12. 一副扑克牌共 52 张，分为 4 种花色，每种花色 13 张，假设牌已经充分洗过，以致各张牌被抽到的概率是相等的，今从中任抽 6 张牌，试写出基本事件空间，并求：(1) 其中含有黑桃 K 的概率；

（2）这 6 张中各种花色都有的概率；

（3）至少有两张牌同点的概率。

解：（1）含有黑桃 K 的概率：$\frac{C_{51}^5}{C_{52}^6} = \frac{3}{26} \approx 0.1154.$

(2)6 种花色的可能组合为 $3,1,1,1$ 和 $2,2,1,1$，所求概率为这两种情况之和：$\frac{C_4^1 C_{13}^3 (C_{13}^1)^3 + C_4^2 (C_{13}^2)^2 (C_{13}^1)^2}{C_{52}^6} \approx 0.4265.$

（3）6 张牌均不同的概率为 $\frac{C_{13}^6 \times 4^6}{C_{52}^6}$，至少两张牌相同的概率为 $1 - \frac{C_{13}^6 \times 4^6}{C_{52}^6} \approx 0.6548.$

14. 设 $P(AB) = 0$，问：下列说法那些是正确的？

（1）A 与 B 不相容；

（2）AB 是不可能事件；

（3）AB 不一定是不可能事件；

（4）$P(A) = 0$ 或 $P(B) = 0$；

（5）$P(A - B) = P(A)$；

解：（1）错误。注意到 $P(AB) = 0$ 不等价于 AB 是不可能事件。例如考虑 x 是数轴上的点，设 $A : x \geqslant 5$，$B : x \leqslant 5$，则 $P(AB) = P(x = 5) = 0$。

（2）错误。理由同（1）。

（3）正确。

（4）错误。反例和（1）相同。

（5）正确。

16. 市场调查员报道了以下数据：在被询问的 1000 名顾客中，有 811 人喜欢巧克力糖，752 人喜欢夹心糖，418 人喜欢冰糖，570 人喜欢巧克力糖和夹心糖，356 人喜欢巧克力糖和冰糖，348 人喜欢夹心糖和冰糖，298 人喜欢全部三种糖。试说明这一报道有误。

解：设集合 $A = \{$ 喜欢巧克力糖的人 $\}$，$B = \{$ 喜欢夹心糖的人 $\}$，$C = \{$ 喜欢冰糖的人 $\}$，至少喜欢一种糖的人组成的集合 $S = A \cup B \cup C$ 的大小为

$|S| = |A|+|B|+|C|-|A \cap B|-|A \cap C|-|B \cap C|+|A \cap B \cap C| = 811+752+718-570-356-348+298 = 1005$

超过调查的总人数为 1000 人，矛盾。

17. 设 A 和 B 是任何两个事件，试证明：

$$|P(AB) - P(A)P(B)| \leqslant \frac{1}{4}.$$

证明： 不妨设 $P(A) \leqslant P(B)$，注意到事件 $AB \subset A$，有

$$P(AB) - P(A)P(B) \leqslant P(A) - P(A)P(B) = P(A)(1 - P(B)) \leqslant P(A)(1 - P(A)) \leqslant \frac{1}{4}.$$

另一方面，由于 $P(A) + P(B) - P(AB) = P(A \cup B) \leqslant 1$，即 $P(B) \leqslant P(AB) + 1 - P(A)$，因此

$$P(A)P(B) - P(AB) \leqslant (1 - P(A))P(A) + P(AB)P(A) - P(AB) \leqslant (1 - P(A))P(A) \leqslant \frac{1}{4}.$$

19. 试证明：如事件 $A_1, \cdots, A_n (n \geqslant 2)$ 相互独立，且 B_i 等于 A_i 或 $\bar{A}_i (i = 1, \cdots, n)$ 或 U（必然事件），则 $B_1, \cdots, B_n$ 也是相互独立的。

证明： 任取 k 个事件，设 $i_1, i_2, \cdots, i_k \in [n]$，由于事件顺序不影响独立性，不妨设

$$B_{i_j} = \begin{cases} A_{i_j} & 1 \leqslant j \leqslant s, \\ \bar{A}_{i_j} & s < j \leqslant m, \\ U & m < j \leqslant k. \end{cases}$$

其中 $1 \leqslant s \leqslant m \leqslant k$，则有

$$\begin{aligned} P(B_{i_1} \cdots B_{i_k}) &= P(A_{i_1} \cdots A_{i_s} \bar{A}_{i_{s+1}} \cdots \bar{A}_{i_m} U \cdots U) \\ &= P(A_{i_1}) \cdots P(A_{i_s})(1 - P(A_{i_{s+1}})) \cdots (1 - P(A_{i_m}))1 \cdots 1 \\ &= P(B_{i_1}) \cdots P(B_{i_s}) P(B_{i_{s+1}}) \cdots P(B_{i_m}) P(B_{i_{m+1}}) \cdots P(B_{i_k}) \end{aligned}$$

因此事件 $B_{i_1} \cdots B_{i_k}$ 相互独立。

24. 若 $P(A|B) > P(A|\bar{B})$，试证明：$P(B|A) > P(B|\bar{A})$。

证明： 由贝叶斯公式，$P(A|B) > P(A|\bar{B})$ 等价于

$$\frac{P(AB)}{P(B)} > \frac{P(A\bar{B})}{P(\bar{B})}$$

上式整理后，等价于

$$P(AB)(1 - P(B)) > [P(A) - P(AB)]P(B)$$

即

$$P(AB) > P(A)P(B)$$

同理可得，$P(B|A) > P(B|\bar{A}) \Leftrightarrow P(AB) > P(A)P(B)$，因此 $P(A|B) > P(A|\bar{B}) \Leftrightarrow P(B|A) > P(B|\bar{A})$。

25. 为了寻找一本专著，一个学生决定到三个图书馆去试试，已知每一图书馆有这本书的概率为 50%，且如果有这本书则已经借出的概率为 50%，若各图书馆藏书是相互独立的，求这个学生能得到这本书的概率。

解： 每个图书馆能借到书的概率为 $50\% \times 50\% = \frac{1}{4}$，三个图书馆都借不到书的概率为 $\left(\frac{3}{4}\right)^3$，故能借到书的概率为 $1-\left(\frac{3}{4}\right)^3 = 0.578125$。

26. 在某种射击条件下，射手甲、乙、丙分别以概率 $0.6, 0.5, 0.4$ 中靶，今三位射手一齐射击，有两弹中靶，问：丙中靶的可能性大还是不中靶的可能性大？

解： 由题意，

$$P(\text{甲乙中靶}) = 0.6 \times 0.5 \times (1-0.4) = 0.18$$

$$P(\text{甲丙中靶}) = 0.6 \times (1-0.5) \times 0.4 = 0.12$$

$$P(\text{乙丙中靶}) = (1-0.6) \times 0.5 \times 0.4 = 0.08$$

$$P(\text{丙中靶}|\text{有两人中靶}) = \frac{0.12+0.08}{0.18+0.12+0.08} = \frac{10}{19} > \frac{1}{2}$$

因此丙中靶的可能性更大。

31. 甲和乙两人玩一个系列游戏。游戏的规则是：当乙赢 n 次以前，如果甲已经取胜 m 次，判甲赢得系列游戏；否则，乙赢得系列游戏。在单次游戏中，甲赢的概率是 p，乙赢的概率是 $q = 1-p$。问：甲赢得系列游戏的概率是多少？（这里 m 和 n 是给定的正整数。）

解： 设甲赢 m 次时，乙赢了 i 次，则当 $i = 0, \cdots, n-1$ 时甲能够获胜，甲获胜的概率为

$$P(\text{甲获胜}) = p^m \sum_{i=0}^{n-1} C_{m+i-1}^{i} q^i.$$

37. 一个部件由 6 个元件组成，这 6 个元件在指定的时间 T 内失效的概率分别为

$$p_1 = 0.6, \quad p_2 = 0.2, \quad p_3 = p_4 = p_5 = p_6 = 0.3.$$

试求下列两种情况下部件在时间 T 内失效的概率：

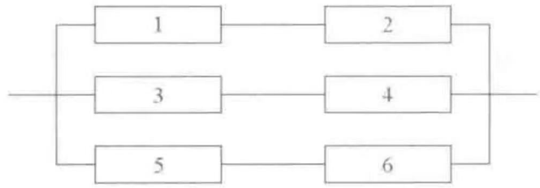
（1）部件由这些元件串联而成；

（2）部件的元件按下图连接：

解：（1）当所有元件不失效时，部件能正常正常工作，概率为 $(1-p_1)\cdots(1-p_6) = (1-0.6)\times(1-0.2)\times(1-0.3)^4 = 0.076832$，部件失效的概率为 $1-0.076832 = 0.923168$.

（2）由题意

$$P(\text{元件}1,2\text{至少一个失效}) = 1-0.4\times0.8 = 0.68.$$



$$P(\text{元件}3,4\text{至少一个失效}) = 1 - 0.7 \times 0.7 = 0.51.$$

$$P(\text{元件}5,6\text{至少一个失效}) = 1 - 0.7 \times 0.7 = 0.51.$$

部件失效需要上述事件同时发生，概率为 $0.68 \times 0.51 \times 0.51 = 0.176868$.

39. 在有三个孩子的家庭中，已知至少有一个是女孩，求至少有一个是男孩的概率。

解： 三个孩子的性别有 8 种情况：{ 女男男，女男女，女女男，女女女，男男男，男男女，男女男，男女女 }，有女孩的情况有 7 种，在此条件下有男孩的情况有 6 种，所求概率为 $\frac{6}{7} \approx 0.8571$。

40. 已知 8 支枪中 3 支未校正，5 支已校正。一射手用前者射击，中靶的概率为 0.3，而用后者射击，中靶的概率为 0.8。今有一人从 8 支枪中任取一支射击，结果中靶，求这支枪是已经校正过的概率。

解： 中靶分为使用未校正和校正的枪两种情况，

$$P(\text{中靶}) = \frac{3}{8} \times \frac{3}{10} + \frac{5}{8} \times \frac{8}{10} = \frac{49}{80}.$$

因此

$$P(\text{使用校正枪中靶}|\text{中靶}) = \frac{\frac{5}{8} \times \frac{8}{10}}{\frac{49}{80}} = \frac{40}{49} \approx 0.8163$$

41. 设有一质地均匀的正八面体，其第 1,2,3,4 面染有红色；第 1,2,3,5 面染有白色；第 1,6,7,8 面染有黑色。在桌面上将次正八面体抛掷一次，然后观察与桌面接触的那一面出现何种颜色，令 $A =$ “出现红色”，$B =$ “出现白色”，$C =$ “出现黑色”，问：A, B, C 是否相互独立？

解： 由题意，$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{2}$，而 $P(AB) = \frac{3}{8} \neq P(A)P(B)$，因此事件 A, B, C 不相互独立。

42. 设事件 A, B, C 相互独立，求证：$A \cup B$，AB，$A - B$ 都与 C 相互独立。

证明： $A \cup B$ 与 C 独立：

$$\begin{aligned} P((A \cup B) \cap C) &= P((AC) \cup (BC)) = P(AC) + P(BC) - P((AC) \cap (BC)) \\ &= P(C)(P(A) + P(B) - P(A)P(B)) = P(A \cup B)P(C) \end{aligned}$$

AB 与 C 独立：

$$P(AB \cap C) = P(A)P(B)P(C) = P(AB)P(C)$$

$A-B$ 与 C 独立:

$P((A-B)\cap C)=P(AC-BC)=P(AC)-P((AC)\cap(BC))=(P(A)-P(A)P(B))P(C)=P(A-B)P(C)$

43. 连续投掷一对均匀的骰子，如果掷出的两点数之和为 7，则甲赢，如果掷出的两点数之积为 5，则乙赢。不停的投掷直到有一方赢为止。求甲赢的概率。

解： 设第 n 次抛时甲赢的概率为

$$\left(1-\frac{6}{36}-\frac{2}{36}\right)^{n-1}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{6}\times\left(\frac{7}{9}\right)^{n-1}$$

则

$$P(\text{甲赢})=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{6}\times\left(\frac{7}{9}\right)^{n-1}=\frac{1}{6}\times\frac{9}{2}=0.75$$