AI 中的数学

第七、八讲

方聪，概率统计部分参考章复熹和张原老师课件

2024 年秋季

- 例 1.3. 考察钢的硬度 X 与含碳量 Y, 含硫量 Z 之间的关系.
- 定义 1.1&1.1′. 设 $X_1, \cdots, X_n$ 是同一个概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上的随机变量, 则称 $\xi = \vec{X} = (X_1, \cdots, X_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n, \omega \mapsto (X_1(\omega), \cdots, X_n(\omega))$ 为 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上的 (n 维) 随机向量 / 变量.
- 定义 1.2. n 维随机向量的函数指新变量 $Y = f(X_1, \cdots, X_n)$, 其中 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad (x_1, \cdots, x_n) \mapsto f(x_1, \cdots, x_n)$.
- 例 1.6. 三维空间中的一个随机点 (X, Y, Z) 与原点的距离为

$$f(X, Y, Z) = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}.$$

n 维随机向量：称 n 个随机变量 $X_1, \cdots, X_n$ 的整体 $\xi = (X_1, \cdots, X_n)$ 为 n 维随机向量（或者 n 维随机变量），一维随机向量简称随机变量。
n 维随机变量数学上的精确定义：设 $X_1 = X_1(\omega), \cdots, X_n = X_n(\omega)$ 都是概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上的随机变量，则称

$$\xi = \xi(\Omega) \triangleq (X_1(\omega), \cdots, X_n(\omega))$$

为概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上的 n 维随机向（变）量。

例如，用炮弹向远处目标攻击，炮弹的落点用平面坐标系中的坐标表示为 (X, Y)，是一个二维随机向量。

随机向量的函数：设 $X_1 = X_1(\omega), \cdots, X_n = X_n(\omega)$ 是 n 个随机变量，$f(x_1, \cdots, x_n)$ 是 n 元实值函数，则称随机变量 $Y \triangleq f(x_1, \cdots, x_n)$ 为随机变量 $X_1, \cdots, X_n$ 的函数（即随机向量 $(X_1, \cdots, X_n)$ 的函数）。

离散型情形

§3.2 二维随机向量的联合分布与边缘分布,§3.7 条件分布

- 定义 2.1&2.2. 若 $\xi = (X, Y)$ 取有限个或可列个 "值" (二维向量), 则称 ξ 为离散型.
- ξ 是离散型当且仅当 X, Y 都是离散型.
- 定义 2.2. 设 X, Y 的可能值分别为 x_i, y_j, 则称

$$p_{ij} = P\left(X = x_i, Y = y_j\right), \quad i, j = 1, 2, \cdots$$

为 ξ 的联合分布 (列).

- 联合分布列满足: $p_{ij} \geqslant 0, i, j = 1, 2, \cdots$ (非负性);

$$\sum_{i,j} p_{ij} = 1 \text{ (规范性)}.$$

- 定义 2.3. 设 $\xi=(X,Y)$, 则 X 的分布称为 ξ 关于 X 的边缘分布. 关于 Y 的边缘分布类似.
- 例 2.5. $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \frac{1}{4}$,

$$P(\xi=(0,0))=P(\xi=(1,1))=\frac{1}{4}+\varepsilon;$$
$$P(\xi=(0,1))=P(\xi=(1,0))=\frac{1}{4}-\varepsilon.$$

总有, $X, Y \sim B\left(1, \frac{1}{2}\right)$.

- 给定 j, 将

$$P\left(X=x_i \mid Y=y_j\right), i=1,2,\cdots$$

称为在 $Y=y_j$ 的条件下, X 的条件分布 (列); Y 的条件分布类似. (7.3)

- 联合分布列 $\Leftrightarrow$ 边缘分布列、条件分布列.

例 2.2&2.3：有大量粉笔，含白、黄、红三种颜色，比例分别为 p_1，p_2, p_3. 从中抽取 n 支. 求：恰好抽到 k_1 支白，k_2 支黄的概率.

- 设恰好抽到 X 支白，Y 支黄，即求 $(X, Y) = (k_1, k_2)$ 的概率.
- 可以理解为放回抽样，连续抽取 n 次.
- 所求事件包含了

$$C_n^{k_1} C_{n-k_1}^{k_2} = \frac{n!}{k_1! k_2! (n - k_1 - k_2)!}$$

个基本事件，其中，每一个的概率都为

$$p_1^{k_1} p_2^{k_2} p_3^{n-k_1-k_2}.$$

- 故，$\forall k_1, k_2 \geqslant 0, k_1 + k_2 \leqslant n$,

$$P(X = k_1, Y = k_2) = C_n^{k_1} C_{n-k_1}^{k_2} p_1^{k_1} p_2^{k_2} p_3^{n-k_1-k_2}.$$

- 称 $\xi = (X, Y)$ 服从三项分布.

例：有一大批量粉笔，其中 60% 是白的，25% 是黄的，15% 是红的，现从中随机的依次取出 6 支，问：其中恰有 3 支白色，1 支黄色，2 支红色的概率是多少？

例：有一大批量粉笔，其中 60% 是白的，25% 是黄的，15% 是红的，现从中随机的依次取出 6 支，问：其中恰有 3 支白色，1 支黄色，2 支红色的概率是多少？
解：令 X = "6 支中白粉笔的个数"，Y = "6 支中黄粉笔的个数"，则事件 "6 支中恰有 3 支白色，1 支黄色，2 支红色" 就是事件

$$\{X=3, Y=1\}, \text{即}\{(X,Y)=(3,1)\}.$$

由三项分布，概率可表示为

$$P((X,Y)=(3,1))=\frac{6!}{3!1!2!}0.6^3\times 0.25\times 0.15^2.$$

用组合数方法同样可以得到上述结果。
一般的，对于满足 $k_1\geqslant 0, k_2\geqslant 0$ 及 $k_1+k_2\leqslant 6$ 的 k_1, k_2，由三项分布有

$$P((X,Y)=(k_1,k_2))=\frac{6!}{k_1!k_2!(6-k_1-k_2)!}0.6^{k_1}\times 0.25^{k_2}\times 0.15^{6-k_1-k_2}.$$

二维随机向量的边缘分布：对于二维随机向量 $\xi = (X, Y)$，分量 X 的概率分布称为 ξ 关于 X 的边缘分布，分量 Y 的概率分布称为 ξ 关于 Y 的边缘分布。

二维随机向量 $\xi = (X, Y)$ 的两个边缘分布均由 ξ 的概率分布完全确定。

例：从 $1,2,3,4$ 中任取一数记为 X，再从 $1,\cdots,X$ 中任取一数记为 Y，求 $(X\ Y)$ 的联合分布列及 $P(X=Y)$。
解：易知 X 的分布列为：

$$P(X=i)=\frac{1}{4},\quad i=1,2,3,4.$$

显然，$P(X=i,Y=j)=0,j>i,i=1,2,3,4$，当 $1\leqslant j\leqslant i\leqslant 4$ 时，由乘法公式得

$$P(X=i,Y=j)=P(X=i)P(Y=j|X=i)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{i}=\frac{1}{4i}.$$

Y X	1	2	3	4
1	$\frac{1}{4}$	0	0	0
2	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	0	0
3	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	0
4	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$

$$P(X=Y)=\sum_{i=1}^{4}P(X=Y=i)=\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{4i}=\frac{25}{48}.$$

例：（对应郑书例 2.5）设随机变量 X 取值是 0 或 1，随机变量 Y 取值也是 0 或 1，且二维随机向量 (X, Y) 的概率分布是

$$P((X,Y)=(0,0))=\frac{1}{4}+\varepsilon, \quad P((X,Y)=(0,1))=\frac{1}{4}-\varepsilon,$$
$$P((X,Y)=(1,0))=\frac{1}{4}-\varepsilon, \quad P((X,Y)=(1,1))=\frac{1}{4}+\varepsilon,$$

其中 $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \frac{1}{4}$。

易知不同的 ε 对应不同的联合分布，但是

$$P(X=0)=P((X,Y)=(0,0))+P((X,Y)=(0,1))=\frac{1}{2},$$
$$P(X=1)=P((X,Y)=(1,0))+P((X,Y)=(1,1))=\frac{1}{2}.$$

同理，

$$P(Y=0)=P(Y=1)=\frac{1}{2},$$

有无穷多个不同的联合分布具有相同的边缘分布。

2. 连续型情形

- 定义 2.4. 设 $\xi = (X, Y)$. 若存在 $p(x, y)$ 使得

$$P(\xi \in D) = \iint_D p(x, y) dxdy,$$

对任意开矩形 D 成立，则称 ξ 为连续型随机向量，称 $p(x, y)$ 为 ξ 的联合密度 (函数)，也记为 $p_{X,Y}(x, y)$.

- 联合密度满足:

$$p(x, y) \geqslant 0; \quad \iint_{\mathbb{R}^2} p(x, y) dxdy = 1.$$

- $\star$ 对更一般的集合 D 都成立，例如，D 是单位圆盘.

例：（对应郑书例 2.6）设二维随机向量 $\xi = (X, Y)$ 的联合密度为

$$p(x, y) = \begin{cases} ce^{-(x+y)}, & x \geqslant 0 且 y \geqslant 0, \\ 0, & 其他, \end{cases}$$

其中 c 是一个常数，求：
（1）c 的值；　（2）$P(0 < X < 1, 0 < Y < 1)$.
解：（1）由归一性知

$$1 = \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} ce^{-(x+y)}dxdy = c\int_0^{+\infty} e^{-x}dx \cdot \int_0^{+\infty} e^{-y}dy$$

于是 $c = 1$。
（2）取 $D = \{(x, y) : 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$，由定义知

$$\begin{aligned} P(0 < X < 1, 0 < Y < 1) &= \int_0^1\int_0^1 e^{-(x+y)}dxdy \\ &= \int_0^1 e^{-x}dx \cdot \int_0^1 e^{-y}dy = (1 - e^{-1})^2. \end{aligned}$$

设 G 是平面上面积为 $a(0 < a < +\infty)$ 的区域，称二维随机向量 $\xi = (X, Y)$ 服从 G 上的均匀分布，若 $P((X, Y) \in G) = 1$，且 (X, Y) 取值属于 G 的任何部分 A（A 是 G 的子区域）的概率与 A 的面积成正比。容易推知二维随机向量 $\xi = (X, Y)$ 有联合密度为

$$p(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{a}, & (x, y) \in G, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases} \tag{1}$$

- 定理 2.1. 若 $\xi = (X, Y)$ 是连续型, 则 X, Y 都是连续型, 且

$$p_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{X,Y}(x, y)dy, \quad p_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{X,Y}(x, y)dx.$$

- 称 $p_X(\cdot)$ 与 $p_Y(\cdot)$ 为 ξ 的边缘密度.

例 2.7. G 为由 $y=x^2$ 和 $y=x$ 所围成的有限区域. $\xi \sim U(G)$.
求: ξ 的联合密度与边缘密度.

- G 的面积: $a=\int_0^1 x dx-\int_0^1 x^2 dx=\frac{1}{6}$.
- 联合密度: $p(x,y)=6,(x,y)\in G$.
- 边缘密度:

$$p_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} p(x,y)dy=\int_{x^2}^{x} 6dy=6\left(x-x^2\right), \quad 0<x<1.$$

$$p_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty} p(x,y)dx=\int_{y}^{\sqrt{y}} 6dx=6(\sqrt{y}-y), \quad 0<y<1.$$

- 注: X,Y 都取遍 $(0,1)$, 但 ξ 不能取遍 $(0,1)\times(0,1)$.

例：设二维随机向量 $\xi = (X, Y)$ 有联合密度

$$p_1(x, y) = \frac{1}{2\pi} \exp\{-\frac{1}{2}(x^2 + y^2)\},$$

二维随机向量 $\eta = (U, V)$ 有联合密度

$$p_2(x, y) = \begin{cases} 2p_1(x, y), & xy \geqslant 0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

则 X 与 U 有相同的分布密度，Y 与 V 有相同的分布密度。

一方面，当 $x \leqslant 0$ 时，

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p_2(x,y)dy = \int_{-\infty}^{0} 2p_1(x,y)dy = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{0} e^{-(x^2+y^2)/2}dy$$

$$= \frac{1}{\pi}e^{-x^2/2}\int_{-\infty}^{0} e^{-y^2/2} = \frac{1}{\pi}e^{-x^2/2}\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2/2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}.$$

类似的，当 $x > 0$ 时，

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p_2(x,y)dy = \int_{0}^{+\infty} 2p_1(x,y)dy$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)/2}dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}.$$

即，对一切 x，$\int_{-\infty}^{+\infty} p_2(x,y)dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$。

同理，对一切 y，$\int_{-\infty}^{+\infty} p_2(x,y)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-y^2/2}$。

- 定义 2.6, 例 2.8& 例 7.5. 若 $\xi = (X, Y)$ 的联合密度 $p(x, y)$ 有如下表达式, 则称 ξ 服从二维 (元) 正态分布.

$$\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{u^2+v^2-2\rho uv}{2\left(1-\rho^2\right)}\right\},$$

其中,

$$u = \frac{x-\mu_1}{\sigma_1}, \quad v = \frac{y-\mu_2}{\sigma_2},$$

有 5 个参数: $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$,

$$\sigma_1, \sigma_2 > 0$$
$$\rho \in (-1, 1)$$

一般二维随机向量及其联合分布函数：设 $\xi = (X, Y)$ 是二维随机向量，则称

$$F(x, y) = P(X \leqslant x, Y \leqslant y) \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

为 ξ 的分布函数。也称为 (X, Y) 的联合分布函数。

分布函数 $F(x, y)$ 有以下性质：

(1) $0 \leqslant F(x, y) \leqslant 1$;

(2) $F(x, y)$ 是 x 的右连续增函数，也是 y 的右连续增函数;

(3) $\lim_{x\to-\infty} F(x, y) = 0, \lim_{y\to-\infty} F(x, y) = 0$;

(4) $\lim_{x\to+\infty} F(x, y) = P(Y \leqslant y), \lim_{y\to+\infty} F(x, y) = P(X \leqslant x)$;

(5) 对任何 $x_1 \leqslant x_2, y_1 \leqslant y_2$，有

$$F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1) \geqslant 0.$$

关于性质（5），对一切 $x_1 \leqslant x_2, y_1 \leqslant y_2$，有

$$\begin{aligned}
&P(x_1 < X \leqslant x_2, y_1 < Y \leqslant y_2) \\
&= P(x_1 < X \leqslant x_2, Y \leqslant y_2) - P(x_1 < X \leqslant x_2, Y \leqslant y_1) \\
&= P(X \leqslant x_2, Y \leqslant y_2) - P(X \leqslant x_1, Y \leqslant y_2) \\
&- [P(X \leqslant x_2, Y \leqslant y_1) - P(X \leqslant x_1, Y \leqslant y_1)] \\
&= F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2) - [F(x_2, y_1) - F(x_1, y_1)]
\end{aligned}$$

由 $P(x_1 < X \leqslant x_2, y_1 < Y \leqslant y_2) \geqslant 0$ 知性质（5）成立。

若二维随机向量 $\xi = (X, Y)$ 有联合密度 $p(x, y)$，则 ξ 的联合分布函数 $F(x, y)$ 与联合密度 $p(x, y)$ 有关系式

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} p(u, v) du dv. \tag{2}$$

例：设二维随机向量 (X, Y) 有密度函数

$$p(x,y) = \begin{cases} Ce^{-(2x+y)}, & x > 0, y > 0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

求（1）常数 C 的值；（2）联合分布函数 $F(x,y)$；（3）概率 $P(X \leqslant Y)$。

例：设二维随机向量 (X, Y) 有密度函数

$$p(x,y)=\begin{cases} Ce^{-(2x+y)}, & x>0, y>0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

求（1）常数 C 的值；（2）联合分布函数 $F(x,y)$；（3）概率 $P(X\leqslant Y)$。

解：（1）由于

$$1=C\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dxdy=C\int_0^{+\infty}e^{-2x}dx\int_0^{+\infty}e^{-y}dy=\frac{C}{2}$$

得 $C=2$。

（2）利用公式

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x}p(t,r)dtdr$$

$$=\begin{cases}\int_0^y\int_0^x 2e^{-2t-r}dtdr, & x>0,y>0,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

$$=\begin{cases}(1-e^{-2x})(1-e^{-y}), & x>0,y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

（3）设区域 $G=\{(x,y)|x\leqslant y\}$，则

$$P(X\leqslant Y)=P((X,Y)\in G)=\iint_G p(x,y)dydx$$

$$=\int_0^{+\infty}\int_x^{+\infty}2e^{-2x-y}dydx=\frac{2}{3}.$$

例：设 (X, Y) 的联合密度函数为

$$p(x,y) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1, |y| < x, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

求边际密度函数。

解：根据定义

$$p_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x,y)dy = \begin{cases} \int_{-x}^{x} 1dy = 2x & x \in (0,1), \\ 0, & x \notin (0,1). \end{cases}$$

$$p_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x,y)dx = \begin{cases} \int_{y}^{1} 1dx = 1 - y & y \in [0,1), \\ \int_{-y}^{1} 1dx = 1 + y, & y \in (-1,0), \\ 0, & y \notin (-1,1). \end{cases}$$

- 联合密度: $u = \frac{x-\mu_1}{\sigma_1}, v = \frac{y-\mu_2}{\sigma_2}$,

$$\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{u^2+v^2-2\rho uv}{2\left(1-\rho^2\right)}\right\}.$$

- 边缘密度: $X \sim N\left(\mu_1, \sigma_1^2\right), Y \sim N\left(\mu_2, \sigma_2\right)^2$. 例如,

$$p_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x,y)dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{(v-2\rho u)^2 + \left(1-\rho^2\right)u^2}{2\left(1-\rho^2\right)}\right\} dv$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{\left(1-\rho^2\right)u^2}{2\left(1-\rho^2\right)}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{(v-2\rho u)^2}{2\left(1-\rho^2\right)}\right\} dv$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2}u^2}\sqrt{2\pi\left(1-\rho^2\right)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}.$$

二维正态分布：若 $\xi = (X, Y)$ 的联合密度 $p(x, y)$ 有如下表达式，则称 ξ 服从二维 **(元)** 正态分布。

$$\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{u^2+v^2-2\rho uv}{2\left(1-\rho^2\right)}\right\}, \tag{3}$$

其中，

$$u = \frac{x-\mu_1}{\sigma_1}, \quad v = \frac{y-\mu_2}{\sigma_2},$$

共有 5 个参数：$\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$, $\sigma_1, \sigma_2 > 0, \rho \in (-1, 1)$

例：设二维随机向量 $\xi=(X,Y)$ 服从二维正态分布，试求出 X 的分布密度和 Y 的分布密度。
解：设 X 的分布密度为 $p_X(x)$，做变量代换 $v=\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}$，得

$$p_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dy$$

$$=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2\right\}$$

$$\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left\{-\frac{1}{2\left(1-\rho^2\right)}\left[\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2-2\rho\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right]\right\}dy$$

$$=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2\right\}\cdot$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left\{-\frac{1}{2\left(1-\rho^2\right)}[v^2-2\rho v\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}]\right\}dv$$

其中

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2\left(1-\rho^2\right)}[v^2 - 2\rho v \frac{x-\mu_1}{\sigma_1}]\right\} dv$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2\left(1-\rho^2\right)}\left[\left(v-\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - \rho^2\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2\right]\right\} dv$$

$$= \exp\left\{\frac{\rho^2}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2\right\}\cdot$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2\left(1-\rho^2\right)}\left(v-\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2\right\} dv$$

$$= \exp\left\{\frac{\rho^2}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2\right\}\sqrt{2\pi(1-\rho^2)}.$$

于是

$$p_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \exp\left\{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}\right\}.$$

同理知

$$p_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} \exp\left\{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}\right\}.$$

这表明 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$.

例：假定 $(\xi_1,\xi_2) \sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$，试求 (ξ_1,ξ_2) 落在

$$D=\left\{(x,y)\middle|\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\leqslant\lambda^2\right\}$$

内的概率。