AI 中的数学

第二十讲

方聪，概率统计部分参考章复熹和张原老师课件

2024 年秋季

1. 置信区间
2. 假设检验

1 置信区间

2 假设检验

定义：设 $X_1, \cdots, X_n \sim$iid $F(x,\theta)$ 是一个统计模型，$g(\theta)$ 为实值函数。假设 $\underline{T} = \underline{T}(X_1, \cdots, X_n)$ 与 $\bar{T} = \bar{T}(X_1, \cdots, X_n)$ 为统计量，$\alpha \in (0,1)$.

(1) 若 $\underline{T} < \bar{T}$ 且

$$P_\theta(\underline{T} \leqslant g(\theta) \leqslant \bar{T}) \geqslant 1-\alpha, \quad \forall \theta \in \Theta,$$

则称 $[\underline{T}, \bar{T}]$ 为 $g(\theta)$ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间.

(2) 若

$$P_\theta(\underline{T} \leqslant g(\theta)) \geqslant 1-\alpha, \quad \forall \theta \in \Theta,$$

则称 $\underline{T}$ 为 $g(\theta)$ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信下限.

(3) 若

$$P_\theta(g(\theta) \leqslant \bar{T}) \geqslant 1-\alpha, \quad \forall \theta \in \Theta,$$

则称 $\bar{T}$ 为 $g(\theta)$ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信上限.

枢轴量法

定义：设 $X_1, \cdots, X_n \sim$iid $F(x, \theta)$ 是一个统计模型，$g(\theta)$ 是待估量. 若

$$h = h\left(X_1, \cdots, X_n; g(\theta)\right)$$

的分布与 θ 无关，则称 h 为枢轴量.

借助枢轴量，我们可以构造置信区间或置信限：

Step 1. 找枢轴量 $h = h(\vec{X}, g(\theta))$ 及其分布 F.

Step 2. 利用 F 选择 a, b, 使得:

$$P(a \leqslant h \leqslant b) \geqslant 1 - \alpha.$$

Step 3. 将 $a \leqslant h \leqslant b$ 化为 $\underline{T} \leqslant g(\theta) \leqslant \bar{T}$, 于是得到

$$P(\underline{T} \leqslant g(\theta) \leqslant \bar{T}) \geqslant 1 - \alpha.$$

例：设总体：$X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$. 样本量：$n$. 求 λ 的置信区间.

例：设总体：$X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$. 样本量：$n$. 求 λ 的置信区间.

解：由于 $\lambda X \sim \mathrm{Exp}(1)$, 因此,

$$h_1 = \lambda(X_1 + \cdots + X_n) \sim \Gamma(n, 1).$$

$2\lambda X \sim \mathrm{Exp}\left(\frac{1}{2}\right)$, 因此

$$h_2 = 2\lambda(X_1 + \cdots + X_n) \sim \Gamma\left(n, \frac{1}{2}\right) = \chi^2(2n).$$

查 $\chi^2(2n)$ 的表获得 $\chi^2(2n)$ 分布的 $\alpha/2$ 分位数和 $1-\alpha/2$ 分位数：$\lambda_1 = \chi^2_{\alpha/2}(2n), \lambda_2 = \chi^2_{1-\alpha/2}(2n)$. 于是,
$P_\lambda(\lambda_1 \leqslant h_2 \leqslant \lambda_2) = 1-\alpha$. 从而, 所求为 $[\underline{T}, \bar{T}]$, 其中,

$$\underline{T} = \frac{\lambda_1}{2(X_1 + \cdots + X_n)}, \quad \bar{T} = \frac{\lambda_2}{2(X_1 + \cdots + X_n)}.$$

例：设总体 $X \sim U(0, \theta)$，样本量为 n，试对设定的 $\alpha (0 < \alpha < 1)$ 给出 θ 的 $1 - \alpha$ 同等置信区间。

例：设总体 $X \sim U(0,\theta)$，样本量为 n，试对设定的 $\alpha(0<\alpha<1)$ 给出 θ 的 $1-\alpha$ 同等置信区间。

解：使用枢轴量法：
第一步：已知 θ 的 ML 估计是样本的最大次序统计量 $x_{(n)}$，而 $\frac{x_{(n)}}{\theta}$ 的密度函数为

$$p(y;\theta) = ny^{n-1}, \quad 0<y<1,$$

与 θ 无关，可以选取 $\frac{x_{(n)}}{\theta}$ 作为枢轴量 G。
第二步：由于 $\frac{x_{(n)}}{\theta}$ 的分布函数为 $F(y)=y^n, 0<y<1$，故 $P(c \leqslant \frac{x_{(n)}}{\theta} \leqslant d) = d^n - c^n$，因此可以选择适当的 c 和 d 满足

$$d^n - c^n = 1-\alpha.$$

第三步：整理不等式得到 θ 的 $1-\alpha$ 同等置信区间为 $[\frac{x_{(n)}}{d}, \frac{x_{(n)}}{c}]$，该区间的平均长度为 $\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{d}\right)E(x_{(n)})$。
不难看出，当 $d=1, c=\sqrt[n]{\alpha}$ 时，$\frac{1}{c}-\frac{1}{d}$ 取最小值，说明 $[x_{(n)}, x_{(n)}/\sqrt[n]{\alpha}]$ 是 θ 的此类区间估计中置信水平为 $1=\alpha$ 的最短。

例：设总体 $\xi \sim N(\theta, \theta^2), \theta > 0$，样本量为 n，求 θ 的 $1-\alpha$ 同等置信区间。

例：设总体 $\xi \sim N(\theta, \theta^2), \theta > 0$，样本量为 n，求 θ 的 $1-\alpha$ 同等置信区间。

解：均值 $\bar{\xi} \sim N(\theta, \frac{\theta^2}{n})$，因此 $\frac{\bar{\xi}-\theta}{\theta/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$，

$$-\Phi\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) \leqslant \frac{\bar{\xi}-\theta}{\theta/\sqrt{n}} \leqslant \Phi\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)$$

即

$$\frac{\bar{\xi}}{1+\frac{\Phi\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}{\sqrt{n}}} \leqslant \theta \leqslant \frac{\bar{\xi}}{1-\frac{\Phi\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}{\sqrt{n}}}.$$

定理：假设总体：$X \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$，样本量：$n$. 则

(1) $\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{1}{n}\sigma^2\right)$

(2) $\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2 \sim \chi^2(n-1)$;

(3) $\bar{X}$ 与 $\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2$ 相互独立.

$t(n)$ 分布：设 $\xi \sim N(0,1)$，$\eta \sim \chi^2(n)$，且 ξ 与 η 独立，记 $T = \frac{\xi}{\eta/n}$.

证明：设 $X_i = \mu + \sigma Z_i$, 其中 $Z_i = X_i^* \sim N(0,1)$, i.i.d.，因此

$$\bar{X} = \mu + \sigma \bar{Z}, \quad \frac{\sum_{i=1}^n \left(X_i - \bar{X}\right)^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^n \left(Z_i - \bar{Z}\right)^2 = \sum_{i=1}^n Z_i^2 - n\bar{Z}^2$$

取正交矩阵 $\mathbf{A}_{n\times n}$, 其第一行是 $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}, \cdots, \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$. 令 $\vec{Y} = \mathbf{A}\vec{Z}$.
由 A 正交, $\vec{Y} \sim N\left(\vec{0}, \mathbf{I}_{n\times n}\right)$ 且 $\sum_{i=1}^n Z_i^2 = \sum_{i=1}^n Y_i^2$.
由 $\mathbf{A}$ 的第一行, $Y_1^2 = n\bar{Z}^2$. 于是,
$\frac{\sum_{i=1}^n \left(X_i - \bar{X}\right)^2}{\sigma^2} = \sum_{i=2}^n Y_i^2 \sim \chi^2(n-1)$. 故 (2) 成立.
$\bar{Z} = \frac{1}{\sqrt{n}} Y_1 \sim N\left(0, \frac{1}{n}\right)$, 且与 $\sum_{i=2}^n Y_i^2$ 独立. 故, (1), (3) 成立.

例：总体 $X \sim N(\mu, \sigma_0^2)$，其中 σ_0^2 已知, (例如, $X \sim N(\mu, 1)$).
求: μ 的置信度为 $1-\alpha$ 的 (1) 置信区间, (2) 置信上限.

例：总体 $X \sim N(\mu, \sigma_0^2)$，其中 σ_0^2 已知，(例如，$X \sim N(\mu, 1)$).
求：μ 的置信度为 $1-\alpha$ 的 (1) 置信区间，(2) 置信上限.

解：取 $h = h(X_1, \cdots, X_n, \mu) := \frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{\sigma} \sim N(0,1)$.
(1) 查表获得标准正态分布的 $1-\alpha/2$ 分位数 $z_{1-\alpha/2}$，于是 $P_\mu\left(|h| \leqslant z_{1-\alpha/2}\right) = 1-\alpha$. 因此，

$$P_\mu\left(|\bar{X}-\mu| \leqslant \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha/2}\right) = 1-\alpha.$$

概率论角度：$\bar{X} \in \left[\mu - \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha/2}, \mu + \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha/2}\right]$，未知的随机点 $\bar{X}$ 落在已知的确定区间中.
统计学角度：$\mu \in \left[\bar{X} - \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha/2}, \bar{X} + \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha/2}\right]$(此即所求置信区间)，已知的随机区间 (可由数据得到) 覆盖未知参数 μ (确定的点).

(2) 置信上限为 $\bar{\mu} = \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha}$:

$$P_{\mu}\left(h \geqslant z_{\alpha}\right) = 1 - \alpha \Rightarrow P_{\mu}\left(\bar{X} \leqslant \mu - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha}\right) = 1 - \alpha.$$

例：若在上例中 μ,σ^2 均未知，求：μ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间。

解：这种情况不能用枢轴量 $\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{\sigma}$ 得到 μ 的置信区间（因 σ 未知）。不过可以取

$$T=\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{\hat{\sigma}}$$

作为枢轴量，其中 $\hat{\sigma}=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}$，且其分布是自由度为 $n-1$ 的 t 分布。记 $t_{1-\alpha/2}(n-1)$ 为自由度是 $n-1$ 的 t 分布的 $1-\alpha/2$ 分位数，则

$$P\left(\left|\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{\hat{\sigma}}\right|\leqslant t_{1-\alpha/2}(n-1)\right)=1-\alpha$$

这样，我们得到
$\left[\bar{X}-\hat{\sigma}t_{1-\alpha/2}(n-1)/\sqrt{n},\bar{X}+\hat{\sigma}t_{1-\alpha/2}(n-1)/\sqrt{n}\right]$ 是 μ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间。再将数据 $x_1,\ldots,x_n$ 代入即可。

例：设总体为正态分布 $N(\mu, 1)$，为得到 μ 的置信水平为 0.95 的置信区间且长度不超过 1.2，样本容量应为多大？

例：设总体为正态分布 $N(\mu,1)$，为得到 μ 的置信水平为 0.95 的置信区间且长度不超过 1.2，样本容量应为多大？

解：由题设条件知 μ 的 0.95 置信区间为

$$\left[\bar{x}-z_{1-\alpha/2}/\sqrt{n},\quad \bar{x}+z_{1-\alpha/2}/\sqrt{n}\right],$$

其区间长度为 $2z_{1-\alpha/2}/\sqrt{n}$，它仅依赖于样本容量 n 而与样本具体取值无关。现要求 $2z_{1-\alpha/2}/\sqrt{n}\leqslant 1.2$，立即有 $n\geqslant(2/1.2)^2 z_{1-\alpha/2}^2$。现 $1-\alpha=0.95$，故 $z_{1-\alpha/2}=1.96$，从而 $n\geqslant(5/3)^2\times 1.96^2=10.67\approx 11$。即样本容量至少为 11 时才能使 μ 的置信水平为 0.95 的置信区间长度不超过 1.2。

例：假设轮胎的寿命服从正态分布。为估计某种轮胎的平均寿命，现随机地抽取 12 只轮胎试用，测得它们的寿命（单位：万千米）如下：

4.68	4.85	4.32	4.85	4.61	5.02
5.20	4.60	4.58	4.72	4.38	4.70

试求平均寿命的 0.95 置信区间。

例：假设轮胎的寿命服从正态分布。为估计某种轮胎的平均寿命，现随机地抽取 12 只轮胎试用，测得它们的寿命（单位：万千米）如下：

4.68	4.85	4.32	4.85	4.61	5.02
5.20	4.60	4.58	4.72	4.38	4.70

试求平均寿命的 0.95 置信区间。

解：此处正态总体标准差未知，可使用 t 分布求均值的置信区间。本例中经计算有 $\bar{x} = 4.709$, $s^2 = 0.0615$. 取 $\alpha = 0.05$, 查表知 $t_{0.975}(11) = 2.2010$, 于是平均寿命的 0.95 置信区间为

$$4.709 \pm 2.2010 \cdot \sqrt{\frac{0.0615}{12}} = [4.5516, 4.8668].$$

在实际问题中，由于轮胎的寿命越长越好，因此可以只求平均寿命的置信下限.

参数的近似置信区间

定义：设 $X_1, \cdots, X_n \sim$iid $F(x,\theta)$ 是一个统计模型，$g(\theta)$ 是待估量，$T(X_1, \cdots, X_n)$ 是 $g(\theta)$ 的渐近正态估计，

(1) 若 σ^2 已知，则 $g(\theta)$ 的置信度为 $1-\alpha$ 的近似置信区间是

$$\left[T(X_1,\ldots,X_n) - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha/2}, T(X_1,\ldots,X_n) + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha/2}\right];$$

(2) 若 σ^2 未知，则 $g(\theta)$ 的置信度为 $1-\alpha$ 的近似置信区间是

$$\left[T(X_1,\ldots,X_n) - \frac{\hat{\sigma}_n}{\sqrt{n}} t_{n-1,1-\alpha/2}, T(X_1,\ldots,X_n) + \frac{\hat{\sigma}_n}{\sqrt{n}} t_{n-1,1-\alpha/2}\right],$$

其中 $\hat{\sigma}_n$ 为 σ 的相合估计.

例：某学校计划在数学系开一门新课，调查了 90 位学生以后，发现其中 15 位学生反映目前课业负担过重。试求课业负担过重的学生百分比的置信度为 0.95 的置信区间。

例：某学校计划在数学系开一门新课，调查了 90 位学生以后，发现其中 15 位学生反映目前课业负担过重。试求课业负担过重的学生百分比的置信度为 0.95 的置信区间。

解：记 θ 为课业负担过重的学生的百分比，n 为调查的样本量，X 为样本中课业负担过重的学生数。利用中心极限定理，得到

$$\sqrt{n}\left(\frac{X}{n}-\theta\right)/\sqrt{\theta(1-\theta)} \xrightarrow{w} N(0,1) \quad (n\to\infty),$$

从而对给定的 $a\in(0,1)$，有

$$P\left(\left|\sqrt{n}\left(\frac{X}{n}-\theta\right)/\sqrt{\theta(1-\theta)}\right|\leqslant z_{1-a/2}\right)\approx 1-a.$$

现在需求解不等式

$$\left|\sqrt{n}\left(\frac{X}{n}-\theta\right)/\sqrt{\theta(1-\theta)}\right|\leqslant z_{1-a/2}.$$

这个不等式的解为

$$\tilde{\theta} - \Delta \leqslant \theta \leqslant \tilde{\theta} + \Delta,$$

其中

$$\tilde{\theta} = \frac{2X + z_{1-a/2}^2/n}{n},$$

$$\Delta = \sqrt{\frac{z_{1-a/2}^2/n[z_{1-a/2}^2/n + 4(1 - X/n)X/n]}{n}}.$$

于是，$[\tilde{\theta} - \Delta, \tilde{\theta} + \Delta]$ 是 θ 的置信度为 $1 - \alpha$ 的近似置信区间。

1 置信区间

2 假设检验

- 例 1.1. 200 件产品, b 件次品. 问: 次品率 $p\left(=\frac{b}{200}\right) \leqslant 3\%$?
  方法: 抽查 10 件, 观察数据 (例如: 发现 2 件次品).
- 例 1.2. 纸币长度 $X \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$. 问: $\mu = 155$ mm ?
  方法: 测量 10 张纸币的长度, 得到数据 $(x_1, \cdots, x_{10})$.
- 检验与估计相同之处.
  模型: $X \sim F_\theta, \theta \in \Theta$. 目标: 对 θ 做出一些结论.
  方法: 抽样, 产生数据 $X_1, \cdots, X_n \sim$ i.i.d. F_θ.
- 检验与估计不同之处.
  估计: 输出值 $\hat{p}, \hat{\mu}$, 或者区间.
  检验: 回答问题, 输出 "是" 或 "否" .

定义：设 $X \sim F_\theta(\theta \in \Theta)$ 为总体模型，所谓假设检验问题是两个关于总体真值的互相对立判断 $(\theta \in \Theta_0, \theta \in \Theta_1)$ 的鉴定问题，其中 Θ_0 是 Θ 的一个真子集，$\Theta_1 = \Theta \backslash \Theta_0$ 为 Θ_0 的余集，判断 $\theta \in \Theta_0$ 称为零假设（或原假设），记为 H_0，判断 $\theta \in \Theta_1$ 称为对立假设（或备择假设），记为 H_1，通常用

$$H_0 : \theta \in \Theta_0 \leftrightarrow H_1 : \theta \in \Theta_1$$

或 (Θ_0, Θ_1) 表示假设检验问题。

定义：设 $X \sim F_\theta(\theta \in \Theta)$ 为总体模型，所谓假设检验问题是两个关于总体真值的互相对立判断 $(\theta \in \Theta_0, \theta \in \Theta_1)$ 的鉴定问题，其中 Θ_0 是 Θ 的一个真子集，$\Theta_1 = \Theta \backslash \Theta_0$ 为 Θ_0 的余集，判断 $\theta \in \Theta_0$ 称为零假设（或原假设），记为 H_0，判断 $\theta \in \Theta_1$ 称为对立假设（或备择假设），记为 H_1，通常用

$$H_0 : \theta \in \Theta_0 \leftrightarrow H_1 : \theta \in \Theta_1$$

或 (Θ_0, Θ_1) 表示假设检验问题。

假设检验要求回答是否接受零假设 $\theta \in \Theta_0$ 成立，该回答依赖于样本观测值 $\mathbf{x} = (x_1, \cdots, x_n)$，它是样本空间 $\mathcal{X}$ 的一个取值。因此为了做出判断，只需给出样本空间的一个子集 $\mathcal{W}$。当且仅当 $\mathbf{x} \in \mathcal{W}$ 时，否定零假设 $\theta \in \Theta_0$，我们称 $\mathcal{W}$ 为否定域。

第一类错误：实际问题需要评价否定域的优良性。我们考虑在取定否定域 $\mathcal{W}$ 后，实施起来会有什么后果。在 H_0 为真的条件下，若样本观测值满足条件 $\mathbf{x} \in \mathcal{W}$，此时按照检验规则，应当否定 H_0，而 H_0 为真，这种错误称为第一类错误。

第二类错误：在 H_0 不真的条件下，若样本观察值 $\mathbf{x} \bar{\in} \mathcal{W}$，按照检验规则，不应否定 H_0，而 H_0 不真，这种错误称为第二类错误。

- 定义 1.1. 零假设/原假设 $H_0 : \theta \in \Theta_0$.
  对立假设/备择假设 $H_1 : \theta \in \Theta_1 = \Theta \backslash \Theta_0$.
  检验问题 (Θ_0, Θ_1). $H_0 : \theta \in \Theta_0 \leftrightarrow H_1 : \theta \in \Theta_1$.
- 问题的提法: H_0 是否成立?
- 检验方法: 给出一个否定域 $\mathcal{W} (\subseteq \mathbb{R}^n)$.
  若数据 $\vec{x} = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathcal{W}$, 则输出 "拒绝 (否定) H_0 ";
  若 $\vec{x} \notin \mathcal{W}$, 则输出 "不拒绝 (接受)$H_0$ ".

检验方法 = 带概率的反证法.

- 寻找 $\mathcal{W}$ 使得

$$P_\theta(\vec{X} \in \mathcal{W}) \leqslant \alpha, \quad \theta \in \Theta_0.$$

- $\vec{x} \in \mathcal{W}$: 假设 H_0 成立, 那么小概率事件 $\{\vec{X} \in \mathcal{W}\}$ 发生了, 矛盾! 因此, 原假设 H_0 不成立. 即, 否定 H_0.
  注: 在指定水平下有充分证据表明 H_0 不成立, 推出 H_1 成立.
  强烈的否定!
- $\vec{x} \notin \mathcal{W}$: 没有足够充分的证据表明 H_0 不成立.
  但同样不代表已经有充分的证据接受 H_0, 微弱的接受.
- 两类错误:
  第一类: H_0 为真, 否定 H_0. 犯错概率 $P_\theta(\vec{X} \in \mathcal{W}), \theta \in \Theta_0$.
  第二类: H_0 为假, 接受 H_0. 犯错概率 $P_\theta(\vec{X} \notin \mathcal{W}), \theta \in \Theta_1$.

例 1.6. 药品检验. 药效 $X \sim N\left(\mu, \sigma^2\right), \sigma^2$ 已知.
若 $\mu \geqslant \mu_0$, 则药有效; 若 $\mu \leqslant \mu_0$, 则药无效.

- 怎样提 H_0 ?

$$H_0 : \mu \geqslant \mu_0 \leftrightarrow H_1 : \mu < \mu_0$$
$$H_0 : \mu \leqslant \mu_0 \leftrightarrow H_1 : \mu > \mu_0.$$

- 控制第一类错误, 即 H_0 为真却输出 "认定 H_1 " 的概率

$$\sup_{\theta \in \Theta_0} P_\theta(\vec{X} \in \mathcal{W}) \leqslant \alpha$$

- 防止假药上市, 即 $\mu \leqslant \mu_0$ 为真却输出 "认定 $\mu \geqslant \mu_0$ " .
- 因此, 应该选 $H_0 : \mu \leqslant \mu_0 \leftrightarrow H_1 : \mu > \mu_0$.

例：将每一个人看成一个总体，总体的参数为有病（$\theta = 0$）或没病（$\theta = 1$），则假设检验问题为

$$H_0 : \theta = 0 \leftrightarrow H_1 : \theta = 1.$$

记 X 为鼻子分泌物中某种物质的含量。由经验知道，可存在一个临界值 c，使得 $P_\theta(X > c) = 1 - \alpha$，其中 α 是一个非常小的正数。这说明，这种检验方法可将绝大部分的患胃病的病人检测出来。但是，对于健康人来说，也有相当大的比例呈假阳性，即 $P_1(X > c) = \beta$。但是，医生并不关心 β 的大小，其原因是这种检验方法成本很低。

定义：设 (Θ_1, Θ_2) 称 $\beta_{\mathcal{W}}(\theta) := P_\theta(\vec{X} \in \mathcal{W})$ 为 $\mathcal{W}$ 的功效函数. 若

$$P_\theta(\vec{X} \in \mathcal{W}) \leqslant \alpha, \quad \forall \theta \in \Theta_0,$$

则称 $\mathcal{W}$ 为检验问题 (Θ_0, Θ_1) 的一个 (显著性) 水平为 α 的否定域.

注: 选取 $\mathcal{W}$, 使得 $\beta_{\mathcal{W}}(\theta)$ 在 Θ_0 小, 在 Θ_1 越大越好.

定义：若 $\mathcal{W}$ 是检验问题 (Θ_0, Θ_1) 的水平为 α 的否定域，并且对任意水平为 α 的否定域 $\tilde{\mathcal{W}}$ 都有：

$$P_\theta(\vec{X} \in \mathcal{W}) \geqslant P_\theta(\vec{X} \in \tilde{\mathcal{W}}), \quad \forall \theta \in \Theta_1,$$

则称 $\mathcal{W}$ 为检验问题 (Θ_0, Θ_1) 的水平为 α 的一致最大功效否定域/**UMP** 否定域.

定义：若

$$P_{\theta_0}(\vec{X} \in \mathcal{W}) \leqslant \alpha \leqslant P_{\theta_1}(\vec{X} \in \mathcal{W}), \quad \forall \theta_0 \in \Theta_0, \theta_1 \in \Theta_1$$

则称 $\mathcal{W}$ 为检验问题 (Θ_0, Θ_1) 的一个水平为 α 的无偏否定域.

定义：若

$$P_{\theta_0}(\vec{X} \in \mathcal{W}) \leqslant \alpha \leqslant P_{\theta_1}(\vec{X} \in \mathcal{W}), \quad \forall \theta_0 \in \Theta_0, \theta_1 \in \Theta_1$$

则称 $\mathcal{W}$ 为检验问题 (Θ_0, Θ_1) 的一个水平为 α 的无偏否定域.

定义：若 $\mathcal{W}$ 是检验问题 (Θ_0, Θ_1) 的水平为 α 的无偏否定域，并且对任意水平为 α 的无偏否定域 $\tilde{\mathcal{W}}$ 都有:

$$P_{\theta}(\vec{X} \in \mathcal{W}) \geqslant P_{\theta}(\vec{X} \in \tilde{\mathcal{W}}), \quad \forall \theta \in \Theta_1,$$

则称 $\mathcal{W}$ 为检验问题 (Θ_0, Θ_1) 的水平为 α 的一致最大功效无偏否定域/最优无偏否定域/UMPU 否定域.