

## 20240219作业

1. 使用积分计算  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$ .
2. 设序列  $\{a_n\}$  满足  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n^\alpha} = 1$  ( $\alpha > 0$ ), 使用积分计算  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{1+\alpha}}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$ .
3. 设  $f(x) \in R[0, 1]$ ,  $\int_0^1 f(x) dx > 0$ . 证明:  $\exists(\alpha, \beta) \subset [0, 1]$  s.t.  $f(x) > 0$ ,  $x \in (\alpha, \beta)$ .
4. 设  $f(x)$  为  $\mathbb{R}$  上的连续凸函数,  $g(x)$  为  $\mathbb{R}$  上的连续函数. 证明:  
当  $a > 0$  时,  $f\left(\frac{1}{a} \int_0^a g(t) dt\right) \leq \frac{1}{a} \int_0^a f(g(t)) dt$ .