2300012929 尹锦词

1. 算法：记 $f(x, d, v)$ 为[以 x 为根子树，x 距 S 最近 dist 为 d，子树内未被 S 覆盖点最深深度为 v 的最小覆盖点数]

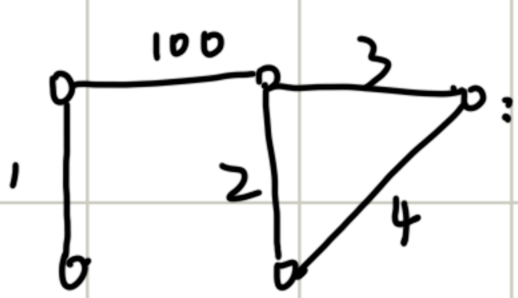
对 x 为叶子/初态：
$$f(x, +\infty, 1) = 0$$
$$f(x, 0, 0) = 1$$
其余 $f = +\infty$

对 x 与儿子 y 合并：
$$f(x, d, v) \leftarrow \min\{ f(y, d', v') + f(x, d'', v'') \mid \min(d'+1, d'') = d,\ \max(v'+1, v'') = v \}$$

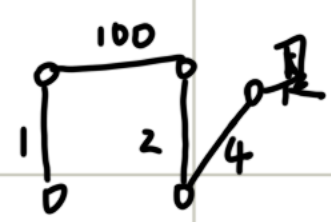
正确性：$f(x, d, v)$ 为最优子结构，每次转移都是枚举所有可能，可由归纳证明。

时间：共 $O(nK^2)$ 个子问题，转移复杂度 $O(nK^4)$

2. 1) No.

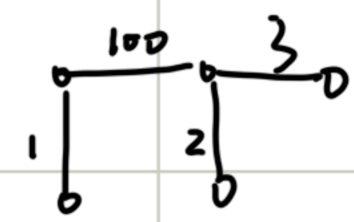


：



是 minimum-bottleneck spanning tree.

但非最小生成树（



）

2) Yes. 证明：对图 G 的最小生成树 T，若 T 并非最小瓶颈生成树，

则 ∃ T' s.t. 是树且所有边 < T 最大边

对 T 中最大树边 $e = (u, v)$。

在 T' 一定可以找到 (x, y) 横跨 (u, v)。

在 T 上连 (x, y)，形成环（包含 (u, v) 边），进而可替换 (u, v)。

形成更小边权的生成树，这与 T 是最小生成树相矛盾。

3\. 1) 设 j-划分中的最小横跨边 $e=(u,v)$

如果 e 不在 k-最小森林中，对于该森林：

① u,v 在同一树中. 连上 e，(u,v) 上的边一定存在边权 > e 的，与最小矛盾

② u,v 不在同一树中，因 j > k. 该森林中一定存在是 j 划分的横跨边还在树上的. 将其换成 e，可得最小森林.

∴ e 一定在 k-最小森林中.

2) 算法：将所有边排序(从小到大). 依次检验能否加入森林中. 直到形成 k-森林.

正确性：每次都是从横跨边中选最小的进行加入. 而最小的一定在最后的 k-最小森林.

复杂度：$O(m\log m)$. 排序复杂度.

4\. 算法：solve(x) 为将 x 为根子树调整到叶子距 x 等长的最优方案，同时返回叶子距 x 深度.

x 为叶子：返回 0 即可.

非叶：令 $t=\max\limits_{(y,w)\in son_x}\{solve(y)+w\}$.

将所有儿子的边调整到满足 t 距离. 返回 t.

正确性：① 所有叶子最后距根的深度即为初始时最深叶子（无法缩短边）.

② 在此基础上，每个子树的叶子距其根深度相同.

因此方案下界为 $\sum\limits_{x\neq root}\{fa_x$ 中最深叶子深度 $-$ x 最深叶子深度 $- w_{(x,fa_x)}\}$

③ 该方案刚好得到下界.

时间：$O(n)$