§7.1.2 定积分的定义

$$I=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \xlongequal{def} \lim_{\lambda_\Delta\to 0}\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i.$$

注7.1.1.

(1) 和式 $\sum\limits_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i$ 称为 $f(x)$ 于 $[a,b]$ 上的对应于分割 Δ 的一个*Riemann* 和,

有时简记作$S(\Delta,\xi)$ 或者$S(\Delta)$, 或者$S_f((\Delta,\xi)$, $S_f(\Delta)$.

给定一个函数, 取定一种分割法 Δ, 有无穷多种*Riemann*和

(2) 被积函数自变量(即积分元)的符号用什么并不影响可积性和积分值,

积分由函数关系 f 和积分区间 $[a,b]$ 决定.

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t=\lim_{\lambda_\Delta\to 0}\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i,\quad \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{\lambda_\Delta\to 0}\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i.$$

(3) 注意定义中极限是对任意分割法、任意的取点法而言的.

即具有双重任意性. 唯一要求是 $\lambda_\Delta\to 0$. 之所以这样要求,

既是为了保证积分值的唯一性, 也是为了积分值符合诸多直观（参见后续例题和讨论）.

(4) 上述定义的*Riemann*和的极限, 若存在, 则唯一.

例7.1.3. 计算数列 $I_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{i^\alpha}{n^{1+\alpha}}$, $(\alpha>-1)$的极限.

$$\lim_{n\to\infty}I_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^\alpha \xlongequal{\text{据积分定义}} \int_0^1 x^\alpha\,\mathrm{d}x=\left.\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right|_0^1=\frac{1}{\alpha+1}.$$

注意这里用到了 x^α 于 $[0,1]$ 的连续性, 可积性.

当然, 该极限本可以使用*Stolz*定理计算的

注7.1.2. 在上一例题中, 如果求和少一项则结果保持不变. 即 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n-1}\frac{i^\alpha}{n^{1+\alpha}}=\frac{1}{1+\alpha}$.

事实上, $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n-1}\frac{i^\alpha}{n^{1+\alpha}}=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{i^\alpha}{n^{1+\alpha}}-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^\alpha}{n^{1+\alpha}}$,

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{i^\alpha}{n^{1+\alpha}}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{i^\alpha}{n^{1+\alpha}}.$$

进而, 求和少任意有限项都不改变*Riemann*和的极限.

例7.1.4. 设$f(x)$是$[a,b]$上的有界函数, $\alpha>0$. 证明: 对$[a,b]$的任意分割

Δ: $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$以及任意的取点法$\xi_i\in\Delta x_i$, $i=1,\cdots,n$,

$$\lim_{\|\Delta\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(\Delta x_i)^{1+\alpha}=0.$$

证明. 据题设条件, $\exists M>0$ s.t. $|f(x)|\leqslant M$, $x\in[a,b]$.

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(\Delta x_i)^{1+\alpha}\right|\leqslant M\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i\,\|\Delta\|^{\alpha}=M(b-a)\|\Delta\|^{\alpha}.$$

所以, $\lim\limits_{\|\Delta\|\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)(\Delta x_i)^{1+\alpha}=0.$ □

本例题条件值得注意: 对有界函数, 结论就成立. 不需要函数的可积性.

这个结论从一个侧面说明了函数微分的定义的准确性

——自变量改变量(比线性部分)高阶的部分, 不会影响线性部分的累加(积分),

从而作为微分(形式) $f(x)\,\mathrm{d}x$只需要考虑线性部分.

另一方面, 这个结论在后续内容(积分的几何应用)中有用

——计算整体几何量时, 丢掉自变量改变量的高阶无穷小项的理论依据.