AI 中的数学

第二三讲

方聪，概率统计部分参考章复熹和张原老师课件

2024 年秋季

1. 假设检验
2. 似然比检验
3. 单参数模型
4. 广义似然比检验

- 检验与估计相同之处.
  模型: $X \sim F_\theta, \theta \in \Theta$. 目标: 对 θ 做出一些结论.
  方法: 抽样, 产生数据 $X_1, \cdots, X_n \sim$ i.i.d. F_θ.
- 检验与估计不同之处.
  估计: 输出值 $\hat{p}, \hat{\mu}$, 或者区间.
  检验: 回答问题, 输出 "是" 或 "否".

定义：设 $X \sim F_\theta(\theta \in \Theta)$ 为总体模型，所谓假设检验问题是两个关于总体真值的互相对立判断 $(\theta \in \Theta_0, \theta \in \Theta_1)$ 的鉴定问题，其中 Θ_0 是 Θ 的一个真子集，$\Theta_1 = \Theta \backslash \Theta_0$ 为 Θ_0 的余集，判断 $\theta \in \Theta_0$ 称为零假设（或原假设），记为 H_0，判断 $\theta \in \Theta_1$ 称为对立假设（或备择假设），记为 H_1，通常用

$$H_0 : \theta \in \Theta_0 \leftrightarrow H_1 : \theta \in \Theta_1$$

或 (Θ_0, Θ_1) 表示假设检验问题。

定义：设 $X \sim F_\theta(\theta \in \Theta)$ 为总体模型，所谓假设检验问题是两个关于总体真值的互相对立判断（$\theta \in \Theta_0, \theta \in \Theta_1$）的鉴定问题，其中 Θ_0 是 Θ 的一个真子集，$\Theta_1 = \Theta \backslash \Theta_0$ 为 Θ_0 的余集，判断 $\theta \in \Theta_0$ 称为零假设（或原假设），记为 H_0，判断 $\theta \in \Theta_1$ 称为对立假设（或备择假设），记为 H_1，通常用

$$H_0 : \theta \in \Theta_0 \leftrightarrow H_1 : \theta \in \Theta_1$$

或 (Θ_0, Θ_1) 表示假设检验问题。

假设检验要求回答是否接受零假设 $\theta \in \Theta_0$ 成立，该回答依赖于样本观测值 $\mathbf{x} = (x_1, \cdots, x_n)$，它是样本空间 $\mathcal{X}$ 的一个取值。因此为了做出判断，只需给出样本空间的一个子集 $\mathcal{W}$。当且仅当 $\mathbf{x} \in \mathcal{W}$ 时，否定零假设 $\theta \in \Theta_0$，我们称 $\mathcal{W}$ 为否定域。

- 定义 1.1. 零假设/原假设 $H_0: \theta \in \Theta_0$.
  对立假设/备择假设 $H_1: \theta \in \Theta_1 = \Theta \backslash \Theta_0$.
  检验问题 (Θ_0, Θ_1). $H_0: \theta \in \Theta_0 \leftrightarrow H_1: \theta \in \Theta_1$.
- 问题的提法: H_0 是否成立?
- 检验方法: 给出一个否定域 $\mathcal{W} (\subseteq \mathbb{R}^n)$.
  若数据 $\vec{x} = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathcal{W}$, 则输出 "拒绝 (否定) H_0 ";
  若 $\vec{x} \notin \mathcal{W}$, 则输出 "不拒绝 (接受) H_0 ".

实际问题需要评价否定域的优良性。在取定否定域 $\mathcal{W}$ 后，实施起来会有什么后果。

第一类错误：在 H_0 为真的条件下，若样本观测值满足条件 $\mathbf{x} \in \mathcal{W}$，此时按照检验规则，应当否定 H_0，而 H_0 为真，这种错误称为第一类错误。

第二类错误：在 H_0 不真的条件下，若样本观察值 $\mathbf{x} \notin \mathcal{W}$，按照检验规则，不应否定 H_0，而 H_0 不真，这种错误称为第二类错误。

例 1.6. 药品检验. 药效 $X \sim N\left(\mu, \sigma^2\right), \sigma^2$ 已知.
若 $\mu \geqslant \mu_0$, 则药有效; 若 $\mu \leqslant \mu_0$, 则药无效.

- 怎样提 H_0 ?

$$H_0 : \mu \geqslant \mu_0 \leftrightarrow H_1 : \mu < \mu_0$$
$$H_0 : \mu \leqslant \mu_0 \leftrightarrow H_1 : \mu > \mu_0.$$

- 首先控制第一类错误！: H_0 为真却输出 "认定 H_1 " 的概率

$$\sup_{\theta \in \Theta_0} P_\theta(\vec{X} \in \mathcal{W}) \leqslant \alpha$$

- 防止假药上市, 即 $\mu \leqslant \mu_0$ 为真却输出 "认定 $\mu \geqslant \mu_0$ " .
- 因此, 应该选 $H_0 : \mu \leqslant \mu_0 \leftrightarrow H_1 : \mu > \mu_0$.

检验方法 = 带概率的反证法.

- 寻找 $\mathcal{W}$ 使得

$$P_\theta(\vec{X} \in \mathcal{W}) \leqslant \alpha, \quad \theta \in \Theta_0.$$

- $\vec{x} \in \mathcal{W}$: 假设 H_0 成立, 那么小概率事件 $\{\vec{X} \in \mathcal{W}\}$ 发生了, 矛盾! 因此, 原假设 H_0 不成立. 即, 否定 H_0.
  注: 在指定水平下有充分证据表明 H_0 不成立, 推出 H_1 成立.
  强烈的否定!
- $\vec{x} \notin \mathcal{W}$: 没有足够充分的证据表明 H_0 不成立.
  但同样不代表已经有充分的证据接受 H_0, 微弱的接受.
- 两类错误:
  第一类: H_0 为真, 否定 H_0. 犯错概率 $P_\theta(\vec{X} \in \mathcal{W}), \theta \in \Theta_0$.
  第二类: H_0 为假, 接受 H_0. 犯错概率 $P_\theta(\vec{X} \notin \mathcal{W}), \theta \in \Theta_1$.

例：将每一个人看成一个总体，总体的参数为有病（$\theta = 0$）或没病（$\theta = 1$），则假设检验问题为

$$H_0 : \theta = 0 \leftrightarrow H_1 : \theta = 1.$$

样例：做核酸

例：将每一个人看成一个总体，总体的参数为有病（$\theta = 0$）或没病（$\theta = 1$），则假设检验问题为

$$H_0 : \theta = 0 \leftrightarrow H_1 : \theta = 1.$$

样例：做核酸

- 应用：自动监测、显著性检测
- 理论：统计复杂度下界（评估数据区分参数的程度）

定义：设 (Θ_1, Θ_2) 称 $\beta_{\mathcal{W}}(\theta) := P_\theta(\vec{X} \in \mathcal{W})$ 为 $\mathcal{W}$ 的功效函数. 若

$$P_\theta(\vec{X} \in \mathcal{W}) \leqslant \alpha, \quad \forall \theta \in \Theta_0,$$

则称 $\mathcal{W}$ 为检验问题 (Θ_0, Θ_1) 的一个 (显著性) 水平为 α 的否定域.

注：选取 $\mathcal{W}$, 使得 $\beta_{\mathcal{W}}(\theta)$ 在 Θ_0 小, 在 Θ_1 越大越好.

定义：若 $\mathcal{W}$ 是检验问题 (Θ_0, Θ_1) 的水平为 α 的否定域，并且对任意水平为 α 的否定域 $\tilde{\mathcal{W}}$ 都有：

$$P_\theta(\vec{X} \in \mathcal{W}) \geqslant P_\theta(\vec{X} \in \tilde{\mathcal{W}}), \quad \forall \theta \in \Theta_1,$$

则称 $\mathcal{W}$ 为检验问题 (Θ_0, Θ_1) 的水平为 α 的一致最大功效否定域/**UMP** 否定域.

- 简单假设检验问题: $\Theta = \{\theta_0, \theta_1\}$.

$$H_0 : \theta = \theta_0 \leftrightarrow H_1 : \theta = \theta_1.$$

- 似然函数: $L(\vec{x}, \theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i, \theta)$. (以连续型为例)
- 似然比否定域/似然比检验:

$$\mathcal{W}_\lambda = \{\vec{x} : L(\vec{x}, \theta_1) > \lambda L(\vec{x}, \theta_0)\}$$

- 简单假设检验问题: $\Theta = \{\theta_0, \theta_1\}$.

$$H_0 : \theta = \theta_0 \leftrightarrow H_1 : \theta = \theta_1.$$

- 似然函数: $L(\vec{x}, \theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i, \theta)$. (以连续型为例)
- 似然比否定域/似然比检验:

$$\mathcal{W}_\lambda = \{\vec{x} : L(\vec{x}, \theta_1) > \lambda L(\vec{x}, \theta_0)\}$$

- 定理 2.1. (Neyman-Pearson 引理) 若 λ_0 使得

$$P_{\theta_0}\left(\vec{X} \in \mathcal{W}_{\lambda_0}\right) = \alpha,$$

则 $\mathcal{W}_{\lambda_0}$ 是水平为 α 的 UMP 否定域.

- 给出否定域的形式 $W = \{x : \lambda(x) \geqslant \lambda_0\}$, 其中 λ_0 是一个待定的常数，它是通过水平 α 来确定的
- 将否定域 (函数) 问题转化为在给定形式下求参数 λ 的问题
- 在求否定域的时候，有时作一些变换可使否定域的计算变得简单 (枢轴量法确定参数 λ)

例： $X \sim N(\mu, 1)$, $\mu \in \{0, 2\}$. 求假设检验问题
$H_0 : \mu = 0 \leftrightarrow H_1 : \mu = 2$ 的水平为 $\alpha = 0.05$ 的 UMP 否定域.

例： $X \sim N(\mu,1)$, $\mu \in \{0,2\}$. 求假设检验问题
$H_0: \mu = 0 \leftrightarrow H_1: \mu = 2$ 的水平为 $\alpha = 0.05$ 的 UMP 否定域.

解：似然函数与似然比:

$$\frac{L(\mathbf{x},\theta_1)}{L(\mathbf{x},\theta_0)} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n (x_i-2)^2}}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n x_i^2}} = e^{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n 4(x_i-1)}.$$

似然比否定域:

$$\mathcal{W}_\lambda = \left\{\mathbf{x} : \frac{L(\mathbf{x},\theta_1)}{L(\mathbf{x},\theta_0)} > \lambda\right\} = \{\mathbf{x} : \bar{x} > c\}.$$

$T(x_1,\cdots,x_n) = \bar{x}$ 称为检验统计量.

例： $X \sim N(\mu, 1)$, $\mu \in \{0, 2\}$. 求假设检验问题 $H_0 : \mu = 0 \leftrightarrow H_1 : \mu = 2$ 的水平为 $\alpha = 0.05$ 的 UMP 否定域.

解：似然函数与似然比:

$$\frac{L(\mathbf{x}, \theta_1)}{L(\mathbf{x}, \theta_0)} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n (x_i-2)^2}}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n x_i^2}} = e^{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n 4(x_i-1)}.$$

似然比否定域:

$$\mathcal{W}_\lambda = \left\{\mathbf{x} : \frac{L(\mathbf{x}, \theta_1)}{L(\mathbf{x}, \theta_0)} > \lambda\right\} = \{\mathbf{x} : \bar{x} > c\}.$$

$T(x_1, \cdots, x_n) = \bar{x}$ 称为检验统计量.
根据 α 选择 λ (等价地, 选择 c):

$$\alpha = P_{\theta_0}(\bar{X} > c) = P(Z > c\sqrt{n}) \Rightarrow c = z_{1-\alpha}/\sqrt{n}.$$

查表获得 $z_{1-0.05} = 1.65$. 从而所求为

$$\mathcal{W} = \{\mathbf{x} : \bar{x} > 1.65/\sqrt{n}\}.$$

例：$\Theta = \{0,1\}$. $\theta = 0$ 时，$f(x,0) = 1_{\{0<x<1\}}$, $\theta = 1$ 时，$f(x,1) = 2x1_{\{0<x<1\}}$. 求假设检验问题 $H_0 : \theta = 0 \leftrightarrow H_1 : \theta = 1$ 的水平为 α 的 UMP 否定域.

例： $\Theta = \{0,1\}$. $\theta = 0$ 时， $f(x,0) = 1_{\{0<x<1\}}$, $\theta = 1$ 时， $f(x,1) = 2x1_{\{0<x<1\}}$. 求假设检验问题 $H_0 : \theta = 0 \leftrightarrow H_1 : \theta = 1$ 的水平为 α 的 UMP 否定域.

解： 似然函数与似然比:

$$\frac{L(\mathbf{x},\theta_1)}{L(\mathbf{x},\theta_0)} = \frac{2^n x_1 \cdots x_n 1_{\{0<x_1,\cdots,x_n<1\}}}{1_{\{0<x_1,\cdots,x_n<1\}}} = 2^n x_1 \cdots x_n 1_{\{0<x_1,\cdots,x_n<1\}}$$

似然比否定域与检验统计量 $T = T(x_1, \cdots, x_n)$:

$$\mathcal{W}_\lambda = \left\{\mathbf{x} : \frac{L(\mathbf{x},\theta_1)}{L(\mathbf{x},\theta_0)} > \lambda\right\} = \left\{\mathbf{x} : -2\sum_{i=1}^{n} \ln x_i < c\right\}$$

根据 α 选择 c : 在 H_0 下, $Y = -2\ln X$ 的密度函数为 $p_Y(y) = p_X(e^{-\frac{1}{2}y})| - \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}y}| = \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}y} \quad (y > 0)$, 故 $-2\ln X \sim \chi^2(2)$,

$$\alpha = P_{\theta_0}\left(-2\sum_{i=1}^{n} \ln X_i < c\right) \Rightarrow c = \chi^2_\alpha(2n).$$

扩展到 H_0 是一个集合:

定理: 若存在 $\theta_0 \in \Theta_0$ 使得检验问题 (θ_0, θ_1) 的水平为 α 的 UMP 否定域 $\mathcal{W}$ 满足: $P_\theta(\mathbf{X} \in \mathcal{W}) \leqslant \alpha$, 对于 $\forall \theta \in \Theta_0$. 则, $\mathcal{W}$ 是检验问题 (Θ_0, θ_1) 的水平为 α 的 UMP 否定域.

扩展到 H_0, H_1 都是集合:

定理: 若对任意 $\theta_1 \in \Theta_1$, 检验问题 (Θ_0, θ_1) 都存在水平为 α 的 UMP 否定域 $\mathcal{W}$, 且此 $\mathcal{W}$ 不依赖于 θ_1. 则, 此 $\mathcal{W}$ 是检验问题 (Θ_0, Θ_1) 的水平为 α 的 UMP 否定域.

定义：若 Θ 为有限或无穷区间，密度或分布列为

$$f(x,\theta) = S(\theta)h(x)\exp\{C(\theta)T(x)\}, \quad \theta \in \Theta,$$

其中，$C(\theta)$ 严格增. 则称 $f(x,\theta), \theta \in \Theta$ 为单参数指数族.

定义：若 Θ 为有限或无穷区间，密度或分布列为

$$f(x,\theta) = S(\theta)h(x)\exp\{C(\theta)T(x)\}, \quad \theta \in \Theta,$$

其中，$C(\theta)$ 严格增. 则称 $f(x,\theta), \theta \in \Theta$ 为单参数指数族.

- 单边假设检验问题:

$$H_0 : \theta \leqslant \theta_0 \leftrightarrow H_1 : \theta > \theta_0$$

-

$$H_0 : \theta \geqslant \theta_0 \leftrightarrow H_1 : \theta < \theta_0$$

- 双边假设检验问题:

$$H_0 : \theta = \theta_0 \leftrightarrow H_1 : \theta \neq \theta_0$$

定理：假设总体分布族为单参指数族

$$f(x,\theta)=S(\theta)h(x)\exp\{C(\theta)T(x)\},\quad \theta\in\Theta.$$

若

$$\mathcal{W}:=\left\{\mathbf{x}:\sum_{i=1}^{n}T\left(x_i\right)>c\right\}$$

满足 $P_{\theta_0}(\mathbf{X}\in\mathcal{W})=\alpha\neq 0$, 其中 c 为任一常数，则 $\mathcal{W}$ 是单边问题

$$H_0:\theta\leqslant\theta_0\leftrightarrow H_1:\theta>\theta_0$$

的水平为 α 的 UMP 否定域

例：总体服从指数分布：$\left(\frac{1}{\theta}\right)\exp(-x/\theta), \Theta = (0, \infty)$. $\theta \geqslant 6000$ (单位: 小时) 为合格. 测得 5 个数据,

$$395, 4094, 119, 11572, 6133.$$

试进行检验.

例：总体服从指数分布：$\left(\frac{1}{\theta}\right)\exp(-x/\theta), \Theta = (0, \infty)$. $\theta \geqslant 6000$ (单位: 小时) 为合格. 测得 5 个数据,

$$395, 4094, 119, 11572, 6133.$$

试进行检验.

定义假设检验问题：$H_0: \theta \leqslant \theta_0 = 6000 \leftrightarrow H_1: \theta > \theta_0$. (防止次品出厂). 注意，另一种问题 $H_0: \theta \geqslant \theta_0 = 6000 \leftrightarrow H_1: \theta < \theta_0$. 将产品合格作为零假设，不能保证不合格的产品不予出厂。

总体为单参指数族，$T(x) = x$，因此，UMP 否定域形如

$$\mathcal{W} = \left\{ \mathbf{x} : \sum_{i=1}^{n} x_i > c \right\}.$$

在 θ_0 下，$K_{2n} := 2\sum_{i=1}^{n} X_i/\theta_0 \sim \chi^2(2n)$. 因此，要求

$$P_{\theta_0}(\mathbf{X} \in \mathcal{W}) = P\left(K_{2n} > 2c/\theta_0\right) = \alpha.$$

即，应取 $2c/\theta_0 = \chi^2_{1-\alpha}(2n)$，即 $c = \chi^2_{1-\alpha}(2n) \times \theta_0/2$.

总体为单参指数族，$T(x)=x$，因此，UMP 否定域形如

$$\mathcal{W}=\left\{\mathbf{x}:\sum_{i=1}^{n}x_i>c\right\}.$$

在 θ_0 下，$K_{2n}:=2\sum_{i=1}^{n}X_i/\theta_0\sim\chi^2(2n)$. 因此，要求

$$P_{\theta_0}(\mathbf{X}\in\mathcal{W})=P\left(K_{2n}>2c/\theta_0\right)=\alpha.$$

$$\text{即，应取}\quad 2c/\theta_0=\chi^2_{1-\alpha}(2n),\ \text{即}\, c=\chi^2_{1-\alpha}(2n)\times\theta_0/2.$$

取 $\alpha=0.05$，查表获得 $\chi^2_{0.95}(10)=18.307$，
即 $c=18.307\times 6000/2=54921$. $\sum_{i=1}^{5}x_i=22313<54921$，故接受 H_0，不予出厂。

例： $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, σ^2 已知 $(= 1.21)$, 测得 6 个数据.

$$32.56, 29.66, 31.64, 30.00, 31.87, 30.23.$$

$\mu \geqslant 30$ 则合格. 问：设水平为 $\alpha = 0.05$, 是否可以出厂?

解：假设检验问题. $H_0 : \mu \leqslant \mu_0 = 30 \leftrightarrow H_1 : \mu > \mu_0$. (防止次品出厂). 总体为单参指数族: $f(x, \mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}x^2} e^{\frac{\mu}{\sigma^2}x}$.
$T(x) = x$, 因此, UMP 否定域形如

$$\mathcal{W} = \left\{\mathbf{x} : \sum_{i=1}^{n} x_i > \tilde{c}\right\} = \left\{\mathbf{x} : \frac{\sqrt{n}\,(\bar{x} - \mu_0)}{\sigma} > c\right\}$$

取 $c = z_{1-\alpha}$:

$$P_{\mu_0}(\mathbf{X} \in \mathcal{W}) = P_{\mu_0}\left(\frac{\sqrt{n}\,(\bar{X} - \mu_0)}{\sigma} > c\right) = \alpha$$

查表获得 $z_{0.95} = 1.65$. 代入数据: $\frac{\sqrt{n}(\bar{x}-\mu_0)}{\sigma} = 2.212 > 1.65$, 故否定 H_0, 可出厂!

例： $X \sim N\left(\mu, \sigma^2\right), \mu = 3$ 已知，测得 9 个数据.

$3.0012, 2.9987, 3.0051, 2.9959, 3.0153, 2.9990, 3.0008, 3.0075, 3.0004.$

$\sigma < \sigma_0 = 0.005$ 则合格. 问: 在显著性水平为 $\alpha = 0.05$ 下，该产品是否合格?

例： $X \sim N\left(\mu,\sigma^2\right), \mu=3$ 已知，测得 9 个数据.

$3.0012, 2.9987, 3.0051, 2.9959, 3.0153, 2.9990, 3.0008, 3.0075, 3.0004.$

$\sigma<\sigma_0=0.005$ 则合格. 问：在显著性水平为 $\alpha=0.05$ 下，该产品是否合格?

解：假设检验问题. $H_0:\sigma^2 \geqslant \sigma_0^2 \leftrightarrow H_1:\sigma^2<\sigma_0^2$.
总体为单参指数族：$f\left(x,\sigma^2\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right\}$,
$T(x)=(x-\mu)^2$, 因此，UMP 否定域形如

$$\mathcal{W}=\left\{\mathbf{x}:\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2<\tilde{c}\right\}=\left\{\mathbf{x}:\frac{1}{\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2<c\right\}.$$

取 $c=\chi_\alpha^2(n)$:

$$P_{\sigma_0^2}(\mathbf{X}\in\mathcal{W})=P_{\sigma_0^2}\left(\frac{1}{\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2<c\right)=\alpha.$$

查表获得 $c=\chi_{0.05}^2(9)=3.325$. 代入数据:
$\frac{1}{\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2=13.2563>3.325$, 故接受 H_0.

设 $X \sim f(x,\theta)$ ($\theta \in \Theta$), $f(x,\theta)$ 是分布密度或分布列, θ 可以是向量, Θ_0 是 Θ 的真子集, 考虑假设检验问题

$$H_0 : \theta \in \Theta_0 \longleftrightarrow H_1 : \theta \in \Theta_1,$$

设 $\mathbf{X} = (X_1, \cdots, X_n)$ 为来自总体 X 的一个样本, $\mathbf{x} = (x_1, \cdots, x_n)$ 为样本观察值. 令

$$L(\mathbf{x},\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i,\theta).$$

令 $\hat{\theta}$ 为 θ 的 ML 估计, 即 $\hat{\theta}$ 满足条件

$$L(\mathbf{x},\hat{\theta}) = \sup_{\theta\in\Theta} L(\mathbf{x},\theta).$$

同时, 令 $\hat{\theta}_0$ 为在总体模型 $X \sim f(x,\theta)$ ($\theta \in \Theta_0$) 的假设之下, 参数 θ 的 ML 估计, 即 $\hat{\theta}_0$ 满足条件

$$L(\mathbf{x},\hat{\theta}_0) = \sup_{\theta\in\Theta_0} L(\mathbf{x},\theta).$$

定义：称 $\lambda(\mathbf{x}) := L(\mathbf{x}, \hat{\theta})/L\left(\mathbf{x}, \hat{\theta}_0\right)$ 为广义似然比.
广义似然比否定域指

$$\mathcal{W} := \left\{\mathbf{x} : \frac{L(\mathbf{x}, \hat{\theta})}{L\left(\mathbf{x}, \hat{\theta}_0\right)} > c\right\} = \{\mathbf{x} : \lambda(\mathbf{x}) > c\},$$

其中 $c \geqslant 1$, 且满足 $\sup P_\theta(\mathbf{X} \in \mathcal{W}) = \alpha$, $\theta \in \Theta_0$，相应的检验方法称为广义似然比检验。

考虑正态分布单边问题 $H_0:\mu\leqslant\mu_0\leftrightarrow H_1:\mu>\mu_0$.
$\theta=\left(\mu,\sigma^2\right),\Theta=(-\infty,\infty)\times(0,\infty),\Theta_0=(-\infty,\mu_0]\times(0,\infty)$.

考虑正态分布单边问题 $H_0 : \mu \leqslant \mu_0 \leftrightarrow H_1 : \mu > \mu_0$.
$\theta = \left(\mu, \sigma^2\right), \Theta = (-\infty, \infty) \times (0, \infty), \Theta_0 = (-\infty, \mu_0] \times (0, \infty)$.

似然函数: $L(\mathbf{x}, \theta) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^n \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2\right\}$.
最大似然估计 $\hat{\theta} : \hat{\mu} = \bar{x}, \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (x_i - \hat{\mu})^2$,

$$L(\mathbf{x}, \hat{\theta}) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\hat{\sigma}^2}}\right)^n \exp\left\{-\frac{1}{2\hat{\sigma}^2}\sum_{i=1}^n (x_i - \hat{\mu})^2\right\} = \left(2\pi\hat{\sigma}^2\right)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{n}{2}}$$

最大似然估计 $\hat{\theta}_0$:

$$\hat{\mu}_0 = \begin{cases} \bar{x}, & 若 \bar{x} \leqslant \mu_0, \\ \mu_0, & 若 \bar{x} > \mu_0, \end{cases}$$

$$L\left(\mathbf{x}, \hat{\theta}_0^2\right) = \left(2\pi\hat{\sigma}_0^2\right)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{n}{2}}.$$

广义似然比：$\lambda(\mathbf{x})=\left(\frac{\hat{\sigma}_0^2}{\hat{\sigma}^2}\right)^{\frac{n}{2}}$，其中，

$$\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2,\quad \hat{\sigma}_0^2=\begin{cases}\hat{\sigma}^2, & 若\bar{x}\leqslant\mu_0,\\ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2, & 若\bar{x}>\mu_0,\end{cases}$$

广义似然比否定域：$c_1\geqslant 1$，

$$\mathcal{W}=\left\{\mathbf{x}:\frac{\hat{\sigma}_0^2}{\hat{\sigma}^2}>c_1\right\}=\left\{\mathbf{x}:\bar{x}>\mu_0\ 且\ \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}>c_1\right\}.$$

$\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2+n(\mu_0-\bar{x})^2$，因此

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}=1+\frac{T^2}{n-1},\quad 其中\ T=\frac{\sqrt{n}(\bar{x}-\mu_0)}{S}.$$

总结：$c>0$,

$$\mathcal{W}=\left\{\vec{x}: T>0 \text{ 且 } T^2>c_2\right\}=\{\vec{x}: T>c\}.$$

根据 α 求 c : $\forall \mu \leqslant \mu_0, T \leqslant \frac{\sqrt{n}(\bar{x}-\mu)}{S} =: T_{n-1} \sim t(n-1)$，在 $\mu=\mu_0$ 时等号成立。因此，取 $c=t_{1-\alpha}(n-1)$ 即可满足

$$\max_{\mu \leqslant \mu_0} P_\mu(T>c)=P\left(T_{n-1}>c\right)=\alpha.$$

考虑正态分布单边问题 $H_0:\sigma^2 \geqslant \sigma_0^2 \leftrightarrow H_1:\sigma^2 < \sigma_0^2$.
$\Theta = (-\infty,\infty)\times(0,\infty), \Theta_0 = (-\infty,\infty)\times\left[\sigma_0^2,\infty\right)$.
似然函数: $L(\mathbf{x},\theta) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^n \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n (x_i-\mu)^2\right\}$.
最大似然估计:

$$\hat{\mu} = \hat{\mu}_0 = \bar{x}, \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (x_i-\hat{\mu})^2, \hat{\sigma}_0^2 = \begin{cases} \hat{\sigma}^2, & 若\hat{\sigma}^2 \geqslant \sigma_0^2, \\ \sigma_0^2, & 若\hat{\sigma}^2 \leqslant \sigma_0^2. \end{cases}$$

广义似然比:

$$\lambda(\mathbf{x}) = \frac{L(\mathbf{x},\hat{\theta})}{L\left(\mathbf{x},\hat{\theta}_0\right)} = \begin{cases} 1, & 若\hat{\sigma}^2 \geqslant \sigma_0^2, \\ u^{-\frac{n}{2}} e^{\frac{u}{2}} \left(\frac{e}{n}\right)^{-\frac{n}{2}}, & 若\hat{\sigma}^2 \leqslant \sigma_0^2. \end{cases}$$

其中 $u = u(\mathbf{x}) = \frac{n\hat{\sigma}^2}{\sigma_0^2}$.

广义似然比否定域:

$$\mathcal{W} = \left\{ \mathbf{x} : \hat{\sigma}^2 \leqslant \sigma_0^2, \left(\frac{u}{n}\right)^{-\frac{n}{2}} e^{\frac{u}{2}} > \tilde{c} \right\} = \{\mathbf{x} : u < c\}.$$

其中 $u = u(\mathbf{x}) = \frac{n\hat{\sigma}^2}{\sigma_0^2}, c < n$.
根据 α 求 c. $\forall \sigma^2 \geqslant \sigma_0^2, U := u(\mathbf{X}) \geqslant \frac{n\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} =: U_{n-1} \sim \chi^2(n-1)$,
在 $\sigma^2 = \sigma_0^2$ 时, 等号成立. 因此, 取 $c = \chi_\alpha^2(n-1)$ 即可满足

$$\max_{\sigma^2 \geqslant \sigma_0^2} P_{\sigma^2}(U < c) = P\left(U_{n-1} < c\right) = \alpha.$$