

人工智能中的数学讲义

方聪

北京大学

摘要

本讲义收录了人工智能中的数学课程中的主要概念与课程习题。概率与统计讲义内容摘录于陈家鼎、郑忠国《概率与统计》教材与复熹和张原概率与统计课程课件。图论内容摘录于耿素云、屈婉玲、王捍贫《离散数学教程》。本讲义版权归上述作者，不会出版。讲义仅供于上该课程的同学学习参考，讲义的错误会不断修正。感谢张乙沐、张海涵对讲义整理的帮助。

1.1 随机事件及其运算

1.1.1 随机事件

样本空间和样本点：随机实验 E 中所有可能结果组成的集合称为 E 的**样本空间**，记为 Ω 。样本空间中的元素称为**样本点**，记为 ω

- E_1 ：抛掷硬币，观察正面 H ，反面 T 出现的情况。

$$\Omega_1 = \{H, T\}.$$

- E_2 ：抛掷一枚硬币 3 次，观察正面 H ，反面 T 出现的情况。

$$\Omega_2 = \{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT\}.$$

- E_3 ：抛掷一枚硬币 3 次，观察正面出现的次数。

$$\Omega_3 = \{0, 1, 2, 3\}.$$

随机现象的某些样本点组成的集合称为**随机事件**，简称为事件，常用 A, B, C, \dots 表示

例如， E 为抛掷一枚骰子，事件 $A = \text{“出现奇数点”}$ ，即 $A = \{1, 3, 5\}$ ，是样本空间 $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 的一个子集

事件的频率：设 μ 是 n 次实验中事件 A 发生的次数，则事件 A 发生的频率 $\frac{\mu}{n}$ ，随着实验次数 n 增大，频率会在某一数值 p 附近摆动，称为该事件的**概率**，记为 $P(A) = p$

由于频率 $\frac{\mu}{n}$ 总在 $0, 1$ 之间，我们有：

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

例如投一枚硬币 n 次，出现 μ 次正面，则 $\frac{\mu}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} p$ 。其中，主观概率 p 为事件的置信度，概率是可能性大小的度量。大概率事情易发生，小概率事情不易发生。

1.1.1.1 事件的交和并

定义 2.1 设有事件 A 和事件 B ，如果 A 发生，则 B 必发生，那么称事件 B 包含事件 A （或称事件 A 在 B 中），并记为

$$A \subset B \text{ (或 } B \supset A)$$

定义 2.2 如果事件 A 包含事件 B ，同时事件 B 包含事件 A ，则事件 A 和事件 B 相等，并记为

$$A = B$$

定义 2.3 设 A 和 B 都是事件，则“ A 或 B ”表示这样的事件 C ： C 发生当且仅当 A 或 B 中至少有一个发生，该事件 C 叫做 A 与 B 的并，记为 $A \cup B$ 。

例 2.1（对应郑书例 2.1）在桌面上，投掷两枚匀称的硬币， A 表示“恰好一枚国旗朝上”， B 表示“两枚国旗朝上”， C 表示“至少一枚国旗朝上”，则 $C = A \cup B$ 。

对于并运算，有以下性质，我们恒记必然事件为 U ，不可能事件为 V ：

$$\begin{aligned} A \cup B &= B \cup A \\ A \cup U &= U, \quad A \cup V = V \end{aligned}$$

定义 2.4 设 A 和 B 都是事件，则“ A 且 B ”表示这样的事件 C ： C 发生当且仅当 A 和 B 都发生，该事件 C 叫做 A 与 B 的交，记为 $A \cap B$ ，也简记为 AB 。

在例 2.1 中， $A \cap C = A$ ， $B \cap C = C$ ， $A \cap B = A$

对于交运算，有以下性质：

$$\begin{aligned} A \cap B &= B \cap A \\ A \cap U &= A, \quad A \cap V = V \end{aligned}$$

1.1.1.2 事件的余和差

定义 2.5 设 A 是事件，称“非 A ”是 A 的对立事件（或称余是事件），其含义为，“非 A ”发生当且仅当 A 不发生，常常用 \bar{A} 表示“非 A ”，也用 A^c 表示“非 A ”。

由定义知 $\overline{\bar{A}} = A$ ， $\bar{U} = V$ ， $\bar{V} = U$

定义 2.6 设 A 和 B 都是事件，则两个事件的差“ A 减去 B ”表示这样的事件 C ： C 发生当且仅当 A 发生而 B 不发生，该事件 C 记为 $A - B$ （或 $A \setminus B$ ）

由定义知， $A - B = A \cap \bar{B}$

画图法确定关系。

1.1.1.3 事件运算的性质

事件的基本运算还有以下性质：

- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ “并”的结合律
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ “交”的结合律
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ 分配律
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ 分配律
- $A \cup A = A, A \cap A = A$
- $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ 对偶律
- $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ 对偶律

多个事件的交和并：

设 A_1, A_2, \dots, A_n 是 n 个事件，则“ A_1, A_2, \dots, A_n ”的并是指这样的事件：它发生当且仅当 A_1, A_2, \dots, A_n 中至少一个发生，常常用 $\bigcup_{i=1}^n A_i$ 表示 A_1, A_2, \dots, A_n 的并

设 A_1, A_2, \dots, A_n 是 n 个事件，则“ A_1, A_2, \dots, A_n ”的交是指这样的事件：它发生当且仅当 A_1, A_2, \dots, A_n 这 n 个事件都发生，常常用 $\bigcap_{i=1}^n A_i$ 表示 A_1, A_2, \dots, A_n 的交，也用 $A_1 A_2 \dots A_n$ 表示这个“交”

实际应用中，还需定义无穷多事件的并与交

设 $A_1, A_2, \dots, A_i, \dots$ 是一列事件，则 B 是指这样的事件： B 发生当且仅当这些 $A_i (i = 1, 2, \dots)$ 中至少一个发生，这个 B 叫做诸 A_i 的并，记为 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ ，有时也写为 $A_1 \cup A_2 \cup \dots$

设 $A_1, A_2, \dots, A_i, \dots$ 是一列事件，则 C 是指这样的事件： C 发生当且仅当这些 $A_i (i = 1, 2, \dots)$ 都发生，这个 C 叫做诸 A_i 的交，记为 $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ ，有时也写为 $A_1 A_2 \dots$

例：取 $X \in \mathbb{R}$ ，事件 A_i 为 $X \in [\frac{1}{i+1}, \frac{1}{i}]$ ，事件 B_i 为 $X \in [0, \frac{1}{i}]$ 。则事件 $\bigcup_{i=1}^n A_i$ 发生等价于 $X \in [\frac{1}{n+1}, 1]$ ，事件 $\bigcap_{i=1}^n B_i$ 发生等价于 $X \in [0, \frac{1}{n}]$ 。进而当 $n \rightarrow \infty$ 时事件 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ 发生等价于 $X \in (0, 1]$ ，事件 $\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i$ 发生等价于 $X = 0$ 。

并的更一般定义是，设 $\{A_a, a \in \Gamma\}$ 是一族事件（其中 Γ 是任何非空集，每个 $a \in \Gamma$ 对应一个事件 A_a ），这些事件 A_a 的“并”是指这样的事件 B ： B 发生当且仅当至少一个 A_a 发生，这个 B 常常记为 $\bigcup_{a \in \Gamma} A_a$ ，类似可以定义一族事件的交 $\bigcap_{a \in \Gamma} A_a$

例 2.3: (对应郑书例 2.3) 一射手向一个目标连续射击, 设 $A_1 =$ “第一次射击, 命中”, $A_i =$ “前 $i-1$ 次射击都未命中, 第 i 次射击命中” ($i = 2, 3, \dots$), $B =$ “终于命中”, 则 $B = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$

例 2.4: (对应郑书例 2.4) 一射手向一个目标连续射击, 设 $A_i =$ “第 i 次射击, 未命中目标” ($i = 2, 3, \dots$) 则 $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i =$ “每次均未命中目标”

不难验证, 对可列个事件的并和交有以下规律:

- $A \cup \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i \right) = \bigcap_{i=1}^{\infty} (A \cup B_i)$ 分配律
- $A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \right) = \bigcup_{i=1}^{\infty} (A \cap B_i)$ 分配律
- $\overline{\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right)} = \bigcap_{i=1}^{\infty} \overline{A_i}$ 对偶律
- $\overline{\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \right)} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{A_i}$ 对偶律

1.1.1.4 互斥事件

互不相容的事件

如果事件 A 和事件 B 不能都发生, 即 $A \cap B = \emptyset$, 则称 A 和 B 是互不相容的事件 (也称互斥的事件)

称事件 A_1, \dots, A_n 互不相容, 若对任何 $i \neq j (i, j = 1, \dots, n)$, A_i 与 A_j 互不相容

例如, 抛掷两枚硬币, 事件 “恰好一枚国徽朝上” 和事件 “两枚都是国徽朝上” 是互不相容的。不难看出, 对任何事件 A , A 和 \overline{A} 是互不相容的

- 加法公式: A_1, A_2, \dots 互不相容, 则:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

1.2 概率的公理化定义

概率空间子类: 设 Ω 为样本空间, \mathcal{F} 为 Ω 的一些子集构成的集类。若 \mathcal{F} 满足以下三个条件: (1) $\Omega \in \mathcal{F}$, (2) $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$, (3) $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$, 则称 \mathcal{F} 为概率空间子类

例:

- $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega\}$ 平凡概率空间子类
- $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega, A, \bar{A}\}$ 包含 A 的最小概率空间子类
- $\mathcal{F} = \{A | A \subset \Omega\}$ Ω 上的最大概率空间子类
- $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$, 则 Ω 所有子集构成的概率空间子类共有 2^n 个元素

定义: 设 \mathcal{F} 是满足上述条件的概率空间子集类。概率 $P = P(\cdot)$ 是 \mathcal{F} 上面定义的实值函数, 满足:

- 非负性: $P(A) \geq 0$ 对于一切 $A \in \mathcal{F}$
- 规范性: $P(\Omega) = 1$
- 可列可加性: 若 $A_n \in \mathcal{F} (n = 1, 2, \dots)$ 两两不相交, 则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

(Ω, \mathcal{F}, P) 为概率空间

例 1: 假定 $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$, \mathcal{F} 为全体子集构成的概率空间子类。

设 p_1, \dots, p_n 为 n 个非负实数, 且满足 $\sum_{i=1}^n p_i = 1$ 。令

$$\mathbb{P}(\emptyset) = 0, \quad \mathbb{P}(A) = \sum_{j=1}^k p_{i_j}, \quad A = \{\omega_{i_1}, \dots, \omega_{i_k}\}, k = 1, \dots, n$$

则 \mathbb{P} 为 (Ω, \mathcal{F}) 上概率。

概率 P 有以下性质:

- (1) $P(\emptyset) = 0$;
- (2) 若 $A \in \mathcal{F}$, 则 $P(A^c) = 1 - P(A)$;
- (3) 若 A_1, \dots, A_n 都属于 \mathcal{F} 且两两不相交, 则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i) \quad (1.2.1)$$

(4) 若 $A \subset B$, $A \in \mathcal{F}$, $B \in \mathcal{F}$, 则 $P(A) \leq P(B)$, 且

$$P(B - A) = P(B) - P(A) \quad (1.2.2)$$

(5) 若 $A_n \subset A_{n+1}$, $A_n \in \mathcal{F} (n = 1, 2, \dots)$, 则

$$P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) \quad (1.2.3)$$

(6) 若 $A_n \supset A_{n+1}$, $A_n \in \mathcal{F} (n = 1, 2, \dots)$, 则

$$P(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) \quad (1.2.4)$$

(7) 若 $A_n \in \mathcal{F} (n = 1, 2, \dots)$, 则

$$P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) \quad (1.2.5)$$

2.1 古典概型

模型定义：若随机现象有如下两个特征：

(1) 在实验中它的全部可能性只有有限个；

(2) 基本事件发生或出现是等可能的；

则称其对应的数学模型为古典概型

取

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}, \quad \mathcal{F} = \{A | A \subset \Omega\}$$

令 P 为 (Ω, \mathcal{F}) 上的概率测度，满足

$$P(\{\omega_1\}) = \dots = P(\{\omega_n\})$$

则 (Ω, \mathcal{F}, P) 为古典概型对应的概率空间。

计算公式：对 $A = \{\omega_{i_1}, \dots, \omega_{i_k}\} \in \mathcal{F}$ ，利用概率的有限可加性可知：

$$P(A) = \sum_{j=1}^k P(\{\omega_{i_j}\}) = \frac{k}{n} = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

排列：从含有 n 个不同元素的总体中抽取 r 个进行排列

(1) 放回情形：共有 n^r 种排列方式

(2) 不放回情形：共有 $A_n^r := n(n-1)\cdots(n-r+1)$ 种排列方式

当 $r = n$ 时，为全排列，此时 $A_n^n = n!$ 。

组合：(1) 从 n 个不同元素中取出 r 个而不考虑其顺序，称为组合，其总数为 $C_n^r = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{A_n^r}{r!}$

(2) 把 n 个不同元素分成 k 个部分，且第 i 个部分有 r_i 个元素， $1 \leq i \leq k$ ，且 $r_1 + r_2 + \dots + r_k = n$ ，则有 $\frac{n!}{r_1! r_2! \cdots r_k!}$ 种方法

(3) 把 n 个元素全部带有标注，其中 n_1 个带标注 1， n_2 个带标注 2， \dots ， n_k 个带标注 k 。现在从此 n 个元素中取出 r 个，使得带有标注 i 的元素有 r_i 个，其中 $1 \leq i \leq k$ 且 $r_1 + r_2 + \dots + r_k = r$ 。则不同取法的总数为 $C_{n_1}^{r_1} C_{n_2}^{r_2} \cdots C_{n_k}^{r_k}$ 。

(4) 从 n 个不同元素中有重复的取出 r 个，不计顺序，则不同的取法有 C_{n+r-1}^r （有重复组合数）

组合公式：对一切正整数 a, b ,

$$\sum_{i=0}^n C_a^i C_b^{n-i} = C_{a+b}^n$$

约定当 $k > n$ 时, $C_n^k = 0$ 。特别地,

$$\sum_{i=0}^n (C_n^i)^2 = C_{2n}^n$$

例 1: (对应郑书例 3.1) 某人同时抛掷两枚骰子, 问: 得到 7 点 (两颗骰子的点数之和的概率是多少?)

解: 我们用甲乙分别表示这两颗骰子, 每颗骰子共有 6 种可能的点数: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 两颗骰子共有 $6 \times 6 = 36$ 种可能结果: $(i, j) (i = 1, \dots, 6) (j = 1, \dots, 6)$, 这里 i 表示骰子甲的点数, j 表示骰子乙的点数, 显然这些结果出现的机会是相等的, 它们构成了等概完备事件组, 事件“得到 7 点”由 6 种结果 (基本事件) 组成: $(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)$, 故事件“得到 7 点”的概率为 $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$
□

例 2: 甲口袋有 5 个白球, 3 个黑球, 乙口袋中有 4 个白球, 6 个黑球, 从两个口袋中各任取一球, 求取到的两个球颜色相同的概率。

解: 从两个口袋中各取一球, 共有 $C_8^1 C_{10}^1$ 种可能取法。两球颜色相同可能情况为: 从甲乙口袋均取出白球, 从甲乙口袋均取出黑球, 共有 $C_5^1 C_4^1 + C_3^1 C_6^1$ 种取法, 于是

$$P(\text{取到的两个球颜色相同}) = \frac{C_5^1 C_4^1 + C_3^1 C_6^1}{C_8^1 C_{10}^1} = \frac{19}{40}$$

□

例 3: (巴拿赫问题) 某数学家有两盒火柴, 每盒有 n 根, 每次使用时, 他任取一盒并从中抽出一根, 问他发现一盒空而同时另一盒还有 $r (0 \leq r \leq n)$ 的概率为多少 (发现为空表示最后一次抽到空盒)?

解: 设两盒火柴分别为 A, B , 由对称性, 所求概率为事件 $E = \text{“发现 } A \text{ 盒空而 } B \text{ 盒还有 } r \text{ 根”}$ 的概率的 2 倍。

先计算样本空间中的样本点个数, 由于共取了 $2n - r + 1$ 次, 故有 2^{2n-r+1} 个样本点。

考察事件 E , 等效为前 $2n - r$ 次 A 盒恰好取 n 次, 次序不论, 最后一次必定取到 A 盒, 此种样本点共有 C_{2n-r}^n 个, 因此

$$P(E) = \frac{C_{2n-r}^n}{2^{2n-r+1}}.$$

所求概率为 $\frac{C_{2n-r}^n}{2^{2n-r}}.$

2.2 条件概率与独立性

2.2.1 条件概率

条件概率：设 (Ω, \mathcal{F}, P) 为概率空间， $B \in \mathcal{F}$ 满足 $P(B) > 0$ 。称

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}, A \in \mathcal{F}$$

为 B 发生条件下 A 发生的条件概率。

条件概率 $P(\cdot|B)$ 为 \mathcal{F} 上的概率，即满足：

- $P(A|B) \geq 0, \forall A \in \mathcal{F}$
- $P(\Omega|B) = 1$
- $\forall \{A_n\} \subset \mathcal{F}, A_n \cap A_m = \emptyset, \forall n \neq m,$

$$P\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n | B\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n | B)$$

容易得到， $P(B|\Omega) = P(B)$ 。

乘法公式： $P(AB) = P(B|A)P(A)$

乘法公式的推广： $P(A_1 A_2 \cdots A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 A_2) \cdots P(A_n|A_1 A_2 \cdots A_{n-1})$ ，其中 $P(A_1 A_2 \cdots A_{n-1}) > 0$ 。

例 1：将 52 张扑克牌（不含大王、小王）随机地分为 4 堆，每堆 13 张，问：各堆都含有 A 牌（即 1 点）的概率是多少？

解：将 4 堆扑克牌编号：第 1 堆，第 2 堆，第 3 堆，第 4 堆，用 A_1, A_2, A_3, A_4 依次表示 4 个 A 牌，设 i_1, i_2, i_3, i_4 是 1, 2, 3, 4 的一个排列，令 $E_{i_1 i_2 i_3 i_4} =$ “第 i_1 堆有 A_1 但没有 A_2, A_3, A_4 ，第 i_2 堆有 A_2 但没有 A_1, A_3, A_4 ，第 i_3 堆有 A_3 但没有 A_1, A_2, A_4 ，第 i_4 堆有 A_4 但没有 A_1, A_2, A_3 ”， $E =$ “各堆都含有 A”，则

$$E = \bigcup_{i_1 i_2 i_3 i_4} E_{i_1 i_2 i_3 i_4}$$

这些事件两两不相容，易知 $P(E) = 4!P(E_{1234})$ ，令 $E_k = \{ \text{第 } k \text{ 堆含有 } A_k \text{ 但不含有其他的 } A_j (j \neq k) \} \quad (k = 1, 2, 3, 4)$ ，则

$$P(E_{1234}) = P(E_1)P(E_2|E_1)P(E_3|E_1 E_2)P(E_4|E_1 E_2 E_3)$$

易知

$$P(E_1) = C_{48}^{12}/C_{52}^{13}, \quad P(E_2|E_1) = C_{36}^{12}/C_{39}^{13},$$

$$P(E_3|E_1E_2) = C_{24}^{12}/C_{26}^{13}, \quad P(E_4|E_1E_2E_3) = 1,$$

于是

$$P(E_{1234}) = \frac{C_{48}^{12}C_{36}^{12}C_{24}^{12}}{C_{52}^{13}C_{39}^{13}C_{26}^{13}} = \frac{13^4}{52 \times 51 \times 50 \times 49},$$

$$P(E) = 4!P(E_{1234}) \approx 0.105$$

□

例 2: (罐子模型) 设罐中有 b 个黑球, r 个红球, 每次随机取出一个球, 取出后将原球放回, 还加进 c 个同色球和 d 个异色球, 记 B_i 为“第 i 次取出的是黑球”, R_j 为“第 j 次取出的是红球”. 若连续从罐中取出三个球, 其中有两个红球, 一个黑球, 则由乘法公式我们可得

$$P(B_1R_2R_3) = P(B_1)P(R_2|B_1)P(R_3|B_1R_2) = \frac{b}{b+r} \cdot \frac{r+d}{b+r+c+d} \cdot \frac{r+d+c}{b+r+2c+2d},$$

$$P(R_1B_2R_3) = P(R_1)P(B_2|R_1)P(R_3|R_1B_2) = \frac{r}{b+r} \cdot \frac{b+d}{b+r+c+d} \cdot \frac{r+d+c}{b+r+2c+2d},$$

$$P(R_1R_2B_3) = P(R_1)P(R_2|R_1)P(B_3|R_1R_2) = \frac{r}{b+r} \cdot \frac{r+c}{b+r+c+d} \cdot \frac{b+2d}{b+r+2c+2d},$$

以上概率与黑球在第几次被抽出有关. 罐子模型也称波利亚 (Polya) 模型, 这个模型的各种变化如下:

(1) 当 $c = -1, d = 0$ 时, 为不返回抽样, 此时前次抽取结果会影响后次抽取结果, 但只要抽取的黑球和红球个数确定, 则概率不依赖其抽出球的次序, 有

$$P(B_1R_2R_3) = P(R_1B_2R_3) = P(R_1R_2B_3) = \frac{br(r-1)}{(b+r)(b+r-1)(b+r-2)}$$

(2) 当 $c = 0, d = 0$ 时, 为返回抽样, 此时前次抽取结果不会影响后次抽取结果, 上述三种概率相等, 有

$$P(B_1R_2R_3) = P(R_1B_2R_3) = P(R_1R_2B_3) = \frac{br^2}{(b+r)^3}$$

(3) 当 $c > 0, d = 0$ 时, 为传染病模型, 此时每次取出球后会增加下一次取到同色球的概率, 或者说, 每发现一个传染病患者, 以后都会增加再传染的概率. 同样的, 上述三种概率相等, 且都等于

$$P(B_1R_2R_3) = P(R_1B_2R_3) = P(R_1R_2B_3) = \frac{br(r+c)}{(b+r)(b+r+c)(b+r+2c)}$$

可以看出, 当 $d = 0$ 时, 只要取出的黑球和红球个数确定, 则概率不依赖于其抽出球的顺序.

(4) 当 $c = 0, d > 0$ 时, 为安全模型, 可以解释为, 每当事故发生, 会抓紧安全工作, 从而下一次发生事故的的概率会减少, 而当事故未发生时, 安全工作会松懈, 下一次发生事故的的概率会增大, 上述三种概率分别为:

$$P(B_1R_2R_3) = \frac{b}{(b+r)} \cdot \frac{r+d}{b+r+d} \cdot \frac{r+d}{b+r+2d},$$

$$P(R_1 B_2 R_3) = \frac{r}{(b+r)} \cdot \frac{b+d}{b+r+d} \cdot \frac{r+d}{b+r+2d},$$

$$P(R_1 R_2 B_3) = \frac{r}{(b+r)} \cdot \frac{r}{b+r+d} \cdot \frac{b+2d}{b+r+2d}$$

例：设 n 件产品中有 m 件不合格品，从中任取两件，已知两件中有一件是合格品，求另一件也是合格品的概率。

解：记事件 A “有一件是合格品”， B “另一件也是合格品”。则

$P(A) = P(\text{取出一件合格品，一件不合格品}) + P(\text{取出两件都是合格品})$

$$= \frac{C_m^1 C_{n-m}^1}{C_n^2} + \frac{C_{n-m}^2}{C_n^2} = \frac{2m(n-m) + (n-m)(n-m-1)}{n(n-1)}$$

$$= \frac{(n-m)(n+m-1)}{n(n-1)}$$

$$P(AB) = P(\text{取出两件都是合格品}) = \frac{C_{n-m}^2}{C_n^2} = \frac{(n-m)(n-m-1)}{n(n-1)}$$

于是所求概率为

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{\frac{(n-m)(n-m-1)}{n(n-1)}}{\frac{(n-m)(n+m-1)}{n(n-1)}} = \frac{n-m-1}{n+m-1}$$

□

2.2.2 事件的独立性

事件的独立性：设 (Ω, \mathcal{F}, P) 为概率空间，称 $A, B \in \mathcal{F}$ 相互独立（独立），若

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

性质：(1) 若 A, B 独立，且 $P(B) > 0$ ，则

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B)}{P(B)} = P(A).$$

即条件概率等于无条件概率。

(2) 若 A, B 独立，则 A 与 \bar{B} ， \bar{A} 与 B ， \bar{A} 与 \bar{B} 亦独立。

$$P(A\bar{B}) = P(A) - P(AB) = P(A) - P(A)P(B) = P(A)P(\bar{B})$$

(3) 零概率事件及其对立的事件与任意的事件都独立。

例：袋中有 a 只黑球和 b 只白球，令 A ：“第一次摸到黑球”， B ：“第二次摸到黑球”。讨论 A 和 B 的独立性。

(1) 放回情形。因为

$$P(A) = \frac{a}{a+b}, P(AB) = \frac{a^2}{(a+b)^2}, P(\overline{A}B) = \frac{ab}{(a+b)^2},$$

所以

$$P(B) = P(AB) + P(\overline{A}B) = \frac{a^2 + ab}{(a+b)^2} = \frac{a}{a+b}$$

故

$$P(A)P(B) = P(AB)$$

(2) 不放回情形。易知

$$P(A) = P(B) = \frac{a}{a+b}, P(\overline{A}B) = \frac{ab}{(a+b)(a+b-1)},$$

故

$$P(A)P(B) \neq P(AB)$$

定义： 设 $\{A_k\}_{k \leq n} \subset \mathcal{F}$ 。称 A_1, A_2, \dots, A_n 相互独立，若

$$P\left(\bigcap_{j=1}^k A_{i_j}\right) = \prod_{j=1}^k P(A_{i_j}), \quad 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n, k \leq n$$

注意：独立 \Rightarrow 两两独立，但是反之不对：

伯恩斯坦反例：一个均匀的正四面体，其第一、二、三面分别涂上红、黄、蓝三种颜色第四面同时涂上以上三种颜色。以 A, B, C 分别表示投一次四面体出现红、黄、蓝颜色朝下的事件，则

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{2}, \quad P(AB) = P(BC) = P(AC) = \frac{1}{4}$$

从而 A, B, C 两两独立，但是，

$$P(ABC) = \frac{1}{4} \neq P(A)P(B)P(C)$$

独立性与概率计算： 设 A_1, A_2, \dots, A_n 相互独立，则

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = 1 - \prod_{i=1}^n P(\overline{A}_i)$$

例： 设有某型号的高射炮，每门炮（发射一发）击中敌机的概率为 0.6，现在若干门炮同时发射（每炮射一发），问：若要以 99% 的把握击中来犯的一架敌机，至少需要配置几门高射炮？

解： 设 n 是需要配置的高射炮的门数，记 $A_i =$ “第 i 门炮击中敌机” ($i = 1, \dots, n$)， $A =$ “敌机被击中”。由于 $A = \bigcup_{i=1}^n A_i$ ，于是找到 n ，使得

$$P(A) = P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \geq 0.99$$

由于 $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - P(\bigcup_{i=1}^n \bar{A}_i)$, 且 $\bar{A}_1, \dots, \bar{A}_n$ 相互独立, 故

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}_1) \cdots P(\bar{A}_n) = 1 - 0.4^n$$

为使不等式成立, 必须且只需 $1 - 0.4^n \geq 0.99$. 由此得

$$n \geq \lg 0.01 / \lg 0.4 = 5.026$$

故至少需配置 6 门高射炮方能以 99% 的把握击中敌机。

例: 设 A, B, C 三事件相互独立, 证明 $A - B$ 与 C 独立。

解: 因为

$$\begin{aligned} P((A - B)C) &= P(AC - BC) = P(AC) - P(ABC) \\ &= P(A)P(C) - P(A)P(B)P(C) \\ &= (P(A) - P(A)P(B))P(C) \\ &= (P(A) - P(AB))P(C) = P(A - B)P(C). \end{aligned}$$

所以 $A - B$ 与 C 独立。 □

2.3 全概率公式和贝叶斯公式

2.3.1 全概率公式

完备事件组: 若 $\{B_n\}_{n \geq 1} \subset \mathcal{F}$ 满足两两互斥且 $\sum_{n=1}^{\infty} B_n = \Omega$, 则称 $\{B_n\}_{n \geq 1}$ 为完备事件组。

全概率公式: 假定 $\{B_n\}_{n \geq 1}$ 为完备事件组, 则

$$P(A) = \sum_{n=1}^{\infty} P(B_n)P(A|B_n), \forall A \in \mathcal{F}$$

注意: 在上式中, 若 $P(B_n) = 0$, 则规定 $P(B_n)P(A|B_n) = 0$ 。

例: 一保险公司相信人群可以分为 2 类: 一类是容易出事故的; 另一类是不容易出事故的。已知前者在一年内出事故的概率为 0.4, 后者在一年内出事故的概率为 0.2。前者约占人群的 30%。今有一人前来投保, 他在一年内出事故的可能性有多大?

解: 设 $A =$ “他在一年内出事故”, $B =$ “他是容易出事故的”, 则 B, \bar{B} 构成完备事件组, 有

$$P(A) = P(B)P(A|B) + P(\bar{B})P(A|\bar{B})$$



图 2.1: 完备事件组

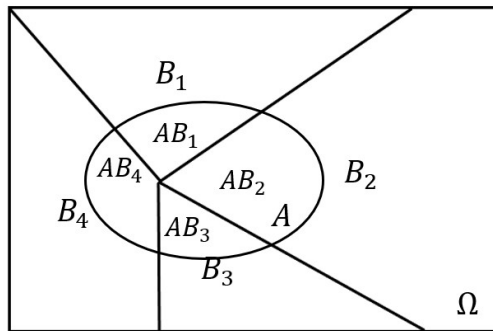


图 2.2: 全概率公式

由于 $P(B) = 0.3, P(A|B) = 0.4, P(\bar{B}) = 0.7, P(A|\bar{B}) = 0.2$, 于是

$$P(A) = 0.3 \times 0.4 + 0.7 \times 0.2 = 0.26$$

□

例: 甲口袋有 1 个黑球, 2 个白球, 乙口袋有 3 个白球, 每次从两口袋中任取一球, 交换后放入另一口袋中, 求交换 n 次之后, 黑球仍然在甲口袋的概率。

设事件 A_i 为 “第 i 次交换后黑球仍然在甲口袋中”, 记 $p_i = P(A), i = 0, 1, 2, \dots$, 则有 $p_0 = 1$, 且

$$P(A_{i+1} | A_i) = \frac{2}{3}, \quad P(A_{i+1} | A_i^c) = \frac{1}{3}$$

由全概率公式得

$$p_n = \frac{2}{3}p_{n-1} + \frac{1}{3}(1 - p_{n-1}) = \frac{1}{3}p_{n-1} + \frac{1}{3}, \quad n \geq 1$$

得到递推公式

$$p_n - \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{3}\right) \left(p_{n-1} - \frac{1}{2}\right), \quad n \geq 1$$

将 $p_0 = 1$ 代入上式可得

$$p_n - \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{3}\right)^n \left(\frac{1}{2}\right)$$

因此

$$p_n = \frac{1}{2} \left[1 + \left(\frac{1}{3}\right)^n \right]$$

□

2.3.2 贝叶斯公式

贝叶斯公式：假定 $\{B_n\}_{n \geq 1}$ 为完备事件组， $A \in \mathcal{F}$ 满足 $P(A) > 0$ ，则

$$P(B_n|A) = \frac{P(B_n)P(A|B_n)}{\sum_{n=1}^{\infty} P(B_n)P(A|B_n)}$$

例：一项血液化验有 95% 的把握诊断某种疾病，但这项化验用于健康人也会有 1% 的“假阳性”结果（即如果一个健康人接受这项化验，化验结果误诊此病人患该疾病的概率为 1%）。假定该疾病的患者事实上只占总人口的 0.5%。若某人化验结果为阳性，则此人确实患有该疾病的概率是多少？

解：令 A 表示“此人确实患该疾病”， B 表示“其化验结果为阳性”，则所求概率为

$$\begin{aligned} P(A|B) &= \frac{P(A)P(B|A)}{P(A)P(B|A) + P(\bar{A})P(B|\bar{A})} \\ &= \frac{0.95 \times 0.005}{0.95 \times 0.005 + 0.01 \times 0.995} \\ &= \frac{95}{294} \approx 0.323 \end{aligned}$$

□ **例：**一架飞机失踪了，推测它等可能的坠落在 3 个区域。令 $\alpha_i (i = 1, 2, 3)$ 表示飞机在第 i 个区域坠落但没有被发现的概率。已知对区域 1 的搜索没有发现飞机，求在此条件下，飞机坠落在第 $i (i = 1, 2, 3)$ 个区域的条件概率。

解：令 B_i 表示“飞机坠毁在第 i 个区域”， $i = 1, 2, 3$ ， A 表示“在第 1 个区域没有搜索到飞机”，则

$$P(B_1|A) = \frac{P(B_1)P(A|B_1)}{\sum_{i=1}^3 P(B_i)P(A|B_i)} = \frac{\frac{\alpha_1}{3}}{\frac{\alpha_1}{3} + 1 \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{1}{3}} = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + 2}$$

对 $j = 2, 3$,

$$P(B_j|A) = \frac{P(B_j)P(A|B_j)}{\sum_{i=1}^3 P(B_i)P(A|B_i)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{\alpha_1}{3} + 1 \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{1}{3}} = \frac{1}{\alpha_1 + 2}$$

□

□

随机游走：考虑数轴上一质点，假定它只在整数点上运动。当前时刻它处于位置 a （整数），下一时刻（单位间隔时间）以概率 p 向正向，概率 $1-p$ 向负向运动一个单位，称这样的质点运动为随机游动，当 $p = q = \frac{1}{2}$ 时，称为对称随机游走。

(1) 无限制随机游走：对随机游走，以 S_n 表示 n 时刻质点的位置，假定 $S_0 = 0$ 。我们计算经过 n 次运动后到达位置 k 的概率。

由于质点在 n 时刻位于 k ，在 n 次游动中，质点向右移动次数 x 比向左运动 y 多 k 次：

$$\begin{aligned} x - y &= k, & x + y &= n \\ x &= \frac{n+k}{2}, & y &= \frac{n-k}{2} \end{aligned}$$

为使 x 为整数， k 和 n 的奇偶性需要相同，即

$$P(S_n = k) = \begin{cases} C_n^{\frac{n+k}{2}} p^{\frac{n+k}{2}} (1-p)^{\frac{n-k}{2}}, & n, k \text{ 奇偶性相同} \\ 0, & n, k \text{ 奇偶性不同} \end{cases}$$

(2) 两端带有吸收壁的随机游走：设 a, b 为正整数。假定质点初始位置为 a ，在位置 0 和 $a+b$ 均有一个吸收壁，求质点被吸收的概率。

记 q_n 为质点初始位置是 n 而最终在 $a+b$ 被吸收的概率，显然，

$$q_0 = 0, \quad q_{a+b} = 1$$

若质点某时刻位于 n ， $n = 1, \dots, a+b-1$ 。则其在位置 $a+b$ 被吸收有两种可能：(1) 运动到 $n-1$ 位置被 $a+b$ 吸收，(2) 运动到 $n+1$ 位置被 $a+b$ 吸收，由全概率公式得

$$q_n = q_{n-1}p + q_{n+1}p, \quad n = 1, \dots, a+b-1$$

由于 $p+q=1$ ，上式可以写为

$$p(q_{n+1} - q_n) = q(q_n - q_{n-1}), \quad n = 1, \dots, a+b-1$$

记 $r = \frac{q}{p}$ ，则

$$q_{n+1} - q_n = r(q_n - q_{n-1}), \quad n = 1, \dots, a+b-1$$

可以分两种情况讨论：(i) 若 $r = 1$ ，即 $p = q = \frac{1}{2}$ 。则

$$q_{n+1} - q_n = q_n - q_{n-1} = \dots = q_1 - q_0$$

$$q_{n+1} = q_0 + (n+1)(q_1 - q_0), \quad n = 1, \dots, a+b-1$$

结合边值条件, 有

$$q_n = \frac{n}{a+b}, n = 1, \cdots, a+b-1$$

(ii) 若 $r \neq 1$, 即 $p \neq q$:

$$q_{n+1} - q_n = r(q_n - q_{n-1}) = \cdots = r^n(q_1 - q_0)$$

即

$$q_n - q_0 = \sum_{i=0}^{n-1} (q_{i+1} - q_i) = \sum_{i=0}^{n-1} r^i (q_1 - q_0) = \frac{1-r^n}{1-r} (q_1 - q_0), \quad n = 1, \cdots, a+b-1$$

结合边值条件, 得

$$q_1 = \frac{1-r}{1-r^{a+b}}$$

则

$$q_n = \frac{1-r^n}{1-r^{a+b}}$$

3.1 随机变量

为了进一步研究随机现象，我们需要引入随机变量的概念。

定义：（随机变量的直观描述）如果条件 S 下的结果可以用某个变量 X 来描述， X 的值不能预先确定，而随着条件 S 的不同可能变化，但是对任何实数 c ，事件“ X 取值不超过 c ”是有概率的，将这样一种变量 X 称为随机变量。

定义：（随机变量的数学描述）如果条件 S 下的所有可能结果组成了集合 $\Omega = \{\omega\}$ ， $X = X(\omega)$ 是在 Ω 上有定义的实值函数，而且对任何实数 c ，事件“ $\{\omega : X(\omega) \leq c\}$ ”是有概率的，将 X 称为随机变量。

例：（对应郑书例 1.2）盒中有 5 个球，其中有 2 个白球，3 个黑球。从中任取 3 个球，将其中所含的白球的数记为 X 。

建模：将球编号，1~3 表示黑球，4,5 表示白球。

记摸到球的编号为 $\omega = (i, j, k)$ ，其中 $1 \leq i < j < k \leq 5$ 。 $|\Omega| = C_5^3 = 10$ 。

其中满足 $X = 0$ 的 ω 有 $C_2^0 C_3^3 = 1$ 个；满足 $X = 1$ 的 ω 有 $C_2^1 C_3^2 = 6$ 个；满足 $X = 2$ 的 ω 有 $C_2^2 C_3^1 = 3$ 个。

设事件： $\{X = 1\} = \{\omega : X(\omega) = 1\}$ ， $\{X \leq 1\} = \{\omega : X(\omega) \leq 1\}$ 。

将 $P(\{X = 1\})$ 简记为 $P(X = 1)$ 。

$$P(X = 1) = \frac{6}{10}, \quad P(X \leq 1) = \frac{7}{10}.$$

例：（对应郑书例 1.6）某公共汽车站每隔 10 min 会有一两某路公交车到达。某乘客随机在任意时刻到达车站。

显然，他的候车时间 X （单位：min）为随机变量。 X 的取值范围 $0 \leq X \leq 10$ 。事件 $\{X \leq c\}$ 是有概率的，这是一种几何概型，我们会在后面给出计算过程，例如：

$$P(X \leq 3) = \frac{3}{10}, \quad P(2 \leq X \leq 6) = \frac{4}{10}.$$

3.2 离散型随机变量

定义： X 是离散型随机变量指: X 取有限个值 x_1, \dots, x_n , 或可列无穷个值 x_1, x_2, \dots . X 的概率分布 (列) 指:

$$p_k = P(X = x_k), \quad k = 1, \dots, n \text{ 或 } k = 1, 2, \dots.$$

将 X 的可能值以及相应的概率列为表3.1。表3.1称为 X 的**概率分布表**，它能够清楚完整的表示 X

| | | | | | |
|-----|-------|-------|----------|-------|----------|
| X | x_1 | x_2 | \cdots | x_k | \cdots |
| p | p_1 | p_2 | \cdots | p_k | \cdots |

表 3.1: 概率分布表

的取值以及概率的分布情况。

定义： 设 X 的可能取值是 x_1, x_2, \dots (有限个或者可列无穷个)，则称

$$p_k = P(X = x_k) \quad (k = 1, 2, \dots)$$

为 X 的**概率分布**，这时也称为 X 的**概率函数**或者**概率分布律**

关于 $\{p_k\}$ ，有以下性质：

$$(1) p_k \geq 0 \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (2) \sum_k p_k = 1$$

回忆本讲例 1 的 X (抽到的白球数) 它的概率分布表如表3.2所示：

| | | | |
|-----|-----|-----|-----|
| X | 0 | 1 | 2 |
| p | 0.1 | 0.6 | 0.3 |

表 3.2: X 的概率分布表

对离散型随机变量，有以下几种常见的概率分布：

3.2.1 两点分布 (伯努利分布)

定义随机变量 X 的可能值是 0 和 1 且概率分布为:

$$P(X = 1) = p, \quad P(X = 0) = 1 - p.$$

称 X 服从**两点分布** (也称伯努利分布), 记为 $X \sim B(1, p)$ (参数 $0 \leq p \leq 1$)

我们定义示性函数 1_A : 事件 A 发生则取 1; A 不发生则取 0.

例: (对应郑书例 2.1) 100 件产品中有 3 件次品. 从中任取一件.

设事件 $A =$ “取到合格品”, , 随机变量 $X = 1_A$, X 的可能取值为 0 和 1。取到每件产品的概率均等, 概率分布为

$$P(X = 1) = \frac{97}{100}, P(X = 0) = \frac{3}{100}$$

X 服从参数 $p = 0.97$ 的两点分布。

3.2.2 二项分布

设随机变量所有可能值为 $0, 1, \dots, n$, 且

$$P(X = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}, k = 0, 1, \dots, n$$

称 X 服从参数为 n, p 的二项分布, 记作 $X \sim B(n, p)$ (参数 $n \geq 1, 0 \leq p \leq 1$)

二项分布有明显的实际背景, 例如在单次实验中事件 A 发生的概率是 p , 进行独立重复实验 n 次, 记事件 A 发生的次数为 X , 则 $X \sim B(n, p)$ 。

定理 2.1: 对于二项分布, 分布列 $P(X = k)$ 的最大值点 k_0 如下:

若 $(n + 1)p \notin \mathbb{Z}$, 则 $k_0 = [(n + 1)p]$;

若 $(n + 1)p \in \mathbb{Z}$, 则 $k_0 = (n + 1)p$ 或 $(n + 1)p - 1$.

证明: 显然

$$\frac{p_n(k+1)}{p_n(k)} = \frac{n-k}{k+1} \cdot \frac{p}{1-p}$$

由于 $\frac{n-k}{k+1} \cdot \frac{p}{1-p} > 1$ 等价于 $k < (n + 1)p - 1$, 于是有:

(a) 当 $k < (n + 1)p - 1$ 时, $p_n(k + 1) > p_n(k)$

(b) 当 $k > (n + 1)p - 1$ 时, $p_n(k + 1) < p_n(k)$

(c) 当 $k = (n + 1)p - 1$ 时, $p_n(k + 1) = p_n(k)$

(i) 若 $(n+1)p \notin \mathbb{Z}$, 设 $k_0 = [(n+1)p] < (n+1)p < k_0 + 1$, 当 $k < m$ 时, $k \leq k_0 - 1 < (n+1)p - 1$, 因此 $p_n(k) < p_n(k+1)$; 当 $k \geq k_0$ 时, $k > (n+1)p - 1$, 因此 $p_n(k) > p_n(k+1)$, 所以 k_0 为最大值。

(ii) 若 $(n+1)p \in \mathbb{Z}$, 设 $k_0 = (n+1)p$, 有 $p_n(k_0) = p_n(k_0 + 1)$, 进而利用性质 (a) 和性质 (b) 知 k_0 为最大值。□

3.2.3 泊松分布

定义: 设随机变量 X 的所有可能取值是全体非负整数, 且

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

则称 X 服从参数为 λ 的泊松分布, 记为 $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ (参数: $\lambda > 0$)。

泊松分布常见于生物学, 物理学, 工业的应用中, 例如电话交换台收到的电话呼唤次数, 放射性物质在一定时间内放出的粒子数。

定理: 泊松分布的分布列最大值点 $k_0 = [\lambda]$ 。

证明: 注意到 $p_{k+1} = \frac{\lambda}{k+1} p_k$, 故由分布函数知

若 $k+1 \leq \lambda$, 则 $p_{k+1} \geq p_k$

若 $k+1 \geq \lambda$, 则 $p_{k+1} \leq p_k$

因此当 $k_0 = [\lambda]$ 时, 分布列取最大值。□

例: 已知某商场一天来的顾客服从参数为 λ 的泊松分布, 而每个来商场的顾客购物概率为 p , 证明此商场一天内购物的顾客数服从参数为 λp 的泊松分布。

解: 用 Y 表示商场内一天购物的顾客数, 则由全概率公式知, 对任意正整数 k 有

$$\begin{aligned} P(Y = k) &= \sum_{i=k}^{\infty} P(X = i) P(Y = k | X = i) = \sum_{i=k}^{\infty} \frac{\lambda^i e^{-\lambda}}{i!} C_i^k p^k (1-p)^{i-k} \\ &= \frac{(\lambda p)^k}{k!} e^{-\lambda} \sum_{i=k}^{\infty} \frac{[\lambda(1-p)]^{i-k}}{(i-k)!} = \frac{(\lambda p)^k}{k!} e^{-\lambda} e^{\lambda(1-p)} = \frac{(\lambda p)^k}{k!} e^{-\lambda p} \end{aligned}$$

□

3.2.4 超几何分布

定义：若随机变量 X 的概率分布满足：

$$P(X = k) = \frac{C_D^k C_{N-D}^{n-k}}{C_N^n}, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

则称 X 服从超几何分布，记为 $X \sim H(N, D, n)$ （参数 N, D, n 满足 $N \geq D \geq 0$ ）

设一批产品有 N 个产品， D 个次品，任取 n 个，抽到的次品数为 X 。如果进行放回抽样则 X 服从二项分布，如果进行不放回抽样则 X 服从超几何分布。

定理 2.3：给定 n 。当 $N \rightarrow \infty, \frac{D}{N} \rightarrow p$ 时，

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{C_D^k C_{N-D}^{n-k}}{C_N^n} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \quad k \geq 0$$

证明：由于 $0 < p < 1$ ，当 N 充分大时， $n < D < N$ ，且 n 是固定的，易知

$$\begin{aligned} \frac{C_D^k C_{N-D}^{n-k}}{C_N^n} &= \frac{D!}{k!(D-k)!} \cdot \frac{(N-D)!}{(n-k)!(N-D-n+k)!} \cdot \frac{n!(N-n)!}{N!} \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{D(D-1) \cdots (D-k+1)}{N^k} \\ &\quad \cdot \frac{(N-D)(N-D-1) \cdots (N-D-n+k+1)}{N^{n-k}} \\ &\quad \cdot \frac{N^n}{N(N-1) \cdots (N-n+1)} \\ &= C_n^k \left(\prod_{i=1}^k \frac{D-i+1}{N} \right) \left(\prod_{i=1}^{n-k} \frac{N-D-i+1}{N} \right) \left(\prod_{i=1}^n \frac{N}{N-i+1} \right) \\ &\rightarrow C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \quad (N \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

□

该定理的直观解释是，如果一批产品的总量 N 很大，其中次品占比为 p ，则从整批产品随机抽取 n 个，抽到次品的个数 k 近似服从参数为 p, n 的二项分布。

3.2.5 几何分布

定义：若随机变量 X 的所有可能值是全体整数，且概率分布满足：

$$P(X = k) = (1-p)^{k-1} p, \quad k = 1, 2, \dots$$

则称 X 服从几何分布，记为 $X \sim G(p)$ ，参数 $0 < p < 1$ 。

例如，某个射手向目标连续射击，如果他单次射中目标的概率为 p ，则他首次射中目标所需要的射击次数 X 是一个随机变量，且满足几何分布。

几何分布具备无记忆性: $P(X - n = k \mid X > n) = P(X = k)$.

例：设 X 是只取自然数的离散随机变量，若 X 的分布具有无记忆性，证明 X 的分布一定为几何分布。

证明：由无记忆性知

$$P(X > n + m \mid X > m) = \frac{P(X > n + m)}{P(X > m)} = P(X > n),$$

将 n 换为 $n - 1$ 仍有

$$P(X > n + m - 1) = P(X > n - 1)P(X > m).$$

两式相减有

$$P(X = n + m) = P(X = n)P(X > m).$$

设 $P(X = 1) = p$ ，若取 $n = m = 1$ 有

$$P(X = 2) = p(1 - p).$$

若取 $n = 2, m = 1$ 则有

$$P(X = 3) = P(X = 2)P(X > 1) = p(1 - p)^2.$$

若令 $P(X = k) = p(1 - p)^{k-1}$ ，则用数学归纳法得

$$P(X = k + 1) = P(X = k)P(X > 1) = p(1 - p)^k, \quad k = 0, 1, \dots.$$

这表明 X 的分布为几何分布。 □

3.2.6 离散均匀分布

定义：若随机变量 X 的概率分布满足：

$$P(X = k) = \frac{1}{N}, \quad k = 1, \dots, N.$$

则称 X 服从离散均匀分布。

3.3 连续随机变量

定义：连续型随机变量指：存在 $p(x)$ 使得

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b p(x)dx, \quad \forall a < b.$$

称 $p(\cdot)$ 为 X 的概率密度 (函数), 也记为 $p_X(\cdot)$.

连续随机变量有以下性质：

- (1) 非负: $p(x) \geq 0$
- (2) 规范: $\int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = 1$
- (3) $P(X = x) = 0$ 在任意一点选中的概率都为 0.
- (4) $p(\cdot)$ 在 x 连续, 即 $P(X \in [x, x + \Delta x]) = p(x)\Delta x + o(\Delta x)$,

以下是常见的连续随机变量：

3.3.1 均匀分布

定义：如果随机变量 X 的分布密度为：

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}; & \text{若 } a \leq x \leq b; \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

则称 X 服从区间 $[a, b]$ (或 (a, b)) 上的均匀分布, 记为 $X \sim U(a, b)$ (参数 $a < b$) :

均匀分布的分布函数也可以写为 $p(x) = \frac{1}{b-a} 1_{\{a \leq x \leq b\}}$.

例如, 某公共汽车站每隔 10 分钟会有一班公交车到达, 一位搭乘该车的乘客在任意时刻到达车站是等可能的, 则他的候车时间 X 是一个随机变量, 且满足 $[0, 10]$ 上的均匀分布。

3.3.2 指数分布

定义：如果随机变量 X 的分布密度为：

$$p(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x > 0.$$

则称 X 服从参数为 λ 的指数分布, 记为 $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ (参数 $\lambda > 0$)

若 X 服从参数为 λ 的指数分布, 则对任何 $0 \leq a < b$ 有:

$$P(a < X < b) = \lambda \int_a^b e^{-\lambda x} dx = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$$

$$P(X > a) = e^{-\lambda a}$$

定理: (无记忆性): $P(X - s > t \mid X > s) = e^{-\lambda t}, \forall t, s \geq 0$.

不难看出, $P(X - s > t \mid X > s) = \frac{P(X-s>t)}{P(X>s)} = \frac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda s}} = e^{-\lambda t} = P(X > t)$

注意到, 无记忆性是指数分布独有的, 即设 X 是非负的随机变量, $P(X-s > t \mid X > s) = P(X > s)$ 对 $\forall t, s \geq 0$ 恒成立的充分必要条件是 X 服从指数分布。

证明: 之前已经证明了充分性, 现只需证明必要性: 设 X 是非负随机变量满足 $P(X - s > t \mid X > s) = e^{-\lambda t}$, 则

$$P(X > s) > 0, \quad P(X > s+t) = P(X > s)P(X > t)$$

令 $f(u) = P(X > u)$, 则 $f(s+t) = f(s)f(t)$

于是 $f(1) = f(\frac{1}{n} \times n) = (f(\frac{1}{n}))^n$

从而 $f(\frac{m}{n}) = f(\frac{1}{n} \times m) = (f(\frac{1}{n}))^m = (f(1))^{\frac{m}{n}}$

故对任意正有理数 r , 有 $f(r) = (f(1))^r$ 。由于 $0 < f(1) < 1$ 且 $f(u)$ 是关于 u 的减函数, 因此对任意 $u \geq 0$, 有 $f(u) = (f(1))^u$ 。

令 $\lambda = -\ln f(1)$, 则 $f(u) = e^{-\lambda u}$, 即

$$P(X > u) = e^{-\lambda u} = \int_{+\infty}^u e^{-\lambda x} dx$$

$$P(a < X < b) = \int_a^b \lambda e^{-\lambda x} dx \quad (0 \leq a < b)$$

说明 X 服从指数分布。 □

3.3.3 正态分布

定义: 如果随机变量 X 的分布密度为:

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^2} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}$$

则称 X 服从参数为 μ, σ 的正态分布, 记为 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ (参数 $\mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$)

参数 $\mu = 0$, $\sigma^2 = 1$ 时的正态分布称为标准正态分布 $N(0, 1)$, 分布密度是:

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

归一性: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1$:

设 $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, 将积分的平方写为二重积分:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \frac{1}{2\pi} \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dx dy.$$

做极坐标变换:

$$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta \Rightarrow \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = r.$$

因此, 二重积分可以写为

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\infty} e^{-\frac{r^2}{2}} r dr \right) d\theta = \int_0^{\infty} e^{-R} dR = 1$$

对于其他正态分布的密度函数 $p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$: 令 $y = \frac{x-\mu}{\sigma}$, 则

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = 1.$$

定义函数 Φ :

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \phi(x) dx.$$

容易看出 $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$.

定理: 令 $x^* = \frac{x-\mu}{\sigma}$, 则

$$P(a < X < b) = \int_a^b \frac{1}{\sigma} \phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) dx = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right).$$

推论: 设随机变量 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则对一切正数 k , 有

$$P(\mu - k\sigma < X < \mu + k\sigma) = \Phi(k) - \Phi(-k) = 2\Phi(k) - 1$$

例如查表得 $\Phi(3) = 0.9987$, 因此

$$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) = \Phi(3) - \Phi(-3) = 0.9974$$

该结果说明正态随机变量 X 的取值基本落在区间 $(\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma)$ 内。

3.3.4 伽马分布

定义：如果随机变量 X 的分布密度为：

$$p(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}, \quad x > 0.$$

则称随机变量 X 服从伽马分布，记为 $X \sim \Gamma(\alpha, \beta)$ (参数 $\alpha, \beta > 0$)

其中，称 $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty y^{\alpha-1} e^{-y} dy$ 为 Γ 函数。

若 $\Gamma(\alpha)$ 为 Γ 函数，则函数具备以下性质：

$$(1) \Gamma(\alpha + 1) = \alpha \Gamma(\alpha)$$

证明：

$$\int_0^\infty y^\alpha e^{-y} dy = -y^\alpha e^{-y} \Big|_0^\infty + \int_0^\infty \alpha y^{\alpha-1} e^{-y} dy = \alpha \int_0^\infty y^{\alpha-1} e^{-y} dy$$

□

$$(2) \Gamma(1) = 1; \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

证明：

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{y}} e^{-y} dy = \sqrt{2} \int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{\pi}.$$

□

$$(3) \alpha = 1 \text{ 时就是指数分布参数为 } \beta.$$

3.4 随机变量的严格定义

定义：假设 (Ω, \mathcal{F}, P) 是概率空间， $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ 满足：

$$\text{对任意 } x \in \mathbb{R} \text{ 都有 } \{X \leq x\} \in \mathcal{F},$$

则称 X 是一个随机变量。

定义：令 $F(x) = P(X \leq x), x \in \mathbb{R}$. 称 F 为随机变量 X 的分布函数，也记为 F_X .

定理：分布函数 $F = F_X$ 的三条性质：

- (1) 单调性：若 $x \leq y$, 则 $F(x) \leq F(y)$.
- (2) 规范性： $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0; \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$.
- (3) 右连续性： $\lim_{y \rightarrow x+} F(y) = F(x)$.

- 离散型： $P(X = x_i) = p_i$. x_i 为 F_X 的跳点, p_i 为跳跃幅度.
- 连续型： $F_X(x) = \int_{-\infty}^x p(z)dz$, 且

$$p(x) = F'_X(x).$$

反过来, 若 F_X “几乎” 连续可导, 则为连续型 (定理 4.3, 4.4).

- 尾分布函数： $G(x) = P(X > x) = 1 - F(x)$.

连续型： $p(x) = -G'(x)$.

- 例. $X \sim \text{Exp}(\lambda)$.

$$\begin{aligned} G(x) &= e^{-\lambda x}, \quad \forall x > 0, \\ \Rightarrow G'(x) &= -\lambda G(x). \quad \lambda: \text{速率}. \end{aligned}$$

- 由 $F_X(x)$ 可求出 $P(X \in B), \forall B$.
- 若 $F_X = F_Y$, 则称 X 与 Y 同分布, 记为 $X \stackrel{d}{=} Y$.
- $X = Y$, 即 $P(X = Y) = 1$, 则 $F_X = F_Y$. 反之不然.

4.1 随机变量的函数

随机变量的函数：设 $y = g(x)$ 是定义在 \mathbb{R} 上的一个函数， X 是一个随机变量，那么 $Y = g(X)$ 作为 X 的函数，同样也是一个随机变量。

在实际问题中，如果已知随机变量 X 的分布，我们可以求出另一个随机变量 $Y = g(X)$ 的分布。我们将从离散和连续两种场合分别讨论随机变量函数的分布。

注：为了让 Y 是数学意义上严格定义的随机变量，必须对函数 $f(x)$ 有所假定才能使得 $\{Y \leq c\}$ 是有概率的事件，通常假定 $f(x)$ 是 Borel 函数，即对于任何实数 c ， $\{x : f(x) \leq c\}$ 是 Borel 集，有以下定理：

定理：设 $X = X(\omega)$ 是概率空间 (Ω, \mathcal{F}, P) 上的随机变量，则对任何 Borel 函数 $f(x)$ ， $Y = f(X(\omega))$ 也是这个概率空间上的随机变量。

证明：给定任意实数 c ，令

$$B = \{x : f(x) \leq c\}$$

则 $\{\omega : Y \leq c\} = \{\omega : f(X(\omega)) \leq c\} = \{\omega : X(\omega) \in B\}$ ，由于 B 是 Borel 集，则由定理 [?] 知 $\{\omega : X(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}$ ，所以 $\{Y \leq c\} \in \mathcal{F}$ ， Y 是随机变量。

我们遇到的随机函数一般都是 Borel 函数，所以 $Y = X(\omega)$ 一般都是随机变量。

4.1.1 离散随机变量函数的分布

设 X 是离散随机变量， X 的分布列为：则 $Y = g(X)$ 也是一个离散随机变量，此时 Y 的分布列可

| | | | | | |
|-----|-----------|-----------|----------|-----------|----------|
| X | x_1 | x_2 | \cdots | x_k | \cdots |
| p | p_{x_1} | p_{x_2} | \cdots | p_{x_k} | \cdots |

以简单表示为：若 $p_{x_1}, p_{x_2}, \cdots, p_{x_k}, \cdots$ 中有某些值相等时，把那些相等的值分别合并，并将对应概

| | | | | | |
|-----|-----------|-----------|----------|-----------|----------|
| Y | $g(x_1)$ | $g(x_2)$ | \cdots | $g(x_k)$ | \cdots |
| p | p_{x_1} | p_{x_2} | \cdots | p_{x_k} | \cdots |

率相加。

例：已知随机变量 X 的分布如下，求 $Y = X^2 + X$ 的分布列。

| | | | | | |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| X | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 |
| p | 0.2 | 0.1 | 0.1 | 0.3 | 0.3 |

解: $Y = X^2 + X$ 的分布列为

| | | | | | |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| Y | 2 | 0 | 0 | 2 | 6 |
| p | 0.2 | 0.1 | 0.1 | 0.3 | 0.3 |

合并得到

| | | | |
|-----|-----|-----|-----|
| Y | 0 | 2 | 6 |
| p | 0.2 | 0.5 | 0.3 |

定理: (离散卷积公式) 若 ξ, η 是相互独立的随机变量, 且取非负整数值, 分布列分别为 $\{k; a_k\}$ 和 $\{k; b_k\}$ 。则随机变量 $\zeta = \xi + \eta$ 的分布列为 $P(\zeta = k) = \sum_{i=0}^k a_i b_{k-i}$, 称为**卷积公式**。

证明: 注意到 $P(\zeta = k) = P(\xi = 0, \eta = k) + P(\xi = 1, \eta = k-1) + \cdots + P(\xi = k, \eta = 0)$ 。其中 $= P(\xi = i, \eta = k-i) = a_i b_{k-i}$, 因此 $P(\zeta = k) = \sum_{i=0}^k a_i b_{k-i}$ 。□

例: (泊松分布可加性) 设 $X \sim \mathcal{P}(\lambda_1), Y \sim \mathcal{P}(\lambda_2)$, 且 X, Y 相互独立, 证明 $X + Y \sim \mathcal{P}(\lambda_1 + \lambda_2)$ 。

解: 泊松分布函数 $P(X = k) = \frac{\lambda_1^k}{k!} e^{-\lambda_1}$, $P(Y = k) = \frac{\lambda_2^k}{k!} e^{-\lambda_2}$, 由卷积公式,

$$P(X + Y = k) = \sum_{i=0}^k P(X = i) P(Y = k-i) = \sum_{i=0}^k \frac{\lambda_1^i}{i!} e^{-\lambda_1} \frac{\lambda_2^{k-i}}{(k-i)!} e^{-\lambda_2}$$

由二项式展开, 上式整理为

$$\frac{e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)}}{k!} \sum_{i=0}^k \frac{\lambda_1^i \lambda_2^{k-i} k!}{i!(k-i)!} = \frac{e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)}}{k!} (\lambda_1 + \lambda_2)^k$$

□

4.1.2 连续随机变量函数的分布

对于连续随机变量, 一般先求分布函数, 如果能写出分布密度就写出分布密度。

例: 设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 试求 $Y = \frac{1}{\sigma}(X - \mu)$ 的概率分布。

解: 对任何实数 y , 由于 $\{Y \leq y\} = \{X \leq \sigma y + \mu\}$, 于是

$$P(Y \leq y) = P(X \leq \sigma y + \mu)$$

$$= \int_{-\infty}^{\mu+\sigma y} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right\} dx$$

变量替换 $\frac{x-\mu}{\sigma} = t$ 得

$$P(Y \leq y) = \int_{-\infty}^y \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

说明 $Y \sim N(0, 1)$ □

定理: 设随机变量 X 有分布密度 $p(x)$, 且在区间 (a, b) ($-\infty \leq a < b \leq +\infty$) 上满足 $P(a < X < b) = 1$ 。又 $Y = f(X)$, 其中 $f(x)$ 是 (a, b) 上严格单调的连续函数, $g(y)$ 是 $f(x)$ 的反函数, 且 $g'(y)$ 处处存在, 令

$$q(y) = \begin{cases} p(g(y))|g'(y)|, & y \in (\alpha, \beta), \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

其中 (α, β) 是反函数 $g(y)$ 的存在区间, 即 $\alpha = \min\{A, B\}, \beta = \max\{A, B\}, A \triangleq \lim_{x \rightarrow a+} f(x), B \triangleq \lim_{x \rightarrow b-} f(x)$, 则 $q(y)$ 是 Y 的分布密度。

证明: 设 $f(x)$ 是严格增函数 (当 $f(x)$ 是严格减函数时, 可以类似的证明)。那么对于 $u \in (\alpha, \beta)$ 有

$$\begin{aligned} P(Y \leq u) &= P(f(X) \leq u) = P(X \leq g(u)) \\ &= \int_{-\infty}^{g(u)} p(x) dx = \int_a^{g(u)} p(x) dx \end{aligned}$$

做变量替换 $x = g(y)$, 则

$$P(Y \leq u) = \int_a^u p(g(y)) |g'(y)| dy = \int_{-\infty}^u q(y) dy$$

当 $u \leq \alpha$ 时,

$$P(Y \leq u) = P(X \leq a) = 0 = \int_{-\infty}^u q(y) dy$$

当 $u \geq \beta$ 时,

$$\begin{aligned} P(Y \leq u) &= P(X \leq b) = 1 = \int_a^b p(x) dx \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} p(g(y)) |g'(y)| dy = \int_{-\infty}^u q(y) dy \end{aligned}$$

综上, 对于一切实数 u , 有 $P(Y \leq u) = \int_{-\infty}^u q(y) dy$, 故 $q(y)$ 是 $Y = f(X)$ 的密度函数。 □

例: (对应郑书例 5.3) 研究水箱内某种微生物的增长情况。设在时 0 微生物的总数是 $v (v > 0)$, 增长率是 X , 在时刻 t 微生物总数是 $Y = ve^{Xt} (t > 0)$ 。若 X 有分布密度

$$p(x) = \begin{cases} 3(1-x)^2, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

试求 Y 的概率分布。

解：反函数的求解需要注意函数和区间的变化。

令 $f(x) = ve^{Xt} (0 < x < 1)$ ，则其反函数为：

$$g(y) = \frac{1}{t} \ln \frac{y}{v} \quad (v < y < ve^t)$$

易知 $g'(y) = \frac{1}{ty}$ ，根据定理知， $Y = ve^{xt}$ 的分布密度是：

$$q(y) = \begin{cases} 3(1 - \frac{1}{t} \ln \frac{y}{v})^2 \frac{1}{ty}, & v < y < ve^t, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

□

例：(对应郑书例 5.4, 对数正态分布) 设 X 是只取正值的随机变量，使得 $Y = \ln X$ 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ ，试求出 X 的分布函数和分布密度。

解：对任何 $x > 0$ ，有

$$\begin{aligned} F_X(x) &= P(X \leq x) = P(\ln X \leq \ln x) = P(Y \leq \ln x) \\ &= \int_{-\infty}^{\ln x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(y - \mu)^2\right\} dy \end{aligned}$$

做变量替换 $y = \ln u$ ，得

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma u} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(\ln u - \mu)^2\right\} du$$

当 $x \leq 0$ 时，称变量 X 服从对数正态分布。不难看出， X 的分布密度 $p(u)$ 为：当 $u \leq 0$ 时， $p(u) = 0$ ，当 $u > 0$ 时， $p(u)$ 是上式中的被积函数。 □

例：设 $\theta \sim U(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ， $\psi = \tan \theta$ ，求 ψ 的密度函数。

解：设 $\psi = \tan \theta$ 的反函数为 $g(y)$ ，则 $g(y) = \arctan y$ 。由定理得 $p_\psi(y) = p_{U(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})}(g(y))g'(y) = p_{U(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})}(\arctan y) \frac{1}{1+y^2} = \frac{1}{\pi(1+y^2)}$ ， $y \in \mathbb{R}$ ，称该变量 ψ 符合 **Cauchy 分布**。 □

4.2 随机变量的反函数

随机变量的反函数：设 $F(x)$ 是任何分布函数（即 $F(x)$ 非减，右连续，且 $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$ ），令

$$F^{-1}(p) \triangleq \min \{x : F(x) \geq p\} \quad (0 < p < 1)$$

则称 $F^{-1}(p)$ 是 $F(x)$ 的**广义反函数**。

注意， $F(x)$ 是右连续增函数，满足不等式 $F(x) \geq p$ 的 x 中必有最小者，当 $F(x)$ 是严格增的连续函数时， $F^{-1}(p)$ 正好是方程 $F(x) = p$ 的唯一根，此时 $F^{-1}(p)$ 是 $F(x)$ 的普通反函数。

引理： $F^{-1}(p)$ ($0 < p < 1$) 有如下性质：

(1) $F^{-1}(p)$ 是 p 的增函数。

(2) $F(F^{-1}(p)) \geq p$ ，若 $F(x)$ 在点 $x = F^{-1}(p)$ 处连续，则

$$F(F^{-1}(p)) = p.$$

(3) $F^{-1}(p) \leq x$ 的充分必要条件是 $p \leq F(x)$ 。

证明：(2) 由于 $F(F^{-1}(p) + \varepsilon) \geq p$ ($\forall \varepsilon > 0$)，令 $\varepsilon \rightarrow 0$ ，利用 $F(x)$ 的右连续性知 $F(F^{-1}(p)) \geq p$ 。若 $F(x)$ 在点 $F^{-1}(p)$ 处连续，从 $F(F^{-1}(p) - \varepsilon) < p$ ($\varepsilon > 0$) 推知 $F(F^{-1}(p)) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F(F^{-1}(p) - \varepsilon) \leq p$ ，从而 $F(F^{-1}(p)) = p$ 。

(3) 若 $F(x) \geq p$ ，从非减性质知 $x \geq F^{-1}(p)$ ；反之若 $x \geq F^{-1}(p)$ ，则 $F(x) \geq F(F^{-1}(p)) \geq p$ ，故性质 (3) 成立。□

定理：设 $F(x)$ 是任何分布函数，若 U 是服从区间 $[0, 1]$ 上的均匀分布的随机变量，且

$$X = F^{-1}(U)$$

则 X 的分布函数恰好是 $F(x)$ 。

证明：对任何 $y \in (0, 1)$ ，从性质 (3) 知 $x \geq F^{-1}(y)$ 的充分必要条件是 $F(x) \geq y$ ，于是

$$P(X \leq x) = P(F^{-1}(U) \leq x) = P(U \leq F(x)) = F(x).$$

这表明 X 的分布函数是 $F(x)$ 。□

5.1 随机变量的数学期望

实际问题的概率分布比较难以确定,有时只需掌握随机变量的数学特征就足够了。随机变量的数学期望(expectation)的含义是,随机变量平均取值(mean)的大小。

- X 的大量独立观测值(记为 a_1, a_2, \dots, a_n) 的算术平均,当样本数无穷大时,算术平均收敛于期望值:

$$\bar{a} = \frac{1}{n} (a_1 + \dots + a_n).$$

- X 的所有可能值的加权平均(总和).

5.1.1 离散型随机变量的数学期望

离散型随机变量的数学期望: 假设 X 是离散型随机变量,分布列为

$$P(X = x_k) = p_k, \quad k = 1, \dots, n \text{ 或 } k = 1, 2, \dots.$$

其中 X 的可能值是 x_1, x_2, \dots , 如果 $\sum_k |x_k| p_k < \infty$, 那么,称 X 的期望存在,称 $\sum_k x_k p_k$ 为 X 的数学期望,记为 EX .

注意,级数 $\sum_k |x_k| p_k$ 收敛可以保证和数 $\sum_k x_k p_k$ 与加项的先后次序无关。更一般的假定是级数 $\sum_k x_k^+ p_k$ 和 $\sum_k x_k^- p_k$ 中至少一个收敛(这里 $x_k^+ = \max\{x_k, 0\}$, $x_k^- = \max\{-x_k, 0\}$) 这时和数 $\sum_k x_k p_k$ 与加项的先后次序无关。

注意到 $E(X)$ 完全由 X 的概率分布确定,因此 $E(X)$ 也称为相应概率分布的期望,下面计算几个常见的概率分布的期望:

(1) 两点分布

设随机变量 X 服从两点分布, $P(X = 1) = p, P(X = 0) = 1 - p$. 则,

$$E(X) = 1 \cdot p + 0 \cdot (1 - p) = p.$$

(2) 二项分布

设随机变量 X 服从二项分布: $P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k} := b(n; k), k = 0, 1, \dots, n, (q = 1 - p)$.

对于 $\forall 1 \leq k \leq n$,

$$\begin{aligned} k \cdot b(n; k) &= k \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} p^k q^{n-k} \\ &= \frac{n \cdot (n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} p \cdot p^{k-1} q^{n-k} = np \cdot b(n-1; k-1) \end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=0}^n k \cdot b(n; k) = \sum_{k=1}^n np \cdot b(n-1; k-1) \\ &= np \sum_{\ell=0}^{n-1} b(n-1, \ell) = np. \end{aligned}$$

(3) 泊松分布

设随机变量 X 服从泊松分布:

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} =: p_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

则对于 $\forall k \geq 1$,

$$k p_k = k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \lambda \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda} = \lambda p_{k-1}.$$

因此,

$$E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} k p_k = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda p_{k-1} = \lambda \sum_{\ell=0}^{\infty} p_{\ell} = \lambda.$$

(4) 几何分布

设随机变量 X 满足几何分布, 即

$$P(X = k) = q^{k-1} p =: p_k, \quad k = 1, 2, \dots, (q = 1 - p).$$

直接计算期望:

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} k p_k = \frac{1}{p}.$$

(5) 离散均匀分布

设随机变量 X 的可能值是 $1, \dots, N$, 且

$$P(X = k) = \frac{1}{N} \quad (k = 1, \dots, N).$$

直接计算

$$E(X) = \sum_{k=1}^N k P(X = k) = \frac{N+1}{2}.$$

(6) 超几何分布

设随机变量 X 满足超几何分布, 即

$$P(X = k) = \frac{C_D^k C_{N-D}^{n-k}}{C_N^n}, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

记 $h(N, D, n; k) = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$

$$= \frac{D!}{k!(D-k)!} \cdot \frac{(N-D)!}{(n-k)!(N-D-(n-k))!} \cdot \frac{n!(N-n)!}{N!}.$$

记 $x' = x - 1$. 则, $\forall 1 \leq k \leq n$,

$$k \cdot A_1 = \frac{D!}{(k-1)!(D-k)!} = D \times \frac{D!}{k!(D-k')!}.$$

进一步,

$$A_2 = \frac{(N'-D')!}{(n'-k')!(N'-D'-(n'-k'))!},$$

$$A_3 = \frac{n \cdot n'! (N' - n')!}{N \cdot N'!} = \frac{n}{N} \times \frac{n'! (N' - n')!}{N'!}.$$

记 $x' = x - 1$. 则 $\forall 1 \leq k \leq n$,

$$k \cdot h(N, D, n; k) = \frac{nD}{N} \times h(N', D', n'; k').$$

因此,

$$E(X) = \sum_{k=1}^n k \cdot h(N, D, n; k) = \frac{nD}{N} \sum_{k'=0}^{n'} h(N', D', n'; k') = \frac{nD}{N}$$

对于该期望, 当 $D = 1$ 时, 退化为伯努利分布, $E(X) = p = \frac{D}{N}$.

当 $D \geq 2$ 时, 不放回抽样, 仍有 $E(X) = np$.

5.1.2 一般随机变量的数学期望

若 X 为任意随机变量. 做如下近似: 对于 $\forall n \in \mathbb{Z}$,

$$\text{当 } n\varepsilon < X \leq (n+1)\varepsilon \text{ 时, 令 } X^* = n\varepsilon. \quad (5.1.1)$$

该假设的直观含义是: $X^* \leq X < X^* + \varepsilon$, 因此 $EX^* \leq EX < EX^* + \varepsilon$.

一般随机变量的数学期望: 若 EX^* 存在且当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时有极限, 则称 X 的期望存在, 且称该极限为 X 的期望, 记为 $E(X)$ 。

对离散型随机变量, 离散型随机变量期望的定义和一般随机变量的数学期望的定义一致。

例: 对于连续性随机变量 X , 且 $X \geq 0$. 证明 $E(X) = \int_0^{+\infty} P(X > x)dx$.

解: 令

$$G(x) = P(X > x) = \int_x^{\infty} p(y)dy$$

则 $G'(x) = -p(x)$. 于是,

$$\int_0^{\infty} xp(x)dx = \int_0^{\infty} x dG(x) = \int_0^{\infty} G(x)dx.$$

接下来, 我们计算一些常见连续型随机变量的数学期望:

(1) 均匀分布

设随机变量 X 服从区间 $[a, b]$ 上的均匀分布, 即 X 有密度分布:

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

由定义知

$$E(X) = \int_a^b x \frac{1}{b-a} dx = \frac{a+b}{2}.$$

(2) 指数分布

设随机变量 X 有分布密度

$$p(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x > 0, \lambda > 0.$$

由定义知 $E(X) = \int_0^{\infty} x \cdot \lambda e^{-\lambda x} dx = - \int_0^{\infty} x de^{-\lambda x} = \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda}$.

(3) 正态分布

设随机变量 X 有分布密度

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

对于 $X \sim N(0, 1)$, 由对称性直接计算得,

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 0$$

同理, $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则 $p(\mu+x) = p(\mu-x)$, 因此 $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x+\mu)p(\mu+x)d(x+\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x+\mu)dx + \mu \int_{-\infty}^{\infty} p(x+\mu)dx = \mu$.

例, 对于柯西分布,

$$p(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+x^2}.$$

但是, $\int_{-\infty}^{\infty} |x|p(x)dx = \infty$. 因此, EX 不存在!

(4) 伽马分布

设随机变量 X 有分布密度

$$p(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}, \quad x > 0$$

对于 $\forall x > 0$,

$$xp(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^\alpha e^{-\beta x} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\beta \Gamma(\alpha)} \cdot \frac{\beta^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1)} x^\alpha e^{-\beta x} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \hat{p}(x).$$

因此,

$$E(X) = \int_0^\infty xp(x)dx = \frac{\alpha}{\beta} \int_0^\infty \hat{p}(x)dx = \frac{\alpha}{\beta}$$

5.1.3 数学期望的性质

定理: (1) 若 $X \equiv a$, 则 $E(X) = a$;

(2) 若 $X \geq 0$, 且 $E(X)$ 存在, 则 $EX \geq 0$;

(3) 若 $F_X = F_Y$ (或, 若 $X = Y$), 且 $E(X)$ 存在, 则 $E(Y)$ 存在, 且 $E(X) = E(Y)$;

(4) 线性: 假设 $E(X), E(Y)$ 存在. 则,

$$E(a(X)) = aE(X), \quad E(X+Y) = E(X) + E(Y).$$

(5) 单调性: 假设 $E(X), E(Y)$ 存在, 又若 $X \geq Y$, 则 $E(X) \geq E(Y)$;

(6) $E|X| \geq |E(X)|$;

(7) 若随机变量 X, Y 独立, 且期望 $E(X), E(Y)$ 存在, 则

$$E(XY) = E(X)E(Y).$$

推论: (1) 线性: 假设 $E(X), E(Y)$ 存在. 则,

$$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y).$$

(2) 和的期望: 假设 $E(X_1), \dots, E(X_n)$ 都存在, $\eta = X_1 + \dots + X_n$. 则 $E(\eta)$ 存在, 且

$$E(\eta) = \sum_{i=1}^n E(X_i)$$

推论 (1) 可以由性质 (4) 推出, 推论 (2) 可以由数学归纳法和性质 (4) 推出。

例：超几何分布 $\eta \sim H(N, D, n)$ 的期望可以使用推论 (2) 计算：若第 i 个产品是次品，则令 $X_i = 1$ ；否则，令 $X_i = 0$ 。则，

$$\eta = X_1 + \cdots + X_n \Rightarrow E(\eta) = np$$

马尔科夫不等式：设 $X \geq 0$ ，且 EX 存在。则对任意 $C > 0$ ，有

$$P(X \geq C) \leq \frac{1}{C}EX.$$

证明：令 $A = \{X \geq C\}$ 。则 $1_A \leq \frac{X}{C}$ 。于是，

$$P(A) = E1_A \leq E\frac{X}{C} = \frac{1}{C}EX.$$

例：若 $X \geq 0$ ，且 $EX = 0$ ，证明 $P(X > 0) = 0$ 。

解：

$$\begin{aligned} P\left(X \geq \frac{1}{n}\right) &\leq nEX = 0 \\ \Rightarrow P(X > 0) &= \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(X \geq \frac{1}{n}\right) = 0. \end{aligned}$$

□

5.2 随机变量函数的期望

定理：(1) X 是离散型随机变量，且下面的级数绝对收敛，则

$$Ef(X) = \sum_k f(x_k) p_k \quad (5.2.1)$$

(2) X 是连续型随机变量，且下面的积分绝对收敛，则

$$Ef(X) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)p(x)dx. \quad (5.2.2)$$

例：(对应郑书例 6.1) 设 $X \sim U(0, 2\pi)$ ，求 $E(\sin X)$ 。

解：令 $p(x)$ 是 x 的分布密度，用公式：

$$E \sin X = \int_{-\infty}^{\infty} \sin x \cdot p(x)dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin x dx = 0$$

□

例：(对应郑书例 6.2) 设随机变量 X 服从参数为 λ 的指数分布，又 $v_0 > 0$,

$$Y = \begin{cases} X, & X < v_0, \\ v_0, & X \geq v_0, \end{cases}$$

求 $E(Y)$ 。

解：设 $f(x) = \min\{x, v_0\}$ ，则 $Y = f(X)$ ，由于 X 的分布密度是

$$p(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0, \\ 0, & X \leq 0, \end{cases}$$

由式 5.2.2 知

$$\begin{aligned} E(Y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)p(x)dx = \int_0^{+\infty} f(x)\lambda e^{-\lambda x}dx \\ &= \int_0^{v_0} x\lambda e^{-\lambda x}dx + \int_{v_0}^{+\infty} v_0\lambda e^{-\lambda x}dx \\ &= \frac{1}{\lambda}(1 - e^{-\lambda v_0}) \end{aligned}$$

□

琴生不等式：若 ϕ 为凸函数，则

$$\phi(E(X)) \leq E(\phi(X)).$$

将期望等价于平均，代入琴生不等式即可证明。

例：连续型随机变量 X, Y 的概率密度函数分别为 $p(x), q(x)$ 且 $p(x), q(x) \neq 0$ ， f 为一凸函数， $f(1) = 0$ ，证明： $E_{x \sim q} f\left(\frac{p(x)}{q(x)}\right) \geq 0$ 。

证明：由琴生不等式，

$$E_{x \sim q} f\left(\frac{p(x)}{q(x)}\right) \geq f\left(E_{x \sim q}\left(\frac{p(x)}{q(x)}\right)\right) = f\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{p(x)}{q(x)} q(x) dx\right) = f(1) = 0.$$

例：连续型随机变量 X, Y 的概率密度函数分别为 $p(x), q(x)$ 且 $p(x), q(x) \neq 0$ ，我们定义 X 关于 Y 的 KL-divergence 为 $KL(X||Y) = E_X\left(\ln \frac{p(x)}{q(x)}\right)$ ，试证明 $KL(X||Y) \geq 0$ 。

证明：

$$KL(X||Y) = \int p(x) \left(-\ln \frac{q(x)}{p(x)}\right) dx,$$

由于 $-\ln x$ 是凸函数，由琴生不等式知

$$\int p(x) \left(-\ln \frac{q(x)}{p(x)}\right) dx \geq -\ln \left(\int p(x) \frac{q(x)}{p(x)} dx\right) = -\ln 1 = 0.$$

□

例：设随机变量 X 服从参数为 λ 的泊松分布，证明

$$E(X^n) = \lambda E((X+1)^{n-1}).$$

利用此结果计算 $E(X^3)$ 。

证明：

$$E(X^n) = \sum_{k=0}^{\infty} k^n \frac{\lambda^n}{k!} e^{-\lambda} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} k^{n-1} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}$$

设 $k' = k - 1$ ，则

$$E(X^n) = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k'=0}^{\infty} (k'+1)^{n-1} \frac{\lambda^{k'}}{k'!} = \lambda E((X+1)^{n-1}).$$

由此得

$$E(X^3) = \lambda E(X+1)^2 = \lambda(E(X^2) + 2E(X) + 1) = \lambda(\lambda E(X+1) + 2\lambda + 1) = \lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda.$$

例：设 X 是仅取非负整数的离散随机变量，若其数学期望存在，证明

$$(1) E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} P(X \geq k).$$

$$(2) \sum_{k=0}^{\infty} kP(X > k) = \frac{1}{2}[E(X^2) - E(X)].$$

证明：(1) 由于 $E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} kP(X = k)$ 存在，所以该级数绝对收敛，从而

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=1}^{\infty} kP(X = k) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^k P(X = k) \right] \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \left[\sum_{k=i}^{\infty} P(X = k) \right] = \sum_{k=1}^{\infty} P(X \geq k). \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} kP(X > k) &= \sum_{k=0}^{\infty} k \sum_{i=k+1}^{\infty} P(X = i) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{i-1} kP(X = i) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} P(X = i) \frac{(i-1)i}{2} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} i^2 P(X = i) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} i P(X = i) \\ &= \frac{1}{2} E(X^2) - \frac{1}{2} E(X). \end{aligned}$$

例：甲乙两人进行象棋比赛，每局甲胜的概率为 p ，乙胜的概率为 $q = 1 - p$ ，比赛进行到有一人连胜两局为止，求平均比赛局数。

解：设 X 为决定胜负所需的局数，可以取值为 $2, 3, \dots$ ，事件 $\{X \geq k\}$ 表示“到 $k-1$ 局时没有一人连胜两局”，所以

$$P(X \geq 1) = 1,$$

$$P(X \geq 2k) = p^k q^{k-1} + p^{k-1} q^k = (pq)^{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

$$P(X \geq 2k+1) = 2p^k q^k, \quad k = 1, 2, \dots.$$

利用上一题第一问提供的公式，可得

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=1}^{\infty} P(X \geq k) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (pq)^{k-1} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (pq)^k \\ &= 1 + \frac{1}{1-pq} + \frac{2pq}{1-pq} = \frac{2+pq}{1-pq}. \end{aligned}$$

注意到对任意的 $0 < p < 1$ 总有 $p(1-p) \leq \frac{1}{4}$ ，故由 $E(X)$ 关于 pq 单调增可得

$$E(X) \leq \frac{2+\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}} = 3$$

故这种比赛最终决定胜负的平均局数不超过 3 局，在 $p = \frac{1}{2}$ 时达到上界。

5.3 随机变量的方差

随机变量的方差和标准差：假设 $E(X)$ 存在，且 $E(X - EX)^2$ 也存在。则称 $E(X - EX)^2$ 为 X 的方差，记为 $\text{var}(X)$ 或 $D(X)$ 。称 $\sqrt{\text{var}(X)}$ 为标准差。

切比雪夫不等式：设 X 是随机变量，如果 $E(X)$ 和 $\text{var}(X)$ 都存在，则 $\forall \varepsilon > 0$ ，有

$$P(|X - EX| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \text{var}(X). \quad (5.3.1)$$

证明： $\{|X - EX| \geq \varepsilon\} = \{(X - EX)^2 \geq \varepsilon^2\}$ ，对 $Y = (X - EX)^2$ 用马尔可夫不等式，得

$$P(|X - EX| \geq \varepsilon) = P(Y \geq \varepsilon^2) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} E(Y).$$

□

推论：若 $\text{var}(X) = 0$ ，则

$$P(X = E(X)) = 1.$$

证明：由切比雪夫不等式知

$$P(|X - E(X)| \geq \frac{1}{n}) = 0 \quad (n = 1, 2, \dots),$$

于是

$$\begin{aligned} P(X \neq E(X)) &= P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{|X - E(X)| \geq \frac{1}{n}\right\}\right) \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} P(|X - E(X)| \geq \frac{1}{n}) = 0. \end{aligned}$$

所以 $P(X = E(X)) = 1$ 。 □

对于方差的计算方法，有以下定理：

定理： X 为一般随机变量，且期望 $E(X^2)$ 和 $E(X)$ 存在，则

$$\text{var}(X) = E(X^2) - (EX)^2. \quad (5.3.2)$$

证明：

$$\begin{aligned} \text{var}(X) &= E(X^2 - 2X \cdot EX + (EX)^2) \\ &= E(X^2) - 2E(X) \cdot E(X) + (E(X))^2 = E(X^2) - (EX)^2 \end{aligned}$$

具体地，离散型或连续型的公式如下：

$$\begin{aligned} \text{var}(X) &= \sum_k x_k^2 p_k - (EX)^2 \\ \text{var}(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x) dx - (EX)^2 \end{aligned}$$

□

定理： X 的线性变换的方差：

$$\text{var}(aX + b) = a^2 \text{var}(X)$$

该定理可以利用式5.3.2计算。

$$\begin{aligned} \text{var}(aX + b) &= E((aX + b)^2) - (E(aX + b))^2 \\ &= (a^2 E(X^2) + 2abE(X) + b^2) - (a^2 (E(X))^2 + 2abE(X) + b^2) \\ &= a^2 (E(X^2) - (E(X))^2) = a^2 \text{var}(X) \end{aligned}$$

□

定理： 设 X 为随机变量，则方差 $D(X) = \inf_{c \in \mathbb{R}} E(X - c)^2$ 。

证明：【方法一】 利用 $E(X + c) = E(X) + c$ 与 $D(X + c) = D(X)$ ，可得

$$D(X) = D(X - c) = E(X - c)^2 - (E(X - c))^2 \leq E(X - c)^2.$$

等号成立条件是 $E(X) = c$ 。

【方法二】利用

$$\begin{aligned} E(X - c)^2 &= E(X - E(X) + E(X) - c)^2 \\ &= D(X) + 2E[(X - E(X))(E(X) - c)] + (E(X) - c)^2 \\ &= D(X) + (E(X) - c)^2. \end{aligned}$$

在 $c = E(X)$ 处取得最小值 $D(X)$ 。 □

下面计算常见随机变量的方差：

(1) 两点分布

设随机变量 X 服从两点分布，即 $X \sim B(1, p)$ ，根据之前的计算 $E(X) = p$ ， $E(X^2) = 0^2 \cdot P(X = 0) + 1^2 \cdot P(X = 1) = p$ ，由式 5.3.2 知

$$D(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = p - p^2 = p(1 - p)$$

(2) 二项分布

设随机变量 X 服从参数为 n, p 的二项分布，即

$$P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k} =: b(n; k), \quad k = 0, 1, \dots, n, (q = 1 - p).$$

已经计算期望 $EX = np$ ，且由分布函数知，对于 $\forall 1 \leq k \leq n$ ，

$$k \cdot b(n; k) = np \cdot b(n - 1, k - 1).$$

那么对于 $\forall 2 \leq k \leq n$ ，

$$\begin{aligned} k(k - 1) \cdot b(n; k) &= np \cdot (k - 1) \cdot b(n - 1, k - 1) \\ &= np \cdot (n - 1)p \cdot b(n - 2, k - 2) \end{aligned}$$

于是，

$$E(X(X - 1)) = \sum_{k=2}^n k(k - 1) \cdot b(n; k) = np(n - 1)p \sum_{k=2}^n b(n - 2; k - 2) = np(n - 1)p = (np)^2 - np^2,$$

从而

$$D(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = E(X(X - 1)) + E(X) - (E(X))^2 = npq.$$

(3) 泊松分布

设随机变量 X 服从参数为 λ 的泊松分布, 即

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

已经计算 X 的期望 $E(X) = \lambda$, 且由分布函数, $\forall k \geq 1, kp_k = \lambda p_{k-1}$. 因此, 对于 $\forall k \geq 2$,

$$k(k-1)p_k = \lambda(k-1)p_{k-1} = \lambda^2 p_{k-2}.$$

于是,

$$E(X(X-1)) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) \cdot p_k = \lambda^2 \sum_{k=2}^{\infty} p_{k-2} = \lambda^2,$$

从而

$$Dvar(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = E(X(X-1)) + E(X) - (E(X))^2 = \lambda.$$

(4) 均匀分布

设随机变量 X 服从区间 $[a, b]$ 上的均匀分布, 即 X 有密度分布:

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

已经计算 X 的期望 $E(x) = \frac{a+b}{2}$, 且

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x) dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b x^2 dx = \frac{b^2 + ab + a^2}{3}.$$

由式5.3.2得

$$D(X) = \frac{b^2 + ab + a^2}{3} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

(5) 指数分布

设随机变量 X 服从参数为 λ 的指数分布, 即 X 的分布函数为:

$$p(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0, \\ 0, & X \leq 0, \end{cases}$$

已经计算期望 $E(X) = \frac{1}{\lambda}$, 且

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x) dx = \lambda \int_0^{+\infty} x^2 e^{-\lambda x} dx = \frac{2}{\lambda^2}$$

由式5.3.2得

$$D(X) = \frac{2}{\lambda^2} - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$

(6) 正态分布

设随机变量 X 服从正态分布, 即 X 的分布函数为:

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

若 $\mu = E(X) = 0, \sigma^2 = 1$, 则,

$$\begin{aligned} D(X) &= E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\ &= -\frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} x d e^{-\frac{x^2}{2}} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1 \end{aligned}$$

一般情形, 做变量替换 $Y = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$. 则

$$\begin{aligned} X - E(X) &= (\mu + \sigma Y) - (\mu + \sigma E(Y)) = \sigma(Y - E(Y)) \\ \Rightarrow D(X) &= E((X - E(X))^2) = E(\sigma(Y - E(Y))^2) = \sigma^2 D(Y) = \sigma^2 \end{aligned}$$

(7) 伽马分布

设随机变量 X 服从伽马分布, 有分布密度

$$p(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}, \quad x > 0$$

已经计算 X 的期望 $E(X) = \frac{\alpha}{\beta}$, 由式5.3.2知

$$D(X) = \int_0^{+\infty} x^2 \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} dx - \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2$$

做变量替换 $\beta x = t$, 易知

$$\begin{aligned} D(X) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^2} \int_0^{+\infty} t^{\alpha+1} e^{-t} dt - \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^2} \Gamma(\alpha+2) - \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 \\ &= \frac{(\alpha+1)\alpha\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha)\beta^2} - \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 = \frac{\alpha}{\beta^2} \end{aligned}$$

随机变量的标准化: 一般地, 若 X 的方差存在, 且 $\text{var}(X) > 0$, 则

$$X^* = \frac{X - E(X)}{\sqrt{\text{var}(X)}}$$

满足 $E(X^*) = 0, \text{var}(X^*) = 1$. 称 X^* 为 X 的标准化。

例：设随机变量 $X \sim N(0, 1)$, 则对一切正整数 k ,

$$E(X^{2k-1}) = 0, \quad E(X^{2k}) = (2k-1)(2k-3)\cdots 3 \cdot 1.$$

证明：对任何 $m \geq 1$, 积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} |x|^m e^{-x^2/2} dx$ 收敛, 因此 $E(X^m)$ 存在, 由于

$$x^{2k-1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

是 x 的奇函数, 故

$$E(X^{2k-1}) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2k-1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx = 0$$

$$\begin{aligned} E(X^{2k}) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2k} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x^{2k-1} d(e^{-x^2/2}) \\ &= (2k-1) \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2k-2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx \\ &= (2k-1) E(X^{2k-2}). \end{aligned}$$

这是递推公式, 故

$$E(X^{2k}) = (2k-1)(2k-3)\cdots 3 \cdot 1$$

例：设随机变量 X 的概率密度函数为 $f(x) = \frac{k\theta^k}{x^{k+1}}, x > \theta > 0, k > 2$ 为正整数, 求 (1) $E(X)$, (2) $D(X)$.

解：(1):

$$E(X) = \int_{\theta}^{+\infty} \frac{k\theta^k}{x^{k+1}} x dx = \frac{k\theta}{k-1}.$$

(2):

$$D(X) = \int_{\theta}^{+\infty} \frac{k\theta^k}{x^{k+1}} x^2 dx - (E(X))^2 = \frac{3k-2k^2}{(k-2)(k-1)^2}.$$

例：设连续随机变量 X 的分布函数为 $F(x)$, 且数学期望存在, 证明:

$$E(X) = \int_0^{\infty} [1 - F(x)] dx - \int_{-\infty}^0 F(x) dx.$$

证明：

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x) dx = \int_{-\infty}^0 xp(x) dx + \int_0^{\infty} xp(x) dx.$$

将第一个积分改写为:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^0 xp(x)dx &= \int_{-\infty}^0 -\left(\int_x^0 dy\right)p(x)dx \\ &= -\int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^y p(x)dx dy \\ &= -\int_{-\infty}^0 F(y)dy.\end{aligned}$$

第二个积分同理,

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} xp(x)dx &= \int_0^{\infty} \left(\int_0^x dy\right)p(x)dx \\ &= \int_0^{\infty} \int_y^{\infty} p(x)dx dy \\ &= \int_0^{\infty} [1 - F(y)]dy.\end{aligned}$$

将二式加和即可得

$$E(X) = \int_0^{\infty} [1 - F(x)]dx - \int_{-\infty}^0 F(x)dx.$$

5.4 随机变量的其他数学特征

原点矩和中心矩:

设 X 是随机变量, 如果 $E(X^k)$ 存在 (k 是正整数), 则称 $E(X^k)$ 是 X 的 k 阶原点矩, 常常记为 ν_k 。

设 X 是随机变量, 如果 $E(X)$ 存在, 且 $E(X - E(X))^k$ 存在 (k 是正整数), 则称 $E(X - E(X))^k$ 为 X 的 k 阶中心矩, 常常记为 μ_k 。

显然, $E(X) = \nu_1$, $\text{var}(X) = \mu_2$ 。

随机变量的 p 分位数: 若 X 是随机变量, $0 < p < 1$, 且

$$P(X < a) \leq p \leq P(X \leq a),$$

则称 a 为 X 的一个 p 分位数。

$p = 0.5$ 时, 也称 a 为一个中位数。

例: 设随机变量 X 的可能值是 1, 2, 3 且

$$P(X = 1) = \frac{1}{3}, \quad P(X = 2) = \frac{1}{6}, \quad P(X = 3) = \frac{1}{2}.$$

则 $E(X) = \frac{13}{6}$, 中位数有无穷个, 区间 $[2, 3]$ 中的每个数都是 X 的中位数。

例: (对应郑书例 8.3) 设随机变量 $X \sim N(0, 1)$, 则对一切正整数 k ,

$$E(x^{2k-1}) = 0, \quad E(X^{2k}) = (2k-1)(2k-3) \cdots 3 \cdot 1.$$

□

定理: 设 $X = X(\omega)$ 是随机变量, 对某个 $\alpha \geq 1$, $E(|X|^\alpha)$ 存在, 则 $E(X)$ 存在, 且

$$E(|X|) \leq (E(|X|^\alpha))^{1/\alpha}.$$

证明: 首先指出, 对一切 $x \geq 0$, $\alpha \geq 0$, 如下不等式成立:

$$x^\alpha \geq a^\alpha + \alpha a^{\alpha-1}(x-a). \quad (5.4.1)$$

实际上, 令 $f(x) = x^\alpha - a^\alpha - \alpha a^{\alpha-1}(x-a)$, 则 $f'(x) = \alpha(x^{\alpha-1} - a^{\alpha-1})$, 从而 $f(x)$ 在 $x = a$ 处达到最小值, 由于 $f(a) = 0$, 因此式 5.4.1 成立。

由于 $\alpha \geq 1$, 有 $|X(\omega)| \leq |X(\omega)|^\alpha + 1$, 知 $E(X)$ 存在。令 $a = E(X)$, 由式 5.4.1 知

$$|X(\omega)|^\alpha \geq (E(|X|))^\alpha + \alpha(E(|X|))^{\alpha-1}(|X(\omega)| - E(|X|)).$$

两侧取数学期望, 得 $(E(|X|))^\alpha \leq E(|X|^\alpha)$, 表明定理成立。

□

6.1 随机向量的定义

n 维随机向量：称 n 个随机变量 X_1, \dots, X_n 的整体 $\xi = (X_1, \dots, X_n)$ 为 n 维随机向量（或者 n 维随机变量），一维随机向量简称随机变量。

n 维随机变量数学上的精确定义：设 $X_1 = X_1(\omega), \dots, X_n = X_n(\omega)$ 都是概率空间 (Ω, \mathcal{F}, P) 上的随机变量，则称

$$\xi = \xi(\Omega) \triangleq (X_1(\omega), \dots, X_n(\omega))$$

为概率空间 (Ω, \mathcal{F}, P) 上的 n 维随机向（变）量。

例如，用炮弹向远处目标攻击，炮弹的落点用平面坐标系中的坐标表示为 (X, Y) ，是一个二维随机向量。

随机向量的函数：设 $X_1 = X_1(\omega), \dots, X_n = X_n(\omega)$ 是 n 个随机变量， $f(x_1, \dots, x_n)$ 是 n 元实值函数，则称随机变量 $Y \triangleq f(x_1, \dots, x_n)$ 为随机变量 X_1, \dots, X_n 的函数（即随机向量 (X_1, \dots, X_n) 的函数）。

6.2 二维随机变量的联合分布和边缘分布

6.2.1 离散情形

离散型二维随机向量：称二维随机向量 $\xi = (X, Y)$ 是离散型的，若它只取至多可列个不同的值，即 ξ 可能取的值可以排成一个（有限或无穷序列）。

二维离散型随机向量的概率分布：设 $\xi = (X, Y)$ 是二维离散型随机向量，其可能值是 a_1, a_2, \dots （有限个或者无穷可列个）， $p_i \triangleq P(\xi = a_i) (i = 1, 2, \dots)$ ，则称

$$\{p_i : i = 1, 2, \dots\}$$

为 ξ 的概率分布，也称为 ξ 的概率函数或概率分布律。 $\xi = (X, Y)$ 的概率分布也叫做 (X, Y) 的联合概率分布（简称联合分布）。

令

$$p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j) \quad (i, j = 1, 2, \dots),$$

$\{p_{ij}\}$ 就是 $\xi = (X, Y)$ 的概率分布，可以用表6.3来表示，表6.3也称 $\xi = (X, Y)$ 的概率分布表。

联合分布满足性质：

表 6.3: (X, Y) 的概率分布表。

| $X \backslash Y$ | | | | | |
|------------------|----------|----------|----------|----------|----------|
| | y_1 | y_2 | \cdots | y_j | \cdots |
| x_1 | p_{11} | p_{12} | \cdots | p_{1j} | \cdots |
| x_2 | p_{21} | p_{22} | \cdots | p_{2j} | \cdots |
| \vdots | \vdots | \vdots | \vdots | \vdots | \vdots |
| x_i | p_{i1} | p_{i2} | \cdots | p_{ij} | \cdots |
| \vdots | \vdots | \vdots | \vdots | \vdots | \vdots |

(1) 非负性: $p_{ij} \geq 0, i, j = 1, 2, \cdots$;

(2) 规范性: $\sum_{i,j} p_{ij} = 1$ 。

例: (三项分布) 设二维随机向量 $\xi = (X, Y)$ 取值于集合 $E = \{(k_1, k_2) : k_1 \text{ 和 } k_2 \text{ 都是非负整数且 } k_1 + k_2 \leq n\}$, ξ 的概率分布是:

$$P((X, Y) = (k_1, k_2)) = \frac{n!}{k_1!k_2!(n - k_1 - k_2)!} p_1^{k_1} p_2^{k_2} (1 - p_1 - p_2)^{n - k_1 - k_2},$$

其中 $n \geq 1, 0 < p_1, 0 < p_2, p_1 + p_2 < 1, (k_1, k_2) \in E$, 这时称 ξ 服从三项分布。

例: 有一大批量粉笔, 其中 60% 是白的, 25% 是黄的, 15% 是红的, 现从中随机的依次取出 6 支, 问: 其中恰有 3 支白色, 1 支黄色, 2 支红色的概率是多少?

解: 令 $X =$ “6 支中白粉笔的个数”, $Y =$ “6 支中黄粉笔的个数”, 则事件 “6 支中恰有 3 支白色, 1 支黄色, 2 支红色” 就是事件

$$\{X = 3, Y = 1\}, \text{ 即 } \{(X, Y) = (3, 1)\}.$$

由三项分布, 概率可表示为

$$P((X, Y) = (3, 1)) = \frac{6!}{3!1!2!} 0.6^3 \times 0.25 \times 0.15^2.$$

用组合数方法同样可以得到上述结果。

一般的, 对于满足 $k_1 \geq 0, k_2 \geq 0$ 及 $k_1 + k_2 \leq 6$ 的 k_1, k_2 , 由三项分布有

$$P((X, Y) = (k_1, k_2)) = \frac{6!}{k_1!k_2!(6 - k_1 - k_2)!} 0.6^{k_1} \times 0.25^{k_2} \times 0.15^{6 - k_1 - k_2}.$$

□

二维随机向量的边缘分布: 对于二维随机向量 $\xi = (X, Y)$, 分量 X 的概率分布称为 ξ 关于 X 的**边缘分布**, 分量 Y 的概率分布称为 ξ 关于 Y 的**边缘分布**。

二维随机向量 $\xi = (X, Y)$ 的两个边缘分布均由 ξ 的概率分布完全确定。

例: 从 $1, 2, 3, 4$ 中任取一数记为 X , 再从 $1, \dots, X$ 中任取一数记为 Y , 求 (X, Y) 的联合分布列及 $P(X = Y)$ 。

解: 易知 X 的分布列为:

$$P(X = i) = \frac{1}{4}, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

显然, $P(X = i, Y = j) = 0, j > i, i = 1, 2, 3, 4$, 当 $1 \leq j \leq i \leq 4$ 时, 由乘法公式得

$$P(X = i, Y = j) = P(X = i)P(Y = j|X = i) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{i} = \frac{1}{4i}.$$

从而 (X, Y) 的分布列为 由此可算得

| $Y \backslash X$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|------------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| 1 | $\frac{1}{4}$ | 0 | 0 | 0 |
| 2 | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | 0 | 0 |
| 3 | $\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{12}$ | 0 |
| 4 | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{16}$ |

$$P(X = Y) = \sum_{i=1}^4 P(X = Y = i) = \sum_{i=1}^4 \frac{1}{4i} = \frac{25}{48}.$$

□

例: (对应郑书例 2.5) 设随机变量 X 取值是 0 或 1, 随机变量 Y 取值也是 0 或 1, 且二维随机向量 (X, Y) 的概率分布是

$$P((X, Y) = (0, 0)) = \frac{1}{4} + \varepsilon, \quad P((X, Y) = (0, 1)) = \frac{1}{4} - \varepsilon,$$

$$P((X, Y) = (1, 0)) = \frac{1}{4} - \varepsilon, \quad P((X, Y) = (1, 1)) = \frac{1}{4} + \varepsilon,$$

其中 $0 \leq \varepsilon \leq \frac{1}{4}$ 。

易知不同的 ε 对应不同的联合分布, 但是

$$P(X = 0) = P((X, Y) = (0, 0)) + P((X, Y) = (0, 1)) = \frac{1}{2},$$

$$P(X=1) = P((X,Y)=(1,0)) + P((X,Y)=(1,1)) = \frac{1}{2}.$$

同理,

$$P(Y=0) = P(Y=1) = \frac{1}{2},$$

由此可见, 两个边缘分布均与 ε 无关, 表明有无穷多个不同的联合分布具有相同的边缘分布。

6.2.2 连续情形

连续型随机向量及其联合密度函数: 设 $\xi = (X, Y)$ 为二维随机向量, 若存在非负函数 $p(x, y)$ 使得

$$P(\xi \in D) = \iint_D p(x, y) dx dy,$$

对任意开矩形 D 成立, 则称 ξ 为**连续型随机向量**, 称 $p(x, y)$ 为 ξ 的**联合密度** (函数), 也称**概率分布密度函数**, 记为 $p_{X,Y}(x, y)$.

对于二维连续型随机向量 $\xi = (X, Y)$, 对于平面上任意的集合 A , 有

$$P(\xi \in A) = \iint_A p(x, y) dx dy, \quad (6.2.1)$$

联合密度满足归一性:

$$p(x, y) \geq 0; \quad \iint_{\mathbb{R}^2} p(x, y) dx dy = 1.$$

例: (对应郑书例 2.6) 设二维随机向量 $\xi = (X, Y)$ 的联合密度为

$$p(x, y) = \begin{cases} ce^{-(x+y)}, & x \geq 0 \text{ 且 } y \geq 0, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$$

其中 c 是一个常数, 求:

(1) c 的值; (2) $P(0 < X < 1, 0 < Y < 1)$.

解: (1) 由归一性知

$$1 = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} ce^{-(x+y)} dx dy = c \int_0^{+\infty} e^{-x} dx \cdot \int_0^{+\infty} e^{-y} dy$$

于是 $c = 1$.

(2) 取 $D = \{(x, y) : 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$, 由定义知

$$P(0 < X < 1, 0 < Y < 1) = P((X, Y) \in D) = \int_0^1 \int_0^1 e^{-(x+y)} dx dy$$

$$= \int_0^1 e^{-x} dx \cdot \int_0^1 e^{-y} dy = (1 - e^{-1})^2.$$

□

定义：设 G 是平面上面积为 $a(0 < a < +\infty)$ 的区域，称二维随机向量 $\xi = (X, Y)$ 服从 G 上的**均匀分布**，若 $P((X, Y) \in G) = 1$ ，且 (X, Y) 取值属于 G 的任何部分 A (A 是 G 的子区域) 的概率与 A 的面积成正比。容易推知二维随机向量 $\xi = (X, Y)$ 有联合密度为

$$p(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{a}, & (x, y) \in G, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases} \quad (6.2.2)$$

连续型随机向量的边缘分布：设 $p(x, y)$ 是二维随机向量 $\xi = (X, Y)$ 的联合密度，则

$$p_X(x) \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y) dy, \quad p_Y(y) \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y) dx$$

分别是 X, Y 的分布密度。

证明：对任何 $a < b$ ，令 $A = \{(x, y) : a < x < b, -\infty < y < +\infty\}$ ，由式6.2.1知

$$\begin{aligned} P((X, Y) \in A) &= P(a < X < b) = \int_a^b \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y) dx dy \\ &= \int_a^b \left(\int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y) dy \right) dx = \int_a^b p_X(x) dx. \end{aligned}$$

这表明 $p_X(x)$ 是 X 的分布密度，同理知 $p_Y(y)$ 是 Y 的分布密度。 □

例：(对应郑书例 2.7) 设 G 是由抛物线 $y = x^2$ 和直线 $y = x$ 所围成的区域 (图6.3) 若二维随机向量 $\xi = (X, Y)$ 服从 G 上的均匀分布，试求 ξ 的联合分布和两个边缘分布密度。

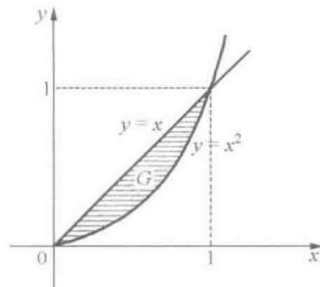


图 6.3: 区域 G 的示意图

解：由于 G 的面积为

$$\int_0^1 (x - x^2) dx = \frac{1}{6},$$

由式6.2.2知联合密度为

$$p(x, y) = \begin{cases} 6, & (x, y) \in G, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$$

得 X 的分布密度 $p_X(x)$ 和 Y 的分布密度 $p_Y(y)$ 分别如下：

$$\begin{aligned} p_X(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y) dy \\ &= \int_{x^2}^x 6 dy = 6(x - x^2) \quad (0 \leq x \leq 1), \\ p_X(x) &= 0 \quad (x \notin [0, 1]), \\ p_Y(y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y) dx \\ &= \int_y^{\sqrt{y}} 6 dx = 6(\sqrt{y} - y) \quad (0 \leq y \leq 1), \\ p_Y(y) &= 0 \quad (y \notin [0, 1]). \end{aligned}$$

□

由定义知边缘密度函数由联合密度确定，但是不同的联合密度可能有相同的边缘分布密度，即联合密度不能由两个边缘分布密度完全确定。

例：设二维随机向量 $\xi = (X, Y)$ 有联合密度

$$p_1(x, y) = \frac{1}{2\pi} \exp\left\{-\frac{1}{2}(x^2 + y^2)\right\},$$

二维随机向量 $\eta = (U, V)$ 有联合密度

$$p_2(x, y) = \begin{cases} 2p_1(x, y), & xy \geq 0, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

则 X 与 U 有相同的分布密度， Y 与 V 有相同的分布密度。

一方面，当 $x \leq 0$ 时，

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} p_2(x, y) dy &= \int_{-\infty}^0 2p_1(x, y) dy = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^0 e^{-(x^2+y^2)/2} dy \\ &= \frac{1}{\pi} e^{-x^2/2} \int_{-\infty}^0 e^{-y^2/2} dy = \frac{1}{\pi} e^{-x^2/2} \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2/2} dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}. \end{aligned}$$

类似的, 当 $x > 0$ 时,

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} p_2(x, y) dy &= \int_0^{+\infty} 2p_1(x, y) dy \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)/2} dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}.\end{aligned}$$

即, 对一切 x , $\int_{-\infty}^{+\infty} p_2(x, y) dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$.

同理, 对一切 y , $\int_{-\infty}^{+\infty} p_2(x, y) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2}$.

6.2.3 一般情形

一般二维随机向量及其联合分布函数: 设 $\xi = (X, Y)$ 是二维随机向量, 则称

$$F(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y) \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

为 ξ 的分布函数。也称为 (X, Y) 的**联合分布函数**。

分布函数 $F(x, y)$ 有以下性质:

- (1) $0 \leq F(x, y) \leq 1$;
- (2) $F(x, y)$ 是 x 的右连续增函数, 也是 y 的右连续增函数;
- (3) $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x, y) = 0, \lim_{y \rightarrow -\infty} F(x, y) = 0$;
- (4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x, y) = P(Y \leq y), \lim_{y \rightarrow +\infty} F(x, y) = P(X \leq x)$;
- (5) 对任何 $x_1 \leq x_2, y_1 \leq y_2$, 有

$$F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1) \geq 0.$$

对性质 (1) - (4) 可以效仿一维随机变量的证明。

现在证明性质 (5), 我们指出, 对一切 $x_1 \leq x_2, y_1 \leq y_2$, 有

$$\begin{aligned}P(x_1 < X \leq x_2, y_1 < Y \leq y_2) &= P(x_1 < X \leq x_2, Y \leq y_2) - P(x_1 < X \leq x_2, Y \leq y_1) \\ &= P(X \leq x_2, Y \leq y_2) - P(X \leq x_1, Y \leq y_2) \\ &\quad - [P(X \leq x_2, Y \leq y_1) - P(X \leq x_1, Y \leq y_1)] \\ &= F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2) - [F(x_2, y_1) - F(x_1, y_1)]\end{aligned}$$

由 $P(x_1 < X \leq x_2, y_1 < Y \leq y_2) \geq 0$ 知性质 (5) 成立。

□

若二维随机向量 $\xi = (X, Y)$ 有联合密度 $p(x, y)$, 则 ξ 的联合分布函数 $F(x, y)$ 与联合密度 $p(x, y)$ 有关系式

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y p(u, v) du dv. \quad (6.2.3)$$

例: 设二维随机向量 (X, Y) 有密度函数

$$p(x, y) = \begin{cases} Ce^{-(2x+y)}, & x > 0, y > 0, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

求 (1) 常数 C 的值; (2) 联合分布函数 $F(x, y)$; (3) 概率 $P(X \leq Y)$ 。

解: (1) 由于

$$1 = C \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y) dx dy = C \int_0^{+\infty} e^{-2x} dx \int_0^{+\infty} e^{-y} dy = \frac{C}{2}$$

得 $C = 2$ 。

(2) 利用公式

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^x p(t, r) dt dr \\ &= \begin{cases} \int_0^y \int_0^x 2e^{-2t-r} dt dr, & x > 0, y > 0, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases} \\ &= \begin{cases} (1 - e^{-2x})(1 - e^{-y}), & x > 0, y > 0, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases} \end{aligned}$$

(3) 设区域 $G = \{(x, y) | x \leq y\}$, 则

$$P(X \leq Y) = P((X, Y) \in G) = \iint_G p(x, y) dy dx = \int_0^{+\infty} \int_x^{+\infty} 2e^{-2x-y} dy dx = \frac{2}{3}.$$

□

例: 设 (X, Y) 的联合密度函数为

$$p(x, y) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1, |y| < x, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

求边际密度函数。

解: 根据定义

$$p_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y) dy = \begin{cases} \int_{-x}^x 1 dy = 2x & x \in (0, 1), \\ 0, & x \notin (0, 1). \end{cases}$$

$$p_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y) dx = \begin{cases} \int_y^1 1 dx = 1 - y & y \in [0, 1), \\ \int_{-y}^1 1 dx = 1 + y, & y \in (-1, 0), \\ 0, & y \notin (-1, 1). \end{cases}$$

□

6.2.4 二维正态分布

二维正态分布：若 $\xi = (X, Y)$ 的联合密度 $p(x, y)$ 有如下表达式，则称 ξ 服从二维（元）正态分布。

$$\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{u^2 + v^2 - 2\rho uv}{2(1-\rho^2)}\right\}, \quad (6.2.4)$$

其中,

$$u = \frac{x - \mu_1}{\sigma_1}, \quad v = \frac{y - \mu_2}{\sigma_2},$$

共有 5 个参数: $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}, \sigma_1, \sigma_2 > 0, \rho \in (-1, 1)$

例：设二维随机向量 $\xi = (X, Y)$ 服从二维正态分布，试求出 X 的分布密度和 Y 的分布密度。

解：设 X 的分布密度为 $p_X(x)$ ，做变量代换 $v = \frac{y - \mu_2}{\sigma_2}$ ，得

$$\begin{aligned} p_X(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y) dy \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left(\frac{x - \mu_1}{\sigma_1}\right)^2\right\} \\ &\quad \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left[\left(\frac{y - \mu_2}{\sigma_2}\right)^2 - 2\rho \frac{y - \mu_2}{\sigma_2} \frac{x - \mu_1}{\sigma_1}\right]\right\} dy \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left(\frac{x - \mu_1}{\sigma_1}\right)^2\right\} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)} [v^2 - 2\rho v \frac{x - \mu_1}{\sigma_1}]\right\} dv \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)} [v^2 - 2\rho v \frac{x - \mu_1}{\sigma_1}]\right\} dv \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left[\left(v - \rho \frac{x - \mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - \rho^2 \left(\frac{x - \mu_1}{\sigma_1}\right)^2\right]\right\} dv \\ &= \exp\left\{\frac{\rho^2}{2(1-\rho^2)} \left(\frac{x - \mu_1}{\sigma_1}\right)^2\right\} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left(v - \rho \frac{x - \mu_1}{\sigma_1}\right)^2\right\} dv \end{aligned}$$

$$= \exp \left\{ \frac{\rho^2}{2(1-\rho^2)} \left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1} \right)^2 \right\} \sqrt{2\pi(1-\rho^2)}.$$

于是

$$p_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \exp \left\{ -\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2} \right\}.$$

同理知

$$p_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} \exp \left\{ -\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2} \right\}.$$

这表明 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$.

例：假定 $(\xi_1, \xi_2) \sim N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$ ，试求 (ξ_1, ξ_2) 落在

$$D = \left\{ (x, y) \mid \left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1} \right)^2 - 2\rho \frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2} \right)^2 \leq \lambda^2 \right\}$$

内的概率。

解：所求概率

$$\begin{aligned} \iint_D p(x, y) dx dy &= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \\ &\times \iint_D \exp \left\{ -\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left[\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1} \right)^2 - 2\rho \frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2} \right)^2 \right] \right\} dx dy \end{aligned}$$

做变量代换 $u = \frac{x-\mu_1}{\sigma_1} - \rho \frac{y-\mu_2}{\sigma_2}$, $v = \sqrt{1-\rho^2} \frac{y-\mu_2}{\sigma_2}$, 则

$$\left| \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \right| = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sigma_1} & 0 \\ -\frac{\rho}{\sigma_2} & \frac{\sqrt{1-\rho^2}}{\sigma_2} \end{vmatrix} = \frac{\sqrt{1-\rho^2}}{\sigma_1\sigma_2}, \quad |J| = \frac{\sigma_1\sigma_2}{\sqrt{1-\rho^2}}.$$

从而

$$\begin{aligned} \iint_D p(x, y) dx dy &= \frac{1}{2\pi(1-\rho^2)} \iint_{\{u^2+v^2 \leq \lambda^2\}} \exp \left\{ -\frac{u^2+v^2}{2(1-\rho^2)} \right\} du dv \\ &= \frac{1}{2\pi(1-\rho^2)} \int_0^{2\pi} \int_0^\lambda \exp \left\{ -\frac{r^2}{2(1-\rho^2)} \right\} r dr d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\lambda^2}{2(1-\rho^2)}} e^{-t} dt = 1 - \exp \left\{ -\frac{\lambda^2}{2(1-\rho^2)} \right\}. \end{aligned}$$

□

6.3 条件分布

条件分布函数：设 X 和 Y 是两个随机变量，给定实数 y ，如果 $P(Y = y) > 0$ ，则称 x 的函数 $P(X \leq x|Y = y)$ 为在 $Y = y$ 的条件下 X 的**条件分布函数**，记作 $F_{X|Y}(x|y)$ ，显然，根据条件概率的定义，有

$$F_{X|Y}(x|y) = \frac{P(X \leq x, Y = y)}{P(Y = y)}.$$

6.3.1 离散型情形

设 (X, Y) 是二维离散型随机向量，其概率分布为

$$P(X = x_i, Y = y_j) = p_{ij} \quad (i = 1, 2, \dots; j = 1, 2, \dots),$$

这里 $P(Y = y_i) > 0 \quad (j \geq 1)$ ，则在 $Y = y_i$ 的条件下 X 的条件分布为

$$P(X = x_i|Y = y_j) = \frac{P(X = x_i, Y = y_j)}{P(Y = y_j)} = \frac{p_{ij}}{\sum_k p_{kj}} \quad (i = 1, 2, \dots).$$

例：设随机变量 X 与 Y 相互独立， X 服从参数为 λ_1 的泊松分布， Y 服从参数为 λ_2 的泊松分布，试求在 $X + Y = n$ 条件下 X 的条件分布 (n 为正整数)。

解：由于 $X + Y$ 服从参数为 $\lambda_1 + \lambda_2$ 的泊松分布，故对 $k = 0, 1, \dots, n$ 有

$$\begin{aligned} P(X = k|X + Y = n) &= \frac{P(X = k, X + Y = n)}{P(X + Y = n)} \\ &= \frac{P(X = k)P(Y = n - k)}{P(X + Y = n)} \\ &= \frac{\lambda_1^k}{k!} e^{-\lambda_1} \frac{\lambda_2^{n-k}}{(n-k)!} e^{-\lambda_2} \bigg/ \left[\frac{1}{n!} (\lambda_1 + \lambda_2)^n e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)} \right] \\ &= C_n^k \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \right)^k \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \right)^{n-k}. \end{aligned}$$

这表明，在 $X + Y = n$ 的条件下 X 的条件分布列为参数为 $n, \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$ 的二项分布。 \square

例：设随机变量 X 与 Y 相互独立，都服从参数是 n, p 的二项分布，试求在 $X + Y = m (0 \leq m \leq 2n)$ 条件下 X 的条件分布。

解：记 $l = \min\{n, m\}$ ，易知

$$P(X + Y = m) = \sum_{i=0}^l P(X = i, Y = m - i)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=0}^l P(X=i)P(Y=m-i) \\
&= \sum_{i=0}^l C_n^i p^i (1-p)^{n-i} C_n^{m-i} p^{m-i} (1-p)^{n-m+i} \\
&= p^m (1-p)^{2n-m} \sum_{i=0}^l C_n^i C_n^{m-i} \\
&= C_{2n}^m p^m (1-p)^{2n-m}.
\end{aligned}$$

于是, 当 $k=0, 1, \dots, l$ 时,

$$\begin{aligned}
P(X=k|X+Y=m) &= \frac{P(X=k, X+Y=m)}{P(X+Y=m)} \\
&= \frac{C_n^k p^k (1-p)^{n-k} C_n^{m-k} p^{m-k} (1-p)^{n-m+k}}{C_{2n}^m p^m (1-p)^{2n-m}} \\
&= \frac{C_n^k C_n^{m-k}}{C_{2n}^m}.
\end{aligned}$$

当 $k > l$ 时, 显然 $P(X=k|X+Y=m) = 0$ 。

由此可见, 在 $X+Y=m$ 条件下 X 的条件分布是超几何分布。 \square

例: 一射手进行射击, 击中目标的概率 $p \in (0, 1)$, 射击至击中目标两次为止。若以 X 表示首次击中目标所进行的射击次数, 以 Y 表示总共进行的射击次数。试求 X 和 Y 的联合分布列及条件分布列。

解: $Y=n$ 表示第 n 次击中目标且前 $n-1$ 次恰有一次击中目标,

$$P(X=m, Y=n) = p^2(1-p)^{n-2}, \quad n=2, 3, \dots, m=1, \dots, n-1.$$

从而

$$\begin{aligned}
P(X=m) &= \sum_{n=m+1}^{\infty} P(X=m, Y=n) \\
&= \sum_{n=m+1}^{\infty} p^2(1-p)^{n-2} \\
&= p(1-p)^{m-1}, \quad m=1, 2, \dots
\end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned}
 P(Y = n) &= \sum_{m=1}^{n-1} P(X = m, Y = n) \\
 &= \sum_{m=1}^{n-1} p^2(1-p)^{n-2} \\
 &= (n-1)p^2(1-p)^{n-2}, \quad n = 2, 3, \dots
 \end{aligned}$$

于是当 $n = 2, 3, \dots$ 时,

$$P(X = m|Y = n) = \frac{p^2(1-p)^{n-2}}{(n-1)p^2(1-p)^{n-2}} = \frac{1}{n-1}, \quad m = 1, \dots, n-1.$$

当 $m = 1, 2, \dots$ 时,

$$P(Y = n|X = m) = \frac{p^2(1-p)^{n-2}}{p(1-p)^{m-1}} = p(1-p)^{n-m-1}, \quad n = m+1, m+2, \dots$$

□

6.3.2 连续型情形

设二维随机向量 (X, Y) 有联合分布函数 $F(x, y)$, 联合密度 $p(x, y)$, 若 $p_Y(y) > 0$, 则在 $Y = y$ 条件下 X 的条件分布函数为

$$F_{X|Y}(x|y) = \int_{-\infty}^x \frac{p(u, y)}{p_Y(y)} du.$$

自然, 在 $Y = y$ 条件下 X 的条件分布密度为

$$p_{X|Y}(x|y) = \frac{p(x, y)}{p_Y(y)}.$$

连续场合的全概率公式: 由基本公式

$$p(x, y) = p_Y(y)p(x|y) = p_X(x)p(y|x),$$

连续场合的全概率公式为:

$$\begin{aligned}
 p_X(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} p_Y(y)p(x|y) dy, \\
 p_Y(y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} p_X(x)p(y|x) dx.
 \end{aligned}$$

连续场合的贝叶斯公式:

$$p(y|x) = \frac{p_Y(y)p(x|y)}{\int_{-\infty}^{+\infty} p_Y(y)p(x|y)dy},$$

$$p(x|y) = \frac{p_X(x)p(y|x)}{\int_{-\infty}^{+\infty} p_X(x)p(y|x)dx}.$$

例: 设二维随机向量 (X, Y) 满足二维正态分布, 易知 Y 的分布密度为

$$p_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} \exp\left\{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}\right\}.$$

则在 $Y = y$ 条件下 X 的分布密度为

$$p_{X|Y}(x|y) = \frac{p(x, y)}{p_Y(y)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\rho^2)}\sigma_1} \exp\left\{-\frac{(x-m)^2}{2(1-\rho^2)\sigma_1^2}\right\},$$

其中 $m = \mu_1 + \rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y - \mu_2)$. □

例: 设二维随机向量 (X, Y) 的联合密度为

$$p(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{y}e^{-y} \cdot e^{-\frac{x}{y}}, & x > 0, y > 0, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

给定 $y > 0$, 试求出条件概率 $P(X > 1|Y = y)$ 。

解: 在 $Y = y$ 条件下 X 的条件分布密度是

$$p_{X|Y}(x|y) = \frac{p(x, y)}{p_Y(y)}.$$

其中 $p_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y)dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{y}e^{-y} \cdot e^{-\frac{x}{y}}dx = e^{-y}$, 于是

$$p_{X|Y}(x|y) = \begin{cases} \frac{1}{y}e^{-\frac{x}{y}}, & x > 0, y > 0 \\ 0, & x \leq 0, y > 0 \end{cases}$$

因此

$$P(X > 1|Y = y) = \int_1^{+\infty} \frac{1}{y}e^{-\frac{x}{y}}dx = e^{-\frac{1}{y}}.$$

□

例: 设随机变量 X 在区间 $(0, 1)$ 上随机取值, 当观察到 $X = x(0 < x < 1)$ 时, 随机变量 Y 在区间 $(x, 1)$ 上随机取值, 求 Y 的概率密度函数 $p_Y(y)$ 。

解: X 服从区间 $(0, 1)$ 上的均匀分布, 对任意的 $x \in (0, 1)$, 在 $X = x$ 条件下, Y 的条件概率密度为

$$p(y|x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x}, & y \in (x, 1), \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

从而,

$$p(x, y) = p(y|x)p_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x}, & 0 < x < y < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

故

$$p_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y)dx = \begin{cases} \int_0^y \frac{1}{1-x} dx = -\ln(1-y), & 0 < y < 1, \\ 0, & y \notin (0, 1). \end{cases}$$

6.4 随机变量的独立性

随机变量的独立性: 设 X 和 Y 都是随机变量, 如果对任何 $a < b, c < d$, 事件 $\{a < X < b\}$ 和事件 $\{c < Y < d\}$ 相互独立, 则称 X 与 Y **相互独立**。

定理: 设随机变量 X 的可能值是 x_1, x_2, \dots (有限个或无穷可列个), 随机变量 Y 的可能值是 y_1, y_2, \dots (有限个或无穷可列个), 则 X 与 Y 相互独立的充分必要条件是, 对一切 i, j 下式成立:

$$P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i)P(Y = y_j).$$

定理: 设随机变量 X, Y 分别有分布密度 $p_X(x), p_Y(y)$, 则 X 与 Y 相互独立的充分必要条件是二元函数 $p(x, y) = p_X(x)p_Y(y)$ 是二维随机向量 (X, Y) 的联合密度。

证明: 充分性: 设 $p_X(x)p_Y(y)$ 是 (X, Y) 的联合密度, 则对于任何 $a < b, c < d$ 有

$$\begin{aligned} P(a < X < b, c < Y < d) &= \int_a^b \int_c^d p_X(x)p_Y(y)dx dy \\ &= \int_a^b p_X(x)dx \cdot \int_c^d p_Y(y)dy = P(a < X < b)P(c < Y < d). \end{aligned}$$

表明 X 与 Y 相互独立

必要性: 设 X 与 Y 相互独立, 则对任何 $a < b, c < d$ 有

$$\begin{aligned} P(a < X < b, c < Y < d) &= P(a < X < b)P(c < Y < d) \\ &= \int_a^b p_X(x)dx \cdot \int_c^d p_Y(y)dy = \int_a^b \int_c^d p_X(x)p_Y(y)dx dy \end{aligned}$$

表明 $p_X(x)p_Y(y)$ 是 (X, Y) 的联合密度。 □

推论：设二维随机向量 (X, Y) 的联合密度 $p(x, y)$ 可以表示为

$$p(x, y) = f(x)g(y),$$

其中 $f(x) \geq 0$, $g(y) \geq 0$, 且 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ 收敛, 则 X 与 Y 相互独立。

证明：由于 $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y)dxdy = 1$, 记 $c \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx > 0$, 推知 X 的分布密度是 $p_X(x) = \frac{1}{c}f(x)$, Y 的分布密度是 $p_Y(y) = cg(y)$, 则 $p(x, y) = f(x)g(y) = p_X(x)p_Y(y)$, 因此 X 与 Y 相互独立。 \square

定理：设 $\xi = (X, Y)$ 是二维随机向量, X 的分布函数是 $F_X(x)$, Y 的分布函数是 $F_Y(y)$, 则 X 和 Y 相互独立的充分必要条件是 ξ 的分布函数 $F(x, y)$ 等于 $F_X(x)$ 与 $F_Y(y)$ 之积, 即

$$F(x, y) = F_X(x)F_Y(y). \quad (6.4.1)$$

证明：必要性：设 X 与 Y 相互独立, 则对任何 $n \geq 1$, 事件 $\{-n < X \leq x\}$ 与事件 $\{-n < Y \leq y\}$ 相互独立, 于是

$$P(-n < X \leq x, -n < Y \leq y) = P(-n < X \leq x)P(-n < Y \leq y).$$

令 $n \rightarrow \infty$, 即知6.4.1式成立。

充分性：设6.4.1式成立, 对任何 $a < b$, $c < d$, 有

$$\begin{aligned} P(a < X \leq b, c < Y \leq d) &= F(b, d) - F(a, d) - F(b, c) + F(a, c) \\ &= F_X(b)F_Y(d) - F_X(a)F_Y(d) - F_X(b)F_Y(c) + F_X(a)F_Y(c) \\ &= (F_X(b) - F_X(a))(F_Y(d) - F_Y(c)) \\ &= P(a < X \leq b)P(c < Y \leq d). \end{aligned}$$

由此知 X 与 Y 相互独立。 \square

定理：若随机变量 X 和 Y 相互独立, 且方差 $D(X)$ 和 $D(Y)$ 存在, 则 $D(X+Y) = D(X) + D(Y)$ 。

证明：由式5.3.2知

$$D(X+Y) = E(X+Y)^2 - (E(X+Y))^2 = (E(X^2) + E(Y^2) - 2E(XY)) - ((E(X))^2 + (E(Y))^2 + 2E(X)E(Y))$$

由独立的性质知 $E(XY) = E(X)E(Y)$, 则

$$D(X+Y) = E(X^2) - (E(X))^2 + E(Y^2) - (E(Y))^2 = D(X) + D(Y).$$

例：设二维随机向量 (X, Y) 服从参数为 $\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, \rho$ 的二维正态分布，则 X 与 Y 相互独立的充分必要条件是 $\rho = 0$ 。

证明：已求出 X 和 Y 的分布密度：

$$p_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \exp\left\{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}\right\}.$$

$$p_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} \exp\left\{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}\right\}.$$

于是

$$p_X(x)p_Y(y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \exp\left\{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2} - \frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}\right\}.$$

结合联合密度 $p(x, y)$ (式6.2.4)，知当 $\rho = 0$ 时，

$$p(x, y) = p_X(x)p_Y(y).$$

故 X 与 Y 相互独立。

若 X 与 Y 相互独立，则 $p_X(x)p_Y(y)$ 是 (X, Y) 的联合密度，由于 $p_X(x), p_Y(y), p(x, y)$ 均为连续函数，故

$$p(x, y) \equiv p_X(x)p_Y(y).$$

特别地 $p(\mu_1, \mu_2) = p_X(\mu_1)p_Y(\mu_2)$ ，于是

$$\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2},$$

从而 $\rho = 0$ 。 □

例：设 (X, Y) 联合密度为

$$p(x, y) = \begin{cases} 8xy, & 0 \leq x \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

问 X 与 Y 是否独立？

解：易得

$$p_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y) dy = \begin{cases} \int_x^1 8xy dy = 4x(1-x^2), & x \in [0, 1], \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

$$p_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y) dx = \begin{cases} \int_0^y 8xy dx = 4y^3, & y \in [0, 1], \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

从而，

$$p(x, y) \neq p_X(x)p_Y(y) = \begin{cases} 16x(1-x^2)y^3, & x, y \in [0, 1], \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

故 X, Y 不独立。 \square

例：假定一天内进入邮局的人数为服从参数 λ 的泊松分布的随机变量，如果每个进入邮局的人为男性的概率为 p ，为女性的概率为 $1 - p$ ，证明进入邮局的男人数和女人数是相互独立的泊松随机变量，且参数分别为 λp 和 $\lambda(1 - p)$ 。

解：设 X 和 Y 分别是进入邮局的男人数和女人数，则对任意的自然数 i 和 j ，

$$P(X = i, Y = j) = P(X = i, Y = j | X + Y = i + j)P(X + Y = i + j).$$

注意到

$$P(X + Y = i + j) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^{i+j}}{(i+j)!}.$$

且在给定 $i + j$ 人进入邮局的条件下，恰有 i 个男人和 j 个女人的概率是 $C_{i+j}^i p^i (1-p)^j$ ，从而

$$P(X = i, Y = j) = C_{i+j}^i p^i (1-p)^j e^{-\lambda} \frac{\lambda^{i+j}}{(i+j)!} = e^{-\lambda p} \frac{(\lambda p)^i}{i!} e^{-\lambda(1-p)} \frac{(\lambda(1-p))^j}{j!}.$$

故

$$P(X = i) = e^{-\lambda p} \frac{(\lambda p)^i}{i!} \sum_{j=0}^{+\infty} e^{-\lambda(1-p)} \frac{(\lambda(1-p))^j}{j!} = e^{-\lambda p} \frac{(\lambda p)^i}{i!}, \quad i \in \mathbb{N}.$$

且

$$P(X = j) = e^{-\lambda(1-p)} \frac{(\lambda(1-p))^j}{j!} \sum_{i=0}^{+\infty} e^{-\lambda p} \frac{(\lambda p)^i}{i!} = e^{-\lambda(1-p)} \frac{(\lambda(1-p))^j}{j!}, \quad j \in \mathbb{N}.$$

\square

6.5 两个随机变量的函数

6.5.1 随机向量函数的概率分布

随机向量函数的概率分布：假设二维随机向量 (X, Y) 有联合密度 $p(x, y)$ （对于离散型情形，有类似的结论），随机变量 $Z = f(X, Y)$ ，对于任何实数 z ，令 $A = \{(x, y) : f(x, y) \leq z\}$ ，则 Z 的分布函数的计算公式为

$$P(Z \leq z) = P(Z \in A) = \iint_A p(x, y) dx dy. \quad (6.5.1)$$

定理：设二维随机向量 (X, Y) 有联合密度 $p(x, y)$ ，随机变量 $Z = X + Y$ ，则 Z 的分布密度为

$$p_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, z - x) dx,$$

证明：令

$$A = \{(x, y) : x + y \leq z\}$$

由式6.5.1知

$$P(Z \leq z) = P((X, Y) \in A) = \iint_{\{x+y \leq z\}} p(x, y) dx dy.$$

利用变量替换 $u = x + y$ 有

$$\begin{aligned} \iint_{\{x+y \leq z\}} p(x, y) dx dy &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{z-x} p(x, y) dy \right) dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^z p(x, u-x) du \right) dx \\ &= \int_{-\infty}^z \left(\int_{-\infty}^{+\infty} p(x, u-x) dx \right) du. \end{aligned}$$

因此

$$P(Z \leq z) = \int_{-\infty}^z \left(\int_{-\infty}^{+\infty} p(x, u-x) dx \right) du.$$

因此 Z 的分布函数为 $p_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, z-x) dx$ 。 \square

推论：设随机变量 X 和 Y 分别有分布密度 $p_X(x)$ 和 $p_Y(y)$ ，且 X 和 Y 相互独立，则随机变量 $Z = X + Y$ 有分布密度

$$p_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_X(x) p_Y(z-x) dx.$$

例：设 (X, Y) 服从二维正态分布，联合密度 $p(x, y)$ 为 $p(x, y) = \hat{C} \exp \left\{ -\frac{u^2 - 2\rho uv + v^2}{2(1-\rho^2)} \right\}$ ，其中 $u = \frac{x-\mu_1}{\sigma_1}$, $v = \frac{y-\mu_2}{\sigma_2}$, $\hat{C} = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}$ 。求 $Z = X + Y$ 的密度。

解：由定理知 Z 的分布密度为 $p_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x, z-x) dx$ 。当 y 取 $z-x$ 时，

$$v = \frac{y-\mu_2}{\sigma_2} = \frac{z-(\mu_1+\sigma_1 u)-\mu_2}{\sigma_2} = C - \frac{\sigma_1}{\sigma_2} u,$$

其中， $C = (z - \mu_1 - \mu_2) / \sigma_2$ 。

此时，

$$\begin{aligned} u^2 - 2\rho uv + v^2 &= u^2 - 2\rho u \left(C - \frac{\sigma_1 u}{\sigma_2} \right) + \left(C - \frac{\sigma_1 u}{\sigma_2} \right)^2 \\ &= \left(1 + 2\rho \frac{\sigma_1}{\sigma_2} + \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2} \right)^2 \right) u^2 - 2 \left(\rho + \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \right) C u + C^2. \end{aligned}$$

现在计算 $p_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x, z-x) dx$ ，已知：

$$\begin{aligned} p(x, z-x) &= \hat{C} \left\{ -\frac{Au^2 - 2Bu + C^2}{2(1-\rho^2)} \right\}, \quad \text{其中, } u = \frac{x-\mu_1}{\sigma_1}, \\ A &= 1 + 2\rho \frac{\sigma_1}{\sigma_2} + \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2} \right)^2, \quad B = \left(\rho + \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \right) C, \quad C = \frac{z-(\mu_1+\mu_2)}{\sigma_2}. \end{aligned}$$

配方:

$$Au^2 - 2Bu + C^2 = A \left(u - \frac{B}{A} \right)^2 - \left(\frac{B^2}{A} - C^2 \right)$$

于是,

$$\begin{aligned} p_Z(z) &= \hat{C} \exp \left\{ \frac{\frac{B^2}{A} - C^2}{2(1-\rho^2)} \right\} \times \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{A(u - \frac{B}{A})^2}{2(1-\rho^2)} \right\} \sigma_1 du \\ &= \tilde{C} \exp \left\{ \frac{B^2 - AC^2}{2(1-\rho^2)A} \right\}. \quad \tilde{C} = \hat{C} \sigma_1 \sqrt{2\pi \frac{1-\rho^2}{A}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_2^2 A}} \end{aligned}$$

已有: $p_Z(z) = \tilde{C} \exp \left\{ \frac{B^2 - AC^2}{2(1-\rho^2)A} \right\}$, 其中 \tilde{C} 是常数,

$$A = 1 + 2\rho \frac{\sigma_1}{\sigma_2} + \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2} \right)^2, B = \left(\rho + \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \right) C, C = \frac{z - (\mu_1 + \mu_2)}{\sigma_2}.$$

$$B^2 - AC^2 = \left(\left(\rho + \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \right)^2 - A \right) C^2 = (\rho^2 - 1) \frac{(z - (\mu_1 + \mu_2))^2}{\sigma_2^2}.$$

因此,

$$p_Z(z) = \tilde{C} \exp \left\{ -\frac{(z - \mu)^2}{2\sigma^2} \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left\{ -\frac{(z - \mu)^2}{2\sigma^2} \right\}.$$

其中, $\mu = \mu_1 + \mu_2, \sigma^2 = \sigma_2^2 A = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2$.

特别地, 若 $\rho = 0$ (即 X, Y 相互独立), 则

$$X + Y \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2).$$

□

例: 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且 X, Y 分别有分布密度:

$$p_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases} \quad (\lambda > 0),$$

$$p_Y(y) = \begin{cases} \mu e^{-\mu y}, & y > 0, \\ 0, & y \leq 0, \end{cases} \quad (\mu > 0),$$

试求随机变量 $X + Y$ 的分布密度。

解: 随机变量 $Z = X + Y$ 的分布密度为

$$p(z) = \int_{-\infty}^{\infty} p_X(x) p_Y(z - x) dx.$$

易知, 当 $z \leq 0$ 时, $p(z) = 0$, 设 $z > 0$, 则

$$p(z) = \int_0^z \lambda e^{-\lambda x} \mu e^{-\mu(z-x)} dx = \lambda \mu e^{-\mu z} \int_0^z e^{-(\lambda-\mu)x} dx$$

$$= \begin{cases} \lambda^2 e^{-\lambda z} z, & \lambda = \mu, \\ \frac{\lambda \mu}{\lambda - \mu} (e^{-\mu z} - e^{-\lambda z}), & \lambda \neq \mu. \end{cases}$$

□

定理: 设二维随机向量 (X, Y) 有联合密度 $p(x, y)$. 令 $Z = X/Y$ (当 $Y = 0$ 时, 规定 $Z = 0$). 则 Z 为连续型, 且

$$p_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} |y| p(zy, y) dy.$$

证明: 首先, $\frac{x}{y} \leq z$ 当且仅当 “ $y > 0$ 且 $x \leq yz$ ” 或者 “ $y < 0$ 且 $x \geq yz$.” 于是,

$$F_Z(z) = P(Y > 0, X \leq Yz) + P(Y < 0, X \geq Yz).$$

其中,

$$\begin{aligned} P(Y > 0, X \leq Yz) &= \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{yz} p(x, y) dx dy = \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^z p(yu, y) y du dy \\ &= \int_{-\infty}^z \left(\int_0^{\infty} y p(yu, y) dy \right) du \end{aligned}$$

类似的,

$$\begin{aligned} P(Y < 0, X \geq Yz) &= \int_{-\infty}^0 \int_{yz}^{\infty} p(x, y) dx dy = \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^z p(yu, y) |y| du dy \\ &= \int_{-\infty}^z \left(\int_{-\infty}^0 |y| p(yu, y) dy \right) du \end{aligned}$$

于是,

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= \int_{-\infty}^z \left(\int_{-\infty}^{\infty} |y| p(yu, y) dy \right) du \\ p_Z(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} |y| p(zy, y) dy. \end{aligned}$$

□

例: 随机变量 X, Y 相互独立, 都服从 $N(0, 1)$. 求随机变量 $Z = X/Y$ 的概率密度.

解: 联合密度为:

$$p(x, y) = \frac{1}{2\pi} \exp \left\{ -\frac{x^2 + y^2}{2} \right\}.$$

因此,

$$\begin{aligned} p_Z(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} |y| p(zy, y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} |y| \frac{1}{2\pi} \exp \left\{ -\frac{(zy)^2 + y^2}{2} \right\} dy \\ &= \frac{2}{2\pi} \int_0^{\infty} y \exp \left\{ -\frac{(z^2 + 1)y^2}{2} \right\} dy \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-(z^2 + 1)u} du = \frac{1}{\pi(z^2 + 1)}. \end{aligned}$$

□

例：设随机变量 X 与 Y 独立同分布，共同分布是 $N(0, 1)$ ，试求随机变量 $Z = \sqrt{X^2 + Y^2}$ 的概率分布。

解：对任何 $z \leq 0$ ，易知 $P(Z \leq z) = 0$ ，设 $z > 0$ ，则

$$P(Z \leq z) = \iint_{\{x^2+y^2 \leq z^2\}} \frac{1}{2\pi} \exp\left\{-\frac{x^2+y^2}{2}\right\} dx dy$$

做极坐标变换 $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ ($0 \leq \theta < 2\pi, r \geq 0$)，于是

$$P(Z \leq z) = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^z \frac{1}{2\pi} e^{-r^2/2} r dr \right) d\theta = \int_0^z r e^{-r^2/2} dr.$$

可见， $Z = \sqrt{X^2 + Y^2}$ 有分布密度

$$p(z) = \begin{cases} 0, & z \leq 0, \\ z e^{-z^2/2}, & z > 0. \end{cases}$$

这样的概率分布也称为瑞利分布。

□

定理：假设 $\xi = (X, Y)$ 为连续型，有密度 $p(x, y)$ ，区域 A 满足 $P((X, Y) \in A) = 1$ ，假设

$$\eta = (U, V), \quad \text{其中 } U = f(X, Y), \quad V = g(X, Y).$$

如果：(1) $P(\xi \in A) = 1$ 且 $(f, g) : A \rightarrow G$ 是一对一的；

(2) $f, g \in C^1(A)$ ，且 $\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \neq 0, \forall (x, y) \in A$ ，

那么， η 是连续型，且

$$p_{U,V}(u, v) = p(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right|, (u, v) \in G.$$

证明：对于 $\forall D \subseteq G$ ，设 $D^* = \{(x, y) : (f(x, y), g(x, y)) \in D\}$ ，易知 $D^* \subseteq A$ ， $(f(x, y), g(x, y))$ 是 D^* 到 D 上的一一映射，其逆映射是 $(x(u, v), y(u, v))$ ，根据重积分的变量替换公式，

$$\iint_{D^*} p(x, y) dx dy = \iint_D p(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv.$$

于是，

$$P((U, V) \in D) = P((X, Y) \in D^*) = \iint_{D^*} p(x, y) dx dy = \iint_D p(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv.$$

因此

$$p_{U,V}(u, v) = p(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right|, (u, v) \in G.$$

□

6.5.2 两个随机变量函数的数学期望

我们首先考虑一个特殊情形： $f(x, y) = xy$ 。

定理：设随机变量 X 与 Y 相互独立，且 $E(X)$ 与 $E(Y)$ 都存在，则

$$E(XY) = E(X)E(Y).$$

连续情形的证明：

$$E(XY) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xyp_X(x)p_Y(y)dxdy = (E(X))(E(Y)).$$

定理：若随机变量 X 与 Y 相互独立，则

$$\text{var}(X + Y) = \text{var}(X) + \text{var}(Y).$$

证明：由于 $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$ ，得

$$\begin{aligned} \text{var}(X + Y) &= E(X + Y - (EX + EY))^2 \\ &= \text{var}(X) + \text{var}(Y) + 2E(X - E(X))(Y - E(Y)). \end{aligned}$$

由 X 与 Y 相互独立得

$$E(X - E(X))(Y - E(Y)) = E(X - E(X))E(Y - E(Y)) = 0$$

因此等式成立。 □

均值公式：(1) 设二维随机向量 (X, Y) 的可能值是 a_1, a_2, \dots (有限个或可列无穷个)， $f(x, y)$ 是任何二元函数，则

$$E(f(X, Y)) = \sum_i f(a_i)P((X, Y) = a_i).$$

(当 a_i 有无穷个时，要求此级数绝对收敛)。

(2) 设二维随机向量 (X, Y) 有联合分布密度 $p(x, y)$ ，二元函数 $p(x, y)$ 满足积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x, y)|p(x, y)dxdy$$

收敛，则

$$E(f(X, Y)) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)p(x, y)dxdy.$$

例：在长为 a 的线段上，任取两个点 X 和 Y ，求此两点间的平均距离。

解：显然 X 和 Y 服从区间 $(0, a)$ 上的均匀分布，且相互独立，从而 X 和 Y 的联合密度为

$$p(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{a^2} & x, y \in (0, a), \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

从而，两点间的平均长度为

$$\begin{aligned} E|X - Y| &= \iint_{\mathbb{R}^2} |x - y| p(x, y) dx dy \\ &= \int_0^a \int_0^a |x - y| \frac{1}{a^2} dx dy \\ &= \frac{1}{a^2} \int_0^a \left(\int_0^x (x - y) dy + \int_x^a (y - x) dy \right) dx \\ &= \frac{1}{a^2} \int_0^a \left(x^2 - ax + \frac{a^2}{2} \right) dx = \frac{a}{3}. \end{aligned}$$

□

例： x, y, z 为相互独立的随机变量， h, l, f, g 为任意确定性映射。判断

- (1) 令 $a = f(x, y)$, $b = g(x, z)$, a 与 b 是否独立, $a, b | x$ 是否独立?
- (2) 令 $c = x + y$, 则 $x, y | c$ 是否独立?
- (3) $h(l(x, y), z)$ 与 x 是否独立? $h(l(x, y), z)$ 与 x 在 $l(x, y)$ 给定条件下是否独立?

解：

- (1) a 与 b 不独立，都依赖于 x , $a, b | x$ 独立。
- (2) 不独立
- (3) $h(l(x, y), z)$ 与 x 不独立，给定 $l(x, y)$ 则独立。

6.6 二维随机向量的数字特征

两个随机变量的协方差：假设随机变量 X, Y 的期望和方差存在，则称

$$E(X - E(X))(Y - E(Y))$$

为 X 与 Y 的**协方差**，记为 $\text{cov}(X, Y)$ 或 σ_{XY} 。

若 $\sigma_{XY} = 0$ ，则称 X 与 Y 不相关。

注: 协方差存在, 因为

$$2(X - EX)(Y - EY) \leq (X - EX)^2 + (Y - EY)^2.$$

协方差的计算公式为:

$$\text{cov}(X, Y) = E(XY) - (EX)(EY).$$

注意: 协方差为 0 不等价于随机变量 X 和 Y 独立。

例如, 令随机变量 $X \sim U(0, 2\pi)$, 设 $Y = \sin X$, $Z = \cos X$, Y 和 Z 的协方差为

$$\text{cov}(Y, Z) = E(YZ) - E(Y)E(Z) = \frac{1}{2}E(\sin 2X) - E(\sin X)E(\cos X) = 0.$$

而 Y 和 Z 显然是不独立的。

定理: 假设 X, Y 的方差存在, 则

$$(\text{cov}(X, Y))^2 \leq \text{var}(X) \cdot \text{var}(Y). \quad (6.6.1)$$

证明: 若 $\text{var}(X) = 0$, 则 $X \equiv c$, 于是 $\text{cov}(X, Y) = 0$. 若 $\text{var}(X) > 0$, 则设

$$\begin{aligned} g(t) &:= E(t(X - EX) + (Y - EY))^2 \\ &= t^2 \text{var}(X) + 2t \text{cov}(X, Y) + \text{var}(Y) \geq 0 \end{aligned}$$

由于不等式恒成立, 故 $g(t)$ 的判别式 ≤ 0 , 即 $(\text{cov}(X, Y))^2 \leq \text{var}(X) \cdot \text{var}(Y)$. □

随机变量的相关系数: 设 $0 < \text{var}(X), \text{var}(Y) < \infty$, 则称

$$\frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{var}(X)}\sqrt{\text{var}(Y)}}$$

为 X 与 Y 的**相关系数**, 记为 ρ_{XY} , 简记为 ρ 。

定理: 设 ρ 是随机变量 X 与 Y 的相关系数, 则有

- (1) $|\rho| \leq 1$;
- (2) X 与 Y 独立, 则不相关, 从而 $\rho = 0$;
- (3) $|\rho| = 1$ 当且仅当存在 a, b 以概率 1 使得 $Y = a + bX$.

证明: (1) 可以直接由式 6.6.1 推知成立。

(2) 若 X 与 Y 相互独立, 则

$$E(X - E(X))(Y - E(Y)) = E(X - E(X))E(Y - E(Y)) = 0,$$

从而 $\rho = 0$ 。

(3) 设

$$\begin{aligned} g(t) &:= E(t(X - EX) + (Y - EY))^2 \\ &= t^2 \text{var}(X) + 2t \text{cov}(X, Y) + \text{var}(Y) \end{aligned}$$

则 $|\rho| = 1$ 当且仅当 $g(t)$ 的判别式为 0, 即存在 t_0 使得

$$\begin{aligned} g(t_0) &= E(t_0(X - EX) + (Y - EY))^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow Y = -t_0 X + EX + EY. \end{aligned}$$

□

例: 设 (X, Y) 服从二维正态分布, 联合密度为

$$\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(u^2+v^2-2\rho uv)} \quad u = \frac{x-\mu_1}{\sigma_1}, v = \frac{y-\mu_2}{\sigma_2}.$$

求 ρ_{XY} 。

解: 由之前的结论, $\mu_1 = E(X), \mu_2 = E(Y), \sigma_1^2 = \text{var}(X), \sigma_2^2 = \text{var}(Y)$ 。

故

$$\begin{aligned} \rho_{XY} &= \frac{E(X - \mu_1)(Y - \mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} = E\left(\frac{X - \mu_1}{\sigma_1} \frac{Y - \mu_2}{\sigma_2}\right) \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} uv \cdot e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(u^2+v^2-2\rho uv)} dv du. \end{aligned}$$

先对 v 积分, $v^2 - 2\rho uv + u^2 = (v - \rho u)^2 + (1 - \rho^2)u^2$,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} uv \cdot e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(u^2+v^2-2\rho uv)} dv &= ue^{-\frac{u^2}{2}} \times \int_{-\infty}^{\infty} ve^{-\frac{(v-\rho u)^2}{2(1-\rho^2)}} dv \\ &= ue^{-\frac{u^2}{2}} \times \sqrt{2\pi(1-\rho^2)} \cdot \rho u. \end{aligned}$$

代入积分式, 再对 u 积分,

$$\rho_{XY} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \rho u^2 e^{-\frac{u^2}{2}} du = \rho.$$

□

例: 设二维随机向量 (X, Y) 的联合密度是

$$p(x, y) = \begin{cases} \frac{2}{2\pi} \exp\left\{-\frac{1}{2}(x^2 + y^2)\right\}, & xy > 0, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

求 ρ_{XY} 。

解：上一讲第二节已经指出 $X \sim N(0,1)$, $Y \sim N(0,1)$, 故

$$E(X) = E(Y) = 0, \quad \text{var}(X) = \text{var}(Y) = 1.$$

因此

$$\begin{aligned} \text{cov}(X, Y) &= E(XY) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xyp(x, y)dx dy \\ &= \iint_{\{(x, y): xy > 0\}} xy \frac{2}{2\pi} \exp\left\{-\frac{1}{2}(x^2 + y^2)\right\} dx dy \\ &= \int_0^{\infty} ye^{-y^2/2} \left(\int_0^{\infty} \frac{2}{2\pi} xe^{-x^2/2} dx \right) dy \\ &\quad + \int_{-\infty}^0 ye^{-y^2/2} \left(\int_{-\infty}^0 \frac{2}{2\pi} xe^{-x^2/2} dx \right) dy \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{2}{2\pi} ye^{-y^2/2} dy - \int_{-\infty}^0 \frac{2}{2\pi} ye^{-y^2/2} dy \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{2}{\pi} ye^{-y^2/2} dy = \frac{2}{\pi} \end{aligned}$$

故相关系数为 $\rho_{XY} = \frac{2}{\pi}$ 。

□

6.7 条件期望

条件期望的定义： 设 X 和 Y 是两个随机变量。

(1) 若在 $Y = y$ 的条件下 X 的可能值是 x_1, x_2, \dots (有限个或无穷可列个), 条件概率分布是 $P(X = x_i | Y = y_i) (i = 1, 2, \dots)$ 则称

$$\sum_i x_i P(X = x_i | Y = y)$$

为在 $Y = y$ 条件下 X 的**条件期望**, 记为 $E(X | Y = y)$ 。

(2) 若在 $Y = y$ 的条件下 X 有条件分布密度 $p_{X|Y}(x|y)$, 则称积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} xp_{X|Y}(x|y)dx$$

为在 $Y = y$ 的条件下 X 的**条件期望**, 记为 $E(X | Y = y)$ 。

设二维随机向量 (X, Y) 有联合密度 $p(x, y)$, 有

$$E(X | Y = y) = \frac{1}{p_Y(y)} \int_{-\infty}^{\infty} xp(x, y)dx.$$

定理： 设二维随机向量 (X, Y) 有联合密度 $p(x, y)$ ，则

$$E(X) = \int_{\{y: p_Y(y) > 0\}} E(X|Y = y) p_Y(y) dy.$$

证明： 首先，若 $p_Y(y) = 0$ ，则对任何 $A > 0$ 有

$$\left| \int_{-A}^A xp(x, y) dx \right| \leq A \int_{-A}^A p(x, y) dx \leq A \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y) dx = A p_Y(y) = 0,$$

于是

$$\int_{-\infty}^{+\infty} xp(x, y) dx = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_{-A}^A xp(x, y) dx = 0$$

可见

$$\begin{aligned} \int_{\{y: p_Y(y) > 0\}} E(X|Y = y) p_Y(y) dy &= \int_{\{y: p_Y(y) > 0\}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} xp(x, y) dx \right) dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} xp(x, y) dy \right) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x \left(\int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y) dy \right) dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} xp_X(x) dx = E(X). \end{aligned}$$

□

对于离散情形，有类似的定理。

定理： 设 (X, Y) 是二维随机向量， Y 的可能值是 y_1, y_2, \dots （有限个或可列无穷个）， $P(Y = y_i) > 0$ ($i = 1, 2, \dots$)， X 的可能值是 x_1, x_2, \dots （有限个或可列无穷个），且 $E(X)$ 存在，则

$$E(X) = \sum_i E(X|Y = y_i) P(Y = y_i).$$

证明： 由于 $P(X = x_k, Y = y_i) = P(X = x_k|Y = y_i) P(Y = y_i)$ ，知

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_k x_k P(X = x_k) = \sum_k x_k \sum_i P(X = x_k, Y = y_i) \\ &= \sum_k \sum_i x_k P(X = x_k|Y = y_i) P(Y = y_i) \\ &= \sum_i E(X|Y = y_i) P(Y = y_i). \end{aligned}$$

□

例：设 (X, Y) 的联合密度函数为

$$p(x, y) = \begin{cases} \frac{e^{-x/y} e^{-y}}{y}, & x, y \in (0, +\infty), \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

求 $E(X|Y = y)$ 。

解：对给定的 $y \in (0, +\infty)$, 在 $Y = y$ 条件下 X 的条件密度函数为

$$p(x|y) = \begin{cases} \frac{p(x, y)}{p_Y(y)} = \frac{\frac{1}{y} e^{-x/y} e^{-y}}{\int_0^{+\infty} \frac{1}{y} e^{-x/y} e^{-y} dx} = \frac{e^{-x/y}}{y} & x \in (0, +\infty), \\ 0, & x \notin (0, +\infty), \end{cases}$$

因此, X 在给定 $Y = y$ 条件下的条件分布恰好是参数为 $\frac{1}{y}$ 的指数分布。从而

$$E(X|Y = y) = \int_0^{+\infty} x \frac{e^{-x/y}}{y} dx = y.$$

例：(对应郑书例 7.7) 一矿工在有三个门的矿井中迷了路, 第 1 个门通到一个通道, 走 2 个小时可到达地面; 第 2 个门通到另一个通道, 走 3 个小时又回到原处; 第 3 个门通到第 3 个通道, 沿它走 5 个小时也回到原处, 假定该矿工总是等可能从 3 个门选择任意一个进入通道, 试问, 该矿工到达地面平均需要多长时间。

解：设矿工到达地面所需时间为 X , 选择门的编号为 Y , 则 $P(Y = 1) = P(Y = 2) = P(Y = 3) = \frac{1}{3}$, 于是

$$E(X) = \sum_{i=1}^3 P(Y = i) E(X|Y = i) = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 E(X|Y = i).$$

易知, $E(X|Y = 1) = 2$, $E(X|Y = 2) = E(X) + 3$, $E(X|Y = 3) = E(X) + 5$, 于是

$$E(X) = \frac{1}{3}(2 + E(X) + 3 + E(X) + 5)$$

推知 $E(X) = 10$, 即矿工到达地面平均要 10 小时。

7.1 n 维随机向量

n 维随机向量及其联合分布函数: 设 $\xi = (X_1, \dots, X_n)$ 是 n 维向量, 称

$$F(x_1, \dots, x_n) = P(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n), \quad x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^n$$

为 ξ 的联合分布函数, 也记为 F_ξ 或 F_{X_1, \dots, X_n} .

离散型 n 维随机向量: 若 ξ 取有限个或可列个值 (n 维向量), 则称 ξ 为离散型.

连续型 n 维随机向量: 若存在非负可积函数 $p(x_1, \dots, x_n)$ 使得对任意 n 维矩形 D 都有

$$P(\xi \in D) = \int \cdots \int_D p(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n,$$

则称 ξ 为连续型随机向量, 称 $p(x_1, \dots, x_n)$ 为 ξ 的联合密度, 也记为 P_{X_1, \dots, X_n} . (注: 上式对一般集合 D 都成立).

n 维随机向量的边缘分布: 设 $\xi = (X_1, \dots, X_n)$ 是 n 维向量, 对任意 $1 \leq k < n, 1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$, 则称 $(X_{i_1}, \dots, X_{i_k})$ 为 ξ 的 (一个 k 维) 边缘, 其分布被称为 ξ 的边缘分布.

例: (多项分布) 设 U_1, \dots, U_n 是取值 $1, \dots, t$ 的随机变量, 且相互独立, 都服从如下分布:

$$P(U_i = k) = p_k, \quad k = 1, \dots, t,$$

其中 $t \geq 2, p_k > 0, \forall k$ 且 $p_1 + \cdots + p_t = 1$.

记

$$X_k = |\{1 \leq i \leq n : U_i = k\}| = \sum_{i=1}^n 1_{\{U_i=k\}}.$$

$\xi = (X_1, \dots, X_t)$ 的联合分布列:

$$P(\xi = (i_1, \dots, i_t)) = \frac{n!}{i_1! \cdots i_t!} p_1^{i_1} \cdots p_t^{i_t}.$$

因为 $X_t = n - \sum_{s=1}^{t-1} X_s$, $p_t = 1 - \sum_{s=1}^{t-1} p_s$, 所以 ξ 与 (X_1, \dots, X_{t-1}) 等价.

本例的背景模型为: n 次独立重复试验 (投掷一枚 t 面骰子).

例: 口袋中有 5 个白球, 8 个黑球, 从中不放回的依次取出 3 个, 若第 i 次取出白球, 则 $X_i = 1$, 否则令 $X_i = 0$, $i = 1, 2, 3$, 求 (X_1, X_2, X_3) 的联合分布列.

解:

$$P(X_1 = 0, X_2 = 0, X_3 = 0) = \frac{8 \times 7 \times 6}{13 \times 12 \times 11} = 0.1958$$

$$\begin{aligned}
P(X_1 = 1, X_2 = 0, X_3 = 0) &= P(X_1 = 0, X_2 = 1, X_3 = 0) \\
&= P(X_1 = 0, X_2 = 0, X_3 = 1) = \frac{8 \times 7 \times 5}{13 \times 12 \times 11} = 0.1632 \\
P(X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 0) &= P(X_1 = 0, X_2 = 1, X_3 = 1) \\
&= P(X_1 = 1, X_2 = 0, X_3 = 1) = \frac{5 \times 4 \times 8}{13 \times 12 \times 11} = 0.0932 \\
P(X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 1) &= \frac{5 \times 4 \times 3}{13 \times 12 \times 11} = 0.0035
\end{aligned}$$

独立性: 若对任意 $a_i < b_i, i = 1, \dots, n$ 都有

$$\begin{aligned}
&P(a_1 < X_1 < b_1, \dots, a_n < X_n < b_n) \\
&= P(a_1 < X_1 < b_1) \cdots P(a_n < X_n < b_n)
\end{aligned}$$

则称 n 个随机变量 X_1, \dots, X_n 相互独立.

若 X_1, \dots, X_n 相互独立, 且 $F_{X_i} = F_{X_1}, i = 2, \dots, n$, 则称 X_1, \dots, X_n 独立同分布.

若相互独立, 则上式中的 $a_i < X_i < b_i$ 可以改为 $X_i \in B_i$, 其中 B_1, \dots, B_n 为任意一维 Borel 集.

定理: 设 $X_1, \dots, X_n (n \geq 2)$ 都是随机变量, 分别有分布密度 $p_1(x_1), \dots, p_n(x_n)$, 则 X_1, \dots, X_n 相互独立的充分必要条件是 n 元函数

$$p_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) = p_1(x_1) \cdots p_n(x_n).$$

为 n 维随机向量 (X_1, \dots, X_n) 的联合密度.

对于离散型随机向量, 有类似的结论, 设 n 个随机变量的取值分别为 $X_1 = x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots; \dots; X_n = x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots$, 则 X_1, \dots, X_n 相互独立的充分必要条件是

$$\begin{aligned}
&P(X_1 = x_{i_1}^{(1)}, \dots, X_n = x_{i_n}^{(n)}) \\
&= P(X_1 = x_{i_1}^{(1)}) \cdots P(X_n = x_{i_n}^{(n)}) = p_{i_1}^{(1)} \cdots p_{i_n}^{(n)}
\end{aligned}$$

定义: 若 X_i 与 X_j 相互独立, $\forall i \neq j$, 则称 X_1, \dots, X_n 两两独立.

例: 甲、乙玩石头剪刀布. 甲出 X , 乙出 Y , 结局为 Z . 则 X, Y, Z 两两独立, 但不相互独立.

例: 设随机向量 (X, Y, Z) 在矩形区域 $a < x < b, c < y < d, e < z < f$ 内服从均匀分布, 求 X, Y, Z 的分布密度函数, 以及 X, Y, Z 是否相互独立.

解: 由均匀分布定义

$$f(x, y, z) = \frac{1}{(b-a)(d-c)(f-e)} \quad a < x < b, c < y < d, e < z < f.$$

当 x, y, z 所在边界矩形是独立的, 且在矩形内时有:

$$f_X(x) = \int_e^f \int_c^d \frac{1}{(b-a)(d-c)(f-e)} dydz = \frac{1}{b-a}$$

$$f_Y(y) = \int_e^f \int_a^b \frac{1}{(b-a)(d-c)(f-e)} dx dz = \frac{1}{d-c}$$

$$f_Z(z) = \int_c^d \int_a^b \frac{1}{(b-a)(d-c)(f-e)} dx dy = \frac{1}{f-e}.$$

由于 $f(x, y, z) = f_X(x)f_Y(y)f_Z(z)$, 因此 X, Y, Z 之间相互独立。

定义: 设 $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_m)$ 和 $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_n)$ 分别是 m 维和 n 维随机向量, 给定 $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$, 若 $P(\mathbf{Y} = \mathbf{y}) > 0$, 则 x_1, \dots, x_m 的函数

$$P(X_1 \leq x_1, \dots, X_m \leq x_m | \mathbf{Y} = \mathbf{y})$$

称为在 $\mathbf{Y} = \mathbf{y}$ 条件下 \mathbf{X} 的**条件分布函数**, 记为 $F_{\mathbf{X}|\mathbf{Y}}(x_1, \dots, x_m | \mathbf{y})$.

若 $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_m)$ 和 $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_n)$ 有联合密度 $p(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n)$, 则

$$F_{\mathbf{X}|\mathbf{Y}}(x_1, \dots, x_m | y_1, \dots, y_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_m} \frac{p(u_1, \dots, u_m, y_1, \dots, y_n)}{p_Y(y_1, \dots, y_n)} du_1 \dots du_m,$$

这里 $p_Y(y_1, \dots, y_n)$ 是 $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_n)$ 的联合密度, 称这里的被积函数为在 $\mathbf{Y} = (y_1, \dots, y_n)$ 条件下 \mathbf{X} 的**条件分布密度**。

例: 设 X_1, X_2, X_3 为独立同分布的连续型随机变量, 求 $P(X_3 < X_1 | X_1 = \min \{X_1, X_2\})$.

解:

$$\begin{aligned} P(X_3 < X_1 | X_1 = \min \{X_1, X_2\}) &= \frac{P(X_3 < X_1, X_1 = \min \{X_1, X_2\})}{P(X_1 = \min \{X_1, X_2\})} \\ &= \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{x_3}^{+\infty} \int_{x_1}^{+\infty} p(x_2) dx_2 p(x_1) dx_1 p(x_3) dx_3}{\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{x_1}^{+\infty} p(x_2) dx_2 p(x_1) dx_1} \\ &= \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{x_3}^{+\infty} (1 - F(x_1)) dF(x_1) dF(x_3)}{\int_{-\infty}^{+\infty} (1 - F(x_1)) dF(x_1)} \\ &= \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} - F(x_3) + \frac{1}{2} F^2(x_3) dF(x_3)}{1/2} = \frac{1/6}{1/2} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

7.1.1 n 维随机向量的数字特征

设 $\xi = (X_1, \dots, X_n)$ 是 n 维随机向量, 每个 X_i 都有期望和方差, 易知协方差

$$\sigma_{X_i X_j} = E((X_i - E(X_i))(X_j - E(X_j))) \quad (i \neq j)$$

必然存在。

期望: 称 $(E(X_1), \dots, E(X_n))$ 为 ξ 的期望, 记为 $E(\xi)$.

协方差阵: 记 $\sigma_{ij} = \text{cov}(X_i, X_j)$, $\rho_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sqrt{\sigma_{ii}\sigma_{jj}}}$. 称 $\Sigma = (\sigma_{ij})_{n \times n}$ 为 ξ 的协方差阵, $\mathbf{R} = (\rho_{ij})_{n \times n}$ 为 ξ 的相关系数阵。

例: 设随机变量 X_1, X_2, X_3 满足

$$aX_1 + bX_2 + cX_3 = 0,$$

$$E(X_1) = E(X_2) = E(X_3) = d,$$

$$\text{var}(X_1) = \text{var}(X_2) = \text{var}(X_3) = \sigma^2.$$

求相关系数 $\rho_{12}, \rho_{23}, \rho_{31}$.

解: 对等式 $aX_1 + bX_2 = -cX_3$ 两侧求方差得 $a^2\sigma^2 + b^2\sigma^2 + 2ab\sigma^2\rho_{12} = c^2\sigma^2$, 由此解得

$$\rho_{12} = \frac{c^2 - a^2 - b^2}{2ab},$$

同理, 对等式 $aX_1 + cX_3 = -bX_2$ 两侧求方差得

$$\rho_{13} = \frac{b^2 - a^2 - c^2}{2ac},$$

同理, 对等式 $bX_2 + cX_3 = -aX_1$ 两侧求方差得

$$\rho_{23} = \frac{a^2 - b^2 - c^2}{2bc}.$$

特别的, 当 $d \neq 0$ 时, 有 $(a + b + c)d = 0$, 因此 $a + b + c = 0$, 由此可得

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2ab, \quad b^2 = a^2 + c^2 + 2ac, \quad a^2 = b^2 + c^2 + 2bc,$$

代入 $\rho_{12}, \rho_{23}, \rho_{31}$ 表达式得 $\rho_{12} = \rho_{23} = \rho_{31} = 1$ 。

7.1.2 n 个随机变量的函数

定理： 设 $Y = f(X_1, \cdots, X_n)$ 的分布函数是 $F(y)$ ，令

$$A(y) = \{(x_1, \cdots, x_n) : f(x_1, \cdots, x_n) \leq y\}$$

其中 y 是任意实数，则

$$F_Y(y) = P(f(\xi) \leq y) = \int \cdots \int_{A(y)} p(x_1, \cdots, x_n) dx_1 \cdots dx_n$$

定理： (均值公式) 设 $Y = f(X_1, \cdots, X_n)$ ， n 维随机向量 (X_1, \cdots, X_n) 有联合密度 $p(x_1, \cdots, x_n)$ ，则

$$EY = \int \cdots \int f(x_1, \cdots, x_n) p(x_1, \cdots, x_n) dx_1 \cdots dx_n.$$

例： (χ^2 分布) 假设 X_1, \cdots, X_n 独立同分布，都服从 $N(0, 1)$ 。于是， $Y_n := X_1^2 + \cdots + X_n^2 \sim \Gamma(\frac{n}{2}, \frac{1}{2})$ ，密度为

$$p_n(x) = \frac{1}{2^{n/2} \Gamma(\frac{n}{2})} x^{n/2-1} e^{-x/2}, \quad x > 0.$$

其中

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$$

证明： 利用数学归纳法，已经证明 (郑书例 5.2) $Y_1 = X_1^2$ 的分布密度是

$$p_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x^{-1/2} e^{-x/2}, \quad x > 0.$$

设 $n = k$ 时结论成立，考虑 $n = k + 1$ 的情形，由于 $Y_{k+1} = Y_k + X_{k+1}^2$ ， Y_k 与 X_{k+1}^2 相互独立，则 Y_{k+1} 的分布密度为

$$\begin{aligned} p_{k+1}(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} p_k(u) p_1(x-u) du \\ &= \int_0^x \frac{1}{2^{k/2} \Gamma(\frac{k}{2})} u^{k/2-1} e^{-u/2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (x-u)^{-1/2} e^{-(x-u)/2} du \\ &= \int_0^x \frac{e^{-x/2}}{2^{(k+1)/2} \Gamma(\frac{k}{2}) \sqrt{\pi}} u^{k/2-1} (x-u)^{-1/2} du \\ &= \frac{x^{(k+1)/2-1} e^{-x/2}}{2^{(k+1)/2} \Gamma(\frac{k}{2}) \sqrt{\pi}} \int_0^1 v^{k/2-1} (1-v)^{-1/2} dv \quad (\text{做变量替换 } u = xv) \\ &= C x^{(k+1)/2-1} e^{-x/2} \quad (C \text{ 是与 } x \text{ 无关的常数}). \end{aligned}$$

由归一性

$$1 = \int_0^{+\infty} C x^{(k+1)/2-1} e^{-x/2} dx = C 2^{(k+1)/2} \int_0^{+\infty} t^{(k+1)/2-1} e^{-t} dt$$

故

$$C = \frac{1}{2^{(k+1)/2} \Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}.$$

因此 $n = k + 1$ 时结论成立。对一切 $n \geq 1$, Y_n 均服从 $\Gamma\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 。称 Y_n 服从 n 个自由度的 χ^2 (卡方) 分布。 \square

例: 假设 X_1, \dots, X_n 独立同分布, 都服从参数为 λ 的指数分布, 则 $Y_n := \sum_{i=1}^n X_i$ ($n \geq 1$) 的分布密度是

$$p_n(x) = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-\lambda x}, \quad (x > 0).$$

证明: 利用数学归纳法, 当 $n = 1$ 时, 结论显然成立。设 $n = k$ 时结论成立, 考虑 $n = k + 1$ 的情形, 由于 $Y_{k+1} = Y_k + X_{k+1}$, Y_k 与 X_{k+1} 相互独立, 则 Y_{k+1} 的分布密度为

$$\begin{aligned} p_{k+1}(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} p_k(u) p_1(x-u) du \\ &= \int_0^x \frac{\lambda^k}{(k-1)!} u^{k-1} e^{-\lambda u} \lambda e^{-\lambda(x-u)} du \\ &= \frac{\lambda^{k+1}}{(k-1)!} e^{-\lambda x} \int_0^x u^{k-1} du = \frac{\lambda^{k+1}}{k!} x^k e^{-\lambda x}. \end{aligned}$$

因此 $n = k + 1$ 时结论成立。对一切 $n \geq 1$, Y_n 的概率密度均为 $p_n(x) = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-\lambda x}$, ($x > 0$)。并且随机变量 $Z_n = 2\lambda Y_n$ 服从 $2n$ 个自由度的 χ^2 分布。 \square

例: N 件产品中有 D 件次品. 随机抽取 n 件, 设包含 X 件次品. 可以利用期望的性质, 求 $E(X)$ 与 $\text{var}(X)$. (其中, $N \geq n \geq 2$).

解: 随机数目的分解: $X = X_1 + \dots + X_n$, 其中

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{若第 } i \text{ 件是次品;} \\ 0, & \text{若第 } i \text{ 件是合格品.} \end{cases}$$

由期望的线性、伯努利分布的期望,

$$E(X) = \sum_{i=1}^n E(X_i) = \sum_{i=1}^n P(\text{第 } i \text{ 件是次品}) = n \frac{D}{N}.$$

由于 $\text{var}(X) = EX^2 - (EX)^2$. 根据对称性,

$$E(X^2) = \sum_{i=1}^n E(X_i^2) + \sum_{i \neq j} E(X_i X_j) = nE(X_1^2) + n(n-1)E(X_1 X_2)$$

由乘法公式,

$$E(X_1 X_2) = P(\text{前两件都是次品}) = \frac{D}{N} \cdot \frac{D-1}{N-1}.$$

因此,

$$\begin{aligned} \text{var}(X) &= n \frac{D}{N} + n(n-1) \frac{D}{N} \cdot \frac{D-1}{N-1} - \left(n \frac{D}{N} \right)^2 \\ &= \frac{n(N-n)D(N-D)}{N^2(N-1)} \quad (N > 1) \end{aligned}$$

例: 随机向量 $\mathbf{X} = (X_i)_{n \times 1}$, $E(\mathbf{X}) = \mu$, $\text{var}(\mathbf{X}) = \Sigma$, 矩阵 $\mathbf{A}_{n \times n}$, 证明: $E(\mathbf{X}^\top \mathbf{A} \mathbf{X}) = \text{tr}(\mathbf{A} \Sigma) + \mu^\top \mathbf{A} \mu$.

证明:

$$\begin{aligned} E(\mathbf{X}^\top \mathbf{A} \mathbf{X}) &= E(\text{tr}(\mathbf{X}^\top \mathbf{A} \mathbf{X})) = E(\text{tr}(\mathbf{A} \mathbf{X} \mathbf{X}^\top)) \\ &= \text{tr}(E(\mathbf{A} \mathbf{X} \mathbf{X}^\top)) = \text{tr}(\mathbf{A} E(\mathbf{X} \mathbf{X}^\top)) \\ &= \text{tr}(\mathbf{A} (\text{var}(\mathbf{X}) + \mu \mu^\top)) = \text{tr}(\mathbf{A} \Sigma) + \text{tr}(\mathbf{A} \mu \mu^\top) \\ &= \text{tr}(\mathbf{A} \Sigma) + \mu^\top \mathbf{A} \mu. \end{aligned}$$

□

7.1.3 n 个随机变量的多个函数

定理: 设 $\xi = (X_1, \dots, X_n)$ 为连续型随机向量, 且 \mathbb{R}^n 中的区域 A 满足 $P(\xi \in A) = 1$, 函数 $f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n)$ 满足下列条件:

(1) 对任何实数 u_1, \dots, u_n , 方程组

$$f_k(x_1, \dots, x_n) = u_k, \quad (k = 1, \dots, n)$$

在 A 中至多有一个解 $x_i = x_i(u_1, \dots, u_n)$, $i = 1, \dots, n$;

(2) 对一切 $k = 1, \dots, n$, f_k 在 A 中有连续偏导数;

(3) 雅可比行列式

$$J = \frac{\partial(y_1, \dots, y_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} \neq 0.$$

设 $Y_k = f_k(X_1, \dots, X_n)$ ($k = 1, \dots, n$), $G = \{(u_1, \dots, u_n) : \text{方程组 } f_k(x_1, \dots, x_n) = u_k, (k = 1, \dots, n) \text{ 在 } A \text{ 中有解}\}$, 则 $\eta = (Y_1, \dots, Y_n)$ 是连续型, 且联合密度

$$p_\eta(y_1, \dots, y_n) = p_\xi(x_1, \dots, x_n) |J^{-1}|, (y_1, \dots, y_n) \in G.$$

定理: 设 $\xi = (X_1, \dots, X_n)$ 的协方差阵为 Σ , 且

$$Y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} X_j, j = 1, \dots, m.$$

记 $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m \times n}$, $\eta = (Y_1, \dots, Y_m)$, 则

$$(E(\eta))^T = \mathbf{A}(E(\xi))^T,$$

$$\text{cov}(\eta, \eta) = \mathbf{A}\Sigma\mathbf{A}^T.$$

证明: 由于 $E(Y_i) = \sum_{j=1}^n a_{ij} E(X_j)$, 故 $(E(\eta))^T = \mathbf{A}(E(\xi))^T$ 成立, 又由于 $Y_i - E(Y_i) = \sum_{j=1}^n a_{ij} (X_j - E(X_j))$, 知

$$(Y_i - E(Y_i))(Y_k - E(Y_k)) = \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n a_{ij} a_{kl} (X_j - E(X_j))(X_l - E(X_l)).$$

于是

$$\begin{aligned} \text{cov}(Y_i, Y_k) &= \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n a_{ij} a_{kl} E(X_j - E(X_j))(X_l - E(X_l)) \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n a_{ij} a_{kl} \sigma_{jl}, \end{aligned}$$

这里 $\sigma_{jl} = \text{cov}(X_j, X_l)$.

由于 $\Sigma = (\sigma_{jl})_{n \times n}$, 知 $\text{cov}(\eta, \eta) = \mathbf{A}\Sigma\mathbf{A}^T$ 成立。 □

次序统计量: 设 n 个随机变量 X_1, \dots, X_n , 将它们从小到大排列:

$$X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \dots \leq X_{(n)},$$

称 $X_{(k)}$ 为第 k 个次序统计量.

例: 设 X_1, \dots, X_n 独立同分布, 都服从 $U(0, 1)$. 已知对于 $\forall 0 < x < 1$,

$$P(X_{(k)} \leq x) = \sum_{i=k}^n \frac{n!}{i!(n-i)!} x^i (1-x)^{n-i}.$$

求 $E(X_{(k)})$ 与 $\text{var}(X_{(k)})$.

解: 由于对于 $\forall 0 < x < 1$,

$$P(X_{(k)} \leq x) = \sum_{i=k}^n \frac{n!}{i!(n-i)!} x^i (1-x)^{n-i}.$$

$k \leq i \leq n-1$, 上式单项的导数是

$$\begin{aligned} & \frac{n!}{i!(n-i)!} (ix^{i-1}(1-x)^{n-i} - x^i(n-i)(1-x)^{n-i-1}) \\ &= \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!} x^{i-1}(1-x)^{n-i} - \frac{n!}{i!(n-i-1)!} x^i(1-x)^{n-i-1} \\ &= a_{i-1} - a_i, \end{aligned}$$

$i = n$ 时, $(x^n)' = a_{n-1}$, 于是, $\forall 0 < x < 1$,

$$p_{X_{(k)}}(x) = \sum_{i=k}^{n-1} (a_{i-1} - a_i) + a_{n-1} = a_{k-1}.$$

已有 $q_k(x) := p_{X_{(k)}}(x) = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} x^{k-1}(1-x)^{n-k}$, 且对于 $\forall \ell, m \geq 1$, 由分部积分

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^\ell (1-x)^m dx &= \frac{m}{\ell+1} \int_0^1 x^{\ell+1} (1-x)^{m-1} dx \\ &= \cdots = \frac{m!}{(\ell+1) \cdots (\ell+m)} \int_0^1 x^{\ell+m} dx = \frac{\ell!m!}{(\ell+m+1)!} \end{aligned}$$

期望: 取 $\ell = k, m = n-k$, 知

$$\begin{aligned} EX_{(k)} &= \int_0^1 x q_k(x) dx = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \int_0^1 x^k (1-x)^{n-k} dx \\ &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \cdot \frac{k!(n-k)!}{(n+1)!} = \frac{k}{n+1}. \end{aligned}$$

二阶矩: 取 $\ell = k+1, m = n-k$,

$$\begin{aligned} EX_{(k)}^2 &= \int_0^1 x^2 q_k(x) dx = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \int_0^1 x^{k+1} (1-x)^{n-k} dx \\ &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \cdot \frac{(k+1)!(n-k)!}{(n+2)!} = \frac{k(k+1)}{(n+1)(n+2)}. \end{aligned}$$

方差:

$$\begin{aligned} \text{var}(X_{(k)}) &= EX_{(k)}^2 - (EX_{(k)})^2 = \frac{k(k+1)}{(n+1)(n+2)} - \frac{k^2}{(n+1)^2} \\ &= \frac{k^2(n+1) + k(n+1) - k^2(n+2)}{(n+1)^2(n+2)} = \frac{k(n+1-k)}{(n+1)^2(n+2)}. \end{aligned}$$