AI 中的数学

第五、六讲

方聪，概率统计部分参考章复熹和张原老师课件

2024 年秋季

期望 (expectation) 的含义: 均值 (mean).

- X 的大量独立观测值 (记为 $a_1, a_2, \cdots, a_n$) 的算术平均:

$$\bar{a} = \frac{1}{n}\left(a_1 + \cdots + a_n\right).$$

- X 的所有可能值的加权平均 (总和).
  例, $P\left(X = x_k\right) = p_k, k = 1, \cdots, m$.
  记 $n_k = \{m : 1 \leqslant m \leqslant n, a_m = x_k\}$. 那么, 根据概率的频率含义, $\frac{n_k}{n} \approx p_k$, 于是

$$\bar{a} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{K} n_k \approx \sum_{k=1}^{K} x_k p_k.$$

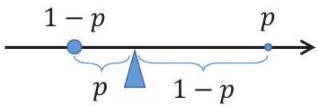
1. 离散型随机变量的期望

- 定义 6.1. 假设 X 是离散型，分布列为

$$P(X=x_k)=p_k,\quad k=1,\cdots,n \text{ 或} k=1,2,\cdots.$$

如果 $\sum_k |x_k|\, p_k<\infty$，那么，称 X 的期望存在，称 $\sum_k x_k p_k$ 为 X 的数学期望，记为 EX.

- EX 是重心. 例，(1) 伯努利分布，$P(X=1)=p, P(X=0)=1-p$. 则，$EX=p$.



- $E(X)$ 完全由 X 的概率分布确定

(3) 泊松分布.

$$P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=:p_k,\quad k=0,1,2,\cdots.$$

- $\forall k\geqslant 1$,

$$x_kp_k=k\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=\lambda\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}e^{-\lambda}=\lambda p_{k-1}.$$

- 因此,

$$EX=\sum_{k=0}^{\infty}kp_k=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda p_{k-1}=\lambda\sum_{\ell=0}^{\infty}p_\ell=\lambda.$$

(2) 二项分布.

(2) 二项分布.

$$P(X=k)=C_n^k p^k q^{n-k} =: b(n;k), k=0,1,\cdots,n, (q=1-p).$$

- $\forall 1\leqslant k\leqslant n$,

$$k\cdot b(n;k)=k\cdot\frac{n!}{k!(n-k)!}p^kq^{n-k}=\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}p^kq^{n-k}$$
$$=\frac{n\cdot(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}p\cdot p^{k-1}q^{n-k}=np\cdot b(n-1,k-1)$$

- 因此,

$$EX=\sum_{k=0}^{n}k\cdot b(n;k)=\sum_{k=1}^{n}np\cdot b(n-1;k-1)$$
$$=np\sum_{\ell=0}^{n-1}b(n-1,\ell)=np$$

(7) 超几何分布.

(7) 超几何分布.

$$P(X=k)=\frac{C_D^k C_{N-D}^{n-k}}{C_N^n}, \quad k=0,1,\cdots,n.$$

- 记 $h(N,D,n;k)=A_1\cdot A_2\cdot A_3=$

$$\frac{D!}{k!(D-k)!}\cdot\frac{(N-D)!}{(n-k)!(N-D-(n-k))!}\cdot\frac{n!(N-n)!}{N!}.$$

- 记 $x'=x-1$. 则, $\forall 1\leqslant k\leqslant n$,

$$k\cdot A_1=\frac{D!}{(k-1)!(D-k)!}=D\times\frac{D'!}{k'!\,(D'-k')!}.$$

- 进一步,

$$A_2=\frac{(N'-D')!}{(n'-k')!\,(N'-D'-(n'-k'))!},$$

$$A_3=\frac{n\cdot n'!\,(N'-n')!}{N\cdot N'!}=\frac{n}{N}\times\frac{n'!\,(N'-n')!}{N'!}.$$

- 记 $x' = x - 1$. 则 $\forall 1 \leqslant k \leqslant n$,

$$k \cdot h(N, D, n; k) = \frac{nD}{N} \times h\left(N', D', n'; k'\right).$$

- 因此,

$$EX = \sum_{k=1}^{n} k \cdot h(N, D, n; k) = \frac{nD}{N} \sum_{k'=0}^{n'} h\left(N', D', n'; k'\right) = \frac{nD}{N}$$

- $D = 1$ 时, 退化为伯努利分布, $EX = p = \frac{D}{N}$.
- $D \geqslant 2$ 时, 不放回抽样, 仍有 $EX = np$.

(4) 几何分布.

$$P(X=k)=q^{k-1}p=:p_k,\quad k=1,2,\cdots,(q=1-p).$$

- 直接计算:

$$EX=\sum_{k=1}^{\infty}kp_k=\frac{1}{p}$$

2. 一般随机变量的期望

- X 为任意随机变量. 做如下近似: $\forall n \in \mathbb{Z}$,

$$\text{当}\, n\varepsilon < X \leqslant (n+1)\varepsilon \,\text{时, 令}\, X^* = n\varepsilon.$$

- 直观: $X^* \leqslant X < X^* + \varepsilon$, 因此 $EX^* \leqslant EX < EX^* + \varepsilon$.
- 定义 6.2. 若 EX^* 存在且当 $\varepsilon \to 0$ 时有极限, 则称 X 的期望存在, 且称该极限为 X 的期望, 记为 EX.
- 对离散型随机变量, 定义 6.1 与定义 6.2 一致.
- 定理 6.1. 对连续型随机变量, 若 $\int_{-\infty}^{\infty} |x| p(x) dx < \infty$, 则

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} x p(x) dx.$$

(2) 指数分布.

$$p(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x > 0.$$

- $\int_0^\infty x \cdot \lambda e^{-\lambda x} dx = -\int_0^\infty x de^{-\lambda x} = \int_0^\infty e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda}$.
- 一般地, 若 X 为连续型, 且 $X \geqslant 0$. 令尾分布

$$G(x) = P(X > x) = \int_x^\infty p(y) dy$$

则 $G'(x) = -p(x)$. 于是,

$$\int_0^\infty xp(x)dx = -\int_0^\infty xdG(x) = \int_0^\infty G(x)dx.$$

(3) 均匀分布.

设随机变量 X 服从区间 $[a,b]$ 上的均匀分布，即 X 有密度分布：

$$p(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}, & a\leqslant x\leqslant b,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

由定义知

$$E(X)=\int_b^a x\frac{1}{b-a}dx=\frac{a+b}{2}.$$

(4) 正态分布.

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

- $X \sim N(0,1)$

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 0$$

- 同理, $X \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$, 则 $p(\mu + x) = p(\mu - x)$, 因此 $EX = \mu$.

(4) 正态分布.

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

- $X \sim N(0,1)$

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 0$$

- 同理, $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则 $p(\mu + x) = p(\mu - x)$, 因此 $EX = \mu$.
- 例, 柯西分布,

$$p(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1 + x^2}.$$

但是, $\int_{-\infty}^{\infty} |x| p(x) dx = \infty$. 因此, EX 不存在!

(5) 伽玛分布.

$$p(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}, \quad x > 0$$

- $\forall x > 0$,

$$xp(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^\alpha e^{-\beta x} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\beta\Gamma(\alpha)} \cdot \frac{\beta^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1)} x^\alpha e^{-\beta x} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \hat{p}(x).$$

- 因此,

$$EX = \int_0^\infty xp(x)dx = \frac{\alpha}{\beta} \int_0^\infty \hat{p}(x)dx = \frac{\alpha}{\beta}$$

3. 期望的性质

- 定理 6.2. (1) 若 $X \equiv a$, 则 $EX = a$;
- 定理 6.2. (2) 若 $X \geqslant 0$, 且 EX 存在, 则 $EX \geqslant 0$;
- 定理 6.2. (3)(或, 推论 6.1). 若 $F_X = F_Y$ (或, 若 $X = Y$), 且 EX 存在, 则 EY 存在, 且 $EX = EY$.
- 定理 6.3. (1) & (2), 线性: 假设 EX, EY 存在. 则,

$$E(aX) = aEX, \quad E(X+Y) = EX + EY.$$

- 定理 6.3. (3), 单调性: 假设 EX,EY 存在, 又若 $X \geq Y$, 则 $EX \geq EY$.

- 推论 6.2. (1) 线性：假设 EX, EY 存在. 则，

$$E(aX + bY) = aEX + bEY.$$

- 推论 6.2. (2) 和的期望：假设 $EX_1, \cdots, EX_n$ 都存在，$\eta = X_1 + \cdots + X_n$. 则 $E\eta$ 存在，且

$$E\eta = EX_1 + \cdots + EX_n$$

- 例. 超几何分布 $\eta \sim H(N, D, n)$. 若第 i 个产品是次品，则令 $X_i = 1$; 否则，令 $X_i = 0$. 则，

$$\eta = X_1 + \cdots + X_n \Rightarrow E\eta = np$$

随机变量函数的期望

- 定理 6.5. X 是离散型，或连续型，且下面的级数或积分绝对收敛，则

$$Ef(X)=\sum_k f(x_k)p_k, \qquad \text{或 } Ef(X)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)p(x)dx.$$

- 例 6.1. 设 $X \sim U(0,2\pi)$，求 $E\sin X$.
- 用公式:

$$E\sin X=\int_{-\infty}^{\infty}\sin x\cdot p(x)dx=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin x dx=0$$

例：（对应郑书例 6.2）设随机变量 X 服从参数为 λ 的指数分布，又 $v_0 > 0$，

$$Y = \begin{cases} X, & X < v_0, \\ v_0, & X \geqslant v_0, \end{cases}$$

求 $E(Y)$。

例：（对应郑书例 6.2）设随机变量 X 服从参数为 λ 的指数分布，又 $v_0 > 0$,

$$Y = \begin{cases} X, & X < v_0, \\ v_0, & X \geqslant v_0, \end{cases}$$

求 $E(Y)$。解：设 $f(x) = \min\{x, v_0\}$，则 $Y = f(X)$，由于 X 的分布密度是

$$p(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0, \\ 0, & X \leqslant 0, \end{cases}$$

所以有

$$\begin{aligned} E(Y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)p(x)dx = \int_0^{+\infty} f(x)\lambda e^{-\lambda x} dx \\ &= \int_0^{v_0} x\lambda e^{-\lambda x} dx + \int_{v_0}^{+\infty} v_0 \lambda e^{-\lambda x} dx \\ &= \frac{1}{\lambda}(1 - e^{-\lambda v_0}) \end{aligned}$$

- 定理 6.4. (马尔可夫不等式). 设 $X \geqslant 0$, 且 EX 存在. 则对任意 $C > 0$, 有

$$P(X \geqslant C) \leqslant \frac{1}{C} EX.$$

- 定理 6.4. (马尔可夫不等式). 设 $X \geqslant 0$, 且 EX 存在. 则对任意 $C > 0$, 有

$$P(X \geqslant C) \leqslant \frac{1}{C} EX.$$

- 证: 令 $A = \{X \geqslant C\}$. 则 $1_A \leqslant \frac{X}{C}$. 于是,

$$P(A) = E1_A \leqslant E\frac{X}{C} = \frac{1}{C} EX.$$

- 例, 若 $X \geqslant 0$, 且 $EX = 0$, 则

$$P\left(X \geqslant \frac{1}{n}\right) \leqslant nEX = 0$$

$$\Rightarrow P(X > 0) = \lim_{n\to\infty} P\left(X \geqslant \frac{1}{n}\right) = 0.$$

琴生不等式：若 ϕ 为凸函数，则

$$\phi(E(X)) \leqslant E(\phi(X)).$$

例：连续型随机变量 X, Y 的概率密度函数分别为 $p(x), q(x)$ 且 $p(x), q(x) \neq 0$，f 为一凸函数，$f(1) = 0$，证明：
$E_{x\sim q} f\left(\frac{p(x)}{q(x)}\right) \geqslant 0.$

琴生不等式：若 ϕ 为凸函数，则

$$\phi(E(X)) \leqslant E(\phi(X)).$$

例：连续型随机变量 X, Y 的概率密度函数分别为 $p(x)$, $q(x)$ 且 $p(x)$, $q(x) \neq 0$，f 为一凸函数，$f(1) = 0$, 证明:
$E_{x\sim q} f\left(\frac{p(x)}{q(x)}\right) \geqslant 0$. 证明：由琴生不等式，

$$E_{x\sim q} f\left(\frac{p(x)}{q(x)}\right) \geqslant f\left(E_{x\sim q}\left(\frac{p(x)}{q(x)}\right)\right) = f\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{p(x)}{q(x)} q(x) dx\right) = f(1).$$

例：连续型随机变量 X, Y 的概率密度函数分别为 $p(x), q(x)$ 且 $p(x), q(x) \neq 0$，我们定义 X 关于 Y 的 KL-散度为 $\mathrm{KL}(X||Y) = E_X(\ln \frac{p(x)}{q(x)})$，试证明 $\mathrm{KL}(X||Y) \geqslant 0$。

证明：

$$\mathrm{KL}(X||Y) = \int p(x) \left(-\ln \frac{q(x)}{p(x)} \right) dx,$$

由于 $-\ln x$ 是凸函数，由琴生不等式知

$$\int p(x) \left(-\ln \frac{q(x)}{p(x)} dx \right) \geqslant -\ln \left(\int p(x) \frac{q(x)}{p(x)} dx \right) = -\ln 1 = 0.$$

例：设随机变量 X 服从参数为 λ 的泊松分布，证明

$$E(X^n) = \lambda E((X+1)^{n-1}).$$

利用此结果计算 $E(X^3)$。

例：设随机变量 X 服从参数为 λ 的泊松分布，证明

$$E(X^n) = \lambda E((X+1)^{n-1}).$$

利用此结果计算 $E(X^3)$。

$$E(X^n) = \sum_{k=0}^{\infty} k^n \frac{\lambda^n}{k!} e^{-\lambda} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} k^{n-1} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}$$

设 $k' = k-1$，则

$$E(X^n) = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k'=0}^{\infty} (k'+1)^{n-1} \frac{\lambda^{k'}}{k'!} = \lambda E((X+1)^{n+1}).$$

由此得

$$E(X^3) = \lambda E(X+1)^2 = \lambda(E(X^2) + 2E(X) + 1)$$
$$= \lambda(\lambda E(X+1) + 2\lambda + 1) = \lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda$$

12. 一副扑克牌共 52 张，分为 4 种花色，每种花色 13 张，假设牌已经充分洗过，以致各张牌被抽到的概率是相等的，今从中任抽 6 张牌，试写出基本事件空间，并求：(1) 其中含有黑桃 K 的概率；
(2) 这 6 张中各种花色都有的概率；
(3) 至少有两张牌同点的概率。

解：(1) 含有黑桃 K 的概率：$\frac{C_{51}^5}{C_{52}^6} = \frac{3}{26} \approx 0.1154.$

(2) 6 种花色的可能组合为 $3,1,1,1$ 和 $2,2,1,1$，所求概率为这两种情况之和：$\frac{C_4^1 C_{13}^3 (C_{13}^1)^3 + C_4^2 (C_{13}^2)^2 (C_{13}^1)^2}{C_{52}^6} \approx 0.4265.$

(3) 6 张牌均不同的概率为 $\frac{C_{13}^6 \times 4^6}{C_{52}^6}$，至少两张牌相同的概率为 $1 - \frac{C_{13}^6 \times 4^6}{C_{52}^6} \approx 0.6548.$

14. 设 $P(AB)=0$，问：下列说法那些是正确的？

（1）A 与 B 不相容；

（2）AB 是不可能事件；

（3）AB 不一定是不可能事件；

（4）$P(A)=0$ 或 $P(B)=0$；

（5）$P(A-B)=P(A)$；

解：（1）错误。注意到 $P(AB)=0$ 不等价于 AB 是不可能事件。例如考虑 x 是数轴上的点，设 $A: x\geqslant 5$，$B: x\leqslant 5$，则 $P(AB)=P(x=5)=0$。

（2）错误。理由同（1）。

（3）正确。

（4）错误。反例和（1）相同。

（5）正确。

16. 市场调查员报道了以下数据：在被询问的 1000 名顾客中，有 811 人喜欢巧克力糖，752 人喜欢夹心糖，418 人喜欢冰糖，570 人喜欢巧克力糖和夹心糖，356 人喜欢巧克力糖和冰糖，348 人喜欢夹心糖和冰糖，298 人喜欢全部三种糖。试说明这一报道有误。解：设集合 $A = \{$ 喜欢巧克力糖的人 $\}$，$B = \{$ 喜欢夹心

糖的人 $\}$，$C = \{$ 喜欢冰糖的人 $\}$，至少喜欢一种糖的人组成的集合 $S = A \cup B \cup C$ 的大小为

$$\begin{aligned} |S| &= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| \\ &= 811 + 752 + 718 - 570 - 356 - 348 + 298 = 1005 \qquad (1) \end{aligned}$$

超过调查的总人数为 1000 人，矛盾。

17. 设 A 和 B 是任何两个事件，试证明：

$$|P(AB)-P(A)P(B)|\leqslant\frac{1}{4}.$$

证明：不妨设 $P(A)\leqslant P(B)$，注意到事件 $AB\subset A$，有

$$P(AB)-P(A)P(B)\leqslant P(A)-P(A)P(B)$$
$$=P(A)(1-P(B))\leqslant P(A)(1-P(A))\leqslant\frac{1}{4}.$$

另一方面，由于 $P(A)+P(B)-P(AB)=P(A\cup B)\leqslant 1$，即 $P(B)\leqslant P(AB)+1-P(A)$，因此

$$P(A)P(B)-P(AB)\leqslant \quad (1-P(A))P(A)+P(AB)P(A)-P(AB)$$
$$\leqslant(1-P(A))P(A)\leqslant\frac{1}{4}.$$

19. 试证明：如事件 $A_1, \cdots, A_n (n \geqslant 2)$ 相互独立，且 B_i 等于 A_i 或 $\bar{A}_i (i = 1, \cdots, n)$ 或 U（必然事件），则 $B_1, \cdots, B_n$ 也是相互独立的。

证明：任取 k 个事件，设 $i_1, i_2, \cdots, i_k \in [n]$，由于事件顺序不影响独立性，不妨设

$$B_{i_j} = \begin{cases} A_{i_j} & 1 \leqslant j \leqslant s, \\ \bar{A}_{i_j} & s < j \leqslant m, \\ U & m < j \leqslant k. \end{cases}$$

其中 $1 \leqslant s \leqslant m \leqslant k$，则有

$$\begin{aligned} P(B_{i_1} \cdots B_{i_k}) &= P(A_{i_1} \cdots A_{i_s} \bar{A}_{i_{s+1}} \cdots \bar{A}_{i_m} U \cdots U) \\ &= P(A_{i_1}) \cdots P(A_{i_s})(1 - P(A_{i_{s+1}})) \cdots (1 - P(A_{i_m}))1 \cdots 1 \\ &= P(B_{i_1}) \cdots P(B_{i_s}) P(B_{i_{s+1}}) \cdots P(B_{i_m}) P(B_{i_{m+1}}) \cdots P(B_{i_k}) \end{aligned}$$

因此事件 $B_{i_1} \cdots B_{i_k}$ 相互独立。

24. 若 $P(A|B) > P(A|\bar{B})$，试证明：$P(B|A) > P(B|\bar{A})$。

证明：由贝叶斯公式，$P(A|B) > P(A|\bar{B})$ 等价于

$$\frac{P(AB)}{P(B)} > \frac{P(A\bar{B})}{P(\bar{B})}$$

上式整理后，等价于

$$P(AB)(1 - P(B)) > [P(A) - P(AB)]P(B)$$

即

$$P(AB) > P(A)P(B)$$

同理可得，$P(B|A) > P(B|\bar{A}) \Leftrightarrow P(AB) > P(A)P(B)$，因此 $P(A|B) > P(A|\bar{B}) \Leftrightarrow P(B|A) > P(B|\bar{A})$。

25. 为了寻找一本专著，一个学生决定到三个图书馆去试试，已知每一图书馆有这本书的概率为 50%，且如果有这本书则已经借出的概率为 50%，若各图书馆藏书是相互独立的，求这个学生能得到这本书的概率。

解：每个图书馆能借到书的概率为 $50\% \times 50\% = \frac{1}{4}$，三个图书馆都借不到书的概率为 $\left(\frac{3}{4}\right)^3$，故能借到书的概率为
$1 - \left(\frac{3}{4}\right)^3 = 0.578125$。

26. 在某种射击条件下，射手甲、乙、丙分别以概率 0.6, 0.5, 0.4 中靶，今三位射手一齐射击，有两弹中靶，问：丙中靶的可能性大还是不中靶的可能性大？

解：由题意，

$$P(\text{甲乙中靶}) = 0.6 \times 0.5 \times (1 - 0.4) = 0.18$$

$$P(\text{甲丙中靶}) = 0.6 \times (1 - 0.5) \times 0.4 = 0.12$$

$$P(\text{乙丙中靶}) = (1 - 0.6) \times 0.5 \times 0.4 = 0.08$$

$$P(\text{丙中靶}|\text{有两人中靶}) = \frac{0.12 + 0.08}{0.18 + 0.12 + 0.08} = \frac{10}{19} > \frac{1}{2}$$

因此丙中靶的可能性更大。

31. 甲和乙两人玩一个系列游戏。游戏的规则是：当乙赢 n 次以前，如果甲已经取胜 m 次，判甲赢得系列游戏；否则，乙赢得系列游戏。在单次游戏中，甲赢的概率是 p，乙赢的概率是 $q=1-p$。问：甲赢得系列游戏的概率是多少？(这里 m 和 n 是给定的正整数。)

解：设甲赢 m 次时，乙赢了 i 次，则当 $i=0,\cdots,n-1$ 时甲能够获胜，甲获胜的概率为

$$P(\text{甲获胜}) = p^m \sum_{i=0}^{n-1} C_{m+i-1}^{i} q^i.$$

37. 一个部件由 6 个元件组成，这 6 个元件在指定的时间 T 内失效的概率分别为

$$p_1 = 0.6, \quad p_2 = 0.2, \quad p_3 = p_4 = p_5 = p_6 = 0.3.$$

试求下列两种情况下部件在时间 T 内失效的概率。

解：(1) 部件由这些元件串联而成：概率为

$(1-p_1)\cdots(1-p_6) = (1-0.6)\times(1-0.2)\times(1-0.3)^4 = 0.076832$,

部件失效的概率为 $1-0.076832 = 0.923168$.

(2) 部件 1-2,3-4, 5-6 并联：

$$P(\text{元件}1,2\text{至少一个失效}) = 1-0.4\times 0.8 = 0.68.$$

$$P(\text{元件}3,4\text{至少一个失效}) = 1-0.7\times 0.7 = 0.51.$$

$$P(\text{元件}5,6\text{至少一个失效}) = 1-0.7\times 0.7 = 0.51.$$

部件失效需要上述事件同时发生，概率为

$0.68\times 0.51\times 0.51 = 0.176868.$

39. 在有三个孩子的家庭中，已知至少有一个是女孩，求至少有一个是男孩的概率。

解：三个孩子的性别有 8 种情况：{ 女男男，女男女，女女男，女女女，男男男，男男女，男女男，男女女 }，有女孩的情况有 7 种，在此条件下有男孩的情况有 6 种，所求概率为 $\frac{6}{7} \approx 0.8571$。

40. 已知 8 支枪中 3 支未校正，5 支已校正。一射手用前者射击，中靶的概率为 0.3，而用后者射击，中靶的概率为 0.8。今有一人从 8 支枪中任取一支射击，结果中靶，求这支枪是已经校正过的概率。

解：中靶分为使用未校正和校正的枪两种情况，

$$P(\text{中靶}) = \frac{3}{8} \times \frac{3}{10} + \frac{5}{8} \times \frac{8}{10} = \frac{49}{80}.$$

因此

$$P(\text{使用校正枪中靶}|\text{中靶}) = \frac{\frac{5}{8} \times \frac{8}{10}}{\frac{49}{80}} = \frac{40}{49} \approx 0.8163$$

41. 设有一质地均匀的正八面体，其第 1, 2, 3, 4 面染有红色；第 1, 2, 3, 5 面染有白色；第 1, 6, 7, 8 面染有黑色。在桌面上将次正八面体抛掷一次，然后观察与桌面接触的那一面出现何种颜色，令 $A=$ “出现红色”，$B=$ “出现白色”，$C=$ “出现黑色”，问：A, B, C 是否相互独立？

解：由题意，$P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{2}$，而 $P(AB)=\frac{3}{8}\neq P(A)P(B)$，因此事件 A, B, C 不相互独立。

42. 设事件 A, B, C 相互独立，求证：$A \cup B$，AB，$A - B$ 都与 C 相互独立。

证明：$A \cup B$ 与 C 独立：

$$
\begin{aligned}
&P((A \cup B) \cap C) \\
&\quad = P((AC) \cup (BC)) = P(AC) + P(BC) - P((AC) \cap (BC)) \\
&\quad = P(C)(P(A) + P(B) - P(A)P(B)) = P(A \cup B)P(C)
\end{aligned}
$$

AB 与 C 独立：

$$P(AB \cap C) = P(A)P(B)P(C) = P(AB)P(C)$$

$A - B$ 与 C 独立：

$$
\begin{aligned}
&P((A - B) \cap C) \\
&= P(AC - BC) = P(AC) - P((AC) \cap (BC)) \\
&= (P(A) - P(A)P(B))P(C) = P(A - B)P(C)
\end{aligned}
$$

43. 连续投掷一对均匀的骰子，如果掷出的两点数之和为 7，则甲赢，如果掷出的两点数之积为 5，则乙赢。不停的投掷直到有一方赢为止。求甲赢的概率。

解：设第 n 次抛时甲赢的概率为

$$\left(1-\frac{6}{36}-\frac{2}{36}\right)^{n-1}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{6}\times\left(\frac{7}{9}\right)^{n-1}$$

则

$$P(\text{甲赢})=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{6}\times\left(\frac{7}{9}\right)^{n-1}=\frac{1}{6}\times\frac{9}{2}=0.75$$