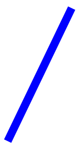
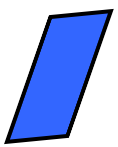
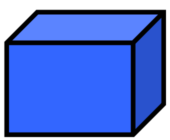
习题课

常见的带电体模型

- 带电体的电量：
  -  点电荷电量　q
  -  线电荷密度：λ　　带电量：$q=\int dq=\int \lambda dl$
  -  面电荷密度：σ　　带电量：$q=\int dq=\iint \sigma dS$
  -  体电荷密度：ρ　　带电量：$q=\int dq=\iiint \rho dV$
- 说明：
  - 电量q用实数表示，忽略电荷量的量子化效应。除点电荷外的模型，电荷在空间连续分布，忽略电荷分布的量子化效应。
  - **在本课程的方程和计算式中，q 一般 默认包含正负号，表示电荷的正负。**

线、面、体的积分计算

#第一型曲线积分

- 空间曲线上的第一型曲线积分: $\boxed{\int_L fdl}$

  - 计算方法

    设空间曲线 $L:\ x=\varphi(t)\,,\,y=\psi(t)\,,\ z=\chi(t)$

$$\boxed{\int_L f(x,y,z)dl=\int_\alpha^\beta f\left(\varphi(t)\ ,\ \psi(t)\ ,\ \chi(t)\right)\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)+\chi'^2(t)}dt}$$

$$\int_L fdl=\int_L f\cdot\sqrt{1+(\frac{\partial y}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial x})^2}\cdot dx$$

这是普遍成立的公式，我们一般不用

#第一型曲面积分

- 空间曲面上的第一型曲面积分:
  - 计算方法

$$\boxed{\iint_S fdS}$$

有光滑曲面

这是普遍成立的公式,我们一般不用

$$S: z = z(x, y), \quad (x, y) \in D$$

$$\boxed{\iint_S f(x, y, z)dS = \iint_D f\big(x, y, z(x, y)\big)\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\,dxdy}$$

或有光滑曲面

$$S: \begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v), \quad (u, v) \in D' \\ z = z(u, v) \end{cases}$$

$$\begin{cases} E = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2 \\ G = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2 \\ F = x_u x_v + y_u y_v + y_u y_v \end{cases}$$

$$\boxed{\iint_S fdS = \iint_{D'} f\sqrt{EG - F^2}\,dudv}$$

#体积分

- 体积分：$\boxed{\iiint_V fdV}$
  - 计算方法

    设有区域Ω

$$\boxed{\begin{aligned}&\iiint_V fdV\\&=\iiint_\Omega f\cdot dxdydz\\&=\iiint_\Omega f\cdot \rho d\rho d\phi dz\\&=\iiint_\Omega f\cdot r^2 Sin\theta\cdot drd\theta d\phi\end{aligned}}$$

- 以下举例说明线、面、体积分的常见的计算方法，为了简单起见，如果不是特别说明，电荷密度都假设为常数。

- 例:有直线段，长度L，均匀带电，密度λ，求总电量

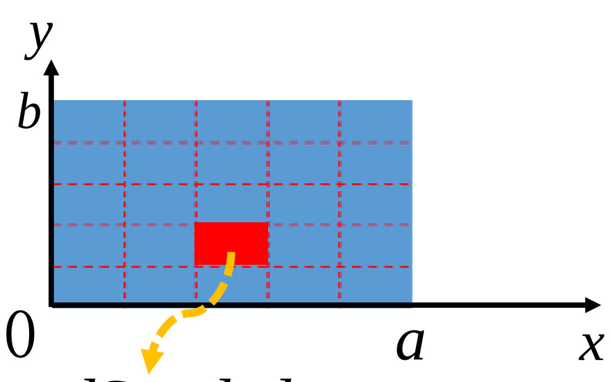
- 解：如图建立直角坐标系

$$dl = dx$$

$$Q = \int dq = \int_L \lambda \cdot dl$$

$$= \int_0^L \lambda \cdot dx = \lambda L$$

- 例，有矩形带电面，长a宽b，电荷密度σ，求总电量
- 解：如图建立直角坐标系



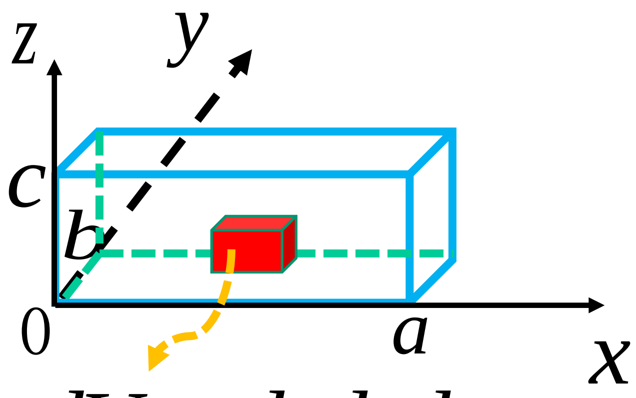
$$dS = dxdy$$

$$Q = \iint\limits_S dq = \iint\limits_S \sigma dS$$

$$= \iint\limits_S \sigma dxdy = \sigma \int_0^a dx \int_0^b dy$$

$$= \sigma ab$$

- 例，有长方形带电体，长a宽b高c，电荷密度ρ，求总电量。
- 解：如图建立直角坐标系



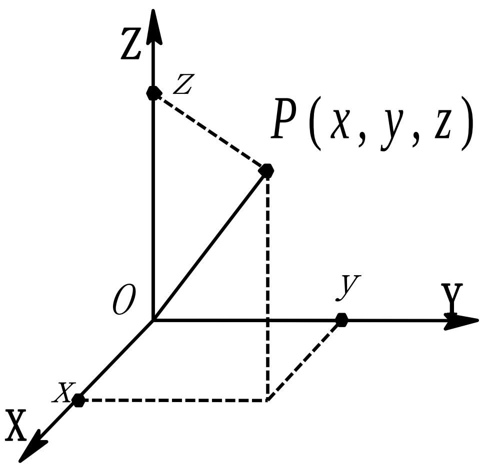
$$dV = dxdydz$$

$$Q = \iiint_V dq = \iiint_V \rho dV$$

$$= \rho \iiint_V dxdydz = \rho abc$$

#三维空间的坐标系

- 常用的坐标系有：直角坐标系，柱坐标系，球坐标系，如图所示空间任意一点P在三种坐标系下的坐标。

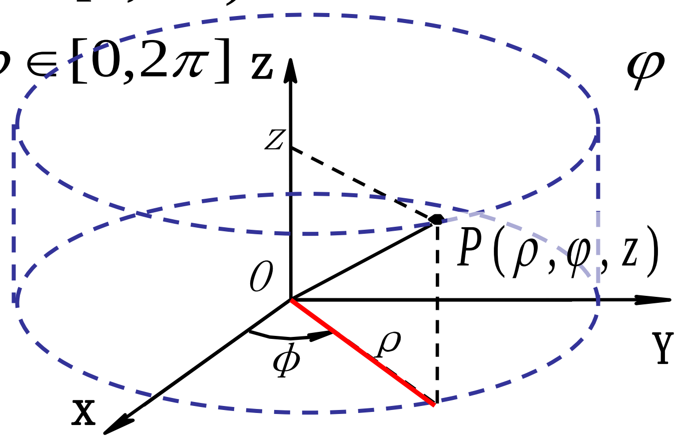


直角坐标系

$z \in (-\infty, +\infty)$

$\rho \in [0, +\infty)$

$\varphi \in [0, 2\pi]$

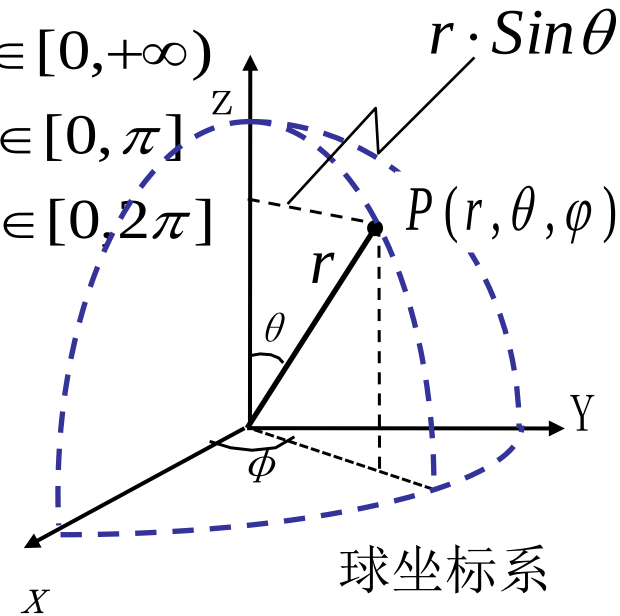


柱坐标系

$r \in [0, +\infty)$

$\theta \in [0, \pi]$

$\varphi \in [0, 2\pi]$



球坐标系

不同坐标系下坐标的变换：

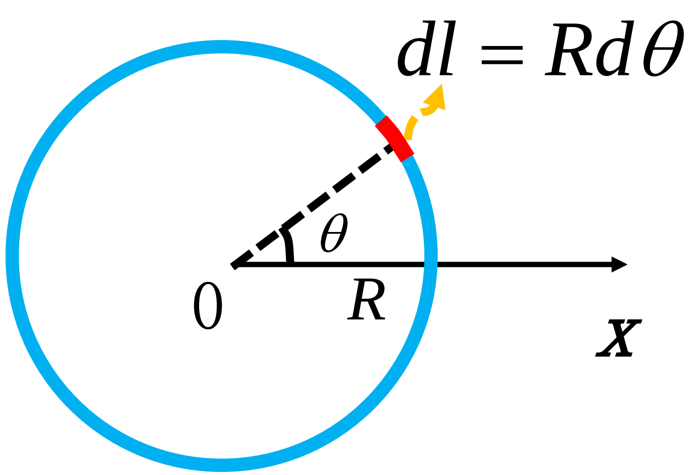
$$\begin{cases} x = \rho \cdot Cos\varphi \\ y = \rho \cdot Sin\varphi \\ z = z \end{cases}$$

直角坐标系和柱坐标系

$$\begin{cases} x = r \cdot Sin\theta \cdot Cos\varphi \\ y = r \cdot Sin\theta \cdot Sin\varphi \\ z = r \cdot Cos\theta \end{cases}$$

直角坐标系和球坐标系

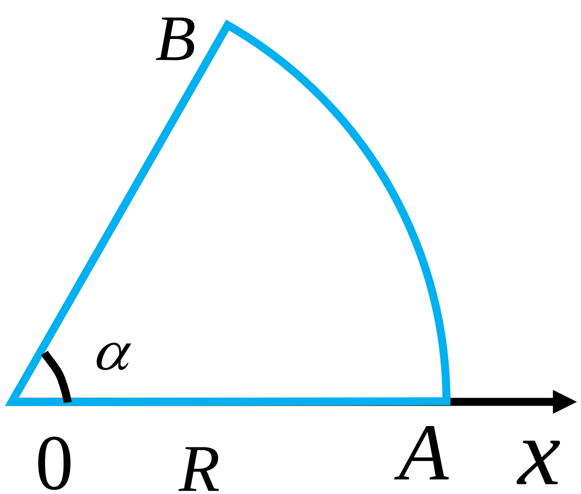
- 例:有半径R的圆线均匀带电，密度λ，求总电量
- 解：如图建立极坐标系



$$Q = \int dq = \int_L \lambda \cdot dl$$

$$= \lambda \int_0^{2\pi} Rd\theta = 2\pi R\lambda$$

- 例，有扇形边界的带电线，半径R，夹角α，电荷密度λ，求总电量
- 解：如图建立极坐标



$$Q=\int dq=\int_L \lambda dl$$

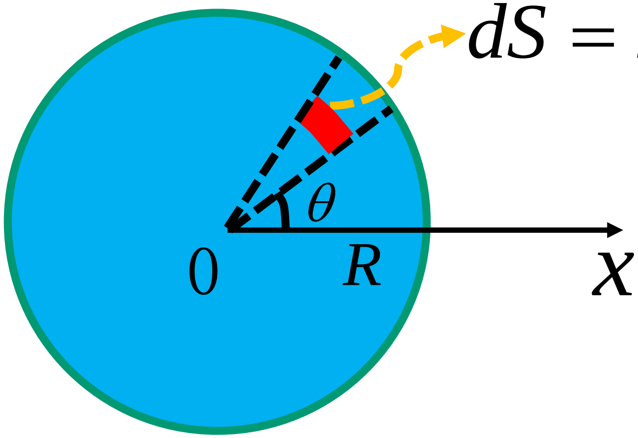
$$=\lambda\left(\int_{OA} dl+\int_{OB} dl+\int_{AB} dl\right)$$

$$=\lambda\left(\int_0^R dr+\int_0^R dr+\int_0^\alpha R d\theta\right)$$

$$=\lambda\left(R+R+R\alpha\right)$$

$$=\lambda R\left(2+\alpha\right)$$

- 例:有半径R的圆面均匀带电，密度σ，求总电量。解：如图建立极坐标系



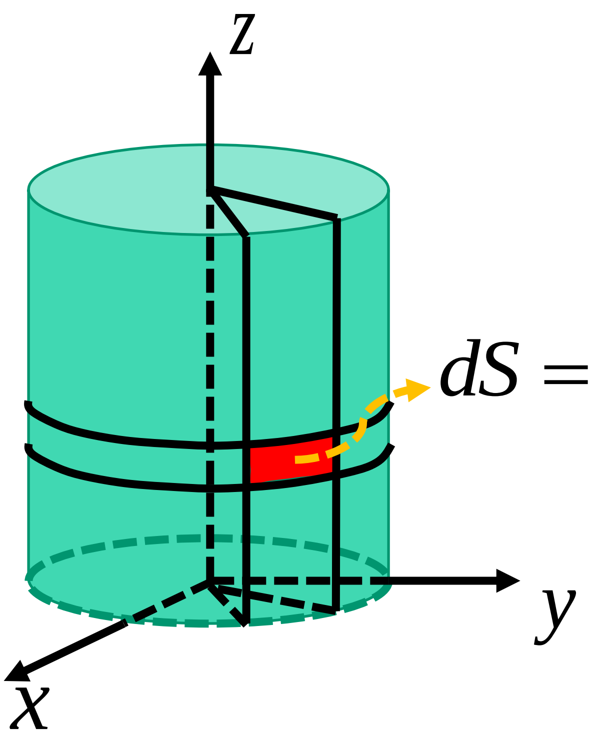
$$dS = rd\theta dr$$

$$Q = \iint_S dq = \iint_S \sigma dS$$

$$= \iint_S \sigma r dr d\theta = \sigma \int_0^R r dr \int_0^{2\pi} d\theta$$

$$= \pi R^2 \sigma$$

- 例:有半径R，高H的圆柱桶，侧面均匀带电，密度σ，求总电量。
- 解：如图建立柱坐标系



$$dS = Rd\varphi dz$$

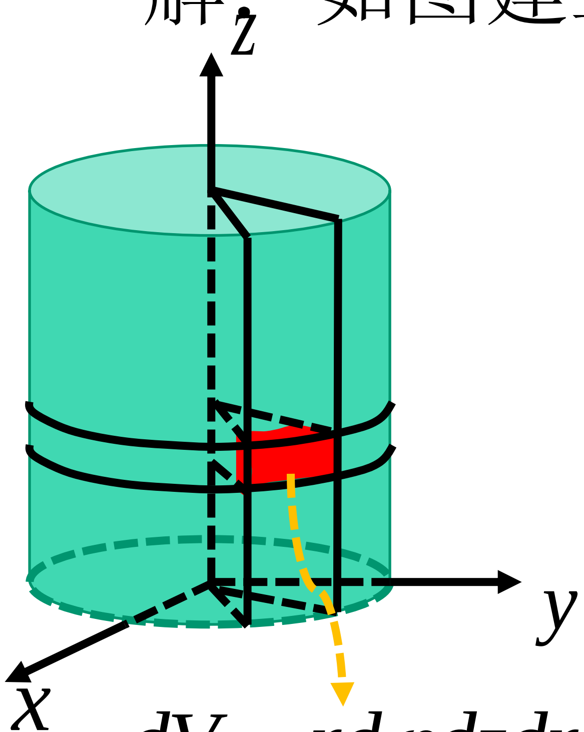
$$Q = \iint_S dq = \iint_S \sigma dS$$

$$= \iint_S \sigma R d\varphi dz$$

$$= R\sigma \int_0^H dz \int_0^{2\pi} d\varphi$$

$$= 2\pi RH\sigma$$

- 例:有半径R，高H的圆柱体，均匀带电，密度ρ，求总电量。
- 解：如图建立柱坐标系



$$dV = rd\varphi dzdr$$

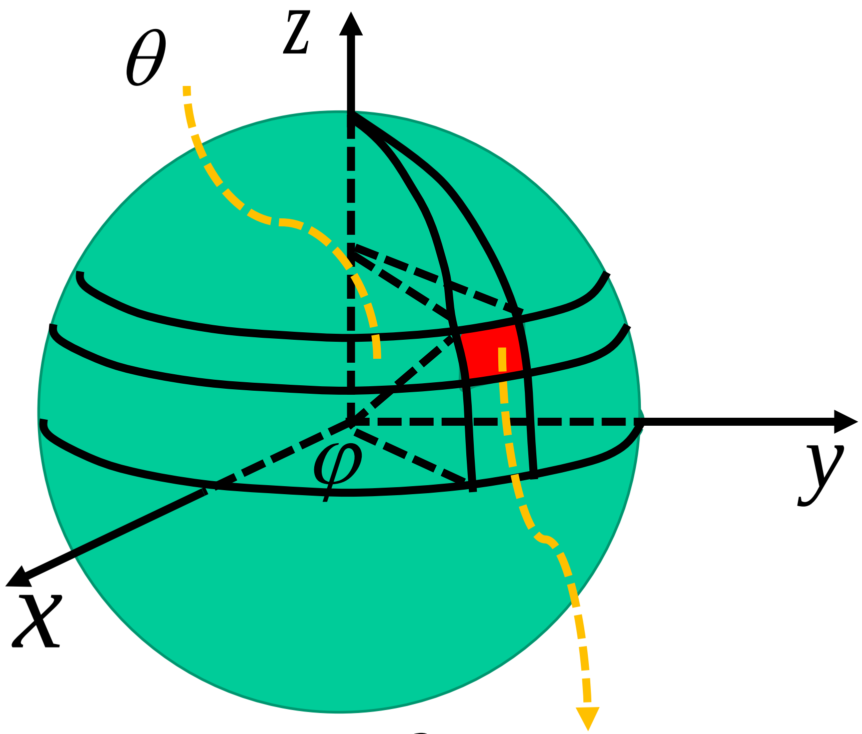
$$Q = \iiint_V dq = \iiint_V \rho dV$$

$$= \rho \iiint_V rdrd\varphi dz$$

$$= \rho \int_0^R rdr \int_0^H dz \int_0^{2\pi} d\varphi$$

$$= \pi R^2 H \rho$$

- 例:有半径R的圆球面均匀带电，密度σ，求总电量。解：如图建立球坐标系



$$dS = R^2 \operatorname{Sin}\theta d\theta d\varphi$$

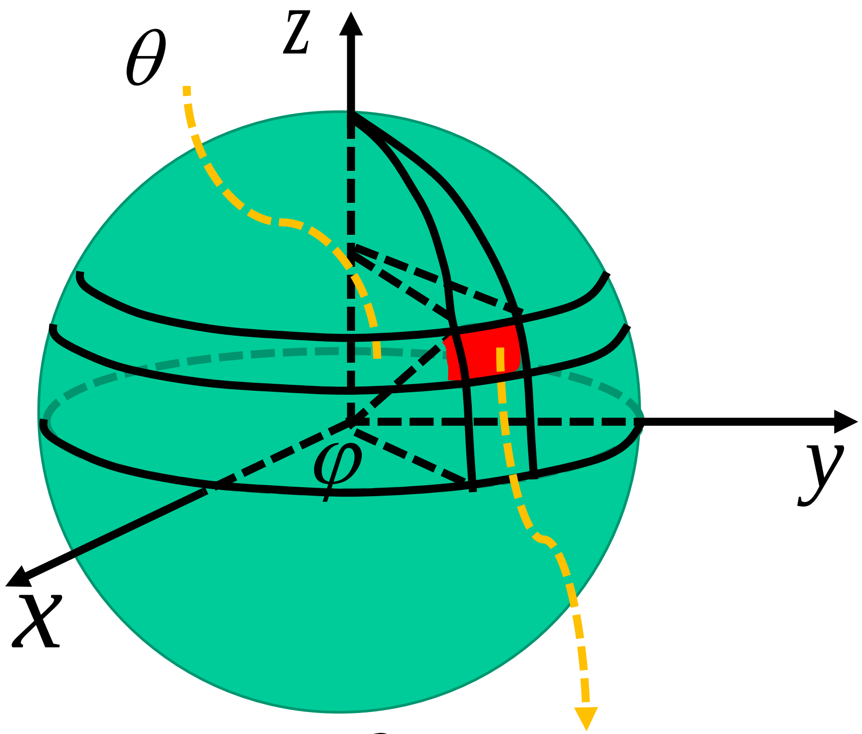
$$Q = \iint_S dq = \iint_S \sigma dS$$

$$= \iint_S \sigma R^2 \operatorname{Sin}\theta d\theta d\varphi$$

$$= R^2\sigma \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \operatorname{Sin}\theta d\theta$$

$$= 4\pi R^2 \sigma$$

- 例:有半径R的圆球体均匀带电，密度ρ，求总电量。解：如图建立球坐标系



$$dV = r^2 \operatorname{Sin}\theta d\theta d\varphi dr$$

$$Q = \iiint_V dq = \iiint_V \rho dV$$

$$= \rho \iiint_V r^2 \operatorname{Sin}\theta d\theta d\varphi dr$$

$$= \rho \int_0^R r^2 dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \operatorname{Sin}\theta d\theta$$

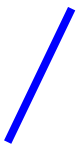
$$= \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$$

求电荷量

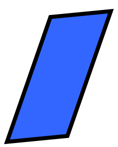
常见的带电体模型

- 带电体的电量：

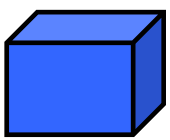
  - 点电荷电量　q



  - 线电荷密度：　λ　　带电量：$q=\int dq=\int \lambda dl$



  - 面电荷密度：　σ　　带电量：$q=\int dq=\iint \sigma dS$



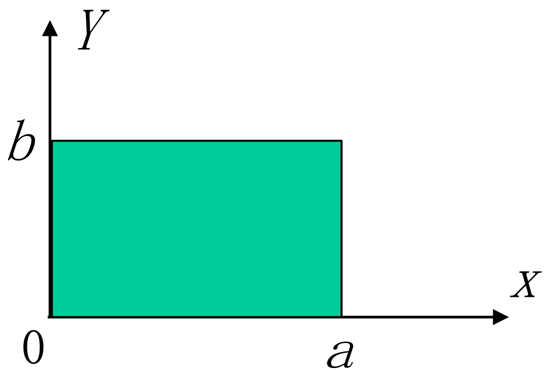
  - 体电荷密度：　ρ　　带电量：$q=\int dq=\iiint \rho dV$

- 说明：
  - 电量q用实数表示，忽略电荷量的量子化效应。除点电荷外的模型，电荷在空间连续分布，忽略电荷分布的量子化效应。
  - **在本课程的方程和计算式中，q 一般 默认包含正负号，表示电荷的正负。**

例题

- 1. 如图矩形带电面，电荷面密度为$\sigma=\sigma_0\dfrac{x+y}{d}$

其中d和σ_0是常数，求总电量。



$$Q=\iint_S \sigma\cdot ds=\iint_S \sigma\cdot dxdy$$

$$=\frac{\sigma_0}{d}\int_0^b dy\int_0^a(\mathrm{x}+\mathrm{y})dx$$

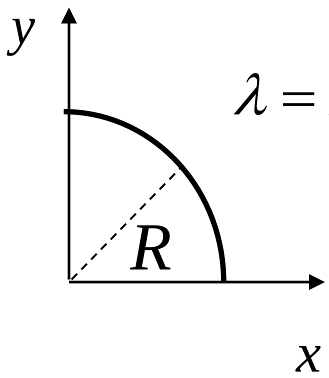
$$=\frac{\sigma_0}{d}\int_0^b(\frac{a^2}{2}+\mathrm{ay})dy$$

$$=\frac{\sigma_0}{d}(\frac{a^2b}{2}+\frac{ab^2}{2})$$

$$=\sigma_0\frac{ab(a+b)}{2d}$$

例题

- 2.如图有1/4圆弧带电线，电荷线密度等于λ_0 x， λ_0为常量，求带电量。



$$\lambda = \lambda_0 x$$

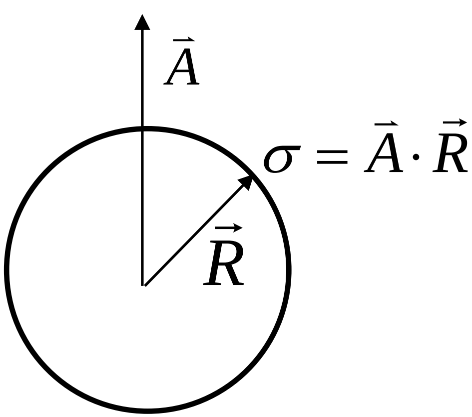
$$Q = \int \lambda dl = \lambda_0 \int x dl = \lambda_0 \int_0^{\frac{\pi}{2}} R Cos\theta \cdot R d\theta = \lambda_0 R^2$$

课堂练习

- 1. 有带电球体，电荷体密度为 $\rho=\rho_0(1-\frac{r}{R})$

其中R是球体半径，r是球内任一点到球心的距离，ρ_0是常量，求带电球的总电量。

- 2. 有带电球面，如图所示，$\vec{A}$ 是常矢量，$\vec{R}$ 是球心指向球面任一点的矢量，即R即为半径，且已知该点处的面电荷密度是 $\sigma=\vec{A}\cdot\vec{R}$ 求总电量。



课堂练习参考解答

- 1. 有带电球体，电荷体密度为 $\rho=\rho_0(1-\frac{r}{R})$

其中R是球体半径，r是球内任一点到球心的距离，ρ_0 是常量，求带电球的总电量。

解：建立球坐标系，

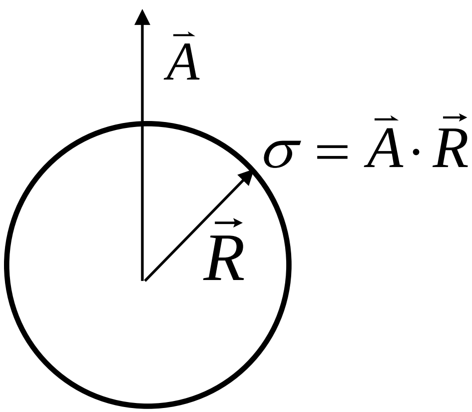
$$Q=\iiint_V \rho\cdot dV=\iiint_V \rho_0(1-\frac{r}{R})\cdot r^2 Sin\theta d\theta d\varphi dr$$

$$=\rho_0\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}Sin\theta d\theta\int_0^{R}(r^2-\frac{r^3}{R})dr$$

$$=\rho_0\cdot 2\pi\cdot 2\cdot\frac{R^3}{12}=\frac{1}{3}\pi R^3\rho_0$$

课堂练习参考解答

- 2. 有带电球面，如图所示，$\vec{A}$是常矢量，$\vec{R}$是球心指向球面任一点的矢量，即R为球半径，且已知该点处的面电荷密度是 $\sigma = \vec{A}\cdot\vec{R}$ 求总电量。



解：以$\vec{A}$为z轴建立球坐标系

$$\sigma = \vec{A}\cdot\vec{R} = ARCos\,\theta$$

$$Q = \iint_S \sigma dS = \iint_S ARCos\,\theta \cdot R^2 Sin\theta d\theta d\varphi$$

$$= AR^3 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} Sin\theta Cos\,\theta d\theta = 0$$

叠加原理求电场强度

场强叠加原理

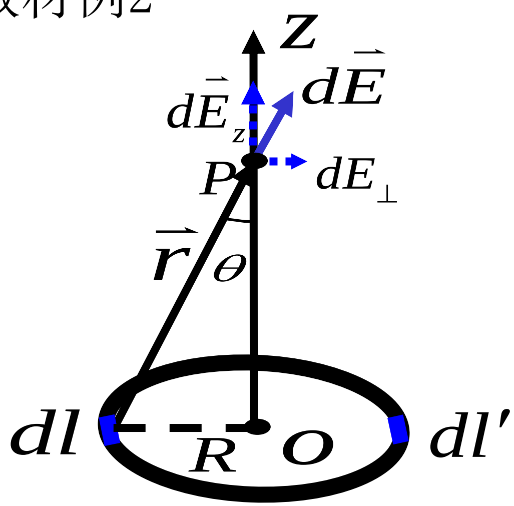
- 点电荷组在某点电场强度等于各点电荷单独存在时，在该点产生的电场强度的矢量和。
  - 电力叠加原理的直接结果。
  - 连续带电体的电场采用积分形式计算

$$\boxed{\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i} \quad \boxed{\vec{E} = \int d\vec{E}}$$

  - 电场的叠加原理和点电荷的场强公式共同构成了一个完整的静电学的电场理论。

例:均匀带电细圆环轴线上的场强

教材例2



已知：半径是R，总带电量是Q

- 如图所示建立柱坐标系。
- 如图示，任取线微元dl，必有对称的微元dl’， 则垂直z轴方向的分量相抵消，故只求z方向分量即可。
- 电荷线密度λ $\lambda = \dfrac{Q}{2\pi R}$

dl 在P点的场强： $d\vec{E} = \dfrac{\lambda dl}{4\pi\varepsilon_0(z^2+R^2)}\hat{r}$ 　　线微元：$dl = Rd\varphi$

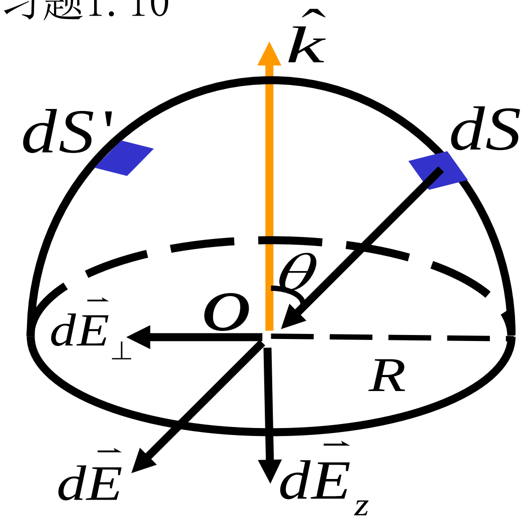
则P点的总场强： $E = E_z = \int dE_z = \int \cos\theta \cdot dE$

$$= \frac{\lambda zR}{4\pi\varepsilon_0(z^2+R^2)^{3/2}}\int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{Qz}{4\pi\varepsilon_0(z^2+R^2)^{3/2}} \Rightarrow \vec{E} = \frac{Qz}{4\pi\varepsilon_0(z^2+R^2)^{3/2}}\hat{k}$$

- 讨论：单位验证；z＝0, E=0； z>>R，E近似为点电荷的场强分布

例:均匀带电半球面球心处场强（方法1）

习题1. 10



已知：球半径是R，电荷面密度是σ

- 如图所示建立球坐标系。
- 取如图所示的面电荷微元，面积是：

$$dS = R^2 Sin\theta \cdot d\varphi d\theta$$

- 考虑对称性， 垂直$\hat{k}$方向的分量互相抵消，故只求平行$\hat{k}$方向分量即可。

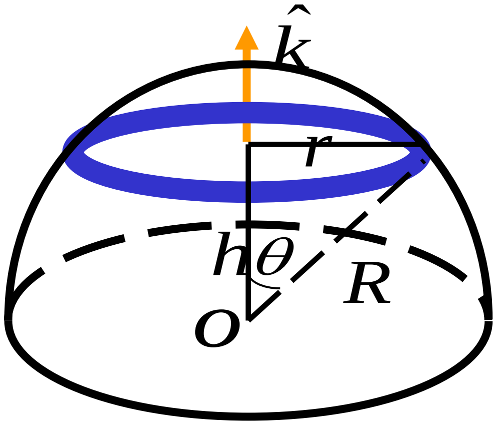
电荷微元在0点的电场是：$dE = \dfrac{\sigma dS}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$

$$E_O = \int Cos\theta \cdot dE = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} Sin\theta Cos\theta d\theta = \frac{\sigma}{4\varepsilon_0}$$

所以： $\vec{E}_O = -\dfrac{\sigma}{4\varepsilon_0}\hat{k}$

单位矢量 $\hat{k}$如图所示

例:均匀带电半球面球心处场强（方法2）



已知：球半径是R，电荷面密度是σ

- 如图所示建立球坐标系。
- 半球面分解成不同半径的带电细圆环组成，取如图所示的窄圆环为面微元
- 利用前例“带电细圆环轴线上的场强”，窄圆环在O点的场强是：

$$dE = \frac{hdq}{4\pi\varepsilon_0 (h^2 + r^2)^{3/2}} \qquad dq = \sigma \bullet 2\pi r \bullet Rd\theta$$

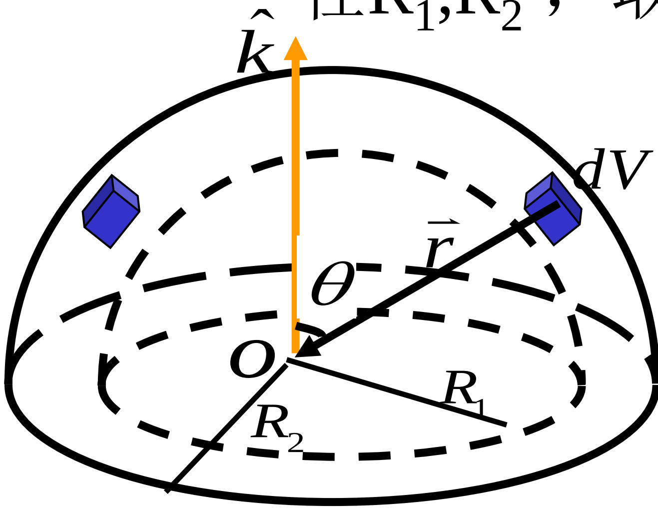
$$E = \int dE = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \sin\theta \cos\theta d\theta = \frac{\sigma}{4\varepsilon_0}$$

所以：$\vec{E} = -\frac{\sigma}{4\varepsilon_0}\hat{k}$　方向单位矢量 $\hat{k}$ 如图所示

例:均匀带电半球壳球心的场强

已知：球壳厚度为l，电荷体密度是ρ

解：以球心为原点建立球坐标系，设球壳内外半径R_1,R_2，取电荷体微元如图示。



$$dV = r^2 Sin\,\theta \cdot d\theta d\varphi dr$$

•考虑对称性，垂直$\hat{k}$方向上E分量互相抵消，故只求平行$\hat{k}$方向分量即可。

$$dE = \frac{\rho dV}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$E = \int Cos\theta \cdot dE = \frac{\rho}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} Sin\,\theta Cos\,\theta \cdot d\theta \int_{R_1}^{R_2} dr = \frac{\rho l}{4\varepsilon_0}$$

$$\vec{E} = -\frac{\rho l}{4\varepsilon_0}\hat{k}$$

方向单位矢量 $\hat{k}$ 如图所示

利用叠加原理求电场强度的方法

- 一般的，有如下要点：
  - 选取恰当的坐标系，取合适的电荷微元
  - 矢量积分化为标量积分
    - 初步要求：用几何关系和对称性写出标量形式
    - 注意：这里的对称性分析是简化计算的技巧，而不是必要的手段。
  - 线、面、体积分化为对坐标的多重积分
    - 初步要求：将简单形状（直线、平面、圆柱、球）的微元直接写成坐标表示。
    - 多重积分化为累次积分