

# 人工智能中的数学讲义

方聪

北京大学

## 摘要

本讲义收录了人工智能中的数学课程中的主要概念与课程习题。概率与统计讲义内容摘录于陈家鼎、郑忠国《概率与统计》教材与复熹和张原概率与统计课程课件。图论内容摘录于耿素云、屈婉玲、王捍贫《离散数学教程》。本讲义版权归上述作者，不会出版。讲义仅供于上该课程的同学学习参考，讲义的错误会不断修正。感谢张乙沐、张海涵对讲义整理的帮助。

## 1.1 随机事件及其运算

### 1.1.1 随机事件

**样本空间和样本点：**随机实验  $E$  中所有可能结果组成的集合称为  $E$  的**样本空间**，记为  $\Omega$ 。样本空间中的元素称为**样本点**，记为  $\omega$

- $E_1$ ：抛掷硬币，观察正面  $H$ ，反面  $T$  出现的情况。

$$\Omega_1 = \{H, T\}.$$

- $E_2$ ：抛掷一枚硬币 3 次，观察正面  $H$ ，反面  $T$  出现的情况。

$$\Omega_2 = \{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT\}.$$

- $E_3$ ：抛掷一枚硬币 3 次，观察正面出现的次数。

$$\Omega_3 = \{0, 1, 2, 3\}.$$

随机现象的某些样本点组成的集合称为**随机事件**，简称为事件，常用  $A, B, C, \dots$  表示

例如， $E$  为抛掷一枚骰子，事件  $A = \text{“出现奇数点”}$ ，即  $A = \{1, 3, 5\}$ ，是样本空间  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  的一个子集

**事件的频率：**设  $\mu$  是  $n$  次实验中事件  $A$  发生的次数，则事件  $A$  发生的频率  $\frac{\mu}{n}$ ，随着实验次数  $n$  增大，频率会在某一数值  $p$  附近摆动，称为该事件的**概率**，记为  $P(A) = p$

由于频率  $\frac{\mu}{n}$  总在  $0, 1$  之间，我们有：

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

例如投一枚硬币  $n$  次，出现  $\mu$  次正面，则  $\frac{\mu}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} p$ 。其中，主观概率  $p$  为事件的置信度，概率是可能性大小的度量。大概率事情易发生，小概率事情不易发生。

#### 1.1.1.1 事件的交和并

**定义 2.1** 设有事件  $A$  和事件  $B$ ，如果  $A$  发生，则  $B$  必发生，那么称事件  $B$  包含事件  $A$ （或称事件  $A$  在  $B$  中），并记为

$$A \subset B \text{ (或 } B \supset A)$$

**定义 2.2** 如果事件  $A$  包含事件  $B$ ，同时事件  $B$  包含事件  $A$ ，则事件  $A$  和事件  $B$  相等，并记为

$$A = B$$

**定义 2.3** 设  $A$  和  $B$  都是事件，则“ $A$  或  $B$ ”表示这样的事件  $C$ ： $C$  发生当且仅当  $A$  或  $B$  中至少有一个发生，该事件  $C$  叫做  $A$  与  $B$  的并，记为  $A \cup B$ 。

**例 2.1**（对应郑书例 2.1）在桌面上，投掷两枚匀称的硬币， $A$  表示“恰好一枚国旗朝上”， $B$  表示“两枚国旗朝上”， $C$  表示“至少一枚国旗朝上”，则  $C = A \cup B$ 。

对于并运算，有以下性质，我们恒记必然事件为  $U$ ，不可能事件为  $V$ ：

$$\begin{aligned} A \cup B &= B \cup A \\ A \cup U &= U, \quad A \cup V = V \end{aligned}$$

**定义 2.4** 设  $A$  和  $B$  都是事件，则“ $A$  且  $B$ ”表示这样的事件  $C$ ： $C$  发生当且仅当  $A$  和  $B$  都发生，该事件  $C$  叫做  $A$  与  $B$  的交，记为  $A \cap B$ ，也简记为  $AB$ 。

在例 2.1 中， $A \cap C = A$ ， $B \cap C = C$ ， $A \cap B = A$

对于交运算，有以下性质：

$$\begin{aligned} A \cap B &= B \cap A \\ A \cap U &= A, \quad A \cap V = V \end{aligned}$$

#### 1.1.1.2 事件的余和差

**定义 2.5** 设  $A$  是事件，称“非  $A$ ”是  $A$  的对立事件（或称余是事件），其含义为，“非  $A$ ”发生当且仅当  $A$  不发生，常常用  $\bar{A}$  表示“非  $A$ ”，也用  $A^c$  表示“非  $A$ ”。

由定义知  $\overline{\bar{A}} = A$ ， $\bar{U} = V$ ， $\bar{V} = U$

**定义 2.6** 设  $A$  和  $B$  都是事件，则两个事件的差“ $A$  减去  $B$ ”表示这样的事件  $C$ ： $C$  发生当且仅当  $A$  发生而  $B$  不发生，该事件  $C$  记为  $A - B$ （或  $A \setminus B$ ）

由定义知， $A - B = A \cap \bar{B}$

画图法确定关系。

### 1.1.1.3 事件运算的性质

事件的基本运算还有以下性质：

- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$  “并”的结合律
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$  “交”的结合律
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$  分配律
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$  分配律
- $A \cup A = A, A \cap A = A$
- $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$  对偶律
- $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$  对偶律

多个事件的交和并：

设  $A_1, A_2, \dots, A_n$  是  $n$  个事件，则“ $A_1, A_2, \dots, A_n$ ”的并是指这样的事件：它发生当且仅当  $A_1, A_2, \dots, A_n$  中至少一个发生，常常用  $\bigcup_{i=1}^n A_i$  表示  $A_1, A_2, \dots, A_n$  的并

设  $A_1, A_2, \dots, A_n$  是  $n$  个事件，则“ $A_1, A_2, \dots, A_n$ ”的交是指这样的事件：它发生当且仅当  $A_1, A_2, \dots, A_n$  这  $n$  个事件都发生，常常用  $\bigcap_{i=1}^n A_i$  表示  $A_1, A_2, \dots, A_n$  的交，也用  $A_1 A_2 \dots A_n$  表示这个“交”

实际应用中，还需定义无穷多事件的并与交

设  $A_1, A_2, \dots, A_i, \dots$  是一列事件，则  $B$  是指这样的事件： $B$  发生当且仅当这些  $A_i (i = 1, 2, \dots)$  中至少一个发生，这个  $B$  叫做诸  $A_i$  的并，记为  $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ ，有时也写为  $A_1 \cup A_2 \cup \dots$

设  $A_1, A_2, \dots, A_i, \dots$  是一列事件，则  $C$  是指这样的事件： $C$  发生当且仅当这些  $A_i (i = 1, 2, \dots)$  都发生，这个  $C$  叫做诸  $A_i$  的交，记为  $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ ，有时也写为  $A_1 A_2 \dots$

**例：**取  $X \in \mathbb{R}$ ，事件  $A_i$  为  $X \in [\frac{1}{i+1}, \frac{1}{i}]$ ，事件  $B_i$  为  $X \in [0, \frac{1}{i}]$ 。则事件  $\bigcup_{i=1}^n A_i$  发生等价于  $X \in [\frac{1}{n+1}, 1]$ ，事件  $\bigcap_{i=1}^n B_i$  发生等价于  $X \in [0, \frac{1}{n}]$ 。进而当  $n \rightarrow \infty$  时事件  $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$  发生等价于  $X \in (0, 1]$ ，事件  $\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i$  发生等价于  $X = 0$ 。

并的更一般定义是，设  $\{A_a, a \in \Gamma\}$  是一族事件（其中  $\Gamma$  是任何非空集，每个  $a \in \Gamma$  对应一个事件  $A_a$ ），这些事件  $A_a$  的“并”是指这样的事件  $B$ ： $B$  发生当且仅当至少一个  $A_a$  发生，这个  $B$  常常记为  $\bigcup_{a \in \Gamma} A_a$ ，类似可以定义一族事件的交  $\bigcap_{a \in \Gamma} A_a$

**例 2.3:** (对应郑书例 2.3) 一射手向一个目标连续射击, 设  $A_1 =$  “第一次射击, 命中”,  $A_i =$  “前  $i-1$  次射击都未命中, 第  $i$  次射击命中” ( $i = 2, 3, \dots$ ),  $B =$  “终于命中”, 则  $B = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$

**例 2.4:** (对应郑书例 2.4) 一射手向一个目标连续射击, 设  $A_i =$  “第  $i$  次射击, 未命中目标” ( $i = 2, 3, \dots$ ) 则  $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i =$  “每次均未命中目标”

不难验证, 对可列个事件的并和交有以下规律:

- $A \cup \left( \bigcap_{i=1}^{\infty} B_i \right) = \bigcap_{i=1}^{\infty} (A \cup B_i)$  分配律
- $A \cap \left( \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \right) = \bigcup_{i=1}^{\infty} (A \cap B_i)$  分配律
- $\overline{\left( \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right)} = \bigcap_{i=1}^{\infty} \overline{A_i}$  对偶律
- $\overline{\left( \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \right)} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{A_i}$  对偶律

#### 1.1.1.4 互斥事件

##### 互不相容的事件

如果事件  $A$  和事件  $B$  不能都发生, 即  $A \cap B = \emptyset$ , 则称  $A$  和  $B$  是互不相容的事件 (也称互斥的事件)

称事件  $A_1, \dots, A_n$  互不相容, 若对任何  $i \neq j (i, j = 1, \dots, n)$ ,  $A_i$  与  $A_j$  互不相容

例如, 抛掷两枚硬币, 事件 “恰好一枚国徽朝上” 和事件 “两枚都是国徽朝上” 是互不相容的。不难看出, 对任何事件  $A$ ,  $A$  和  $\overline{A}$  是互不相容的

- 加法公式:  $A_1, A_2, \dots$  互不相容, 则:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

## 1.2 概率的公理化定义

**概率空间子类:** 设  $\Omega$  为样本空间,  $\mathcal{F}$  为  $\Omega$  的一些子集构成的集类。若  $\mathcal{F}$  满足以下三个条件: (1)  $\Omega \in \mathcal{F}$ , (2)  $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$ , (3)  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$ , 则称  $\mathcal{F}$  为概率空间子类

例:

- $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega\}$  平凡概率空间子类
- $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega, A, \bar{A}\}$  包含  $A$  的最小概率空间子类
- $\mathcal{F} = \{A | A \subset \Omega\}$   $\Omega$  上的最大概率空间子类
- $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ , 则  $\Omega$  所有子集构成的概率空间子类共有  $2^n$  个元素

**定义:** 设  $\mathcal{F}$  是满足上述条件的概率空间子集类。概率  $P = P(\cdot)$  是  $\mathcal{F}$  上面定义的实值函数, 满足:

- 非负性:  $P(A) \geq 0$  对于一切  $A \in \mathcal{F}$
- 规范性:  $P(\Omega) = 1$
- 可列可加性: 若  $A_n \in \mathcal{F} (n = 1, 2, \dots)$  两两不相交, 则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$  为概率空间

**例 1:** 假定  $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ ,  $\mathcal{F}$  为全体子集构成的概率空间子类。

设  $p_1, \dots, p_n$  为  $n$  个非负实数, 且满足  $\sum_{i=1}^n p_i = 1$ 。令

$$\mathbb{P}(\emptyset) = 0, \quad \mathbb{P}(A) = \sum_{j=1}^k p_{i_j}, \quad A = \{\omega_{i_1}, \dots, \omega_{i_k}\}, k = 1, \dots, n$$

则  $\mathbb{P}$  为  $(\Omega, \mathcal{F})$  上概率。

概率  $P$  有以下性质:

- (1)  $P(\emptyset) = 0$ ;
- (2) 若  $A \in \mathcal{F}$ , 则  $P(A^c) = 1 - P(A)$ ;
- (3) 若  $A_1, \dots, A_n$  都属于  $\mathcal{F}$  且两两不相交, 则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i) \quad (1.2.1)$$

(4) 若  $A \subset B$ ,  $A \in \mathcal{F}$ ,  $B \in \mathcal{F}$ , 则  $P(A) \leq P(B)$ , 且

$$P(B - A) = P(B) - P(A) \quad (1.2.2)$$

(5) 若  $A_n \subset A_{n+1}$ ,  $A_n \in \mathcal{F} (n = 1, 2, \dots)$ , 则

$$P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) \quad (1.2.3)$$

(6) 若  $A_n \supset A_{n+1}$ ,  $A_n \in \mathcal{F} (n = 1, 2, \dots)$ , 则

$$P(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) \quad (1.2.4)$$

(7) 若  $A_n \in \mathcal{F} (n = 1, 2, \dots)$ , 则

$$P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) \quad (1.2.5)$$

## 2.1 古典概型

**模型定义：**若随机现象有如下两个特征：

(1) 在实验中它的全部可能性只有有限个；

(2) 基本事件发生或出现是等可能的；

则称其对应的数学模型为古典概型

取

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}, \quad \mathcal{F} = \{A | A \subset \Omega\}$$

令  $P$  为  $(\Omega, \mathcal{F})$  上的概率测度，满足

$$P(\{\omega_1\}) = \dots = P(\{\omega_n\})$$

则  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  为古典概型对应的概率空间。

**计算公式：**对  $A = \{\omega_{i_1}, \dots, \omega_{i_k}\} \in \mathcal{F}$ ，利用概率的有限可加性可知：

$$P(A) = \sum_{j=1}^k P(\{\omega_{i_j}\}) = \frac{k}{n} = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

**排列：**从含有  $n$  个不同元素的总体中抽取  $r$  个进行排列

(1) 放回情形：共有  $n^r$  种排列方式

(2) 不放回情形：共有  $A_n^r := n(n-1)\cdots(n-r+1)$  种排列方式

当  $r = n$  时，为全排列，此时  $A_n^n = n!$ 。

**组合：**(1) 从  $n$  个不同元素中取出  $r$  个而不考虑其顺序，称为组合，其总数为  $C_n^r = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{A_n^r}{r!}$

(2) 把  $n$  个不同元素分成  $k$  个部分，且第  $i$  个部分有  $r_i$  个元素， $1 \leq i \leq k$ ，且  $r_1 + r_2 + \dots + r_k = n$ ，则有  $\frac{n!}{r_1! r_2! \cdots r_k!}$  种方法

(3) 把  $n$  个元素全部带有标注，其中  $n_1$  个带标注 1， $n_2$  个带标注 2， $\dots$ ， $n_k$  个带标注  $k$ 。现在从此  $n$  个元素中取出  $r$  个，使得带有标注  $i$  的元素有  $r_i$  个，其中  $1 \leq i \leq k$  且  $r_1 + r_2 + \dots + r_k = r$ 。则不同取法的总数为  $C_{n_1}^{r_1} C_{n_2}^{r_2} \cdots C_{n_k}^{r_k}$ 。

(4) 从  $n$  个不同元素中有重复的取出  $r$  个，不计顺序，则不同的取法有  $C_{n+r-1}^r$ （有重复组合数）

**组合公式：**对一切正整数  $a, b$ ,

$$\sum_{i=0}^n C_a^i C_b^{n-i} = C_{a+b}^n$$



约定当  $k > n$  时,  $C_n^k = 0$ 。特别地,

$$\sum_{i=0}^n (C_n^i)^2 = C_{2n}^n$$

**例 1:** (对应郑书例 3.1) 某人同时抛掷两枚骰子, 问: 得到 7 点 (两颗骰子的点数之和的概率是多少?)

**解:** 我们用甲乙分别表示这两颗骰子, 每颗骰子共有 6 种可能的点数: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 两颗骰子共有  $6 \times 6 = 36$  种可能结果:  $(i, j) (i = 1, \dots, 6) (j = 1, \dots, 6)$ , 这里  $i$  表示骰子甲的点数,  $j$  表示骰子乙的点数, 显然这些结果出现的机会是相等的, 它们构成了等概完备事件组, 事件“得到 7 点”由 6 种结果 (基本事件) 组成:  $(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)$ , 故事件“得到 7 点”的概率为  $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$   
□

**例 2:** 甲口袋有 5 个白球, 3 个黑球, 乙口袋中有 4 个白球, 6 个黑球, 从两个口袋中各任取一球, 求取到的两个球颜色相同的概率。

**解:** 从两个口袋中各取一球, 共有  $C_8^1 C_{10}^1$  种可能取法。两球颜色相同可能情况为: 从甲乙口袋均取出白球, 从甲乙口袋均取出黑球, 共有  $C_5^1 C_4^1 + C_3^1 C_6^1$  种取法, 于是

$$P(\text{取到的两个球颜色相同}) = \frac{C_5^1 C_4^1 + C_3^1 C_6^1}{C_8^1 C_{10}^1} = \frac{19}{40}$$

□

**例 3:** (巴拿赫问题) 某数学家有两盒火柴, 每盒有  $n$  根, 每次使用时, 他任取一盒并从中抽出一根, 问他发现一盒空而同时另一盒还有  $r (0 \leq r \leq n)$  的概率为多少 (发现为空表示最后一次抽到空盒)?

**解:** 设两盒火柴分别为  $A, B$ , 由对称性, 所求概率为事件  $E =$  “发现  $A$  盒空而  $B$  盒还有  $r$  根”的概率的 2 倍。

先计算样本空间中的样本点个数, 由于共取了  $2n - r + 1$  次, 故有  $2^{2n-r+1}$  个样本点。

考察事件  $E$ , 等效为前  $2n - r$  次  $A$  盒恰好取  $n$  次, 次序不论, 最后一次必定取到  $A$  盒, 此种样本点共有  $C_{2n-r}^n$  个, 因此

$$P(E) = \frac{C_{2n-r}^n}{2^{2n-r+1}}.$$

所求概率为  $\frac{C_{2n-r}^n}{2^{2n-r}}.$

## 2.2 条件概率与独立性

### 2.2.1 条件概率

**条件概率：**设  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  为概率空间， $B \in \mathcal{F}$  满足  $P(B) > 0$ 。称

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}, A \in \mathcal{F}$$

为  $B$  发生条件下  $A$  发生的条件概率。

条件概率  $P(\cdot|B)$  为  $\mathcal{F}$  上的概率，即满足：

- $P(A|B) \geq 0, \forall A \in \mathcal{F}$
- $P(\Omega|B) = 1$
- $\forall \{A_n\} \subset \mathcal{F}, A_n \cap A_m = \emptyset, \forall n \neq m,$

$$P\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n | B\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n | B)$$

容易得到， $P(B|\Omega) = P(B)$ 。

**乘法公式：** $P(AB) = P(B|A)P(A)$

**乘法公式的推广：** $P(A_1 A_2 \cdots A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 A_2) \cdots P(A_n|A_1 A_2 \cdots A_{n-1})$ ，其中  $P(A_1 A_2 \cdots A_{n-1}) > 0$ 。

**例 1：**将 52 张扑克牌（不含大王、小王）随机地分为 4 堆，每堆 13 张，问：各堆都含有 A 牌（即 1 点）的概率是多少？

**解：**将 4 堆扑克牌编号：第 1 堆，第 2 堆，第 3 堆，第 4 堆，用  $A_1, A_2, A_3, A_4$  依次表示 4 个 A 牌，设  $i_1, i_2, i_3, i_4$  是 1, 2, 3, 4 的一个排列，令  $E_{i_1 i_2 i_3 i_4} =$  “第  $i_1$  堆有  $A_1$  但没有  $A_2, A_3, A_4$ ，第  $i_2$  堆有  $A_2$  但没有  $A_1, A_3, A_4$ ，第  $i_3$  堆有  $A_3$  但没有  $A_1, A_2, A_4$ ，第  $i_4$  堆有  $A_4$  但没有  $A_1, A_2, A_3$ ”， $E =$  “各堆都含有 A”，则

$$E = \bigcup_{i_1 i_2 i_3 i_4} E_{i_1 i_2 i_3 i_4}$$

这些事件两两不相容，易知  $P(E) = 4!P(E_{1234})$ ，令  $E_k = \{ \text{第 } k \text{ 堆含有 } A_k \text{ 但不含有其他的 } A_j (j \neq k) \} \quad (k = 1, 2, 3, 4)$ ，则

$$P(E_{1234}) = P(E_1)P(E_2|E_1)P(E_3|E_1 E_2)P(E_4|E_1 E_2 E_3)$$

易知

$$P(E_1) = C_{48}^{12}/C_{52}^{13}, \quad P(E_2|E_1) = C_{36}^{12}/C_{39}^{13},$$

$$P(E_3|E_1E_2) = C_{24}^{12}/C_{26}^{13}, \quad P(E_4|E_1E_2E_3) = 1,$$

于是

$$P(E_{1234}) = \frac{C_{48}^{12}C_{36}^{12}C_{24}^{12}}{C_{52}^{13}C_{39}^{13}C_{26}^{13}} = \frac{13^4}{52 \times 51 \times 50 \times 49},$$

$$P(E) = 4!P(E_{1234}) \approx 0.105$$

□

**例 2:** (罐子模型) 设罐中有  $b$  个黑球,  $r$  个红球, 每次随机取出一个球, 取出后将原球放回, 还加进  $c$  个同色球和  $d$  个异色球, 记  $B_i$  为“第  $i$  次取出的是黑球”,  $R_j$  为“第  $j$  次取出的是红球”。若连续从罐中取出三个球, 其中有两个红球, 一个黑球, 则由乘法公式我们可得

$$P(B_1R_2R_3) = P(B_1)P(R_2|B_1)P(R_3|B_1R_2) = \frac{b}{b+r} \cdot \frac{r+d}{b+r+c+d} \cdot \frac{r+d+c}{b+r+2c+2d},$$

$$P(R_1B_2R_3) = P(R_1)P(B_2|R_1)P(R_3|R_1B_2) = \frac{r}{b+r} \cdot \frac{b+d}{b+r+c+d} \cdot \frac{r+d+c}{b+r+2c+2d},$$

$$P(R_1R_2B_3) = P(R_1)P(R_2|R_1)P(B_3|R_1R_2) = \frac{r}{b+r} \cdot \frac{r+c}{b+r+c+d} \cdot \frac{b+2d}{b+r+2c+2d},$$

以上概率与黑球在第几次被抽出有关。罐子模型也称波利亚 (Polya) 模型, 这个模型的各种变化如下:

(1) 当  $c = -1, d = 0$  时, 为不返回抽样, 此时前次抽取结果会影响后次抽取结果, 但只要抽取的黑球和红球个数确定, 则概率不依赖其抽出球的次序, 有

$$P(B_1R_2R_3) = P(R_1B_2R_3) = P(R_1R_2B_3) = \frac{br(r-1)}{(b+r)(b+r-1)(b+r-2)}$$

(2) 当  $c = 0, d = 0$  时, 为返回抽样, 此时前次抽取结果不会影响后次抽取结果, 上述三种概率相等, 有

$$P(B_1R_2R_3) = P(R_1B_2R_3) = P(R_1R_2B_3) = \frac{br^2}{(b+r)^3}$$

(3) 当  $c > 0, d = 0$  时, 为传染病模型, 此时每次取出球后会增加下一次取到同色球的概率, 或者说, 每发现一个传染病患者, 以后都会增加再传染的概率。同样的, 上述三种概率相等, 且都等于

$$P(B_1R_2R_3) = P(R_1B_2R_3) = P(R_1R_2B_3) = \frac{br(r+c)}{(b+r)(b+r+c)(b+r+2c)}$$

可以看出, 当  $d = 0$  时, 只要取出的黑球和红球个数确定, 则概率不依赖于其抽出球的顺序。

(4) 当  $c = 0, d > 0$  时, 为安全模型, 可以解释为, 每当事故发生, 会抓紧安全工作, 从而下一次发生事故的的概率会减少, 而当事故未发生时, 安全工作会松懈, 下一次发生事故的的概率会增大, 上述三种概率分别为:

$$P(B_1R_2R_3) = \frac{b}{(b+r)} \cdot \frac{r+d}{b+r+d} \cdot \frac{r+d}{b+r+2d},$$

$$P(R_1 B_2 R_3) = \frac{r}{(b+r)} \cdot \frac{b+d}{b+r+d} \cdot \frac{r+d}{b+r+2d},$$

$$P(R_1 R_2 B_3) = \frac{r}{(b+r)} \cdot \frac{r}{b+r+d} \cdot \frac{b+2d}{b+r+2d}$$

**例：**设  $n$  件产品中有  $m$  件不合格品，从中任取两件，已知两件中有一件是合格品，求另一件也是合格品的概率。

**解：**记事件  $A$  “有一件是合格品”， $B$  “另一件也是合格品”。则

$P(A) = P(\text{取出一件合格品，一件不合格品}) + P(\text{取出两件都是合格品})$

$$= \frac{C_m^1 C_{n-m}^1}{C_n^2} + \frac{C_{n-m}^2}{C_n^2} = \frac{2m(n-m) + (n-m)(n-m-1)}{n(n-1)}$$

$$= \frac{(n-m)(n+m-1)}{n(n-1)}$$

$$P(AB) = P(\text{取出两件都是合格品}) = \frac{C_{n-m}^2}{C_n^2} = \frac{(n-m)(n-m-1)}{n(n-1)}$$

于是所求概率为

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{\frac{(n-m)(n-m-1)}{n(n-1)}}{\frac{(n-m)(n+m-1)}{n(n-1)}} = \frac{n-m-1}{n+m-1}$$

□

### 2.2.2 事件的独立性

**事件的独立性：**设  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  为概率空间，称  $A, B \in \mathcal{F}$  相互独立（独立），若

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

**性质：**(1) 若  $A, B$  独立，且  $P(B) > 0$ ，则

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B)}{P(B)} = P(A).$$

即条件概率等于无条件概率。

(2) 若  $A, B$  独立，则  $A$  与  $\bar{B}$ ， $\bar{A}$  与  $B$ ， $\bar{A}$  与  $\bar{B}$  亦独立。

$$P(A\bar{B}) = P(A) - P(AB) = P(A) - P(A)P(B) = P(A)P(\bar{B})$$

(3) 零概率事件及其对立的事件与任意的事件都独立。

**例：**袋中有  $a$  只黑球和  $b$  只白球，令  $A$ ：“第一次摸到黑球”， $B$ ：“第二次摸到黑球”。讨论  $A$  和  $B$  的独立性。

(1) 放回情形。因为

$$P(A) = \frac{a}{a+b}, P(AB) = \frac{a^2}{(a+b)^2}, P(\overline{A}B) = \frac{ab}{(a+b)^2},$$

所以

$$P(B) = P(AB) + P(\overline{A}B) = \frac{a^2 + ab}{(a+b)^2} = \frac{a}{a+b}$$

故

$$P(A)P(B) = P(AB)$$

(2) 不放回情形。易知

$$P(A) = P(B) = \frac{a}{a+b}, P(\overline{A}B) = \frac{ab}{(a+b)(a+b-1)},$$

故

$$P(A)P(B) \neq P(AB)$$

**定义：** 设  $\{A_k\}_{k \leq n} \subset \mathcal{F}$ 。称  $A_1, A_2, \dots, A_n$  相互独立，若

$$P\left(\bigcap_{j=1}^k A_{i_j}\right) = \prod_{j=1}^k P(A_{i_j}), \quad 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n, k \leq n$$

注意：独立  $\Rightarrow$  两两独立，但是反之不对：

伯恩斯坦反例：一个均匀的正四面体，其第一、二、三面分别涂上红、黄、蓝三种颜色第四面同时涂上以上三种颜色。以  $A, B, C$  分别表示投一次四面体出现红、黄、蓝颜色朝下的事件，则

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{2}, \quad P(AB) = P(BC) = P(AC) = \frac{1}{4}$$

从而  $A, B, C$  两两独立，但是，

$$P(ABC) = \frac{1}{4} \neq P(A)P(B)P(C)$$

**独立性与概率计算：** 设  $A_1, A_2, \dots, A_n$  相互独立，则

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = 1 - \prod_{i=1}^n P(\overline{A}_i)$$

**例：** 设有某型号的高射炮，每门炮（发射一发）击中敌机的概率为 0.6，现在若干门炮同时发射（每炮射一发），问：若要以 99% 的把握击中来犯的一架敌机，至少需要配置几门高射炮？

**解：** 设  $n$  是需要配置的高射炮的门数，记  $A_i =$  “第  $i$  门炮击中敌机” ( $i = 1, \dots, n$ )， $A =$  “敌机被击中”。由于  $A = \bigcup_{i=1}^n A_i$ ，于是找到  $n$ ，使得

$$P(A) = P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \geq 0.99$$

由于  $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - P(\bigcup_{i=1}^n \bar{A}_i)$ , 且  $\bar{A}_1, \dots, \bar{A}_n$  相互独立, 故

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}_1) \cdots P(\bar{A}_n) = 1 - 0.4^n$$

为使不等式成立, 必须且只需  $1 - 0.4^n \geq 0.99$ . 由此得

$$n \geq \lg 0.01 / \lg 0.4 = 5.026$$

故至少需配置 6 门高射炮方能以 99% 的把握击中敌机。

**例:** 设  $A, B, C$  三事件相互独立, 证明  $A - B$  与  $C$  独立。

**解:** 因为

$$\begin{aligned} P((A - B)C) &= P(AC - BC) = P(AC) - P(ABC) \\ &= P(A)P(C) - P(A)P(B)P(C) \\ &= (P(A) - P(A)P(B))P(C) \\ &= (P(A) - P(AB))P(C) = P(A - B)P(C). \end{aligned}$$

所以  $A - B$  与  $C$  独立。 □

## 2.3 全概率公式和贝叶斯公式

### 2.3.1 全概率公式

**完备事件组:** 若  $\{B_n\}_{n \geq 1} \subset \mathcal{F}$  满足两两互斥且  $\sum_{n=1}^{\infty} B_n = \Omega$ , 则称  $\{B_n\}_{n \geq 1}$  为完备事件组。

**全概率公式:** 假定  $\{B_n\}_{n \geq 1}$  为完备事件组, 则

$$P(A) = \sum_{n=1}^{\infty} P(B_n)P(A|B_n), \forall A \in \mathcal{F}$$

注意: 在上式中, 若  $P(B_n) = 0$ , 则规定  $P(B_n)P(A|B_n) = 0$ 。

**例:** 一保险公司相信人群可以分为 2 类: 一类是容易出事故的; 另一类是不容易出事故的。已知前者在一年内出事故的概率为 0.4, 后者在一年内出事故的概率为 0.2。前者约占人群的 30%。今有一人前来投保, 他在一年内出事故的可能性有多大?

**解:** 设  $A =$  “他在一年内出事故”,  $B =$  “他是容易出事故的”, 则  $B, \bar{B}$  构成完备事件组, 有

$$P(A) = P(B)P(A|B) + P(\bar{B})P(A|\bar{B})$$



图 2.1: 完备事件组

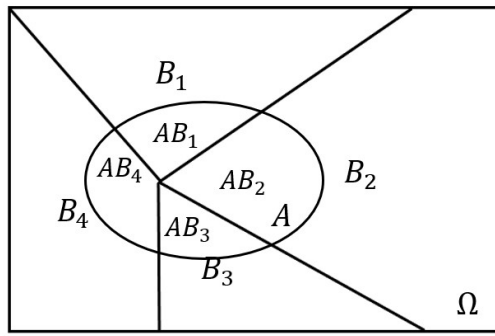


图 2.2: 全概率公式

由于  $P(B) = 0.3, P(A|B) = 0.4, P(\bar{B}) = 0.7, P(A|\bar{B}) = 0.2$ , 于是

$$P(A) = 0.3 \times 0.4 + 0.7 \times 0.2 = 0.26$$

□

**例:** 甲口袋有 1 个黑球, 2 个白球, 乙口袋有 3 个白球, 每次从两口袋中任取一球, 交换后放入另一口袋中, 求交换  $n$  次之后, 黑球仍然在甲口袋的概率。

设事件  $A_i$  为 “第  $i$  次交换后黑球仍然在甲口袋中”, 记  $p_i = P(A_i), i = 0, 1, 2, \dots$ , 则有  $p_0 = 1$ , 且

$$P(A_{i+1} | A_i) = \frac{2}{3}, \quad P(A_{i+1} | A_i^c) = \frac{1}{3}$$

由全概率公式得

$$p_n = \frac{2}{3}p_{n-1} + \frac{1}{3}(1 - p_{n-1}) = \frac{1}{3}p_{n-1} + \frac{1}{3}, \quad n \geq 1$$

得到递推公式

$$p_n - \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{3}\right) \left(p_{n-1} - \frac{1}{2}\right), \quad n \geq 1$$

将  $p_0 = 1$  代入上式可得

$$p_n - \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{3}\right)^n \left(\frac{1}{2}\right)$$

因此

$$p_n = \frac{1}{2} \left[ 1 + \left(\frac{1}{3}\right)^n \right]$$

□

### 2.3.2 贝叶斯公式

**贝叶斯公式：**假定  $\{B_n\}_{n \geq 1}$  为完备事件组， $A \in \mathcal{F}$  满足  $P(A) > 0$ ，则

$$P(B_n|A) = \frac{P(B_n)P(A|B_n)}{\sum_{n=1}^{\infty} P(B_n)P(A|B_n)}$$

**例：**一项血液化验有 95% 的把握诊断某种疾病，但这项化验用于健康人也会有 1% 的“假阳性”结果（即如果一个健康人接受这项化验，化验结果误诊此病人患该疾病的概率为 1%）。假定该疾病的患者事实上只占总人口的 0.5%。若某人化验结果为阳性，则此人确实患有该疾病的概率是多少？

**解：**令  $A$  表示“此人确实患该疾病”， $B$  表示“其化验结果为阳性”，则所求概率为

$$\begin{aligned} P(A|B) &= \frac{P(A)P(B|A)}{P(A)P(B|A) + P(\bar{A})P(B|\bar{A})} \\ &= \frac{0.95 \times 0.005}{0.95 \times 0.005 + 0.01 \times 0.995} \\ &= \frac{95}{294} \approx 0.323 \end{aligned}$$

□ **例：**一架飞机失踪了，推测它等可能的坠落在 3 个区域。令  $\alpha_i (i = 1, 2, 3)$  表示飞机在第  $i$  个区域坠落但没有被发现的概率。已知对区域 1 的搜索没有发现飞机，求在此条件下，飞机坠落在第  $i (i = 1, 2, 3)$  个区域的条件概率。

**解：**令  $B_i$  表示“飞机坠毁在第  $i$  个区域”， $i = 1, 2, 3$ ， $A$  表示“在第 1 个区域没有搜索到飞机”，则

$$P(B_1|A) = \frac{P(B_1)P(A|B_1)}{\sum_{i=1}^3 P(B_i)P(A|B_i)} = \frac{\frac{\alpha_1}{3}}{\frac{\alpha_1}{3} + 1 \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{1}{3}} = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + 2}$$

对  $j = 2, 3$ ,

$$P(B_j|A) = \frac{P(B_j)P(A|B_j)}{\sum_{i=1}^3 P(B_i)P(A|B_i)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{\alpha_1}{3} + 1 \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{1}{3}} = \frac{1}{\alpha_1 + 2}$$

□

□



**随机游走：**考虑数轴上一质点，假定它只在整数点上运动。当前时刻它处于位置  $a$ （整数），下一时刻（单位间隔时间）以概率  $p$  向正向，概率  $1-p$  向负向运动一个单位，称这样的质点运动为随机游走，当  $p = q = \frac{1}{2}$  时，称为对称随机游走。

(1) 无限制随机游走：对随机游走，以  $S_n$  表示  $n$  时刻质点的位置，假定  $S_0 = 0$ 。我们计算经过  $n$  次运动后到达位置  $k$  的概率。

由于质点在  $n$  时刻位于  $k$ ，在  $n$  次游动中，质点向右移动次数  $x$  比向左运动  $y$  多  $k$  次：

$$\begin{aligned} x - y &= k, & x + y &= n \\ x &= \frac{n+k}{2}, & y &= \frac{n-k}{2} \end{aligned}$$

为使  $x$  为整数， $k$  和  $n$  的奇偶性需要相同，即

$$P(S_n = k) = \begin{cases} C_n^{\frac{n+k}{2}} p^{\frac{n+k}{2}} (1-p)^{\frac{n-k}{2}}, & n, k \text{ 奇偶性相同} \\ 0, & n, k \text{ 奇偶性不同} \end{cases}$$

(2) 两端带有吸收壁的随机游走：设  $a, b$  为正整数。假定质点初始位置为  $a$ ，在位置 0 和  $a+b$  均有一个吸收壁，求质点被吸收的概率。

记  $q_n$  为质点初始位置是  $n$  而最终在  $a+b$  被吸收的概率，显然，

$$q_0 = 0, \quad q_{a+b} = 1$$

若质点某时刻位于  $n$ ， $n = 1, \dots, a+b-1$ 。则其在位置  $a+b$  被吸收有两种可能：(1) 运动到  $n-1$  位置被  $a+b$  吸收，(2) 运动到  $n+1$  位置被  $a+b$  吸收，由全概率公式得

$$q_n = q_{n-1}p + q_{n+1}p, \quad n = 1, \dots, a+b-1$$

由于  $p+q=1$ ，上式可以写为

$$p(q_{n+1} - q_n) = q(q_n - q_{n-1}), \quad n = 1, \dots, a+b-1$$

记  $r = \frac{q}{p}$ ，则

$$q_{n+1} - q_n = r(q_n - q_{n-1}), \quad n = 1, \dots, a+b-1$$

可以分两种情况讨论：(i) 若  $r = 1$ ，即  $p = q = \frac{1}{2}$ 。则

$$q_{n+1} - q_n = q_n - q_{n-1} = \dots = q_1 - q_0$$

$$q_{n+1} = q_0 + (n+1)(q_1 - q_0), \quad n = 1, \dots, a+b-1$$

结合边值条件, 有

$$q_n = \frac{n}{a+b}, n = 1, \dots, a+b-1$$

(ii) 若  $r \neq 1$ , 即  $p \neq q$ :

$$q_{n+1} - q_n = r(q_n - q_{n-1}) = \dots = r^n(q_1 - q_0)$$

即

$$q_n - q_0 = \sum_{i=0}^{n-1} (q_{i+1} - q_i) = \sum_{i=0}^{n-1} r^i (q_1 - q_0) = \frac{1-r^n}{1-r} (q_1 - q_0), \quad n = 1, \dots, a+b-1$$

结合边值条件, 得

$$q_1 = \frac{1-r}{1-r^{a+b}}$$

则

$$q_n = \frac{1-r^n}{1-r^{a+b}}$$