

20240304作业

1. 确定积分的正负性: $\int_0^{2\pi} x(\sin x)^{2n+1} dx$.
2. 计算积分: $\int_0^a \arctan \sqrt{\frac{a-x}{a+x}} dx \quad (a > 0)$.
3. 计算积分: $\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1} dx$.
4. 设函数 $f(x) \in D[a, b]$, $f'(x) \in R[a, b]$. 证明
 - (1) 对任意的 $x \in [a, b]$, 有 $|f(x)| \leq \left| \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right| + \int_a^b |f'(x)| dx$.
 - (2) 当 $f(a) \neq f(b)$ 时, 上式成立严格不等式.
5. 设 $f(x) \in C^1[a, b]$, 且 $f(a) = f(b) = 0$, $\int_a^b f^2(x) dx = 1$,
证明 $\int_a^b [f'(x)]^2 dx \cdot \int_a^b [xf(x)]^2 dx \geq \frac{1}{4}$.
6. 证明对 $\forall x > 0$, 存在唯一的 $\xi_x > 0$ 使得 $\int_0^x e^{t^2} dt = xe^{\xi_x^2}$ 成立; 并求 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\xi_x}{x}$.
7. 计算 $I = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx$.
8. 计算 $I = \int_0^1 \left[\sqrt[7]{1-x^3} - \sqrt[3]{1-x^7} \right] dx$.
9. 计算极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x t|\sin t| dt}{x^2}$.