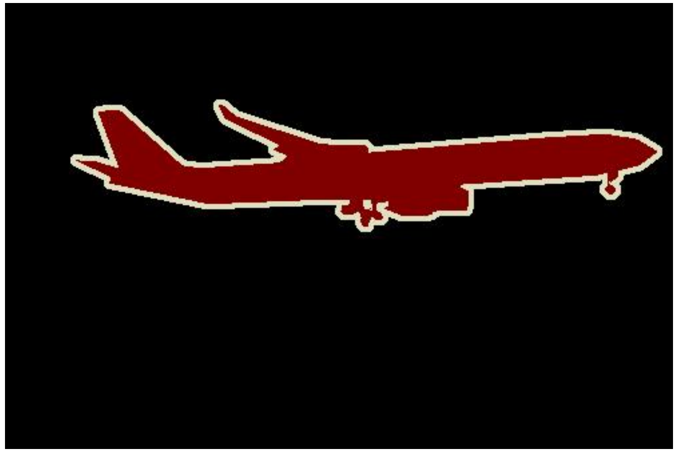
图像分割

- Separate foreground from background

图像分割

- 图像分割：将一幅图片的前景与背景分离
  对每个像素进行 “前景 / 背景” 的标记

图片



分割后

注：有些 DNN 生成像素级的前景背景预测+阈值化以足够精确；网络流可应用在不太精确的 DNN 或其他预测方法的场合

对图像分割的建模

- 设 V 是基本图像中的像素集合. 用 E 表示所有相邻像素对的集合，构成无向图 G=<V,E>.
- 像素 i 属于前景的可能性：ai，属于背景的可能性：bi
- 如果 ai > bi，像素 i 标为前景，否则标为背景. 标记为前景的像素构成集合A，标记为背景的像素构成集合B.
- 如果像素 i 的邻居都标为“背景”，那么倾向于将 i 标为背景，使标记更“光滑”． 对于每对邻居像素(i, j)，定义 分离罚分 pij > 0 来惩罚 i 和 j 标记不同.
- 图像分割问题：将像素点集划分为 A 和B，使得划分的权值 q(A,B)最大化（即得到最优标记）．其中

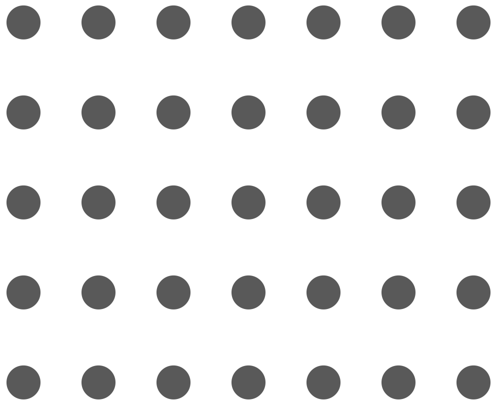
$$q(A,B)=\sum_{i\in A}a_i+\sum_{j\in B}b_j-\sum_{\substack{(i,j)\in E\\ |A\cap\{i,j\}|=1}}p_{ij}$$

图像分割：最优标记与最小割

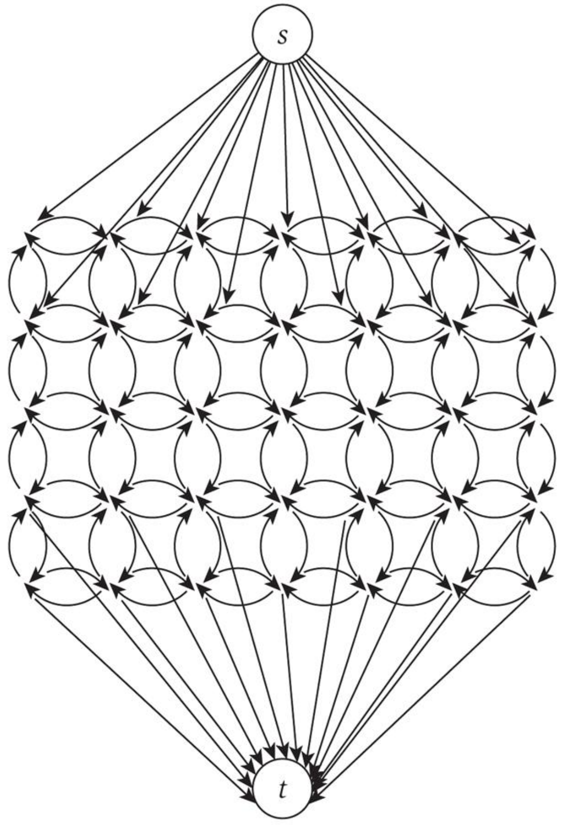
- 两个问题的相似性
  - 都涉及图的点割集(A,B)
- 区别：
  - 图像最优标记的图是无向图，流网络最小割是有发点 s、收点 t 的有向图
  - 最优标记是最大化问题，最小割是最小化问题
  - 最优划分问题的结点有参数 ai 和 bi，最小割问题边有参数
- 思路：
  - 将最优标记的邻居图转化为一个容量网络

图像分割：转化为容量网络G′

- 设G=<V,E>是图像最优标记问题的无向图，将每条边(u,v)∈E 转化成一对有向边 <u,v>和<v,u>，构成有向图
- 超源点 s (前景)，超汇点 t (背景)
  - 加边 <s,v> 和 <v,t >, ∀v∈V.



图像像点阵列



对应容量网络G'(部分边)

图像分割：G的最大化与G′的最小化

- 令 $Q=\sum_i (a_i+b_i)$

$$\Rightarrow \sum_{i\in A} a_i + \sum_{j\in B} b_j = Q - \sum_{i\in A} b_i - \sum_{j\in B} a_j$$

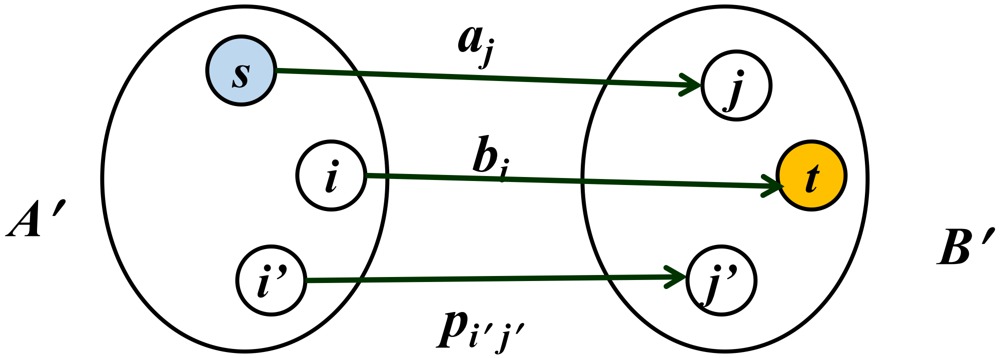
- q(A,B)的最大化转变为 q′(A,B) 的最小化

$$q(A,B) = Q - \sum_{i\in A} b_i - \sum_{j\in B} a_j - \sum_{\substack{(i,j)\in E \\ |A\cap\{i,j\}|=1}} p_{ij}$$

$$q'(A,B) = \sum_{i\in A} b_i + \sum_{j\in B} a_j + \sum_{\substack{(i,j)\in E \\ |A\cap\{i,j\}|=1}} p_{ij}$$

图像分割：容量分配

- 边容量
  - 对边 e = < s,i >，令ce= ai；对边 e = < i ,t >，令 ce= bi.
  - 对邻居边 e = < j,i > 和 e′ = < i,j >，令 ce= ce′ = pij.
- 穿过割 (A′ ,B′) 的边分成三类：
  - 边 < s, j >，j∈B′ ：为割的容量贡献 aj.
  - 边 < i, t >，i∈A′ ：为割的容量贡献 bi.
  - 边 < i′ , j′ >, i′ ∈A′ , j′ ∈B′ ：为割的容量贡献 pi′ j′



图像分割：割的容量

- 所有边< s, j >，j∈B′，对 割容量贡献 $\sum_{j\in B} a_i$
- 所有边< i, t >，i∈A′，对割容量贡献 $\sum_{i\in A} b_i$
- 所有边< i, j>，i∈A′，j∈B′；对割容量贡献 $\sum_{i\in A, j\in B} p_{ij}$

$$
\begin{aligned}
& c(A', B') \\
& = \sum_{i\in A} b_i + \sum_{j\in B} a_j + \sum_{\substack{(i,j)\in E \\ |A\cap\{i,j\}|=1}} p_{ij} \\
& = q'(A, B)
\end{aligned}
$$

图像分割算法

- 主要步骤
  - 建立像素邻居图 G
  - 将 G 转化成容量网络 G′
  - 求解 G′ 的最小割 (A′ ,B′)
  - 删除 s 和 t 可以得到划分 (A, B)
  - 将 A 中像素标记为前景，B 中像素标记为背景

- 时间复杂度$O(nm^2)$

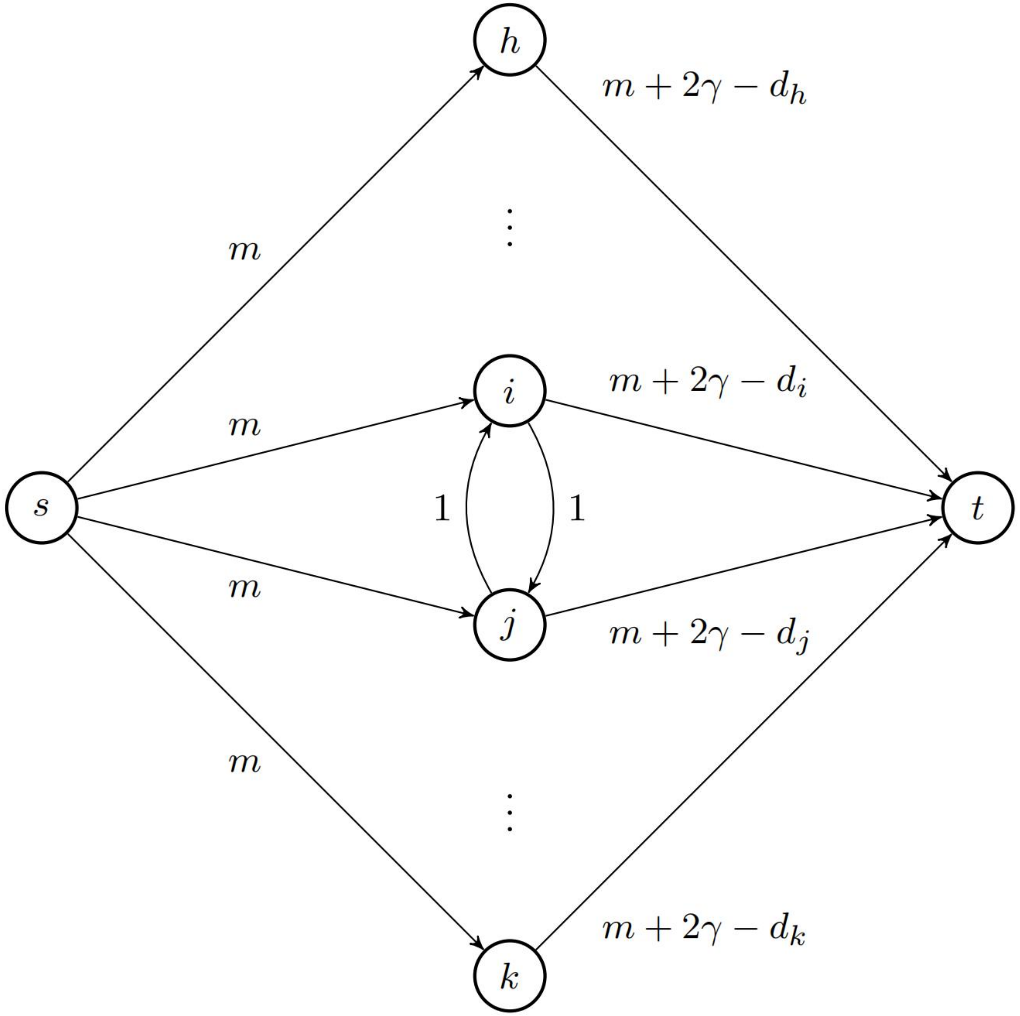
最大密度子图

- 给定无向图 $G = (V,E)$
- 非空顶点子集 $S \neq \Phi$ 导出子图 $G(S) = (S, E(S))$，其中 $E(S) = \{(i,j) \in E: i,j \in S\}$
- 子图密度 $D(S) = |E(S)|/|S|$
- 求密度最大的子图

- 思路
  - 构造判断 $D^* \leq? \gamma$ 的最大流问题
  - 二分密度最大值 γ，求 $O(\log n)$ 次最大流

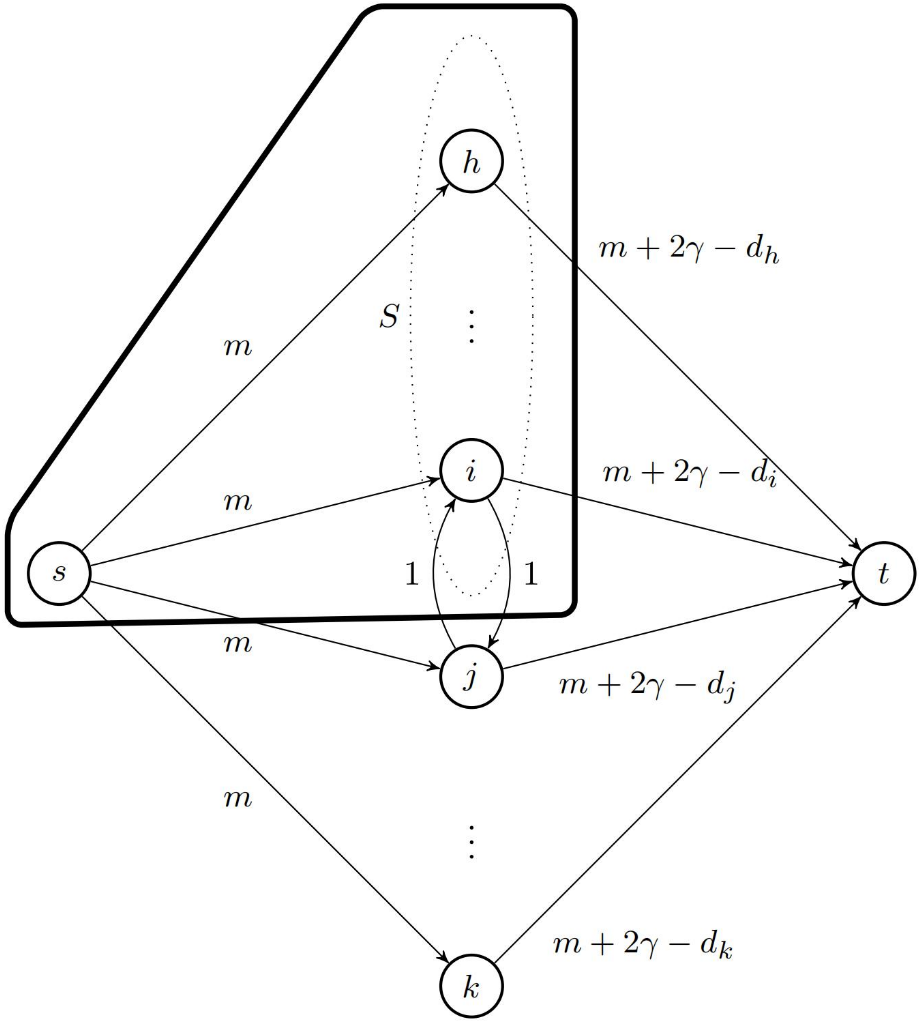
David P. Williamson, “Network Flow Algorithms: Chapter 2.4,” 2019.

最大密度子图：最大流模型



David P. Williamson, “Network Flow Algorithms: Chapter 2.4,” 2019.

最大密度子图：{s}∪S 的割大小



- 记 δ(S) 为恰有一个顶点在 S 的边集
- {s}∪S 的割大小

  $m\,|V-S| + |\delta(S)| + \Sigma_{i\in S}\,(m + 2\gamma - d_i)$

  $= m\,(n - |S|) + |\delta(S)| + (m|S| + 2\gamma|S| - \Sigma_{i\in S}d_i)$

  $= mn + |\delta(S)| + 2\gamma|S| - \Sigma_{i\in S}d_i$

  $= mn + |\delta(S)| + 2\gamma|S| - (2|E(S)| + |\delta(S)|)$

  $= mn + 2|S|(\gamma - |E(S)|/|S|)$

- 引理：γ<D* 当且仅当 最大流<mn

David P. Williamson, “Network Flow Algorithms: Chapter 2.4,” 2019.

最大密度子图：若干性质 (1/2)

- {s}∪S 的割大小： $= mn + 2|S|(\gamma - |E(S)|/|S|)$
- 引理：$\gamma<D^*$ 当且仅当 最大流<mn
  - 必要性：$\gamma < D^*$ 时能找到 < mn 的割集，得最大流 < mn。
  - 充分性：最大流 < mn 时，对应割集大小 < mn，得 $\gamma < |E(S)|/|S| \le D^*$
- 推论：假设 D’ 是第二大的子图密度，由 $D' \le \gamma < D^*$ 最大流问题对应的最小割集 {s}∪X 的 X 组成最大密度子图
  - 密度 ≤ γ 顶点子集 S 组成的 {s}∪S 不可能是最小割
  - 只有密度 > γ 的顶点子集 X 才能组成最小割 {s}∪X

David P. Williamson, “Network Flow Algorithms: Chapter 2.4,” 2019.

最大密度子图：若干性质 (2/2)

- $\{s\} \cup S$ 的割大小：$= mn + 2|S|(\gamma - |E(S)|/|S|)$
- 引理：$\gamma<D^*$ 当且仅当 最大流$<mn$
- 推论：假设 D' 是第二大的子图密度，由 $D' \leq \gamma < D^*$ 最大流问题对应的最小割集 $\{s\} \cup X$ 的 X 组成最大密度子图
- 算法
  - 置 $(l,u]$ 初值为 $(0, m]$。当 $\gamma=(u+l)/2$ 的最大流为 mn 时，置 $u = (u+l)/2$；否则，置 $l = (u+l)/2$。
  - $u - l < 1/n^2$ 时终止
- 引理：当 $u - l < 1/n^2$ 时，令 $\gamma=l$，有 $D' \leq \gamma < D^*$
  - 两个不同子图的密度差异 $\Delta = |m_1/n_1 - m_2/n_2| = |(m_1n_2-m_2n_1)/(n_1n_2)| \geq 1/n^2$
- 定理：上述算法调用 $O(\log n)$ 次最大流求解器即能求出最大密度子图

David P. Williamson, “Network Flow Algorithms: Chapter 2.4,” 2019.

最小割问题模型

- 问题模型：$\underset{A}{\text{minimize}}\, cap(A, \bar{A})$
  - 将原问题建模成子集选取/划分 $V = A \cup \bar{A}$
  - 构造原目标函数与割大小的关系 $cap(A, \bar{A})$

- 例子
  - Baseball Elimination
    - 选取“证据”队伍子集 T
    - 最小化 $(w(T)+g(T))/|T|$
  - Project Selection
    - 选取项目子集
    - 最大化正收益、最小化负收益
  - Image Segmentation
    - 给定像素的前景/背景置信度、相邻像素划分惩罚
    - 划分前景/背景子集
    - 最大化置信度得分、最小化划分惩罚
  - Maximum Density Subgraph
    - 选取子图 S，最大化 D(S) = |E(S)|/|S|

整数流定理

- 如果网络流问题的流入、流出、边容量都是整数，那么对应的线性规划所有的基本可行解都是整数解。因此，单纯形法能求出其中一个整数最优解
- 直观理由：单纯形法表格中，约束矩阵相关的值始终在 {-1, 0, +1} 范围内
- 一般地，约束矩阵是 Totally Unimodular Matrix 的线性规划存在整数最优解（略）
  - TU Matrix 是每个子方阵的行列式值都在 {-1, 0, +1} 范围的矩阵

本讲小结

- 二部图的最大匹配
- 赋权二部图的匹配
- 带需求的流通
- 边不相交和点不相交路径

- 项目选择（最大权闭包）
- 经典图像分割算法
- 最小密度子图

- 整数流定理（略）