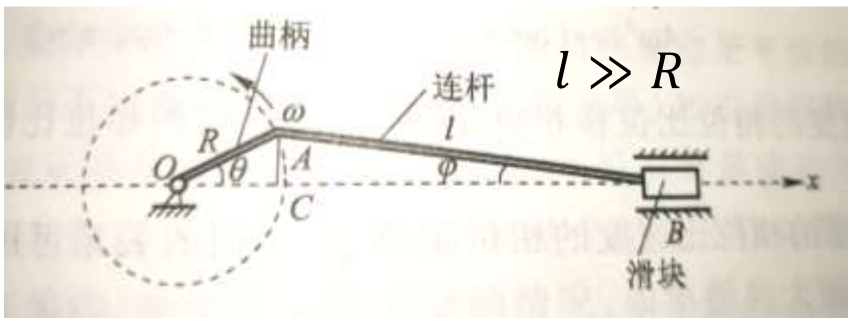
习题课

1. 简谐振动

简谐振动的讨论-1

教材2：10-1-1

- 下列运动哪些不是简谐运动?
  1. 小球在地面上做完全弹性的上下跳动 X
  2. 如图曲柄连杆机构使**活塞**做往复运动（曲柄旋转角速度为恒定值） X



$l \gg R$

$$x = OC + CB = R\cos\theta + l\cos\varphi$$

$$R\sin\theta = l\sin\varphi \qquad \sin\varphi = \frac{R\sin\theta}{l}$$

$$\cos\varphi = \sqrt{1-\sin^2\varphi} = \frac{\sqrt{l^2 - R^2\sin^2\theta}}{l}$$

$$x = R\cos\theta + \sqrt{l^2 - R^2\sin^2\theta} = R\cos\theta + l\sqrt{1 - R^2\sin^2\theta/l^2}$$

因为$l \gg R$

且$\theta = \omega t$

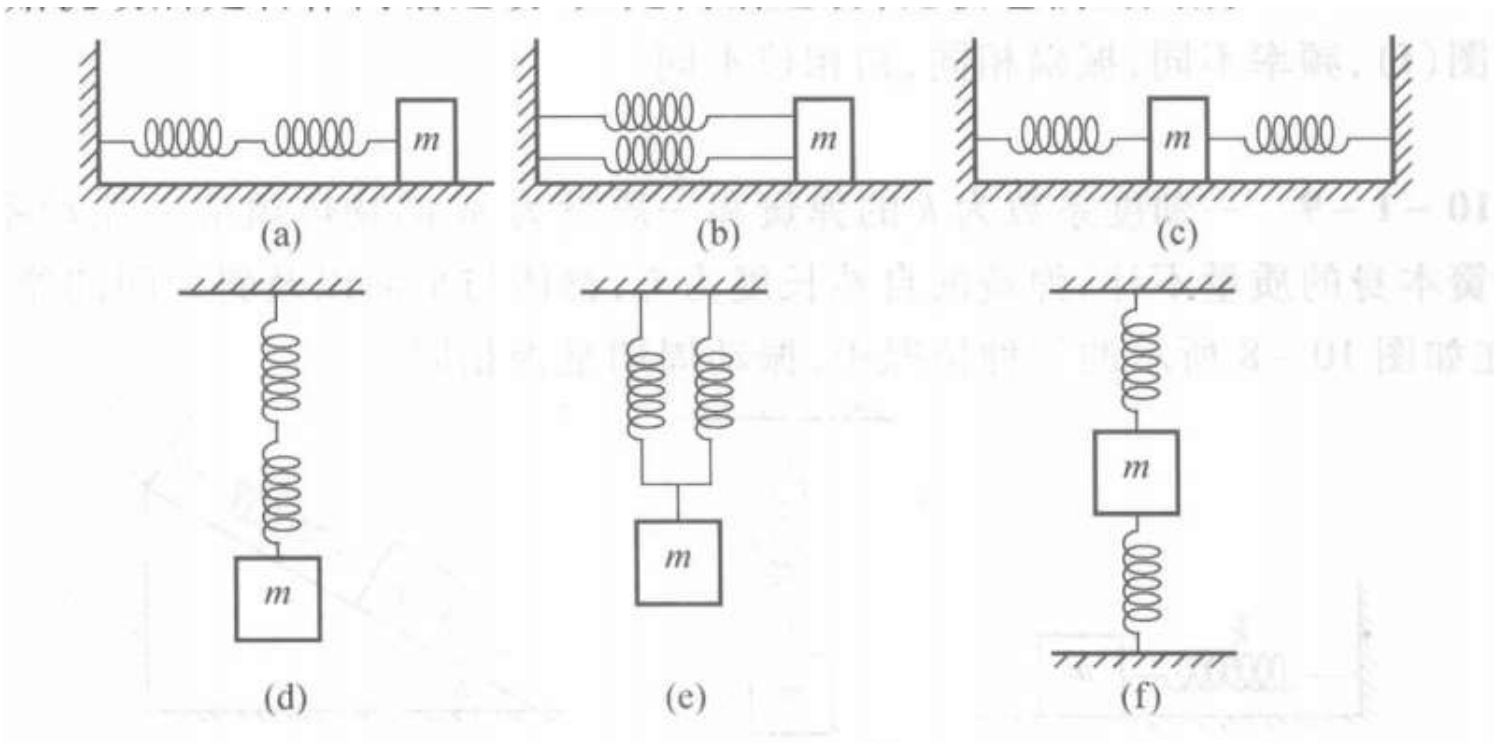
$$x \approx \left(1 - \frac{R^2}{4l^2}\right)l + R\cos\omega t + \frac{R^2}{4l}\cos 2\omega t$$

2个简谐振动的叠加

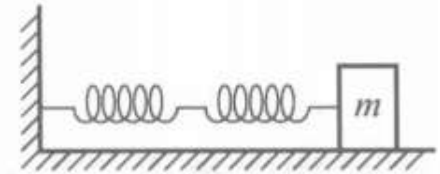
简谐振动的讨论-2

- 两个弹簧按照如图方式连接，系分析是否为谐振动，如果是则分析其特征

教材2：10-1-10



（1）在图（a）的情况中，设两弹簧的劲度系数分别为 k_1 和 k_2. 取平衡位置为坐标原点，建立水平方向的 Ox 轴. 当物体由原点向右移动 x 时，弹簧 1 伸长了 x_1，弹簧 2 伸长了 x_2，则有



(a)

$$x = x_1 + x_2$$

物体所受的力为

$$F = -k_1 x_1 = -k_2 x_2 = -k'x = -k'(x_1 + x_2)$$

式中 k' 是两个弹簧串联后的劲度系数，由上式可得

$$x_1 = -\frac{F}{k_1},\ x_2 = \frac{F}{k_2}$$

于是，物体所受的力可写成

$$F = -k'(x_1 + x_2) = k'\left(\frac{F}{k_1} + \frac{F}{k_2}\right)$$

由上式可得

$$\frac{1}{k'} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$$

所以

$$F = k_2 x_2 \qquad F = k_1 x_1$$

$$\frac{F}{k_1} + \frac{F}{k_2} = x_1 + x_2$$

$$F = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} x$$

系统的等效劲度系数： $k' = \dfrac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$

是简谐振动。分析过程略。

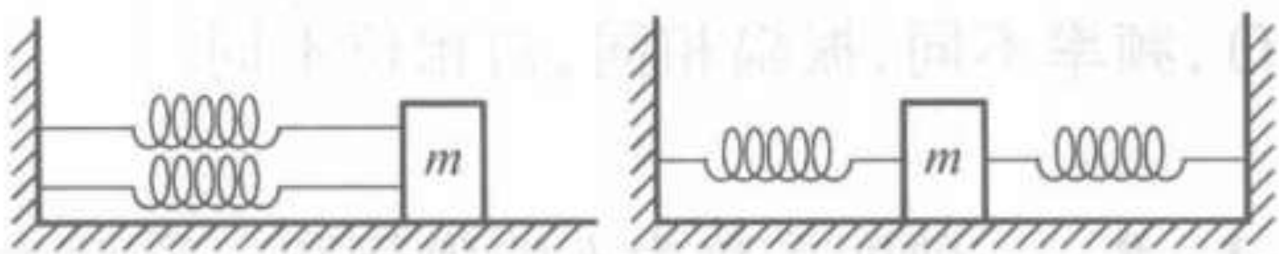
（2）在图(b)的情况中，物体所受的力为

$$F = F_1 + F_2 = -k_1 x + (-k_2 x) = -k' x$$

由上式可得

$$k' = k_1 + k_2$$

（3）（c）图分析同b图



(b) (c)

(4) 在图(d)的情况中,当物体处于平衡状态时,物体所受的力为

$$F=-k_1b_1 \quad + mg=0$$

b_1 和 b_2 为弹簧的伸长量. 以平衡位置为坐标原点,坐标轴 Ox 向下为正. 当物体的位移为 x 时,物体所受的力

$$F'=mg-k_1(b_1+x_1)$$

以上式代入得

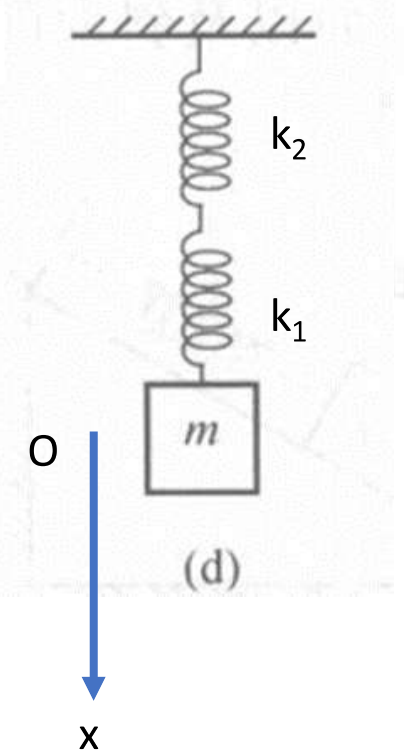
$$F'=-k_1x_1$$

而

$$k_1x_1=k_2x_2$$

$$\frac{F'}{k_1}+\frac{F'}{k_2}=x_1+x_2$$

$$F'=k'(x_1+x_2)$$



(d)

结果与（a）相同 $$k'=\frac{k_1k_2}{k_1+k_2}$$

（5）如图（e）的情况，物体所受的力

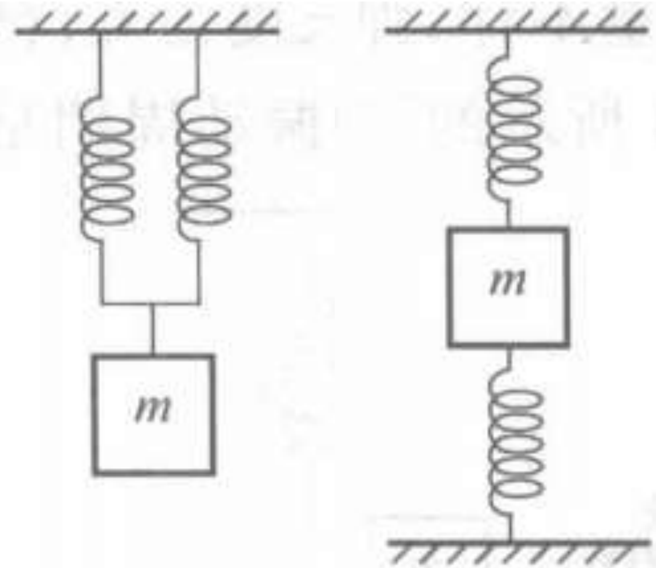
类似上题分析过程，设x为离开平衡位置的位移量

$$F = F_1 + F_2 = -k_1 x - k_2 x = -k' x$$

可得

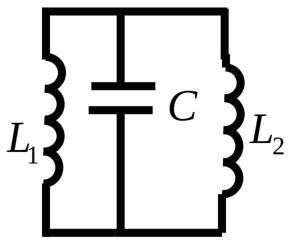
$$k' = k_1 + k_2$$

（6）（f）图分析结果与（e）图相同



(e) (f)

- 设在一定初始条件下，分析电路的电压是否为简谐振荡？



$$u_{L1} = L_1 \frac{d}{dt} i_{L1}$$

$$u_{L2} = L_2 \frac{d}{dt} i_{L2}$$

$$u_{L1} = u_{L2} = u_L$$

$$\frac{u_L}{L_1} + \frac{u_L}{L_2} = \frac{d}{dt}(i_{L1} + i_{L2})$$

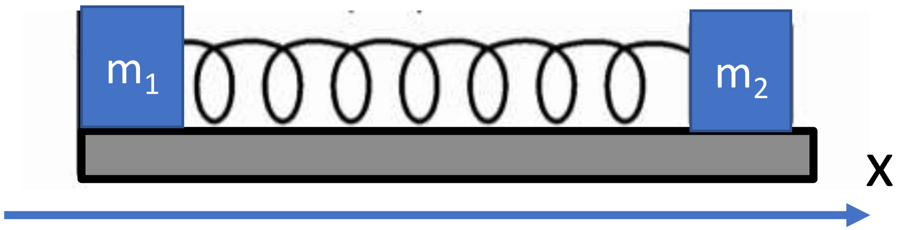
有**电感的并联公式**: $\boxed{\frac{1}{L} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}}$ 因此该电路是LC振荡电路，

电压值做简谐振荡。

另：**电感的串联公式**: $\boxed{L = L_1 + L_2}$

多自由度弹性系统-双振子

北京大学
大学物理
《力学》P173



解1：

$$F_1 = kz \qquad F_2 = -kz$$

$$z = x_2 - x_1$$ （x_1和x_2是m_1和m_2离开平衡位置的的位移）

有 $$\frac{\mathrm{d}^2 x_2}{\mathrm{d}t^2} + \frac{k}{m_2} z = 0 \qquad \frac{\mathrm{d}^2 x_1}{\mathrm{d}t^2} - \frac{k}{m_1} z = 0$$

两个方程相减，注意到 $$\frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{\mathrm{d}^2 x_2}{\mathrm{d}t^2} - \frac{\mathrm{d}^2 x_1}{\mathrm{d}t^2}$$ 则

$$\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} + \frac{k}{m} z = 0$$ 其中m：$$\frac{1}{m} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$$ （此方法有局限性）

可以看出，z变量是简谐振动：$$z = z_0 \cos(\omega t + \varphi_0)$$

解2：

假设 $x_1 = x_{10}\cos(\omega t)$ $x_2 = x_{20}\cos(\omega t)$

将x_1和x_2的简谐振动函数，分别带入上面的运动方程中得

$$\frac{\mathrm{d}^2 x_1}{\mathrm{d}t^2} - \frac{k}{m_1} z = 0$$

$$\Rightarrow \quad -x_{10}\omega^2\cos(\omega t) = \frac{k}{m_1}\left(x_{20} - x_{10}\right)\cos(\omega t)$$

$$\Rightarrow \quad -x_{10}\omega^2 = \frac{k}{m_1}\left(x_{20} - x_{10}\right)$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 x_2}{\mathrm{d}t^2} + \frac{k}{m_2} z = 0$$

$$\Rightarrow \quad -x_{20}\omega^2\cos(\omega t) = -\frac{k}{m_2}\left(x_{20} - x_{10}\right)\cos(\omega t)$$

$$\Rightarrow \quad -x_{20}\omega^2 = -\frac{k}{m_2}\left(x_{20} - x_{10}\right)$$

$$\left.\begin{aligned} -x_{10}\omega^2 &= \frac{k}{m_1}\left(x_{20}-x_{10}\right) \\ -x_{20}\omega^2 &= -\frac{k}{m_2}\left(x_{20}-x_{10}\right) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} \left(k-\omega^2 m_1\right)x_{10}-kx_{20} &= 0 \\ \left(k-\omega^2 m_2\right)x_{20}-kx_{10} &= 0 \end{aligned}\right.$$

$$\Rightarrow \left(k-\omega^2 m_2\right)\left(k-\omega^2 m_1\right)x_{10}+k^2 x_{10}=0$$

$$\left(k-\omega^2 m_2\right)\left(k-\omega^2 m_1\right)=k^2$$

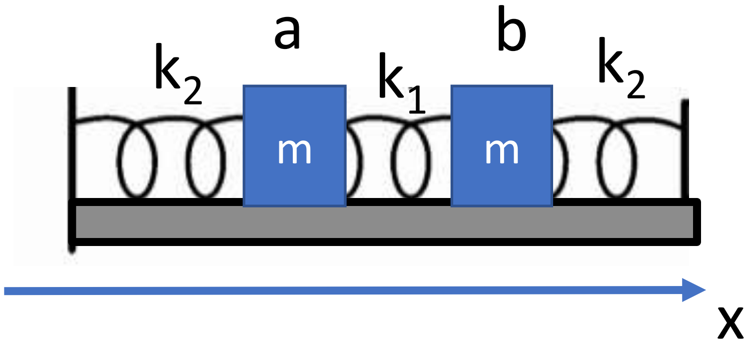
$$\omega^4 m_1 m_2 - k\omega^2\left(m_1+m_2\right)=0$$

解出频率 $\omega_1 = 0$ 表示静止的情况

$$\omega_2=\sqrt{\frac{k}{m}} \quad 其中 \quad m=\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$$

两个质量块同频率谐振

多自由度弹性系统-耦合双振子



特例：如图左右两个弹簧相同，两个木块a,b的质量相同。以x_a和x_b记录两个质量块离开平衡位置的位移。

$$m\frac{\mathrm{d}^2x_a}{\mathrm{d}t^2}=-k_2x_a+k_1(x_b-x_a) \qquad m\frac{\mathrm{d}^2x_b}{\mathrm{d}t^2}=-k_2x_b-k_1(x_b-x_a)$$

两方程相加：

$$m\frac{\mathrm{d}^2Z_1}{\mathrm{d}t^2}=-k_2Z_1 \qquad Z_1=x_a+x_b \Rightarrow \omega_1=\sqrt{\frac{k_2}{m}}$$

两方程相减：

$$m\frac{\mathrm{d}^2Z_2}{\mathrm{d}t^2}=-KZ_2 \qquad Z_2=x_a-x_b,\quad K=k_2+2k_1 \Rightarrow \omega_2=\sqrt{\frac{k_2+2k_1}{m}}$$

（此方法有局限性）

参考 北京大学 大学物理 《力学》P176

解2：　假设　$x_a = x_{a0}\cos(\omega t)$　　$x_b = x_{b0}\cos(\omega t)$

代入　$m\dfrac{\mathrm{d}^2 x_a}{\mathrm{d}t^2} = -k_2 x_a + k_1(x_b - x_a)$　　$m\dfrac{\mathrm{d}^2 x_b}{\mathrm{d}t^2} = -k_2 x_b - k_1(x_b - x_a)$

得　$-m\omega^2 x_{a0} = -k_2 x_{a0} + k_1(x_{b0} - x_{a0})$　　$-m\omega^2 x_{b0} = -k_2 x_{b0} - k_1(x_{b0} - x_{a0})$

$$\Rightarrow \quad x_{a0}\left(k_1 + k_2 - m\omega^2\right) = k_1 x_{b0} \qquad x_{b0}\left(k_1 + k_2 - m\omega^2\right) = k_1 x_{a0}$$

$$m^2\omega^4 - 2\left(k_1 + k_2\right)m\omega^2 + k_2^2 + 2k_1 k_2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{k_2}{m}} \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{k_2 + 2k_1}{m}}$$

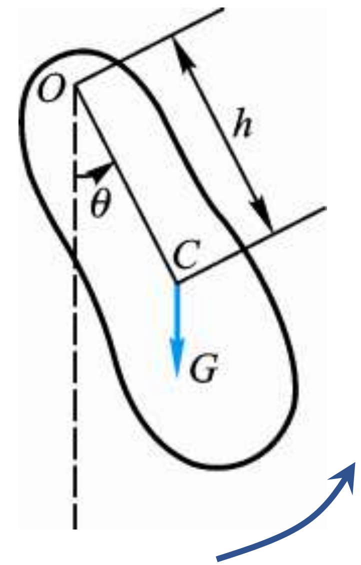
*复摆

- 一个可绕固定轴摆动的刚体称为复摆

重物所受合外力矩：$M=-mgh\sin\theta$

当θ很小时　$\sin\theta\approx\theta$　　$M=-mgh\theta$

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}=\frac{M}{J}=-\frac{mgh}{J}\theta$$ J为转动惯量



$$\Rightarrow \quad \theta=\theta_0\cos\left(\omega t+\varphi_0\right)$$

其中：$\omega=\sqrt{\dfrac{mgh}{J}}$

转动的正方向
也是θ增大的方向

*单 摆-1

重物所受合外力矩: $M=-mgl\sin\theta$

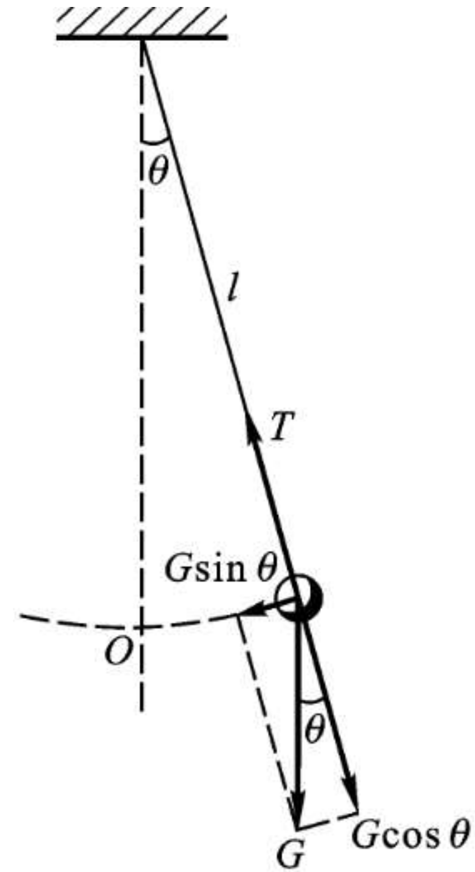
当θ很小时 $\sin\theta=\theta-\dfrac{\theta^3}{3!}+\dfrac{\theta^5}{5!}-\cdots\approx\boldsymbol{\theta}$

⇨ $M=-mgl\theta$ $\dfrac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}=\dfrac{M}{J}=-\dfrac{mgl\theta}{ml^2}=-\dfrac{g}{l}\theta$

有简谐振动方程 $\dfrac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}+\omega^2\theta=0$ $\omega^2=\dfrac{g}{l}$

可得单摆的周期: $T=\dfrac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$

当θ不是很小时: $T=T_0\left(1+\dfrac{1}{2^2}\sin^2\dfrac{\theta_m}{2}+\dfrac{1}{2^2}\dfrac{3^2}{4^2}\sin^4\dfrac{\theta_m}{2}+\cdots\right)$



T_0为角度振幅$\boldsymbol{\theta_m}$很小时单摆的周期。

单 摆-2

- **极坐标系下**基于小球的运动方程推导单摆的运动方程
- 极坐标系下小球的速度只有θ分量:

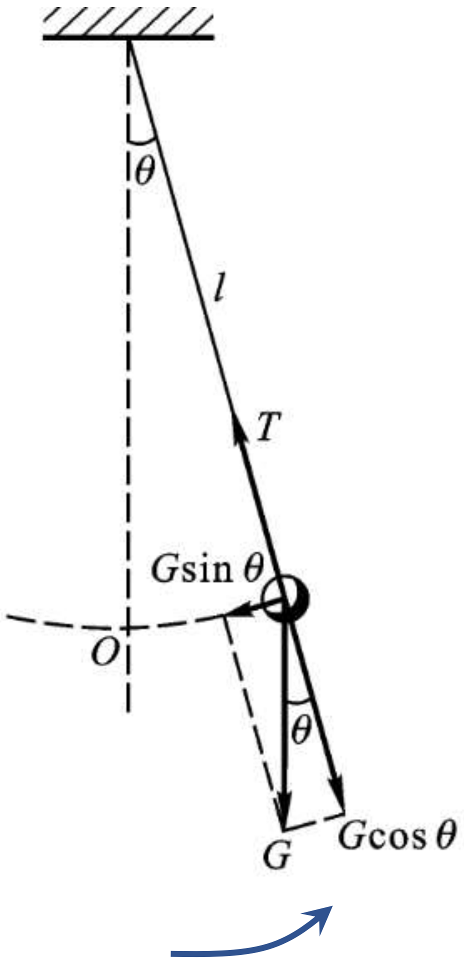
$$\mathrm{v} = l\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \qquad a = l\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$$

则 $-mg\sin\theta = ml\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$

当θ很小时 $\sin\theta \approx \theta$

有简谐振动方程 $\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2\theta = 0 \qquad \omega^2 = \frac{g}{l}$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$



转动的正方向
也是θ增大的方向

单摆的讨论

- 10-1-11 三个完全相同的单摆,在下列各种情况（**即不同的参考系下**）,它们的周期是否相同? 如不相同,哪个大,哪个小?

- (1)第一个在教室里,第二个在匀速前进的火车上,第三个在匀加速水平前进的火车上.
- (2)第一个在匀速上升的升降机中,第二个在匀加速上升的升降机中,第三个在匀减速上升的升降机中.
- * (3)第一个在地球上,第二个在绕地球的同步卫星上,第三个在月球上 （略）

- 10-1-11 三个完全相同的单摆,在下列各种情况,它们的周期是否相同? 如不相同,哪个大,哪个小?
- (1)第一个在教室里,第二个在匀速前进的火车上,第三个在匀加速水平前进的火车上.

在教室里和在匀速前进的火车上,它们的重力加速度相同,所以单摆的振动周期相同.

但在匀加速水平前进的火车上,以火车为参考系,摆球除受重力绳子的拉力外,还受到水平方向的惯性力.当单摆作微小摆动时,其回复力近似地为重力和惯性力的合力,即 $F = -ma' = -m\sqrt{a_0^2 + g^2}$

式中a_0为火车的加速度.所以,单摆的周期变小:

$$T' = 2\pi\sqrt{\frac{l}{a'}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{\sqrt{a^2 + g^2}}} < T,$$

- 10-1-11 三个完全相同的单摆,在下列各种情况,它们的周期是否相同? 如不相同,哪个大,哪个小?
- (2)第一个在匀速上升的升降机中,第二个在匀加速上升的升降机中,第三个在匀减速上升的升降机中

分析同前，单摆周期为：$T' = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g'}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g + a_0}}$

以向上方向为正，则有：

匀速运动：$a_0=0$，

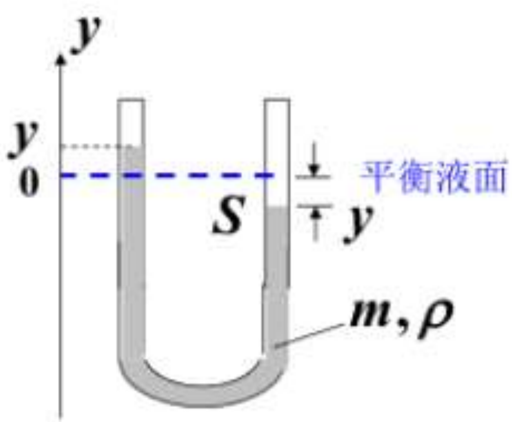
向上的匀加速运动：$a_0>0$

向上的匀减速运动：$a_0<0$

能量法分析谐振动系统

北京大学 大学物理 力学 P.176

例： 横截面均匀光滑的U形管中,有总长度为L的液体.若液面上下有微小起伏,问是否是简谐振动?



【解】方法一. 分析受力法

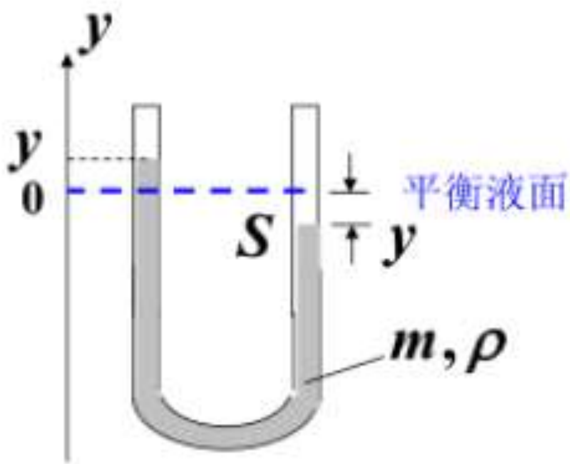
恢复力

$$F=-2g\rho Sy \overset{令}{=} -ky$$

$$k=2g\rho S=\text{const}\ .$$

角频率 $\omega=\sqrt{\dfrac{k}{m}}=\sqrt{\dfrac{2g\rho S}{m}}=\sqrt{\dfrac{2g\rho S}{\rho SL}}=\sqrt{\dfrac{2g}{L}}$

方法. 分析能量法



设液体在平衡位置时,
重力势能为零,

液体在如图位置时,
相当于将右边高为 y 的液体
移到了左边，重心上移了y 。

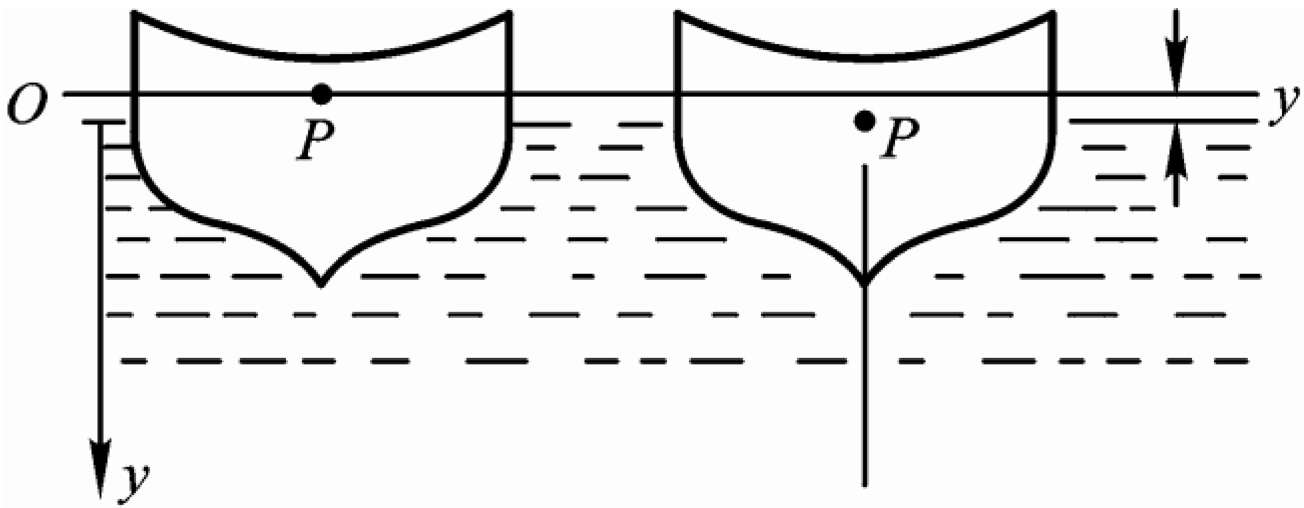
∴液体有势能

$$E_P = (\rho s y g) y = \frac{1}{2}(2\rho s g) y^2$$

令 $$= \frac{1}{2} k y^2$$ （$k = 2\rho s g$, 与前面相同）

教材2：例10-2 如图一质量为m 的**平底**船，其平均水平截面积为S，平衡时吃水深度为h（船底到水面的距离），如不计水的阻力，求此船在竖直方向的振动周期。

解： 船静止时浮力与重力平衡，



船在任一位置时，以水面为坐标原点，竖直向下的坐标轴为y 轴，船的位移用y 表示。

船的位移为y 时船所受合力为

$$F = -(h+y)\rho S g + mg = -y\rho S g$$ 是线性回复力

类似弹簧振子的分析

$\Rightarrow$ 船在竖直方向做简谐振动，其角频率和周期为

$$\omega = \sqrt{\frac{\rho S g}{m}} \quad , \qquad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\rho g S}}$$

$$m = \rho S h \quad \Rightarrow \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{h}{g}}$$

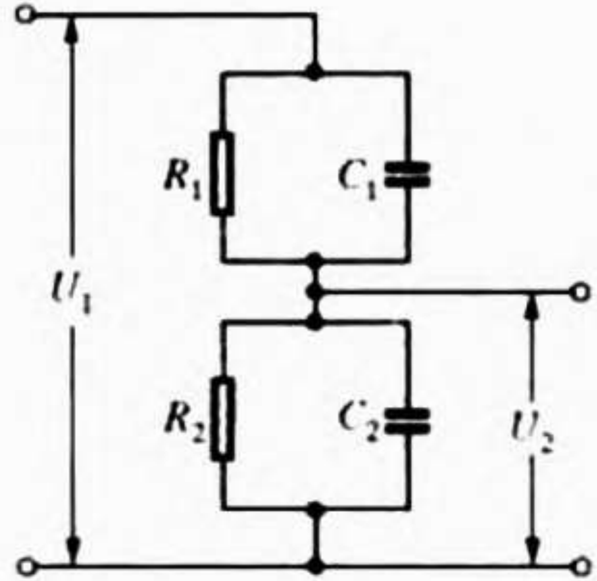
2. 简谐电路

教材1

7.8 如图是一种能够消除分布电容影响的脉冲分压器，当电路中 C_1, C_2, R_1, R_2 满足一定条件时，该电路就能和直流电路一样，使输入电压有效值 U_1 与输出电压有效值 U_2 之比等于电阻之比：

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{R_2}{R_1 + R_2},$$

而和频率无关. 试求电容、电阻应满足的条



题 7.8

解 R_1, C_1 并联电路和 R_2, C_2 并联电路的复阻抗分别为

$$\tilde{Z}_1 = \tilde{Z}_{R_1C_1\text{并}} = \frac{1}{1/R_1 + \mathrm{j}\omega C_1} = \frac{R_1}{1 + \mathrm{j}R_1\omega C_1},$$

$$\tilde{Z}_2 = \tilde{Z}_{R_2C_2\text{并}} = \frac{1}{1/R_2 + \mathrm{j}\omega C_2} = \frac{R_2}{1 + \mathrm{j}R_2\omega C_2},$$

输入与输出的复电压分别表为 $\tilde{U}_1$ 和 $\tilde{U}_2$，总复阻抗表为 $\tilde{Z}$，$\tilde{Z}=\tilde{Z}_1+\tilde{Z}_2$，总复电流表为 $\tilde{I}$，则

$$\tilde{U}_2 = \tilde{I}\tilde{Z}_2 = \frac{\tilde{U}_1}{\tilde{Z}}\tilde{Z}_2 = \frac{\tilde{U}_1\tilde{Z}_2}{\tilde{Z}_1 + \tilde{Z}_2},$$

$$\frac{\tilde{U}_2}{\tilde{U}_1} = \frac{\tilde{Z}_2}{\tilde{Z}_1 + \tilde{Z}_2} = \frac{1}{1 + \dfrac{\tilde{Z}_1}{\tilde{Z}_2}}$$

$$= 1\Big/\left[1 + \frac{R_1(1 + \mathrm{j}R_2\omega C_2)}{R_2(1 + \mathrm{j}R_1\omega C_1)}\right],$$

要求
$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{R_2}{R_1 + R_2},$$

由以上两式，电容与电阻应满足的条件是

$$1 + \mathrm{j}R_2\omega C_2 = 1 + \mathrm{j}R_1\omega C_1,$$

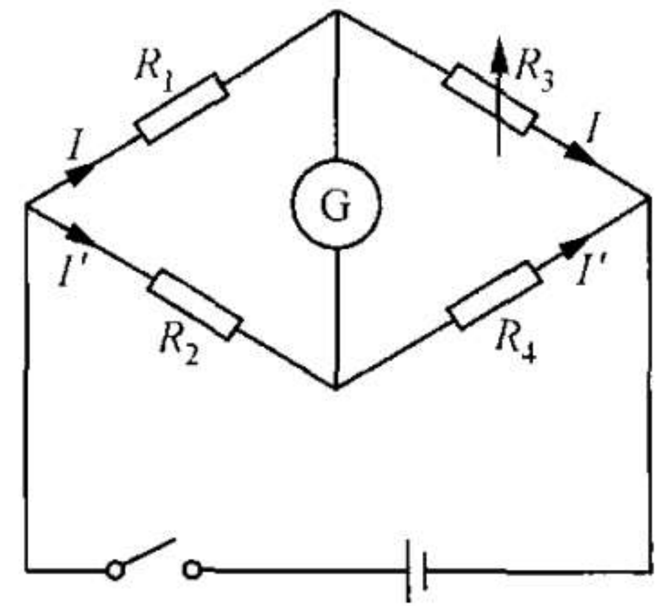
即
$$R_1C_1 = R_2C_2.$$

直流电桥-惠斯通电桥

教材1

- 如图直流电桥电路

通过调节电阻R_3，使得中间的电流计G的读数为零，则可以测量电阻



(f) 直流电桥（平衡）

$$IR_1 = I'R_2, \quad IR_3 = I'R_4, \qquad 即 \qquad \frac{R_1}{R_3} = \frac{R_2}{R_4},$$

由 R_2, R_3, R_4 可得待测电阻 R_1.

交流电桥

教材1 P289

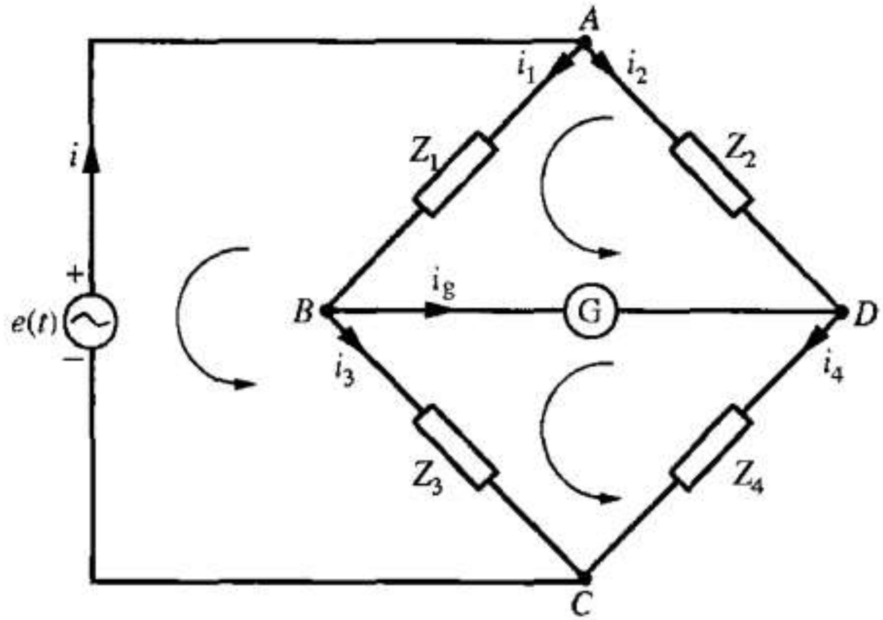


图 7-19　交流电桥的原理

$e(t)$，检流计 G，四臂阻抗分别为 Z_1, Z_2, Z_3, Z_4. 现在讨论它的平衡条件. 首先，标定各支路的电流方向及各回路的绕行方向如图所示. 未达到平衡时，由复数形式的基尔霍夫定律，可列出三个独立的节点电流方程以及三个独立的回路电压方程如下：

$$
\left\{
\begin{aligned}
&\tilde{I} = \tilde{I}_1 + \tilde{I}_2, \\
&\tilde{I}_1 = \tilde{I}_g + \tilde{I}_3, \\
&\tilde{I}_2 + \tilde{I}_g = \tilde{I}_4,
\end{aligned}
\right.
\qquad
\left\{
\begin{aligned}
&\tilde{I}_1\tilde{Z}_1 + \tilde{I}_g\tilde{Z}_g - \tilde{I}_2\tilde{Z}_2 = 0, \\
&\tilde{I}_3\tilde{Z}_3 - \tilde{I}_4\tilde{Z}_4 - \tilde{I}_g\tilde{Z}_g = 0, \\
&\tilde{\mathcal{E}} - \tilde{I}_3\tilde{Z}_3 - \tilde{I}_1\tilde{Z}_1 = 0.
\end{aligned}
\right.
$$

交流电桥达到平衡时，$\tilde{I}_g=0$，于是$\tilde{I}_1=\tilde{I}_3$，$\tilde{I}_2=\tilde{I}_4$，电桥成为简单的串并联电路，上式与四臂有关的公式简化为

$$
\left\{
\begin{aligned}
&\tilde{I}_1\tilde{Z}_1 = \tilde{I}_2\tilde{Z}_2, \\
&\tilde{I}_3\tilde{Z}_3 = \tilde{I}_4\tilde{Z}_4,
\end{aligned}
\right.
\xrightarrow{\text{相除可得}}
\begin{aligned}
&\tilde{Z}_1\tilde{Z}_4 = \tilde{Z}_2\tilde{Z}_3, \\
&\left\{
\begin{aligned}
&Z_1 Z_4 = Z_2 Z_3, \\
&\varphi_1 + \varphi_4 = \varphi_2 + \varphi_3.
\end{aligned}
\right.
\end{aligned}
$$

这就是**交流电桥的平衡条件**，它表明，为了达到平衡，交流电桥四臂的阻抗和相位差必须同时满足以上**两个条件**，缺一不可，否则就不能达到平衡，由此，交流电桥需要**两个可调的参量**. 例如，若 1,2 臂为纯电阻，$\varphi_1=\varphi_2=0$，若 3,4 臂分别为电感性和电容性，$\varphi_3\neq\varphi_4$，就不可能达到平衡. 又如，若 2,3 臂为纯电阻，$\varphi_2=\varphi_3=0$，则 1,4 臂必须分别为电感性和电容性，才能使 $\varphi_1=-\varphi_4$，达到平衡.

电容桥-测量电容

教材1 P290

$$\tilde{Z}_1 = r_x - \frac{\mathrm{j}}{\omega C_x}, \quad \tilde{Z}_3 = R_3,$$

$$\tilde{Z}_2 = -\frac{\mathrm{j}}{\omega C_2}, \quad \tilde{Z}_4 = \frac{1}{1/R_4 + \mathrm{j}\omega C_4}.$$

平衡条件: $\tilde{Z}_1\tilde{Z}_4 = \tilde{Z}_2\tilde{Z}_3$

$$\tilde{Z}_1 = \frac{\tilde{Z}_2\tilde{Z}_3}{\tilde{Z}_4} = -\frac{\mathrm{j}R_3}{\omega C_2}\left(\frac{1}{R_4} + \mathrm{j}\omega C_4\right)$$

$$\begin{cases} r_x = \dfrac{R_3 C_4}{C_2}, \\[2ex] C_x = C_2 \dfrac{R_4}{R_3}. \end{cases}$$

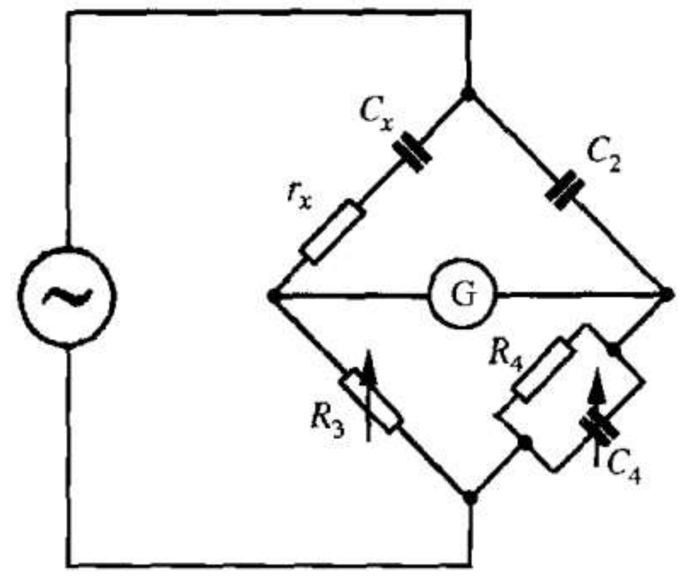
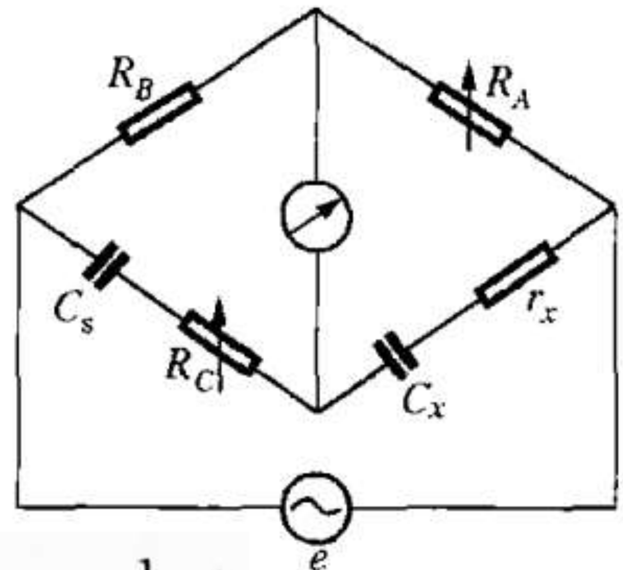


图 7-20 电容桥

测量Cx和rx

教材1 **7. 10** 图中是一交流电桥，测量时选用标准电容 $C_s = 0.100$ μF，当电桥平衡时，测得 $R_A = 1000\ \Omega$，$R_B = 2050\ \Omega$，$R_C = 10.0\ \Omega$，试求待测电容的 C_x 和 r_x 之值.



$$\tilde{Z}_1 = R_B,$$

$$\tilde{Z}_2 = R_A,$$

$$\tilde{Z}_3 = R_C + \frac{1}{j\omega C_s},$$

$$\tilde{Z}_4 = r_x + \frac{1}{j\omega C_x}.$$

$$\tilde{Z}_1\tilde{Z}_4 = \tilde{Z}_2\tilde{Z}_3 \Rightarrow R_B\left(r_x + \frac{1}{j\omega C_x}\right) = R_A\left(R_C + \frac{1}{j\omega C_s}\right)$$

$$\Rightarrow r_x = \frac{R_A R_C}{R_B} = 4.88\ \Omega,$$

$$C_x = \frac{R_B}{R_A} C_s = 0.205 \times 10^{-6}\ \text{F} = 0.205\ \mu\text{F}.$$

教材1 P291

麦克斯韦LC电桥-测电感L

$$\tilde{Z}_1 = r_x + j\omega L_x,$$

$$\tilde{Z}_2 = R_2,$$

$$\tilde{Z}_3 = R_3,$$

$$\tilde{Z}_4 = \frac{1}{1/R_4 + j\omega C_4}.$$

平衡条件:

$$\tilde{Z}_1\tilde{Z}_4 = \tilde{Z}_2\tilde{Z}_3$$

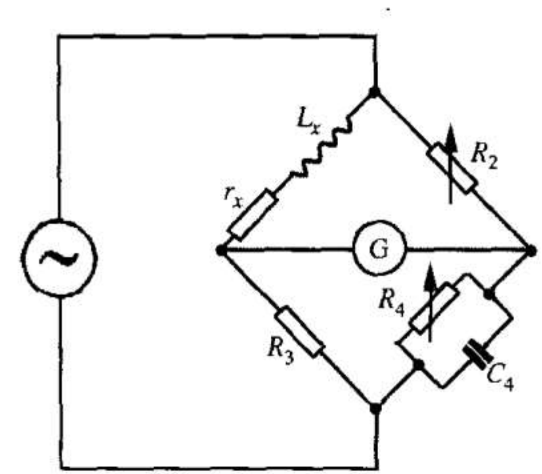


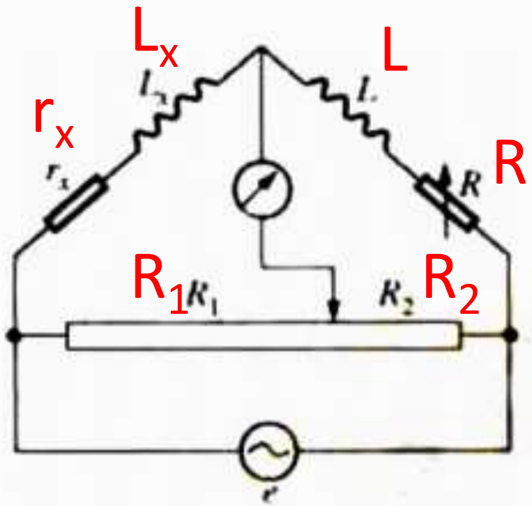
图 7-21 麦克斯韦 LC 电桥

$$\tilde{Z}_1 = r_x + j\omega L_x = \frac{\tilde{Z}_2\tilde{Z}_3}{\tilde{Z}_4} = R_2R_3\left(\frac{1}{R_4} + j\omega C_4\right)$$

测量Lx和rx

$$\begin{cases} r_x = \dfrac{R_2R_3}{R_4}, \\ L_x = C_4R_2R_3. \end{cases}$$

教材1 **7.9** 图中是一交流电桥，试求其平衡条件。



题 7.9

提供了一种测量电感的方法

解 交流电桥的平衡条件是四臂的复阻抗满足

$$\tilde{Z}_1\tilde{Z}_4 = \tilde{Z}_2\tilde{Z}_3, \qquad ①$$

如图，

$$\tilde{Z}_1 = r_x + j\omega L_x, \qquad \tilde{Z}_2 = R + j\omega L,$$

$$\tilde{Z}_3 = R_1, \qquad \tilde{Z}_4 = R_2,$$

代入①式，

$$(r_x + j\omega L_x)R_2 = (R + j\omega L)R_1,$$

故四臂电阻、电感应满足的平衡条件是

$$\begin{cases} r_x R_2 = RR_1, \\ R_2\omega L_x = R_1\omega L, \end{cases}$$

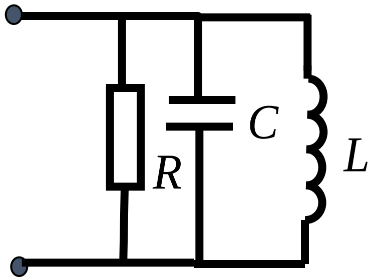
或

$$\begin{cases} r_x = \dfrac{R_1 R}{R_2}, \\ L_x = \dfrac{R_1}{R_2}L \end{cases}$$

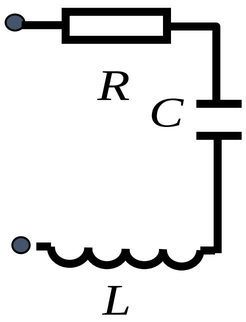
交流电桥平衡后，若已知 R、R_1、R_2、L，便可求得 r_x 和 L_x。

3. 谐振电路

电路发生谐振时的特点

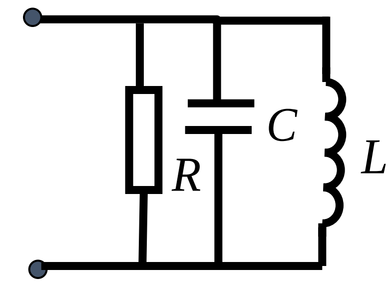


理想的并联谐振电路，发生谐振时，电路的阻抗角=0，电路的阻抗=R，即电路的复阻抗等价于一个纯电阻。
问：谐振时电容和电感上是否有电流?



理想的串联谐振电路，发生谐振时，电路的阻抗角=0，电路的阻抗=R，即电路的复阻抗等价于一个纯电阻。
问：谐振时电容和电感上是否有电压?

谐振时电路的特点



- 并联电路谐振时，假设电阻上的电流为 $\tilde{I}_R$，则电阻电压为 $\tilde{U}_R = R\tilde{I}_R$
- 显然 $\tilde{U}_L = \tilde{U}_C = \tilde{U}_R$，故电感和电容上的电流不为零。
- 谐振时，电路总的阻抗等于R，即R的电流等于电路的总电流。
- 易知，电容和电感的阻抗大小相等，符号相反，电流也是大小相等，符号相反，即电流在L和C之间形成振荡，能量在L和C之间不断交换。
- 对串联谐振电路也可做类似分析。

参考作业题25

谐振时电路的定义

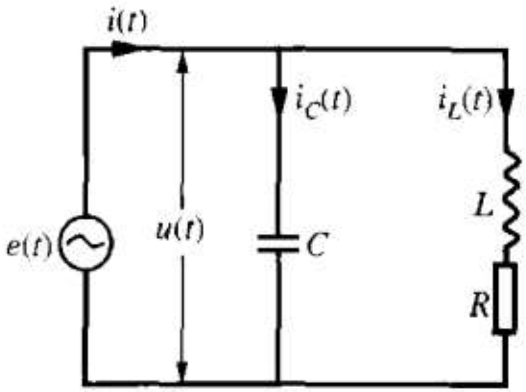
电流或电压出现极大值的现象，称之为谐振现象。

教材1

这就是说，当外加电动势的频率和自由振荡的频率相等时，电流的振幅为最大，其值等于$\frac{\mathscr{E}_0}{R}$，这时，电流与外加电动势之间的相位差 $\phi'=0$. 这种在周期性电动势作用下，电流振幅达到最大值的现象**称为**电共振. **收音机中的调谐，就是调节电**

教材2

对于包含电容和电感及电阻元件的无源一端口网络，其端口可能呈现容性、感性及电阻性，当**电路端口的电压U和电流I出现同相位，电路呈电阻性时。**称之为谐振现象，这样的电路，称之为谐振电路。



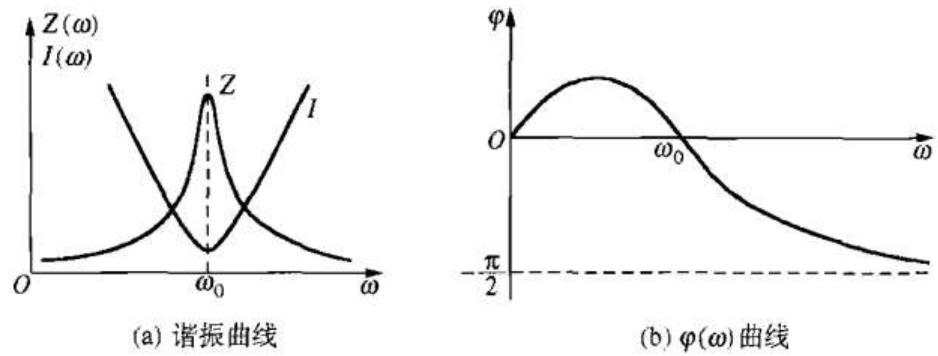


图 7-28 *RLC* 并联电路的谐振

$$Y=\frac{1}{R+\mathrm{j}\omega L}+\mathrm{j}\omega C=\frac{R}{R^2+\omega^2L^2}+\mathrm{j}\left(\omega C-\frac{\omega L}{R^2+\omega^2L^2}\right)$$

谐振条件是什么？什么是电路谐振？

教材1 p298

由 $\varphi(\omega)=0$ 解出 RLC 并联电路的谐振频率为

$$\omega_0=\sqrt{\frac{1}{LC}-\left(\frac{R}{L}\right)^2} \qquad f_0=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{LC}-\left(\frac{R}{L}\right)^2} \qquad \text{要求} R<\sqrt{\frac{L}{C}}$$

$$\Rightarrow \quad Z_0=(R^2+\omega_0{}^2L^2)/R=L/RC$$

由 $Z(\omega)$ 求极值得出的谐振频率为

$$f_0'=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{LC}\sqrt{1+\frac{2R^2C}{L}}-\left(\frac{R}{L}\right)^2} \quad \Rightarrow \quad |Z|_{\max}=\frac{L}{\sqrt{C}}\sqrt{\frac{1}{2\sqrt{2LCR^2+L^2}-CR^2-2L}}$$

f_0' 与 f_0 有所不同，通常 R 很小，$\frac{2R^2C}{L}\ll 1$，故 $f_0\approx f_0'$.

- 如上并联谐振电路应用：
  - 选频电路，从不同频率信号中提取出特定频率的信号；关注电路阻抗极值点。
  - 振荡电路，利用电路产生特定频率的信号。

在反馈振荡器电路中，把反馈电压作为输入电压，LC并联谐振回路作为反馈回路，将信号反馈至输入端，且反馈信号与输入信号**相位相同**，形成闭环正反馈，产生自激振荡，输出信号。更关注谐振回路的相位。

- 电路谐振的物理含义是什么?

  电路的电学参数发生共振（Resonance）现象。

- 电路发生谐振的判断标准是什么?

  一般的，认为电路端口的电压U和电流I出现同相位，电路呈电阻性，**阻抗虚部为零**。

- 讨论电路谐振的目的和意义是什么?

  根据具体应用而定。