第9讲 网络流问题 (中)

罗国杰

gluo@pku.edu.cn

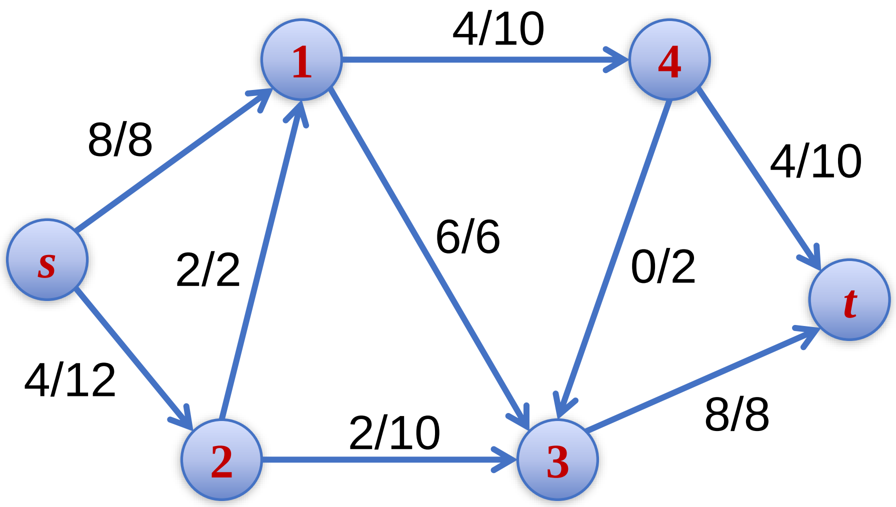
2025年春季学期

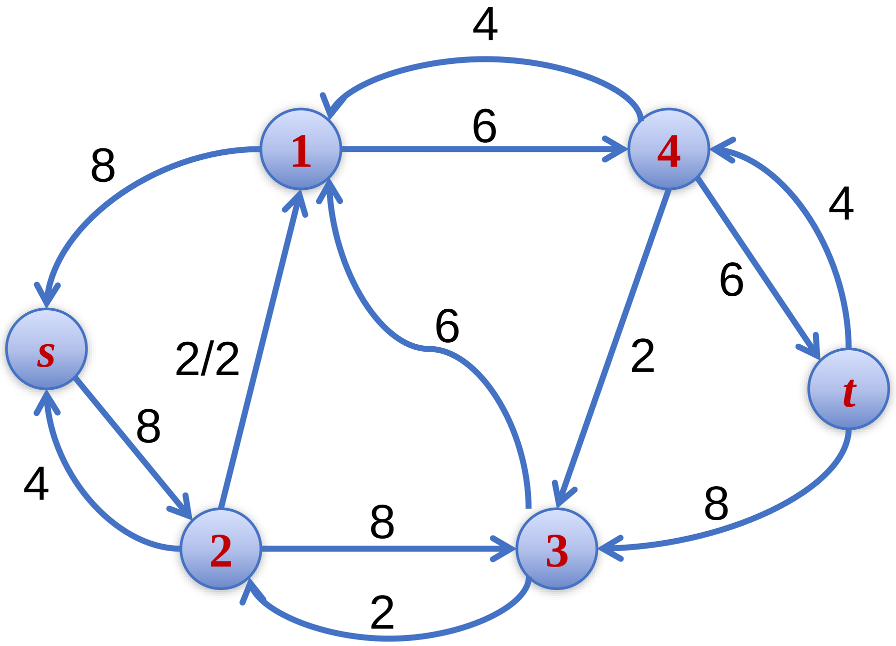
算法设计与分析『实验班』

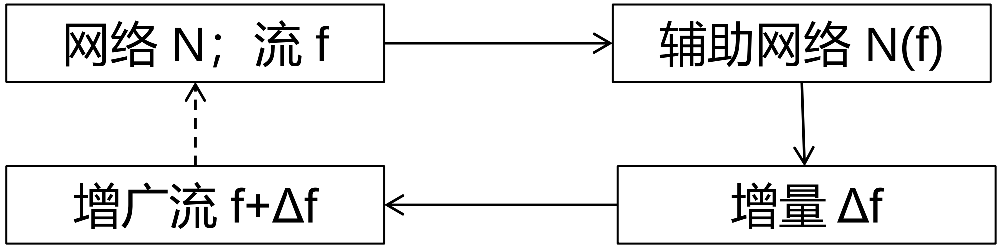
PKU-04833060

Review: Max-flow Algorithms

- https://visualgo.net/en/maxflow







Ford-Fulkerson:	$O(E\ \lvert f^*\rvert)$
Edmunds-Karp:	$O(VE^2)$
Dinic:	$O(V^3)$~$O(EV^2)$

最大流 预流推进算法

- 预流推进（preflow-push）算法
  - 预流的概念
  - 预流推进算法的思想
  - 算法正确性证明
  - 算法时间复杂性分析
- 预流推进算法的优化
  - 重标记前置（relabel-front）预流推进算法
  - 算法性质证明和时间复杂性分析

增广路径与预流推进的对比

- 基于增广路径的算法
  - 从零流（可行解）出发
  - 每步基于增广路径构造一个更大的流
  - 流不能增大时为止
- 基于预流推进的算法
  - 从源点出发
  - 或者把预流（松弛解）尽可能地向前推（push）
  - 或者重新标记中间结点的高度（relabel）
  - 不能继续操作时为止

预流（preflow）

- 预流（preflow）的性质：
  - 预流函数 f: V×V→R
  - 容量限制
    - $f(u, v) \le c(u, v)$
  - 松弛的流量平衡——超额流（excess flow）非负
    - $e(u) = \Sigma_v f(v,u) - \Sigma_v f(u,v) \ge 0$, for $\forall u \in V - \{s\}$
- 溢出（overflow）结点
  - $e(u) > 0$

预流推进算法的直观思想

- 洪水流经河网和水库流向大海的过程
  - 最上游水库开闸，洪水迅速涌向下游水库
    - 此时下泄流量只与河道容量有关（割的容量）
  - 洪峰到达，下游水库开闸，洪水继续涌向下游 (push)
    - 流出量只和与下游水库间的河网总容量有关
  - 流出量小于流入量时，水库水位不断增高 (relabel)
    - 可能会出现新的泄洪渠道
    - 或减弱入库流量（洪水回涌）
  - 最后最上游水库出库流量与河网泄洪流量一致
    - 泄洪过程的动态平衡

预流推进的基本操作

- 基本操作
  - 推进流：***push***
  - 重标记：***relabel***
- 高度函数
  - 流网络 ***G*** 上的预流 ***f*** 的高度函数 ***h***
  - $h[s] = |V|$, $h[t] = 0$
  - $h[u] \le h[v] + 1$, for $\forall\ (u, v) \in E_f$ (E_f 是预流对应的余量网络 N_f 的边集)
- 高度函数与余量网络边的关系（引理26.12）
  - $h[u] > h[v] + 1 \Rightarrow (u, v) \notin E_f$

推进流（PUSH）

PUSH(u, v)

▹ Applies when: u is overflowing, $c_f(u, v) > 0$, and $h[u] = h[v] + 1$.

▹ Action: Push $\Delta_f(u, v) = \min(e[u], c_f(u, v))$ units of flow from u to v.

$\Delta_f(u, v) \leftarrow \min(e[u], c_f(u, v))$

if (u,v)∈E then $f[u, v] \leftarrow f[u, v] + \Delta_f(u, v)$

else $f[v, u] \leftarrow f[v, u] - \Delta_f[u, v]$

$e[u] \leftarrow e[u] - \Delta_f(u, v)$

$e[v] \leftarrow e[v] + \Delta_f(u, v)$

关于PUSH

- **PUSH(u, v)**
  - 从u到v推进流（满足条件时才能推进）
- 饱和推进（***saturating push***）
  - 如果推进后边的流量饱和（剩余容量$c_f(u, v) = 0$）
- 不饱和推进（***unsaturating push***）
  - 如果推进后边的流量不饱和（剩余容量$c_f(u, v) > 0$）
  - 不饱和推进把溢出结点转变为非溢出结点（引理26.13）

重标号（RELABLE）

RELABEL(u)

1 ▹ Applies when: u is **overflowing** and for all $v \in V$ such that $(u, v) \in E_f$,
we have $h[u] \leq h[v]$.

2 ▹ Action: Increase the **height** of u.

3 $h[u] \leftarrow 1 + \min \{h[v] : (u, v) \in E_f\}$

通用的预流推进算法

INITIALIZE-PREFLOW(G, s)

for each vertex $u \in V[G]$

  do $h[u] \leftarrow 0$

    $e[u] \leftarrow 0$

for each edge $(u, v) \in E[G]$

  do $f[u, v] \leftarrow 0$

$h[s] \leftarrow |V[G]|$

…

…

for each vertex $u \in Adj[s]$

  do $f[s, u] \leftarrow c(s, u)$

    $e[u] \leftarrow c(s, u)$

    $e[s] \leftarrow e[s] - c(s, u)$

GENERIC-PUSH-RELABEL

GENERIC-PUSH-RELABEL(*G*)

1 INITIALIZE-PREFLOW(*G*, *s*)

2 **while** 如果能够应用PUSH或RELABEL操作

3 **do** 任意选取结点做PUSH或RELABEL操作

- 任何溢出结点（引理26.14）
  - 或者可以应用PUSH
  - 或者可以应用RELABEL
- 证明：用高度函数的定义和不能应用PUSH蕴含着可以应用RELABEL的条件即可证明。

预流推进算法的正确性

- 证明思路
  - 算法终止时，所得预流即最大流
  - 算法一定会终止

引理26.15 结点高度不会降低

- 结点高度$h[u]$不会减小，
  并且重标号使结点高度$h[u]$至少增加1
- 证明：
  - 因为$h[u]$只在RELABEL过程中改变，
  - 而当结点u可以应用RELABEL时，
    对于余量网络任意满足$(u, v) \in E_f$的结点v，$h[u] \le h[v]$
  - 所以 $h[u] < 1 + \min \{h[v] : (u, v) \in E_f\}$，即$h[u]$必增大

引理26.16 始终满足高度函数性质

- 在通用预流推进算法过程中，结点高度始终保持遵从高度函数的性质（循环不变式）。
- 证明：（归纳法）
  - 初始时遵从高度函数性质
  - RELABEL(u)操作不改变高度函数性质
    - 任意出边 $(u, v) \in E_f$，重标号后$h[u] \le h[v]+1$
    - 任意入边 $(w, u) \in E_f$，重标号前$h[w] \le h[u]+1$，而重标号后$h[u]$至少增加1，故$h[w]<h[u]+1$
  - PUSH(u, v)可能在E_f中增加边(v, u)或删除边(u, v)
    - 增加时：$h[v] = h[u] - 1 < h[u]+1$
    - 删除时：$h[v]$ 与 $h[u]$ 间无约束

引理26.17 G_f中无从s到t的路径

- 流网络$G=<V, E>$上预流f的余量网络G_f中无从s到t的路径
- 证明:
  - 反证法，设$p = <v_0, v_1, ..., v_k>$是G_f中从s到t的路径，其中$v_0=s$，$v_k=t$
  - 不失一般性，p是一条简单路径，故$k < |V|$
  - 而对于$(v_i, v_{i+1})\in E_f$, $(i=1..k-1)$有$h[v_i] \leq h[v_{i+1}]+1$
  - 于是$|V| = h[s] \leq h[t]+k = k$
  - 矛盾。

定理26.18：通用预流推进算法是正确的

- 如果在流网络$G=<V, E>$上**GENERIC-PUSH-RELABEL**算法能结束，则得到的预流f就是G的最大流。
- 证明：循环不变量（每一步得到的f总是一个预流）
  - 初始：初始化后，得到的f显然是预流
  - 保持：循环中只涉及**PUSH**和**RELABEL**操作。
    - **RELABEL**操作只改变高度，不改变流；
    - **PUSH**不会使任何结点的超额为负，同时保持f的斜对称性和容量限制。
  - 结束：不存在溢出结点，即对于$\forall u \in V-\{s, t\}$，$e[u]=0$。而f始终是预流，故f是G上的流。又G_f中不存在从s到t的路径，故f是最大流。

预流推进算法的时间效率分析

- 方法：考察各种操作的执行次数上界
- 只有三种操作：
  - RELABEL：重标记
  - PUSH：推进流
    - 饱和推进（***saturating push***）
    - 不饱和推进（***unsaturating push***）
- 结论：
  - 通用预流推进算法的运行时间上界为$O(V^2E)$

引理26.19 溢出结点u在G_f中可达s

- 在余量网络G_f中存在一条从溢出结点u到源点s的简单路径
- 证明：反证法。
  - 设$U=\{v\,|\,在G_f中u可达v\}$，假设$s \notin U$，设$\bar{U}=V-U$。
  - 则$\forall w \in \bar{U}$，$\forall v \in U$，$f(w, v) = 0$
    - 否则，如果$f(w, v) > 0$，则
      $c_f(v, w) = f(w, v) > 0$，
      即$(v, w) \in E_f$，这样$w \in U$，矛盾。
  - 于是$f(\bar{U}, U) = 0$，就有
    - $e[U] \le f(V, U) = f(\bar{U}, U) + f(U, U) = f(\bar{U}, U) = 0$
  - 既有$e[u] \ne 0$，矛盾。

引理26.20 结点高度$h[u]$小于$2|V|-1$

- 在通用预流推进算法过程中，对$\forall u \in V$有$h[u] \le 2\ |V|\ -\ 1$。
- 证明:
  - 根据定义，源点s和汇点t满足引理。
  - 对$\forall u \in V-\{s, t\}$，初始时$h[u] = 0 \le 2\ |V|-1$。
  - 在RELABEL(u)后，u溢出，根据引理26.19，在G_f存在从u到s的简单路径$p = <v_0, v_1, . . . ,v_k>$，
    其中$v_0 = u$，$v_k = s$，$k \le |V|-1$。
  - 而对于$(v_i, v_{i+1})\in E_f$, $(i=1..k-1)$有$h[v_i] \le h[v_{i+1}]+1$
  - 于是$h[u] \le h[s]+k \le 2|V|-1$

各种操作次数的上界

- RELABEL： $2|V|^2$
  - 每个结点最多重标记 $2|V|-1$ 次，共 $|V|-2$ 个结点。
- 饱和PUSH： $2|V||E|$
  - u 和 v 间饱和PUSH的次数为 $2|V|-1$
  - 当PUSH(u,v)时有 $h[v] = h[u] - 1$，再次PUSH(u,v)须发生在PUSH(v,u)之后（$h[v] = h[u] + 1$），$h[v]$ 值增加2
- 不饱和PUSH： $4|V|^2(|V| + |E|)$
  - 定义势函数 $\Phi = \Sigma_{v:e(v)>0} h[v] \geq 0$。
  - RELABEL增加势：$\leq 2|V|$；饱和PUSH增加势：$\leq 2|V|$
  - 不饱和PUSH减少势至少1。

通用预流推进算法的时间效率

- 通用预流推进算法一定能结束
  - 只需执行$O(V^2E)$次操作，算法结束
- 算法运行时间上界
  - 如果RELABEL操作的开销为$O(V)$；PUSH操作的开销为$O(1)$。
  - 则运行时间上界为$O(V^2E)$

重标号前置预流推进算法

- 通用预流推进算法
  - 对溢出结点做流推进或重标号操作
  - 操作的顺序是任意的
  - 时间界为$O(V^2E)$
- 重标号前置预流推进算法（略）
  - 对溢出结点做流推进或重标号操作
  - 通过对重标号的结点前置规范结点被处理的顺序
  - 时间界为$O(V^3)$
  - 借助于“允许边”的概念证明和分析

最小费用流

- 在容量网络$N=\langle V,E,c,s,t\rangle$添加费用函数$w\colon E\to R^*$

  称作容量-费用网络，记作$N=\langle V,E,c,w,s,t\rangle$

- 设f是N上的可行流，f是的费用为

$$w(f)=\sum_{\langle i,j\rangle\in E} w(i,j)f(i,j)$$

- 最小费用流：

  流量为v的N上所有可行流中费用最小者

最小费用流算法

- 负回路算法：从可行流开始，迭代直至费用最低
- 最短路径算法：从零流开始，迭代直至满足流量约束

容量-费用网络的辅助网络

- 设容量-费用网络$\boldsymbol{N}=\langle \boldsymbol{V},\boldsymbol{E},\boldsymbol{c},\boldsymbol{w},\boldsymbol{s},\boldsymbol{t}\rangle$，$\boldsymbol{f}$是$\boldsymbol{N}$上的可行流，
- 其辅助网络的定义为

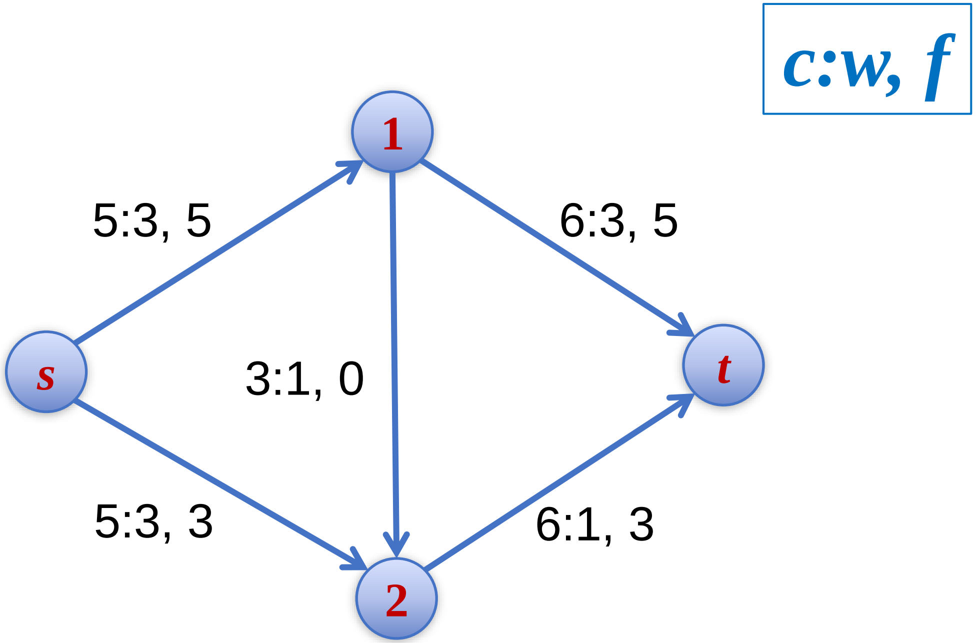
$$\boldsymbol{N}(\boldsymbol{f})=\langle \boldsymbol{V},\boldsymbol{E}(\boldsymbol{f}),\boldsymbol{ac},\boldsymbol{aw},\boldsymbol{s},\boldsymbol{t}\rangle$$

其中$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{f})$和$\boldsymbol{ac}$的定义与最大流辅助网络一致

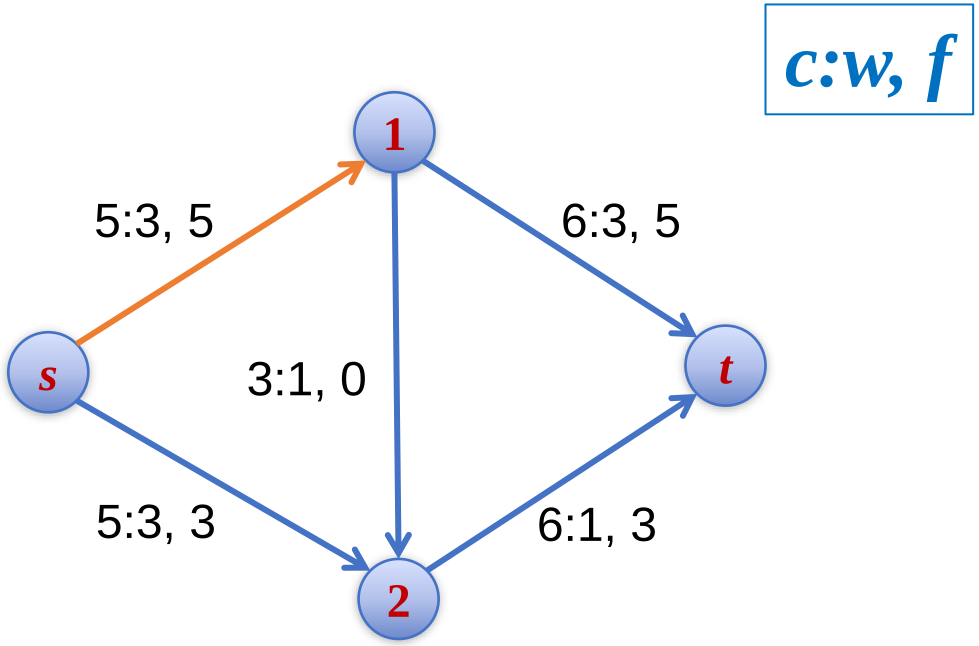
辅助费用$\boldsymbol{aw}$为

$$\boldsymbol{aw}(\boldsymbol{i},\boldsymbol{j})=\begin{cases} \boldsymbol{w}(\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}) & \langle \boldsymbol{i},\boldsymbol{j}\rangle \in \boldsymbol{E}^{+}(\boldsymbol{f}) \\ -\boldsymbol{w}(\boldsymbol{j},\boldsymbol{i}) & \langle \boldsymbol{i},\boldsymbol{j}\rangle \in \boldsymbol{E}^{-}(\boldsymbol{f}) \end{cases}$$

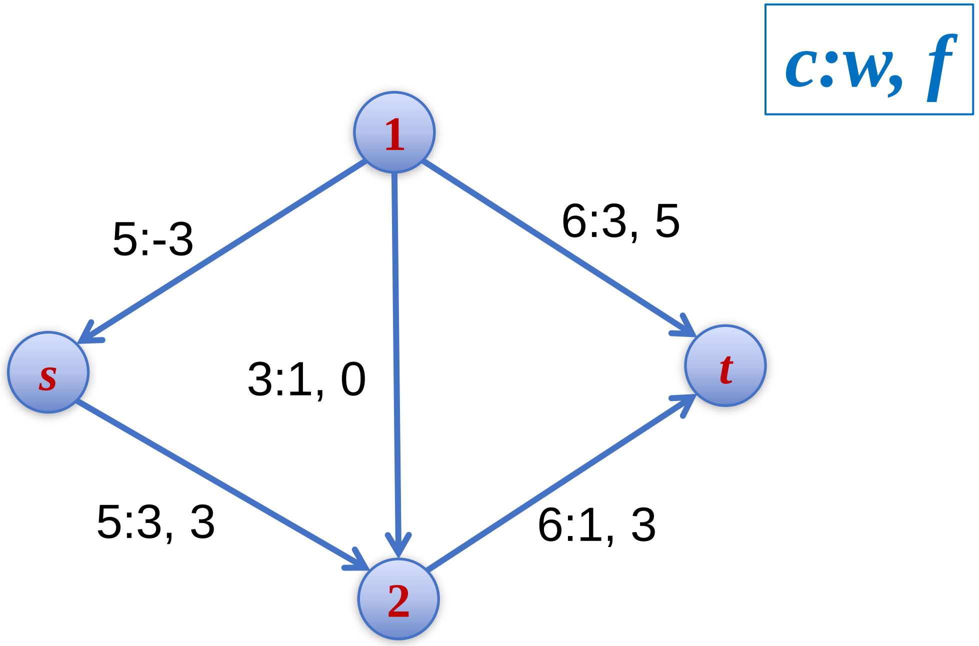
容量-费用网络与其辅助网络



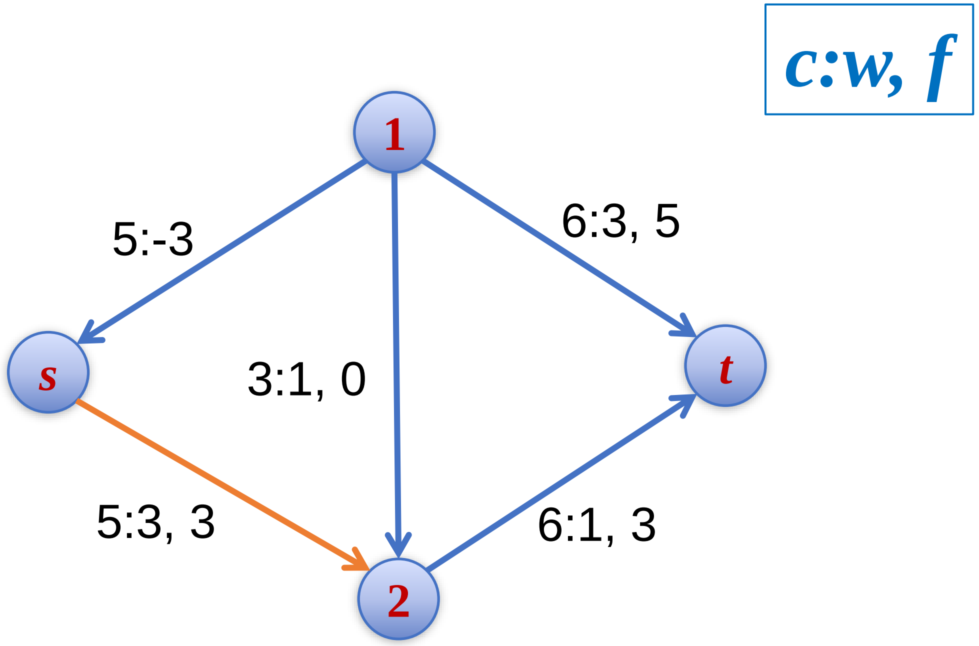
容量-费用网络与其辅助网络



容量-费用网络与其辅助网络

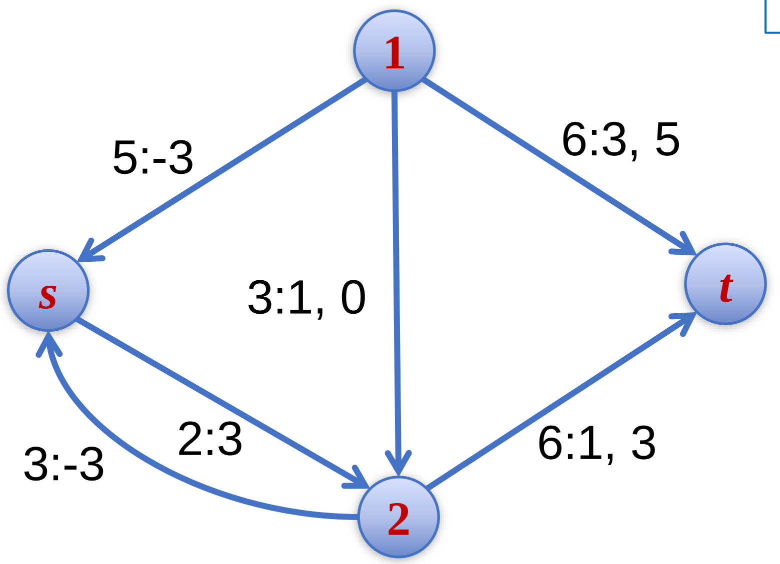


容量-费用网络与其辅助网络



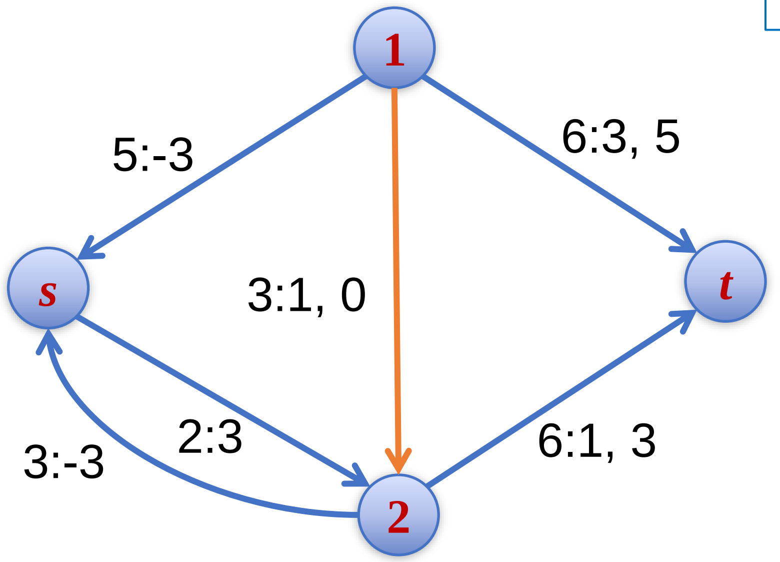
容量-费用网络与其辅助网络

c:w, f

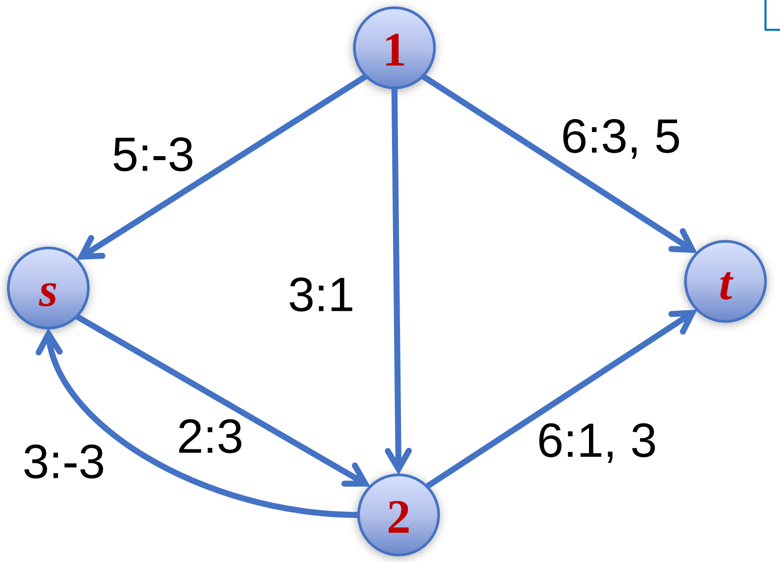


容量-费用网络与其辅助网络

c:*w*, *f*



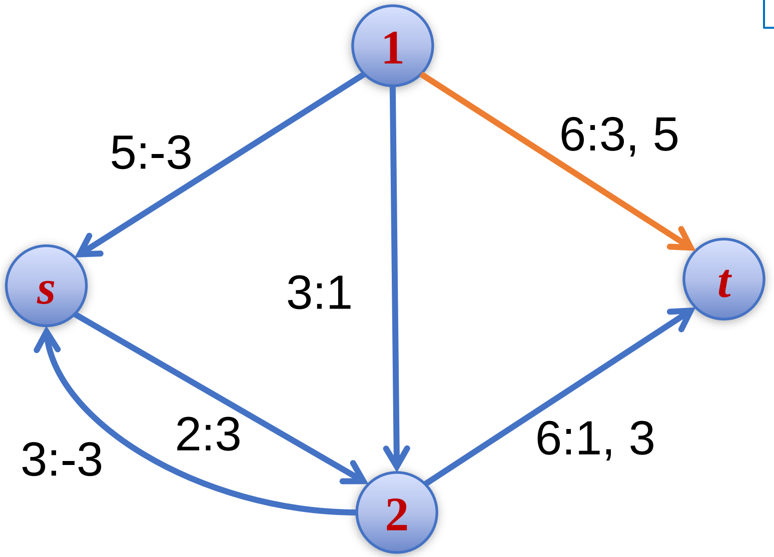
容量-费用网络与其辅助网络



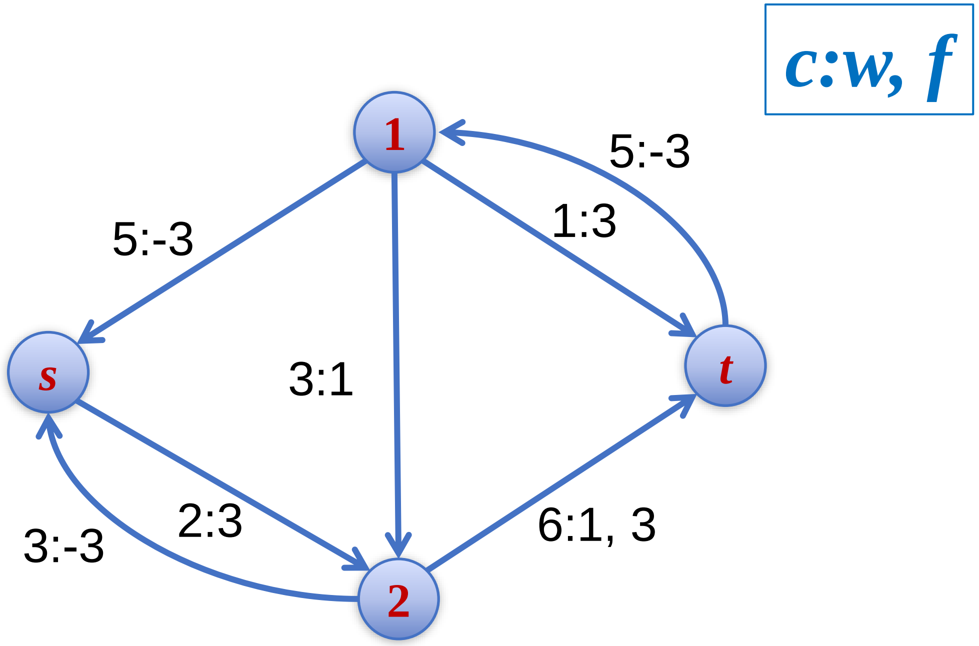
c:*w*, *f*

容量-费用网络与其辅助网络

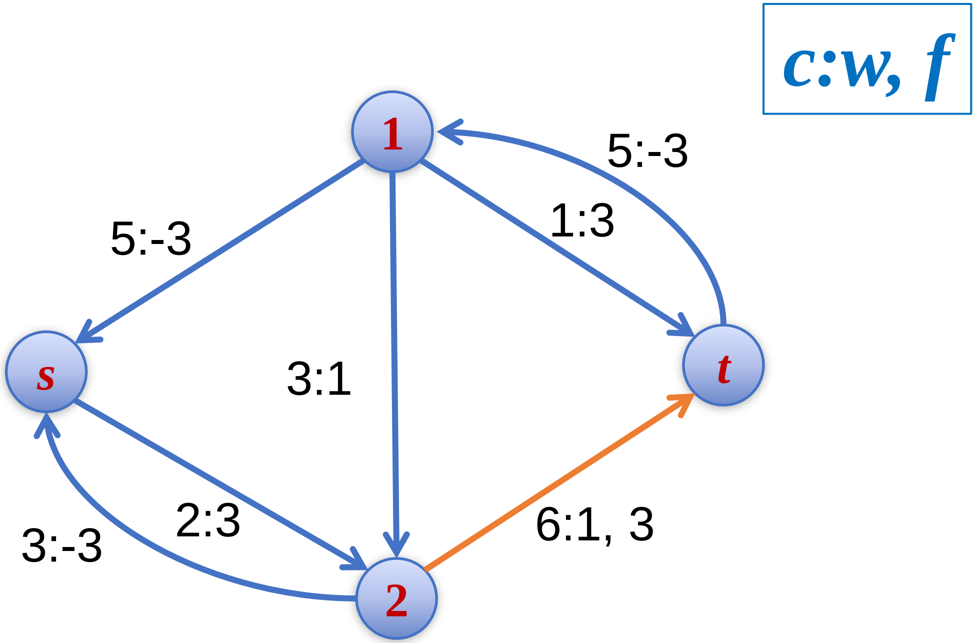
c:w, f



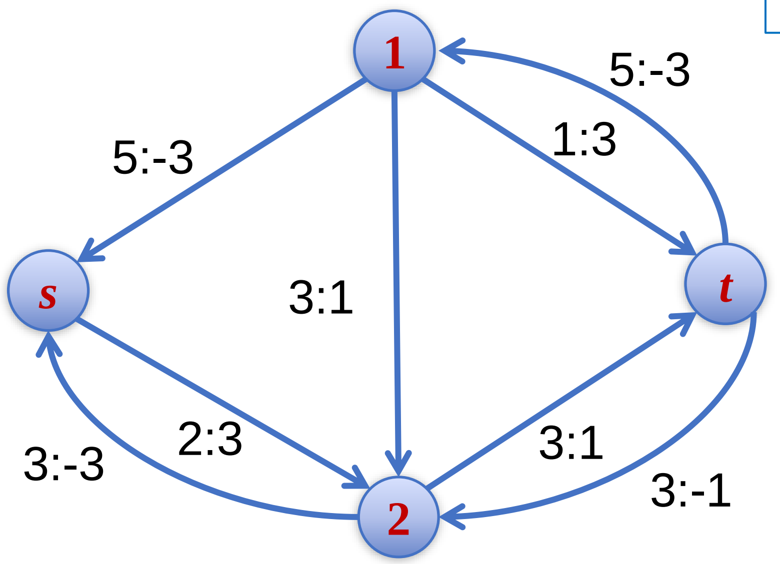
容量-费用网络与其辅助网络



容量-费用网络与其辅助网络



容量-费用网络与其辅助网络



$c\!:\!w,\ f$

费用流的可叠加性

- 引理7.9

  f是容量-费用网络N上的可行流，
  g是辅助网络$N(f)$上的可行流
  $f' = f + g$，则

$$w(f') = w(f) + aw(g)$$

证明:略，类似引理7.5的证明。

圈流与环流量

- 设容量-费用网络$N=\langle V,E,c,w,s,t\rangle$，$C$是$N$中一条边不重复的回路，
- C上的圈流h^C定义为

$$\forall\langle i,j\rangle\in E(C),\qquad h^C(i,j)=\delta;$$
$$\forall\langle i,j\rangle\in E-E(C),\qquad h^C(i,j)=0;$$

其中h^C环流量$\delta=\min_{\langle i,j\rangle\in E(C)}\{c(i,j)\}>0$

- h^C是一个可行流，流量为零但通常费用非零

$$v\left(h^C\right)=0,\qquad w\left(h^C\right)=\delta\cdot w(C)$$

其中$w(C)=\sum_{\langle i,j\rangle\in E(C)}w(i,j)$

圈流与环流量

$\boldsymbol{f}$是容量-费用网络$\boldsymbol{N}$上的可行流，
$\boldsymbol{h}^{\boldsymbol{C}}$是辅助网络$\boldsymbol{N}(\boldsymbol{f})$上的圈流，

$$\boldsymbol{f}' = \boldsymbol{f} + \boldsymbol{h}^{\boldsymbol{C}}$$

$\boldsymbol{f}'$是$\boldsymbol{N}$上的可行流, 且

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{f}') = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{f})$$
$$\boldsymbol{w}(\boldsymbol{f}') = \boldsymbol{w}(\boldsymbol{f}) + \boldsymbol{\delta} \cdot \boldsymbol{aw}(\boldsymbol{C})$$

如果$\boldsymbol{C}$是$\boldsymbol{N}(\boldsymbol{f})$上关于$\boldsymbol{aw}$ 的负回路，则

$$\boldsymbol{aw}(\boldsymbol{C}) < \boldsymbol{0} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{w}(\boldsymbol{f}') < \boldsymbol{w}(\boldsymbol{f})$$

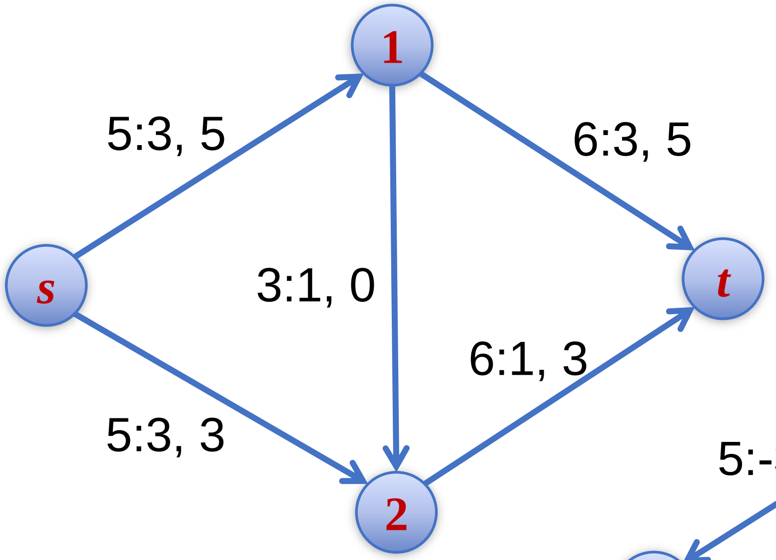
最小费用流负回路算法

1. 求得N上一个流量v_0为的可行流f
2. 构造辅助网络$N(f)$
3. 利用 Belllam-Ford 算法检查$N(f)$中是否存在负回路
4. 如果$N(f)$存在关于aw的负回路C
5. 令$f' = f + h^C$，$f \leftarrow f'$，重复步骤2
6. 否则，$N(f)$不存负回路，算法结束

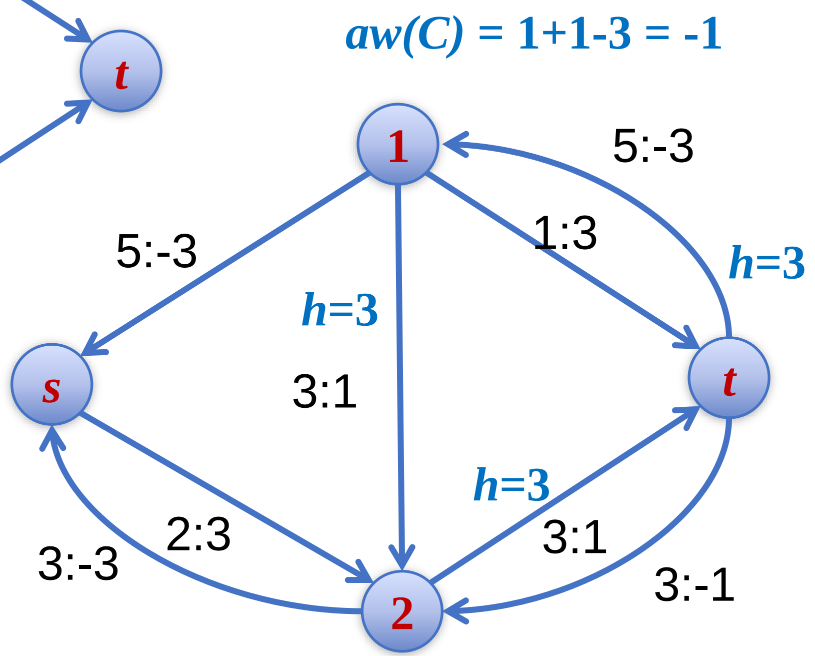
带负权的最短路径问题

- 最短路存在性的充要条件：无负回路
  - 必要性
    - 如果有负回路，每绕一圈路径权值和必减少
  - 充分性
    - 最短路必是简单路径（无重复顶点）
    - 简单路径的数量是有限的，必有最短路
- 检测负回路的 Bellman-Ford 算法
  - 迭代 $|V|$ 次后，第 $|V|+1$ 次仍能降低最短路长度 $\Rightarrow$ 存在负回路
  - 复杂度 $O(|V||E|)$

示例：负回路算法（1）

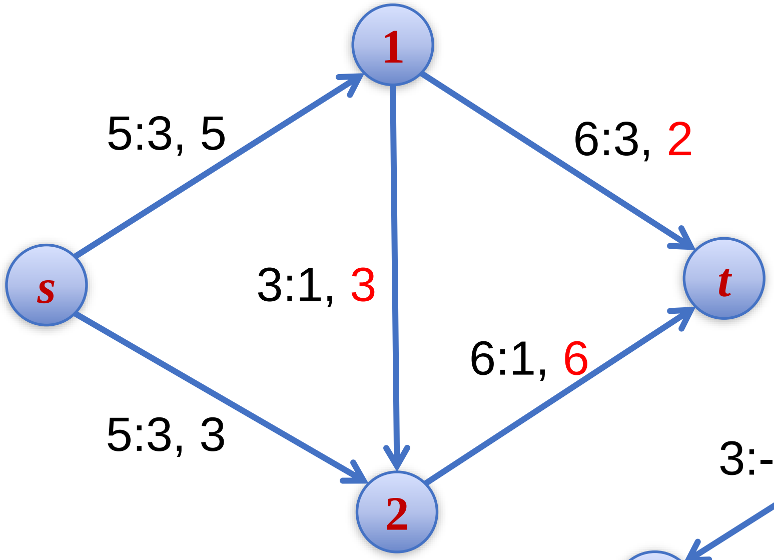


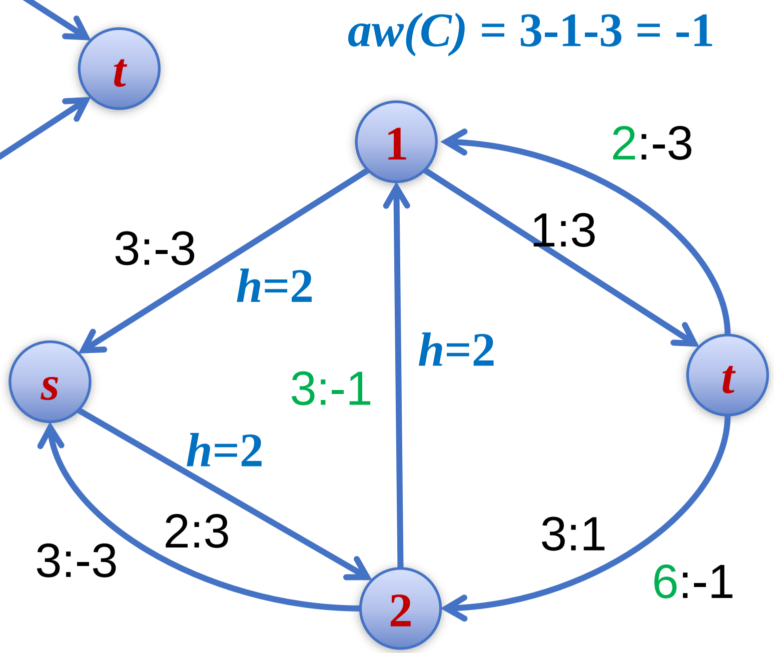
1
s
t
2
5:3, 5
6:3, 5
3:1, 0
6:1, 3
5:3, 3



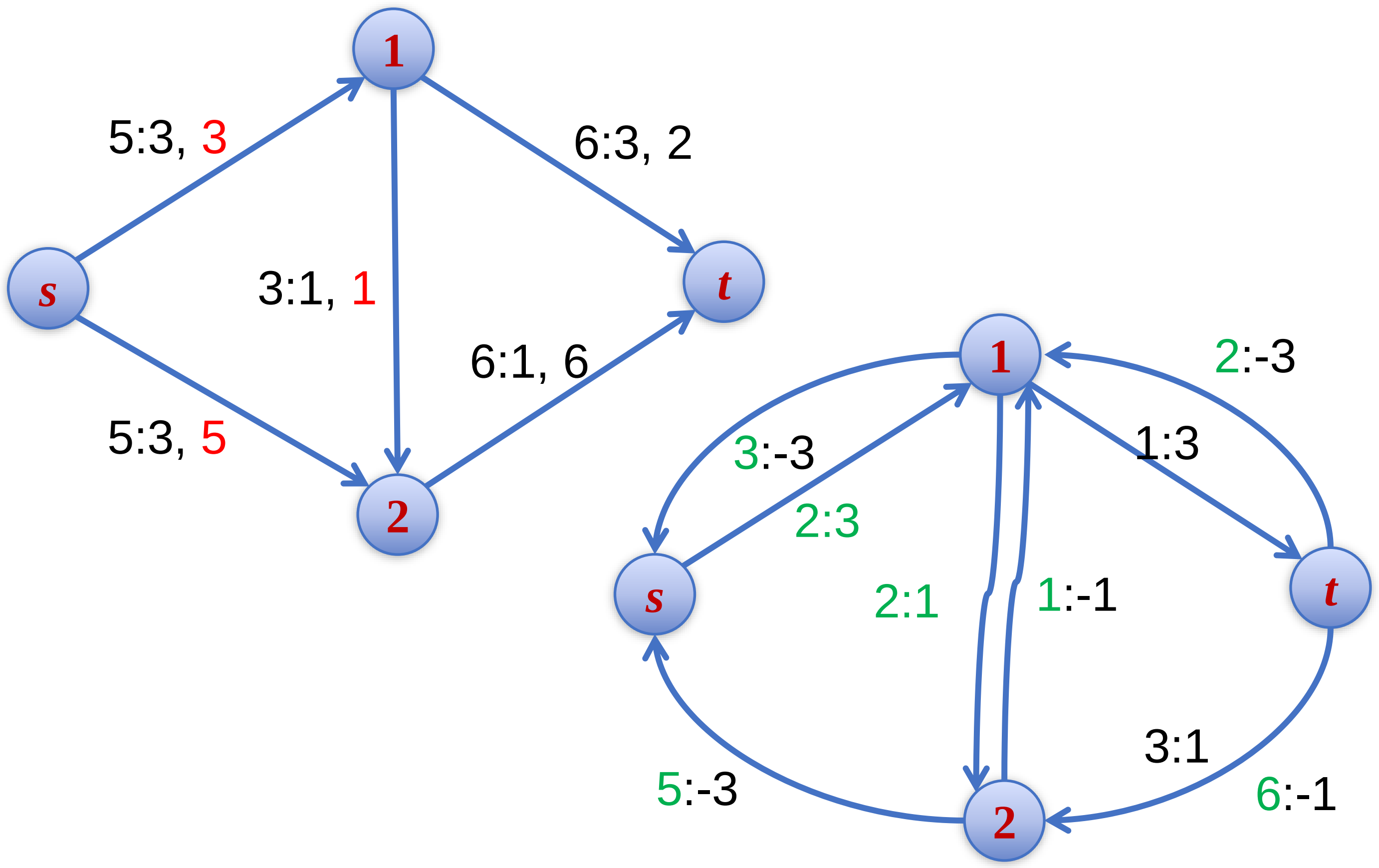
aw(C) = 1+1-3 = -1
1
s
t
2
5:-3
1:3
h=3
5:-3
h=3
3:1
h=3
3:1
2:3
3:-3
3:-1

示例：负回路算法（2）


1
s
t
2
5:3, 5
6:3, 2
3:1, 3
6:1, 6
5:3, 3


aw(C) = 3-1-3 = -1
1
s
t
2
2:-3
1:3
3:-3
h=2
h=2
3:-1
h=2
2:3
3:-3
3:1
6:-1

示例：负回路算法（3）



负回路算法的正确性

- 定理**7.5** 设f是容量-费用网络N上流量为v_0的可行流，则f是最小费用流 当且仅当$N(f)$中不存在以辅助费aw为权的负回路

证明:

必要性显然：基于负回路可构造费用更小的流

充分性在于：假设存在费用更小的可行流f'

则$g = f' - f$将是$N(f)$中流量为零的可行流

g只能是一些环流的并，不存在负回路则$w(g) \geq 0$

于是$w(f') = w(f) + w(g) \geq w(f)$，矛盾

负回路算法的有限终止性

- 假设边的容量都是整数
- 计算过程中的可行流都是整数值、圈流的环流量也是整数值
- $w(f)$ 的值是有限的整数每次消减负回路至少把 $w(f)$ 的值减少 1
- 计算流量为 v_0 的可行流与循环消减负回路求得最小费用流均可在有限步内终止
- 时间复杂度 $O(|V||E|W_{init})$ 或 $O(|V||E|^2c_{max}w_{max})$
  - 单次负回路检测算法耗时 $O(|V||E|)$，最多检测 W_{init} 次
  - 其中 $W_{init}=w(f_{init})$ 是初始可行流 f_{init} 的费用
  - 费用 W_{init} 上界是 $|E|c_{max}w_{max}$，其中 c_{max} 是最大边容量、w_{max} 是最大边费用绝对值

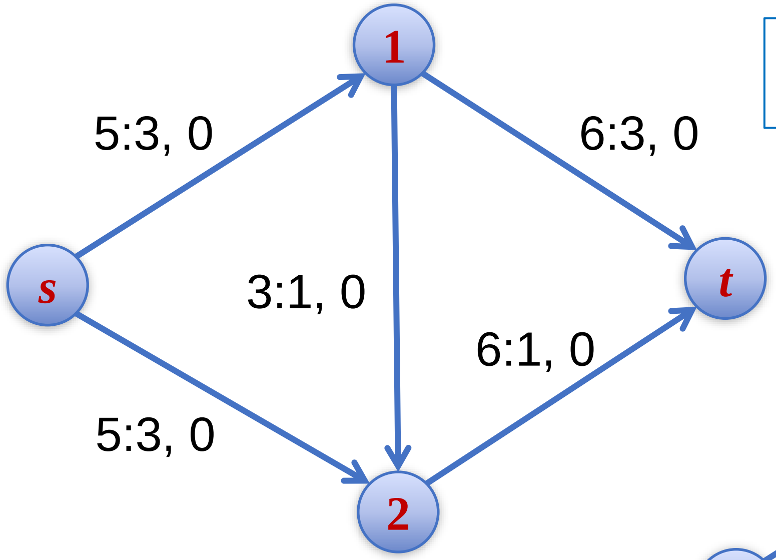
最小费用流的最短路径算法

- 从初始最小费用流（零流）开始
- 通过费用最小的s-t增广链扩张流 $\boldsymbol{f}$
- 直到 $\boldsymbol{f}$ 的流量值等于 $\boldsymbol{v_0}$ 为止

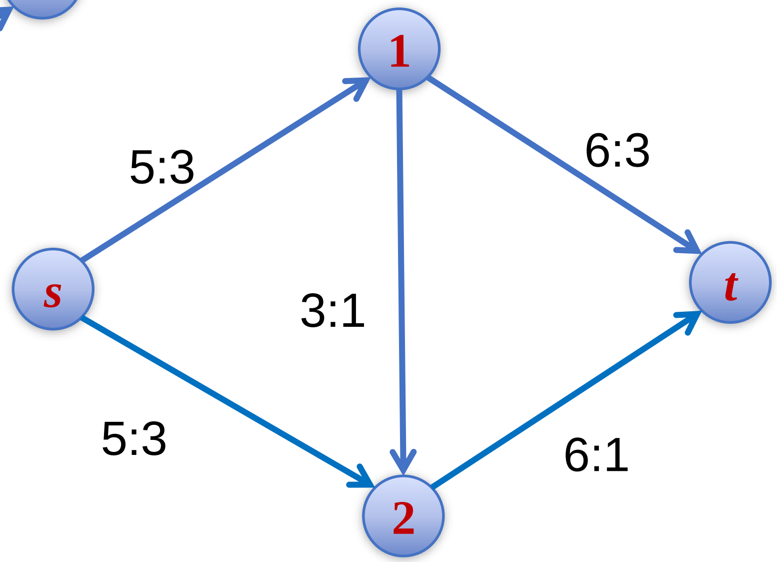
- 保证该算法正确，只需证明步骤2得到的始终是当前流量下的最小费用流

- 时间复杂度分析
  - 最多 v_0 次迭代，每次迭代求一次最短路
  - 如果用堆优化的 Dijkstra 算法，总复杂度是 $O(v_0(|V| + |E| \log|V|))$

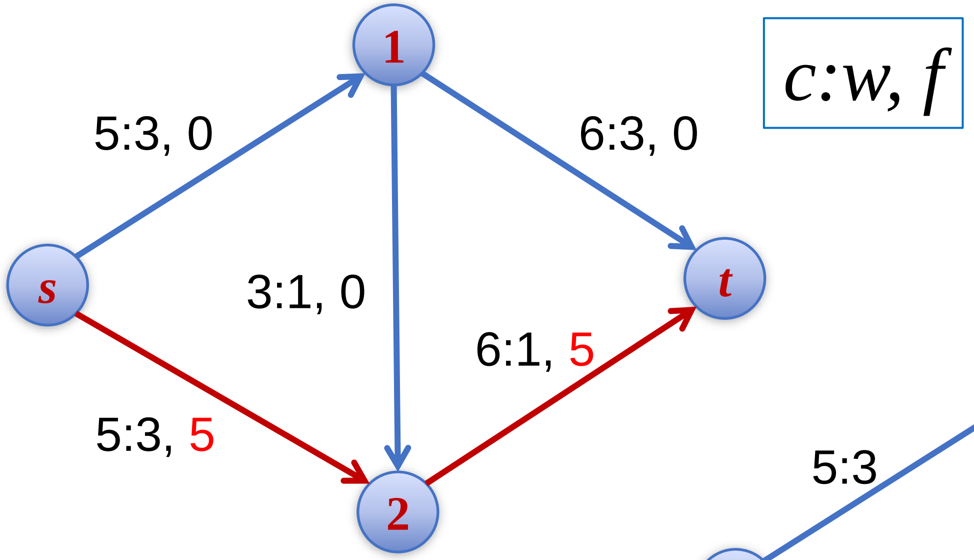
示例：求最小费用最大流 v(f)=10

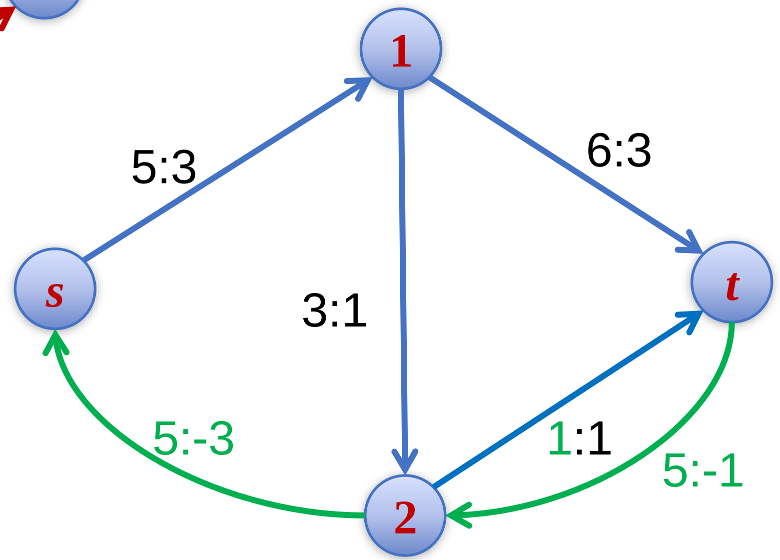


$c{:}w, f$

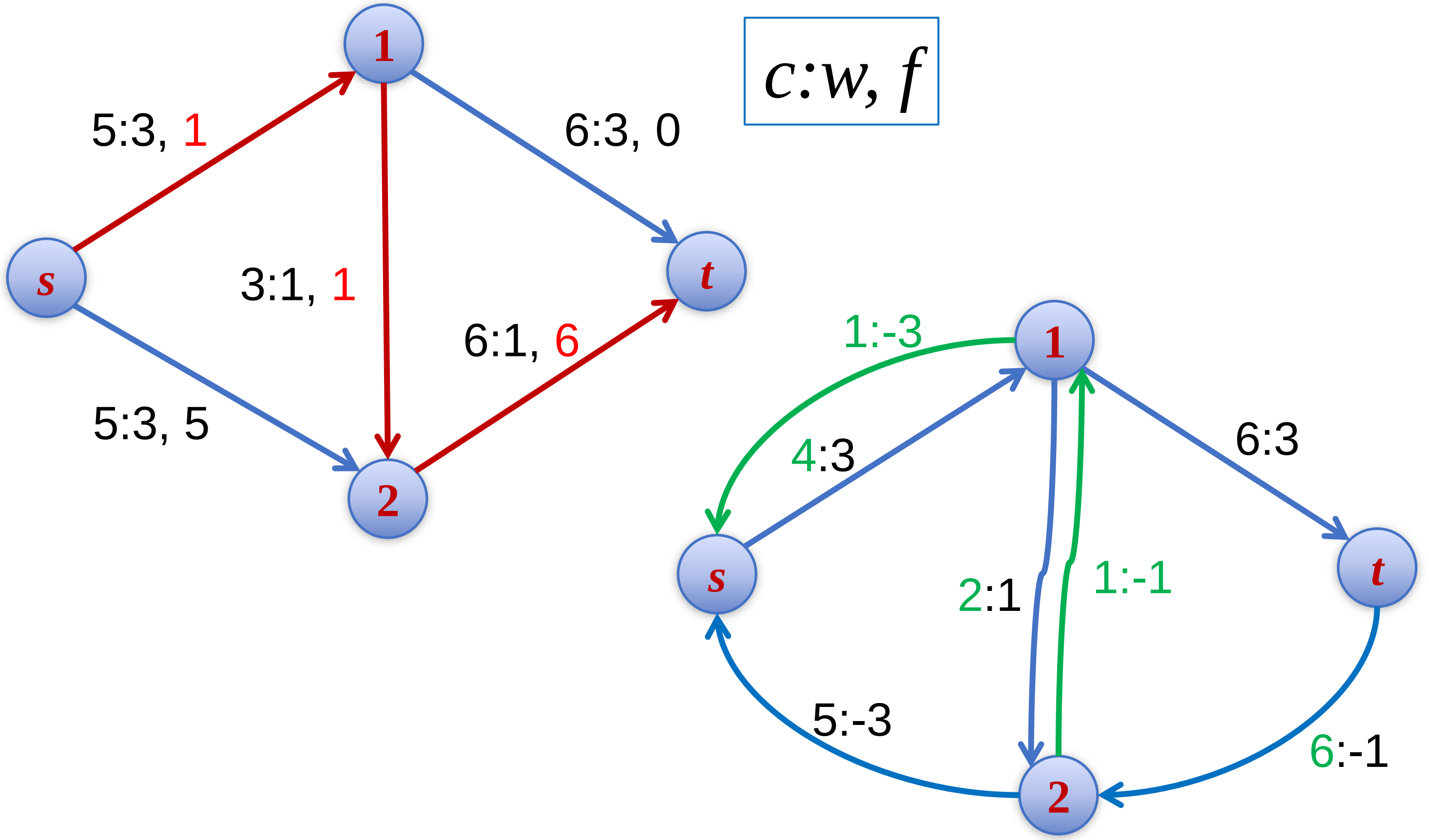


延最短路增加流再求辅助网络

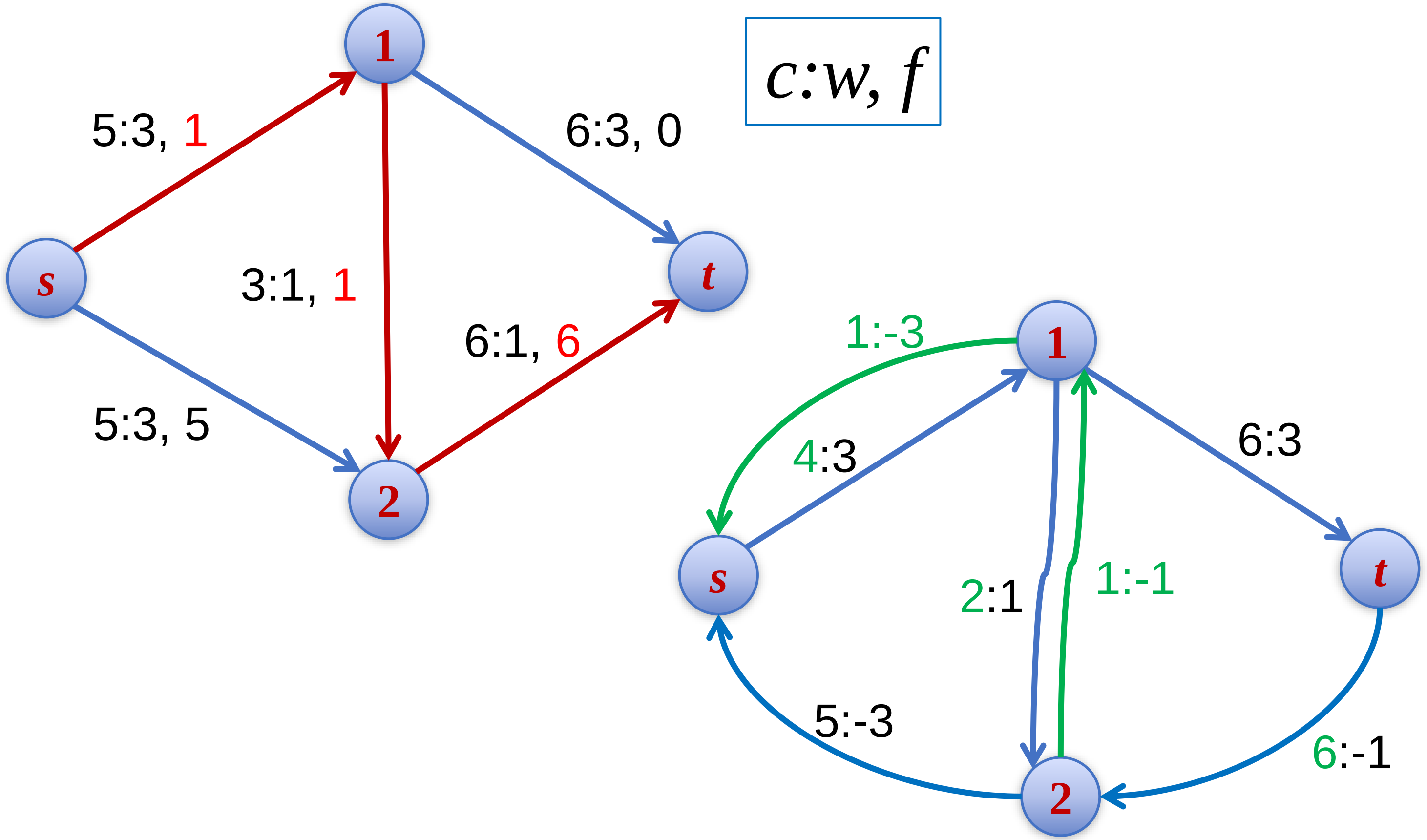




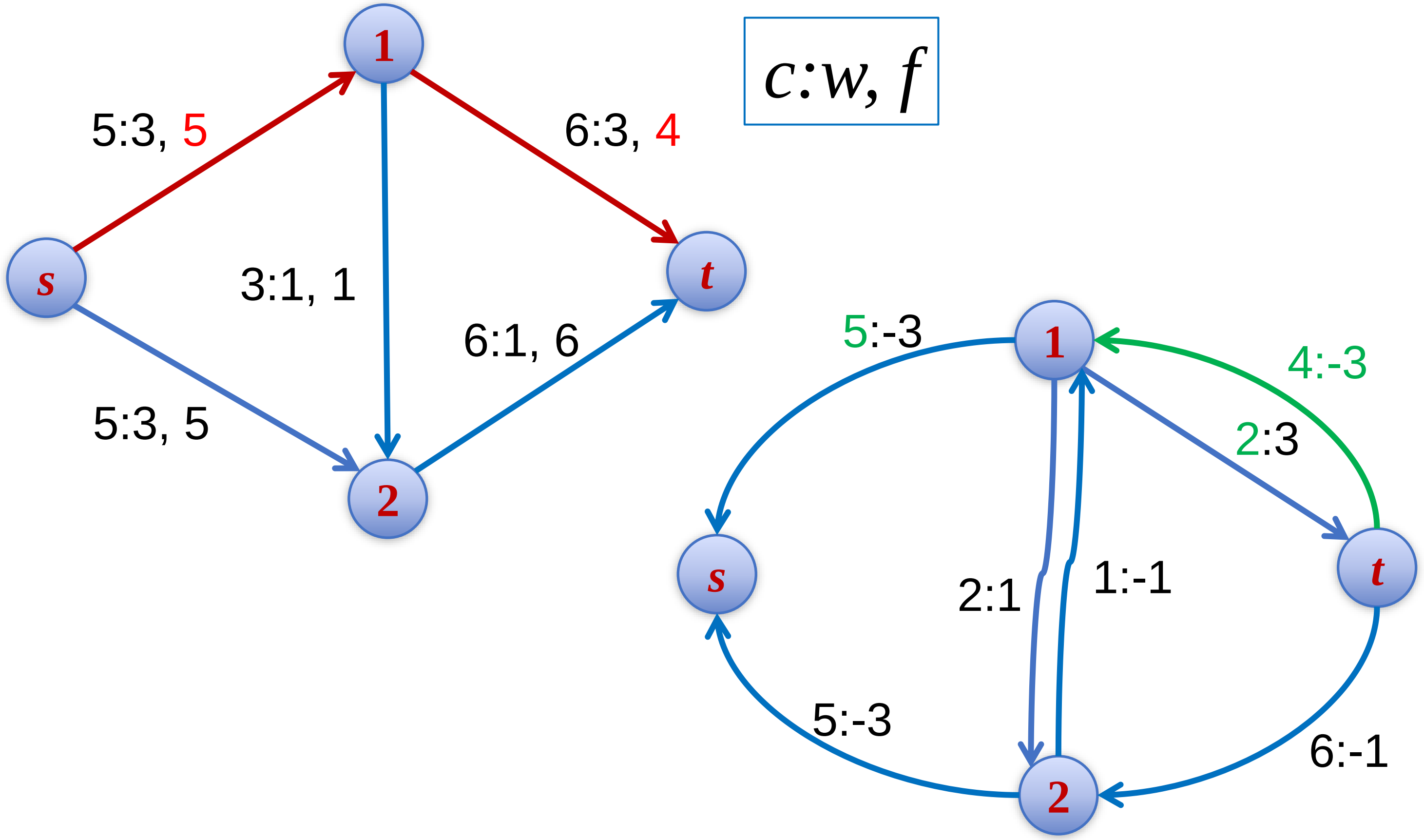
再延最短路增加流并求辅助网络



再延最短路增加流并求辅助网络



最后得到最小费用最大流

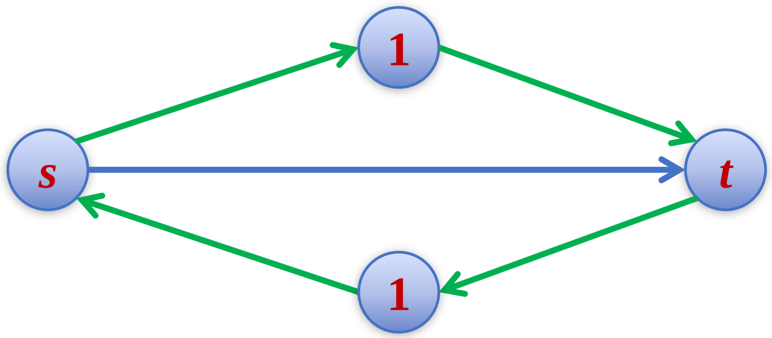


算法的正确性

思路：假设存在负回路则导出矛盾即可

引理 7.12

设有向图$D=\langle V,E\rangle$没有孤立点，顶点s的出度比入度大1， t的入度比出度大1，其余顶点的出度等于入度，则D可表示成一条s-t路径与若干条回路的并。



沿最短路扩张一定得到最小费用流

定理 7.6

设f是N上流量为v_0的最小费用流，
P是$N(f)$中权 aw的s-t最短路径，
g是P上流量为θ的可行流，
则$f' = f + g$是流量为$v_0 + \theta$的最小费用流。

其中对$\forall \langle i,j \rangle \in E(f)$

$$g(i,j) = \begin{cases} \theta & \langle i,j \rangle \in E(P) \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

$$0 < \theta \leq \min\{ac(i,j) | \langle i,j \rangle \in E(P)\}$$

定理 7.6 证明

反证法：假设$\boldsymbol{f'}$不是最小费用流，
则$\boldsymbol{N(f')}$中存在权$\boldsymbol{aw}$的负回路$\boldsymbol{C}$。

考察$\boldsymbol{N(f)}$与$\boldsymbol{N(f')}$间的差异
$\boldsymbol{f}$与$\boldsymbol{f'}$仅在对应$\boldsymbol{P}$的增广链上不同

$\boldsymbol{E(f') - E(f)}$定与$\boldsymbol{P}$有关，即有

$$\boldsymbol{\langle i,j\rangle \in E(f') - E(f) \Rightarrow \langle j,i\rangle \in E(P)}$$

定理 7.6 证明（续）

负回路$\boldsymbol{C}$中必有$\boldsymbol{E(f')-E(f)}$中的边

因为$\boldsymbol{f}$是最小费用流，$\boldsymbol{N(f)}$中无负回路

设这些边为

$$\langle i_1,j_1\rangle,\langle i_2,j_2\rangle,\ldots,\langle i_r,j_r\rangle$$

则有

$$\langle j_1,i_1\rangle,\langle j_2,i_2\rangle,\ldots,\langle j_r,i_r\rangle\in E(P)$$

记这$\boldsymbol{2r}$条的边集为$\boldsymbol{H}$

从$\boldsymbol{P}$和$\boldsymbol{C}$构成的子图中删除$\boldsymbol{H}$（以及孤立点）记为$\boldsymbol{D}$

定理 7.6 证明（续）

子图D满足引理7.12

它由一条s-t路径P'

与若干条回路$C_1, C_2, \ldots, C_l$组成

于是

$$aw(D) = aw(P') + \sum_{i=1}^{l} aw(C_i)$$

而$aw(H) = 0$，于是

$$aw(P) + aw(C) = aw(D) + aw(H)$$

定理 7.6 证明（续）

$$aw(P') = aw(P) + aw(C) - \sum_{i=1}^{l} aw(C_i)$$

假设条件

$$aw(C) < 0$$

而

$$aw(C_i) \geq 0, i \in \{1, 2, \dots, l\}$$

于是

$$aw(P') < aw(P)$$

与P是$N(f)$中权 aw的s-t最短路径矛盾 ■

小结

- 最大流
  - （复习）Ford-Fulkerson类算法：从可行流开始，迭代增广至最大流
  - 基于“预流”推进的算法：从“预流”/松弛解开始，迭代至可行流
- 最小费用流
  - 负回路算法：从可行流开始，迭代直至费用最低
  - 最短路径算法：从零流开始，迭代直至满足流量约束