AI 中的数学

第十一讲

方聪，概率统计部分参考章复熹和张原老师课件

2024 年秋季

1. 两个随机变量的概率分布
2. 两个随机变量函数的数值特征

随机向量函数的概率分布：假设二维随机向量 (X, Y) 有联合密度 $p(x, y)$（对于离散型情形，有类似的结论），随机变量 $Z = f(X, Y)$，对于任何实数 z，令 $A = \{(x, y) : f(x, y) \leqslant z\}$，则 Z 的分布函数的计算公式为

$$P(Z \leqslant z) = P(Z \in A) = \iint_A p(x, y)dxdy. \tag{1}$$

定理：设二维随机向量 (X, Y) 有联合密度 $p(x, y)$，随机变量 $Z = X + Y$，则 Z 的分布密度为

$$p_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, z - x)dx,$$

证明：令

$$A = \{(x, y) : x + y \leqslant z\}$$

由式1知

$$P(Z \leqslant z) = P((X, Y) \in A) = \iint_{\{x+y\leqslant z\}} p(x, y)dxdy.$$

利用变量替换 $u = x + y$ 有

$$\begin{aligned}\iint_{\{x+y\leqslant z\}} p(x, y)dxdy &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{z-x} p(x, y)dy\right) dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{z} p(x, u - x)du\right) dx\end{aligned}$$

推论：设随机变量 X 和 Y 分别有分布密度 $p_X(x)$ 和 $p_Y(y)$，且 X 和 Y 相互独立，则随机变量 $Z = X + Y$ 有分布密度

$$p_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_X(x) p_Y(z - x) dx.$$

例：设 (X,Y) 服从二维正态分布，联合密度 $p(x,y)$ 为
$p(x,y)=\hat{C}\exp\left\{-\frac{u^2-2\rho uv+v^2}{2(1-\rho^2)}\right\}$，其中 $u=\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}, v=\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}$，
$\hat{C}=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}$. 求 $Z=X+Y$ 的密度。

例：设 (X,Y) 服从二维正态分布，联合密度 $p(x,y)$ 为
$p(x,y)=\hat{C}\exp\left\{-\frac{u^2-2\rho uv+v^2}{2(1-\rho^2)}\right\}$，其中 $u=\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}, v=\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}$，
$\hat{C}=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}$. 求 $Z=X+Y$ 的密度。

解：由定理知 Z 的分布密度为 $p_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty}p(x,z-x)dx$. 当 y 取 $z-x$ 时，

$$v=\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}=\frac{z-(\mu_1+\sigma_1 u)-\mu_2}{\sigma_2}=C-\frac{\sigma_1}{\sigma_2}u,$$

其中，$C=(z-\mu_1-\mu_2)/\sigma_2$. 此时，

$$\begin{aligned}u^2-2\rho uv+v^2&=u^2-2\rho u\left(C-\frac{\sigma_1 u}{\sigma_2}\right)+\left(C-\frac{\sigma_1 u}{\sigma_2}\right)^2\\&=\left(1+2\rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}+\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right)^2\right)u^2-2\left(\rho+\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right)Cu+C^2.\end{aligned}$$

现在计算 $p_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x, z-x)dx$，已知:

$$p(x, z-x) = \hat{C}\left\{-\frac{Au^2 - 2Bu + C^2}{2(1-\rho^2)}\right\}, \quad \text{其中，} u = \frac{x-\mu_1}{\sigma_1},$$

$$A = 1 + 2\rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2} + \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right)^2, \quad B = \left(\rho + \frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right)C, \quad C = \frac{z-(\mu_1+\mu_2)}{\sigma_2}.$$

配方:

$$Au^2 - 2Bu + C^2 = A\left(u - \frac{B}{A}\right)^2 - \left(\frac{B^2}{A} - C^2\right)$$

于是,

$$p_Z(z) = \hat{C}\exp\left\{\frac{\frac{B^2}{A} - C^2}{2(1-\rho^2)}\right\} \times \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{A\left(u-\frac{B}{A}\right)^2}{2(1-\rho^2)}\right\}\sigma_1 du$$

$$= \tilde{C}\exp\left\{\frac{B^2 - AC^2}{2(1-\rho^2)A}\right\}. \quad \tilde{C} = \hat{C}\sigma_1\sqrt{2\pi\frac{1-\rho^2}{A}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_2^2 A}}$$

$$B^2 - AC^2 = \left(\left(\rho + \frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right)^2 - A\right) C^2 = (\rho^2 - 1)\,\frac{(z - (\mu_1 + \mu_2))^2}{\sigma_2^2}.$$

因此,

$$p_Z(z) = \tilde{C} \exp\left\{-\frac{(z-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(z-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}.$$

其中, $\mu = \mu_1 + \mu_2, \sigma^2 = \sigma_2^2 A = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2$.
特别地, 若 $\rho = 0$ (即 X, Y 相互独立), 则

$$X + Y \sim N\left(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2\right).$$

例：设随机变量 X 与 Y 相互独立，且 X，Y 分别有分布密度：

$$p_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0, \\ 0, & x \leqslant 0, \end{cases} \quad (\lambda > 0),$$

$$p_Y(y) = \begin{cases} \mu e^{-\mu y}, & y > 0, \\ 0, & y \leqslant 0, \end{cases} \quad (\mu > 0),$$

试求随机变量 $X + Y$ 的分布密度。

例：设随机变量 X 与 Y 相互独立，且 X，Y 分别有分布密度：

$$p_X(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0,\end{cases}\quad(\lambda>0),$$

$$p_Y(y)=\begin{cases}\mu e^{-\mu y}, & y>0,\\ 0, & y\leqslant 0,\end{cases}\quad(\mu>0),$$

试求随机变量 $X+Y$ 的分布密度。

解：随机变量 $Z=X+Y$ 的分布密度为

$$p(z)=\int_{-\infty}^{\infty}p_X(x)p_Y(z-x)dx.$$

易知，当 $z\leqslant 0$ 时，$p(z)=0$，设 $z>0$，则

$$
\begin{aligned}
p(z) &= \int_0^z \lambda e^{-\lambda x} \mu e^{-\mu(z-x)} dx = \lambda\mu e^{-\mu z} \int_0^z e^{-(\lambda-\mu)x} dx \\
&= \begin{cases} \lambda^2 e^{-\lambda z} z, & \lambda = \mu, \\ \frac{\lambda\mu}{\lambda-\mu}(e^{-\mu z} - e^{-\lambda z}), & \lambda \neq \mu. \end{cases}
\end{aligned}
$$

定理：设二维随机向量 (X, Y) 有联合密度 $p(x, y)$. 令 $Z = X/Y$(当 $Y = 0$ 时, 规定 $Z = 0$). 则 Z 为连续型, 且

$$p_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} |y| p(zy, y) dy.$$

定理：设二维随机向量 (X, Y) 有联合密度 $p(x, y)$. 令 $Z = X/Y$(当 $Y = 0$ 时, 规定 $Z = 0$). 则 Z 为连续型, 且

$$p_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} |y| p(zy, y) dy.$$

证明：首先，$\frac{x}{y} \leqslant z$ 当且仅当 “$y > 0$ 且 $x \leqslant yz$ ” 或者 “$y < 0$ 且 $x \geqslant yz$." 于是,

$$F_Z(z) = P(Y > 0, X \leqslant Yz) + P(Y < 0, X \geqslant Yz).$$

其中,

$$\begin{aligned} P(Y > 0, X \leqslant Yz) &= \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{yz} p(x, y) dx dy = \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{z} p(yu, y) y du dy \\ &= \int_{-\infty}^{z} \left(\int_0^{\infty} y p(yu, y) dy \right) du \end{aligned}$$

类似的，

$$P(Y<0, X \geqslant Yz) = \int_{-\infty}^{0} \int_{yz}^{\infty} p(x,y)dxdy = \int_{-\infty}^{0} \int_{-\infty}^{z} p(yu,y)|y|dudy$$
$$= \int_{-\infty}^{z} \left(\int_{-\infty}^{0} |y| p(yu,y) dy \right) du$$

于是，

$$F_Z(z) = \int_{-\infty}^{z} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |y| p(yu,y) dy \right) du$$

$$p_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} |y| p(zy,y) dy.$$

例：随机变量 X, Y 相互独立，都服从 $N(0,1)$. 求随机变量 $Z = X/Y$ 的概率密度。

例：随机变量 X, Y 相互独立，都服从 $N(0,1)$. 求随机变量 $Z = X/Y$ 的概率密度。

解：联合密度为:

$$p(x,y) = \frac{1}{2\pi}\exp\left\{-\frac{x^2+y^2}{2}\right\}.$$

因此,

$$\begin{aligned}
p_Z(z) &= \int_{-\infty}^{\infty}|y|p(zy,y)dy = \int_{-\infty}^{\infty}|y|\frac{1}{2\pi}\exp\left\{-\frac{(zy)^2+y^2}{2}\right\}dy \\
&= \frac{2}{2\pi}\int_0^{\infty} y\exp\left\{-\frac{\left(z^2+1\right)y^2}{2}\right\}dy \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} e^{-\left(z^2+1\right)u}du = \frac{1}{\pi\left(z^2+1\right)}.
\end{aligned}$$

例：设随机变量 X 与 Y 独立同分布，共同分布是 $N(0,1)$，试求随机变量 $Z=\sqrt{X^2+Y^2}$ 的概率分布。

例：设随机变量 X 与 Y 独立同分布，共同分布是 $N(0,1)$，试求随机变量 $Z=\sqrt{X^2+Y^2}$ 的概率分布。

解：对任何 $z\leqslant 0$，易知 $P(Z\leqslant z)=0$，设 $z>0$，则

$$P(Z\leqslant z)=\iint_{\{x^2+y^2\leqslant z^2\}}\frac{1}{2\pi}\exp\left\{-\frac{x^2+y^2}{2}\right\}dxdy$$

做极坐标变换 $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta(0\leqslant\theta<2\pi,r\geqslant 0)$，于是

$$P(Z\leqslant z)=\int_0^{2\pi}\left(\int_0^z\frac{1}{2\pi}e^{-r^2/2}rdr\right)d\theta=\int_0^z re^{-r^2/2}dr.$$

可见，$Z=\sqrt{X^2+Y^2}$ 有分布密度

$$p(z)=\begin{cases}0, & z\leqslant 0,\\ ze^{-z^2/2}, & z>0.\end{cases}$$

定理：假设 $\xi = (X, Y)$ 为连续型，有密度 $p(x, y)$，区域 A 满足 $P((X, Y) \in A) = 1$，假设

$$\eta = (U, V), \quad \text{其中} U = f(X, Y), \quad V = g(X, Y).$$

如果：

- (1) $P(\xi \in A) = 1$ 且 $(f, g) : A \to G$ 是一对一的；
- (2) $f, g \in C^1(A)$，且 $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} \neq 0, \forall (x, y) \in A$,

那么，η 是连续型，且

$$p_{U,V}(u, v) = p(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right|, (u, v) \in G.$$

证明：对于 $\forall D \subseteq G$，设 $D^* = \{(x,y) : (f(x,y), g(x,y)) \in D\}$，易知 $D^* \subseteq A$，$(f(x,y), g(x,y))$ 是 D^* 到 D 上的一一映射，其逆映射是 $(x(u,v), y(u,v))$，根据重积分的变量替换公式，

$$\iint_{D^*} p(x,y)dxdy = \iint_D p(x(u,v), y(u,v)) \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| dudv.$$

于是，

$$P((U,V) \in D) = P((X,Y) \in D^*) = \iint_{D^*} p(x,y)dxdy$$

$$= \iint_D p(x(u,v), y(u,v)) \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| dudv.$$

因此

$$p_{U,V}(u,v) = p(x(u,v), y(u,v)) \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right|, (u,v) \in G.$$

1. 两个随机变量的概率分布
2. 两个随机变量函数的数值特征

定理：设随机变量 X 与 Y 相互独立，且 $E(X)$ 与 $E(Y)$ 都存在，则

$$E(XY) = E(X)E(Y).$$

连续情形的证明：

$$E(XY) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xyp_X(x)p_Y(y)dxdy = (E(X))(E(Y)).$$

定理：若随机变量 X 与 Y 相互独立，则

$$\mathrm{var}(X+Y) = \mathrm{var}(X) + \mathrm{var}(Y).$$

证明：由于 $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$，得

$$\mathrm{var}(X+Y)=E(X+Y-(EX+EY))^2$$

$$=\mathrm{var}(X)+\mathrm{var}(Y)+2E(X-E(X))(Y-E(Y)).$$

由 X 与 Y 相互独立得

$$E(X-E(X))(Y-E(Y))=E(X-E(X))E(Y-E(Y))=0$$

因此等式成立。

（1）设二维随机向量 (X, Y) 的可能值是 $a_1, a_2, \cdots$（有限个或可列无穷个），$f(x, y)$ 是任何二元函数，则

$$E(f(X, Y)) = \sum_i f(a_i) P((X, Y) = a_i).$$

（当 a_i 有无穷个时，要求此级数绝对收敛）。
（2）设二维随机向量 (X, Y) 有联合分布密度 $p(x, y)$，二元函数 $p(x, y)$ 满足积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x, y)| p(x, y) dx dy$$

收敛，则

$$E(f(X, Y)) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) p(x, y) dx dy.$$

例：在长为 a 的线段上，任取两个点 X 和 Y，求此两点间的平均距离。

例：在长为 a 的线段上，任取两个点 X 和 Y，求此两点间的平均距离。

解：显然 X 和 Y 服从区间 $(0, a)$ 上的均匀分布，且相互独立，从而 X 和 Y 的联合密度为

$$p(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{a^2} & x, y \in (0,a), \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

从而，两点间的平均长度为

$$\begin{aligned} E|X-Y| &= \iint_{\mathbb{R}^2} |x-y| p(x,y) dxdy \\ &= \int_0^a \int_0^a |x-y| \frac{1}{a^2} dxdy \\ &= \frac{1}{a^2} \int_0^a \left(\int_0^x (x-y)dy + \int_x^a (y-x)dy \right) dx \\ &= \frac{1}{a^2} \int_0^a \left(x^2 - ax + \frac{a^2}{2} \right) dx = \frac{a}{3}. \end{aligned}$$

例： x, y, z 为相互独立的随机变量，h, l, f, g 为任意确定性映射。判断

(1) 令 $a = f(x, y)$, $b = g(x, z)$, a 与 b 是否独立，$a, b \mid x$ 是否独立？

(2) 令 $c = x + y$, 则 $x, y \mid c$ 是否独立？

(3) $h(l(x, y), z)$ 与 x 是否独立？$h(l(x, y), z)$ 与 x 在 $l(x, y)$ 给定条件下是否独立？

例： x, y, z 为相互独立的随机变量，h, l, f, g 为任意确定性映射。判断

(1) 令 $a = f(x, y)$, $b = g(x, z)$, a 与 b 是否独立，$a, b \mid x$ 是否独立？

(2) 令 $c = x + y$, 则 $x, y \mid c$ 是否独立？

(3) $h(l(x, y), z)$ 与 x 是否独立？$h(l(x, y), z)$ 与 x 在 $l(x, y)$ 给定条件下是否独立？

解：

(1) a 与 b 不独立，都依赖于 x，$a, b \mid x$ 独立。

(2) 不独立

(3) $h(l(x, y), z)$ 与 x 不独立，给定 $l(x, y)$ 则独立。

两个随机变量的协方差：假设随机变量 X, Y 的期望和方差存在，则称

$$E(X - E(X))(Y - E(Y))$$

为 X 与 Y 的协方差，记为 $\mathrm{cov}(X, Y)$或σ_{XY}.
若 $\sigma_{XY} = 0$，则称 X 与 Y 不相关.

注：协方差存在，因为

$$2(X - EX)(Y - EY) \leqslant (X - EX)^2 + (Y - EY)^2.$$

协方差的计算公式为：

$$\mathrm{cov}(X, Y) = E(XY) - (EX)(EY).$$

定理：假设 X, Y 的方差存在，则

$$(\mathrm{cov}(X, Y))^2 \leqslant \mathrm{var}(X) \cdot \mathrm{var}(Y). \tag{2}$$

定理：假设 X, Y 的方差存在，则

$$(\mathrm{cov}(X, Y))^2 \leqslant \mathrm{var}(X) \cdot \mathrm{var}(Y). \tag{2}$$

证明：若 $\mathrm{var}(X) = 0$，则 $X \equiv c$，于是 $\mathrm{cov}(X, Y) = 0$. 若 $\mathrm{var}(X) > 0$，则设

$$\begin{aligned} g(t) &:= E(t(X - EX) + (Y - EY))^2 \\ &= t^2 \mathrm{var}(X) + 2t\,\mathrm{cov}(X, Y) + \mathrm{var}(Y) \geqslant 0 \end{aligned}$$

由于不等式恒成立，故 $g(t)$ 的判别式 $\leqslant 0$，即 $(\mathrm{cov}(X, Y))^2 \leqslant \mathrm{var}(X) \cdot \mathrm{var}(Y)$.

随机变量的相关系数：设 $0 < \mathrm{var}(X), \mathrm{var}(Y) < \infty$，则称

$$\frac{\mathrm{cov}(X, Y)}{\sqrt{\mathrm{var}(X)}\sqrt{\mathrm{var}(Y)}}$$

为 X 与 Y 的相关系数，记为 ρ_{XY}，简记为 ρ。

定理：设 ρ 是随机变量 X 与 Y 的相关系数，则有
(1) $|\rho| \leqslant 1$; 、
(2) X 与 Y 独立，则不相关，从而 $\rho = 0$;
(3) $|\rho| = 1$ 当且仅当存在 a, b 以概率 1 使得 $Y = a + bX$.

只证明 (3): 设

$$\begin{aligned} g(t) &:= E(t(X-EX)+(Y-EY))^2 \\ &= t^2 \operatorname{var}(X) + 2t \operatorname{cov}(X,Y) + \operatorname{var}(Y) \end{aligned}$$

则 $|\rho| = 1$ 当且仅当 $g(t)$ 的判别式为 0，即存在 t_0 使得

$$\begin{aligned} & g\left(t_0\right) = E\left(t_0(X-EX)+(Y-EY)\right)^2 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & Y = -t_0 X + EY + t_0 EX. \end{aligned}$$

例：设 (X,Y) 服从二维正态分布，联合密度为

$$\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(u^2+v^2-2\rho uv\right)} \qquad u=\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}, v=\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}.$$

求 ρ_{XY}。

例：设 (X, Y) 服从二维正态分布，联合密度为

$$\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(u^2+v^2-2\rho uv\right)} \qquad u = \frac{x-\mu_1}{\sigma_1}, v = \frac{y-\mu_2}{\sigma_2}.$$

求 ρ_{XY}。

解：由之前的结论，
$\mu_1 = E(X), \mu_2 = E(Y), \sigma_1^2 = \mathrm{var}(X), \sigma_2 = \mathrm{var}(Y).$
故

$$\rho_{XY} = \frac{E\left(X-\mu_1\right)\left(Y-\mu_2\right)}{\sigma_1\sigma_2} = E\left(\frac{X-\mu_1}{\sigma_1}\frac{Y-\mu_2}{\sigma_2}\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} uv \cdot e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(u^2+v^2-2\rho uv\right)} dvdu.$$

先对 v 积分，$v^2-2\rho uv+u^2=(v-\rho u)^2+\left(1-\rho^2\right)u^2$，

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} uv\cdot e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(u^2+v^2-2\rho uv\right)}dv =& ue^{-\frac{u^2}{2}}\times\int_{-\infty}^{\infty} ve^{-\frac{(v-\rho u)^2}{2(1-\rho^2)}}dv\\ =& ue^{-\frac{u^2}{2}}\times\sqrt{2\pi\left(1-\rho^2\right)}\cdot\rho u.\end{aligned}$$

代入积分式，再对 u 积分，

$$\rho_{XY}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\rho u^2 e^{-\frac{u^2}{2}}du=\rho.$$

例：设二维随机向量 (X, Y) 的联合密度是

$$p(x, y) = \begin{cases} \frac{2}{2\pi} \exp\left\{-\frac{1}{2}(x^2 + y^2)\right\}, & xy > 0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

求 ρ_{XY}。

例：设二维随机向量 (X, Y) 的联合密度是

$$p(x, y) = \begin{cases} \frac{2}{2\pi} \exp\left\{-\frac{1}{2}(x^2 + y^2)\right\}, & xy > 0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

求 ρ_{XY}。

解：上一讲第二节已经指出 $X \sim N(0, 1)$，$Y \sim N(0, 1)$，故

$$E(X) = E(Y) = 0, \quad \mathrm{var}(X) = \mathrm{var}(Y) = 1.$$

因此

$$\begin{aligned} \mathrm{cov}(X, Y) = E(XY) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xyp(x, y)dxdy \\ &= \iint_{\{(x,y):xy>0\}} xy \frac{2}{2\pi} \exp\left\{-\frac{1}{2}(x^2 + y^2)\right\} dxdy. \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\operatorname{cov}(X, Y) = E(XY) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xyp(x, y)dxdy \\
&= \iint_{\{(x,y):xy>0\}} xy\frac{2}{2\pi}\exp\left\{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)\right\}dxdy \\
&= \int_0^{\infty} ye^{-y^2/2}\left(\int_0^{\infty}\frac{2}{2\pi}xe^{-x^2/2}dx\right)dy \\
&+ \int_{-\infty}^{0} ye^{-y^2/2}\left(\int_{-\infty}^{0}\frac{2}{2\pi}xe^{-x^2/2}dx\right)dy \\
&= \int_0^{+\infty}\frac{2}{2\pi}ye^{-y^2/2}dy - \int_{-\infty}^{0}\frac{2}{2\pi}ye^{-y^2/2}dy \\
&= \int_0^{+\infty}\frac{2}{\pi}ye^{-y^2/2}dy = \frac{2}{\pi}.
\end{aligned}
$$

故相关系数为 $\rho_{XY} = \frac{2}{\pi}$。

注意：协方差为 0 不等价于随机变量 X 和 Y 独立。

注意：协方差为 0 不等价于随机变量 X 和 Y 独立。

例如，令随机变量 $X \sim U(0, 2\pi)$，设 $Y = \sin X$，$Z = \cos X$，Y 和 Z 的协方差为

$$\mathrm{cov}(Y, Z) = E(YZ) - E(Y)E(Z) = \frac{1}{2}E(\sin 2X) - E(\sin X)E(\cos X) = 0.$$

而 Y 和 Z 显然是不独立的。