AI 中的数学

第十四讲

方聪，概率统计部分参考章复熹和张原老师课件

2024 年秋季

1 第二章课程作业

1. 第二章课程作业

1. 从一副扑克牌（共 52 张）中发出 5 张，求其中黑桃张数的概率分布。

解：设黑桃的张数为随机变量 X，

$$P(X=k)=\frac{C_{13}^{k}C_{39}^{5-k}}{C_{52}^{5}},\quad k=0,1,2,3,4,5$$

2. 设随机变量 X 服从泊松分布，$P(X=1)=P(X=2)$，求 $P(X=4)$ 的值。

解：设 $P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$，则

$$P(X=1)=\lambda e^{-\lambda}=P(X=2)=\frac{\lambda^2}{2}e^{-\lambda}\quad(\lambda>0)$$

解得 $\lambda=2$，进而 $P(X=4)=\frac{2}{3}e^{-2}$.

3. 对圆的直径作近似测量，设其在区间 $[a,b]$ 上均匀分布，试求圆面积的概率分布及其均值、方差。

解：设直径 $d \sim U(a,b)$，面积 $X = \frac{\pi d^2}{4}$。概率

$P(X \leqslant C) = P(d \leqslant \sqrt{\frac{4C}{\pi}}) = \frac{\sqrt{\frac{4C}{\pi}}-a}{b-a}, (\sqrt{\frac{4C}{\pi}} \leqslant b)$。

因此面积的分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < \frac{\pi a^2}{4}, \\ \frac{\sqrt{\frac{4x}{\pi}}-a}{b-a}, & \frac{\pi a^2}{4} \leqslant x \leqslant \frac{\pi b^2}{4}, \\ 1, & x > \frac{\pi b^2}{4}. \end{cases}$$

期望为

$$E(X) = \int_a^b \frac{\pi}{4} x^2 \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \frac{\pi}{12} (b^3 - a^3) = \frac{\pi}{12} (a^2 + ab + b^2).$$

$$E(X^2) = \int_a^b \frac{\pi^2}{16} x^4 \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \frac{\pi^2}{80} (b^5 - a^5).$$

方差为

$$\mathrm{var}(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{\pi^2}{720} (b-a)^2 (4a^2 + 7ab + 4b^2).$$

4. 设 $p(x)$ 是随机变量 X 的分布密度，其中含有待定常数 c，试在下列情况求出 c 的值。

(1) $p(x)=\begin{cases} 0, & x<0, \\ ce^{-x}, & x\geqslant 0; \end{cases}$

(2) $p(x)=\begin{cases} 0, & x<0, \\ cx^{\alpha}e^{-\beta x}, & x\geqslant 0(\alpha>0,\beta>0); \end{cases}$

(3) $p(x)=\frac{c}{1+x^2}$.

解：(1)

$$\int_0^{\infty} ce^{-x}dx = c = 1.$$

(2)

$$\int_0^{\infty} cx^{\alpha}e^{-\beta x}dx = c\int_0^{\infty} \frac{1}{\beta^{\alpha+1}}(\beta x)^{\alpha}e^{-\beta x}d(\beta x) = \frac{c\Gamma(\alpha+1)}{\beta^{\alpha+1}} = 1.$$

因此

$$c = \frac{\beta^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1)}.$$

(3)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{c}{1+x^2}dx = c\left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = 1.$$

因此 $c = \frac{1}{\pi}$.

5. 设随机变量 X 的分布函数是 $F(x)$，试证明，对任何 $a<b$，有

$$P(X=a)=F(a)-F(a-0),\quad P(a<X<b)=F(b-0)-F(a),$$

这里 $F(y-0)\triangleq \lim_{x\to y}F(x)$。

证明：

$$P(X=a)=\lim_{\varepsilon\to 0}P(a-\varepsilon<X\leqslant a)=\lim_{\varepsilon\to 0}F(a)-F(a-\varepsilon)=F(a)-F(a-0).$$

$$P(a<X<b)=\lim_{\varepsilon\to 0}(a<X\leqslant b-\varepsilon)=\lim_{\varepsilon\to 0}F(b-\varepsilon)-F(a).$$

6. 已知随机变量 $X \sim N(\mu, \sigma^2), Y = e^X$，试计算 Y 的期望和方差。

解：

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\{x\} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right\} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{(x-(\mu+\sigma^2))^2}{2\sigma^2}\right\} dx$$

$$= \exp\left\{\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right\}$$

$$E(Y^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\{2x\} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} dx = \exp\{2\mu + 2\sigma^2\}$$

因此

$$\mathrm{var}(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2 = (e^{\sigma^2} - 1)\exp\{2\mu + \sigma^2\}.$$

9. 由统计物理学知道，分子运动的速率 X 服从麦克斯韦分布，即其分布密度是

$$p(x) = \begin{cases} \frac{4x^2}{\alpha^3\sqrt{\pi}} \exp\left\{-\frac{x^2}{\alpha^2}\right\}, & x > 0, \\ 0, & x \leqslant 0. \end{cases}$$

其中参数 $\alpha > 0$，试求分子的动能 $Y = \frac{1}{2}mX^2$ 的分布密度。

解：

$$P(y \leqslant Y) = P(\frac{1}{2}mx^2 \leqslant Y) = \int_0^{\sqrt{\frac{2Y}{m}}} \frac{4x^2}{\alpha^3\sqrt{\pi}} \exp\left\{-\frac{x^2}{\alpha^2}\right\} dx$$

令 $y = \frac{1}{2}mx^2$，得

$$P(y \leqslant Y) = \int_0^{Y} \frac{4\sqrt{2}}{\alpha^3 m^{3/2}\sqrt{\pi}} \sqrt{y} \exp\left\{-\frac{2y}{m\alpha^2}\right\} dy.$$

因此

$$P_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{4\sqrt{2}}{\alpha^3 m^{3/2}\sqrt{\pi}}\sqrt{y}\exp\left\{-\dfrac{2y}{m\alpha^2}\right\}, & y > 0, \\ 0, & y \leqslant 0. \end{cases}$$

11. 设随机变量 X 的分布密度为

$$p(x)=\begin{cases} x, & 0\leqslant x<1,\\ 2-x, & 1\leqslant x\leqslant 2,\\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

试求出 X 的分布函数，并作出 $p(x)$ 和 $F(x)$ 的图形。

解：得分布函数为

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<0,\\ \frac{1}{2}x^2, & 0\leqslant x<1,\\ 1-\frac{1}{2}(2-x)^2, & 1\leqslant x<2,\\ 1, & x\geqslant 2. \end{cases}$$

12. 设某产品的质量指标 $X \sim N(160, \sigma^2)$，若要求 $P(120 \leqslant X \leqslant 200) \geqslant 0.80$，问：允许 σ 最多为多少？

解：由 $X \sim N(160, \sigma^2)$，设 $Y = \frac{X-160}{\sigma} \sim N(0,1)$。因此

$$P(120 \leqslant x \leqslant 200) = P(-\frac{40}{\sigma} \leqslant y \leqslant \frac{40}{\sigma}) = 2\Phi\left(\frac{40}{\sigma}\right) - 1 = 0.8$$

查表得 $\sigma = 31.25$。

18. 设 X 是只取非负整数的随机变量，若 $E(X)$ 存在，试证明：

$$E(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X \geqslant k).$$

证明：

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{i=1}^{+\infty} iP(X=i) = \sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{i} P(X=i) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{i=k}^{+\infty} P(X=i) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X \geqslant k). \end{aligned}$$

19. 设 X 是非负随机变量，$g(x)$ 是 x 的增函数，$g(x) \geqslant 0$，且 $E(g(X))$ 存在，试证明，对任何 $\varepsilon > 0$，只要 $g(\varepsilon) > 0$，就有

$$P(X \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{1}{g(\varepsilon)} E(g(x)).$$

证明：设 x 的概率密度函数为 $p(x)$,

$$E(g(x)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)p(x)dx \geqslant \int_{\varepsilon}^{+\infty} g(x)p(x)dx$$

由于 $g(x)$ 为增函数，因此

$$\int_{\varepsilon}^{+\infty} g(x)p(x)dx \geqslant g(\varepsilon)\int_{\varepsilon}^{+\infty} p(x)dx = g(\varepsilon)P(X \geqslant \varepsilon).$$

即

$$P(X \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{1}{g(\varepsilon)} E(g(x)).$$

20. 设随机变量 X 的分布密度为

$$p(x)=\begin{cases}\frac{2x}{\pi^2}, & 0<x<\pi,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

试求 $Y=\sin X$ 的概率分布。

解：当 $0<y\leqslant 1$ 时，

$$\begin{aligned}F(y)&=P(0<x\leqslant \arcsin y)+P(\pi-\arcsin y\leqslant X<\pi)\\&=\int_0^{\arcsin y}\frac{2x}{\pi^2}dx+\int_{\pi-\arcsin y}^{\pi}\frac{2x}{\pi^2}dx\\&=\frac{1}{\pi^2}(\arcsin y)^2+(1-\frac{1}{\pi^2}(\pi-\arcsin y)^2)=\frac{2}{\pi}\arcsin y.\end{aligned}$$

因此概率分布为

$$F(y)=\begin{cases}0, & y<0,\\ \frac{2\arcsin y}{\pi}, & 0<y\leqslant 1,\\ 1, & y>1.\end{cases}$$

21. 设随机变量 X 服从区间 $[0,5]$ 上的均匀分布，

$$Y=\begin{cases} X, & 1<X<3, \\ 0, & X\leqslant 1, \\ 5, & X\geqslant 3, \end{cases}$$

试求 Y 的分布函数。

解： 易知 $P(Y=0)=\frac{1}{5}$，$P(Y=5)=\frac{2}{5}$，
$P(1<Y<y\leq 3)=\frac{y-1}{5}$. 因此分布函数为

$$F(y)=\begin{cases} 0, & y<0, \\ \frac{1}{5}, & y\leqslant 1, \\ \frac{y}{5}, & 1<y<3, \\ \frac{3}{5}, & 3\leqslant y<5, \\ 1, & y\geqslant 5. \end{cases}$$

22. 设随机变量 X 的分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0 \\ \frac{x^2}{9}, & 0 < x \leqslant 3, \\ 1, & x > 3. \end{cases}$$

试求出 X 的分布密度，数学期望和 $p(0 < p < 1)$ 分位数。

解：由分布函数得 X 的密度函数为

$$p(x) = \begin{cases} \frac{2x}{9}, & 0 < x \leqslant 3, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

$$E(X) = \int_0^3 \frac{2x}{9} dx = 2$$

p 分位数为 $3\sqrt{p}$。

26. 设随机变量 X 的可能取值是 $1,2,3,4,5,6$，且概率分布是

$$P(X=x)=cx, \quad (x=1,\cdots 6),$$

其中 c 是一个正数，试求 X 的期望和中位数。

解：由于

$$\sum_{i=1}^{6} P(X=i)=21c=1$$

得 $c=\frac{1}{21}$，期望为

$$E(X)=\sum_{i=1}^{6} iP(X=i)=\sum_{i=1}^{6} ci^2=91c=\frac{91}{21}$$

由于 $P(X\leqslant 5)=\frac{15}{21}$，$P(X\leqslant 4)=\frac{10}{21}$，
$P(X<5)\leqslant 0.5\leqslant P(X\leqslant 5)$，故中位数为 5。

27. 设随机变量 $X \sim N(10,4)$，试求下列概率：
(1) $P(6 < X \leqslant 9)$;
(2) $P(13 \leqslant X \leqslant 15)$.

解：(1) 由于 $X \sim N(10,4)$,

$$p(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-10)^2}{8}}$$

$$P(6 < X < 9) = \int_6^9 \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-10)^2}{8}} dx$$
$$= \int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \Phi(2) - \Phi\left(\frac{1}{2}\right) \approx 0.2857.$$

(2)

$$P(13 \leqslant X \leqslant 15) = \int_{13}^{15} \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-10)^2}{8}} dx$$

$$= \int_{\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \Phi\left(\frac{5}{2}\right) - \Phi\left(\frac{3}{2}\right) \approx 0.0606.$$

28. 某商店某种商品每月销售量服从泊松分布（参数为 6），问：在月初该种商品应该进货多少才能保证当月不脱销的概率大于 0.99？

解：设销量为 X，则

$$P(X=k)=\frac{6^k}{k!}e^{-6}$$

事件 A_n：进货 n 件商品不脱销的概率为

$$P(A_n)=\sum_{k=0}^{n}\frac{6^k}{k!}e^{-6}$$

求解最小的 n 使得 $P(A_n)>0.99$，解得 $n=12$。

33. 设随机变量 X 取值于区间 $[a, b]$ 内 $(-\infty < a < b < +\infty)$，试证明下列不等式成立：

$$a \leqslant E(X) \leqslant b, \quad \mathrm{var}(X) \leqslant \frac{(b-a)^2}{4}.$$

证明： 由于 $a \leqslant x \leqslant b$，

$$\int_a^b ap(x)dx \leqslant \int_a^b xp(x)dx \leqslant \int_a^b bp(x)dx$$

即

$$a \leqslant E(X) \leqslant b$$

注意到对任意实数 e，有 $\mathrm{var}(X) \leqslant E((X-e)^2)$，该式在 $e = E(X)$ 时取等，令 $e = \frac{a+b}{2}$，则

$$
\begin{aligned}
\mathrm{var}(X) &\leqslant E\left(\left(X - \frac{a+b}{2}\right)^2\right) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 p(x)dx \\
&\leqslant \int_a^b \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 p(x)dx = \frac{(b-a)^2}{4}.
\end{aligned}
$$