图论

第五讲：欧拉图与哈密顿图

方聪

2024 年秋季

1. 欧拉图

1 欧拉图

七桥问题

哥尼斯堡七桥问题：一个散步者如何不重复的走完七桥，并最终回到出发点？

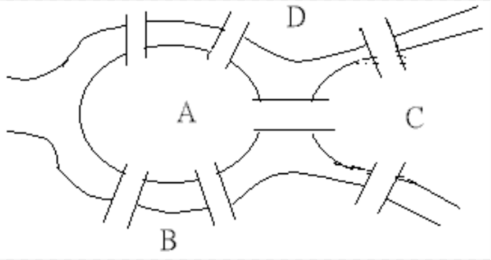

图 1: 七桥问题

Leonhard Euler

Leonhard Euler $(1707 \sim 1783)$:

- 人类有史以来最多产的数学家
- 1736 年，“七桥问题”，图论和拓扑学诞生

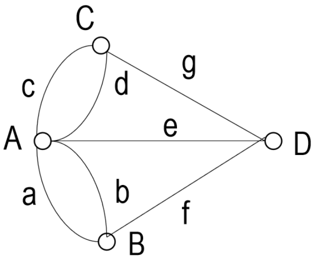

图 2: Leonhard Euler

欧拉通路、欧拉回路

定义 (欧拉通路)

经过图中所有边一次且仅一次，行遍所有顶点的通路称为欧拉通路。根据定义可知，欧拉通路是经过所有边的简单通路并且是生成通路（经过所有顶点的通路）

定义 (欧拉回路)

经过图中所有边一次且仅一次，行遍所有顶点的回路称为欧拉回路。欧拉回路是经过所有边的简单生成回路

欧拉图和半欧拉图

定义 (欧拉图)

有欧拉回路的图

定义 (半欧拉图)

有欧拉通路但无欧拉回路的图

规定：平凡图为欧拉图

无向欧拉图的充分必要条件

定理

设 G 是无向连通图，则以下命题等价

- G 是欧拉图
- G 中所有顶点都是偶数度
- G 是若干个边不交的圈的并

证明.

(1)⇒(2)：设 G 是 n 阶、m 条边的无向图，若 G 是平凡图，结论成立；若 G 是非平凡图，因为 G 是欧拉图，所以存在欧拉回路，设 C 为 G 中一条欧拉回路，$C = v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \cdots e_{m-1} v_{m-1} e_m v_0$，对于任意 v，在 C 中出现一次就获 2 度，若总共 k 次经过顶点 v，则 $d(v) = 2k$，即 v 的度数为偶数 $\square$

无向欧拉图的充分必要条件

证明.

(2)⇒(3)：对 G 的边数 m 应用数学归纳法。当 $m=1$ 时，G 为一个环，结论成立。由于 G 连通且无奇数顶点可知 G 中存在圈，设 C 为 G 中一个圈，令 $G' = G - E(C)$，则 G' 有 s $(s \geq 1)$ 个连通分支 $G_1, \cdots, G_s$（可能有的连通分支为平凡图） □

则 G_i 的边数 $m_i \leq k$，且顶点的度仍为偶数，由归纳假设知：
$G_r = \bigcup_{i=1}^{d_r} C_{ri}, r = 1, 2, ..., s$. 其中
$E(C_{ri}) \bigcap E(C_{rt}) = \emptyset, i, t = 1, 2, ..., d, i \neq t, r = 1, 2, ..., s$, 并且
$E(C_{ri}) \bigcap E(C_{tj}) = \emptyset, r, t = 1, 2, ...s, r \neq t, i = 1, 2, ...d_r, j = 1, 2, ...d_t$. 因此 $G = C \bigcup G' = C \bigcup \left(\bigcup_{t=1}^{s} \bigcup_{i=1}^{d_t} C_{ti} \right)$ 为边不重的圈的并

无向欧拉图的充分必要条件

证明.

(3)⇒(1)：对 G 中的圈的个数 d 应用数学归纳法。$d=1$ 时，$G=C_1$，则 C_1 为 G 的欧拉回路，G 为欧拉图。
假如结论对 $d \le k$ 成立，考虑 $d=k+1$ 的情况，设 $G_1' = \bigcup_{i=1}^{k+1} C_i - E(C_{k+1})$ 并且设 G_1' 有 s 个连通分支 $G_1, \cdots, G_s$，由于 G 为若干个边不重的圈的并，可知 G_i 为若干个边不重的圈的并或为平凡图，由归纳假设知 G_i 为欧拉图，设 $\tilde{C}_i$ 为 G_i 中的欧拉回路，由 G 的连通性知 C_{k+1} 与 $\tilde{C}_i$ 均有公共顶点，设 $v_{(k+1),i}$ 为 C_{k+1} 与 $\tilde{C}_i$ 的一个公共顶点，规定一种走法：从 C_{k+1} 的某一顶点出发开始行遍，当遇到 $v_{(k+1),i}$ 时，先行遍 $\tilde{C}_i$，再继续行遍，最后回到原始出发点，得到回路 C，它经过 G 中每条边一次并且行遍 G 的所有顶点，因此 C 为 G 中欧拉回路，所以 G 为欧拉图 □

例图

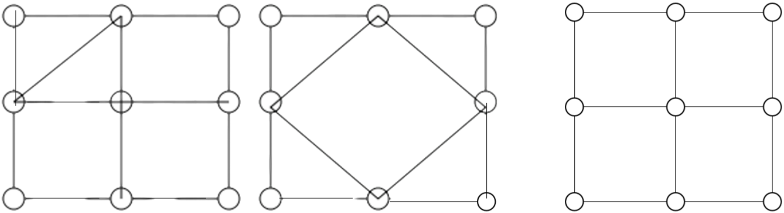

图 3: 例图

无向半欧拉图的充分必要条件

定理

设 G 是无向连通图，则以下命题等价

- G 是半欧拉图
- G 中恰有 2 个奇度顶点

证明.

$\Rightarrow$ 设 G 为半欧拉图，存在欧拉通路 $C = v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \cdots e_{m-1} v_{m-1} e_m v_m$，欧拉通路的起点和终点是奇数度，其余顶点都是偶数度

$\Leftarrow$ 在两个奇数度顶点之间加 1 条新边所有顶点都是偶数度，得到欧拉回路。从欧拉回路上删除所加边后，得到欧拉通路 □

欧拉图

例 1：设 G 是恰有 $2k$ 个奇度顶点的连通图，证明 G 中存在 k 条边不重的简单通路 $P_1 \cdots P_k$，使得 $E(G) = \bigcup_{i=1}^{k} E(P_i)$

证明.

归纳

- $k = 1$ 时，G 中恰好有两个奇度顶点，可知 G 为半欧拉图，其欧拉通路满足条件；
- 设 $k = r$ 时结论为真，$k = r + 1$ 时，设奇度顶点为 $v_1, v_1^{'} \cdots v_{r+1}, v_{r+1}^{'}$，在 G 中加边 $(v_{r+1}, v_{r+1}^{'})$ 得 $G^{'}$ 为具有 $2r$ 个奇度顶点的图，根据归纳假设存在 r 个边不重的简单通路使得 $E(G^{'}) = \bigcup_{i=1}^{r} E(P_i)$

□

欧拉图

证明.

同一简单通路最多含两个奇度顶点，因此 $P_1, \cdots, P_r$ 各自含两个奇度顶点且为通路的始点和终点。又存在某个 P_i 含有新加边 (v_{r+1}, v'_{r+1})，则 $P_i - (v_{r+1}, v'_{r+1})$ 产生两条边不重的简单通路，因此 $E(G)$ 由 $r+1$ 条边不重的简单通路组成 □