20240306作业

1. 设$f(x)$ 在$[-\pi,\pi]$单调下降. 证明: 对正整数n有
   (1) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin 2nx\,\mathrm{d}x \geqslant 0;$ (2) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(2n+1)x\,\mathrm{d}x \leqslant 0.$
2. 设$f(x)\in D[a,b]$, $f'(x)$在$[a,b]$上单调递增, $|f'(x)|\geqslant m>0,\quad \forall x\in[a,b]$.
   求证: $\displaystyle\left|\int_a^b \cos(f(x))\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{2}{m}.$
3. 设$f(x)\in C^1[0,1]$, 证明: $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n\int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x = f(1).$
4. 设$f(x)$于$[a,b]$非负、连续、严格递增, 则$\forall p>0$, 据第一积分中值定理,
   $\exists x_p\in[a,b]$ s.t. $\displaystyle f^p(x_p)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f^p(t)\,\mathrm{d}t$. 证明: $\displaystyle\lim_{p\to+\infty} x_p = b.$
5. 设$f(x)\in C[a,b]$, 据积分中值定理, $\forall x\in[a,b]$, $\exists\xi\in(a,x)$ $s.t.$ $\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = f(\xi)(x-a).$
   若$f'(a)$存在且非零, 证明$\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{\xi-a}{x-a}=\frac{1}{2}.$