20240401作业

1. 判断级数的敛散性: $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\dfrac{(2n)!!}{(2n+3)!!}\right)^p,\quad (p>0)$.

2. 判断级数的敛散性: $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1-n\sin\frac{1}{n}}{n^\alpha}\quad(\alpha>0)$.

3. 设对于$\forall n\in\mathbb{N}$有$a_n>0$并且$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ 发散, 记$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$, 证明:

   (1) 级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{a_n}{S_n}$ 发散; (2) 级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{a_n}{S_n^2}$ 收敛; (3) 级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{a_n}{1+a_n}$ 发散, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{a_n}{1+n^2a_n}$ 收敛.

4. 设$a_n>0,\ n\in\mathbb{N}$, $\{a_n-a_{n+1}\}$为严格递减数列. 若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛, 证明:

   (1) $\{a_n\}$严格递减; (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{a_{n+1}}-\dfrac{1}{a_n}\right)=+\infty$.

5. 设$a_n>0,\ n\in\mathbb{N}$, 且$\exists\alpha\in(0,1)$ s.t. $\lim\limits_{n\to\infty}n^\alpha\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\lambda$ ($\lambda>0$ 或$=+\infty$.

   证明: $\forall k\in\mathbb{N}^*=\{0,1,2,\cdots\}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^ka_n$收敛.