AI 中的数学 9.23 作业

2300012929 尹锦润

教材 2.1

黑桃张数 X 满足超几何分布，$P(X=x)=\dfrac{\dbinom{13}{x}\dbinom{39}{5-x}}{\dbinom{52}{5}}, x=0,1,\cdots,5$。

教材 2.2

$P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$，而 $P(X=1)=P(X=2)$，有 $\lambda=2$。

进而 $P(X=4)=\frac{2}{3e^2}$。

教材 2.3

记 X 为圆的面积，Y 为圆的直径，$X=\frac{\pi}{4}Y^2$。

$$g(y)=\begin{cases}0, & y<a\\ \frac{1}{b-a}, & a\leqslant y\leqslant b\\ 1, & y>b\end{cases}$$

进而

$$f(x)=g(2\sqrt{\frac{x}{\pi}})\left|(2\sqrt{\frac{x}{\pi}})'\right|=\begin{cases}0, & x<\frac{\pi}{4}a^2\\ \frac{1}{(b-a)\sqrt{x\pi}}, & \frac{\pi}{4}a^2\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{4}b^2\\ 1, & x>\frac{\pi}{4}b^2\end{cases}$$

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}P(X=x)x\mathrm{d}x=\frac{1}{(b-a)\sqrt{\pi}}\int_{\frac{\pi}{4}a^2}^{\frac{\pi}{4}b^2}\sqrt{x}\mathrm{d}x=\frac{b^2+ab+a^2}{12}\pi$$

$var(x)=E(X-E(X))=\int_{-\infty}^{\infty}P(X=x)(x-E(X))\mathrm{d}x=\frac{\pi^2}{720}(4b^4+4a^4+4b^3a+4ba^3-a^2b^2)$

教材 2.4

(1) $\int_{-\infty}^{+\infty}p(x)\mathrm{d}x=1=c\Rightarrow c=1$。

(2) 根据伽玛分布 $p(x)=\frac{\beta^\alpha x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}e^{-\beta x}$，于是有 $c=\frac{\beta^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1)}$。

(3) $\int_{-\infty}^{+\infty}p(x)\mathrm{d}x=1=c\pi\Rightarrow c=\frac{1}{\pi}$。

教材 2.5

（1）$P(X=a)$ 就是 $F(x)$ 在 a 的跳点的值，因此 $P(X=a)=F(a)-F(a-0)$。

（2）$P(a<X<b)=F(b)-F(a)-P(b)=F(b)-F(a)-F(b)+F(b-0)=F(b-0)-F(a)$。

教材 2.6

$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\}$，$y=e^x$，则 $g(y)=\frac{1}{y\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\{-\frac{(\ln y-\mu)^2}{2\sigma^2}\}$，

对于 Y 的期望，有

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty g(y)y\mathrm{d}y &= \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\{-\frac{(\ln y-\mu)^2}{2\sigma^2}\}\mathrm{d}y \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^x}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\}\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\{x-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\}\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\{-\frac{(x-\mu-\sigma^2)^2-\sigma^4-2\mu\sigma^2}{2\sigma^2}\}\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\{-\frac{(x-\mu-\sigma^2)^2}{2\sigma^2}+\frac{\sigma^2}{2}+\mu\}\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

因为 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\{-\frac{(x-\mu-\sigma^2)^2}{2\sigma^2}\}\mathrm{d}x=1$，故 $E(Y)=\exp\{\frac{\sigma^2}{2}+\mu\}$。

对于 Y 的方差，有

$$\begin{aligned}
E(Y^2)=\int_0^\infty g(y)y^2\mathrm{d}y &= \int_0^\infty \frac{y}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\{-\frac{(\ln y-\mu)^2}{2\sigma^2}\}\mathrm{d}y \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{2x}}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\}\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\{2x-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\}\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\{-\frac{(x-\mu-2\sigma^2)^2-4\sigma^4-4\mu\sigma^2}{2\sigma^2}\}\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\{-\frac{(x-\mu-\sigma^2)^2}{2\sigma^2}+2\sigma^2+2\mu\}\mathrm{d}x \\
&= \exp\{2\sigma^2+2\mu\}
\end{aligned}$$

于是，

$$var(Y)=E(Y^2)-E(Y)^2=\exp\{\sigma^2+2\mu\}(\exp\{\sigma^2\}-1)$$

教材 2.9

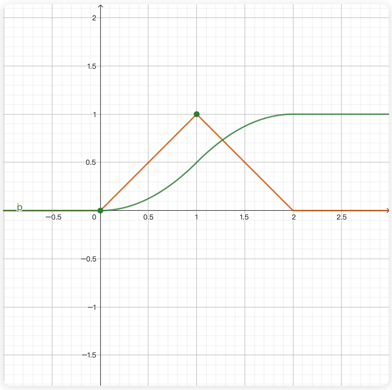
记 Y 的分布密度为 $q(y)$，$f(x)=\frac{1}{2}mx^2$，$g(y)=\sqrt{\frac{2y}{m}}$，于是有

$$q(y)=p(g(y))|g'(y)|=\frac{4\sqrt{2y}}{a^3m^{\frac{3}{2}}\sqrt{\pi}}e^{-\frac{2y}{ma^2}},y\geqslant 0$$

当 $y<0$ 时，$q(y)=0$。

教材 2.11

$$F_X(x)=P(X\leqslant x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \frac{1}{2}x^2, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 1-\frac{1}{2}(2-x)^2, & 1<x\leqslant 2\\ 1, & x>2\end{cases},$$



教材 2.12

查表，当 $x=1.30$ 时候，$\Phi(x)=0.9032$，当 $x=1.28$ 时候 $\Phi(x)=0.8997$，于是 σ 最多是 $\frac{40}{1.28}=31.25$。