

点收敛在一定条件下可以成为一致收敛.

定理10.3.5. 【Dini定理】 $f_n(x) \not\rightarrow f(x), x \in I \Leftrightarrow \exists \varepsilon_0 > 0, \exists \{n_k\} \subset \mathbb{N}, \exists \{x_k\} \subset I \text{ s.t. } |f_{n_k}(x_k) - f(x_k)| > \varepsilon_0.$

设(1) $f_n(x) \in C[a, b], n \in \mathbb{N}$; 如果 $\exists x_0 \in [a, b] \text{ s.t. } |f_{n_k}(x_0) - f(x_0)| > \varepsilon_0, n_k \rightarrow \infty (k \rightarrow \infty)$, 则导致矛盾.

(2) $f_n(x)$ 关于 n 单调; 则 $f(x) \in C[a, b] \Leftrightarrow f_n(x) \Rightarrow f(x), x \in [a, b].$

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x), x \in [a, b].$

证明: " \Leftarrow " 显然. " \Rightarrow " 往证 $f(x) - f_n(x) \Rightarrow 0, x \in [a, b].$ 记 $R_n(x) = |f(x) - f_n(x)|,$

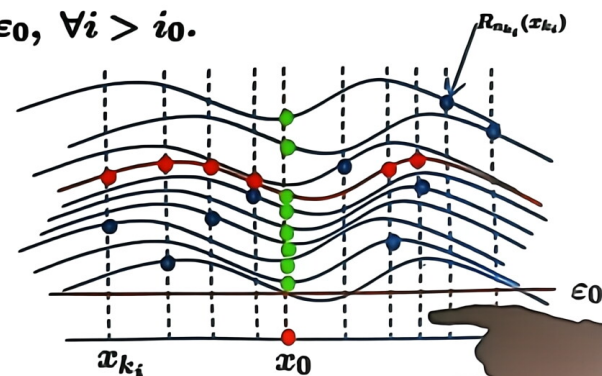
据条件知 $R_n(x) \geq R_{n+1}(x), R_n(x) \in C[a, b], \forall n \in \mathbb{N}$ 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0, \forall x \in [a, b].$

【反证法】 如果 $R_n(x) \not\rightarrow 0, x \in [a, b]$, 则 从而 $\exists x_0 \in [a, b]$ 为 $\{x_k\}$ 的某一收敛子列的极限点,

即 $\exists \{x_{k_i}\} \subset [a, b] \text{ s.t. } \lim_{i \rightarrow \infty} x_{k_i} = x_0, \text{ 且 } R_{n_{k_i}}(x_{k_i}) \geq \varepsilon_0. \forall \text{ fixed } n_k, \exists i_0 \in \mathbb{N} \text{ s.t. } n_{k_i} > n_{k_{i_0}} \geq n_k, \forall i > i_0,$

而 $R_n(x)$ 关于 n 单降, 所以, 对这个固定的 $n_k, R_{n_k}(x_{k_i}) \geq R_{n_{k_i}}(x_{k_i}) > \varepsilon_0, \forall i > i_0.$

在此式中令 $i \rightarrow +\infty$, 则 $R_{n_k}(x_0) \geq \varepsilon_0, \forall n_k, k = 1, 2, \dots.$



夸克扫描王

极速扫描, 就是高效

