20240221作业

1. 设函数$f(x)$在$[a,b]$有定义,记$f^+(x) = \max(f(x),0)$; $f^-(x) = -\min(f(x),0)$. 证明: $f(x) \in R[a,b]$的充分必要条件是$f^+(x)$和$f^-(x)$在$[a,b]$可积.

2. (1) 若$f(x) \in R[a,b]$, 是否有$|f(x)| \in R[a,b]$? 反之如何?
   (2) 若$f(x) \in R[a,b]$, 是否有$f^2(x) \in R[a,b]$? 反之如何?

3. 设函数$f(x), g(x) \in R[a,b]$,记$\Delta: \quad a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b,$ 为$[a,b]$的分割; $\lambda(\Delta) = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n}\{\Delta x_i = x_i - x_{i-1}\}$, 并任取$\xi_i, \eta_i \in [x_{i-1}, x_i], i = 1,2,...,n$. 试证明: $\lim\limits_{\lambda \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)g(\eta_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$

4. 设函数$f(x)$在$[a,b]$可积且存在$\alpha > 0$ 使得对$\forall x \in [a,b]$有$f(x) \geqslant \alpha$. 试证明
   (1) $\dfrac{1}{f(x)} \in R[a,b]$; (2) $\ln f(x) \in R[a,b]$.