例9.3.5. 设 $\{a_n\}$ 单调且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

则 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n \sin nx \quad (x\in\mathbb{R})$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n \cos nx \quad (x\in\mathbb{R},\ x\neq 2k\pi,\ k\in\mathbb{N})$ 收敛.

由于 $\{a_n\}$ 单调趋于零, 所以 $\{a_n\}$ 定号, 不妨设 $a_n\geqslant 0,\ n\in\mathbb{N}$.

则 $|a_n\cos nx|\leqslant a_n,\ |a_n\sin nx|\leqslant a_n$.

从而 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛可推出

$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n \sin nx,\ \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n\cos nx\ (x\in\mathbb{R})$ 绝对收敛.

事实上, 我们可以证明更强的结论:

例9.3.6. 设 $\{a_n\}$ 单调且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. 则

(1) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛 $\Rightarrow$ $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n\sin nx,\ \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n\cos nx\ (x\in\mathbb{R}$ 绝对收敛).

(2) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 发散 $\Rightarrow$ $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n\sin nx\ (x\neq k\pi)$ 条件收敛,

$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n\cos nx,\ (x\neq 2k\pi)$ 条件收敛.

如果 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 发散,

由于 $|a_n\sin nx|\geqslant a_n\sin^2 nx=\dfrac{a_n}{2}(1-\cos 2nx)$,

而 $x\neq k\pi$ 时, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n\cos n(2x)$ 收敛, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 发散, 所以 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}|a_n\sin nx|$ 发散,

即 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n\sin nx$ 条件收敛.

关于 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n\cos nx$ 的结论类似可证.

最后, 关于一般项级数的加括号, 有如下结论.

定理9.3.5.【同号可括】 设$\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$是自然数的一个子列, 令$n_0=0$, $\{a_i\}_{i=n_k+1}^{i=n_{k+1}}$, $k=1,2,\cdots$ 不变号, 记$A_k=\sum\limits_{i=n_{k-1}+1}^{n_k}a_i$, $k=1,2,\cdots$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty}A_k$形成交错级数. 则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$与$\sum\limits_{k=1}^{\infty}A_k$同敛散, 且收敛时, 其和相等.

证明. 首先, $S'_K=\sum\limits_{k=1}^{K}A_k$, $K=1,2,\cdots$ 是$S_N=\sum\limits_{n=1}^{N}a_n$, $N=1,2,\cdots$ 的一个子列.

如果$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛, 即$\lim\limits_{N\to\infty}S_N=S$存在, 当然$\lim\limits_{K\to\infty}S'_K=S$, 即$\sum\limits_{k=1}^{\infty}A_k$也收敛.

其次, 如果$\sum\limits_{k=1}^{\infty}A_k$收敛, 即$S'_K=\sum\limits_{k=1}^{K}A_k$, $K=1,2,\cdots$ 收敛.

由于$\forall N\in\mathbb{N}$, $\exists K$ s.t. $n_{K-1}<N\leqslant n_K$, 所以有$\begin{cases} S'_{K-1}<S_N\leqslant S'_K, & a_n\geqslant 0, \quad n\in(n_{K-1},n_K] \\ S'_K<S_N\leqslant S'_{K-1}, & a_n\leqslant 0, \quad n\in(n_{K-1},n_K] \end{cases}$