图论

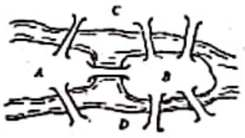
第一讲：图的基本概念

方聪

2024 年秋季

起源

图论最早的起源是 1736 年 Euler 考虑的
哥尼斯堡七桥问题：有四块被河流分隔开的陆地，它们间有下面左图的七座桥相连。问：能否从某一块陆地出发通过每座桥恰好一次最后又回到原来的那块陆地
将上面四块陆地分别如图标号为 A,B,C,D. 如果两块陆地间有座桥相连，就在相应两点间连条边 (表示那桥)，如此得上面右图。问题化为能否从某个顶点出发，经过每条边各一次又回到那个顶点



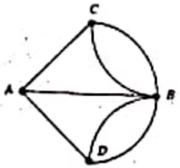


图 1: 起源

无序积

无序积: 设 A, B 为任意的两个集合，称 $\{(a, b) | a \in A \wedge b \in B\}$ 为 A 与 B 的无序积，记为 $A \& B$

- 无序积允许 $a = b$
- 对任意的 a 和 b: $(a, b) = (b, a)$

无向图

无向图：无向图是一个有序的二元组 $\langle V, E \rangle$，记作 G

- $V \neq \emptyset$，称为顶点集，其元素为顶点或结点
- E 称为边集，是无序积 $V \& V$ 的多重子集，其元素称为无向边，简称边

多重集：允许元素重复出现的集合，其中某元素出现次数称为重复度

无向图例：$D = \langle V, E \rangle, V = \{a, b, c, d\}$,
$E = \{(a, a), (a, b), (b, c), (b, c), (b, c)\}$

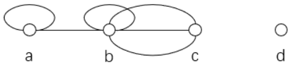


图 2: 无向图

有向图

有向图：有向图是一个有序二元组 $\langle V, E\rangle$，记作 D

- 顶点集 $V \neq \emptyset$，其元素称为结点/顶点
- 边集 E 是卡氏积 $V \times V$ 的多重子集，其元素称为边

卡氏积（笛卡尔积）：$A \times B = \{\langle x, y\rangle | x \in A \wedge y \in B\}$，$\langle x, y\rangle$ 有序

有向图例：

$D = \langle V, E\rangle, V = \{a, b, c\}, E = \{\langle a, a\rangle, \langle a, b\rangle, \langle b, a\rangle, \langle b, a\rangle, \langle c, b\rangle\}$

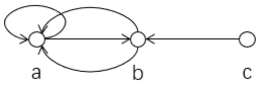


图 3: 有向图

图的表示方法

- 对于无向图 G：用 $V(G), E(G)$ 分别表示图 G 的顶点集和边集，用 $e_k = (v_i, v_j)$ 表示边
- 对于有向图 D：用 $V(D), E(D)$ 表示其顶点集和边集，用 $e_k = \langle v_i, v_j \rangle$ 表示边
- $|V(G)|, |E(G)|, |V(D)|, |E(D)|$ 分别表示 G 和 D 的顶点数和边数

特殊的图定义

- n 阶图: $|V(G)| = n$ 或 $|V(D)| = n$
- 有限图： $|V(G)|$ 和 $|E(G)|$ 均为有限数
- 零图: $E = \emptyset$
- n 阶零图:

特殊的图定义

- n 阶图: $|V(G)| = n$ 或 $|V(D)| = n$
- 有限图：$|V(G)|$ 和 $|E(G)|$ 均为有限数
- 零图: $E = \emptyset$
- n 阶零图: $|V(G)| = n$ 的零图，记为 N_n
- 平凡图：1 阶零图，N_1
- 空图：$V = E = \emptyset$

点与边的关联

- 关联：在无向图 G 中，边 $e_k = (vi, vj)$，则称 e_k 与 v_i (e_k 与 v_j) 彼此关联
- 关联次数：$v_i \neq v_j$，称 e_k 与 v_i (e_k 与 v_j) 关联次数为 1；若 $v_i = v_j$，关联次数为 2

点与边的关联

- 关联：在无向图 G 中，边 $e_k = (vi, vj)$，则称 e_k 与 v_i (e_k 与 v_j) 彼此关联
- 关联次数： $v_i \neq v_j$，称 e_k 与 v_i (e_k 与 v_j) 关联次数为 1；若 $v_i = v_j$，关联次数为 2
- 环：只与一个顶点关联的边
- 孤立点：无边关联的点

对于有向图 G，边 $e_k = \langle v_i, v_j \rangle$，称 v_i, v_j 为 e_k 的端点，其中 v_i 为始点，v_j 为终点

边 (a, a) 和顶点 a 的关联次数为 2，边 (a, b) 和顶点 a 的关联次数为 1。a 有环，d 是孤立点。

相邻

- 相邻: 对于无向图 G, 任意两顶点 v_i, v_j 之间存在边 e_k，$e_k = (v_i, v_j)$，称 v_i, v_j 彼此相邻 (点与点)
- 边相邻：任意两边 e_k, e_l, 至少存在一个公共端点，称 e_k, e_l 彼此相邻（边与边）
- 邻接: 对于有向图 D 任意两顶点 v_i, v_j 之间存在边 e_k，$e_k = \langle v_i, v_j \rangle$，称 v_i 邻接到 v_j，v_j 邻接于 v_i
- 平行边:
  - 端点相同的两条无向边是平行边
  - 起点与终点相同的两条有向边是平行边

b c 有平行边

- 邻域：称 $N_G(v)=\{u|u\in V(G)\wedge(u,v)\in E(G)\wedge u\neq v\}$ 为 v 的邻域（v 在图 G 中的相邻顶点）
- 闭邻域：$N_G(v)\cup v$
- 关联集：$I_G(v)=\{\text{e}|\text{e}$ 与 v 关联$\}$
- 后继：$\Gamma_D^+(v)=\{u|u\in V(D)\wedge\langle v,u\rangle\in E(D)\wedge u\neq v\}$
- 前驱：$\Gamma_D^-(v)=\{u|u\in V(D)\wedge\langle u,v\rangle\in E(D)\wedge u\neq v\}$
- 邻域：$N_D(v)=\Gamma_D^+(v)\cup\Gamma_D^-(v)$
- 闭邻域：$N_D(v)\cup v$

- 在无向图2中，a 的邻域为 $N_G(a) = \{b\}$，闭邻域为 $\{a, b\}$，关联集为 $I_G(a) = \{(a, a), (a, b)\}$。$b$ 的邻域为 $N_G(b) = \{a, c\}$，闭邻域为 $\{a, b, c\}$，关联集为 $I_G(b) = \{(a, b), (b, b), (b, c), (b, c), (b, c)\}$。$c$ 的邻域为 $N_G(c) = \{b\}$，闭邻域为 $\{b, c\}$，关联集为 $I_G(c) = \{(b, c), (b, c), (b, c)\}$。$d$ 的邻域为 $N_G(d) = \emptyset$，闭邻域为 $\{d\}$，关联集为 $I_G(d) = \emptyset$。

- 在有向图3中，a 的后继为 $\Gamma_D^+(a) = \{a, b\}$，前驱为 $\Gamma_D^-(a) = \{b\}$，邻域为 $N_D(a) = \{b\}$，闭邻域为 $\{a, b\}$。b 的后继为 $\Gamma_D^+(b) = \{a\}$，前驱为 $\Gamma_D^-(b) = \{a, c\}$，邻域为 $N_D(a) = \{a, c\}$，闭邻域为 $\{a, b, c\}$。c 的后继为 $\Gamma_D^+(c) = \{b\}$，前驱为 $\Gamma_D^-(c) = \emptyset$，邻域为 $N_D(a) = \{b\}$，闭邻域为 $\{b, c\}$。

顶点的度数

- 度 $d_G(v)$：v 作为 G 中边的端点的次数之和
- 出度 $d_D^+(v)$：v 作为 D 中边的始点的次数之和
- 入度 $d_D^-(v)$：v 作为 D 中边的终点的次数之和
- 度 $d_D(v) = d_D^+(v) + d_D^-(v)$

最大 (出/入) 度, 最小 (出/入) 度

- 最大度: $\Delta(G) = \max\{d_G(v) | v \in V(G)\}$
- 最小度: $\delta(G) = \min\{d_G(v) | v \in V(G)\}$
- 最大出度: $\Delta^+(D) = \max\{d_D^+(v) | v \in V(D)\}$
- 最小出度: $\delta^+(D) = \min\{d_D^+(v) | v \in V(D)\}$
- 最大入度: $\Delta^-(D) = \max\{d_D^-(v) | v \in V(D)\}$
- 最小入度: $\delta^-(D) = \min\{d_D^-(v) | v \in V(D)\}$

简记为 $\Delta, \delta, \Delta^+, \delta^+, \Delta^-, \delta^-$

- 在无向图2中，度 $d_G(a) = 3, d_G(b) = 6, d_G(c) = 3, d_G(d) = 0$，最大度 $\Delta = 6$，最小度 $\delta = 0$。

- 在有向图3中，出度 $d_D^+(a) = 2, d_D^+(b) = 2, d_D^+(c) = 1$，入度 $d_D^-(a) = 3, d_D^-(b) = 2, d_D^-(c) = 0$，度 $d_G(a) = 5, d_G(b) = 4, d_G(c) = 1$，最大 (出/入) 度, 最小 (出/入) 度分别为 $\Delta = 5, \delta = 1, \Delta^+ = 2, \delta^+ = 1, \Delta^- = 3, \delta^- = 0$。

图论基本定理

定理

设 $G = \langle V, E \rangle$ 是无向图，$V = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$，$|E| = m$，则

$$d(v_1) + d(v_2) + \cdots + d(v_n) = 2m$$

证明.

每一条边均有两个端点，提供 2 度，m 条边一共提供 $2m$ 度 $\square$

图论基本定理

定理

设 $D=\langle V,E\rangle$ 是有向图，$V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$，$|E|=m$，则

$$d^+(v_1)+d^+(v_2)+\cdots+d^+(v_n)=d^-(v_1)+d^-(v_2)+\cdots+d^-(v_n)=m$$

推论

任何图中，奇数度顶点的个数是偶数

简单图与度数列

简单图：无环，无平行边的图，若 G 是简单图，则 $0 \leq \Delta(G) \leq n-1$

度数列：设 $G = \langle V, E \rangle$，$V = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$，称 $d = (d(v_1), d(v_2), \cdots, d(v_n))$ 为 G 的度数列

可图化

可图化：设非负整数列 $d = (d_1, d_2, \cdots, d_n)$，若存在图 G，使得 G 的度数列是 d，则称 d 为可图化的

定理 (可图化的充要条件)

非负整数列 $d = (d_1, d_2, \cdots, d_n)$ 是可图化的，当且仅当 $d_1 + d_2 + \cdots + d_n = 0 \pmod 2$

证明.

$(\Rightarrow)$ 握手定理
$(\Leftarrow)$ 奇数度点两两之间连一边，剩余度用环来实现 $\square$

例：下面给出的两个整数列，哪个是可图化的？

1. $d=(5,4,4,3,3,2)$; 2. $d=(5,3,3,2,1)$.

例：下面给出的两个整数列，哪个是可图化的？

1. $d = (5,4,4,3,3,2)$; 2. $d = (5,3,3,2,1)$.

1. $\sum_{i=1}^{6} d_i = 1 (\mathrm{mod}\ 2)$，$d$ 不可图化。
2. $\sum_{i=1}^{5} d_i = 0 (\mathrm{mod}\ 2)$，$d$ 是可图化的。以 d 为度数列的图可以有多个。

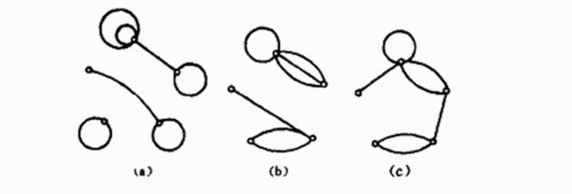


图 4:

图同构

图同构: 设图 $G_1 = \langle V_1, E_1 \rangle$, $G_2 = \langle V_2, E_2 \rangle$，若存在双射 $f : V_1 \to V_2$，满足

$$\forall u \in V_1, v \in V_1, (u, v) \in E_1, \exists (f(u), f(v)) \in E_2$$

且 $\langle u, v \rangle$ 与 $\langle f(u), f(v) \rangle$ 重数相同，则称 G_1 与 G_2 同构，记作 $G_1 \cong G_2$

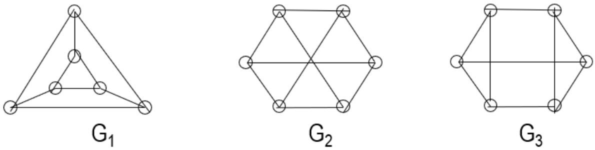
同构关系

同构关系是全体图集合上的二元关系

- 自反的
- 对称的
- 传递的

同构关系是等价关系

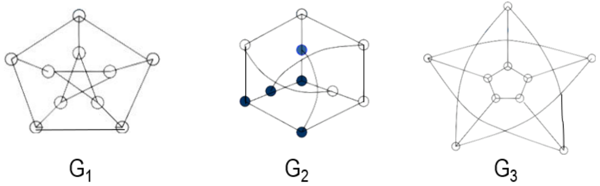
同构示例



$$G_1 = G_3, \quad G_1 \neq G_2$$

图 5: 同构示例

同构示例



彼得森(Peterson)图

$$G_1 = G_2 = G_3$$

图 6: 同构示例

图族

- 完全图，有向完全图，竞赛图
- 正则图：柏拉图图，彼德森图，库拉图斯基图
- r 部图，二部图（偶图），完全 r 部图
- 路径，圈

完全图

每个顶点均与其余的 $n-1$ 个顶点相邻，记作 K_n

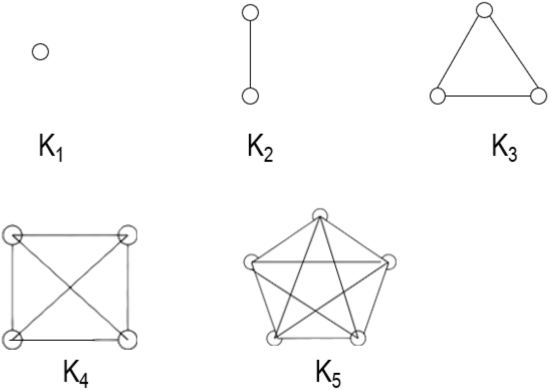


图 7: 完全图

有向完全图

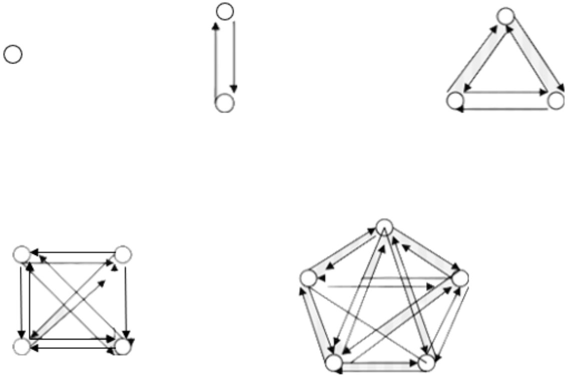


图 8: 有向完全图

竞赛图

N 阶有向简单图，任意两节点之间只有一条有向边

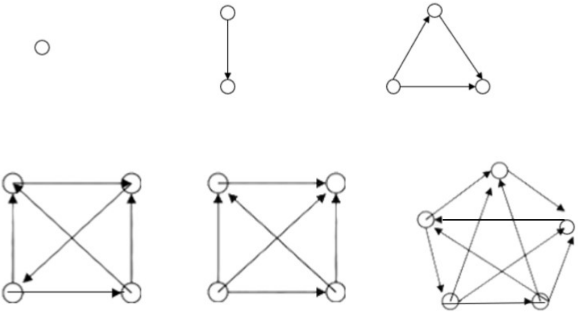


图 9: 竞赛图

正则图

- k 正则图：$v = V(G), d(v) = k, k = 0, 1, 2, \cdots$
- 完全图 K_n 是 $n-1$ 正则图 $(n = 1, 2, 3, ...)$

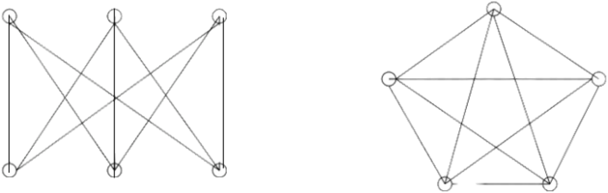


图 10: 正则图

柏拉图图

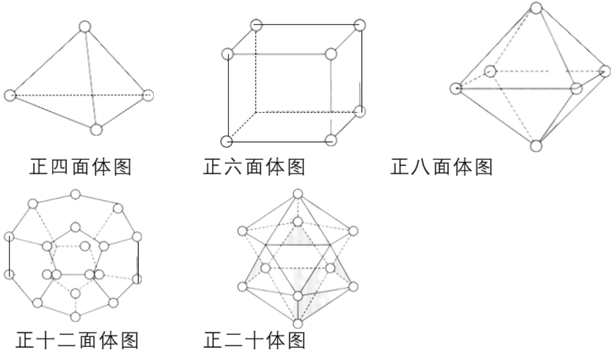


图 11: 柏拉图图

彼得森图

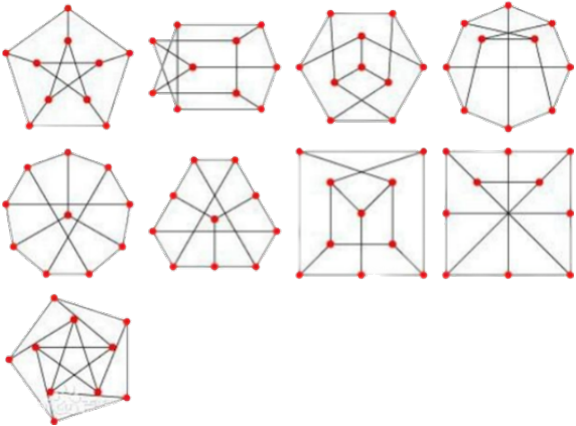


图 12: 彼得森图

库拉图斯基图

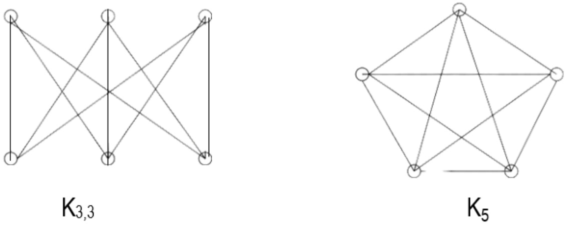


图 13: 库拉图斯基图

r 部图

r 部图：$G=\langle V,E\rangle$，若 V 分成 r 个互不相交的子集，使得 G 中任何一条边的两个端点都不在同一个 V_i 中，即 $V=V_1\cup V_2\cdots\cup V_r, V_i\cap V_j=\emptyset(i\neq j), E\subseteq\bigcup(V_i\&V_j)$，也记作 $G=\langle V_1,V_2,\cdots,V_r;E\rangle$

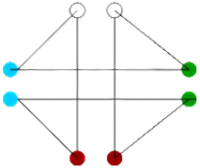


图 14: r 部图

二部图

二部图：$G = \langle V_1, V_2; E \rangle$，也称为偶图

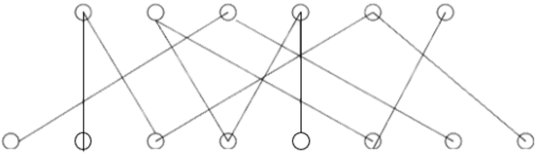


图 15: 二部图

完全 r 部图

$K_{n_1,n_2,\cdots,n_r}$: V_i 中任一个顶点均与 $V_j (i \neq j)$ 所有顶点相邻

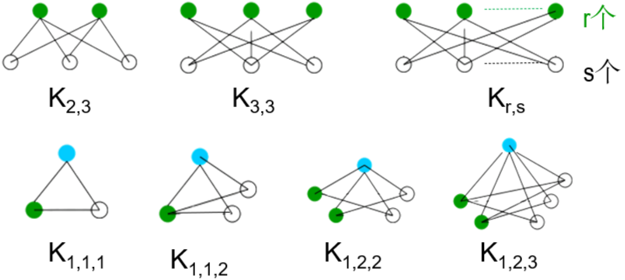


图 16: 完全 r 部图

子图，生成子图

- 子图：设 $G=\langle V,E\rangle, G^{'}=\langle V^{'},E^{'}\rangle$，若 $V^{'}\subseteq V$ 且 $E^{'}\subseteq E$，则称 $G^{'}$ 是 G 的子图，记为 $G^{'}\subseteq G$
- 真子图：$V^{'}\subset V$ 或 $E^{'}\subset E$
- 生成子图：$V^{'}=V$

导出子图

导出子图: 设 $G = \langle V, E \rangle$,

- 若 $V_1 \subset V$，以 G 中两个端点都在 V_1 中的边组成边集 E_1 的图，即 $E_1 = E \cap (V_1 \& V_1)$，$G[V_1] = \langle V_1, E_1 \rangle$ 为由 V_1 导出的子图
- 若 $\emptyset \neq E_1 \subset E$，以 E_1 中的边关联的点为顶点集 V_1，则称 $G[E_1] = \langle V_1, E_1 \rangle$ 为由 E_1 导出的子图

导出子图

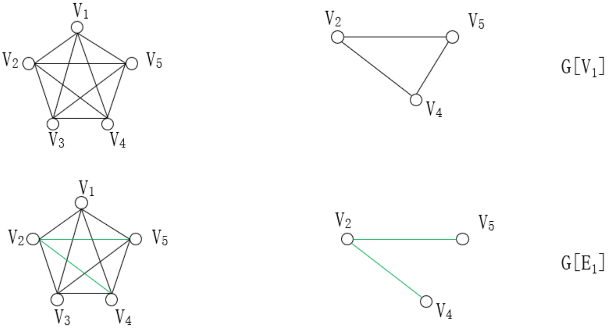


图 17: 导出子图

补图

补图：以 V 为顶点集，以使 G 成为 n 阶完全图的所有添加边组成的集合为边集的图，为 G 的补图，即

$G = \langle V, E \rangle, \overline{G} = \langle V, E(K_n) - E \rangle$

自补图:$G \cong \overline{G}$

例：五边形的补图是五角星，五边形是自补图

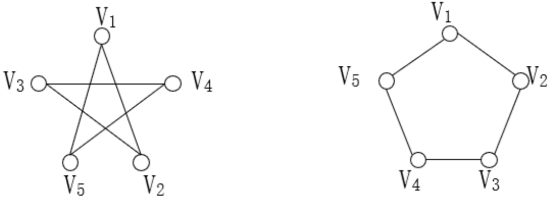


图 18: 补图