AI 中的数学 第六次作业

2300012929 尹锦润

教材 3.21

$\left|\frac{\partial(U,V)}{\partial(X,Y)}\right| = 2(v^2+1)$，而 X, Y 有联合密度

$$p_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi}\exp\{-\frac{x^2+y^2}{2}\}$$

于是 U, V 联合密度为

$$p_{U,V}(u,v) = p_{X,Y}(x,y)\frac{1}{|J|} = \frac{1}{4\pi(v^2+1)}\exp\{-\frac{u}{2}\} = \left(\frac{1}{4\pi(v^2+1)}\right)\left(\exp\{-\frac{u}{2}\}\right)$$

因此独立。

教材 3.22

$$E(XY) = \iint xy\frac{1}{2}\mathrm{dxdy} = 1$$

$$E(X^2Y^2) = \iint x^2y^2\frac{1}{2}\mathrm{dxdy} = \frac{13}{9}$$
$$var(XY) = E(X^2Y^2) - E(XY)^2 = \frac{4}{9}$$

教材 3.23

$$var(XY) = EX^2EY^2 - (EX)^2(EY)^2 = ((EX)^2 + varX)((EY)^2 + varY) - (EX)^2(EY)^2 = varX(EY)^2 + varY(EX)^2 + varXvarY$$

最后三项中前面两项都 $\geqslant 0$，因此 $var(XY) \geqslant varXvarY$。

教材 3.24

每个区被选中的概率为 $\frac{1}{n}$，对于某个人数为 t 的区，其被选中的人数 X 满足

$$E_X(x) = \frac{tr}{n}$$

X^2 满足

$$E_{X^2}(x) = \frac{rt^2}{n}$$

因此 $E(X_1+\cdots+X_r) = \sum_j \frac{n_j x_j}{n} = mr$。

对于人数为 n_i, n_j 的两个区，选中人数为 X, Y 有

$$E_{XY}(xy) = 2\frac{r(r-1)}{n(n-1)} t_i t_j$$

因此

$$\begin{aligned} E((X_1+\cdots+X_r)^2) &= r\sum_j \frac{n_j x_j^2}{n} - r(r-1)\sum_j \frac{n_j x_j^2}{n(n-1)} + r(r-1)\sum_{i,j}\frac{n_i n_j x_i x_j}{n(n-1)} \\ &= r(\sigma^2+m^2) - r(r-1)\frac{\sigma^2+m^2}{n-1} + r(r-1)\frac{m^2 n}{n-1} = \frac{r(n-r)}{n-1}\sigma^2 + r^2 m \end{aligned}$$

因此 $var(X_1+\cdots+X_r) = E((X_1+\cdots+X_r)^2) - E(X_1+\cdots+X_r)^2 = \frac{r(n-r)}{n-1}\sigma^2$。

教材 3.25

考虑 $P_i = E\left(\frac{X_i}{X_1+\cdots+X_n}\right)$，由于对称性，有 $P_1 = P_2 = \cdots = P_n$，因此 $E\left(\frac{X_1+\cdots+X_k}{X_1+\cdots+X_n}\right) = \frac{k}{n}$。

教材 3.26

$\xi \sim N(m\mu, m\sigma^2)$，$\eta \sim N(n\mu, n\sigma^2)$，而 $cov(\xi,\mu) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n cov(X_i, X_j) = m\sigma^2$，因此有 $\rho(\xi,\mu) = \frac{m\sigma^2}{\sqrt{mn\sigma^2}} = \sqrt{m/n}$，进而联合密度为

$$P_{\xi,\mu}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{m(n-m)}\sigma}\exp\left\{-\frac{n}{2(n-m)}\left(\frac{(x-m\mu)^2}{m\sigma^2} + \frac{(y-n\mu)^2}{n\sigma^2} - 2\frac{(x-m\mu)(y-n\mu)}{n\sigma}\right)\right\}$$

教材 3.27

（1）$var(\alpha X+\beta Y) = var(\alpha X-\beta Y) = (\alpha^2+\beta^2)\sigma^2$，$cov(\alpha X+\beta Y, \alpha X-\beta Y) = (\alpha^2-\beta^2)\sigma^2$，

$\rho(\alpha X+\beta Y, \alpha X-\beta Y) = \frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}$。

因此联合密度为

$$p(u,v)=\frac{1}{2\pi(\alpha^2+\beta^2)\sigma^2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\{-\frac{(u-(\alpha+\beta)\mu)^2+(v-(\alpha-\beta)\mu)^2-2\rho(u-(\alpha+\beta)\mu)(v-(\alpha-\beta)\mu)}{2(1-\rho^2)(\alpha^2+\beta^2)\sigma^2}\}$$

（2）

令 $\eta=\frac{X-\mu}{\sigma},\xi=\frac{Y-\mu}{\sigma}$，令 $Z=\max\{X,Y\}=\max\{\sigma\eta+\mu,\sigma\xi+\mu\}=\sigma\max\{\eta,\xi\}+\mu$ 且 $\eta,\xi\sim N(0,1)$。

$$\begin{aligned}E(\max\{\eta,\xi\})&=2\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\pi}\exp\{-\frac{x^2}{2}\}\int_x^{+\infty}y\exp\{-\frac{y^2}{2}\}\mathrm{dxdy}\\&=2\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\pi}\exp\{-\frac{x^2}{2}\}\exp\{-\frac{x^2}{2}\}\mathrm{dx}\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\pi}\exp\{-x^2\}\mathrm{dx}\\&=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\end{aligned}$$

因此 $E(Z)=\mu+\frac{\sigma}{\sqrt{\pi}}$。

教材 3.28

（1）

$$P(x_1,x_2,\cdots,x_r)=\frac{m!}{x_1!x_2!\cdots x_r!}p_1^{x_1}p_2^{x_2}\cdots p_r^{x_r}$$

（2）

$$E(X_i)=\sum_{x=0}^{m}\binom{m}{x}p_i^x(1-p_i)^{m-x}x=mp_i$$

类似地有

$$E(X_j)=mp_j$$

对于

$$
\begin{aligned}
E(XY) = &\sum_{x=0}^{m}\binom{m}{x}p_i^x x\sum_{y=0}^{m-x}\binom{m-x}{y}p_j^y(1-p_i-p_j)^{m-x-y}y \\
=&p_j\sum_{x=0}^{m}\binom{m}{x}p_i^x(1-p_i)^{m-x-1}((m-1)x-x(x-1)) \\
=&p_j\left[m(m-1)\frac{p_i}{1-p_i}-m(m-1)\frac{p_i^2}{1-p_i}\right] \\
=&m(m-1)p_ip_j
\end{aligned}
$$

因此

$$
cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=-p_ip_j
$$

教材 3.29

见图片

$$E(X_1-E(X_1))^3 = E(X_1^3)-3E(X_1^2)E(X_1)+2E^3(X_1)=0$$

$$
\begin{aligned}
E(\eta) = E\Big(\sum_{i=1}^{n}(X_i-\xi)^2\Big) &= E\Big(\sum_{i=1}^{n}\big(X_i-\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}X_j\big)^2\Big) \\
&= nE\Big(\big(X_i-\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}X_j\big)^2\Big) \\
&= nE\Big(X_i^2-\frac{2}{n}X_i\sum_{j=1}^{n}X_j+\frac{1}{n^2}\big(\sum_{j=1}^{n}X_j\big)^2\Big) \\
&= nE(X_i^2)-2E\big(X_i\sum_{j=1}^{n}X_j\big)+\frac{1}{n}E\big(\sum_{j=1}^{n}X_j\big)^2 \\
&= nE(X_i^2)-2E(X_i^2)-2(n-1)E^2(X_1)+E(X_i^2)+\frac{n(n-1)}{n}E^2(X_1) \\
&= -(n-1)E(X_i^2)+(n-1)E^2(X_1) \\
&= (n-1)\big(E^2(X_1)-E(X_i^2)\big)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E(\eta\xi) = E\Big(\sum_{i=1}^{n}(X_i-\xi)^2\xi\Big) &= nE\big((X_1-\xi)^2\xi\big) \\
&= nE\Big(\big(X_1-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\big)^2\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}X_j\Big) \\
&= E\Big(\big(X_1^2-\frac{2}{n}X_1\sum_{i=1}^{n}X_i+\frac{1}{n^2}\big(\sum_{i=1}^{n}X_i\big)^2\big)\sum_{j=1}^{n}X_j\Big). \\
&= E\Big(X_1^3+X_1^2\sum_{j=2}^{n}X_j-\frac{2}{n}X_1\sum_{i=1}^{n}X_i\sum_{j=1}^{n}X_j+\frac{1}{n}\;X_1\sum_{j=1}^{n}X_j\sum_{k=1}^{n}X_k\Big) \\
&= E\Big(X_1^3+X_1^2\sum_{j=2}^{n}X_j-\frac{1}{n}X_1\sum_{i=1}^{n}X_i\sum_{j=1}^{n}X_j\Big) \quad \checkmark \\
&= E\Big(X_1^3+X_1^2\sum_{j=2}^{n}X_j-\frac{1}{n}X_1\big(X_1^2+2X_1\sum_{j=2}^{n}X_j+\big(\sum_{j=2}^{n}X_j\big)^2\big)\Big). \\
&= E(X_1^3)+(n-1)E(X_1^2)E(X_1)-\frac{1}{n}E(X_1^3)-\frac{2(n-1)}{n}E(X_1^2)E(X_1)-\frac{1}{n}E(X_1)\big[E(X_1^2)(n-1) \\
&\qquad +(n-2)(n-1)E^2(X_1)\big] \\
&= \frac{n-1}{n}E(X_1^3)+\big(n-1-\frac{2n-2}{n}-\frac{n-1}{n}\big)E(X_1^2)E(X_1)-\frac{(n-2)(n-1)}{n}E^3(X_1). \\
&= \frac{n-1}{n}\big(3E(X_1^2)E(X_1)-2E^3(X_1)\big)+\big(n-1-\frac{3(n-1)}{n}\big)E(X_1^2)E(X_1)-\frac{(n-2)(n-1)}{n}E^3(X_1) \\
&= (n-1)E(X_1^2)E(X_1)-(n-1)E^3(X_1) \\
&= (n-1)\big(E(X_1^2)-E^2(X_1)\big)E(X_1) = E(\eta)\cdot E(\xi)
\end{aligned}
$$

教材 3.30

$E(X)=0, E(X|X|)=0$，因此 $E(X|X|)-E(X)E(|X|)=0$，$X,|X|$ 不相关。

对于 $P(X=a\wedge|X|=b)=P(X=a)[|a|=b]\neq P(X=a)P(|X|=b)=P(A)(P(X=b)+P(X=-b))$，因此 $X,|X|$ 不独立。

$$cov(\sum_i a_iX_i,\sum_i a_iX_i)=\sum_{i,j}cov(a_iX_i,a_jX_j)=\sum_i cov(a_iX_i,a_iX_i)=\sum_i a_i^2\sigma_i^2$$

如果 $\exists i\ s.t.\ \sigma_i=0$，则令 $a_i=1,a_j=0,\forall i\neq j$，有最小方差为 0。

否则，考虑 $L(a_1,\cdots,a_n,\lambda)=\sum_i a_i^2\sigma_i^2+\lambda(\sum a_i-1)$，

$$\frac{\partial L}{\partial a_i}=2a_i\sigma_i^2+\lambda=0\Rightarrow a_i=-\frac{\lambda}{2\sigma_i^2}$$

进而可以得到 $\lambda=-\dfrac{2}{\sum\frac{1}{\sigma_i^2}}$，进而

$$a_i=\frac{\frac{1}{\sigma_i^2}}{\sum\frac{1}{\sigma_j^2}}$$

有方差最小值。

教材 3.31

令 $p_{i,j}$ 为 X 取 x_i，Y 取 y_j 的概率 $i,j\in\{1,2\}$。

因此

$$\begin{aligned}E(X)&=(p_{11}+p_{12})x_1+(p_{21}+p_{22})x_2\\E(Y)&=(p_{11}+p_{21})y_1+(p_{12}+p_{22})y_2\\E(XY)&=p_{11}x_1y_1+p_{12}x_1y_2+p_{21}x_2y_1+p_{22}x_2y_2=E(X)E(Y)\end{aligned}$$

进而可以得到

$$(p_{11}+p_{12})(p_{11}+p_{21})=p_{11}\Rightarrow P(X=x_1\wedge Y=y_1)=P(X=x_1)P(Y=y_1)$$

类似可得其余三个式子，进而推出 $\forall i,j\in\{1,2\}$，有 $P(X=X_i\wedge Y=y_j)=P(X=x_i)P(Y=y_j)$。

教材 3.33

$$\begin{aligned}E(\delta(a-X)\delta(b-Y))&=P(a\geqslant X\wedge b\geqslant Y)\\E(\delta(a-X))&=P(a\geqslant X)\\E(\delta(b-Y))&=P(b\geqslant Y)\end{aligned}$$

因此，有 $E(\delta(a-X)\delta(b-Y))=E(\delta(a-X))E(\delta(b-Y))\Leftrightarrow P(a\geqslant X\wedge b\geqslant Y)=P(a\geqslant X)P(b\geqslant Y)$，也就是 X,Y 互相独立。

教材 3.34

考虑交通车在第 i 个站停车的概率，$1-\left(\frac{6}{7}\right)^{25}$，因此停车期望次数是 $7\left(1-\left(\frac{6}{7}\right)^{25}\right)$。

教材 3.35

$P(X)$ 表示检测了 X 个人还没有出现阳性的概率，$P(x)=\dfrac{\dbinom{46}{x}}{\dbinom{50}{x}}$，因此在出现第一个阳性患者前，阴性反应者的平均人数是

$$\sum_{x=1}^{46}\frac{\binom{46}{x}}{\binom{50}{x}}=\sum_{x=1}^{46}\frac{(50-x)*\cdots*(47-x)}{50*49*48*47}=\frac{50*49*48*47*46/5}{50*49*48*47}=\frac{46}{5}$$