AI 中的数学

第二十讲

方聪，概率统计部分参考章复熹和张原老师课件

2024 年秋季

1 第三章作业

1 第三章作业

3. 设二维随机向量 (X, Y) 的联合密度为

$$p(x, y) = \begin{cases} c(R - \sqrt{x^2 + y^2}), & x^2 + y^2 \leqslant R^2, \\ 0, & x^2 + y^2 > R^2, \end{cases}$$

求：(1) 系数 c；(2) 向量 (X, Y) 落入圆 $x^2 + y^2 \leqslant r^2 (0 < r < R)$ 的概率。

3. 设二维随机向量 (X, Y) 的联合密度为

$$p(x,y) = \begin{cases} c(R - \sqrt{x^2+y^2}), & x^2+y^2 \leqslant R^2, \\ 0, & x^2+y^2 > R^2, \end{cases}$$

求：(1) 系数 c；(2) 向量 (X, Y) 落入圆 $x^2+y^2 \leqslant r^2 (0 < r < R)$ 的概率。

解：(1)

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} p(x,y)dxdy &= \int_{\{x^2+y^2\leqslant R^2\}} c(R-\sqrt{x^2+y^2})dxdy \\ &= \int_{0\leqslant r\leqslant R}\int_{0\leqslant\theta\leqslant 2\pi} c(R-r)rd\theta dr \\ &= 2\pi c\int_0^R (R-r)rdr = c\pi R^2 = 1 \end{aligned}$$

因此 $c = \frac{1}{\pi R^2}$.

(2)

$$
\begin{aligned}
P(x^2+y^2 \leqslant r^2) &= \int_{\{x^2+y^2\leqslant r^2\}} c(R-\sqrt{x^2+y^2})dxdy \\
&= \int_{0\leqslant r'\leqslant r}\int_{0\leqslant\theta\leqslant 2\pi} c(R-r')r'd\theta dr' \\
&= 2\pi c\int_0^r (R-r')r'dr' \\
&= 2\pi c(Rr-\frac{r^2}{2}) = \frac{2r}{R}-\frac{r^2}{R^2}.
\end{aligned}
$$

4. 设二维随机向量 (X,Y) 服从区域

$$D=\left\{(x,y):\frac{(x+y)^2}{2a^2}+\frac{(x-y)^2}{2b^2}\leqslant 1\right\}\quad (a,b>0)$$

上的均匀分布，求 (X,Y) 的联合密度。

4. 设二维随机向量 (X, Y) 服从区域

$$D = \left\{(x, y) : \frac{(x+y)^2}{2a^2} + \frac{(x-y)^2}{2b^2} \leqslant 1\right\} \quad (a, b > 0)$$

上的均匀分布，求 (X, Y) 的联合密度。

解：设 $I_D(x, y)$ 为示性函数，$p(x, y) = cI_D(x, y)$。令
$u = \frac{x+y}{2}, v = \frac{x-y}{2}$ 得

$$\int_{\mathbb{R}^2} p(x, y)dxdy = \int_D cdxdy = c \int_{\{\frac{2u^2}{a^2} + \frac{2v^2}{b^2} \leqslant 1\}} 2dudv = c\pi ab = 1$$

解得 $c = \frac{1}{\pi ab}$，联合密度为 $p(x, y) = \frac{1}{\pi ab} I_D(x, y)$.

8. 设随机变量 X 与 Y 相互独立。分别服从自由度为 m, n 的 χ^2 分布，即

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^{m/2}\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} x^{m/2-1} e^{-x/2}, & x > 0, \\ 0, & x \leqslant 0, \end{cases}$$

$$p_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2^{n/2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} y^{n/2-1} e^{-y/2}, & y > 0, \\ 0, & y \leqslant 0, \end{cases}$$

试证明，$X + Y$ 服从 χ^2 分布，其自由度为 $m + n$.

有 $x \sim \Gamma(m, 1/2)$，$y \sim \Gamma(n, 1/2)$. 由独立性，可得结论。

若 X 与 Y 独立, $X \sim \Gamma(r, \lambda)$, $Y \sim \Gamma(s, \lambda)$. 则

$$X + Y \sim \Gamma(r + s, \lambda).$$

- 密度：$p_X(x) = \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)} x^{r-1} e^{-\lambda x}, \quad x > 0.$
- $Z = X + Y : p_Z(z) = \int p_X(x) p_Y(z-x) dx. \forall z > 0,$

$$
\begin{aligned}
p_Z(z) &= C \int_0^z x^{r-1} e^{-\lambda x} \cdot (z-x)^{s-1} e^{-\lambda(z-x)} dx \\
&= C e^{-\lambda z} \int_0^1 (tz)^{r-1} ((1-t)z)^{s-1} d(tz) = \hat{C} z^{r+s-1} e^{-\lambda z}.
\end{aligned}
$$

10. 设二维随机向量 (X, Y) 的联合密度为

$$p(x,y) = \begin{cases} 4xy\exp\{-(x^2+y^2)\}, & x>0, y>0, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

求 $Z = \sqrt{X^2+Y^2}$ 的均值。

10. 设二维随机向量 (X, Y) 的联合密度为

$$p(x,y) = \begin{cases} 4xy\exp\{-(x^2+y^2)\}, & x>0, y>0, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

求 $Z = \sqrt{X^2+Y^2}$ 的均值。

解：作极坐标变换 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ 得

$$\begin{aligned} E(Z) &= \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} \sqrt{x^2+y^2}4xy\exp\{-(x^2+y^2)\}dxdy \\ &= \int_0^{\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} r\cdot 4r^2\cos\theta\sin\theta e^{-r^2} rd\theta dr \\ &= \left(\int_0^{\infty} 4r^4 e^{-r^2} dr\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\sin\theta d\theta\right) \\ &= \frac{3\sqrt{\pi}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}. \end{aligned}$$

11. 设二维随机向量 (X, Y) 服从区域

$$D = \{(x, y) : 0 < x < 1, 0 < y < x\}$$

上的均匀分布，求 $E(X), \mathrm{var}(X)$ 及 X 与 Y 的相关系数。

11. 设二维随机向量 (X,Y) 服从区域

$$D=\{(x,y):0<x<1,0<y<x\}$$

上的均匀分布，求 $E(X),\mathrm{var}(X)$ 及 X 与 Y 的相关系数。

解：设 $I_D(x,y)$ 为示性函数，$p(x,y)=cI_D(x,y)$。
由于 $\int_0^1\int_0^x cdxdy=1$，解得 $c=2$.

$$E(X)=\int_{\mathbb{R}^2}x\cdot 2I_D(x,y)dxdy=\int_0^1 2x^2dx=\frac{2}{3}.$$

$$E(X^2)=\int_{\mathbb{R}^2}x^2\cdot 2I_D(x,y)dxdy=\int_0^1 2x^3dx=\frac{1}{2}.$$

$$\mathrm{var}(X)=E(X^2)-(E(X))^2=\frac{1}{18}.$$

$$E(XY)=\int_{\mathbb{R}^2}xy\cdot 2I_D(x,y)dxdy=\int_0^1\int_0^x 2xydydx=\frac{1}{4}.$$

$$E(Y) = \int_{\mathbb{R}^2} y \cdot 2I_D(x,y)dxdy = \int_0^1 \int_0^x 2ydydx = \frac{1}{3}.$$

$$E(Y^2) = \int_{\mathbb{R}^2} y^2 \cdot 2I_D(x,y)dxdy = \int_0^1 \int_0^x 2y^2dydx = \frac{1}{6}.$$

$$\rho(X,Y) = \frac{E(XY) - E(X)E(Y)}{\sqrt{\mathrm{var}(X)}\sqrt{\mathrm{var}(Y)}} = \frac{1}{2}.$$

12. 设随机变量 $X \sim N(0,1)$, $Y = X^n$ (n 是正整数), 求 X 与 Y 的相关系数.

12. 设随机变量 $X \sim N(0,1)$, $Y = X^n$ (n 是正整数), 求 X 与 Y 的相关系数.

解：若随机变量 $X \sim N(0,1)$，则对一切正整数 k，可以由递推得到

$$E(X^{2k-1}) = 0, \quad E(X^{2k}) = \prod_{0 \leqslant i < k} (2k - 1 - 2i)$$

若 n 为奇数，

$$E(Y) = E(X^n) = 0$$

$$E(XY) = E(X^{n+1}) = \prod_{0 \leqslant i < \frac{n+1}{2}} (n - 2i)$$

$$E(Y^2) = E(X^{2n}) = \prod_{0 \leqslant i < n} (2n - 1 - 2i)$$

$$\rho_{XY} = \frac{E(XY) - E(X)E(Y)}{\sqrt{\mathrm{var}(X)}\sqrt{\mathrm{var}(Y)}} = \frac{\prod_{0\leqslant i<\frac{n+1}{2}}(n-2i) - 0}{1\cdot\sqrt{\prod_{0\leqslant i<n}(2n-1-2i) - 0^2}}$$

$$= \frac{\prod_{0\leqslant i<\frac{n+1}{2}}(n-2i)}{\sqrt{\prod_{0\leqslant i<n}(2n-1-2i)}}$$

若 n 为偶数，

$$E(Y) = E(X^n) = \prod_{0\leqslant i<\frac{n}{2}}(n-1-2i)$$

$$E(XY) = E(X^{n+1}) = 0$$

$$\mathrm{cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0$$

故相关系数 $\rho_{XY} = 0$.

13. 设随机变量 X_1 与 X_2 相互独立，分布密度分别为

$$p_1(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 0, & , \end{cases}$$

$$p_2(x) = \begin{cases} e^{-(x-5)}, & x > 5, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

求 $E(X_1X_2)$.

13. 设随机变量 X_1 与 X_2 相互独立，分布密度分别为

$$p_1(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 0, & , \end{cases}$$

$$p_2(x) = \begin{cases} e^{-(x-5)}, & x > 5, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

求 $E(X_1X_2)$.

解：

$$E(X_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} xp_1(x)dx = \int_0^1 2x^2 dx = \frac{2}{3},$$

$$E(X_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} xp_2(x)dx = \int_5^{\infty} xe^{-(x-5)}dx = \int_0^{\infty} (u+5)e^u du = 6$$

由于 X_1 和 X_2 相互独立，因此

$$E(X_1X_2) = E(X_1)E(X_2) = 4.$$

14. 设 X 和 Y 是随机变量, $\mathrm{var}(X) = 25$, $\mathrm{var}(Y) = 36$, 相关系数 $\rho_{XY} = 0.4$, 求 $\mathrm{var}(X + Y)$ 及 $\mathrm{var}(X - Y)$.

14. 设 X 和 Y 是随机变量，$\mathrm{var}(X) = 25$，$\mathrm{var}(Y) = 36$，相关系数 $\rho_{XY} = 0.4$，求 $\mathrm{var}(X + Y)$ 及 $\mathrm{var}(X - Y)$.

解：不妨假设 X Y 零均值。

$$\mathrm{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \rho_{XY}\sqrt{\mathrm{var}(X)}\sqrt{\mathrm{var}(Y)} = 12.$$

$$\mathrm{var}(X + Y) = \mathrm{var}(X) + \mathrm{var}(Y) + 2\,\mathrm{cov}(X, Y) = 85.$$

$$\mathrm{var}(X - Y) = \mathrm{var}(X) + \mathrm{var}(Y) - 2\,\mathrm{cov}(X, Y) = 37.$$

15. 设二维随机向量 (X, Y) 服从二维正态分布，$E(X) = E(Y) = 0$, $\mathrm{var}(X) = a^2$, $\mathrm{var}(Y) = b^2$, $\rho_{XY} = 0$. 试求 (X, Y) 落入区域

$$D = \left\{(x, y) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant k^2\right\} \quad (k > 0)$$

的概率。

15. 设二维随机向量 (X, Y) 服从二维正态分布，
$E(X) = E(Y) = 0$, $\mathrm{var}(X) = a^2$, $\mathrm{var}(Y) = b^2$, $\rho_{XY} = 0$. 试求 (X, Y) 落入区域

$$D = \left\{(x, y) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant k^2\right\} \quad (k > 0)$$

的概率。

解： 由题意得，联合密度函数

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{ab2\pi} e^{-\frac{x^2}{2a^2} - \frac{y^2}{2b^2}}$$

(X, Y) 落入区域 D 的概率为

$$P((X, Y) \in D) = \iint_D \frac{1}{ab2\pi} e^{-\frac{x^2}{2a^2} - \frac{y^2}{2b^2}} \, dx \, dy$$

使用极坐标变换： $x = ar\cos\theta, \quad y = br\sin\theta.$

在这种变换下，雅可比行列式为：

$$J = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} \right| = abr$$

区域 D 变换后为：

$$\frac{(ar\cos\theta)^2}{a^2} + \frac{(br\sin\theta)^2}{b^2} = r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = r^2 \leq k^2$$

因此，积分可表示为

$$P((X, Y) \in D) = \int_0^{2\pi} \int_0^k \frac{1}{ab2\pi} e^{-\frac{(ar\cos\theta)^2}{2a^2} - \frac{(br\sin\theta)^2}{2b^2}} \cdot abr\, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^k \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{r^2}{2}} r\, dr\, d\theta$$

令 $u = \frac{r^2}{2}$，则

$$P((X,Y) \in D) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{k^2}{2}} \frac{1}{2\pi} e^{-u} \, du \, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} (1 - e^{-\frac{k^2}{2}}) \, d\theta$$

16. 设三维随机向量 (X, Y, Z) 的联合密度为

$$p(x,y,z) = \begin{cases} e^{-(x+y+z)}, & x>0, y>0, z>0, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

试分别求出随机变量 X, Y, Z 的分布密度，又问：X, Y, Z 相互独立吗？

解：

$$f_X(x) = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} p(x,y,z)\,dy\,dz = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-(x+y+z)}\,dy\,dz = \int_0^{\infty} e^{-x}$$

因此，X 的边缘分布密度为：

$$f_X(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x>0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

Y 和 Z 相同。由

$$f_X(x) \cdot f_Y(y) \cdot f_Z(z) = e^{-x} \cdot e^{-y} \cdot e^{-z} = e^{-(x+y+z)} = p(x, y, z)$$

因此，X, Y, Z 是相互独立的。

17. 设随机变量 X, Y, Z 相互独立，都服从标准正态分布，求 $\xi \triangleq \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$ 的概率分布.

17. 设随机变量 X, Y, Z 相互独立，都服从标准正态分布，求 $\xi \triangleq \sqrt{X^2+Y^2+Z^2}$ 的概率分布.

解：由于 X, Y, Z 都服从标准正态分布 $N(0,1)$，因此 X^2, Y^2, Z^2 都服从卡方分布 $\chi^2(1)$，它们的和 ξ^2 服从自由度为 3 的卡方分布 $\chi^2(3)$。
设 $\xi^2 = W$，则 $W \sim \chi^2(3)$，密度函数为

$$f_W(w) = \frac{w^{1.5-1}e^{-w/2}}{2^{1.5}\Gamma(1.5)} = \frac{w^{0.5}e^{-w/2}}{2^{1.5}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}} = \frac{w^{0.5}e^{-w/2}}{\sqrt{2\pi}}$$

其中利用了 $\Gamma(1.5) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$。
设 $g(w) = \sqrt{w}$，则 $g'(w) = \frac{1}{2\sqrt{w}}$。逆变换为 $w = g^{-1}(\xi) = \xi^2$。

由变换公式，ξ 的概率密度函数为：

$$f_\xi(\xi) = f_W(g^{-1}(\xi)) \left| \frac{d}{d\xi} g^{-1}(\xi) \right| = f_W(\xi^2) \left| \frac{d}{d\xi}(\xi^2) \right|$$

$$= \frac{(\xi^2)^{0.5} e^{-(\xi^2)/2}}{\sqrt{2\pi}} \cdot 2\xi = \frac{\xi e^{-(\xi^2)/2}}{\sqrt{2\pi}} \cdot 2\xi = \frac{2\xi^2 e^{-(\xi^2)/2}}{\sqrt{2\pi}}$$

因此，ξ 的概率密度函数为：

$$f_\xi(\xi) = \frac{2\xi^2 e^{-(\xi^2)/2}}{\sqrt{2\pi}}, \quad (\xi \geqslant 0)$$

.

18. 设随机变量 $X_1,\dots,X_n$ 独立同分布，共同的分布是威布尔分布，即共同的分布函数是

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\left(\frac{x}{\eta}\right)^m}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0,\end{cases}\qquad (m>0,\eta>0),$$

试证明 $\xi\triangleq\min\{X_1,\dots,X_n\}$ 仍服从威布尔分布。

18. 设随机变量 $X_1,\ldots,X_n$ 独立同分布，共同的分布是威布尔分布，即共同的分布函数是

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\left(\frac{x}{\eta}\right)^m}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0,\end{cases}\qquad (m>0,\eta>0),$$

试证明 $\xi\triangleq\min\{X_1,\ldots,X_n\}$ 仍服从威布尔分布。

证明：由于 $\xi=\min\{X_1,X_2,\ldots,X_n\}$，所以 $\xi>x$ 当且仅当所有 $X_i>x\ \ (i=1,2,\ldots,n)$。因为 X_i 是独立的，我们有：

$$P(\xi>x)=P(X_1>x,X_2>x,\ldots,X_n>x)=\prod_{i=1}^{n}P(X_i>x)$$

$$=\prod_{i=1}^{n}(1-F(x))=e^{-n\left(\frac{x}{\eta}\right)^m}$$

所以：

$$F_\xi(x) = 1 - P(\xi > x) = 1 - e^{-n\left(\frac{x}{\eta}\right)^m}$$

设 $\eta' = \eta\left(\frac{1}{n}\right)^{1/m}$，则：

$$F_\xi(x) = 1 - e^{-\left(\frac{x}{\eta'}\right)^m}$$

因此，$\xi = \min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ 仍然服从威布尔分布，其参数为：

$$\eta' = \eta\left(\frac{1}{n}\right)^{1/m}.$$

19. 对于随机变量 X, Y, Z, 已知

$$
\begin{aligned}
E(X) = E(Y) = 1, \quad E(Z) = -1, \\
\mathrm{var}(X) = \mathrm{var}(Y) = \mathrm{var}(Z) = 1, \\
\rho_{XY} = 0, \quad \rho_{XZ} = 1/2, \quad \rho_{YZ} = -1/2,
\end{aligned}
$$

试求 $E(X+Y+Z)$ 及 $\mathrm{var}(X+Y+Z)$.

解:

$$E(X+Y+Z) = E(X) + E(Y) + E(Z) = 1 + 1 - 1 = 1$$

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{var}(X+Y+Z) \\
=&\mathrm{var}(X) + \mathrm{var}(Y) + \mathrm{var}(Z) + 2\left(\mathrm{cov}(X, Y) + \mathrm{cov}(X, Z) + \mathrm{cov}(Y, Z)\right)
\end{aligned}
$$

计算协方差：

$$\operatorname{cov}(X,Y)=\rho_{XY}\sqrt{\operatorname{var}(X)\operatorname{var}(Y)}=0\cdot\sqrt{1\cdot 1}=0$$

$$\operatorname{cov}(X,Z)=\rho_{XZ}\sqrt{\operatorname{var}(X)\operatorname{var}(Z)}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{1\cdot 1}=\frac{1}{2}$$

$$\operatorname{cov}(Y,Z)=\rho_{YZ}\sqrt{\operatorname{var}(Y)\operatorname{var}(Z)}=-\frac{1}{2}\cdot\sqrt{1\cdot 1}=-\frac{1}{2}$$

代入方差公式：

$$\operatorname{var}(X+Y+Z)=1+1+1+2\left(0+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)=3$$

因此，$E(X+Y+Z)=1$，$\operatorname{var}(X+Y+Z)=3$。

20. 设随机变量 X 与 Y 相互独立, $X \sim N(0,1)$, $Y \sim N(0,1)$, 试求 $U = X + Y$, $V = X - Y$ 的联合密度.

解：设变换：

$$\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

变换矩阵 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$，逆变换矩阵

$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

由于 X 和 Y 相互独立且都服从标准正态分布，它们的联合密度函数为：

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$$

代入逆变换：

$$x(u,v) = \frac{u+v}{2}, \quad y(u,v) = \frac{u-v}{2}, \quad |\det(\mathbf{A}^{-1})| = \left|\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$$

所以，U, V 的联合密度为：

$$f_{U,V}(u,v) = f_{X,Y}(x(u,v), y(u,v)) \cdot |\det(\mathbf{A}^{-1})|$$

$$= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{\left(\frac{u+v}{2}\right)^2 + \left(\frac{u-v}{2}\right)^2}{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{u^2+v^2}{4}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4\pi} e^{-\frac{u^2+v^2}{4}}.$$

21. 设随机变量 X 与 Y 相互独立, $X \sim N(0,1), Y \sim N(0,1)$, 试证: $U = X^2 + Y^2$ 与 $V = X/Y$ 是相互独立的.

21. 设随机变量 X 与 Y 相互独立, $X \sim N(0,1)$, $Y \sim N(0,1)$, 试证: $U = X^2 + Y^2$ 与 $V = X/Y$ 是相互独立的.

证明: 作极坐标变换: $X = R\cos\Theta$, $Y = R\sin\Theta$, 雅可比行列式 J 为:

$$J = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right| = r$$

X 和 Y 的联合密度函数为:

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$$

因此, R 和 Θ 的联合密度函数为:

$$f_{R,\Theta}(r,\theta) = f_{X,Y}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) \cdot |J| = \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{r^2}{2}} \cdot r = \frac{r}{2\pi}e^{-\frac{r^2}{2}}$$

R 的边缘密度函数:

$$f_R(r) = \int_0^{2\pi} f_{R,\Theta}(r,\theta)\, d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{r}{2\pi}e^{-\frac{r^2}{2}}\, d\theta = re^{-\frac{r^2}{2}}$$

Θ 的边缘密度函数：

$$f_\Theta(\theta) = \int_0^\infty f_{R,\Theta}(r,\theta)\,dr = \int_0^\infty \frac{r}{2\pi} e^{-\frac{r^2}{2}}\,dr = \frac{1}{2\pi}$$

注意到 $f_{R,\Theta}(r,\theta) = f_R(r)\cdot f_\Theta(\theta)$，这表明 R 和 Θ 是相互独立的。又由于

$$U = X^2 + Y^2 = R^2, \quad V = \frac{X}{Y} = \frac{\cos(\Theta)}{\sin(\Theta)} = \cot(\Theta)$$

因为 R 和 Θ 是相互独立的，而 U 只依赖于 R，V 只依赖于 Θ，所以 U 和 V 也是相互独立的。

22. 设随机变量 X 与 Y 相互独立, X 服从区间 $[0,1]$ 上的均匀分布, Y 服从区间 $[1,3]$ 上的均匀分布, 试求 $E(XY)$ 及 $\mathrm{var}(XY)$.

22. 设随机变量 X 与 Y 相互独立，X 服从区间 $[0,1]$ 上的均匀分布，Y 服从区间 $[1,3]$ 上的均匀分布，试求 $E(XY)$ 及 $\mathrm{var}(XY)$.

解：

$$E(X) = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}, \quad E(Y) = \frac{1+3}{2} = 2$$

由于 X 和 Y 相互独立，

$$E(XY) = E(X) \cdot E(Y) = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$$

$$E(X^2) = \int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}, \quad E(Y^2) = \int_1^3 \frac{1}{2} y^2\,dy = \frac{27}{6} - \frac{1}{6} = \frac{13}{3}$$

同样，X^2 和 Y^2 相互独立，

$$E((XY)^2) = E(X^2) \cdot E(Y^2) = \frac{1}{3} \cdot \frac{13}{3} = \frac{13}{9}$$

因此

$$\mathrm{var}(XY) = E((XY)^2) - [E(XY)]^2 = \frac{13}{9} - 1^2 = \frac{4}{9}$$

23. 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且 $\mathrm{var}(X)$ 和 $\mathrm{var}(Y)$ 存在, 试证:

$$\mathrm{var}(XY) \geqslant \mathrm{var}(X)\,\mathrm{var}(Y).$$

23. 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且 $\mathrm{var}(X)$ 和 $\mathrm{var}(Y)$ 存在, 试证:

$$\mathrm{var}(XY) \geqslant \mathrm{var}(X)\,\mathrm{var}(Y).$$

证明：由于 X 和 Y 相互独立，有：

$$E((XY)^2) = E(X^2Y^2) = E(X^2)E(Y^2), \quad E(XY) = E(X)E(Y)$$

计算方差：

$$\mathrm{var}(X)\,\mathrm{var}(Y) = (E(X^2) - [E(X)]^2)(E(Y^2) - [E(Y)]^2)$$
$$= E(X^2)E(Y^2) - E(X^2)[E(Y)]^2 - [E(X)]^2E(Y^2) + [E(X)]^2[E(Y)]^2$$

$$\mathrm{var}(XY) = E(X^2)E(Y^2) - [E(X)E(Y)]^2$$

由于：

$$E(X^2) \geqslant [E(X)]^2, \quad E(Y^2) \geqslant [E(Y)]^2$$

因此

$$E(X^2)[E(Y)]^2 + [E(X)]^2 E(Y^2) \geqslant 2[E(X)]^2[E(Y)]^2$$

$$\begin{aligned} & \operatorname{var}(X)\operatorname{var}(Y) - \operatorname{var}(XY) \\ =& 2[E(X)]^2[E(Y)]^2 - E(X^2)[E(Y)]^2 + [E(X)]^2 E(Y^2) \leqslant 0 \end{aligned}$$

即

$$\operatorname{var}(XY) \geqslant \operatorname{var}(X)\operatorname{var}(Y)$$

24. 设一城市有 n 个区, 其中住有 x_j 个居民的区共有 n_j 个 $(\sum n_j = n)$. 令

$$m = \sum_j \frac{n_j x_j}{n}, \quad \sigma^2 = \sum_j \frac{n_j x_j^2}{n} - m^2.$$

(m 是每个区的居民民数的平均均数). 现在随机选取取 r 个区, 并数出其中每个区中的居民民数, 设 $X_1, \cdots, X_r$ 分别为这 r 个区的居民民数, 试证:

$$E(X_1 + \cdots + X_r) = mr, \quad \mathrm{var}(X_1 + \cdots + X_r) = \frac{\sigma^2 r(n-r)}{n-1}.$$

24. 设一城市有 n 个区，其中住有 x_j 个居民的区共有 n_j 个 $(\sum n_j = n)$. 令

$$m = \sum_j \frac{n_j x_j}{n}, \quad \sigma^2 = \sum_j \frac{n_j x_j^2}{n} - m^2.$$

(m 是每个区的居民民数的平均均数). 现在随机选取取 r 个区，并数出其中每个区中的居民民数，设 $X_1, \cdots, X_r$ 分别为这 r 个区的居民民数，试证：

$$E(X_1 + \cdots + X_r) = mr, \quad \operatorname{var}(X_1 + \cdots + X_r) = \frac{\sigma^2 r(n-r)}{n-1}.$$

证明：由于每个区被选中的概率相等，每个区的居民数的期望为：

$$E(X_i) = \sum_j x_j \cdot P(X_i = x_j) = \sum_j x_j \cdot \frac{n_j}{n} = \frac{1}{n} \sum n_j x_j = m$$

$$E(X_i^2) = \sum_j x_j^2 \cdot P(X_i = x_j) = \sum_j x_j^2 \cdot \frac{n_j}{n} = \frac{1}{n} \sum_j n_j x_j^2$$

因此：

$$\mathrm{var}(X_i) = \frac{1}{n}\sum_j n_j x_j^2 - m^2 = \sigma^2$$

由于 $X_1, X_2, \ldots, X_r$ 相互独立，

$$E(X_1+X_2+\cdots+X_r) = E(X_1)+E(X_2)+\cdots+E(X_r) = r\cdot E(X_i) = r\cdot m$$

对于任意两个变量 X_i 和 X_j ，$E(X_iX_j)$ 可以表示为：

$$\begin{aligned}
E(X_iX_j) &= \frac{1}{n(n-1)}\sum_{i\neq j} x_i x_j \\
&= \frac{1}{n(n-1)}\left[\left(\sum_j x_j\right)^2 - \sum_j x_j^2 = n^2m^2 - n\sum_j \frac{n_j x_j^2}{n}\right] \\
&= \frac{1}{n(n-1)}(n^2m^2 - n\left(n\sigma^2 + nm^2\right)) = \frac{-n^2\sigma^2}{n(n-1)}
\end{aligned}$$

协方差为

$$\mathrm{cov}(X_i, X_j) = \frac{-n\sigma^2}{n-1} - m^2 = \frac{-n\sigma^2 - (n-1)m^2}{n-1} = \frac{-\sigma^2}{n-1}$$

$$\begin{aligned}
&\mathrm{var}(X_1 + X_2 + \cdots + X_r) \\
=&\sum_{i=1}^{r} \mathrm{var}(X_i) + 2\sum_{1\le i<j\le r} \mathrm{cov}(X_i, X_j) = r\sigma^2 - \frac{r(r-1)\sigma^2}{n-1} \\
=&\sigma^2\left(\frac{r(n-r)}{n-1}\right)
\end{aligned}$$

25. 设 $X_1, \ldots, X_n$ 是独立同分布的正值随机变列，试证：

$$E\left(\frac{X_1+\cdots+X_k}{X_1+\cdots+X_n}\right)=\frac{k}{n} \quad (k=1,\ldots,n).$$

25. 设 $X_1,\dots,X_n$ 是独立同分布的正值随机变列，试证：

$$E\left(\frac{X_1+\cdots+X_k}{X_1+\cdots+X_n}\right)=\frac{k}{n}\quad (k=1,\dots,n).$$

证明：设 $S_n=X_1+X_2+\cdots+X_n$ 和 $S_k=X_1+X_2+\cdots+X_k$。由于 $X_1,X_2,\dots,X_n$ 是独立同分布的正值随机变量，对于任意 i 和 j，$\frac{X_i}{S_n}$ 和 $\frac{X_j}{S_n}$ 的期望值相同。因此，我们可以考虑所有 $\frac{X_i}{S_n}$ 的和：

$$E\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{X_i}{S_n}\right)=E(1)=1$$

由于 $\frac{X_i}{S_n}$ 的期望值相同，因此：

$$E\left(\frac{X_i}{S_n}\right)=\frac{1}{n}\quad 对于所有 i=1,2,\dots,n$$

$$
\begin{aligned}
E\left(\frac{S_k}{S_n}\right) &= E\left(\frac{X_1+X_2+\cdots+X_k}{S_n}\right) \\
=E\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{X_i}{S_n}\right) &= \sum_{i=1}^{k} E\left(\frac{X_i}{S_n}\right) = k\cdot\frac{1}{n} = \frac{k}{n}
\end{aligned}
$$

26. 设随机变量 $X_1, \cdots, X_n$ 独立同分布, $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, 记

$$\xi = \sum_{i=1}^{m} X_i, \quad \eta = \sum_{i=1}^{n} X_i \quad (1 \leqslant m < n),$$

试求 (ξ, η) 的联合密度.

26. 设随机变量 $X_1, \cdots, X_n$ 独立同分布, $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, 记

$$\xi = \sum_{i=1}^{m} X_i, \quad \eta = \sum_{i=1}^{n} X_i \quad (1 \leqslant m < n),$$

试求 (ξ, η) 的联合密度.

解: ξ , η 是 m 个独立正态随机变量的和, 因此 ξ , η 也服从正态分布:

$$\xi \sim N(m\mu, m\sigma^2), \quad \eta \sim N(n\mu, n\sigma^2)$$

由于 X_i 独立同分布, 只有当 $i = j$ 时, $\mathrm{cov}(X_i, X_j) = \sigma^2$, 否则为 0。因此 ξ 和 η 的协方差为:

$$\mathrm{cov}(\xi, \eta) = \mathrm{cov}\left(\sum_{i=1}^{m} X_i, \sum_{j=1}^{n} X_j\right) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \mathrm{cov}(X_i, X_j) = m\sigma^2$$

ξ 和 η 的联合分布是一个二维正态分布，其均值向量和协方差矩阵分别为：

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} m\mu \\ n\mu \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} m\sigma^2 & m\sigma^2 \\ m\sigma^2 & n\sigma^2 \end{pmatrix}$$

二维正态分布的联合密度函数为：

$$f_{\xi,\eta}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\det(\boldsymbol{\Sigma})}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{\mu})^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{\mu})\right)$$

27. 设随机变量 X 与 Y 独立同分布, $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, α, β 是两个实数 (全不为 0).

(1) 求 $\alpha X + \beta Y$ 与 $\alpha X - \beta Y$ 的相关系数和联合密度;

(2) 证明: $E(\max\{X, Y\}) = \mu + \frac{\sigma}{\sqrt{\pi}}$.

27. 设随机变量 X 与 Y 独立同分布, $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, α, β 是两个实数 (全不为 0).
(1) 求 $\alpha X + \beta Y$ 与 $\alpha X - \beta Y$ 的相关系数和联合密度;
(2) 证明: $E(\max\{X, Y\}) = \mu + \frac{\sigma}{\sqrt{\pi}}$.

解: (1) 设 $U = \alpha X + \beta Y$, $V = \alpha X - \beta Y$, 期望为

$$E(U) = E(\alpha X + \beta Y) = \alpha E(X) + \beta E(Y) = \alpha\mu + \beta\mu = (\alpha + \beta)\mu$$

$$E(V) = E(\alpha X - \beta Y) = \alpha E(X) - \beta E(Y) = \alpha\mu - \beta\mu = (\alpha - \beta)\mu$$

由于 X 和 Y 独立同分布:

$$\mathrm{Var}(U) = \mathrm{Var}(\alpha X + \beta Y) = \alpha^2 \mathrm{Var}(X) + \beta^2 \mathrm{Var}(Y) = (\alpha^2 + \beta^2)\sigma^2$$

$$\mathrm{Var}(V) = \mathrm{Var}(\alpha X - \beta Y) = \alpha^2 \mathrm{Var}(X) + \beta^2 \mathrm{Var}(Y) = (\alpha^2 + \beta^2)\sigma^2$$

U, V 的协方差为

$$\begin{aligned} &\operatorname{Cov}(U, V) = \operatorname{Cov}(\alpha X + \beta Y, \alpha X - \beta Y) \\ =&\alpha^2 \operatorname{Cov}(X, X) - \beta^2 \operatorname{Cov}(Y, Y) = \alpha^2\sigma^2 - \beta^2\sigma^2 = (\alpha^2 - \beta^2)\sigma^2 \end{aligned}$$

相关系数

$$\rho_{UV} = \frac{\operatorname{Cov}(U, V)}{\sqrt{\operatorname{Var}(U)\operatorname{Var}(V)}} = \frac{(\alpha^2 - \beta^2)\sigma^2}{\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2)\sigma^2(\alpha^2 + \beta^2)\sigma^2}} = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2}$$

由于 X 和 Y 独立同分布且均为正态分布，U 和 V 也是正态分布的线性组合，因此 (U, V) 也是二维正态分布，参数为

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} (\alpha + \beta)\mu \\ (\alpha - \beta)\mu \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} (\alpha^2 + \beta^2)\sigma^2 & (\alpha^2 - \beta^2)\sigma^2 \\ (\alpha^2 - \beta^2)\sigma^2 & (\alpha^2 + \beta^2)\sigma^2 \end{pmatrix}$$

$$f_{\xi,\eta}(u, v) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\det(\boldsymbol{\Sigma})}} \exp\left(-\frac{1}{2}((\boldsymbol{u}; \boldsymbol{v}) - \boldsymbol{\mu})^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1}((\boldsymbol{u}; \boldsymbol{v}) - \boldsymbol{\mu})\right)$$

(2) 令 $X_1 = \frac{X-\mu}{\sigma}, Y_1 = \frac{Y-\mu}{\sigma}$， X_1, Y_1 均服从标准正态分布，$\max\{X, Y\} = \mu + \sigma \max\{X_1, Y_1\}$. 注意到

$$\max\{X_1, Y_1\} = \frac{1}{2}(X_1 + Y_1 + |X_1 - Y_1|)$$

由于 $X_1 - Y_1 \sim N(0, 2)$,

$$E|X_1 - Y_1| = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |x| \exp\left\{-\frac{x^2}{4}\right\} dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}}$$

因此 $E(\max\{X, Y\}) = \mu + \frac{\sigma}{\sqrt{\pi}}$.