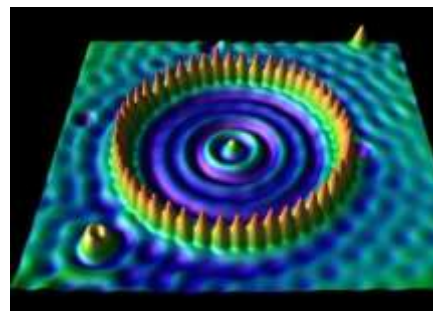
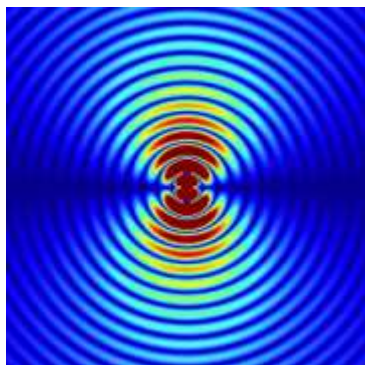
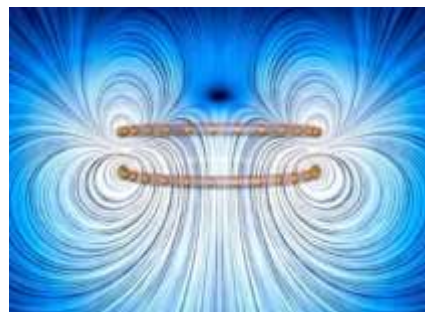


2024年春季 北京大学信息学院

# 信息科学中的物理学(下)



# 教师简介

- 主讲教师： 于 民
  - 理学学士：北京师范大学物理系
  - 理学硕士：北京师范大学低能核物理所
  - 理学博士：北京大学信息学院微电子所
  - 集成电路学院，副教授, 半导体器件和工艺。
  - 2005年起讲授《电磁学》，2017年起《信息科学中的物理学》
  - 联系方式： [62765795](tel:62765795), [13366655755](tel:13366655755), [yum@pku.edu.cn](mailto:yum@pku.edu.cn)
- 助教：
  - 黄颢 13533948650, [2301213189@stu.pku.edu.cn](mailto:2301213189@stu.pku.edu.cn)
  - 卜麟琰 16635099855, [2301213179@stu.pku.edu.cn](mailto:2301213179@stu.pku.edu.cn)

答疑：微信，电话、email答疑都可以；欢迎当面答疑或者讨论，请先用短信或者email商定时间和地点。（各种联系请采用实名）

# 教材和讲义

- 教材：

- 教材1：陈秉乾, 王稼军；大学物理通用教程. 电磁学(第二版)；北京大学出版社；2012年
- 教材2：程守洙 等，《普通物理学》（第七版 或第八版）（下册），高等教育出版社
- 教材中打\*的内容一般不要求

- 课堂PPT讲义

- 教学网上提供课堂讲义
- 讲义打\*的内容一般不作要求



# 参考资料与视频

- 参考书：
  - 赵凯华、陈熙谋 新概念物理题解(下)，高等教育出版社
  - 北大编写的大学物理通用教材(力学、光学、近代物理)和题解，北京大学出版社。
- 网络公开课：
  - MIT, 《电磁学》，Walter Lewin讲课录像：  
<http://v.163.com/special/opencourse/electricity.html>
  - 北大物理系, 《电磁学》，陈秉乾讲课录像：  
<http://opencourse.pku.edu.cn/course/opencourse/>
  - 北大物理系, 《电磁学》王稼军, coursera公开课（可自由选课）  
<https://www.coursera.org/course/electromagnetism>
  - 资源共亨课: [http://www.icourses.cn/coursestatic/course\\_6255.html](http://www.icourses.cn/coursestatic/course_6255.html)
  - 耶鲁大学公开课: 基础物理, Ramamurti Shankar  
<https://www.bilibili.com/video/BV1Qy4y187u1?p=3>

# 课程安排和要求

- 习题课、交作业一般每两周一次，具体日期看通知。
- 课程的网站提供通知、讲义、作业。
  - 教学网：<http://course.pku.edu.cn/> 页面内的通知、教学内容、课程作业栏目。
  - 交作业要求：在教学网提交电子或者扫描版，具体看教学网通知。
- 成绩：
  - 作业 ~ 20%
  - 期中考试 ~ 40% （预计在第8周）
  - 期末考试 ~ 40% （24年6月11日上午）

# 课程主要内容



- 上半学期：
  - 电磁学的主要内容
- 下半学期：
  - 瞬态和稳态电路 (机械振动)
  - 电磁波与波动光学 (机械波)
  - 量子物理初步

# 电磁学基本内容

- 基本电磁现象：
  - 起电现象、电荷
  - 电荷的相互作用力—库仑定律
  - 电流、电阻、电压、电路，欧姆定律
  - 电流的磁效应—奥斯特实验
  - 电荷、电流在磁场中的受力—洛伦兹力、安培力
  - 电磁感应—法拉第定律、楞次定律
  - 电磁波
- 大学的课程讲什么新知识？

# 本课程的核心内容

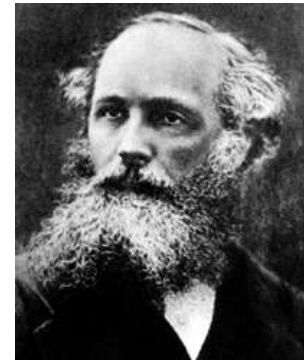
## 力学与电磁学对照



Isaac Newton

(1643—1727) 英国

建立了力学理论的基础：  
牛顿运动定律



J. C. Maxwell

(1831—1879) 英国

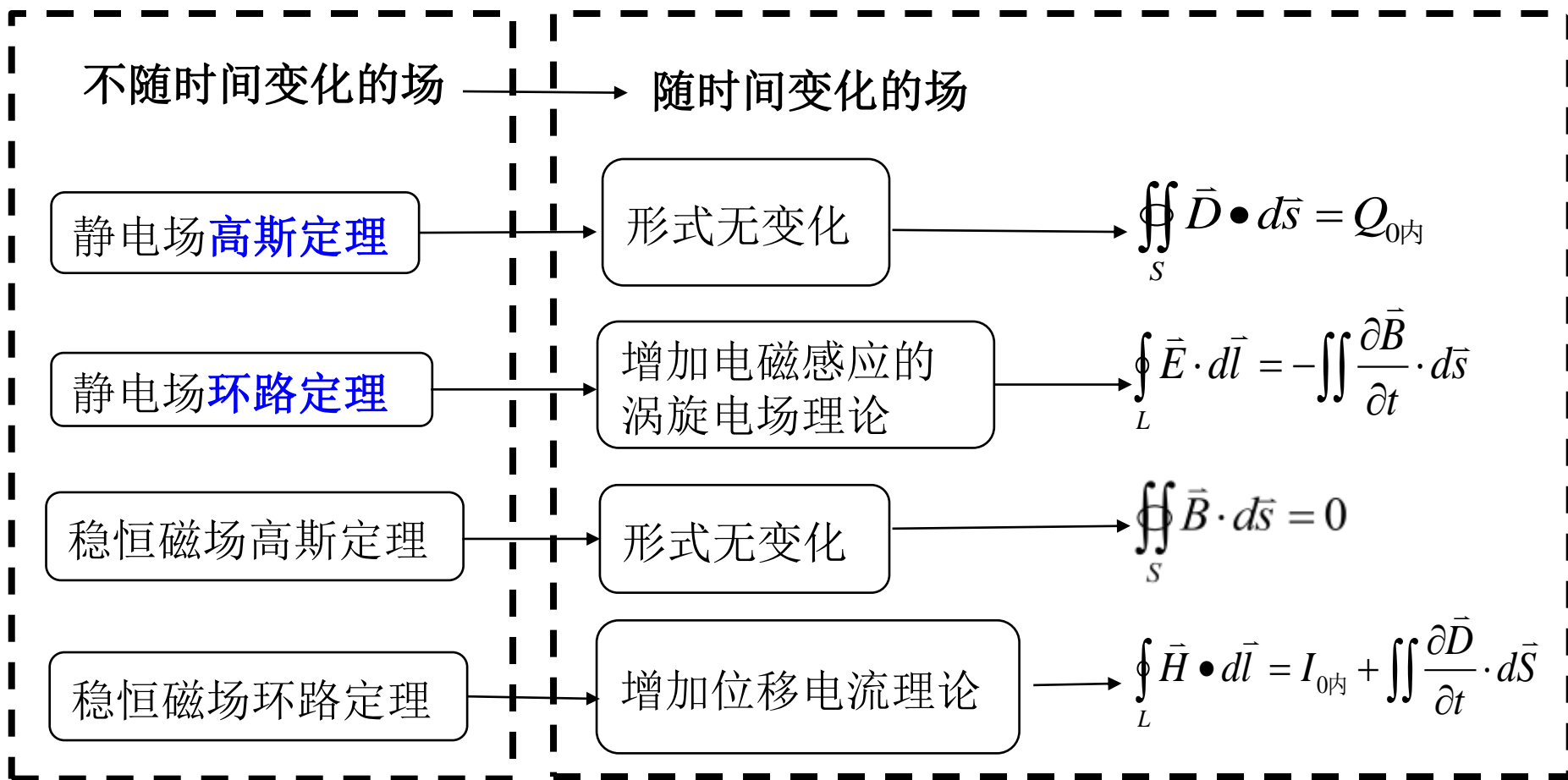
建立了电磁学理论的基础：  
麦克斯韦电磁场方程组

- 大学电磁学课程的核心内容：
  - 介绍麦克斯韦电磁场方程组（电磁场理论）。



# 讲解Maxwell方程组的方法

- 分别介绍各个方程的内容和应用，在课程最后，总结得到完整的Maxwell方程组。



# 课程内容的主要特点

- 电磁场、电荷以及电流是电磁学研究的主要对象。Maxwell 方程组是“场”方程，描述真空和物质中的电磁场的规律。
  - 电磁场是客观存在的、是实实在在的物质。比如：电磁波有动量，对物体造成“光压”
  - 本课程主要研究静态场的基本理论，只介绍动态场的初步理论。运动场的理论参见《电动力学》《电磁场理论》等参考书。
- 更加突出理论
  - Maxwell方程组不是实验定律，而是基于已有的实验定律，通过理论分析的方法建立的。这与牛顿定律的发现过程不同。

# 静电场

教材1 第1章

# 库仑定理

- 电荷以及带电体的模型
- 库仑定律、静电力叠加原理

# 电 荷

- 电荷的基本特点
  - 电荷有正、负两种
  - 电荷的量子性，电子和质子的电量： $e \approx 1.6 \times 10^{-19} C$
  - 电荷守恒定律：孤立系统中电荷的代数和不变
- 正如质量是物质的属性一样，电荷是物质的一种属性，我们实际研究的对象是带有电荷的物体，简称**带电体**。
  - 开始只讨论**抽象的带电体**，即带有电荷的几何体；
  - 后面要**进一步**考虑带电物体自身物质的特性，将其分为**导体**和**电介质**两大类来讨论
  - 宏观条件下，往往忽略电荷的量子性，用**连续**的电荷分布描述物体带的电荷。

# 常见的带电体模型（1）

- 什么是模型？



实物模型



理论模型

质点、刚体  
(力学模型)

- 物体电学模型是描述其电学性质的理论模型
- 模型  $\neq$  原型。一般的，我们讨论理想的理论模型。

# 常见的带电体模型（2）

- 点电荷

- 电荷存在于无大小有位置的点处。应用：带电体距离场点足够远，带电体的大小可忽略。



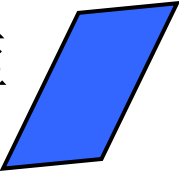
- 线电荷

- 电荷分布在无粗细有长度的线上。应用：带电体距离场点足够远，带电体的粗细可忽略。



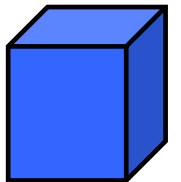
- 面电荷

- 电荷分布在无厚薄有面积的面上。应用：带电体距离场点足够远，带电体的厚度可忽略。



- 体电荷

- 电荷分布在有体积的体中。



# 常见的带电体模型(3)

- 带电体的电量:

- 点电荷电量  $q$

- 线电荷密度:  $\lambda$       带电量:  $q = \int dq = \int \lambda dl$

- 面电荷密度:  $\sigma$       带电量:  $q = \int dq = \iint \sigma dS$

- 体电荷密度:  $\rho$       带电量:  $q = \int dq = \iiint \rho dV$

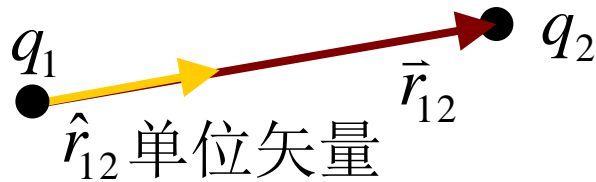
- 说明:

- 电量 $q$ 用实数表示, 忽略电荷量的量子化效应。除点电荷外的模型, 电荷在空间连续分布, 忽略电荷分布的量子化效应。
  - 在本课程的方程和计算式中,  $q$  一般默认包含正负号, 表示电荷的正负。



# 库仑定律(1)

- 库仑定律的形式



电荷 $q_1$ 对  
电荷 $q_2$ 的  
作用力:

$$\vec{F}_{12} = k \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12}$$

$$(\text{或 } \vec{F}_{12} = k \frac{q_1 q_2}{r_{12}^3} \vec{r}_{12})$$

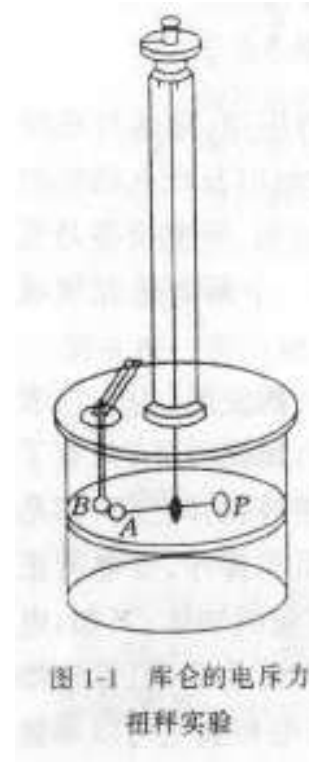
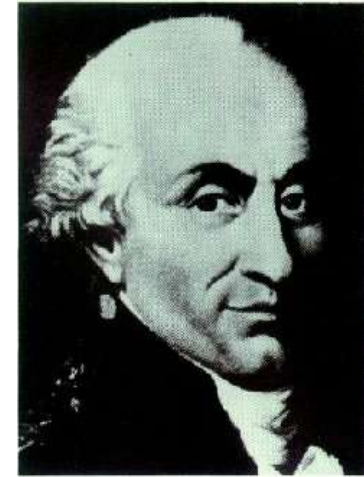


图 1-1 库仑的电斥力  
扭秤实验



Charles A. de  
Coulomb (1736–  
1806) 法国

两个**静止**点电荷之间的相互作用力大小，与它们的电量的乘积成正比，与它们之间距离的平方成反比；作用力的方向沿着它们的连线，同号电荷相斥，异号电荷相吸。

# 库仑定律(2) — 电量和常数

- 电量 $q$ 和常数 $k$ 需要同时考虑。
- 库仑定律同时也可看作是电量的定义：
  - 令 $k=1$ ; 当两等量电荷距离 $r=1\text{cm}$ , 且 $F=1\text{dyn}$ 时, 则有 $q_1=q_2=1$ 绝对静电电量 (CGSE  $q$ )
  - 这是电量的绝对静电单位制 (CGSE) (高斯制)
- 电量单位实际常采用国际单位制 (MKSA) (SI)
  - 电量单位是库仑(C),
  - 利用电流来定义电量的单位库仑.
- $k$  值通过试验测定; 常用另一种形式:  $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ 
  - $\epsilon_0$  称真空电容率 (或真空介电常数)是一个基本物理常数

$$\epsilon_0 \approx 8.85 \times 10^{-12} \cdot C^2 \cdot N^{-1} \cdot m^{-2}$$

# 库仑定律(3)一方向和距离

- 作用力沿连线
  - 径向性
  - 是空间对称性的必然结果
- 距离的平方反比率
  - 精确性：假设  $F \propto r^{-2 \pm \delta}$   
 $\delta < 0.04$ （库仑测定）  
 $\delta < 2 \times 10^{-16}$ （1971年，威廉斯测定）
  - 适用的距离范围：
    - $10^{-15}$ 米（原子核内） 到很大距离
    - 尚未发现失效距离

# \*库仑定律(4)——关于静止条件

- 适用：静止电荷的相互作用力---静电力
- 库仑定律适用于静止电荷对运动电荷的作用，这一点已经理论证明，并实验证实。
  - 《伯克利物理学教程》第二卷，科学出版社  
P.208
- 不适用于运动电荷对静止电荷的作用力，  
不适用于运动电荷间的作用力。

# \*匀速运动电荷对静止电荷的作用

- 匀速直线运动电荷对静止电荷的作用力如下

$$\vec{F} = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{(1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \theta)^{\frac{3}{2}}} \hat{r}$$

- 式中  $\theta$  是  $\vec{v}$  和  $\vec{r}$  的夹角
  - $c$  是光速（相对论的结果）
- 
- 在速度远小于光速时，退化为库仑定律

# 叠加原理

- 电力叠加原理

- 多个点电荷作用于某电荷的合力等于各个点电荷单独存在时作用力的矢量和。

$$\vec{F} = \sum \vec{F}_i$$

- 由连续带电体产生的电力，用积分计算：

$$\vec{F} = \int d\vec{F}$$

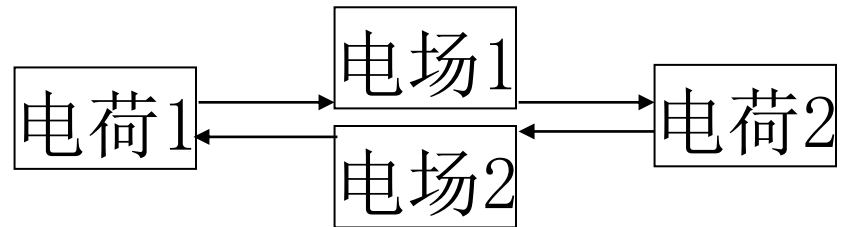
- 叠加原理独立于库仑定律，两者一起构成了完整的静电学的理论。

# 静电场

- 电场强度
- 电偶极子

# 电 场

- 电力作用的方式：
  - 超距作用观点：
    - 历史上曾经错误的认为，电荷间的电力作用的传递不需要媒介。
  - 近距作用观点：
    - 19世纪中：充满空间的“以太”，传递电荷间的电力作用。
  - 现代观点认为电荷周围存在“电场”，电力是电场对电荷的作用力，称“电场力”，库仑定律所描述的电荷之间的作用力实质是一个电荷产生的电场对另一电荷的作用力！



- 电场的物质性
  - 电场是一种客观实在，是物质！



# 电场强度

- 电场强度：电场强度是一个矢量，其大小等于带有单位电量的点电荷在该点所受的电场力的大小，其方向与正电荷所受电场力的方向一致

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}$$

单位是：  $N \cdot C^{-1}$

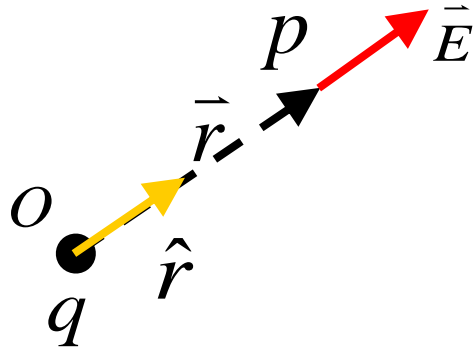
或者：  $V \cdot m^{-1}$

- $q_0$ 是试探电荷：理论上 $q_0$ 是点电荷，假想的试探实验。实际操作上要求 $q_0$ 电量足够小，不影响原来电场的电荷分布，且尺寸足够小，反映测试点的电场

- 点电荷受到外电场的作用力： $\vec{F} = q\vec{E}$
- 静止电荷的电场称静电场。
- 但上面的两式也适用于运动的电荷和电场，是无条件成立的。

# 静止点电荷的场强

- 在O点的静止点电荷在P点的场强
  - 电荷所在的点称**源点**；其他的空间点称**场点**



$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r}$$

或记为：
$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|\vec{r}|^3} \vec{r}$$

特点：

- 沿源电荷到场点的连线
- 方向与正电荷受力方向相同
- 球对称性

(注意：在 $r=0$ 处，即源点处，场强发散！)

# 场强叠加原理

- 点电荷组在某点电场强度等于各点电荷单独存在时，在该点产生的电场强度的矢量和。
  - 电力叠加原理的直接结果。
  - 连续带电体的电场采用积分形式计算

$$\boxed{\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i} \quad \boxed{\vec{E} = \int d\vec{E}}$$

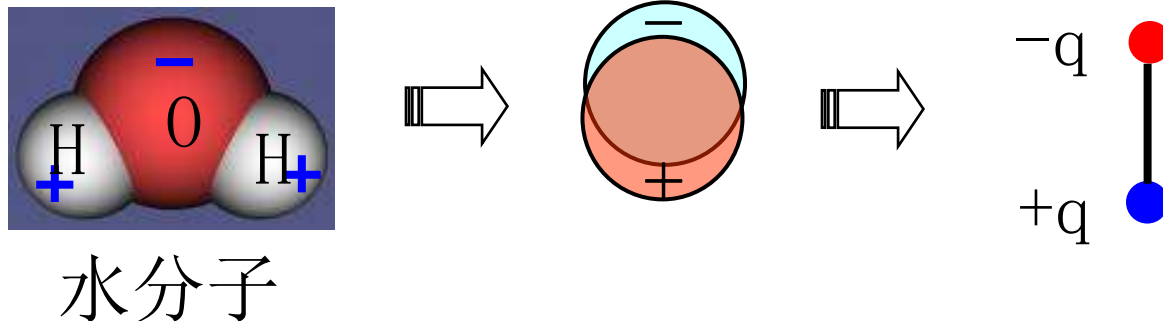
- 电场的叠加原理和点电荷的场强公式共同构成了一个完整的静电学的电场理论。

# 电偶极子

- 电偶极子模型

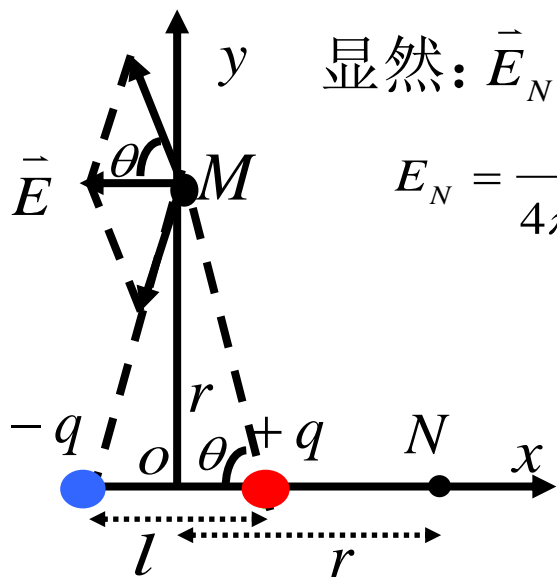
- 一对等量异号点电荷，两点电荷的间距远远小于电荷到场点的距离，这样的电荷模型称为电偶极子模型。
- 电偶极子模型在静电学中有特殊的理论意义和价值

— 例如：



# 电偶极子的电场 (1)

- 计算电偶极子的电场强度，为计算简单，只计算连线延长线上N点和中垂线上M点的场强
  - 设电偶极子电荷间距 $l$ ，O点到场点M或N的距离是 $r$ ；且 $r \gg l$ ，如图建立直角坐标系。



显然:  $\vec{E}_N = E_N \cdot \hat{i}$        $\vec{E}_M = E_M \cdot (-\hat{i})$

$$E_N = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{q}{(r - l/2)^2} + \frac{-q}{(r + l/2)^2} \right] = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{2rl}{(r^2 - l^2/4)^2} \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2ql}{r^3}$$

$$E_M = 2E_{+M} \cos\theta = \frac{2}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\left(r^2 + l^2/4\right)} \frac{l/2}{\sqrt{r^2 + l^2/4}}$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{ql}{\left(r^2 + l^2/4\right)^{3/2}} \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{ql}{r^3}$$

(式中 $E_{+M}$ 为正电荷在M点的电场强度的大小)

故在电偶极子的延长线上和中垂线上的场强分别为

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2ql}{r^3} \hat{i} \quad - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{ql}{r^3} \hat{i} \quad (\text{注意结论在正负半轴均成立})$$

# 电偶极子的电场 (2)

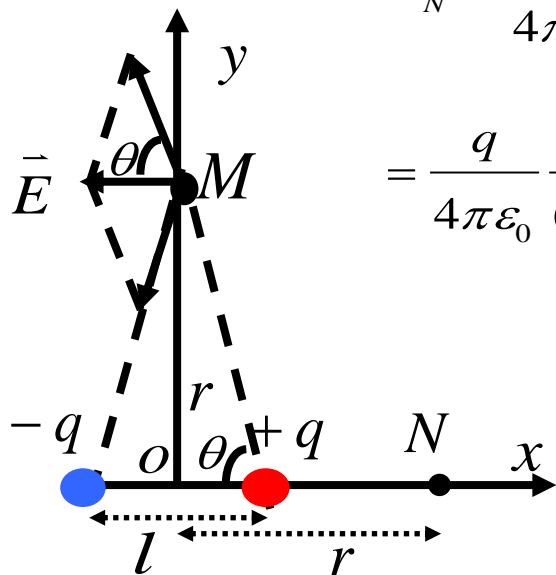
- 关于计算中取近似的方法问题：
  - 对比如下两种取近似的方法

$$E_N = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{(r - l/2)^2} - \frac{1}{(r + l/2)^2} \right] = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{2rl}{(r^2 - l^2/4)^2} \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2ql}{r^3}$$

$$E_N = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{r^2 - rl + l^2/4} - \frac{1}{r^2 + rl + l^2/4} \right] \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{(r^2 - rl)} - \frac{1}{(r^2 + rl)} \right]$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{2l}{(r^3 - rl^2)} \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2ql}{r^3}$$

必要吗？



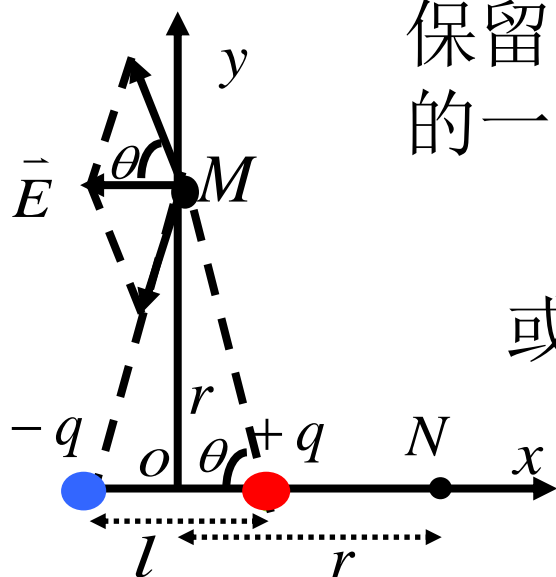
问：取近似的标准是什么？

# 电偶极子的电场 (3)

- 利用多项式展开取近似的方法

根据  $(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \dots, \quad (|x| < 1)$

保留小量  
的一阶项



$$E_N = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} [(1 - l/2r)^{-2} - (1 + l/2r)^{-2}]$$

$$\approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} [(1 + \frac{l}{r}) - (1 - \frac{l}{r})] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2ql}{r^3}$$

或者  $E_N = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} [(1 - \frac{l}{r} + \frac{l^2}{4r^2})^{-1} - (1 + \frac{l}{r} + \frac{l^2}{4r^2})^{-1}]$

$$\approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} [(1 + \frac{l}{r} - \frac{l^2}{4r^2}) - (1 - \frac{l}{r} - \frac{l^2}{4r^2})] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2ql}{r^3}$$

同理:

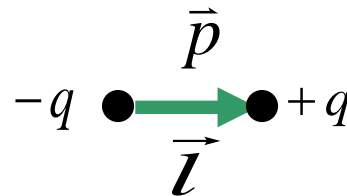
$$E_M = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{ql}{(r^2 + l^2/4)^{3/2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{ql}{r^3} \left(1 + \frac{l^2}{4r^2}\right)^{-3/2} \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{ql}{r^3} \left(1 - \frac{3l^2}{8r^2}\right) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{ql}{r^3}$$

取近似的标准是舍弃高阶小量!

# 电偶极子的电场 (4)

- 电偶极矩定义为:

$$\vec{p} = q \cdot \vec{l}$$



其方向是从 $-q$ 指向 $+q$

- 电偶极子的场强 ( $r \gg l$ ) : (r的含义)

$$\vec{E}_{\text{延长线}} \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\vec{p}}{r^3} \quad \vec{E}_{\text{中垂线}} \approx -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p}}{r^3}$$

在空间任一点的场强

$$\vec{E} \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left( \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^2} - \vec{p} \right)$$

(《电磁学千题解》解法较复杂, 后面会讲更加简单的求解方式)

- 从物理上看为什么电偶极子场强要取近似?



# \*电多极子和分布在小区域内的电荷

- 除电偶极子外，还有电四极子、电八极子等。
  - $\mathbf{E}_{\text{电单极子}} \sim r^{-2}$  （点电荷可以称为“电单极子”）
  - $\mathbf{E}_{\text{电偶极子}} \sim r^{-3}$
  - $\mathbf{E}_{\text{电四极子}} \sim r^{-4}$
  - .....
- 分布在小区域内的电荷可以看成是点电荷（电单极子）、电偶极子、电四极子等电多极子的组和，以进行不同近似度的分析：

$$\text{实际电荷分布} = \sum \text{电单极子} + \sum \text{电偶极子} + \sum \text{电四极子} + \dots$$

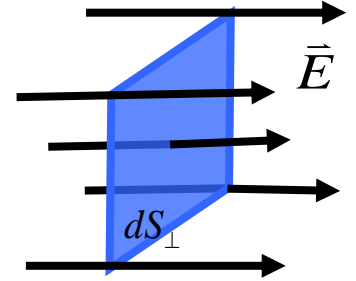
- 在后续课程的电场理论中，会出现将电势函数进行级数展开的分析方法，上面所提出的电荷组分解成多极子的组合的观点就是其直观形象的解释。

# 电力的大小和基本相互作用

- 和万有引力相比，电力是一种很强的力
- 在原子核内，两个质子间的距离大约是 $10^{-15}\text{m}$
- 静电力：
$$F = k \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} = 9 \times 10^9 \frac{(1.6 \times 10^{-19})^2}{(10^{-15})^2} = 230.4 \text{ N}$$
- 万有引力：
$$F = G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} = 6.67 \times 10^{-11} \frac{(1.67 \times 10^{-27})^2}{(10^{-15})^2} = 1.8 \times 10^{-34} \text{ N}$$
- 可见，静电力大约是万有引力的 $10^{36}$ 倍！
- 实际上原子核内，质子以及中子结合在一起的力是另外一种力，称**强相互作用**
  - 强相互作用作用距离很短，超出原子核的尺度就不起作用了。
- 万有引力作用、电磁作用、强相互作用、弱相互作用（微观粒子衰变的作用），是目前所知的自然界四种基本相互作用。**一般我们遇到的各种力其本质都可由原子尺度的电磁作用或者万有引力作用解释。**

# 电场线

- 电场线
  - 电场线是用于表示电场分布的有向曲线；
  - 电场线上的任一点的切线方向为该点电场强度的方向；
  - 电场中某点，**垂直于电场方向的单位面积的电场线数（电场线数密度）等于该点的电场强度的大小。**
- 静电场电场线的特点(从各种静电场总结得到的规律)
  - 电场线不闭合，
  - 起于正电荷（或无穷远），终于负电荷（或无穷远）。
  - 在没有电荷处，任意两条电场线不相交。



# 电场线实例

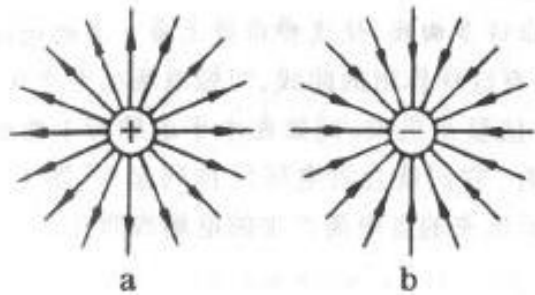
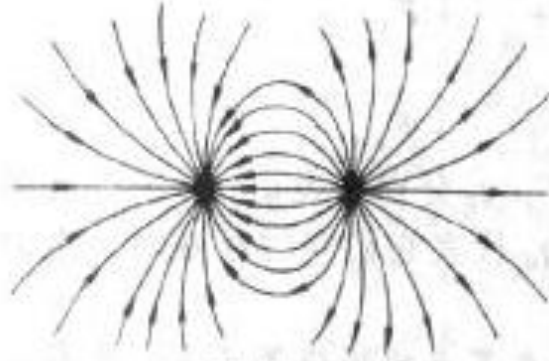
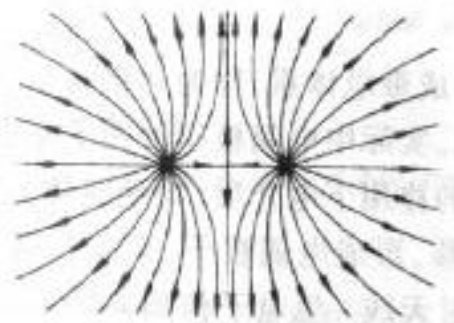


图 1-11 点电荷的电场线



a 一对等量异号电荷



b 一对等量同号电荷

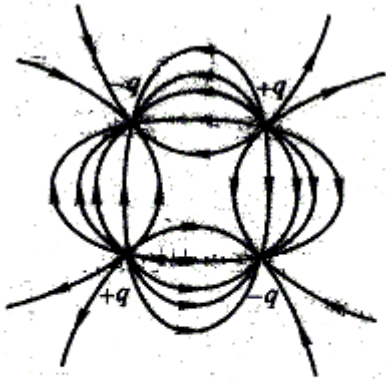
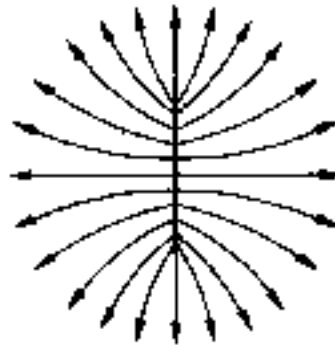
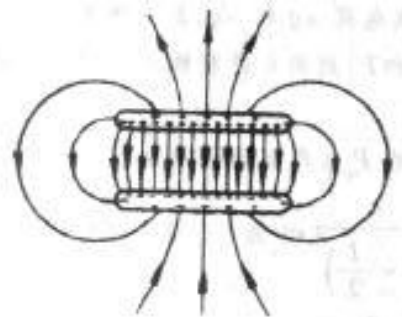


图 1.3-10 位于正方形四角上的  $+q$ ,  $-q$ ,  $+q$ ,  $-q$  四个点电荷电场的电场线



带电直线



c 一对带等量异号电荷的平行板

# 静电场的高斯定理

- 高斯定理(重点)
- 散度定理

教材1: 1.3, 1.5

# #通 量 (1)

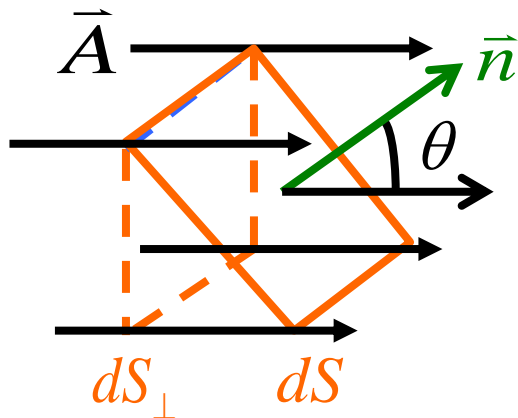
- **通量**：矢量场沿**有向曲面**的如下曲面积分。

$$\boxed{\Phi = \iint \vec{A} \cdot d\vec{S}}$$

$$d\vec{S} = dS \cdot \hat{n} \quad d\vec{S} : \text{面元矢量};$$

$\hat{n}$  : 垂直面元的单位矢量

(第二型曲面积分)



$$\begin{aligned} d\Phi &= \vec{A} \cdot d\vec{S} = A dS \cdot \cos\theta \\ &= A_n \cdot dS = A \cdot dS_{\perp} \end{aligned}$$

- 通量的直观意义：通量的微分等于沿正向通过有向面元的矢量线数。
- 通量是标量

- 通量可正可负，取决于法向矢量的取法。**闭合曲面**的法线，一般采用指向曲面外空间的外法向矢量。

- 通量是可叠加的：  $\Phi = \sum \Phi_i$

# #通 量 (2)

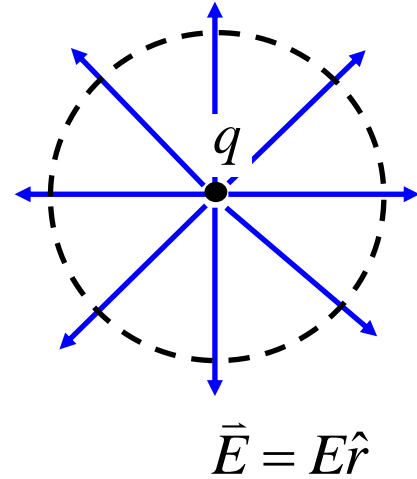
- 通量的物理意义（以电流场为例）

	通量大于零	通量等于零	通量小于零
非闭合面	沿正向穿过S面的量大于沿反向穿过S的量	沿正向穿过S面的量等于沿反向穿过S的量	沿正向穿过S面的量小于沿反向穿过S的量
闭合面	从面内穿出的大于穿入的量 (有源)	从面内穿出的等于穿入的量 (无源)	从面内穿出的小于穿入的量 (有源, 有负源、汇、漏、壑)

- 注意：这里的有源无源是整体的叠加的效果
- 这里的“有源”是对数学意义上的场的形象描绘，并没有确切的物理含义。

# 点电荷的电通量--高斯定理的引入

- 电通量：电场矢量的通量  $\Phi = \iint \vec{E} \cdot d\vec{S}$
- 取点电荷的场强分布
- 以点电荷为球心，取半径r的圆球面,计算电场的通量



- 球面上各点场强均与球面垂直，因此，在球面上任一点有：

$$\vec{E} \cdot d\vec{S} = E \cdot dS$$

- 又考虑球面上任一点场强大小都相等，所以可得球面的电通量为：

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oiint E \cdot dS = E \oiint dS = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}$$

- 可见其通量与所选球面无关。



# 静电场的高斯定理—表述

- 高斯定理：

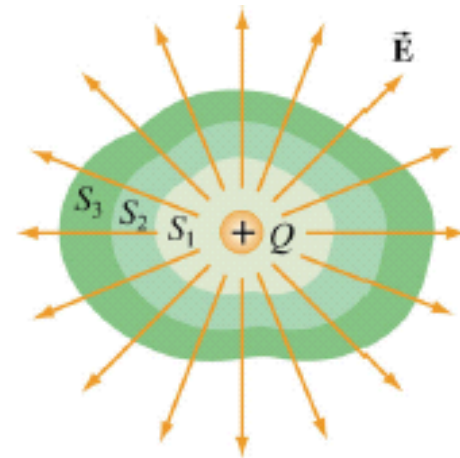
$$\oiint_{\text{闭合面}S} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\sum_{i(S\text{面内})} q_i}{\epsilon_0}$$

在静电场中，任一**闭合面**的电通量等于这闭合面所包围的电量的代数和除以  $\epsilon_0$

- 形象的说，就是闭合面内穿出的电场线的**净**数量正比于闭合面内的电荷量的代数和。
- 高斯面：应用高斯定理所取的闭合曲面。



Johann Carl  
Friedrich Gauss  
(1777-1855) 德国



# 静电场的高斯定理一证明(1)

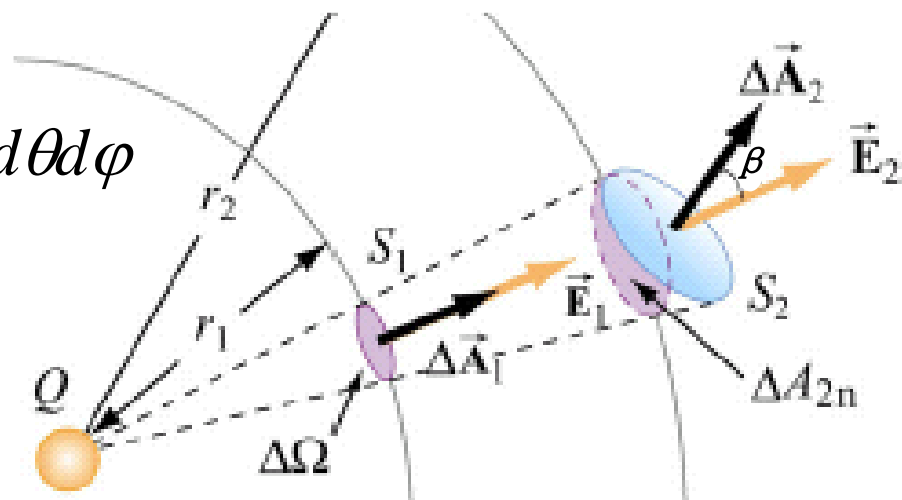
- 由库仑定律和叠加原理导出：
  - 考虑：单个点电荷在闭合曲面内以及单个点电荷在闭合曲面外，推广到任意带电体系
- 点电荷电场对任一面元的电通量：
  - 设点电荷的位置为原点，建立球坐标系

点电荷场强可写为： $\vec{E} = E\hat{e}_r$

$$\Rightarrow d\Phi = \vec{E} \cdot d\vec{s} = E ds_{\perp \hat{e}_r} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sin\theta d\theta d\varphi$$

(注： $ds_{\perp \hat{e}_r} = r^2 \sin\theta d\theta d\varphi$ )

注意 $d\Phi$ 的结果与 $r$ 无关，直观的理解如图立体角所示。



- 设单个点电荷在闭合曲面内

$$\Phi = \oiint d\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oiint \sin\theta d\theta d\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin\theta d\theta = \frac{q}{\epsilon_0}$$

# 静电场的高斯定理一证明(2)

- 设单个点电荷在闭合曲面外

考虑 $d\Phi$ 表达式不含 $r$ ，所以在一定的 $\theta$ 、 $\varphi$ 角  
如图示有 $d\Phi(dS_1) = -d\Phi(dS_2)$

故该点电荷对整个闭合曲面的电通量等于0.

- 对任意带电体系应用叠加原理知

– 总的电通量决定于面内的电量

$$\Phi = \frac{\sum_{i(S\text{内})} q_i}{\epsilon_0}$$

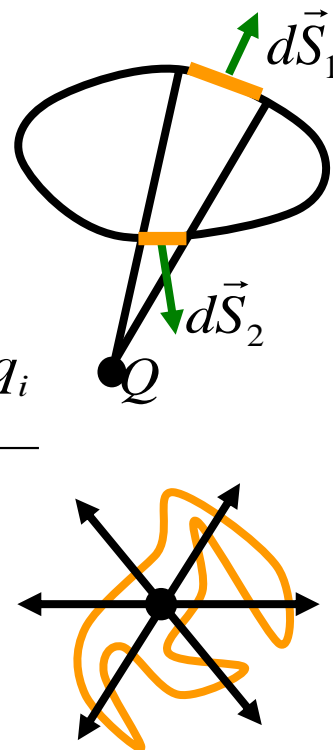
- 若电场线和曲面相交多次，结论一样。

- 综上所述，静电场高斯定理可证。

- 注意：

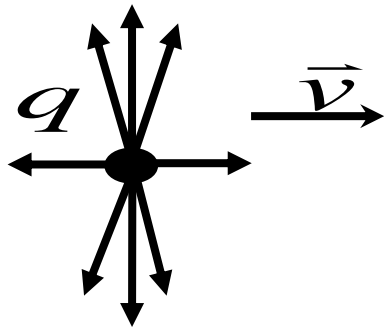
– 高斯定理中的电场强度是总电场，应用时不必局限为面内电荷的电场

– 高斯面的面上任何区域都不能有电荷（电荷量为零或无限小电量），以保证可以区分高斯面内外的电量，以及高斯面上的电场强度值有意义。

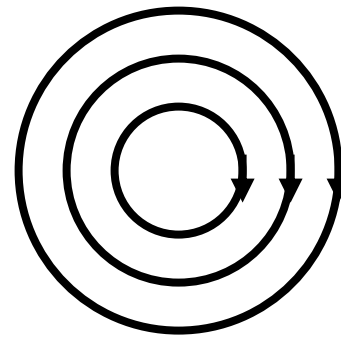


# 静电场的高斯定理—物理意义

- 它意味着，静电场是**有源场**。
- 静电场高斯定理暗含了静电力的平方反比率、电力与电量成正比、叠加原理。但**舍去了球对称性**。



匀速运动电荷的场强分布也符合高斯定理的数学形式



涡旋电场  
(如电磁感应产生的电场) 也符合高斯定理的数学形式

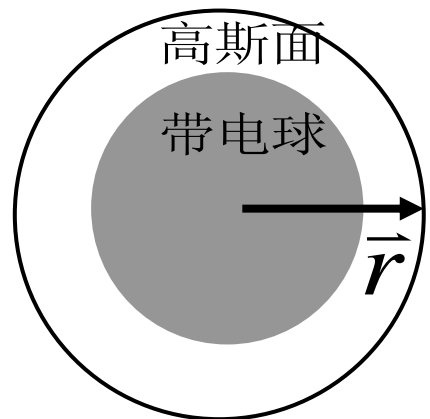
- 高斯定理的成立
  - 并不局限于静电场，比库仑定律的适用范围广。
  - 重要的物理规律，并非简单得理论推论。

# 例:均匀带电球体的电场(1)

## (1)分析对称性(关键)

因为带电球均匀带电，则电荷分布是完全球对称的，根据电荷微元的场强的形式和叠加原理，均匀带电球其场强分布也应具有球对称性：

(a)场强矢量应该沿球心到场点连线方向，(b)在距球心等距离处场强大小相等，取球坐标系，场强可记为：



带电球半径R  
总电量Q

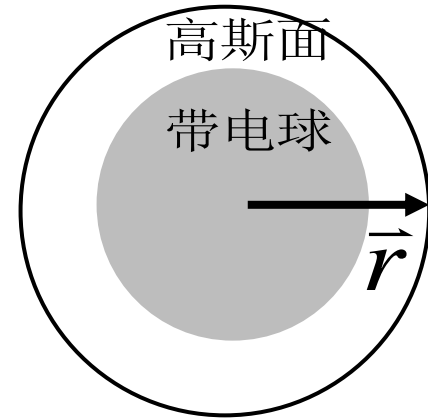
$$\vec{E} = E(r)\hat{r}$$

## (2)选取高斯面（关键）

根据其对称性选取与带电球共球心的半径为r的球面作为高斯面

# 例:均匀带电球体的电场(2)

(3)应用高斯定理，分别计算高斯面的电通量和面内的电荷量。

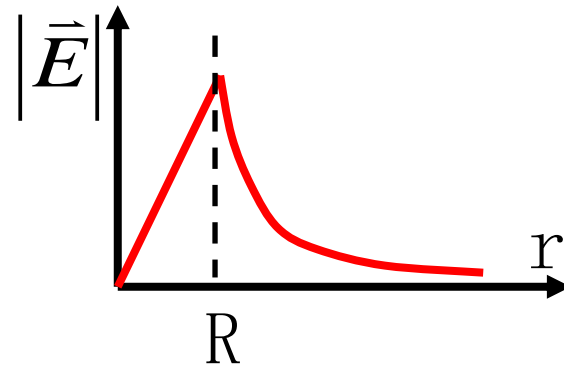


$$q_{\text{内}} = \begin{cases} Q, & r \geq R \\ \frac{r^3}{R^3} Q, & r < R \end{cases}$$

$$\Phi = \oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oiint E(r) \hat{r} \cdot d\vec{S} = \oiint E(r) \cdot r^2 \sin\theta \cdot d\theta d\varphi = 4\pi r^2 E(r)$$

(4)应用高斯定理计算高斯面上的场强

$$\vec{E} = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{r}, & r \geq R \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qr}{R^3} \hat{r}, & r < R \end{cases}$$



注意：在体电荷处有场强！

# 利用高斯定理计算场强的方法

- 已知电荷分布，利用高斯定理计算场强分布，关键在于化简电场强度的矢量积分。化简关键是寻找对称性。
  - 通过对称性分析，确定电荷分布的特点，判断场强的方向，寻找场强分布的特点。
  - 要根据对称性分析的结果取合适的高斯面，以便于化简在高斯面上计算通量的矢量积分的算式。
  - 没有对称性的电荷体系不能直接应用高斯定理求解场强。

# 例:无限大均匀带电平面电场(1)

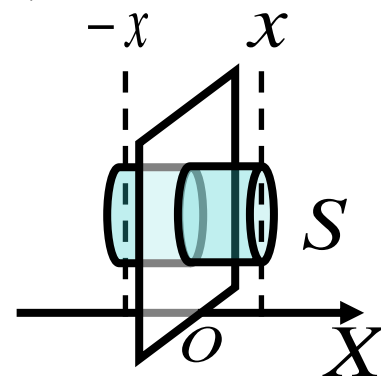
(1)场强分布应有镜面对称性,考虑带电平面无限大  
如图取直角坐标系,可知:

(a)任意一点的场强方向应该垂直平面

(b)在平面两侧场强方向相反

(c)  $x$ 坐标相同的点场强大小应该相等

(d)关于平面对称的两点场强大小应该相等



面电荷  
密度是 $\sigma$

则有:  $\vec{E} = E(x)\hat{i}$  并且  $\vec{E}(x) = -\vec{E}(-x)$

(2)选取高斯面: 根据对称性, 取垂直于平面的圆柱面,  
且带电平面从柱高的一半处穿过柱面; 设柱的底面积  
为 $S$

请先想象一下电场线是怎么分布的?

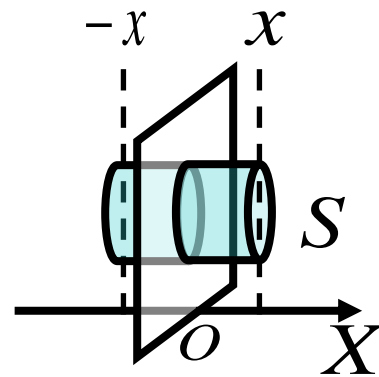


# 例:无限大均匀带电平面的电场(2)

## (3)计算高斯面的电通量和包围的电荷

注: 在柱面的两底面上场强大小相等且垂直柱底面。柱侧面与场强方向平行, 故通过圆柱侧面的电通量为0. 可知

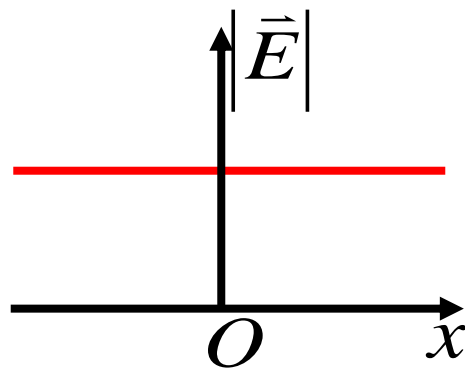
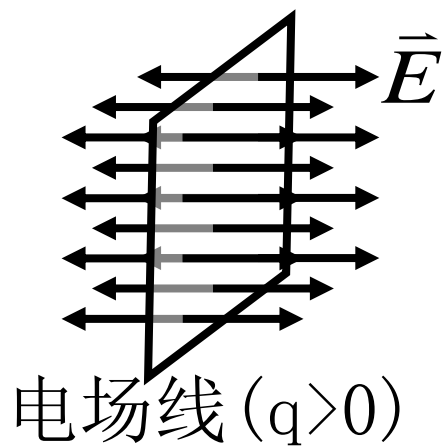
$$\Phi = 2E(x)S \quad (\text{注意, 如图示, } x > 0) \quad q_{\text{内}} = \sigma S$$



## (4)应用高斯定理计算高斯面上的场强

面电荷密度是 $\sigma$

$$\vec{E} = \begin{cases} \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{i}, & x > 0 \\ -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{i}, & x < 0 \end{cases}$$



注意: 在带电平面上, 场强没有物理意义!

# 例:无限长均匀带电直线的电场(1)

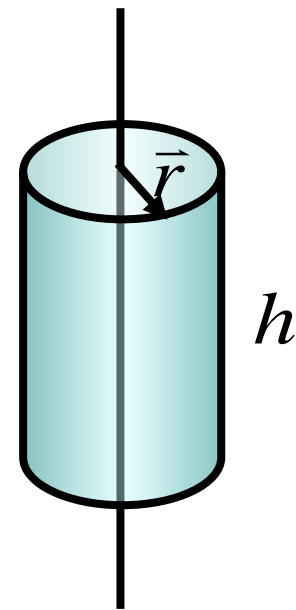
(1)场强分布有轴对称性

– 取柱坐标系，根据对称性知：

(a) 任一点场强方向垂直于带电直线且与带电直线共面

(b) 到带电直线距离相等的点场强大小相等，或者说在以直线为轴的圆柱面上场强大小不变

$$\text{则有： } \vec{E} = E(r)\hat{r}$$



线电荷  
密度是 $\lambda$

(2)选取高斯面：取以直线为轴的圆柱面，令圆柱高为 $h$ ，半径为 $r$

请先想象一下电场线是怎么分布的？

# 例:无限长均匀带电直线的电场(2)

(3)分别计算电通量和包围的电荷

$q_{\text{内}} = \lambda h$ ;  $\lambda$ 是电荷线密度

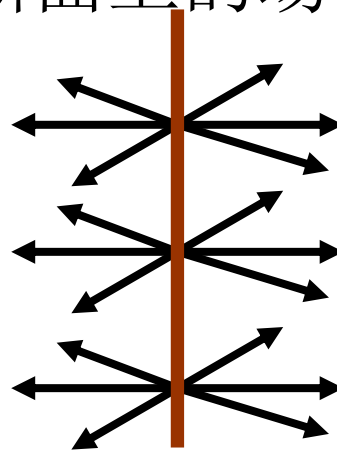
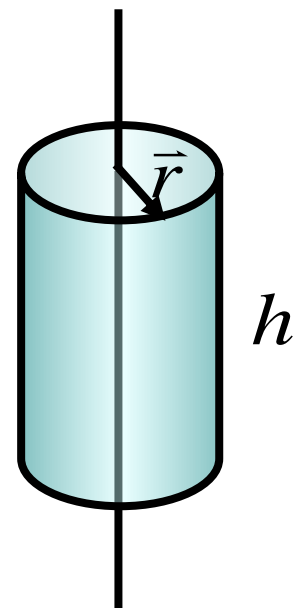
圆柱面侧面上各点场强大小相等, 且与侧面垂直; 圆柱面两个底面上场强方向与底面平行, 所以底面的电通量为0

$$\Phi_{\text{总}} = E(r) \cdot 2\pi r h$$

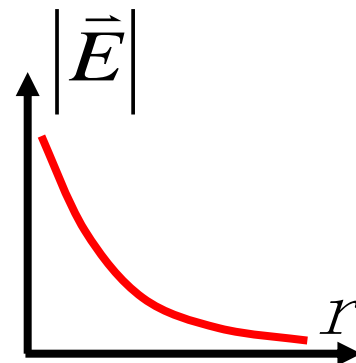
(4)应用高斯定理计算高斯面上的场强

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \hat{r}$$

注意: 在带电直线上,  
场强没有物理意义!

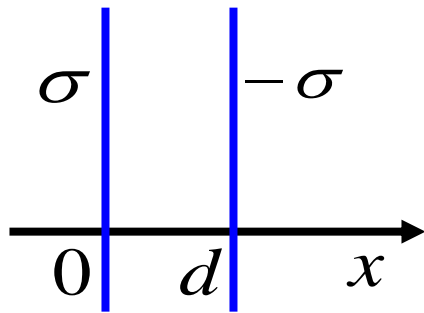


电场线 ( $q > 0$ )



# 例:两个无限大均匀带电平面

- 两无限大带电平面互相平行，相距为 $d$ ，电荷面密度等量异号
  - 利用高斯定理求一个无限大均匀带电平面的电场强度，然后利用叠加原理计算



左边的平面的电场

$$\vec{E} = \begin{cases} \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \hat{i}, & x > 0 \\ -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \hat{i}, & x < 0 \end{cases}$$

右边的平面的电场

$$\vec{E} = \begin{cases} -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \hat{i}, & x > d \\ \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \hat{i}, & x < d \end{cases}$$

故总电场为:

$$\vec{E} = \begin{cases} \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \hat{i}, & d > x > 0 \\ 0, & x > d, x < 0 \end{cases}$$

# 讨论（1） — 关于对称性分析

- 必须进行场强分布的对称性分析
  - 只有存在对称性，才能应用高斯定理求解。这是因为高斯定理本身舍去了静电场对称性的特征。
  - 缺少对称性，就无法解决矢量积分，除非有更多的已知条件。
  - 不过，高斯定理的成立是不需要对称性的。
- 对称性的类型
  - 球对称、轴对称、镜面对称
  - 这种方法能解决的问题是有限的。

# 讨论（2）—高斯面与电荷区

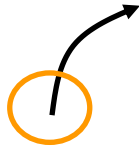
- 高斯面可以和电荷区域交叉
  - 高斯面**允许**通过体电荷区，与面电荷交叉，与线电荷交叉
  - 在高斯面上**不许**有非无穷小量的电荷（具体的说，不允许点电荷、线电荷、面电荷出现在高斯面上）。
    - 因为静电场的高斯定理包含电场强度的通量，而点电荷、线电荷、面电荷所在的点、线、面处场强无定义，所以无法计算电场的通量。
    - 另外，这种情况下，也无法确定它们是否属于面内电荷。

# 讨论（3）—特殊区域的场强

- 由高斯定理计算场强是针对一般的区域，比如带电球的内部和外部。
- 特殊区域的场强，比如带电球的球心的场强，通常是一般区域的结果的外推或极限的结果。
- 一般的，点、线、面电荷所在位置的场强没有确切的结果，一般不讨论这个问题。
- 各种带电体的电场的特点
- 矢量的坐标表示方法

# 证明静电场电场线的特征

- 电场线起于正电荷（或无穷远），终于负电荷（或无穷远）。
  - 反证，假设有电场线起于（或终于）某空间点，且该点无电荷；则取包围该点的足够小高斯面，必可得非零的电通量，根据高斯定理知面内应有电荷，与假设矛盾，假设不成立。







思考：如果已经知道电场分布，如何求电荷分布？

# 例:求电荷分布

- 已知电场分布如下，求电荷分布

$$\vec{E} = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3}, & r \geq R \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{R^3}, & r < R \end{cases} \quad \begin{array}{l} \vec{r} \text{ 是坐标原点到场点的位置矢量} \\ R \text{ 是常量} \end{array}$$

- 应用高斯定理，取半径为 $r$ 的球面为高斯面，面内包围的电荷量记为 $Q_{\text{内}}$ ，则

$$\text{当 } r < R, \quad Q_{\text{内}} = \epsilon_0 \oiint \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{R^3} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{4\pi R^3} \oiint \vec{r} \cdot d\vec{S} = \frac{r^3}{R^3} Q$$

由电场分布知，电荷分布是球对称的，则取一个半径为 $r$ ，厚度为 $\Delta r$ 的球壳计算电荷密度：

$$\rho = \frac{\left[ \frac{Q(r + \Delta r)^3}{R^3} - \frac{Q(r)^3}{R^3} \right]}{\frac{4\pi}{3}(r + \Delta r)^3 - \frac{4\pi}{3}(r)^3} = \frac{3Q}{4\pi R^3} \quad (r < R)$$

$$\text{当 } r \geq R, \quad Q_{\text{内}} = \epsilon_0 \oiint \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{4\pi} \oiint \frac{1}{r^2} \cdot d\vec{S} = Q \quad \Rightarrow \quad \rho = 0, \quad r \geq R$$

## \* # 散度的定义

- 矢量场的**散度**定义为：闭合曲面的通量对闭合曲面所围体积的比值，在体积以任意方式趋于零并缩向某一点时的极限称为矢量场在该点的散度。

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0 (\Omega \rightarrow M)} \frac{\oiint_{(S)} \vec{A} \cdot d\vec{s}}{\Delta V}$$

- 散度是标量。
- 散度表示该点的**单位体积内穿出的通量**。
- 散度计算简记为： $\nabla \cdot \vec{A}$

# \* 静电场的散度定理

## 静电场高斯定理的微分形式

- 静电场的电场强度在空间某点的散度等于该点的电荷体密度除以  $\epsilon_0$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_e}{\epsilon_0}$$

静电场的高斯定理

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{内}}}{\epsilon_0} \Rightarrow \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}}{\Delta V} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{Q_{\text{内}}}{\epsilon_0 \Delta V}$$

$$\Rightarrow \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_e}{\epsilon_0}$$

这是从高斯定理和散度的定义自然得到的结论

# \* #直角坐标系下散度的计算式

- 如图以P(x,y,z)点为中心， $\Delta x$ ， $\Delta y$ 和 $\Delta z$ 为边长，取小立方体。先考虑与x轴垂直的两个面贡献的通量，则只考虑 $\vec{A}$ 的x分量即可： $\phi_x = A_x(x + \frac{\Delta x}{2}, y, z) \cdot \Delta y \Delta z - A_x(x - \frac{\Delta x}{2}, y, z) \cdot \Delta y \Delta z$

利用全微分概念，有：

$$A_x(x \pm \frac{\Delta x}{2}, y, z) \approx A_x(x, y, z) + \frac{\partial A_x}{\partial x} \cdot (\pm \frac{\Delta x}{2})$$

则：

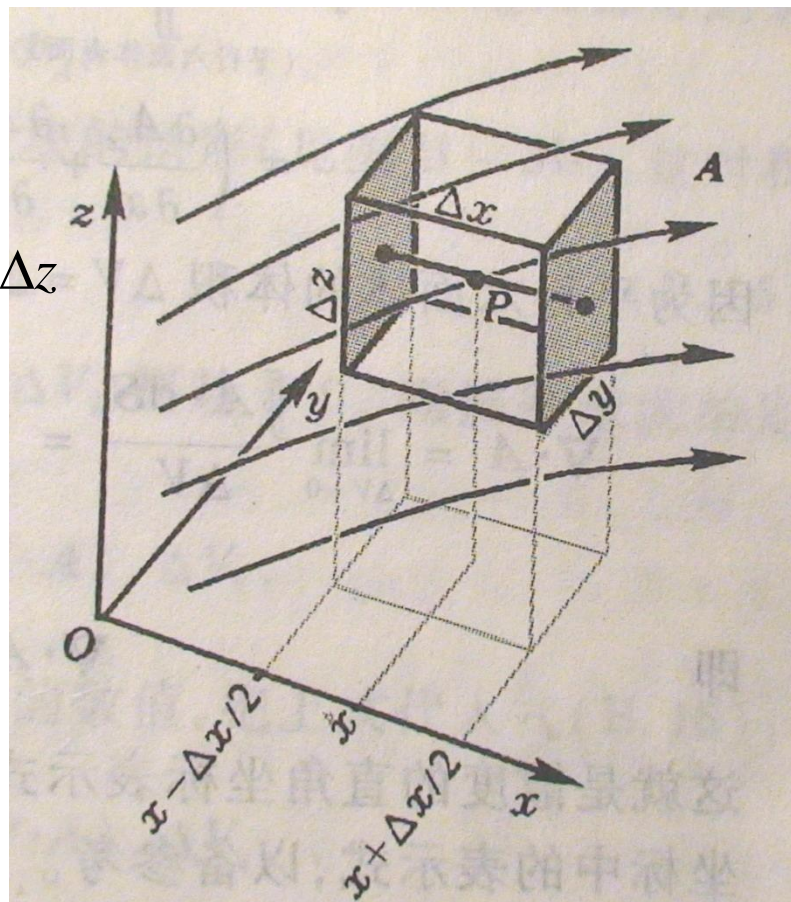
$$\phi_x \approx \left[ \frac{\partial A_x}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} - \frac{\partial A_x}{\partial x} (-\frac{\Delta x}{2}) \right] \cdot \Delta y \Delta z = \frac{\partial A_x}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z$$

同理有：

$$\phi_y = \frac{\partial A_y}{\partial y} \Delta x \Delta y \Delta z \quad \phi_z = \frac{\partial A_z}{\partial z} \Delta x \Delta y \Delta z$$

则有散度：

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{\phi_x + \phi_y + \phi_z}{\Delta x \Delta y \Delta z} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$



# \* # 三种坐标系下散度的计算式

- 定理：散度的计算式如下。

$$\operatorname{div} \vec{A} = \nabla \bullet \vec{A}$$

$\nabla$ : 哈密顿算子

$$= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

注意： $\nabla \bullet \vec{A}$  只是一个记号，  
不是矢量的点乘计算。

$$= \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho A_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$= \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(A_\varphi)}{\partial \varphi}$$

P72 《矢量分析与场论》谢树艺，人民教育出版社，1978

P443 《数学手册》高等教育出版社，1979

P476 新概念物理《电磁学》赵凯华，高等教育出版社，2003

# \* 电场的散度—讨论

- 电场某处的单位体积内的电通量正比于此处单位体积内的电荷量。
- 电场的散度定理说明，在电荷体密度不是无穷大的点，场强矢量在该点连续，在各方向可求导。
- 只适用于电荷体密度
  - 而不能用于点电荷、线电荷、面电荷所在的位置，那些位置没法定义电荷的体密度。同时这些位置的电场强度值无意义。
- 可用于计算电荷分布。
- 计算场强一般采用高斯定理积分形式，不必采用微分形式，即散度定理。

# \* 例:求电荷分布—1

- 已知电场分布求电荷分布

$$\vec{E} = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3}, & r \geq R \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{R^3}, & r < R \end{cases} \quad \vec{r} \text{ 是坐标原点到场点的位置矢量}$$

应用散度定理:  $\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$  应用球坐标系散度公式:

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(A_\phi)}{\partial \phi}$$

$$r \geq R \quad \nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \cdot \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right) = 0$$

$$r < R \quad \nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \cdot \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 R^3} \right) = \frac{3Q}{4\pi\epsilon_0 R^3}$$

$$\text{所以: } \rho = \begin{cases} 0, & r \geq R \\ \frac{3Q}{4\pi R^3}, & r < R \end{cases}$$



## \* 例:求电荷分布—2

- 已知电场分布求电荷分布

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3} \quad \vec{r} \text{ 是原点到场点的位置矢量}$$

尝试1: 应用散度定理?  $\nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \cdot \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}) = 0 \quad \rho=0?$

尝试2: 以原点为圆心, 取半径r的球面为高斯面,  
应用高斯定理积分形式:

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \oiint \frac{1}{r^2} \cdot r^2 \sin\theta d\theta d\varphi = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

上面的结果表明, 取任何半径r, 高斯面内的电荷量为常量Q  
取r趋于0的极限, 可知在原点处有点电荷Q

# \* 计算电荷分布的方法

- 如果已知电场分布，可以利用高斯定理求电荷分布。

– 利用微分形式，即散度定理  $\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_e}{\epsilon_0}$  可以直接求出体电荷的分布。但无法求点、线、面电荷的分布。

– 利用积分形式  $\oiint_{\text{闭合面}S} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\sum_{(S\text{面内})i} q_i}{\epsilon_0}$  可以求高斯面内的

电荷的量，然后可以利用求极限的方法计算出点、线、面电荷。

# 静电场环路定理

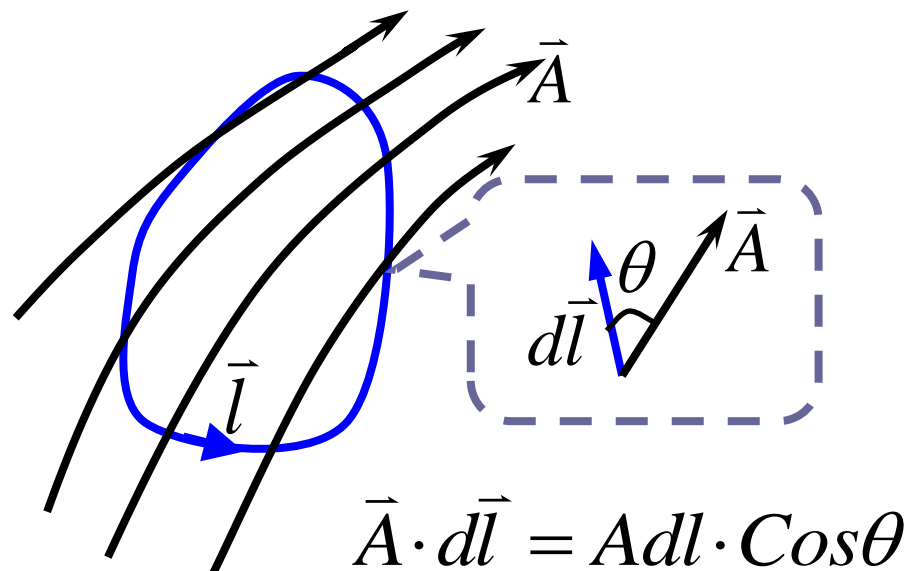
- 静电场环路定理
- 静电场旋度定理

教材1: 1.4, 1.5

# #环量

- **环量**：矢量场对**闭合**有向曲线的(第二型)曲线积分：

$$\Gamma = \oint_l \vec{A} \cdot d\vec{l}$$



- 环量是标量。
- 环量的正负受有向曲线的取向的影响。
- 环量不为零称有旋场
- **处处**环量为零称无旋场

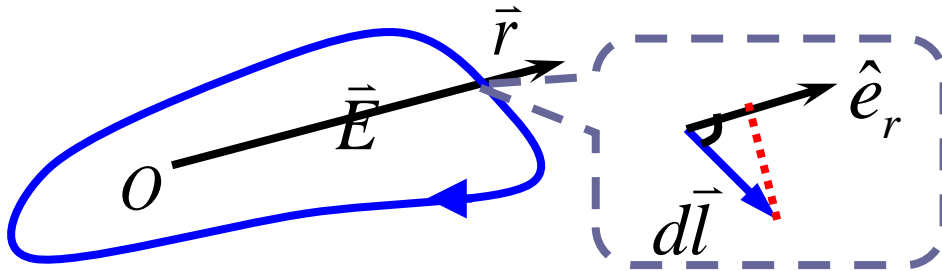
# 静电场的环路定理

静电场的场强沿任意闭合环路的环量为零。

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

证明：取任意点电荷位置为原点，建立球坐标系

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \oint_L \frac{1}{r^2} \hat{e}_r \cdot d\vec{l} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \oint_L \frac{1}{r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{1}{r}\right) \Big|_{r_p}^{r_p} = 0$$



注意：

$$\hat{e}_r \cdot d\vec{l} = dl \cdot \cos\theta = dr$$

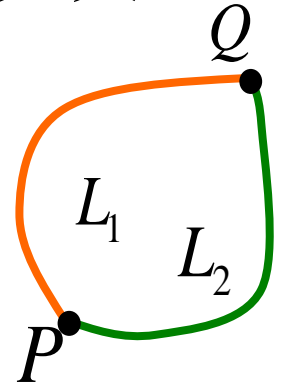
• 在环路上不能有点电荷等，以确保环路上的电场强度值有意义。

# 静电场的环路定理-物理意义

- 静电场力是保守力，对电荷的做功与路径无关，只与起点和终点的位置有关。

如图从P到Q任取两条路径，有：

$$q \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = q \int_P^Q \vec{E} \cdot d\vec{l} + q \int_Q^P \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$



$$\Rightarrow q \int_P^Q \vec{E} \cdot d\vec{l} = -q \int_Q^P \vec{E} \cdot d\vec{l} = q \int_P^Q \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

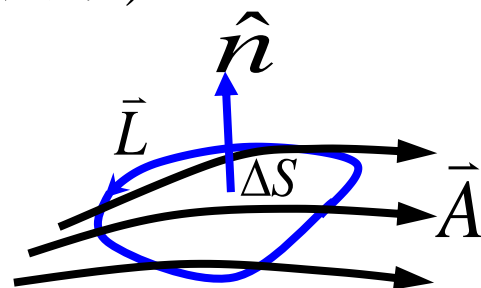
- 静电场是无旋场
- 静电场的环路定理的形式只适用于静电场，推广到非静电场后需改变形式。
- 环路定理反映了静电场的球对称性。但舍去了平方反比性。

# \*#环量面密度

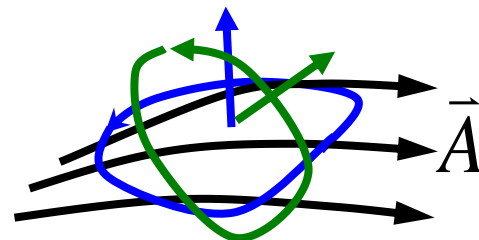
- **环量面密度**：有向闭合曲线围成的曲面元以任意方式无限收缩并趋向某点时，矢量场对闭合曲线的环量和曲面面积之比的极限，称为矢量场在该点绕该曲面法线方向的环量面密度。(注意：曲线环绕方向和所围的曲面的法线方向成右手螺旋关系，如图示)

– 注意：环量面密度是标量

$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0 (L \rightarrow M)} \frac{\Delta \Gamma}{\Delta S} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0 (L \rightarrow M)} \frac{\oint_L \vec{A} \cdot d\vec{l}}{\Delta S}$$



– 注意，在任一点，环量面密度可以有无限多个值，因为存在无限多个方向的法线，导致有不同的环路面密度，如图示。



# \*# 旋度的定义

- 如前所述，在矢量场空间任意点，取任意一个方向，则存在一个围绕此方向的环量面密度。在这一点，有无数个方向可以选择，也因此相应的存在无数个环路面密度。这些环量面密度之间存在确定的关系。
- **旋度**：是一个矢量，取矢量场  $\vec{A}$  某一点的环量面密度的最大值为模，并取相应的曲面法线方向。称为矢量场  $\vec{A}$  在该点的旋度，记为： $\nabla \times \vec{A}$

– 旋度是矢量！

- 绕任一方向  $\hat{n}$  的环量面密度等于旋度在  $\hat{n}$  这一方向的投影（证明略）



# \*静电场的旋度定理—静电场环路定理的微分形式

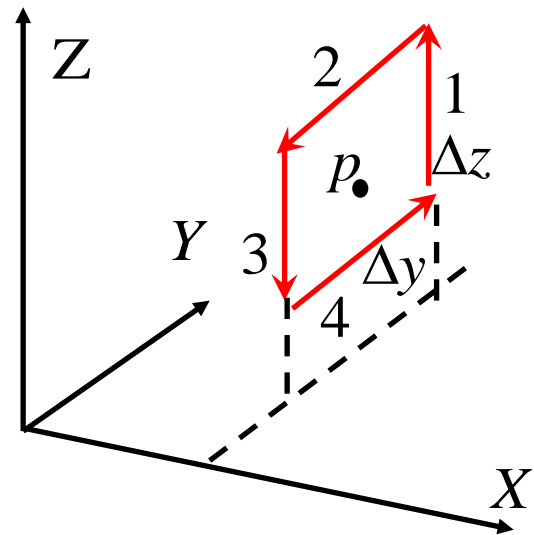
- 静电场的旋度处处为零。

$$\nabla \times \vec{E} = 0$$

- 不适用于点、线、面电荷所在处。这些位置的电场强度值无意义。

# \*#旋度在直角坐标系的计算式

- 如图取与x轴垂直的小矩形回路，边长分为 $\Delta y, \Delta z$ ，四条边分别记为1, 2, 3, 4，显然在1, 3边只有Z分量有环量，在2, 4边只有y分量有环量。环路中心点坐标记为 $x, y, z$ ；



矢量场在P点的值记为  $A_{xp}\hat{i} + A_{yp}\hat{j} + A_{zp}\hat{k}$

$$\begin{aligned} \text{则沿环路的环量为 } & (A_{zp} + \frac{\partial A_z}{\partial y}(\frac{\Delta y}{2}))(\Delta z) + (A_{zp} + \frac{\partial A_z}{\partial y}(-\frac{\Delta y}{2}))(-\Delta z) \\ & + (A_{yp} + \frac{\partial A_y}{\partial z}(\frac{\Delta z}{2}))(-\Delta y) + (A_{yp} + \frac{\partial A_y}{\partial z}(-\frac{\Delta z}{2}))\Delta y = (\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z})\Delta y\Delta z \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (\nabla \times \vec{A})_x = (\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}) \quad \text{同理，分别取垂直y、z轴的小回路，可得：}$$

$$\nabla \times \vec{A} = \hat{i} \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \hat{j} \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \hat{k} \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right)$$

# \*#旋度的计算式

- 旋度的计算式如下(三种坐标系)(证明略)

$$\text{rot}\vec{A} = \nabla \times \vec{A}$$

直角坐标

$$= \hat{i} \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \hat{j} \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \hat{k} \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right)$$

柱坐标

$$= \hat{e}_\rho \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \right) + \hat{e}_\varphi \left( \frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right) + \hat{e}_z \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho A_\varphi)}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\rho}{\partial \varphi} \right)$$

球坐标

$$= \hat{e}_r \left[ \frac{1}{r \sin \theta} \left( \frac{\partial(\sin \theta A_\varphi)}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right) \right] + \hat{e}_\theta \left[ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial(r A_\varphi)}{\partial r} \right] + \hat{e}_\varphi \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial(r A_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right]$$

P72 《矢量分析与场论》谢树艺, 人民教育出版社, 1978

P443 《数学手册》高等教育出版社, 1979

P476 新概念物理《电磁学》赵凯华, 高等教育出版社, 2003<sub>9</sub>

# 静电场矢量场原理的总结

- 静电场：有源、无旋场。  
『注：无旋场是指处处旋度（环量）为零的矢量场；无源场是指处处散度（对闭曲面通量）为零的矢量场』
- 静电场的高斯定理和环路定理各自独立，不能互推；分别反映了静电场的不同特点。
- 静电场的高斯定理和环路定理合起来全面的刻画了静电场，等价于库仑定律和叠加原理；这形成了两种不同的刻画静电场的方法。

# 静电场电势理论

- 电势的计算方法
- 电势和电场的关系

# 静电场的电势

- 静电力是保守力，可以定义相应的**势能**。
- 静电势能差：静电场力对电荷做功定义为电荷在静电场中的静电势能的减少。

任意积分路径

$$A_{PO} = q \int_P^O \vec{E} \cdot d\vec{l} = W_{PO} \xrightarrow{\text{定义为}} W_P - W_O$$

- 静电势差： $\frac{W_{PO}}{q} = \int_P^O \vec{E} \cdot d\vec{l} = U_{PO} \xrightarrow{\text{定义为}} U_P - U_O$   
(电压)

- 静电势： $U_P = \int_P^O \vec{E} \cdot d\vec{l}$  (O点是零电势点)  $\xleftarrow{\text{取 } U_O=0}$

– 静电场中任意一点的电势等于把单位正电荷从该点沿任意路径移到零电势点电场力做的功。

– 单位：焦耳/库(J/C)=伏特(V)

# 关于电势的说明

- 某点的电势值与电势零点的选取有关；  
两点间电势差与电势零点的选择无关。
  - 零电势的参考点可选取任意点，通常是：电荷分布在有限空间的电场中，选无限远处电势为零；在实际应用中，常选地球或仪器外壳的电势为零；原则上可以自行选择合理的电势零点。
  - 电势零点也可称为电势参考点。
- 电势是标量，是场函数，构成**标量场**。
- 电势是刻画静电场的又一个物理量。

# 点电荷电场的电势分布

- 根据电势的定义，取点电荷位置为坐标原点，选择积分路径为球坐标系的径向，选择电势零点为无穷远。

$$\begin{aligned} U &= \int_P^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_r^{\infty} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{e}_r \cdot d\vec{r} \\ &= \int_r^{\infty} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( -\frac{1}{r} \right) \Big|_r^{\infty} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \end{aligned}$$

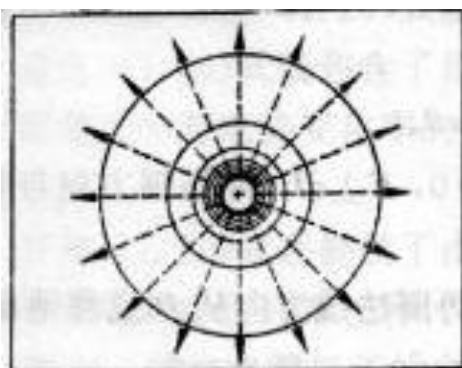
- 点电荷所在的位置，电势无意义。
- 点电荷电场的等势面是以点电荷为球心的同心球面。



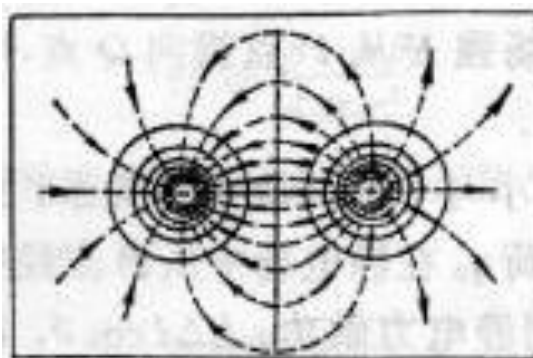
# 等势面

- 静电场的电势是空间坐标的标量函数，构成了一个标量场。
- 可以用等势面形象的描绘电势场的分布。
- 等势面：电势相同的点所构成的空间轨迹。
  - 电势相同的点，不一定构成面，也可能是点，也可能是线，也可能是体。
  - 电势相同的点，不一定构成一个封闭的面，可能是多个封闭的面，也可能是开放的面。
- 等势面分布图的画法规则：各相邻等势面间的电势差相等。

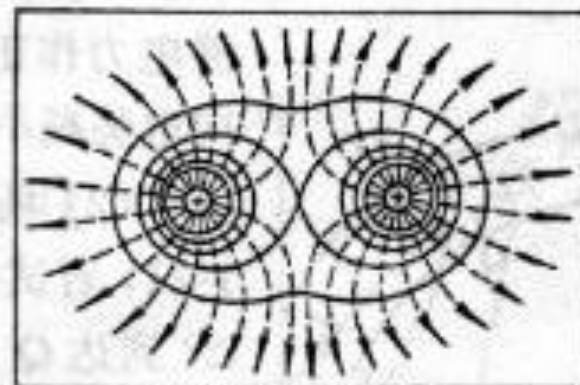
# 典型带电体系的等势面和电场线



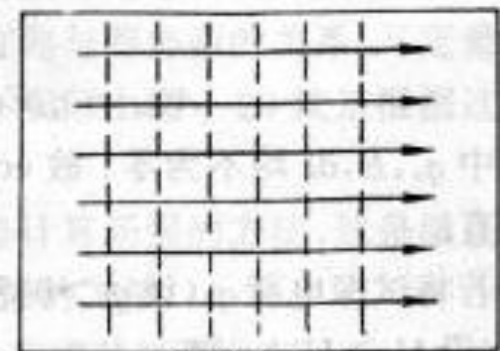
(a) 正点电荷



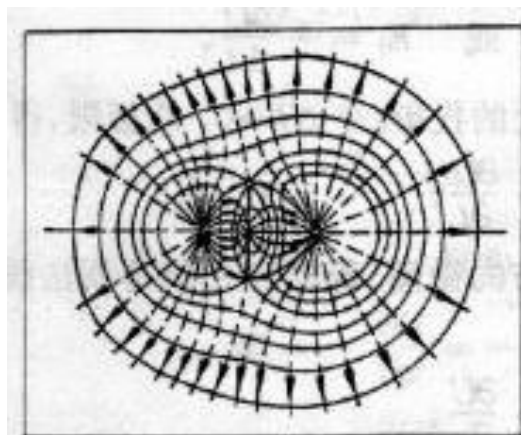
(c) 等量异号电荷



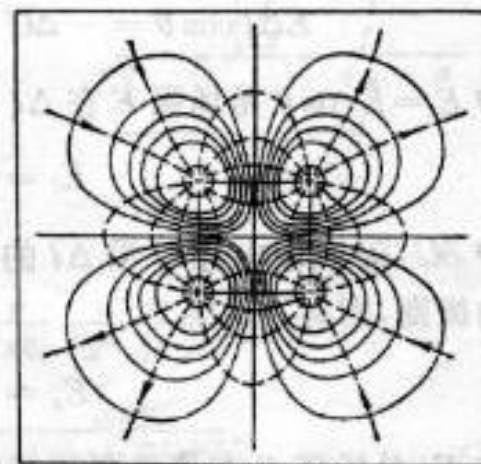
(d) 等量同号电荷



(b) 均匀电场

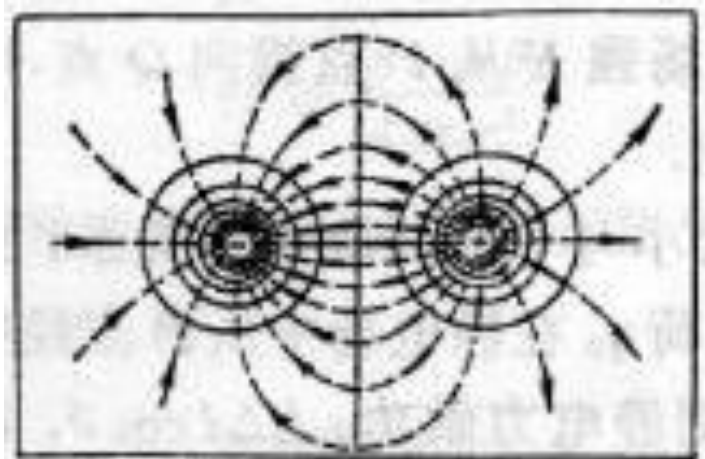
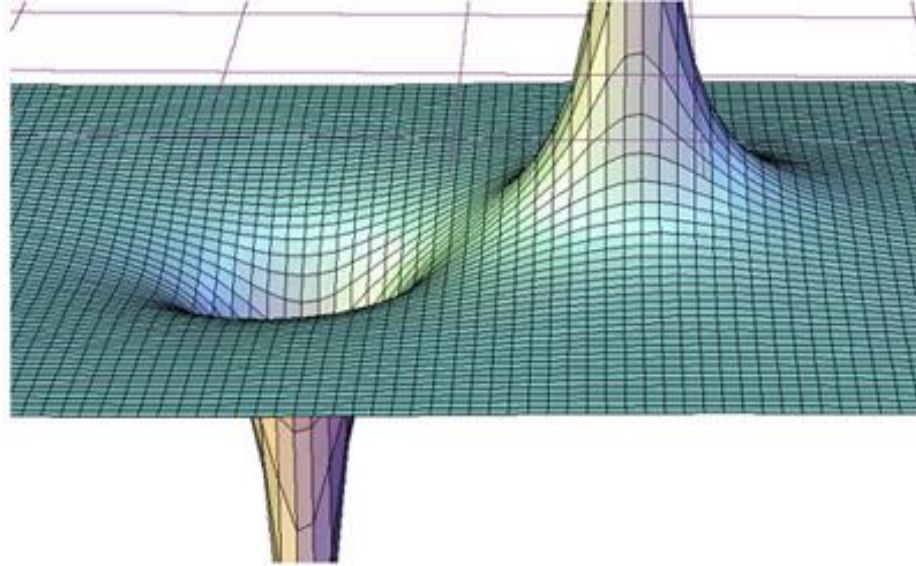


(e) 不等量同号正电荷



(f) 电四极子

# \*电势分布的三维图示： 两个等量异号点电荷所在平面的电势



(c) 等量异号电荷

# 电势叠加原理

- 任意带电体系的静电场在某点的电势，等于构成该体系的点电荷（电荷微元）的静电场在该点电势的代数和（标量积分）。

– 注意：成立的前提是零电势点要相同

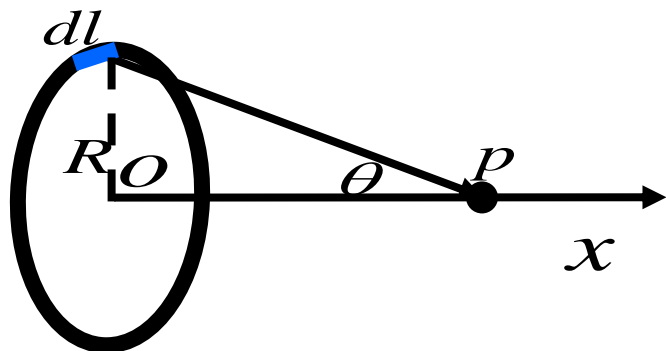
- 如果各带电体统一取无穷远为零电势点，零电势点当然相同，但如果取其他的零电势点，就要注意。
- 可以根据场强叠加原理证明。

$$U = \sum U_i$$

$$U = \int dU$$

# 例：均匀带电细圆环轴线上的电势

- 半径是 $R$ ，总带电量 $Q$ ，电荷线密度是 $\lambda$



依据电势叠加原理：

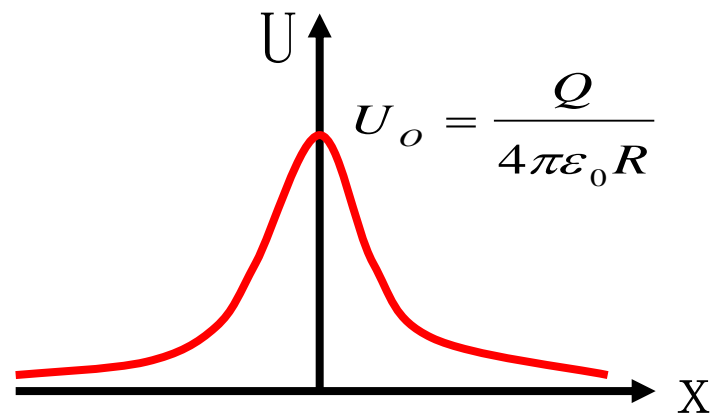
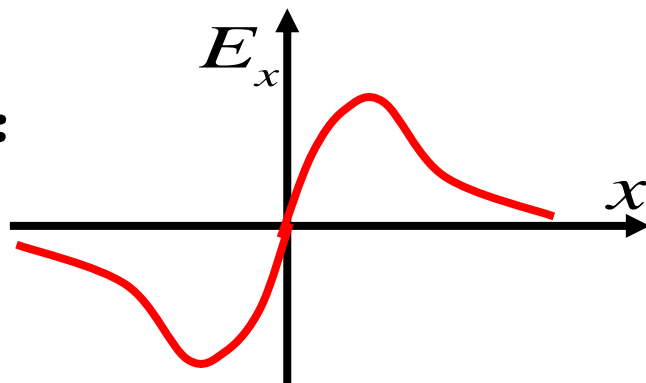
$$U_P = \oint \frac{\lambda dl}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 r} \oint dl$$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 (x^2 + R^2)^{\frac{1}{2}}}$$

对照前面算出的场强分布

$$E = E_x = \frac{Qx}{4\pi\epsilon_0 (x^2 + R^2)^{3/2}}$$

假设正电荷：



# 例：均匀带电球面产生的电势

- 取球心为原点，采用球坐标系，先依据高斯定理计算场强。

$$\vec{E} = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{e}_r & r \geq R \\ 0 & r < R \end{cases}$$

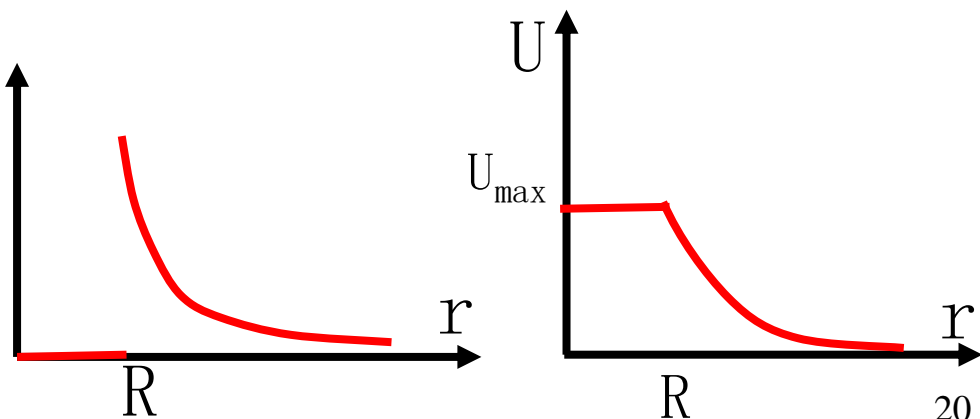
- 由场强计算电势分布。

$$r \geq R, \quad U = \int_r^\infty \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_r^\infty \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

$$r < R, \quad U = \int_r^\infty \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_r^R 0 dr + \int_R^\infty \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

- 等势面是同心球面

如图为电场和电势分布  
(假设正电荷)



# 电势的计算方法

- 两种计算方法

1. 根据定义，由场强进行积分运算。

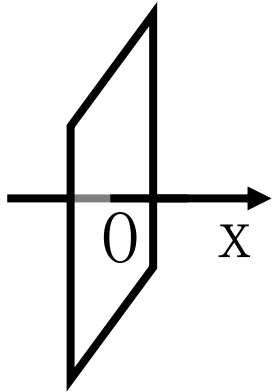
- 适用于场强比较容易计算的问题。
- 注意积分路径选择有灵活性。

2. 根据电势叠加原理，由电荷微元(点电荷)的电势分布进行积分(求和)计算。

- 电势是标量，其积分运算往往比矢量积分运算要简单，因此在场强不易求出的情况下，宜通过电势叠加原理直接计算电势。
- 注意零电势点的统一。

# 例：无限大均匀带电平面的电势

- 由高斯定理可求场强分布  $\longrightarrow \vec{E} = \begin{cases} \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \hat{i}, x > 0 \\ -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \hat{i}, x < 0 \end{cases}$
- 尝试可知不能选无穷远为零电势
- 取平面上任一点为零电势点，并以之为原点建立直角坐标系，取X轴上一点P ( $x, 0, 0$ )

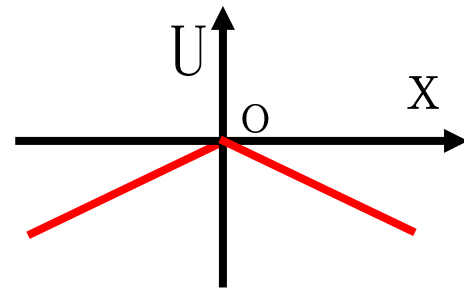
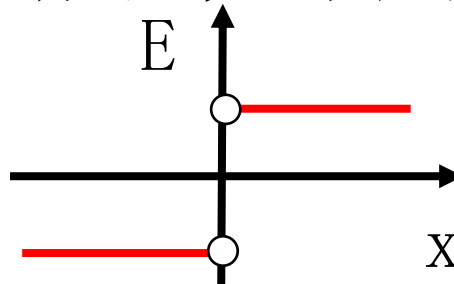


$$x > 0, \quad U = \int_P^O \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_x^0 \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \hat{i} \cdot \hat{i} dx = \frac{-\sigma}{2\varepsilon_0} x$$

$$x \leq 0, \quad U = \int_P^O \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_x^0 \frac{-\sigma}{2\varepsilon_0} \hat{i} \cdot \hat{i} dx = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} x$$

- 等势面是平行于带电面的平面

假设正电荷：





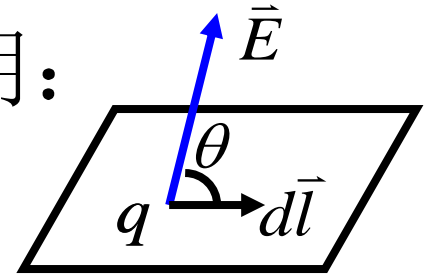
# 选择零电势点

- 零电势点常取在等势面(体),成为零电势面(体)
- 零电势点原则上可以自由选择,但也有特殊情况使电势零点的选择受到限制。
- 电荷所在处可以选为零电势点吗?
  - 不能选择点、线电荷为零电势点,那里的场强无穷大,会导致其他所有点的电势都为无穷大。
  - 面电荷、体电荷处可以选为零电势点。
- 无穷远为零电势点
  - 无穷远是理想模型,实践中取“足够远”。
  - 无穷远作为零电势点比较方便。
  - 无穷远不是一个点,而是一个区域,也可以看做是一个无穷大面;同时也就暗含假定它是一个等势面。
  - 对无穷大(长)电荷模型,无穷远处不宜为零电势点

# 由电势计算电场强度(1)

- 等势面与电场线处处正交，证明：

- 在等势面上取足够小面元，认为
- 面元上场强处处相等。
- 令试探电荷 $q$ 在面元内移动一小的元位移。



- 因在等势面上移动，故电场做功为零（对任意点都成立）

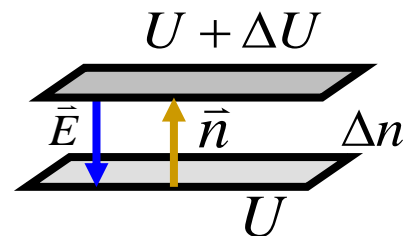
$$\vec{E} \bullet d\vec{l} = E dl \bullet \cos \theta = 0 \Rightarrow \cos \theta = 0$$

- 场强指向电势减小的方向，证明：

- 将试探电荷 $q$  ( $>0$ ) 沿等势面法线方向移动，从M点到N点( $U_M > U_N$ )，则  $q(U_M - U_N) > 0$ ，也即电场力对电荷作正功，可知，场强方向应该由M指向N，即从高电势指向低电势。

# 由电势计算电场强度(2)

- 如图取电势为 $U$ 的等势面的面元，以及电势为 $U+\Delta U$ 的近邻等势面的面元，两面元间距 $\Delta n$ 。等势面的法线和电场强度方向如图所示。
- 等势面密集处场强大，稀疏处场强小，场强大小决定于电势在空间的变化率。电场强度的方向就是电势降落最快的方向。



$$|E| \cdot \Delta n = |\Delta U|$$

$$\Rightarrow |E| = \left| \lim_{\Delta n \rightarrow 0} \frac{\Delta U}{\Delta n} \right|$$

$$\Rightarrow \vec{E} = -\hat{n} \cdot \lim_{\Delta n \rightarrow 0} \frac{\Delta U}{\Delta n}$$

上式记为  $\Downarrow$

$$\boxed{\vec{E} = -\nabla U}$$

静电场某点场强矢量与该点的电势的负梯度相等。



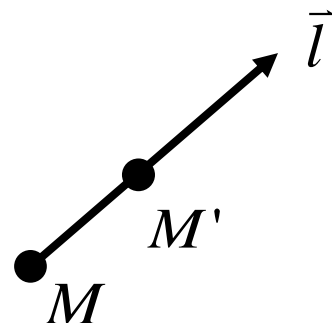
(注意：梯度是矢量)

梯度：  $\nabla U = \hat{n} \cdot \lim_{\Delta n \rightarrow 0} \frac{\Delta U}{\Delta n}$

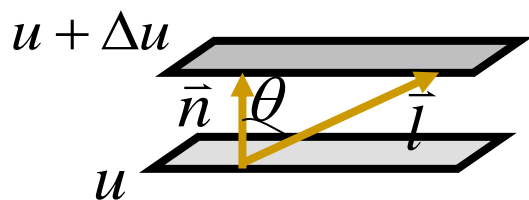
# #方向导数

- 在标量场中，标量函数 $u=u(x,y,z)$ 的如下的极限，即为该函数在某点沿该方向的方向导数：

$$\left. \frac{\partial u}{\partial l} \right|_M = \lim_{M' \rightarrow M} \frac{u(M') - u(M)}{|M'M|}$$



- 方向导数是该函数沿某一方向的变化率。
- 一般的，在不同方向上的方向导数不相等，有如下关系：



$$\frac{\partial u}{\partial l} = \lim_{l \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{l} = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{n / \cos \theta} = \cos \theta \frac{\partial u}{\partial n}$$

$\vec{n}$ 是等值面元的法线方向

# #梯度

- 标量场 $u$ 在某点的所有方向上的方向导数，在垂直于等值面的方向（法向）的方向导数的绝对值最大。
- 定义标量场 $u$ 的**梯度**为： $\nabla u = \frac{\partial u}{\partial n} \hat{n}$   
 $\hat{n}$  是等值面法向的正方向，即垂直等值面指向 $u$ 增大的方向。
- 推论:任意的方向导数等于梯度在该方向上的投影：

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \nabla u \bullet \hat{l}$$

# #梯度计算公式

- 任意方向导数等于梯度在该方向上的投影，则在直角坐标系中向三个坐标轴方向投影可得：

$$\nabla u \bullet \hat{i} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \nabla u \bullet \hat{j} = \frac{\partial u}{\partial y} \quad \nabla u \bullet \hat{k} = \frac{\partial u}{\partial z}$$

$$\Rightarrow \nabla u = \hat{i} \frac{\partial u}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial u}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial u}{\partial z}$$

- 梯度的计算公式：

$$\begin{aligned} \text{grad} u &= \nabla u = \hat{i} \frac{\partial u}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial u}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial u}{\partial z} \\ &= \hat{e}_\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} + \hat{e}_\varphi \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \hat{e}_z \frac{\partial u}{\partial z} \\ &= \hat{e}_r \frac{\partial u}{\partial r} + \hat{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \hat{e}_\varphi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \end{aligned}$$

# 总结：电势与场强的关系

- 积分和微分关系： $U_P = \int_P^0 \vec{E} \cdot d\vec{l}$        $\vec{E} = -\nabla U$
- 定性的描述
  - 等势面与电场线处处正交，场强指向电势减小的方向，场强大小等价于电势的空间变化率，即等于电势沿等势面法线方向的变化快慢。
  - 等势面密集（稀疏）处，电场线也密集（稀疏）；前者表示电势的空间变化率大（小），后者表示场强大（小）
  - 场强为零的区域（体）一定是等势体，但其电势不一定为零；等势体内（注意，不是等势面）场强一定为零；
- 场强和电势的地位
  - 电势是定义在静电场中的，实践中经常用到。
  - 场强可描述各种电场。

# \* 电势和电荷的关系

- 积分关系:  $U = \int \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r}$
- 微分关系:  $\left. \begin{array}{l} \vec{E} = -\nabla U \\ \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\nabla^2 U = -\frac{\rho}{\epsilon_0}}$  (泊松方程)  
十分重要!

特别的, 若电荷为零:  $\nabla^2 U = 0$  (拉普拉斯方程)

拉普拉斯算子:  $\Delta = \nabla^2 = \nabla \cdot \nabla$ ;  $\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$

- 静电学的基本问题是求解泊松方程和拉普拉斯方程 —— 郭硕鸿《电动力学》



# 静电场理论框架

## 电场强度

高斯定理，  
静电场环路定理

点电荷场强，  
场强叠加原理

## 电势

泊松方程

点电荷电势，  
电势叠加原理

库仑定律，静电力叠加原理

## 电荷

（请自行总结电荷、电场强度、电势三个物理量的关系）

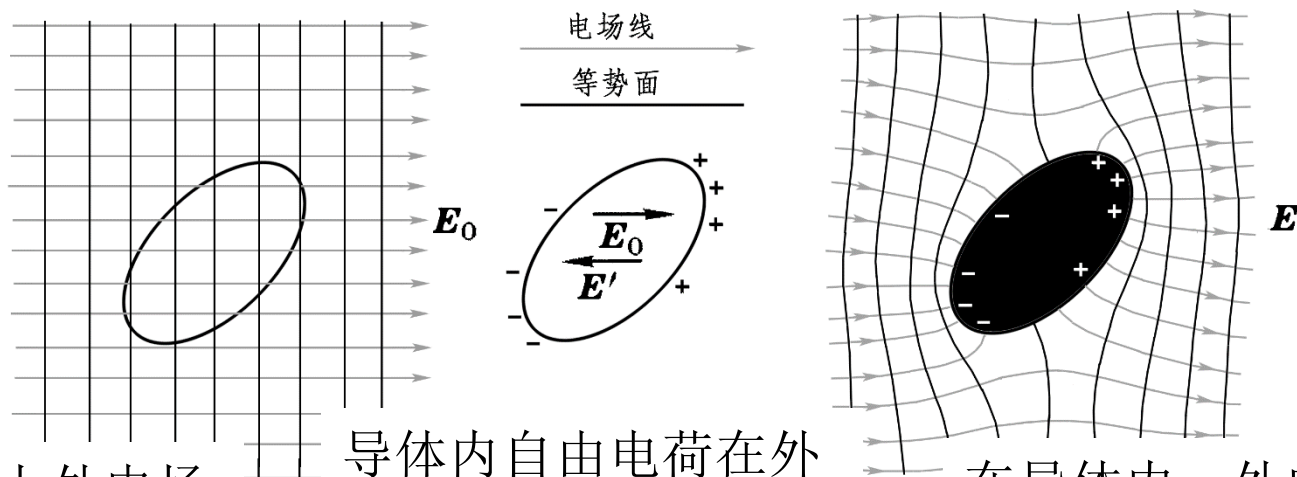
# 静电场中的导体

教材1： 第2章2.1, 2.2

# 导体

- 导体：金属为例
  - 可以看做是原子实和价电子形成的自由电子组成。
  - 电子作无规热运动，运动速度受温度影响。
  - 电子可以隧穿势垒（表面势垒，接触势垒）。
  - 少量电子可以越过表面势垒从导体表面发射出来（逸出功）。
- 本节讨论中默认的导体模型是：
  - 导体内有大量的可以自由移动的电荷。
  - 在自然情况下，导体中的正电荷与负电荷数量相等，但没有宏观电荷分布，是宏观的电中性物体。
  - 不考虑导体中电荷的热运动、材料特性、环境温度影响、表面电子发射等。

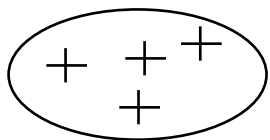
# 静电平衡过程的示例



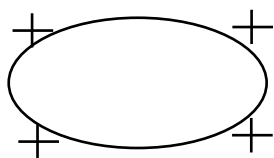
导体上突然加上外电场  $E_0$ , 导体内出现电场...

导体内自由电荷在外电场下移动, 形成表面**感应电荷**, 产生相应的附加电场  $E'$ ...

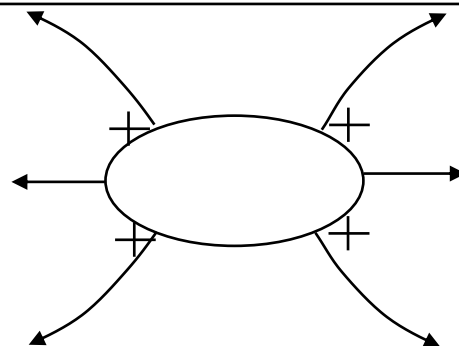
在导体内, 外电场  $E_0$  和附加电场  $E'$  相抵消, 达到静电平衡



**孤立**导体内突然出现宏观的净的电荷分布。导体内部出现电场



同号电荷直间相互排斥, 电荷分布到表面上...



由于导体内自由电荷的移动, 最终体系达到平衡, 使得导体内部场强为零

# 导体的静电平衡

- 静电平衡的实现过程（静电感应，感应起电）：
  - 导体内部出现静电场，导体自由电荷移动并重新分布，导致宏观电荷分布的改变，宏观电荷形成附加电场，附加电场与外电场抵消，自由电荷停止移动。
- 静电平衡：(1)宏观电荷的分布不随时间变化  
(2)没有宏观的电荷运动，达到平衡态
- 导体的静电平衡的充要条件是导体内各处总电场强度为零。

$$\vec{E}_{\text{内总}} = 0$$

- 必要性：反证法，若场强不为0，因为导体内处处有自由电荷，必有大量自由电荷在电场作用下定向运动，从而形成宏观的电荷运动。
- \*充分性的证明需要唯一性定理（见赵凯华《电磁学》高等教育出版社2003，P.44）

# 静电平衡导体的电势和电荷

- 静电平衡的导体是等势体，导体表面是等势面。

- 导体中任意取两点AB，两点间电势差为：

$$\int_A^B \vec{E}_{\text{内}} \cdot d\vec{l} = \int_A^B 0 \cdot d\vec{l} = 0$$

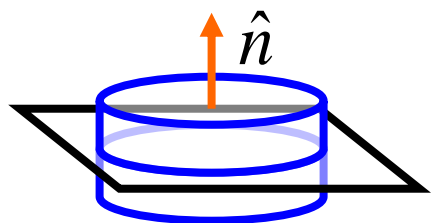
- 等价于“导体内电场等于0”，是静电平衡充要条件的另一种表述

- 静电平衡的导体内部宏观电荷体密度为零，宏观电荷只能分布在导体表面上。

- 根据电场散度定理和静电平衡条件知导体内部电荷体密度为零，则其所带宏观电荷只能是分布在导体表面，成为面电荷。

# 静电平衡导体表面外电场 (1)

- 静电平衡导体表面外附近空间的场强与导体表面垂直，场强的大小与该处导体表面的电荷面密度成正比。



$\hat{n}$ 是导体表面外法线方向

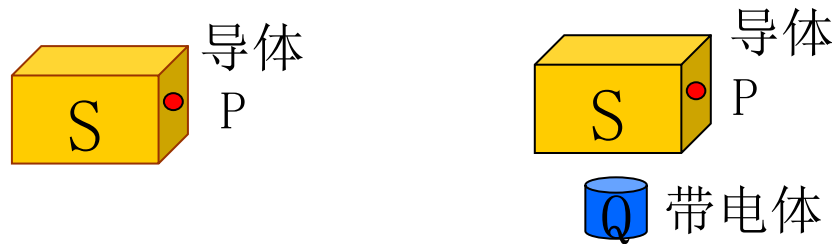
$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{n}$$

- 导体表面是等势面，则表面处电场必垂直表面，因电场垂直等势面。
- 如图导体表面面元，作垂直面元的小扁圆柱面为高斯面，上下底面分别在导体外侧和内侧，面积为 $\Delta S$ ；
- 下底面在导体内，故面上场强为零；
- 用高斯定理，并令圆柱的高度 $h$ 趋于零：

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \sum \frac{q_i}{\epsilon_0} \xrightarrow{\text{柱高度趋于零}} E\Delta s = \frac{\sigma\Delta s}{\epsilon_0} \quad \text{所以 } \vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{n}$$

# 静电平衡导体表面外电场 (2)

- 在如图所示两种情况下，导体内和表面处的电场强度有何不同？

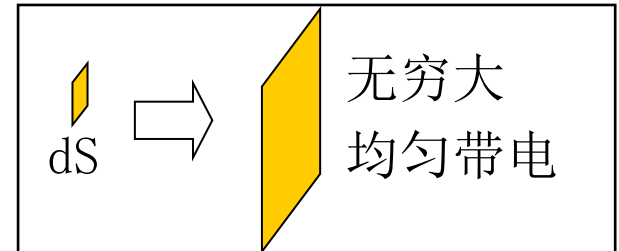
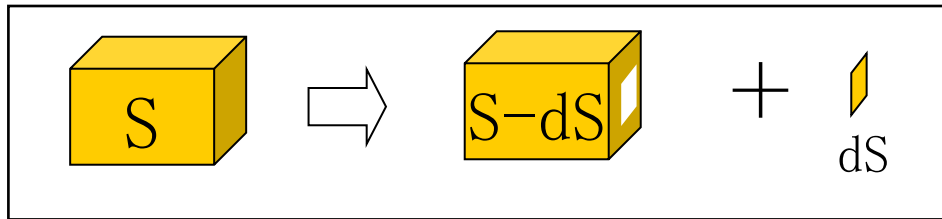


- 两种情况下，导体内场强均为零。
- 两种情况下，导体表面P点外的场强都和P点面电荷密度成正比； $\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{n}$  都是对的。
- 只是两种情况下导体面上P点的面电荷密度不同。 $\sigma_{P1} \neq \sigma_{P2}$



# 静电平衡导体表面外电场 (3)

- 考虑一个孤立静电平衡导体，表面为S：



- 在导体面上取下一片电荷面微元dS，考虑表面附件的电场，可以将面元看做无穷大均匀带电平面，根据叠加原理和静电平衡条件：

$$\begin{array}{c} \boxed{\text{---}} \\ S-dS \end{array} \Rightarrow \frac{\sigma}{2\epsilon_0} + \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \Rightarrow \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{c} \boxed{\text{---}} \\ S \end{array} \Rightarrow \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

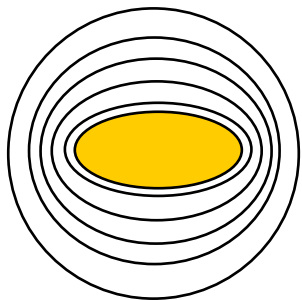
- 面内总场强为零，故： $\vec{E}_{(S-dS)} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{n}$  (在表面处)

- 叠加面内外总场强 
$$\vec{E} = \vec{E}_{(S-dS)} + \vec{E}_{(dS)} = \begin{cases} \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{n}, & \text{(面外)} \\ 0, & \text{(面内)} \end{cases}$$

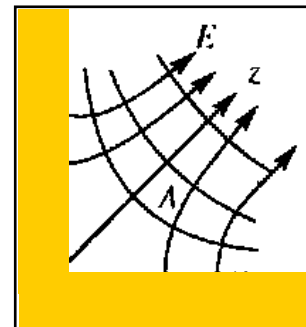
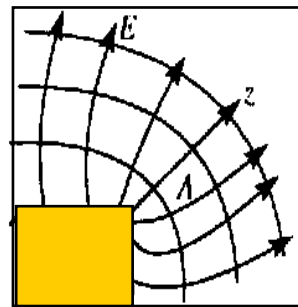
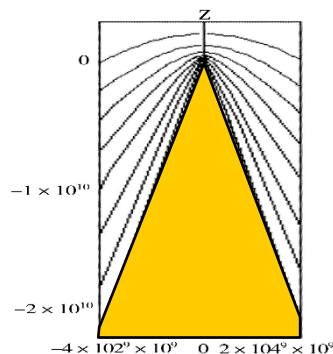
# 导体的尖端处电荷和电场分布特点

- 为简单，讨论孤立的带电导体，即没有外电场情况下带有一定宏观电荷的导体。
- 电荷分布受表面形状影响，尖端突出处附近表面电荷密度和场强大，平坦处次之，下凹处小。
- 定性解释：在较远处看带电导体近似为点电荷，等势面近似为球面；不断趋向导体近处时，由于导体表面是等势面，导体尖端处相邻等势面间的距离会较小，即场强较大，由此可以判断尖端处电荷面密度也较大。

定性解释的示意图



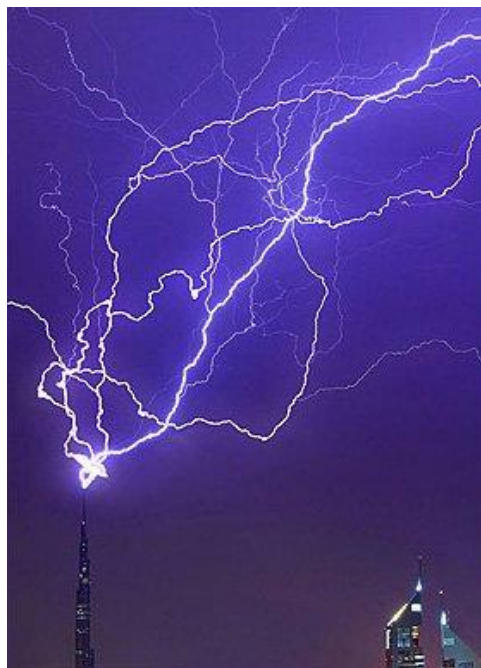
文献中导体的电势电场分布计算结果示例：



# 导体尖端放电示例

- 尖端处场强大，易击穿周围介质出现放电现象，称**尖端放电**。

雷击



2010年1月4日闪电击中世界第一高楼迪拜塔



2008年2月11日，巴西里约热内卢，闪电击中著名地标耶稣基督像

避雷针



# 静电场边值问题唯一性定理

- 问题：导体的电荷面密度如何求？退一步问：这问题有解吗？换言之，确定导体的电荷面密度需要什么条件？
  - 这个问题可以看作是求满足一定边界条件的泊松方程的解，是静电学的基本问题。
  - 有**导体存在时的唯一性定理**：导体的形状、位置确定的前提下，若给定导体的电势或者给定导体的总电荷，则以导体表面为边界的空间中电场分布和导体表面的电荷分布是唯一确定的。(电动力学中利用泊松方程证明)
  - 完整的定理证明和泊松方程的求解方法是《电动力学》课程的静电学部分的主要内容。

# 导体静电平衡问题的求解方法

- 如果满足唯一性定理的条件，则问题只有唯一正确的解：
  - 根据静电平衡条件（电势、电场、电荷分布），
  - 综合运用库仑定律、高斯定理、环路定理、电势等理论，结合**对称性分析**，求解或者猜测导体面电荷分布的情况。
  - 往往需要灵活的解题**技巧**。
- 给定边界条件，求解泊松方程。（《电动力学》课程的内容，需要《数学物理方法》基础）
- 电像法——参见《电动力学》
- 数值计算（非解析解，解决实际问题）

# 例:已知电荷的孤立带电导体球(1)

- 设半径 $R$ 的孤立导体球带电 $Q$ ，求空间电势分布。
  - 假设（或根据对称性知）电荷均匀分布在球表面。根据高斯定理计算电场强度，并计算电势分布。

$$r > R, \quad U = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad r < R, \quad U = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

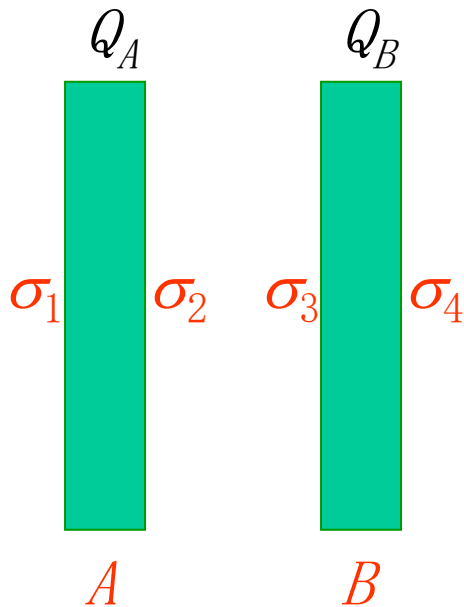
- 在假设条件下得到的解满足导体平衡的充要条件：导体为等势体，表面为等势面，所以是一个可能的解。
- 因为导体总电量给定，符合唯一性定理的要求，所以以上的解就是唯一的解。

## 例:已知电势的孤立导体球(2)

- 孤立导体球电势为 $U_0$ ，求球上电荷分布。
  - 假设（或根据对称性知）电荷均匀分布在表面，根据高斯定理计算电场强度，并计算电势分布。
$$U_0 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} \quad Q = 4\pi\epsilon_0 R U_0$$
  - 考虑导体平衡的充要条件：导体为等势体，表面为等势面。所假设的解满足平衡条件，所以是一个可能的解。
  - 因为导体电势给定，符合唯一性定理的要求，所以以上就是唯一的解。

# 例：平行导体平板

- 两块导体平板A和B，面积为 $S$ ，互相平行正对放置，分别带总电量 $Q_A$ 和 $Q_B$ ，忽略边缘效应，求平板各表面的电荷密度？

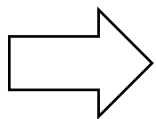


$$\begin{aligned}\sigma_1 S + \sigma_2 S &= Q_A \\ \sigma_3 S + \sigma_4 S &= Q_B\end{aligned}$$

考虑四个无限大带电面的场强叠加：

$$\frac{\sigma_1}{2\epsilon_0} - \frac{\sigma_2}{2\epsilon_0} - \frac{\sigma_3}{2\epsilon_0} - \frac{\sigma_4}{2\epsilon_0} = 0 \quad (E_{A内})$$

$$\frac{\sigma_1}{2\epsilon_0} + \frac{\sigma_2}{2\epsilon_0} + \frac{\sigma_3}{2\epsilon_0} - \frac{\sigma_4}{2\epsilon_0} = 0 \quad (E_{B内})$$

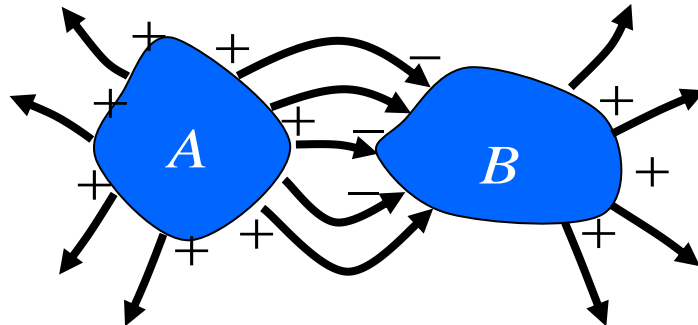


$$\sigma_1 = \sigma_4 = \frac{Q_A + Q_B}{2S} \quad \sigma_2 = -\sigma_3 = \frac{Q_A - Q_B}{2S}$$



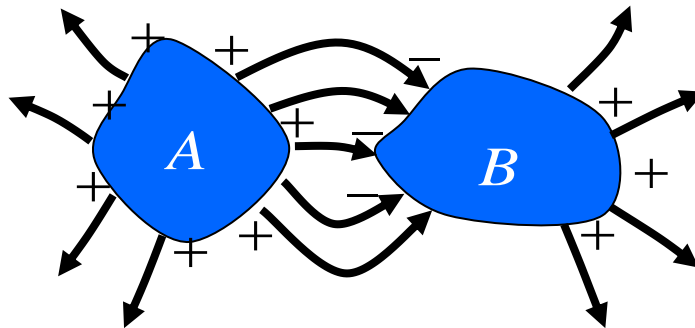
# 例：相邻的导体（1）

- 一个带总电量为正电的导体A，在总电量为零的导体B附近。请证明B上同时出现正、负电荷分布，靠近A的一端分布负电，远离A的一端分布正电。证明：
  - 若B上无电荷分布，则B体内有A产生的电场，违反静电平衡原理，所以B上有电荷。又因为B的总电量为零，故B上必同时存在正负两种电荷。
  - 若在B上靠近A的一端分布正电，远离A的一端为负电，则在导体内产生的场强和A产生的场强方向相同，两者叠加之和必非零。故靠近A的一端带负电。



## 例：相邻的导体（2）

- 一个带正电的导体A，放到总电量为零的导体B附近。请问导体B的电势发生什么变化？
  - A不存在时，B的电势为零。
  - A存在时，导体上的电力线如图所示。
    - 因为：B上正电荷发出的电力线的终点和B上负电荷的电力线的起点不可能重合，也不可能为同一等势体（导体A或无穷远），否则违反导体等势的条件；这样，唯一的可能就是，B的负电荷电力线只能发源于A的正电荷，B的正电荷的电力线只能终于无穷远，
  - 沿电力线向无穷远进行场强积分可证明B的电势大于零。



# 接地

- 理想的接地是指：
  - 用细导线连接到一个足够大足够远的导体。
  - 大导体距离足够远，可以作为零电势点。大导体足够大可以容纳足够多电荷，也可以提供足够多的电荷。细导线足够细，只有导电作用，不考虑其上的感应电荷。
- 接地：
  - 实践中常以大地或仪器外壳为零电势点，称为接地。
- 电路中的接地
  - 线路电压的参考点。

# 例：接地导体

- 一个孤立导体，带电量 $Q$ ，接地后，导体的电势？带的电量？
  - 接地后电势为零，因为通过导线连接已经和“地”成为等势体了；带的电量为零(用唯一性定理证明；用电力线性质证明)。
- 两个临近的导体A和B各自电量均为正，将B接地后，B的电势？B带电吗？什么电荷？
  - B电势为零，带电，带负电（借助电力线证明）。

# (腔内无电荷)导体空腔问题

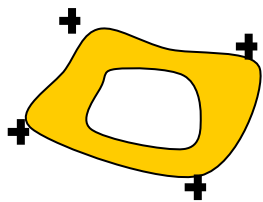
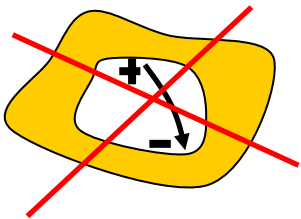
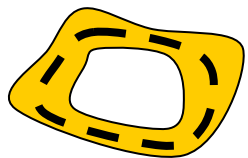
- 空腔内表面无电荷，空腔内场强为零；导体的电荷只可能分布在外表面上。

– 设导体总带电量或电势已知。证明如下：

- 在导体内作包围空腔的高斯面。因导体内场强为0，故通过高斯面电通量为0，所以，腔内(含内表面)总电量为0，可知内表面总电量为0。

- 内表面处处电荷密度为0：形象的解释：假定内表面存在正负电荷，使总电量为0，则必有电场线存在于腔内，此电场线只能起于正电荷，终于负电荷，与导体是等势体的性质矛盾。

- 若内表面电荷面密度处处为0，外表面的面密度等于相同条件下把导体空腔填满导体后的表面电荷分布，此种分布满足导体平衡条件，根据唯一性定理，此解是唯一解，故腔内场强为零。



# (腔内有电荷)导体空腔问题

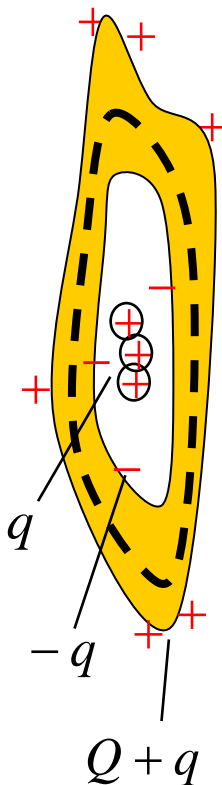
- 导体空腔内表面电量和腔内包围的电量的代数和为0；腔内空间场强以及腔内表面电荷分布，由腔内包围的电荷分布及腔内表面形状决定。

- 设导体的带电量 $Q$ ,腔内包围的电荷为 $q$ ,证明如下:
- 由高斯定理易证内表面电量和腔内电量代数和为0则内表面电量为 $-q$ , 推知外表面的电量为:  $Q+q$ ,

- 外表面以外空间符合唯一性定理, 存在唯一解。此解等同于同样外表面条件下, 用导体材料将空腔填满后的解。推知, 外表面及外空间的电荷在腔内空间的总场强为零, 简记为: 腔外对腔内无影响。

- 同理, 腔内空间电场存在唯一解, 且内表面及腔内电荷在腔外空间的合场强为0; 由于内表面的电量决定于腔内电量, 所以腔内场强以及内表面电荷分布, 由腔内电荷分布和内表面形状决定。

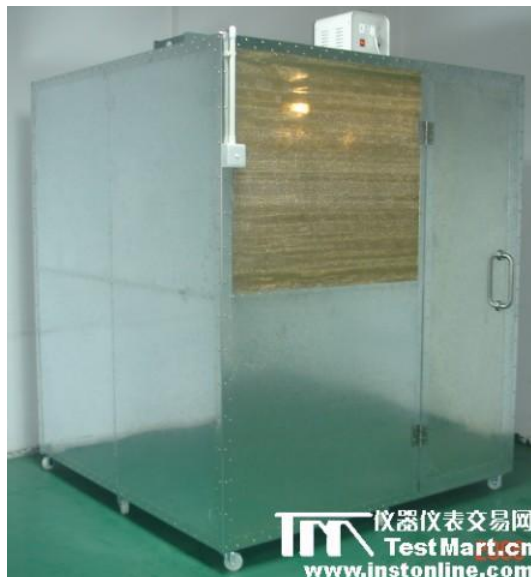
- 导体空腔的这种效果就称**静电屏蔽**。



# 电磁屏蔽应用



2009年10月27日，南方电网公司成功实施世界上首次800千伏直流输电线路带电作业...与国内厂家合作，生产制造出特高压带电作业专用的**屏蔽服**



电磁**屏蔽室**，保护测试设备不受外界电磁干扰



金属网**屏蔽电缆**，防止外界电磁场对电缆信号的干扰



静电**屏蔽袋**，存放电子产品，防静电破坏

# 电 容

教材1 : 2.3



# 孤立导体的电容

- 静电平衡下的导体为等势体。
- 理想情况下，孤立导体(无外场)的电荷分布以及自身的电势随其带电量按比例变化（考虑唯一性定理可以证明）
- 可以定义孤立导体的电容 $C$ : 
$$C = \frac{Q}{U}$$
  - 电容的字面意思即容纳电荷的能力。电容大即为可以带有大量电荷同时保持较低的电势；电容小即为带有少量电荷即达到较高电势。
  - 孤立导体的电容等于使导体升高单位电势所需电量。
  - 电容的单位：法[拉] (F); 微法( $\mu F$ ); 纳发(nf); 皮法(pF)  $1F = 10^6 \mu F = 10^9 nf = 10^{12} pF$
  - 孤立导体的电容取决于导体的形状、大小等几何量。

# 例：孤立导体球的电容

- 设导体球半径为R

$$U = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} \quad C = \frac{Q}{U} = 4\pi\epsilon_0 R$$

- 地球的半径为 $6.4 \times 10^6 \text{m}$ ，求其电容：

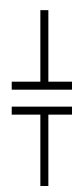
$$C = 4\pi\epsilon_0 R \approx 700 \mu\text{F}$$

– 地球的电容不算大

对比：优质350W电脑  
电源采用 $1000 \mu\text{F}$ 的平  
滑滤波大电容：



# 电容器的电容



- 由两个彼此绝缘的导体构成，简称电容
- 工作状态的电容器指连接在电路中的二端器件。
- 电容器的电容，是电容器极板上的电荷的量与电容器两极板间电势差的比。这里假定，在理想条件下电容器两极板上电量的大小相等，符号相反。

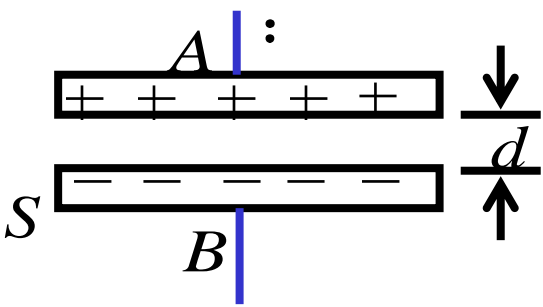
$$C = \frac{|Q|}{|U_A - U_B|}$$

- 孤立导体的电容可以看做是孤立导体和无限远处零电势面组成的电容器的电容。
- 电容的串联和并联请参考教材内容。

并联：  $C = C_1 + C_2$       串联：  $\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$

# 平行板电容器

- 实际的电容器存在边缘的电场泄漏问题，称**边缘效应**。在实际的分析中，当极板板的间距和板的大小相比小很多时，可以忽略边缘效应。
- 理想模型：假设面板上电荷均匀分布。
  - 两板间的电势差采用无限大均匀带电平面模型计算


$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{Q}{S\epsilon_0}$$
$$U_{AB} = Ed = \frac{Qd}{\epsilon_0 S}$$
$$C = \frac{Q}{U} = \frac{Q}{\frac{Q}{S\epsilon_0 d}} = \epsilon_0 \frac{S}{d}$$

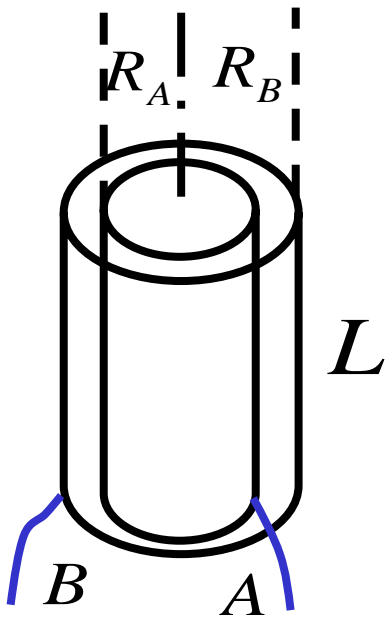
可见，电容器的面积越大，间距越小，则电容器的电容越大

设  $S = 1\text{cm}^2$ ,  $d = 0.1\text{mm}$

$$C = \epsilon_0 \frac{S}{d} = 8.9 \times 10^{-12} \text{F} = 8.9 \text{pF}$$

# 圆柱形电容器

- 长 $L$ ，半径为 $R_A$ 、 $R_B$ 的同轴导体薄圆柱面构成
  - 假设电荷均匀分布，极板带电量大小为 $Q$



$$E = \frac{Q}{2\pi r L \epsilon_0}, \quad (R_A \leq r \leq R_B)$$

$$U_{AB} = \int_A^B \vec{E} d\vec{l} = \frac{Q}{2\pi L \epsilon_0} \ln \frac{R_B}{R_A}$$

$$C = \frac{Q}{U_{AB}} = \frac{2\pi \epsilon_0 L}{\ln(R_B/R_A)}$$

$$C = \frac{2\pi \epsilon_0 L}{\ln(1 + d/R_A)} \approx \frac{2\pi \epsilon_0 L}{d/R_A} = \epsilon_0 \frac{2\pi R_A L}{d} = \epsilon_0 \frac{S}{d}$$

当 $R_A$ 、 $R_B$ 相差很小，  
且 $R_B - R_A = d \ll R_A$

# 分布电容

- 实际上，任意的带电导体之间都存在互相的电场力作用，除非进行了严格的屏蔽；因此可以看做它们之间都存在电容效应。这种电容叫分布电容。
  - 一个估算两条载流导线之间分布电容的例子：

教材1：P.61

# 电容器的串并联

- 教材1： P62
- 可自行阅读

# 电介质的极化

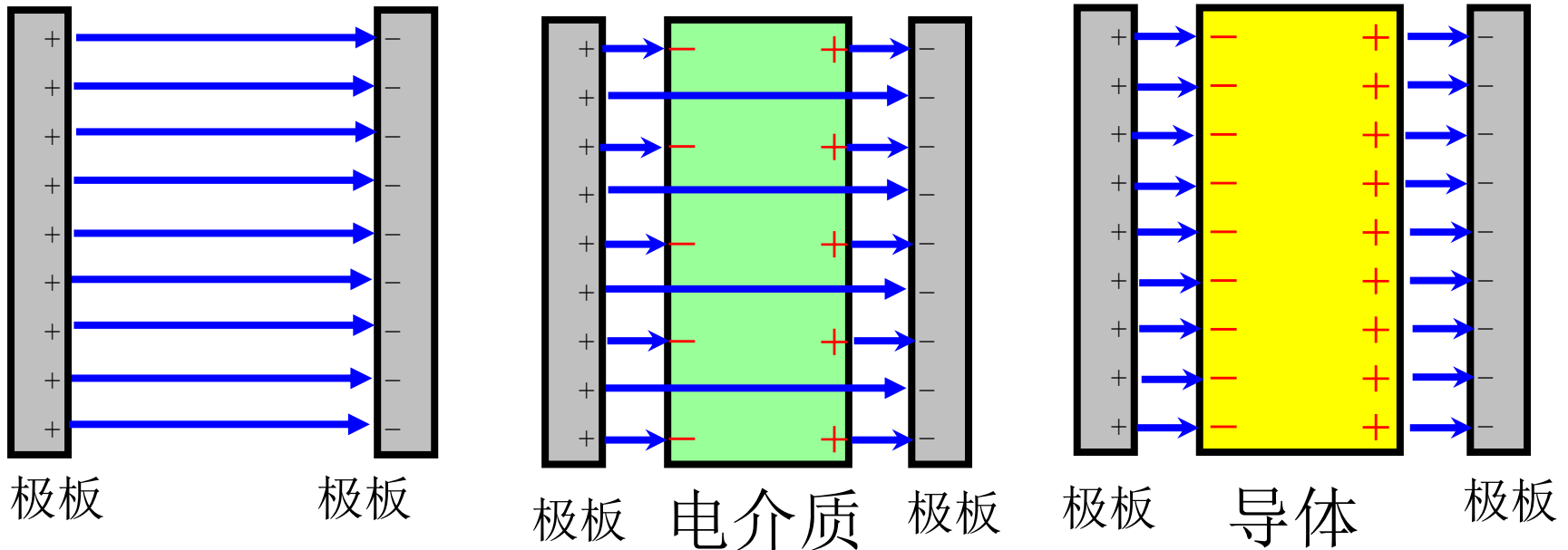


# 电介质的介电效应

- 电介质材料通常就是指绝缘材料。
  - 一般的绝缘材料电导率 $<10^{-10}(\Omega\cdot\text{cm})^{-1}$ ;
  - 一般的导体电导率在 $10^4\sim 10^6(\Omega\cdot\text{cm})^{-1}$
- 有介质填充的电容
  - 平板电容器中插入绝缘物质板,在极板电荷不变情况下极板间电压变小,即电容器的电容容量变大,这就是电介质的**介电效应**。
    - 实验研究表明电介质的介电效应是由于在电场的作用下电介质上出现了宏观电荷分布。
- 实验表明, 电容器 $C_0$ , 极板间充满一种电介质后, 电容器的电容值变为 $\epsilon_r C_0$ , 其中 $\epsilon_r$ 是由电介质材料决定的一个常数, 称为该种材料的介电常数 (又称相对电容率) 。

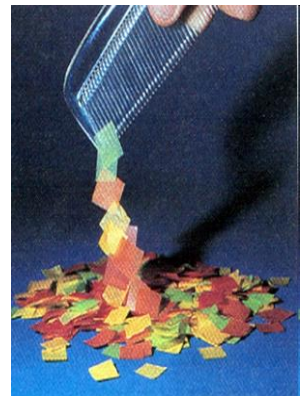
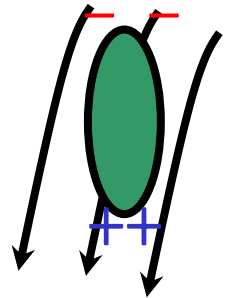
# 电介质介电效应的解释

- 介电性能的定性解释
  - 电容极板间的电介质上出现宏观电荷。
  - 电容极板间的电场线在电介质的宏观电荷上“中断”，减小了两极板间的电势差。
- 保持极板上电荷量不变，对比下面三种情况



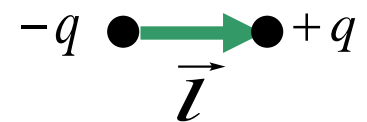
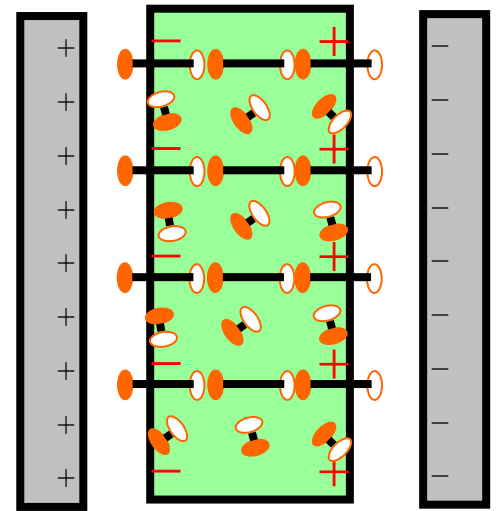
# 电介质的极化现象(1)

- **极化**：电介质在外电场中出现宏观电荷分布的现象称电介质的极化
- 极化电荷：电介质由于极化出现的宏观电荷。
  - 注意：极化电荷不能在电场作用下自由运动。因此又称“束缚电荷”。
- 极化现象的微观解释：
  - 一般情况下电介质所带的总的净电荷为零，一般也没有自由移动电荷。
  - 原子或分子整体为电中性，但是可以在其一端显示负电性，而另一端显示为正电性，有微观的“电荷分布”。
  - 大量原子的微观“电荷分布”的叠加效果，就可能出现宏观电荷分布的现象。



# 极化强度矢量

- 电介质极化的模型
  - 原子和分子的尺度很小，可近似用电偶极子模型描述其微观电荷。
- 电介质单位体积内**电偶极矩**的矢量和称**极化强度**矢量。单位是库仑/米<sup>2</sup>(C.m<sup>-2</sup>)
  - 以定量描述电介质的极化状态
- 对于未极化的电介质，在平衡状态下，任意宏观小体积元内平均极化强度为零。
  - 无极分子未受极化，或者有极分子随机取向排列
- **均匀极化**:电介质内部各点极化强度相等的状态



$$\vec{p} = q \cdot \vec{l}$$

$$\vec{P} = \frac{\sum \vec{p}}{\Delta V}$$

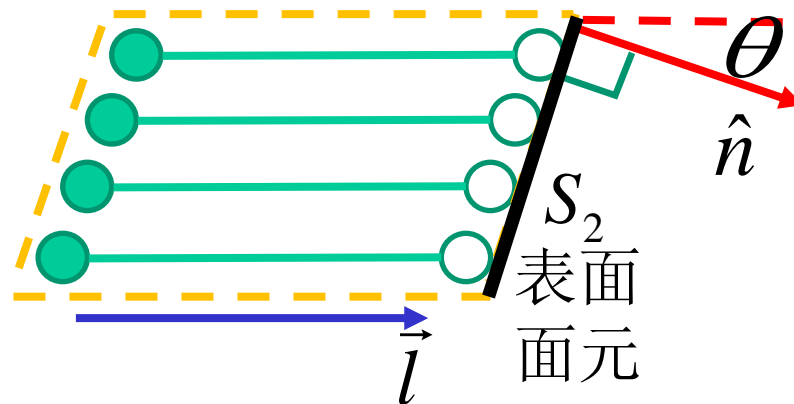
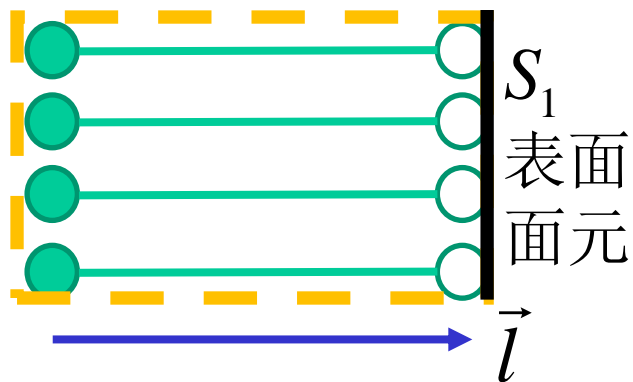
(注：大写字母 $P$ 表示极化强度，小写字母 $p$ 表示电偶极矩)

# 极化面电荷

电介质表面上的极化面电荷的面密度等于极化强度在外法向的投影

$$\sigma_p = \vec{P} \cdot \hat{n}$$

证明：



$$\begin{cases} \vec{P}V = \sum q\vec{l} = \sigma_p S_1 \cdot \vec{l} \\ V = S_1 \cdot l \end{cases} \Rightarrow \sigma_p = P$$

$$\begin{cases} \vec{P}V = \sum q\vec{l} = \sigma_p S_2 \cdot \vec{l} \\ V = S_2 \cos \theta \cdot l \end{cases} \Rightarrow \sigma_p = P \cos \theta$$

# 电介质的极化规律

- 极化现象存在时的总电场是外电场和介质极化电荷的电场的叠加： $\vec{E}_{\text{总}} = \vec{E}_{\text{外}} + \vec{E}_p$ 
  - 一般的极化电荷的电场和外电场方向大致相反，以抵消外电场的极化作用，故又常称其为**退极化场**。

- 极化电荷的电场对电介质自身也有作用,影响其极化状态。 总电场  $\longleftrightarrow$  极化

- 实验表明**，在大部分电介质中，当场强不太大，达到稳衡状态时，极化强度可以表示为：

$$\vec{P} = \chi_e \varepsilon_0 \vec{E}_{\text{总}} \quad \text{-----} \rightarrow \text{注意：是总电场！}$$

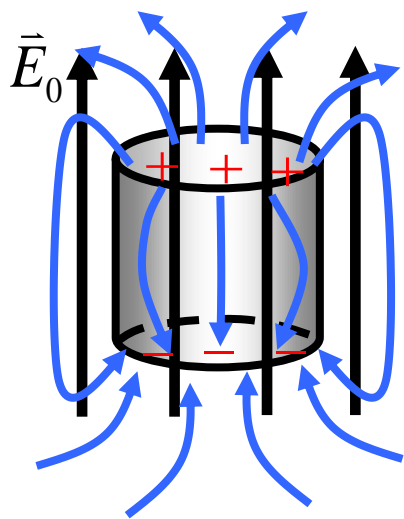
- $\chi_e$ 称**极化率**，是无量纲数，且 $\chi_e > 0$ 
  - 极化率由材料性质决定

# 电介质的分类

- 线性、非线性电介质
  - 线性： $\vec{P}$ 和 $\vec{E}$ 成线性关系
  - 非线性： $\vec{P}$ 和 $\vec{E}$ 有非线性函数关系
- 各向同性、各向异性电介质
  - 各向同性：各个方向上极化率相同， $\vec{P}$ 和 $\vec{E}$ 方向相同。
  - 各向异性：极化率随方向变化（比如某些单晶材料，如石英等），用张量表示 $\vec{P}$ ； $\vec{P}$ 和 $\vec{E}$ 方向不相同
- 均匀、非均匀电介质
  - 均匀：体内各处材料性质相同，体内极化率各处相同
  - 非均匀：各处材料性质不同，极化率随位置变化。
- 一般的，在本课程的讨论中，若非特别说明，电介质都是均匀、线性、各向同性的。

# 关于有电介质存在的静电场问题

- 典型问题：已知外电场，求极化电荷等。
  - 即使是对均匀各向同性线性电介质，虽然极化强度 $\vec{P}$ 和总电场强度有简单的正比关系，但仅从外电场出发，严格求得解析解也是困难的。难点在于无法根据外场直接确定极化强度是如何分布的。

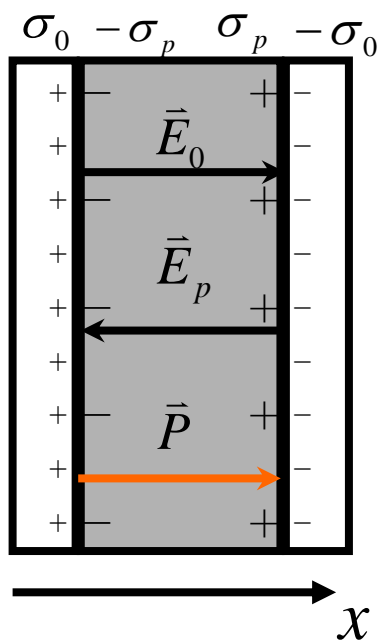


比如，如图，在均匀外场 $E_0$ 中的电介质圆柱。假设它在外场下均匀极化，则两端面上有均匀的极化电荷。可是两端面上如果存在均匀的极化电荷，它们会产生不均匀的电场，如图示，则总场强也不均匀，所以极化不可能是均匀的。



# 电容率

角标0和p分别表示  
自由电荷和极化电荷



如图所示充满电介质的平板电容器，利用极化理论来解释电容增大的现象。忽略边缘效应，先假设均匀极化，且P的方向和外电场同向。

$$\left. \begin{aligned} E_p &= -\frac{\sigma_p}{\epsilon_0} \\ \sigma_p &= P \end{aligned} \right\} \left. \begin{aligned} E_p &= -\frac{P}{\epsilon_0} \\ P &= \chi_e \epsilon_0 E \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} E &= \frac{1}{\epsilon_r} E_0 \\ U &= \frac{1}{\epsilon_r} U_0 \end{aligned} \right\} \text{记 } \epsilon_r = 1 + \chi_e \quad \epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$$

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_p$$



$$C = \epsilon_r C_0$$

$$C = \epsilon_r \epsilon_0 \frac{S}{d} = \epsilon \frac{S}{d}$$

验证知假设成立。计算可见电容变大，与前述实验现象一致。  
注意：导体表面的自由电荷与电介质表面的极化电荷不能中和

$$\epsilon_r = 1 + \chi_e$$

$\epsilon_r$ 称相对电容率，是  
大于1的无量纲数

$$\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$$

$\epsilon$ 称电容率

# 介质常数、介电强度

- **介电常数**: 电介质的介电性能用相对电容率 $\epsilon_r$ 表示, 又称介电常数, 或相对介电常数, 也可用  $k$  表示,  $\epsilon_0$  又称真空介电常数
- 击穿场强又称介电强度

电介质	介电常数	介电强度 (kV/mm)
空气	1.0005	3
水	78	—
纸	3.5	14
陶瓷	5.7~6.8	6~20
云母	3.7~7.5	80~200
TiO <sub>2</sub>	100	6
钛酸钡	1000~10000	3
SiO <sub>2</sub>	3.9	1000

# 电介质的击穿

- 理想电介质中没有自由电荷，但是实际的电介质中总是存在一定的自由电荷。可以在电场作用下产生微弱的电流。
- 加在电介质上的电场强度足够大时，电介质中的电流迅速增加，其绝缘性能被破坏，甚至电介质可能被烧毁。这叫电介质的击穿。
  - 这是因为电介质中的分子被电离，产生大量自由电荷，故电介质中的电流急速增加。
- 在本章，一般不考虑其自由电荷和击穿效应。



# 电介质中的电场理论

# 极化电荷的高斯定理

- 考虑极化电荷存在的高斯定理

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} (Q_{0\text{内}} + Q_{p\text{内}})$$

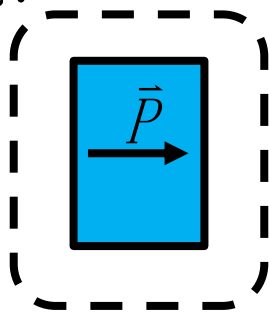
总电场强度

自由电荷

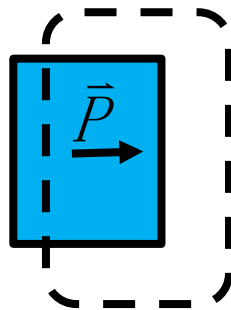
极化电荷

- 可以证明:  $Q_{p\text{内}} = -\oiint_S \vec{P} \cdot d\vec{S}$

证明:

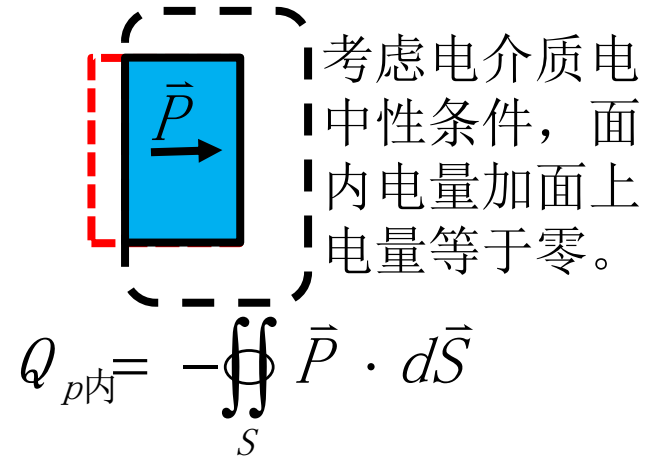


$$Q_{p\text{内}} = 0$$



$$Q_{p\text{内}} = ?$$

⇒  
切掉面  
外部分



# 电位移矢量

高斯定理:  $\oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} (Q_{0\text{内}} + Q_{p\text{内}})$

考虑:  $Q_{p\text{内}} = -\oiint_S \vec{P} \cdot d\vec{S}$  有:  $\oiint (\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) \cdot d\vec{S} = Q_0$

定义:  $\boxed{\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}}$ ,  $\vec{D}$  称 **电位移矢量**

**一般的:**  $\vec{P} = \varepsilon_0 \chi_e \vec{E} \Rightarrow \boxed{\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E} = \varepsilon \vec{E}} \quad \vec{D} = \frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_r - 1} \vec{P}$

- 电位移矢量没有十分确切的物理意义! 主要是为了处理问题方便, 描述简洁。
- 一般起于正的自由电荷, 终于负的自由电荷

# 介质中电位移矢量的规律

- 高斯定理

$$\oiint \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q_{0\text{内}}$$

- \*散度定理

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{D} = \rho_0}$$

– 注意等式右端只有自由电荷，没有极化电荷

- 环量：

– 极化电荷的电场的环量为零： $\oint_L \vec{E}_p \cdot d\vec{l} = 0$

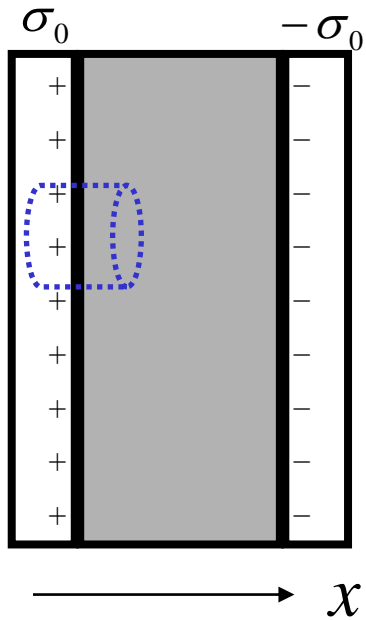
– 一般不考虑 $\vec{D}$ 的环量。

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \quad \xrightarrow{\text{对线性介质}} \quad \oint_L \frac{\vec{D}}{\epsilon_0 \epsilon_r} \cdot d\vec{l} = 0$$

当存在非均匀电介质的情况时或者存在不同电介质的界面时，介电常数不能从积分号中提出来。电位移矢量的可以有非零的环量。

# 例：充满介质的平行板电容器

- 如图所示，平行板电容器中充满了电介质。忽略边缘效应。讨论电容器的电容



- 作如图的圆柱高斯面，上下底面为 $S$ 。
- 可以确定，在导体内： $\vec{D}=0$ ;
- 在介质体内：即使忽略边缘效应，也需要假设 $\vec{D}$ 垂直边界（或将极板看做无限大，根据对称性确定 $\vec{D}$ 垂直边界）。
- 根据 $D$ 的高斯定理： $\oiint \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q_0$   
 $\implies D = \sigma_0$  (自由电荷的面密度)

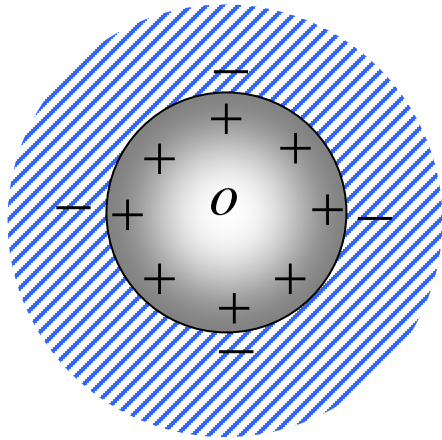
$$\text{考虑 } \vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} \quad \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0 \epsilon_r} \vec{D} = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0 \epsilon_r} \hat{i} = \frac{\vec{E}_0}{\epsilon_r}$$

$$U = \frac{\sigma_0 d}{\epsilon_r \epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_r} U_0 \quad C = \frac{Q_0}{U} = \epsilon_r \epsilon_0 \frac{S}{d} = \epsilon_r C_0$$



# 例：无限大电介质中带电球面

- 在无限大电介质(介电常数为 $\epsilon_r$ )中有一均匀带电 $Q>0$ 的空心球面,半径 $R$ 。求空间任一点场强。



- 球外电介质，只在与球相临的界面有极化面电荷，无穷远处的极化面电荷可不考虑。
- 根据对称性，极化面电荷应呈球对称分布。则电位移矢量也呈球对称。
- 取球形高斯面，应用高斯定理易知：

$$\vec{D} = 0 \quad r < R \quad \Longrightarrow \quad \vec{E} = 0 \quad r < R$$

$$\vec{D} = \frac{Q}{4\pi r^2} \hat{r} \quad r > R \quad \Longrightarrow \quad \vec{E} = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_r r^2} \hat{r} \quad r > R$$

(注意：介质是非均匀极化！)

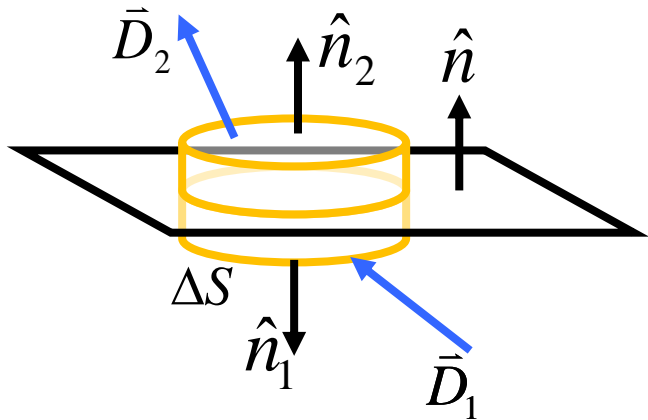
# 介电常数和电场

- **不能**简单的认为，用  $\varepsilon_r \varepsilon_0$  代替  $\varepsilon_0$ ，或者将原有的结果除以  $\varepsilon_r$  就可以仿照以前的结果，解决所有介质存在下的静电场的问题。
  - 有情况下的确有这个规律，比如，无限大介质包围带电球以及无限大导体板间电介质。
  - 但也有其他情况，如：均匀场中的介质柱
  - 均匀场中判断标准：“在任意两等势面间充满一种均匀各向同性的线性介质”则

$$\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_r} \vec{E}_0$$

# 电介质的边界条件(1)

设有电介质1和2界面如图示，取垂直界面的扁盒，盒上下面( $\Delta S$ )平行于界面，盒的高度( $h$ )足够小，则面上的自由电荷：



根据  $\oiint \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q_0$       $\sigma_0 = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\lim_{h \rightarrow 0} Q_0}{\Delta S}$

$$\sigma_0 = \vec{D}_2 \cdot \hat{n}_2 + \vec{D}_1 \cdot \hat{n}_1 = (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) \cdot \hat{n}$$

注意  $\hat{n}$  方向的规定！

一般情况下，界面处自由电荷为0的情况下，可得：

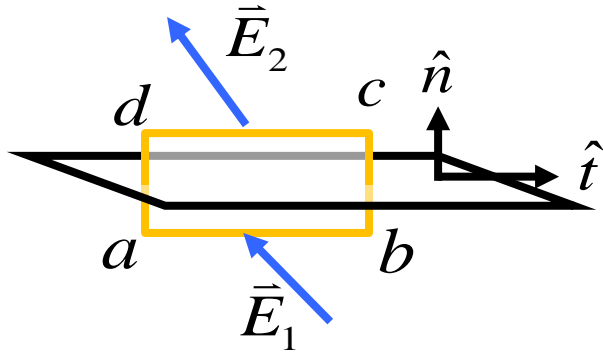
$$\boxed{D_{1n} = D_{2n}}$$

## 电介质的边界条件(2)

- 设有电介质1和2的界面，如图示，取垂直界面小扁矩形回路，且ab和cd平行界面；

$$|ab|=|cd|=l, |ad|=|bc|=h;$$

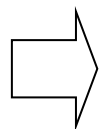
沿abcd积分，应用 $\vec{E}$ 的环路定理



$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} \stackrel{h \rightarrow 0}{=} \vec{E}_1 \cdot l\hat{t} + \vec{E}_2 \cdot l(-\hat{t}) = (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) \cdot l\hat{t}$$

$$(\vec{E}_1 \cdot \hat{t} - \vec{E}_2 \cdot \hat{t})l = 0 \quad (E_{1t} - E_{2t})l = 0$$

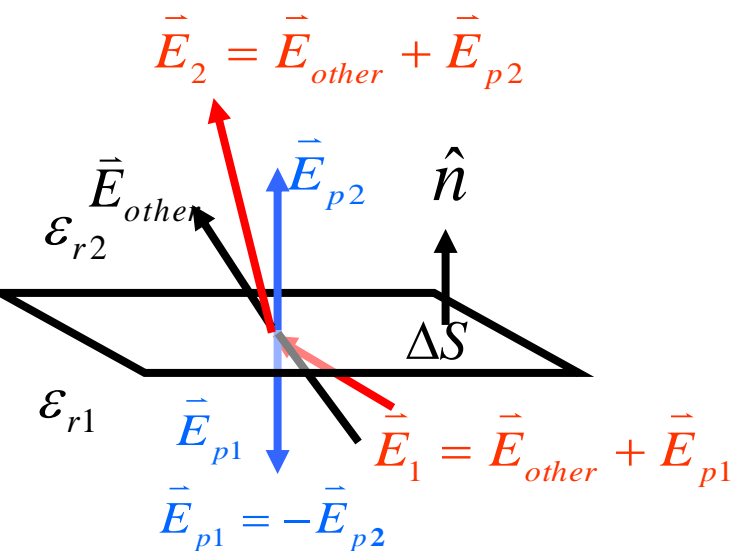
- 这里讨论的切向是任意选取的切向



$$\boxed{E_{1t} = E_{2t}}$$

# 介质边界条件的物理图像

- 如图示，在介质1,2的边界处取小面元 $\Delta S$ ，考虑面元上没有自由电荷的情况，即只考虑面元上的极化电荷。



！注意，极化电荷的电场方向也可能和图中表示的相反，这取决于界面极化电荷的正负

因面元足够小， $\Delta S$ 的极化面电荷在面元附近产生的电场为无限大均匀面电荷的场如图所示 $\vec{E}_p$ 。其他电场为 $\vec{E}_{other}$ ，在界面两侧连续。这里的 $\vec{E}_{other}$ 指自由电荷和面元 $\Delta S$ 以外其他极化电荷的电场。则显然合场强在界面处突变：合场强法线方向不连续，原因在于 $\Delta S$ 的极化电荷在面的两侧的电场的法线分量方向相反；合场强切向分量连续，因为， $\Delta S$ 的极化面电荷电场的切向分量为零。

# 静电能和电场能

- 1. 电荷在外电场中的静电势能
- 2. 带电体系统的静电能
- 3. 电场能

# 电荷在外电场中的静电势能

- 电荷在外电场中的静电势能定义为电荷保持形状不变移动到**静电势能零点**，电荷受到的电场力所做的功。

$$W = qU$$

注：U是除去该电荷后外场在该点的电势

- 正电荷在电势高处静电势能高
- 负电荷在电势高处静电势能低
- 单位：焦耳(J), 另一单位是电子伏（eV）  
 $1\text{eV} = 1.602 \times 10^{-19}\text{J}$ ：即基本电荷在通过1V电势差的空间后静电力做功的大小。

# 带电体系统的静电能

- **带电体系统的静电能**，定义为在没有外电场的情况下，各带电体都分解为电荷微元并相互无限远离的过程中所有电荷微元受到的静电场力做的功之和。
  - 设电荷无限互相远离的状态下静电能为零。
  - 与分离的过程无关，因为电场力是保守力。
  - 假设分离过程是理想化的，没有电磁辐射。



# 点电荷体系的静电能(1)

- 两个点电荷 $q_1$ 和 $q_2$ ，相距 $r$ ，其体系的静电能：

方法1：  $q_2$ 不动， $q_1$ 无限远离，静电力做功是

$$W = q_1 U_1 - q_1 U_\infty = q_1 U_1 = q_1 \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (U_1 \text{是除去 } q_1 \text{ 后其所在位置的电势})$$

方法2：  $q_1$ 不动， $q_2$ 无限远离，静电力做功是

$$W = q_2 U_2 - q_2 U_\infty = q_2 U_2 = q_2 \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (U_2 \text{是除去 } q_2 \text{ 后其所在位置的电势})$$

- 两种方法的得到结果相同，可以记为：

$$W = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{1}{2} (q_1 U_1 + q_2 U_2) \quad (U_1 \text{和 } U_2 \text{ 含义如上})$$

- 电荷系统的静电能的大小是系统的固有性质，与分离方法无关（注：理想化的）。

# 点电荷体系的静电能(2)

- 多个点电荷组成的体系：
  - 考虑在电荷分离的过程中，任意两个点电荷之间存在的静电能都会释放，因此，点电荷体系的静电能就是所有体系中每一对点电荷间的静电能的总和。

$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{i-1} \frac{q_i q_j}{r_{ij}} \quad (\text{按照两两组合方式进行计算})$$

或者

$$W = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^n \frac{q_i q_j}{r_{ij}} \quad (\text{按照两两排列的方式进行计算})$$

$$\downarrow$$
$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left( q_i \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^n \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_j}{r_{ij}} \right) \Rightarrow \boxed{W = \frac{1}{2} \sum_i q_i U_i} \quad (U_i \text{ 是扣除 } q_i \text{ 后其所在处的电势})$$

# 连续带电体系的静电能(1)

- 由点电荷体系的情况推广得:

体电荷:  $W = \frac{1}{2} \sum \rho_{ei} \Delta V_i U_i \xrightarrow{\Delta V_i \rightarrow 0} \boxed{W = \frac{1}{2} \iiint \rho_e U dV}$

面电荷:  $W = \frac{1}{2} \sum \sigma_{ei} \Delta S_i U_i \xrightarrow{\Delta S_i \rightarrow 0} \boxed{W = \frac{1}{2} \iint \sigma U dS}$

- 这里的U是整个带电体系在某点的电势，计算中不需要扣除该点的电荷微元；
- 上式既适用于单一带电体，也适用于多个带电体。
- 特别的：如果电荷都分布在等势面(体)，则电荷体系的静电能： $\boxed{W = \frac{1}{2} \sum_i Q_i U_i}$  ( $U_i$ 是第*i*个等势面的电势， $Q_i$ 是其上的电量)

# 电容器的储能

- 电容器存储的静电能：

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2}QU_+ + \frac{1}{2}(-Q)U_- \\ &= \frac{1}{2}Q(U_+ - U_-) \end{aligned} \Rightarrow \boxed{W = \frac{1}{2}QU = \frac{1}{2}CU^2}$$

- 可见，一定的电压下，电容器存储的静电能决定于电容器的电容值。
- 电容器不仅可以看作是存储电荷的元件，也可以看做是储存静电能的元件。

# 电场的能量

- 能否设想，静电能存储在电场中？

$$w_e = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$$

$w_e$ ：定义为**电场的能量密度**，  
即单位体积内电场的能量

- 用理想平行板电容器验证：理想电容器的电场束缚于两极板之间，空间的体积为  $Sd$ ，所以总的电场能为：
$$W = w_e V = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 Sd$$

考虑  $E = \frac{Q/S}{\epsilon_0}$  以及  $E = \frac{U}{d}$ ，得到  $W = \frac{1}{2} QU$        $U$  为极板间的电势差

与前面利用电荷体系能量计算结果相同

- 电场能与静电势能不同，它适用于任何电场

# 电介质中的电场能

- 以填充电介质平板电容器为例。

$$W = \frac{1}{2} CU^2 \quad C = \epsilon_r \epsilon_0 \frac{S}{d} \quad U = Ed$$

$$\Rightarrow W = \frac{1}{2} \epsilon_r \epsilon_0 E^2 Sd$$

则单位体积内的能量为：
$$W = \frac{1}{2} \epsilon_r \epsilon_0 E^2 = \frac{1}{2} ED$$

一般的，电介质中的  
电场能量体密度为：

$$w_e = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D}$$

注意：在非线性电介质中  $\vec{E}$  和  $\vec{D}$  的方向不一定相同。

# 电介质中电场能量的意义

$$\frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D} = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \frac{1}{2} \epsilon_0 \vec{E} \cdot \vec{E} + \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{P}$$

- 显然  $\frac{1}{2} \epsilon_0 \vec{E} \cdot \vec{E}$  一定是电场的能量
  - 这里的电场是总电场:  $\vec{E} = \frac{\vec{E}_0}{\epsilon_r}$  (对于平行板电容器)
  - 其中  $\vec{E}_0$  是自由电荷的电场, 所以,  $\frac{1}{2} \epsilon_0 \vec{E} \cdot \vec{E}$  这一项表示的是自由电荷和极化电荷的总的静电能。
- $\frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{P}$  则是和电介质的极化相关的能量, 表示的是建立外场的过程中, 外力作的功转化为宏观电荷的电场能之外的部分。

# 电流、电源、电阻、电路

教材1：第3章



电流

# 电 流

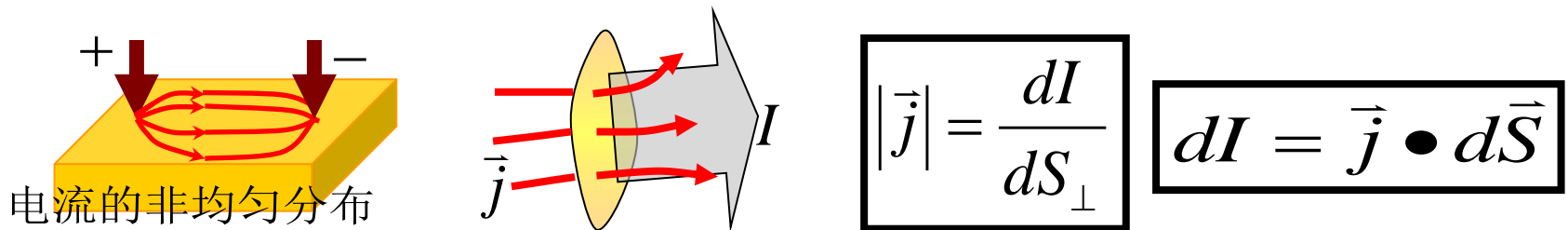
- 电荷的定向移动形成电流。
- 可以形成电流的带电粒子称**载流子**。
  - 电流强度(简称电流)：单位时间内通过某一横截面（常见的是导线的截面）的电量。单位是安培(A)；电流的正方向规定为正电荷流动的方向。

$$I = \frac{dq}{dt}$$

！注意：电流强度是标量，但不同于一般的标量，是有方向性的标量。

# 电流密度和电流场

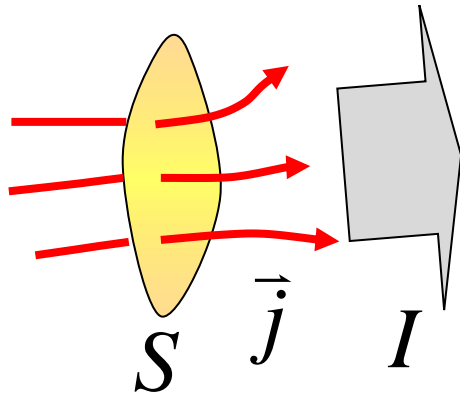
- **电流密度**：是一个矢量，其方向定义为某点电流的方向，大小等于通过该点的垂直于电流方向的单位面积的截面的电流强度。（单位是：安培/平方米）
  - 可用于描述非均匀的电流分布



- 电流密度矢量构成的矢量场叫电流场。
- 电流场可以形象的用电流线表示。

# 电流场的通量

- 电流场的通量：
  - 电流密度矢量通过某一曲面S的通量称电流场的通量
  - 电流场的对某一曲面的通量就等于通过该曲面的电流强度
  - 形象的看就是穿过该曲面的电流线的数目

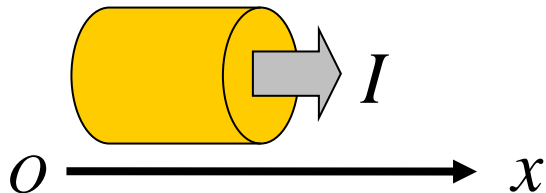


$$dI = \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

$$I = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

# 电流强度与电流密度互相求解

- 由电流密度分布求电流强度：
  - 求积分
- 由电流强度求电流密度分布：
  - 必须知道另一条件即电流密度的分布特点。
- 例如：设有如图的圆柱导体(半径 $r$ )，通过电流  $I$ ，如果电流均匀分布，求电流密度：



因为电流均匀分布，在任一点电流密度相等：

$$|\vec{j}(x)| = \frac{I}{S} = \frac{I}{\pi r^2}$$

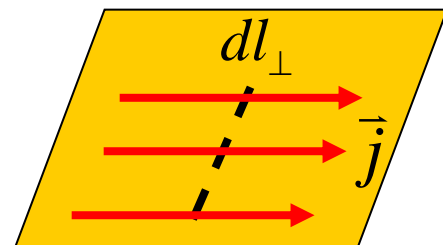
# 电流分布的理想模型

- 线电流：电流分布在没有粗细的线上
  - 这种提法少见;电路问题中的电流可看作线电流模型。
  - 只有有电流强度的描述，不需要电流密度的描述

- 面电流：电流分布在没有厚薄的面上

- 面电流密度（单位是：安培/米）

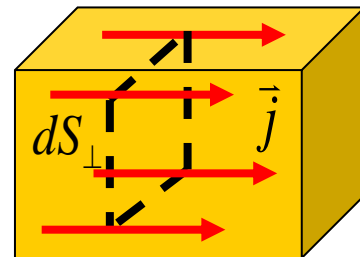
$$|\vec{j}| = \frac{dI}{dl_{\perp}}$$



- 体电流：电流分布在有体积的体内

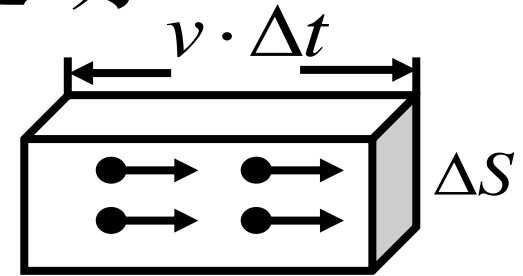
- 体电流密度（单位是：安培/平方米）

$$|\vec{j}| = \frac{dI}{dS_{\perp}}$$



# 电流密度与电荷的运动

- 电流是电荷的运动形成的。
- 两者间的定量的关系：



- 在某点取很小的体元，以致可以假设体元中载流子的速度都相等。
- 电流密度矢量的方向等同该点正电荷运动的方向。
- 不妨设只有正电荷载流子。取垂直电荷运动方向的面元 $\Delta S$ ，设该点电荷运动的平均速度为 $v$ ，该点单位体积内的平均载流子数为 $n$ ，取 $\Delta S$ 为底面， $v\Delta t$ 为高的小立方体。则 $\Delta t$ 内通过 $\Delta S$ 的电荷即为此立方体内的电荷量：

$$\Delta Q = q \cdot n \cdot v \Delta t \Delta S ; \text{又据定义 } j = \frac{\Delta Q}{\Delta t \Delta S} \Rightarrow \boxed{\vec{j} = nq\vec{v}}$$

- 若存在不同种类的载流子则  $\vec{j} = \sum_i \vec{j}_i$

# 电流的连续方程

- 根据电荷守恒定律，从一个闭合面内流出的电量等于闭合面内电量的减少。
  - 取闭合面外法线方向为正向,有:

$$\oiint_S \vec{j} \cdot d\vec{s} = -\frac{dq_{\text{内}}}{dt}$$

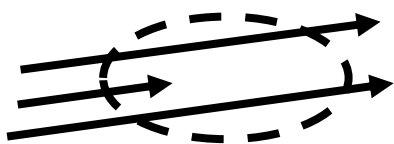
**电流的连续方程**是电荷守恒定律的定量表述，是一个非常重要的基本规律。

– 等价形式:

$$\oiint_S \vec{j} \cdot d\vec{s} = -\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV$$

$$* \quad \nabla \cdot \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

– 电流线的表示:



面内电荷代  
数和变大



面内电荷代  
数和减小



面内电荷代  
数和不变



# 稳恒电流

- 稳恒电流：电流密度分布不随时间变化，同时电荷分布也不随时间变化的电流。
- 基本性质：对任意闭合面，稳恒电流满足如下稳恒条件：

$$\oiint_S \vec{j} \cdot d\vec{s} = 0$$

- 稳恒电流的电流线是首尾相连的连续闭合曲线。
- 直流电路的电流是稳恒电流。

电阻

# 稳恒电场与电压



- 物质中存在电流时，一般也伴存有电场。
- 稳恒电流相伴的电场不随时间变化，称这种电场为稳恒电场。
  - 稳恒电流是一种稳态；与静电平衡下的导体的性质有很大区别：
    - 一般的，存在电流的导体中电场不为零。
    - 稳恒电场对运动电荷做功，稳恒电场的存在伴随着能量的转移。一般的电路中，稳恒电场做功的能量来自电源。
- 因为稳恒电流的电荷分布和电场不随时间变化，所以，**静电场的高斯定理、环路定理、电势的概念都可以推广应用。**
  - 电路中两点间电势差称电压差，或简称**电压**。

# 欧姆定律和电阻



乔治·西蒙·欧姆（德）  
(Georg Simon Ohm,  
1787—1845)

- 欧姆定律：在稳恒条件下，通过导体的电流和导体两端的电压成正比。

$$I = GU$$

- 导体的电阻：  
单位，欧姆( $\Omega$ )

$$R = \frac{U}{I}$$

- 导体的电导：  
单位：西门子(S)

$$G = \frac{I}{U} = \frac{1}{R}$$

– 是描述导体特征的物理量

- 实验表明，一般的，导体电阻与导体长度成正比，与截面积成反比。其比例系数称电阻率，电阻率的倒数称电导率，单位分别是欧姆米( $\Omega\text{m}$ )和西门子每米( $\text{S/m}$ )。

– 一般的，电阻率由构成导体的材料的特性决定的。

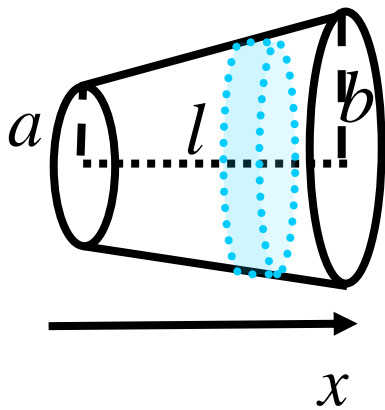
$$R = \rho \frac{l}{S}$$

$$\sigma = \frac{1}{\rho}$$

# 关于电阻计算：一道习题

习题3.2

- 如图有圆柱台形的导体，已知两端圆面的半径是 $a$ 和 $b$ ，高 $l$ ，电阻率 $\rho$ ，求两端之间的电阻。



在 $x$ 处截取 $dl$ 高度的小柱台，视为圆柱，设其柱面半径为 $r$ ，



$$dR = \frac{\rho}{S} dl = \frac{\rho}{\pi r^2} dx \quad r = a + \frac{b-a}{l} x$$

取 $r$ 为积分变量， $dr = \frac{b-a}{l} dx$

$$R = \int_a^b \frac{\rho}{\pi r^2} \frac{l}{(b-a)} dr = \frac{\rho l}{\pi(b-a)} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) = \frac{\rho l}{\pi ab}$$

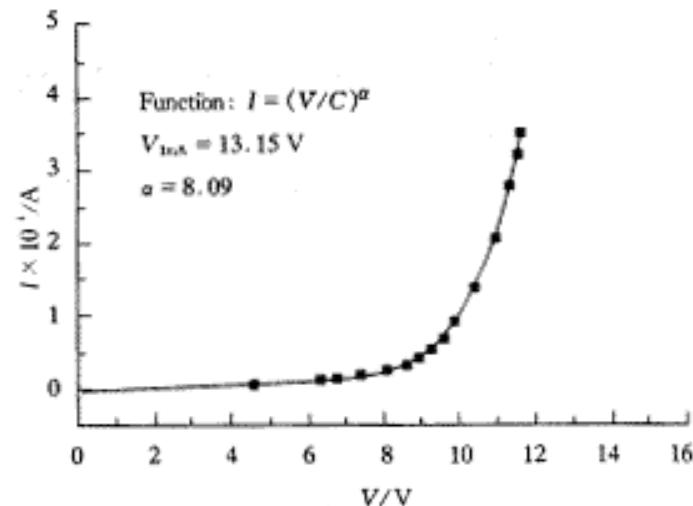
合理吗？

# 电路分析中导体的理想模型

- 在电路分析中采用的理想模型：
  - **理想电阻模型**：严格遵守欧姆定律的导体。
    - 图式：
  - **理想导体模型（理想导线）**：导体可以通过电流，但忽略其电阻效应，即认为导体两端电势相等。
    - 图式：

# 导体的非理想导电性能

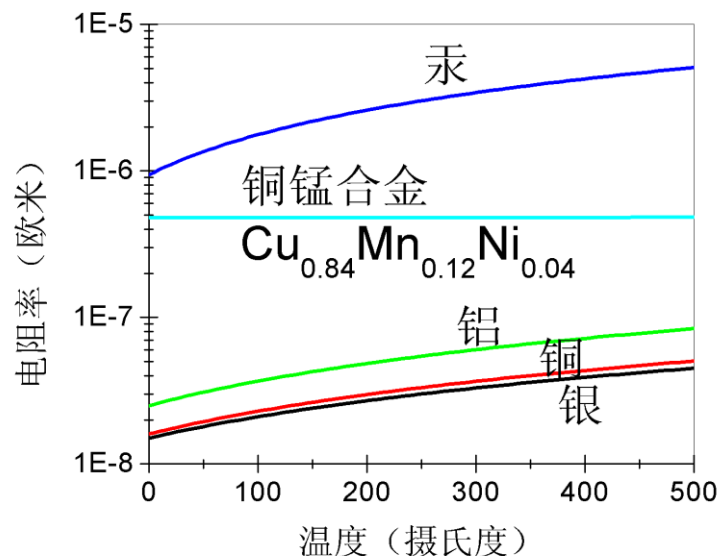
- 欧姆定律只在一定条件下近似成立。
  - 材料种类的影响：可以分为线性电阻，非线性电阻（即I-V关系不是直线）



一种ZnO陶瓷薄膜的伏安特性

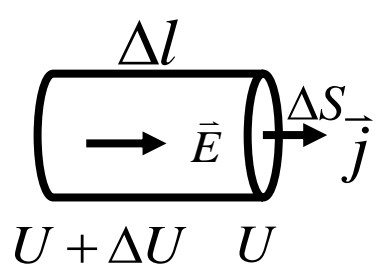
- 温度的影响：一般的金属的电阻率随温度增加而增加，在常温下有

$$\rho = \rho_0(1 + \alpha T) \longrightarrow$$



# 欧姆定律的微分形式

- 直观导出：设想导体中取一小部分依然满足欧姆定律，将此体积不断缩小成为小电流元。



$$\Delta I = G \cdot \Delta U$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta I}{\Delta S} = \frac{G \Delta l}{\Delta S} \cdot \frac{\Delta U}{\Delta l}$$

注： $\vec{j}$ 和 $\vec{E}$ 的方向的一致性的讨论 参见陈秉乾、王稼军《电磁学》北京大学出版2003年，P.99

(不是严格证明！)

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}$$

- 表述为：在导体中任一点若有电场 $\vec{E}(t)$ ，则该点必有相应的传导电流密度 $\vec{j}_c(t)$ ，二者正比于该点的电导率。
- 微分形式的欧姆定律具有更**普遍的适用性**：
  - 适用于导体中的任何一点，反映“点”的性质。
  - 不仅适用于恒定电流，也**适用于非恒定电流**。



# 欧姆定律的物理意义

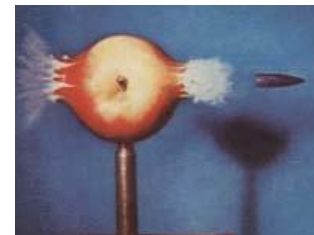
- 描述了电流和电场（电场强度、电势）的关系，是讨论电流问题的基本的物理规律。
- 更基本的规律应该是电荷与电场的关系。  
。电流是电荷运动形成的。
  - 它可以被更为基本的规律所解释，即可以由电荷在电场作用下的运动所解释。

# \*欧姆定律的微观解释（1）

## • 金属导电的经典解释

- 假设：金属中的自由电子在匀的电场作用下作定向运动，忽略电子的热运动（忽略的原因是其平均效果为零）。
- 假设：自由电子在和原子实碰撞后失去定向速度，在电场加速后重新获得定向速度（此速度称**漂移速度**）；所有自由电子的平均定向速度相同；除上述碰撞外，其他的相互作用忽略。
- （注：据**估算**，室温下，金属导体中的电子的热运动的速度大约在1000 km/s，而金属导体中的漂移速度大约在0.1 mm/s，前者远远大于后者。）

比较：子弹的速度 $\sim 1\text{km/s}$



# \*欧姆定律的微观解释（2）

## • 金属导电的经典解释

- 不妨设电子平均自由飞行时间，即两次碰撞之间的平均时间间隔，为  $\bar{\tau}$
- 在此时间内，质量  $m_e$  的电子速度由  $u_0=0$  加速到  $u_1$

$$\left. \begin{array}{l} \bar{u}_1 = \frac{-e\bar{E}\bar{\tau}}{m_e} \\ \text{冲量定理} \end{array} \quad \bar{u} = \frac{1}{2}(\bar{u}_0 + \bar{u}_1) = -\frac{e}{2m_e}\bar{E}\bar{\tau} \quad \left. \begin{array}{l} \bar{j} = nq\bar{v} = -ne\bar{u} \end{array} \right\} \bar{j} = \frac{ne^2}{2m_e}\bar{E}\bar{\tau}$$

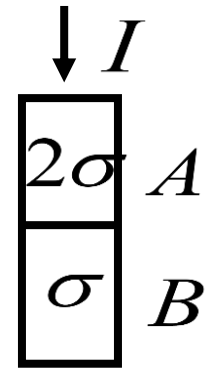
对比欧姆定律微分形式可以认为  $\sigma = \frac{ne^2}{2m_e}\bar{\tau}$

- 可以解释电阻率的温度特性：随着温度的升高，电子热运动的速度会增加，电子在离子实之间碰撞的时间间隔  $\bar{\tau}$  会减小。

可以解释电阻的温度依赖特性，参考陈秉乾  
《电磁学》北京大学出版社2003，P.103 25

## 例 题

如图所示电流 $I$ 流过相连的导体A和B，导体横截面积为 $S$ ；A和B的电导率分别为 $2\sigma$ 和 $\sigma$ ；假设电流密度处处均匀分布。求电场强度。



$$J=I/S$$

$$E_A=I/(2\sigma S)$$

$$E_B=I/(\sigma S)$$

# 电源、电动势

# 电动势

- 电源**将其他形式能量转化为电势能**，这种起电效应这里**等效**描述为“非静电力”做功。
- 为描述这种作用于电荷的非静电起源的“力”而定义“非静电力场强度”  $\vec{K} = \vec{F}_{\text{非静电}} / q_0$
- 电动势: 在两点间移动单位正电荷过程中非静电力做的功，定义为**这种移动方式下**经过的路径上两点间的电动势。

$$d\varepsilon = \vec{K} \cdot d\vec{r}$$

$$\varepsilon = \int_{\text{指定路径}} \vec{K} \cdot d\vec{r}$$

  - 注意：“非静电力”不是保守力，对电荷做功大小和电荷移动方式有关。
- 电动势采用和电势相似的方式定义，并具有相同的单位；但含义不同，定义也有差别。

# 电源的电动势

- 电源的电动势：

$$\varepsilon = \int_{\substack{\text{负极} \\ \text{电源内部}}}^{\text{正极}} \vec{K} \cdot d\vec{r}$$

- 将单位正电荷**通过电源内部**从电源负极移到正极，电源内的非静电力做的功。
- 电源电动势的**正方向**规定为从电源内部负极指向正极，即电势升高的方向。一般的，在电路问题中讨论中，电动势  $\varepsilon$  默认是正数，只表示大小，不考虑方向；而在课程后面的电磁感应问题讨论中还会考虑电动势的方向。
- 电源的电动势是电源自身的属性，前面介绍的电动势的积分形式只是一种等效的描述方法。

# 存在电动势的微分欧姆定律

- 在证明欧姆定律的微分形式的过程中，如果考虑非静电力，则有如下的存在电动势的微分欧姆定律：

$$\vec{j} = \sigma(\vec{E} + \vec{K})$$

（注意：这里规定 $\vec{E}$ 和 $\vec{K}$ 的正方向相同）



# 电路

# 直流电路的基尔霍夫方程组

- 对于电路中的任意一个节点，流入节点的电流之和与流出节点的电流之和相等，

称**结点电流方程组**

$$\sum I_{\text{流入结点}} = \sum I_{\text{流出结点}}$$

- 等价于电荷守恒定律

- 沿电路任意回路绕行一周，各个元件上的电压之和为零，称为**回路电压方程组**

$$\sum_{\text{回路}} U = 0$$

- 等价于静电场的环路定理

- 注意这里不包含电动势，比如，如果有电池的话，只计算电池两端的端电压就可以了。

- 式中的电压U有正也有负，取决于回路绕行的方向。

- 成立条件：稳恒电流
- 这个方程组是求解直流电路问题的基本方程组。

# 电阻的端电压和电流

- 根据欧姆定律可以得到电阻端电压和电流的关系
- 注意：在电路计算中，电压和电流的方向关系：


$$U_{AB} = I_{AB} \cdot R$$

或者  $U_{AB} = -I_{BA} \cdot R$

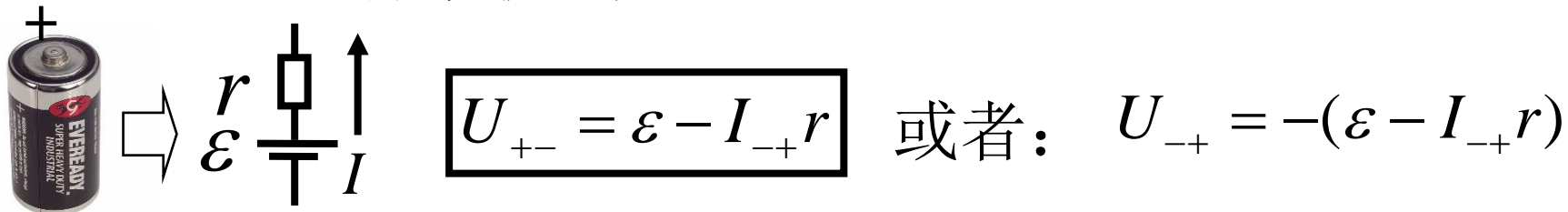
其中：  $U_{AB} = U_A - U_B$

$I_{AB}$  表示自A流向B的电流

$I_{BA}$  表示自B流向A的电流

# 考虑内阻电源的端电压

- 电源正极和负极间的电势差为:  $U_{+-} = U_{+} - U_{-}$
- 如果不考虑电源内阻:  $U_{+-} = \varepsilon$  或  $U_{-+} = -\varepsilon$
- 考虑电源内阻  $r$ , 根据电池工作原理, 可以等效为理想电源串联电阻  $r$ :



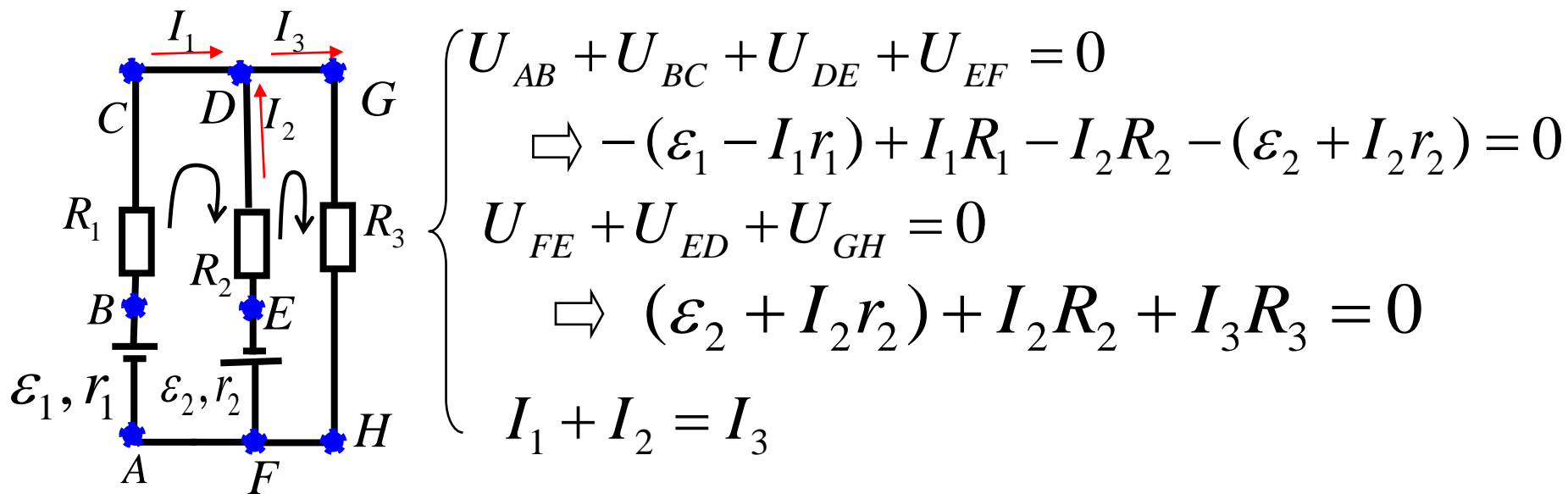
若  $I$  的方向与上图相反, 则有:

Diagram illustrating a battery with internal resistance  $r$  and electromotive force  $\varepsilon$ . The current  $I$  flows into the positive terminal. The terminal voltage is given by  $U_{+-} = \varepsilon + I_{+-}r$  or  $U_{-+} = -(\varepsilon + I_{+-}r)$ .

- 注意: (1) 电路计算中, 一般为书写简单,  $U$ 、 $I$  的脚标省略, 将其方向在电路图中标示, 或者给予文字说明 (2) **一般默认电源电动势  $\varepsilon$  是正数** (3) 如习题中无特别声明, 电池内阻不计。

# 举例

- 如图电路，考虑电池内阻，求通过 $R_3$ 的电流。
  - 取ABCDEF 以及FEDGH两个环路，绕行的正方向如图所示，设节点D处的三个分支电流的方向分别为如图示



$$\Rightarrow I_3 = \frac{\varepsilon_1 R'_2 - \varepsilon_2 R'_1}{R'_1 R'_2 + R'_2 R'_3 + R'_1 R'_3} \quad \text{其中:} \quad \begin{aligned} R'_1 &= R_1 + r_1 \\ R'_2 &= R_2 + r_2 \end{aligned}$$