

# Elementare Geometrie

Basierend auf der Vorlesung von Dr. Nepechiy

# Inhaltsverzeichnis

<b>0</b>	<b>Einleitung</b>	<b>2</b>
0.1	Was ist Geometrie? . . . . .	2
0.2	Grundbegriffe der Graphentheorie . . . . .	2
0.3	Axiomatische Geometrie . . . . .	4
<b>1</b>	<b>Hilbert's Axiome</b>	<b>5</b>
1.1	Inzidenzaxiome . . . . .	5
1.2	Streckenordnungsaxiome . . . . .	8
1.3	Kongruenzaxiome für Strecken . . . . .	13
1.4	Geometrie in der Hilbertebene . . . . .	21
1.5	Bewegung in der Hilbertebene . . . . .	25
1.6	Hilbertebene mit (P) . . . . .	29
1.7	Körper und Hilbertebenen mit (P) . . . . .	31
1.8	Hyperbolische Ebene . . . . .	43
<b>2</b>	<b>Topologie</b>	<b>48</b>
2.1	Metrische und topologische Räume . . . . .	48
2.2	Kompaktheit . . . . .	54
2.3	Trennungsaxiome . . . . .	59
<b>3</b>	<b>Kurven und Flächen</b>	<b>62</b>
3.1	Krümmung und ebene Kurven . . . . .	62
3.2	Raumkurven . . . . .	67
3.3	Flächen . . . . .	69

# 0 Einleitung

## 0.1 Was ist Geometrie?

Geometrie kann aus verschiedenen Blickwinkeln betrachtet werden, unter anderem:

- **Axiomatische Geometrie**
- **Topologie**
- **Differentialgeometrie**

In der **Differentialgeometrie** interessiert man sich für Größen wie Länge, Winkel, Krümmung und deren explizite Berechnung.

Im Gegensatz dazu betrachtet die **Topologie** nur das qualitative Verhalten geometrischer Objekte, unabhängig von genauen „Messungen“.

Ein klassisches Beispiel ist das **Königsberger Brückenproblem**:

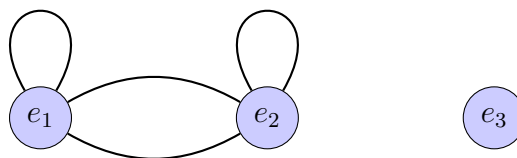
*Gibt es einen Weg, bei dem jede der sieben Brücken genau einmal überquert wird? Gibt es einen Rundweg mit dieser Eigenschaft?*

## 0.2 Grundbegriffe der Graphentheorie

**Definition 0.1** (Pseudograph)

Ein **Pseudograph** ist ein geordnetes Triple  $G = (E, K, r)$ , wobei:

- $E$  eine Menge von Eckpunkten ist,
- $K$  eine Menge von Kanten ist,
- $r : K \rightarrow \{(e, e') \in E \times E : e, e' \in E\}$  eine Abbildung ist, die jeder Kante ihre Endpunkte zuordnet.



**Bemerkung:** Das obige Beispiel illustriert die Eigenschaften eines Pseudographen, bei dem sowohl Schleifen (z. B. an  $e_1$ ) als auch mehrere Kanten zwischen zwei Eckpunkten (z. B. zwischen  $e_1$  und  $e_2$ ) zulässig sind. Der Knoten  $e_3$  ist in diesem Beispiel nicht mit anderen Knoten verbunden, was auch in einem Pseudographen erlaubt ist.

**Definition 0.2** (Eulerweg / Eulerkreis)

Es sei  $G$  ein Pseudograph. Ein **Kantenzug** in  $G$  ist eine endliche Folge von Kanten  $(k_1, \dots, k_n)$ . Ein Kantenzug heißt **Weg**, falls alle  $k_i$  paarweise verschieden sind. Ein Weg heißt **geschlossen**, falls  $k_1 = k_n$ . Ein Weg heißt **Eulerweg**, wenn er jede Kante des Graphen genau einmal enthält. Ein geschlossener Eulerweg heißt **Eulerkreis**.

**Definition 0.3** (Zusammenhängender Pseudograph)

Ein **Pseudograph** heißt **zusammenhängend**, wenn es zwischen je zwei Ecken einen Kantenzug gibt.

**Definition 0.4** (Grad einer Ecke)

Sei  $G$  ein Pseudograph und  $e \in E$  eine Ecke. Die **Ordnung** von  $e$  ist die Anzahl der von  $e$  ausgehenden Kanten.

**Satz 0.5** (Kriterium für Eulerkreis)

In einem zusammenhängenden, endlichen Pseudographen ohne Schleifen existiert genau dann ein **Eulerkreis**, wenn alle Ecken gerade Ordnung haben.

*Beweis. Hinrichtung:* Sei  $(e_1, \dots, e_n, e_1)$  ein Eulerkreis. Jede Ecke, die der Weg erreicht, muss durch eine andere Kante verlassen werden (keine Schleifen). Folglich hat jede durchquerte Ecke gerade Ordnung. Da der Pseudograph nach Voraussetzung zusammenhängend ist, wird jede Ecke durchquert.

*Rückrichtung:* Sei  $e_1$  eine beliebige Ecke. Wir konstruieren einen Kantenzug, beginnend mit einer Kante  $k_1$  in  $e_1$ , bis wir eine Ecke  $e_n$  erreichen, die keine unbenutzten Kanten mehr hat (und keine Kante doppelt vorkommt). Schematisch:

$$e_1 \xrightarrow{k_1} e_2 \xrightarrow{k_2} e_3 \dots \xrightarrow{k_{n-1}} e_n.$$

Nach Voraussetzung gilt  $e_1 = e_n$ , andernfalls hätte  $e_n$  eine ungerade Ordnung. Falls  $(k_1, \dots, k_n)$  ein Eulerweg ist, sind wir fertig. Ansonsten betrachten wir die Menge aller geschlossenen Wege wie den oben, mit beliebigen Startpunkten. Wir wählen einen solchen Weg mit maximaler Kantenzahl (möglich wegen Endlichkeit).

Wir behaupten, ein solcher Weg ist ein Eulerweg. Angenommen, dies sei nicht der Fall, dann gibt es einen weiteren geschlossenen Weg  $W_2$ , sodass  $W_1$  und  $W_2$  mindestens einen Punkt gemein haben (zusammenhängend). Indem wir den zusammengesetzten Weg betrachten (Laufe  $W_1$  bis zum gemeinsamen Punkt, dann  $W_2$ , dann den Rest von  $W_1$ ), erhalten wir einen geschlossenen Weg wie oben mit größerer Kantenzahl, was einen Widerspruch ergibt. □

**Satz 0.6** (Kriterium für Eulerwege)

In einem zusammenhängenden, endlichen Pseudographen ohne Schleifen existiert genau dann ein **Eulerweg**, der kein Eulerkreis ist, wenn genau zwei Ecken existieren, die ungerade Ordnung haben.

*Beweis. Hinrichtung:* Sei  $(e_1, \dots, e_n)$  ein Eulerweg, der kein Eulerkreis ist. Das bedeutet, dass  $e_1 \neq e_n$ . Da der Eulerweg jede Kante genau einmal durchläuft, haben die Ecken  $e_1$  und  $e_n$  ungerade Ordnung, da sie jeweils nur durch eine Kante betreten werden, aber durch keine weitere Kante verlassen werden. Alle anderen Ecken müssen gerade Ordnung haben, da sie jeweils sowohl betreten als auch verlassen werden.

*Rückrichtung:* Sei  $e_1$  und  $e_n$  die beiden Ecken mit ungerader Ordnung. Wir führen nun eine zusätzliche Kante  $k'$  zwischen  $e_1$  und  $e_n$  ein. Der neue Graph erfüllt nun die Voraussetzungen des Satzes 0.5, was bedeutet, dass ein Eulerkreis existiert. Bezeichnen wir diesen Eulerkreis als  $(k_1, k_2, \dots, k_{i-1}, k_i, k_{i+1}, \dots, k_n)$ , wobei ohne Einschränkung  $k_i = k'$  gilt. Durch Entfernen der Kante  $k'$  entsteht ein Eulerweg, der als  $(k_{i+1}, \dots, k_n, k_1, \dots, k_{i-1})$  beschrieben werden kann. Dieser Weg ist der gesuchte Eulerweg. □

Das **Königsberger Brückenproblem** kann als Graph aufgefasst werden. In diesem Graphen entsprechen die Ecken den Landmassen, und die Kanten stellen die Brücken dar. Nach Satz 0.5 existiert in diesem Graphen kein **Eulerkreis**. Nach Satz 0.6 existiert auch kein **Eulerweg**, da es mehr als zwei Ecken mit ungerader Ordnung gibt. Somit lässt sich das Königsberger Brückenproblem nicht durch einen Eulerweg oder -kreis lösen.

### 0.3 Axiomatische Geometrie

Es gibt mehrere Ansätze, die euklidische Ebene zu definieren und euklidische Geometrie zu betreiben. Eine Möglichkeit ist, ein explizites Modell anzugeben: Ein Punkt in der euklidischen Ebene ist ein Paar reeller Zahlen  $(x, y)$ , und der Abstand zwischen zwei Punkten  $(x_1, y_1)$  und  $(x_2, y_2)$  ist gegeben durch die Formel

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Mit dieser Definition haben wir die euklidische Ebene unter Verwendung von  $\mathbb{R}$  (dem Raum der reellen Zahlen) definiert.

Der Hauptvorteil dieses Zugangs ist seine Kürze, jedoch ist er wenig intuitiv. Es ist weder klar, warum der Abstand auf diese Art und Weise definiert wird, noch wie man weitere offensichtliche Fakten daraus ablesen kann.

Ein alternativer Zugang besteht darin, offensichtliche Fakten als Axiome vorzugeben und die Menge der in Frage kommenden Modelle zu untersuchen. Ein Vorteil dieses Ansatzes liegt in seiner Anpassungsfähigkeit – durch das Streichen oder Hinzufügen eines Axioms kann man verschiedene geometrische Systeme erzeugen.

Der erste, der diesen Ansatz systematisch gewählt hat, war **Euklid von Alexandria** um etwa 300 vor Christus in seinem Werk *Elemente*. Dieses Werk umfasst 13 Bücher und ist das einflussreichste Werk der (mathematischen) Geschichte. Aus heutiger Sicht

genügen die *Elemente* jedoch nicht der aktuellen mathematischen Strenge. So verwendet Euklid beispielsweise die Existenz von Schnittpunkten zweier **Kreise**, die einen gemeinsamen Punkt im Inneren haben. Diese Tatsache ist jedoch weder ein Axiom noch eine aus ihnen abgeleitete Aussage.

Seitdem wurden zahlreiche weitere Axiomensysteme vorgeschlagen. Das populärste stammt von **David Hilbert** (1899). Es ist zugleich das erste System, das den heutigen mathematischen Standards an Formalität und Strenge genügt.

Weitere Axiomensysteme sind von unabhängigem Interesse:

- **A. D. Alexandrov (1994)**: Einfach, elementar und praxisnah.
- **Friedrich Bachmann (1959)**: Basierend auf Symmetrien.
- **Alfred Tarski (1959)**: Minimalistisches System ohne Rückgriff auf die Mengenlehre.
- **George D. Birkhoff (1932)**: Basierend auf metrischen Konzepten.

# 1 Hilbert's Axiome

## 1.1 Inzidenzaxiome

**Definition 1.1** (Inzidenzgeometrie)

*Es seien Mengen  $\Pi$  und  $\Gamma \subseteq \mathcal{P}(\Pi)$  gegeben, deren Elemente wir jeweils als Punkte und Geraden bezeichnen wollen. Das Paar  $(\Pi, \Gamma)$  heißt Inzidenzgeometrie, falls es die folgenden Axiome erfüllt:*

*(I1) Für alle  $A, B \in \Pi$  mit  $A \neq B$  existiert genau eine Gerade  $g \in \Gamma$ , sodass  $A, B \in g$ .  
Zwei verschiedene Punkte liegen immer auf genau einer Geraden.*

*(I2) Für alle  $g \in \Gamma$  gilt  $|g| \geq 2$ .  
Jede Gerade enthält mindestens zwei Punkte.*

*(I3) Es existieren  $A, B, C \in \Pi$ , die paarweise verschieden sind, sodass für alle  $g \in \Gamma$  gilt:  $\{A, B, C\} \not\subseteq g$ .  
Es existieren drei paarweise verschiedene Punkte, die nicht alle auf einer Geraden liegen.*

Für  $A \in \Pi$  und  $g \in \Gamma$  mit  $A \in g$  sagen wir: *Der Punkt  $A$  liegt auf der Geraden  $g$ ; oder äquivalent: Die Gerade  $g$  geht durch den Punkt  $A$ .*

**Proposition 1.2** (Eindeutigkeit des Geradenschnittpunkts)

*Es sei  $(\Pi, \Gamma)$  eine Inzidenzgeometrie und  $g_1, g_2 \in \Gamma$  mit  $g_1 \neq g_2$ . Dann gilt:*

$$|g_1 \cap g_2| \leq 1.$$

*Beweis.* Angenommen,  $|g_1 \cap g_2| > 1$ . Sei  $A, B \in g_1 \cap g_2$  mit  $A \neq B$ . Dann sind sowohl  $g_1$  als auch  $g_2$  Geraden durch die Punkte  $A$  und  $B$ . Nach der Eindeutigkeitsaussage in (I1) gilt jedoch  $g_1 = g_2$ , ein Widerspruch zur Voraussetzung  $g_1 \neq g_2$ .

$$\Rightarrow |g_1 \cap g_2| \leq 1.$$

□

### Beispiel 1.3 (Cartesische Ebene)

Setze  $\Pi = \mathbb{R}^2$  und

$$\Gamma = \left\{ \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : ax + by + c = 0\} \subseteq \mathbb{R}^2 : a, b, c \in \mathbb{R} \text{ mit } (a, b) \neq (0, 0) \right\}.$$

Dies definiert eine Inzidenzgeometrie:

- Für (I1) betrachte  $(a_1, a_2), (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$ . Falls  $a_1 \neq b_1$ , so liegen sie auf der Geraden

$$y - a_2 = \frac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1}(x - a_1),$$

andernfalls auf der Geraden  $x = a_1$ .

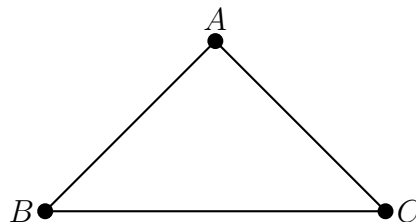
- Für (I2) nehme o.B.d.A.  $b \neq 0$  an und löse die Gleichung  $ax + by + c = 0$  für  $x_1 = 1$  und  $x_2 = 0$ . Wir erhalten zwei verschiedene Punkte auf der Geraden.
- Für (I3) betrachte die Punkte  $(0, 0), (0, 1), (1, 0)$ . Es gibt keine lineare Gleichung, die alle Punkte als Lösung enthält (sonst wäre  $a = b = c = 0$ ).

### Beispiel 1.4 (Endliche Inzidenzgeometrie)

Setze  $\Pi = \{A, B, C\}$  und  $\Gamma = \{X \subseteq \Pi : |X| = 2\}$ .

Dies definiert eine endliche Inzidenzgeometrie.

Schematisch dargestellt:



### Definition 1.5 (Isomorphismen von Inzidenzgeometrien)

Seien  $(\Pi_1, \Gamma_1)$  und  $(\Pi_2, \Gamma_2)$  Inzidenzgeometrien. Eine Abbildung  $f : \Pi_1 \rightarrow \Pi_2$  heißt Isomorphismus, falls  $f$  bijektiv ist und für  $g \in \Gamma_1$  gilt:

$$g \in \Gamma_1 \quad \Leftrightarrow \quad f(g) \in \Gamma_2.$$

Im Fall  $(\Pi_1, \Gamma_1) = (\Pi_2, \Gamma_2)$  spricht man von einem Automorphismus.

$\Rightarrow$  In Beispiel 1.4 gibt es 6 Automorphismen.

**Definition 1.6** (Parallelismus und Parallelenaxiom)

Zwei Geraden  $g_1, g_2 \in \Gamma$  einer Inzidenzgeometrie  $(\Pi, \Gamma)$  mit  $g_1 \neq g_2$  heißen parallel, falls  $g_1 \cap g_2 = \emptyset$ , und schreiben  $g_1 \parallel g_2$ . Wir definieren, dass jede Gerade  $g$  immer parallel zu sich selbst ist. Eine Inzidenzgeometrie  $(\Pi, \Gamma)$  erfüllt das Parallelenaxiom, falls:

$$(P) \quad \forall A \in \Pi \forall g \in \Gamma : |\{g' \in \Gamma : A \in g', g' \parallel g\}| \leq 1.$$

Für jeden Punkt  $A \in \Pi$  und jede Gerade  $g$  existiert höchstens eine Gerade  $g'$ , die  $A$  enthält und parallel zu  $g$  ist.

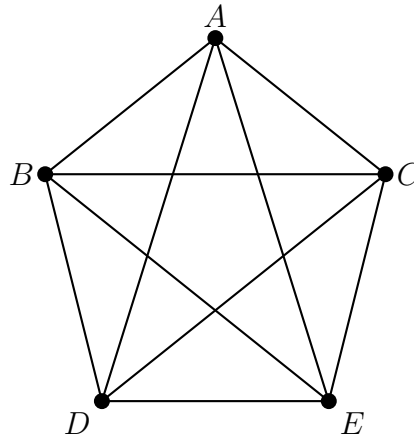
**Bemerkung:** Beispiel 1.3 und 1.4 erfüllen das Parallelenaxiom.

**Beispiel 1.7** (Endliche Inzidenzgeometrie ohne (P))

Es sei  $\Pi = \{A, B, C, D, E\}$ ,  $\Gamma = \{X \in \mathcal{P}(\Pi) : |X| = 2\}$

$\Rightarrow (\Pi, \Gamma)$  ist eine Inzidenzgeometrie, die das Parallelenaxiom (P) nicht erfüllt.

Schematisch dargestellt:



Das Axiomensystem sollte im Idealfall minimal sein, das heißt keine der Axiome sollte aus den übrigen folgen.

**Proposition 1.8** (Inzidenzaxiome + (P) sind unabhängig)

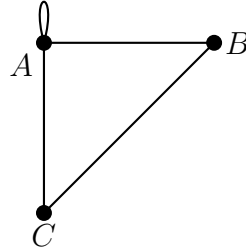
Die Axiome (I1), (I2), (I3), (P) sind unabhängig.

*Beweis.* Wir konstruieren für jedes Tripel der vier Axiome ein Paar  $(\Pi, \Gamma)$ , welches das letzte verbliebene nicht erfüllt.

- $(I1) + (I2) + (I3) \not\Rightarrow (P)$ : Siehe Beispiel 1.7.
- $(I1) + (I2) + (P) \not\Rightarrow (I3)$ : Sei  $\Pi = \{A, B\}$  und  $\Gamma = \{\{A, B\}\}$ .
- $(I2) + (I3) + (P) \not\Rightarrow (I1)$ : Sei  $\Pi = \{A, B, C\}$  und  $\Gamma = \emptyset$ .



- $(I1) + (I3) + (P) \not\Rightarrow (I2)$ : Sei  $\Pi = \{A, B, C\}$  und  $\Gamma = \{\{A, B\}, \{A, C\}, \{B, C\}, \{A\}\}$ .



□

## 1.2 Streckenordnungsaxiome

Wir wollen erklären, was es bedeutet, für einen Punkt zwischen zwei anderen zu liegen. Dies motiviert die nachfolgenden Zwischenaxiome:

**Definition 1.9** (Streckenordnungsaxiome)

Es sei  $(\Pi, \Gamma)$  eine Inzidenzgeometrie und  $Z \subseteq \{(A, B, C) \in \Pi^3 : |\{A, B, C\}| = 3\}$ . Wir schreiben  $A * B * C$ , falls  $(A, B, C) \in Z$  und sagen, dass  $B$  zwischen  $A$  und  $C$  liegt. Das Tripel  $(\Pi, \Gamma, Z)$  erfüllt die Streckenordnungsaxiome, falls:

(S1) Falls  $(A, B, C) \in Z$ :

- 1) Es existiert  $g \in \Gamma$  mit  $A, B, C \in g$ .
- 2)  $(C, B, A) \in Z$  (oder auch  $C * B * A$ ).

(S2) Für alle  $A, B \in \Pi$ ,  $A \neq B$ , existiert  $C \in \Pi$  mit  $A * B * C$ .

(S3) Für drei verschiedene Punkte auf einer Geraden gilt genau eine der folgenden drei Möglichkeiten:

$$A * B * C, \quad B * C * A, \quad C * A * B.$$

(S4) (Pasch, 1882)  $A, B, C$  nicht kollinear (in keiner Linie enthalten) und  $g \in \Gamma$  mit  $A, B, C \notin g$  und  $D \in g$  sodass  $A * D * B$ , impliziert:

- Entweder es existiert  $E_1 \in g$  mit  $A * E_1 * C$ , oder
- Es existiert  $E_2 \in g$  mit  $B * E_2 * C$ .

**Bemerkung:** Wir betrachten  $Z$  als die Menge der Tripel von Punkten, bei denen die Beziehung der „Zwischenliegenschaft“ zwischen den Punkten definiert ist.

**Definition 1.10** (Segmente und Dreiecke)

Sei  $(\Pi, \Gamma, Z)$  wie in Definition 1.9. Seien  $A, B \in \Pi$  mit  $A \neq B$ , dann setzen wir

$$\overline{AB} := \{A, B\} \cup \{C \in \Pi : A * C * B\}.$$

Sind  $A, B, C \in \Pi$  nicht kollinear, so definieren wir das Dreieck mit Eckpunkten  $A, B, C$  durch

$$\triangle ABC := \overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{CA}.$$

Wir sagen,  $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CA}$  seien die Seiten des Dreiecks.

**Bemerkung:** Die Endpunkte  $A, B$  eines Segments  $\overline{AB}$  sind eindeutig durch das Segment bestimmt. Ebenso sind die Eckpunkte  $A, B, C$  und die Seiten  $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CA}$  eines  $\triangle ABC$  eindeutig durch das Dreieck bestimmt.

Mit dieser Terminologie kann Paschs Axiom einfacher formuliert werden: Eine Gerade  $g$ , welche die Punkte  $A, B, C$  nicht enthält, schneidet  $\triangle ABC$  entweder in keiner oder in zwei Seiten.

**Proposition 1.11** (Trennung der Ebene)

Sei  $(\Pi, \Gamma, Z)$  wie in Definition 1.9, und sei  $g$  eine Gerade. Dann gilt:

$$\Pi \setminus g = M_1 \sqcup M_2$$

wobei  $M_1$  und  $M_2$  beide nicht leer sind, sodass die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1. Zwei Punkte  $A, B \in \Pi \setminus g$  gehören zur selben Seite/Menge (also  $M_1$  oder  $M_2$ ) genau dann, wenn  $\overline{AB} \cap g = \emptyset$ .
2. Zwei Punkte  $A, B \in \Pi \setminus g$  gehören zu verschiedenen Seiten/Mengen genau dann, wenn  $\overline{AB} \cap g \neq \emptyset$ .

Wir bezeichnen  $M_1$  und  $M_2$  als die verschiedenen Seiten von  $g$  und sagen „ $A$  und  $B$  liegen auf der gleichen Seite“ oder „ $A$  und  $B$  liegen auf gegenüberliegenden Seiten“.

*Beweis.* Folgt aus den nachfolgenden Lemmata 1.12 und 1.13 □

**Lemma 1.12** (Äquivalenzrelation)

Für  $A, B \in \Pi \setminus g$  wie in Proposition 1.11 definiere:

$$A \sim B \stackrel{\text{Def}}{\iff} \text{Entweder } A = B \text{ oder } \overline{AB} \cap g = \emptyset.$$

Durch  $\sim$  wird eine Äquivalenzrelation definiert.

*Beweis.* Nach Definition gilt  $A \sim A$  und  $A \sim B \implies B \sim A$  (wegen  $\overline{AB} = \overline{BA}$ ). Nichttrivial ist die Transitivität:

- **Fall 1:**  $A, B, C$  sind nicht kollinear.

- $A \sim B \implies \overline{AB} \cap g = \emptyset$  und  $B \sim C \implies \overline{BC} \cap g = \emptyset$ .
- Nach Paschs Axiom folgt  $\overline{AC} \cap g = \emptyset \implies A \sim C$ .

- **Fall 2:**  $A, B, C$  liegen auf einer Geraden  $h$ . Da  $A, B, C \notin g$  nach Voraussetzung, folgt  $g \neq h$ .

- Nach Proposition 1.2 gilt  $|g \cap h| \leq 1$ .
- Da nach (I2) jede Gerade mindestens zwei Punkte besitzt, ist  $g \setminus h \neq \emptyset$ .
- Sei  $D \in g \setminus h$ . Nach (S2) existiert ein  $E$  mit  $D * A * E$ .
- Nach (S1) folgt, dass  $D, A, E$  auf einer Geraden  $i$  liegen, was bedeutet, dass  $E \notin g$  (sonst wäre auch  $A \in g$  wegen (I1)), was  $i \neq g$  ergibt.
- Nach Proposition 1.2 gilt  $i \cap g = \{D\}$ .
- Nach (S3) folgt  $\overline{AE} \cap g = \emptyset$ , da sonst ein Punkt in  $i \cap g$  zwischen  $A$  und  $E$  liegen würde, was wegen (S3) nicht  $D$  ist. Damit hätten  $i$  und  $g$  mehrere Schnittpunkte, was zu einem Widerspruch führt.

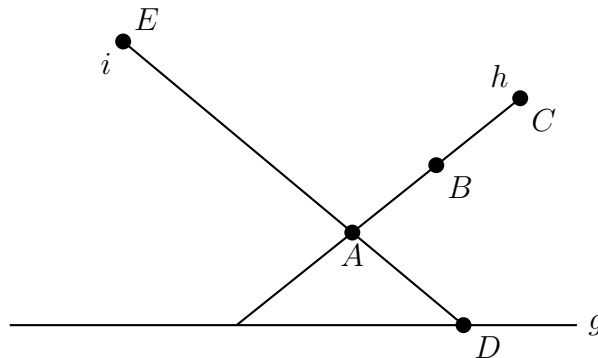
- Folglich gilt  $A \sim E$ . Nach Konstruktion ist  $E \notin h$ , sonst wäre  $D \in h$ , was im Widerspruch zur Wahl von  $D$  steht.

- Daraus folgt, dass  $A, B, E$  nicht kollinear sind.
- Daher gilt  $(A \sim E, A \sim B \implies B \sim E)$ .

- Analog gilt auch  $B, C, E$  sind nicht kollinear, und daher gilt  $(B \sim E, B \sim C \implies C \sim E)$ .

- Schließlich gilt auch  $A, C, E$  sind nicht kollinear, und daher gilt  $(A \sim E, C \sim E \implies A \sim C)$ .

Daher gilt  $(A \sim B, B \sim C \implies A \sim C)$  und die Transitivität ist gezeigt. □



**Lemma 1.13** ( $\sim$  hat zwei Äquivalenzklassen)

In der Situation von Lemma 1.12 gilt: Die Äquivalenzrelation  $\sim$  besitzt genau zwei Äquivalenzklassen.

*Beweis.* Nach (I3) existiert ein Punkt  $A \notin g$ , sodass mindestens eine Äquivalenzklasse existiert. Sei nun  $D \in g$  beliebig (existiert nach (I2)), und es folgt nach (S2), dass es einen Punkt  $C$  gibt, sodass  $A * D * C$ , was bedeutet, dass  $\overline{AC} \cap g \neq \emptyset$ . Daraus folgt  $A \not\sim C$ , was mindestens zwei Äquivalenzklassen impliziert.

Nun müssen wir zeigen, dass es höchstens zwei Äquivalenzklassen gibt. Dazu wählen wir  $A, B, C$  mit  $A \not\sim C$  und  $B \not\sim C$  und zeigen  $A \sim B$ , wodurch die Behauptung folgt.

**Fall 1:**  $A, B, C$  sind nicht kollinear. Betrachte das Dreieck  $\triangle ABC$ :

- Da  $A \not\sim C$ , gilt  $\overline{AC} \cap g \neq \emptyset$ .
- Ebenso gilt  $B \not\sim C$ , daher ist  $\overline{BC} \cap g \neq \emptyset$ .
- Nach Paschs Axiom folgt, dass  $\overline{AB} \cap g = \emptyset$ , also  $A \sim B$ .

**Fall 2:**  $A, B, C$  liegen auf der gleichen Geraden  $h$ . Wie im Beweis von Lemma 1.12, Fall 2, wählen wir  $D \in g \setminus h$ .

- Nach (S2) existiert ein Punkt  $E$ , sodass  $D * A * E$ , was bedeutet, dass  $A \sim E$  (wie im vorherigen Lemma).
- Da  $A \not\sim C$  (Voraussetzung), folgt  $C \not\sim E$  (sonst  $A \sim E, E \sim C$  würde  $A \sim C$  implizieren).
- Nun, da  $B, C, E$  nicht kollinear sind und wir wissen, dass  $E \not\sim C$  und  $B \not\sim C$ , folgt  $B \sim E$ .
- Wie in Lemma 1.12 gilt  $A \sim E$  und somit  $A \sim B$ .

□

**Korollar 1.14** (Trennung der Geraden)

Es sei  $(\Pi, \Gamma, Z)$  wie in Definition 1.9,  $A \in g \in \Gamma$ . Es existieren  $M'_1, M'_2 \subseteq g \setminus \{A\}$ , beide nicht leer, sodass  $g \setminus \{A\} = M'_1 \sqcup M'_2$  (die zwei Seiten von  $g$  bezüglich  $A$ ) und Folgendes gilt:

1.  $B, C \in M'_1 \iff A \notin \overline{BC}$  oder  $B, C \in M'_2$  (d. h.  $B$  und  $C$  liegen auf derselben Seite von  $A$ ).
2.  $B \in M'_1, D \in M'_2 \iff A \in \overline{BD}$  (d. h.  $B$  und  $D$  liegen auf verschiedenen Seiten von  $A$ ).

*Beweis.* Nach (I3) existiert ein Punkt  $E \notin g$ . Betrachte nun eine Gerade  $h$  durch  $A$  und  $E$ . Nach Proposition 1.11 gilt:

$$\Pi \setminus h = M_1 \sqcup M_2.$$

Setze  $M'_1 := M_1 \cap g$  und  $M'_2 := M_2 \cap g$ .

- Die Zerlegung  $M'_1 \cup M'_2$  ist disjunkt.
- Sind  $B, C \in M'_1$ , so gilt:

$$\overline{BC} \cap h = \emptyset \iff A \notin \overline{BC}.$$

Ebenso gilt: Sind  $B \in M'_1, D \in M'_2$ , so folgt:

$$\overline{BD} \cap h \neq \emptyset.$$

Nach Proposition 1.11 ist

$$\emptyset \neq \overline{BD} \cap h \subseteq g \cap h = \{A\} \iff \overline{BD} \cap h = \{A\}.$$

Zu zeigen bleibt, dass  $M'_1$  und  $M'_2$  nicht leer sind. Aus (I2) folgt, dass ein Punkt  $D \in g \setminus \{A\}$  existiert. Nach (S2) existiert ein Punkt  $D \in \Pi \setminus \{A, B\}$  mit  $B * A * D$ , was impliziert, dass  $D \in g$  und  $A \in \overline{BD}$ . Nach Proposition 1.11 folgt dann  $B \in M'_1$  und  $D \in M'_2$ . □

**Definition 1.15** (Winkel)

Sei  $(\Pi, \Gamma, Z)$  wie in Definition 1.9. Für  $A, B \in \Pi$  mit  $A \neq B$  ist der **Strahl**  $(\overrightarrow{AB})$  von  $A$  in Richtung  $B$  die Menge

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} := \{A\} \cup \{p \in \Pi : p \text{ liegt auf derselben Seite wie } B \\ \text{bezüglich der Geraden, die durch } A \text{ und } B \text{ geht}\}. \end{aligned}$$

Der Punkt  $A$  heißt hierbei **Ursprung** des Strahls.

Ein **Winkel**  $\angle BAC$  ist die Vereinigung zweier nicht auf derselben Geraden liegender Strahlen  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$  mit gleichem Ursprung.

Das **Innere** eines Winkels  $\angle BAC$  ist definiert als die Menge

$$\begin{aligned} \{p \in \Pi : p \text{ liegt auf derselben Seite der Geraden durch } A \text{ und } B \text{ wie } C \\ \text{und auf derselben Seite der Geraden durch } A \text{ und } C \text{ wie } B\}. \end{aligned}$$

Das **Innere** eines Dreiecks  $\triangle ABC$  ist der Schnitt der Inneren der Winkel  $\angle ABC, \angle BCA, \angle CAB$ .

**Proposition 1.16** (Crossbar Satz)

Sei  $(\Pi, \Gamma, Z)$  wie in Definition 1.9. Sei  $\angle BAC$  ein Winkel,  $D$  ein Punkt im Inneren von  $\angle BAC$ .

Dann gilt:  $\overline{AD}$  schneidet  $\overline{BC}$ .

*Beweis.* Nutze (S2), um einen Punkt  $E$  zu konstruieren mit  $E * A * C$ . Betrachte das Dreieck  $\triangle EBC$ . Nach Konstruktion schneidet die Gerade  $g$  durch  $\overline{AD}$  die Seite  $\overline{EC}$  in  $A$ . Falls  $g \cap \overline{BE} = \emptyset$ , folgt mit dem Pasch-Axiom  $g \cap \overline{BC} \neq \emptyset$  (beachte  $B \notin g$ ).

Bezeichne die Gerade durch  $A$  und  $B$  mit  $h$ . Es gilt nach Proposition 1.2, dass  $\overline{BE} \cap h = \{B\}$ . Nach Proposition 1.11 liegen alle Punkte von  $\overline{BE} \setminus \{B\}$  auf derselben Seite von  $h$ .

Angenommen, es existiert ein Punkt  $P \in \overline{EB}$  mit  $\overline{PE} \cap h \neq \emptyset$ , dann ist  $\overline{PE} \cap h = \{B\}$ . Das impliziert  $B \in \overline{PE}$ . Nach Definition 1.10 ist dies äquivalent zu  $P * B * E$ , was mit  $E * P * B$  einen Widerspruch zu (S3) erzeugt.

Nach Konstruktion liegen  $E$  und  $C$  auf verschiedenen Seiten bezüglich  $h$ . Analog dazu liegen alle Punkte von  $\overline{AC} \setminus \{A\}$  auf derselben Seite wie  $C$ . Nach Lemma 1.12 liegen alle Punkte von  $\overrightarrow{EB} \setminus \{B\}$  und  $C$  auf verschiedenen Seiten von  $h$ .

Da  $D$  im Inneren von  $\angle BAC$  liegt, sind  $D$  und  $C$  auf derselben Seite von  $h$ . Nach Korollar 1.14 liegt  $\overrightarrow{AD} \setminus \{A\}$  ebenfalls auf derselben Seite von  $h$  wie  $C$ . Somit folgt mit Proposition 1.11, dass  $\overrightarrow{BE} \cap \overrightarrow{AD} = \emptyset$ .

Ein analoges Argument, bei dem die Gerade  $g$  die Rolle von  $h$  einnimmt, zeigt, dass  $\overline{BE} \setminus \{E\}$  auf derselben Seite von  $g$  liegt und nicht den Strahl mit Ursprung  $A$  und entgegengesetzter Richtung von  $\overrightarrow{AD}$  schneiden kann.

Insgesamt schneidet  $\overline{BE}$  die Gerade durch  $A$  und  $D$  nicht. Also gilt  $g \cap \overline{BC} \neq \emptyset$ , d.h., es existiert ein Punkt  $F \in \overline{BC} \cap g$ .

Zu zeigen bleibt, dass  $F \in \overrightarrow{AD}$  liegt. Beachte, dass  $B$  und  $F$  auf derselben Seite der Geraden durch  $A$  und  $C$  liegen (da  $F \in \overline{BC} \setminus \{C\}$  auf derselben Seite wie  $B$ ). Ebenso sind  $B$  und  $D$  auf derselben Seite der Geraden durch  $A$  und  $C$ . Nach Proposition 1.11 folgt, dass  $F$  auf derselben Seite der Geraden durch  $A$  und  $C$  liegt wie  $D$ . Mit Korollar 1.14 folgt, dass  $D$  und  $F$  auf derselben Seite von  $A$  auf der Geraden durch  $A$  und  $D$  liegen. □

### 1.3 Kongruenzaxiome für Strecken

**Definition 1.17** (Kongruenzaxiome für Strecken)

Eine Geometrie  $(\Pi, \Gamma, Z)$  wie in Definition 1.9 erfüllt die Kongruenzaxiome für Strecken, falls für alle  $\overline{AB} \subseteq \Pi$  mit  $A, B \in \Pi$  und  $A \neq B$  die Relation  $\cong$  folgende Axiome erfüllt:

**(K1)** Sei  $\overline{AB}$  eine Strecke und  $S$  ein Strahl mit Ursprung  $C \in \Pi$ . Dann existiert genau ein  $D \in S$ , sodass  $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ .

**(K2)** Es gilt:

- $\overline{AB} \cong \overline{CD}$  und  $\overline{AB} \cong \overline{EF} \implies \overline{CD} \cong \overline{EF}$ ,
- jedes Segment ist zu sich selbst kongruent.

**(K3)** Sind  $A, B, C$  paarweise verschieden mit  $A * B * C$  und  $D, E, F$  mit  $D * E * F$ , so folgt:

$$\overline{AB} \cong \overline{DE} \quad \text{und} \quad \overline{BC} \cong \overline{EF} \implies \overline{AC} \cong \overline{DF}.$$

**Lemma 1.18** (Kongruenz ist eine Äquivalenzrelation)

Sei  $(\Pi, \Gamma, Z)$  wie in Definition 1.17. Dann ist  $\cong$  auf der Menge

$$\{\overline{AB} \subseteq \Pi : A \neq B, A, B \in \Pi\}$$

eine Äquivalenzrelation.

*Beweis.* Die Reflexivität folgt direkt aus **(K2)**, da jedes Segment zu sich selbst kongruent ist.

Die Symmetrie ergibt sich ebenfalls aus **(K2)**: Aus  $\overline{AB} \cong \overline{CD}$  und  $\overline{AB} \cong \overline{AB}$  folgt, dass  $\overline{CD} \cong \overline{AB}$ .

Die Transitivität folgt ebenfalls aus **(K2)**: Ist  $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ , so gilt auch  $\overline{CD} \cong \overline{AB}$ .

Kombiniert mit  $\overline{CD} \cong \overline{EF}$  folgt, dass  $\overline{AB} \cong \overline{EF}$ . □

**Definition 1.19** (Addition von Strecken)

Sei  $(\Pi, \Gamma, Z, \cong)$  wie in Definition 1.17, und seien  $A, B, C, D \in \Pi$  mit  $A \neq B$  und  $C \neq D$ . Weiter sei  $S$  der eindeutige Strahl auf der Geraden durch  $A$  und  $B$  mit Ursprung  $B$ , der  $A$  nicht enthält. Nach **(K1)** existiert ein eindeutiger Punkt  $E \in S$ , sodass

$$\overline{BE} \cong \overline{CD}.$$

Wir definieren die Addition der Strecken durch

$$\overline{AB} + \overline{CD} := \overline{AE}.$$

**Lemma 1.20** (Addition ist wohldefiniert)

Sei  $(\Pi, \Gamma, Z, \cong)$  wie in Definition 1.17. Für

$$\overline{AB} \cong \overline{A'B'} \quad \text{und} \quad \overline{CD} \cong \overline{C'D'}$$

gilt

$$\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{A'B'} + \overline{C'D'}.$$

*Beweis.* Seien  $E$  und  $E'$  die Punkte, die in der Definition der Addition von Strecken für

$$\overline{AE} = \overline{AB} + \overline{CD} \quad \text{und} \quad \overline{A'E'} = \overline{A'B'} + \overline{C'D'}$$

auftauchen. Nach Konstruktion gilt  $A * B * E$  und  $A' * B' * E'$ .

Aus  $\overline{BE} \cong \overline{CD} \cong \overline{C'D'} \cong \overline{B'E'}$  folgt, dass

$$\overline{BE} \cong \overline{B'E'}.$$

Mit **(K3)** ergibt sich daher

$$\overline{AE} \cong \overline{A'E'},$$

und somit ist

$$\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{A'B'} + \overline{C'D'}.$$

□

**Lemma 1.21** (Addition ist kommutativ und assoziativ)

Sei  $(\Pi, \Gamma, Z, \cong)$  wie in Definition 1.17. Für Segmente  $\overline{AB}$ ,  $\overline{CD}$ ,  $\overline{EF}$  gilt:

1.  $\overline{AB} + \overline{CD} \cong \overline{CD} + \overline{AB}$ ,
2.  $\overline{AB} + (\overline{CD} + \overline{EF}) \cong (\overline{AB} + \overline{CD}) + \overline{EF}$ .

**Lemma 1.22** (Differenz von Segmenten)

Sei  $(\Pi, \Gamma, Z, \cong)$  wie in Definition 1.17. Seien  $A, B, C \in \Pi$  paarweise verschieden mit  $A * B * C$  sowie  $E, F \in \Pi$  paarweise verschieden auf einem Strahl  $S$  mit Ursprung  $D$ . Wenn

$$\overline{AB} \cong \overline{DE} \quad \text{und} \quad \overline{AC} \cong \overline{DF}$$

dann gilt  $D * E * F$  und  $\overline{BC} \cong \overline{EF}$ . Das Segment  $\overline{BC}$  ist also die Differenz von  $\overline{AC}$  und  $\overline{AB}$ .

*Beweis.* Sei  $F'$  der eindeutige Punkt auf einem Strahl  $S'$  mit Ursprung  $E$  auf der anderen Seite von  $D$ , sodass  $\overline{BC} \cong \overline{EF'}$  nach **(K1)**. Es gilt außerdem  $D * E * F'$ , was nach **(K3)** impliziert, dass  $\overline{AC} \cong \overline{DF'}$ .

Nun beachten wir, dass  $F, F' \in S$ . Nach Konstruktion gilt  $D \notin \overline{EF}$ , und wegen  $D * E * F'$  folgt nach **(S3)**, dass  $E * D * F'$  ebenfalls nicht erfüllt ist. Dies bedeutet, dass  $D \notin \overline{EF'}$ . Also liegen  $F$  und  $F'$  auf der gleichen Seite von  $D$ .

Da zudem  $\overline{AC} \cong \overline{DF}$  vorausgesetzt ist, folgt aus **(K2)**, dass  $\overline{DF} \cong \overline{DF'}$ . Durch **(K1)** ergibt sich daraus  $F = F'$ . Somit gilt  $D * E * F$  und  $\overline{BC} \cong \overline{EF}$ . □

**Definition 1.23** (Die Relation  $<$  für Segmente)

Sei  $(\Pi, \Gamma, Z, \cong)$  wie in Definition 1.17. Für Segmente  $\overline{AB}$  und  $\overline{CD}$  sagen wir:

$$\overline{AB} < \overline{CD}$$



falls ein Punkt  $E$  existiert mit  $C * E * D$  und  $\overline{AB} \cong \overline{CE}$ . In diesem Fall heißt  $\overline{CD}$  größer als  $\overline{AB}$ , und wir schreiben auch  $\overline{CD} > \overline{AB}$ .

**Proposition 1.24** (Wohldefinierte Ordnung)

Sei  $(\Pi, \Gamma, Z, \cong)$  wie in Definition 1.17. Es gilt:

1. Für  $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$  und  $\overline{CD} \cong \overline{C'D'}$  gilt:

$$\overline{AB} < \overline{CD} \iff \overline{A'B'} < \overline{C'D'}.$$

2. Die Relation  $<$  liefert eine strenge Totalordnung:

$$(2.1) \quad \overline{AB} < \overline{CD} \text{ und } \overline{CD} < \overline{EF} \implies \overline{AB} < \overline{EF}.$$

- (2.2) Für  $\overline{AB}, \overline{CD}$  gilt genau eine der folgenden drei Möglichkeiten:

$$\overline{AB} < \overline{CD}, \quad \overline{AB} \cong \overline{CD}, \quad \overline{AB} > \overline{CD}.$$

*Beweis. Zu (1):*

**Hinrichtung:** Es gelte  $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$ ,  $\overline{CD} \cong \overline{C'D'}$  und  $\overline{AB} < \overline{CD}$ . Nach Definition existiert ein Punkt  $E$  mit  $C * E * D$  und  $\overline{CE} \cong \overline{AB}$ . Sei  $E'$  der eindeutige Punkt auf dem Strahl  $\overrightarrow{C'D'}$ , sodass  $\overline{C'E'} \cong \overline{CE}$  (nach (K1)). Nach Lemma 1.22 gilt dann  $C' * E' * D'$ . Da  $\overline{A'B'} \cong \overline{AB} \cong \overline{CE} \cong \overline{C'E'}$ , folgt  $\overline{A'B'} < \overline{C'D'}$ .

**Rückrichtung:** Das Argument folgt analog, indem man von  $\overline{A'B'} < \overline{C'D'}$  ausgeht.

**Zu (2.1):**

Es sei  $\overline{AB} < \overline{CD}$  und  $\overline{CD} < \overline{EF}$ . Nach Voraussetzung existieren Punkte  $X \in \overrightarrow{CD}$  und  $Y \in \overrightarrow{EF}$  mit  $C * X * D$ ,  $\overline{CX} \cong \overline{AB}$ , sowie  $E * Y * F$ ,  $\overline{EY} \cong \overline{CD}$ . Sei  $Z \in \overrightarrow{EF}$  der eindeutige Punkt mit  $\overline{EZ} \cong \overline{CX}$  (nach (K1)).

Lemma 1.22 impliziert  $E * Z * Y$ , und somit gilt  $E * Z * F$ . Wegen der Transitivität von  $\cong$  folgt  $\overline{EZ} \cong \overline{CX} \cong \overline{AB}$ , also  $\overline{AB} < \overline{EF}$ .

**Zu (2.2):**

Betrachte  $\overline{AB}$  und  $\overline{CD}$ . Nach Definition existiert ein Punkt  $E \in \overrightarrow{CD}$  mit  $\overline{AB} \cong \overline{CE}$  (nach (K1)). Dann gilt genau eine der folgenden Möglichkeiten:

- $E = D$ : Dies entspricht  $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ .
- $C * E * D$ : Dies entspricht  $\overline{AB} < \overline{CD}$ .
- $C * D * E$ : Dies entspricht  $\overline{CD} < \overline{AB}$ .

Die Konstellation  $D * C * E$  ist ausgeschlossen, da  $D$  und  $E$  auf der gleichen Seite von  $C$  liegen müssen. Da die Möglichkeiten disjunkt sind, kann nur eine von ihnen zutreffen.

Damit ist die Aussage gezeigt. □

**Definition 1.25** (Kongruenzaxiome für Winkel)

Es sei  $(\Pi, \Gamma, Z, \cong)$  wie in Definition 1.17. Wir führen auf der Menge

$$\{\angle ABC : A, B, C \in \Pi \text{ nicht kollinear}\}$$

eine Relation  $\cong_w$  ein, die als **Kongruenzrelation für Winkel** bezeichnet wird, falls die folgenden Kongruenzaxiome erfüllt sind:

(K4) Sei  $\angle BAC$  ein Winkel und  $\overrightarrow{DF}$  ein Strahl. Dann existiert genau ein Strahl  $\overrightarrow{DE}$  auf einer gegebenen Seite der Geraden durch  $D, F$ , sodass

$$\angle BAC \cong_w \angle EDF.$$

(K5) Für drei Winkel  $\alpha, \beta, \gamma$  gilt:

$$\alpha \cong_w \beta \quad \text{und} \quad \beta \cong_w \gamma \implies \alpha \cong_w \gamma,$$

und jeder Winkel ist zu sich selbst kongruent.

(K6) (Satz über Seite-Winkel-Seite, SWS) Seien Dreiecke  $\triangle ABC$  und  $\triangle DEF$  gegeben, mit

$$\overline{AB} \cong \overline{DE}, \quad \overline{AC} \cong \overline{DF}, \quad \angle BAC \cong_w \angle EDF.$$

Dann folgt:

$$\overline{BC} \cong \overline{EF}, \quad \angle ACB \cong_w \angle DFE, \quad \angle CBA \cong_w \angle FED.$$

Ein Tupel  $(\Pi, \Gamma, Z, \cong, \cong_w)$ , das die oben genannten Axiome erfüllt, heißt **Hilbertebene**.

**Lemma 1.26** ( $\cong_w$  ist eine Äquivalenzrelation)

Auf einer Hilbertebene ist  $\cong_w$  auf der Menge

$$\{\angle ABC : A, B, C \in \Pi \text{ nicht kollinear}\}$$

eine Äquivalenzrelation.

*Beweis.* Der Beweis erfolgt analog zu Lemma 1.18. □

**Definition 1.27** (Summe von Winkeln)

In einer Hilbertebene, sei  $\angle BAC$  ein Winkel und  $\overrightarrow{AD}$  ein Strahl im Inneren von  $\angle BAC$ . Wir definieren die Summe der Winkel durch:

$$\angle DAC + \angle BAD := \angle BAC.$$

**Definition 1.28** (Nebenwinkel)

In einer Hilbertebene, sei  $\angle BAC$  ein Winkel und  $D \in \overrightarrow{AC}$ , wobei  $D$  auf der anderen Seite von  $C$  bezüglich  $A$  liegt. Dann nennen wir  $\angle DAB$  den Nebenwinkel von  $\angle BAC$ .

**Proposition 1.29** (Nebenwinkel sind kongruent)

In einer Hilbertebene, sei  $\angle BAD$  ein Nebenwinkel von  $\angle BAC$ . Ist  $\angle B'A'D'$  Nebenwinkel von  $\angle B'A'C'$  und  $\angle BAC \cong_w \angle B'A'C'$ , so gilt:

$$\angle BAD \cong_w \angle B'A'D'.$$

*Beweis.* Wir können mit Hilfe von (K4) annehmen, dass  $AB \cong A'B'$ ,  $AC \cong A'C'$ , und  $AD \cong A'D'$ .

Konstruiere die Geraden  $\overline{BD}$ ,  $\overline{BC}$ ,  $\overline{B'D'}$  und  $\overline{B'C'}$ . Betrachte die Dreiecke  $\triangle ABC$  und  $\triangle A'B'C'$ . Nach Voraussetzung gilt:

$$AB \cong A'B', \quad AC \cong A'C', \quad \angle BAC \cong_w \angle B'A'C'.$$

Aus (K6) folgt:

$$BC \cong B'C' \quad \text{und} \quad \angle BCA \cong_w \angle B'C'A'.$$

Betrachte nun die Dreiecke  $\triangle DBC$  und  $\triangle D'B'C'$ . Da  $AC \cong A'C'$ ,  $AD \cong A'D'$ , und  $D * A * C$ ,  $D' * A' * C'$  gilt, folgt mit (K3):

$$CD \cong C'D', \quad \angle BCA \cong_w \angle B'C'A', \quad BC \cong B'C'.$$

Mit (K6) erhalten wir:

$$BD \cong B'D' \quad \text{und} \quad \angle BDA \cong_w \angle B'D'A'.$$

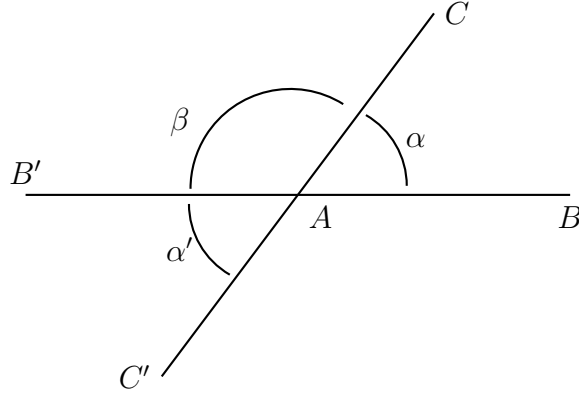
Zusammen mit der Tatsache, dass  $DA \cong D'A'$  gilt, folgt erneut mit (K6), dass:

$$\angle BAD \cong_w \angle B'A'D'.$$

□

**Definition 1.30** (Gegenwinkel)

In einer Hilbertebene sei  $\alpha = \angle BAC$  ein Winkel. Seien  $B'$  und  $C'$  Punkte auf der jeweils anderen Seite von  $B$  bzw.  $C$  bezüglich  $A$  auf  $\overrightarrow{AB}$  bzw.  $\overrightarrow{AC}$ . Dann heißt  $\alpha' = \angle B'AC'$  der Gegenwinkel von  $\alpha$ .



**Korollar 1.31** (Gegenwinkel sind kongruent)

*In einer Hilbertebene sind Gegenwinkel zueinander kongruent.*

*Beweis.* Mit den Bezeichnungen aus der Skizze gilt:  $\alpha, \alpha'$  sind Nebenwinkel von  $\beta$ . Da  $\beta$  kongruent zu sich selbst ist, folgt aus Proposition 1.29:

$$\alpha \cong_w \alpha'$$

□

**Proposition 1.32** (Summe von Winkeln)

*In einer Hilbertebene seien  $\angle BAC$  und ein Strahl  $\overrightarrow{AD}$  im Inneren von  $\angle BAC$  gegeben. Gilt*

$$\angle D'A'C' \cong_w \angle DAC \quad \text{und} \quad \angle B'A'D' \cong_w \angle BAD,$$

*und liegen  $\overrightarrow{A'B'}$ ,  $\overrightarrow{A'C'}$  auf gegenüberliegenden Seiten von  $\overrightarrow{A'D'}$ , so bilden  $\overrightarrow{A'B'}$  und  $\overrightarrow{A'C'}$  einen Winkel und es gilt:*

$$\angle B'A'C' \cong_w \angle BAC \quad \text{und} \quad \overrightarrow{A'D'} \text{ liegt im Inneren von } \angle B'A'C'.$$

*Beweis.* Konstruiere die Gerade  $BC$  gemäß (K1). Nach Proposition 1.16 gilt  $\overrightarrow{AD} \cap BC \neq \emptyset$ . Ersetze  $D$  durch den Schnittpunkt, dann können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit (o.B.d.A.) annehmen:  $B * D * C$ .

Durch Ersetzen der Punkte  $B', C', D'$  durch Punkte auf den gleichen Strahlen können wir annehmen:

$$AB \cong A'B', \quad AC \cong A'C', \quad AD \cong A'D'.$$

Zusammen mit der Voraussetzung folgt aus (K6):

$$BD \cong B'D', \quad \angle BDA \cong_w \angle B'D'A', \quad DC \cong D'C', \quad \angle ADC \cong_w \angle A'D'C'.$$

Sei  $E' \in \overrightarrow{B'D'}$  mit  $B' * D' * E'$ . Nach Konstruktion ist  $\angle A'D'E'$  ein Nebenwinkel zu

$\angle A'D'B' \cong_w \angle ADB$ . Aus Proposition 1.29 folgt:

$$\angle A'D'E' \cong_w \angle ADC \cong_w \angle A'D'C'.$$

Beide Winkel liegen auf derselben Seite von  $\overrightarrow{A'B'}$ . Mit (K4) folgt:

$$\angle A'D'E' \cong_w \angle ABC.$$

Daraus folgt:  $B', D', C'$  liegen auf einer Geraden. Nach (K3) gilt daher  $BC \cong B'C'$ .

Aus (K6) oben wissen wir auch:

$$\angle ABD \cong_w \angle A'B'D', \quad BC \cong B'C', \quad AB \cong A'B',$$

woraus erneut mit (K6) folgt:

$$\angle BAC \cong_w \angle B'A'C'.$$

Da  $\angle D'A'C'$  ein Winkel ist, sind  $A', B', C'$  nicht kollinear. Somit ist  $\angle B'A'C'$  ein Winkel. Da  $B'C'$  auf verschiedenen Seiten von  $\overrightarrow{A'D'}$  liegen, folgt  $B' * D' * C'$  und somit liegt  $\overrightarrow{A'D'}$  im Inneren von  $\angle B'A'C'$ .  $\square$

**Definition 1.33** (Die Relation  $<$  für Winkel)

In einer Hilbertebene seien  $\angle BAC$  und  $\angle EDF$  zwei Winkel. Wir sagen:

$$\angle BAC < \angle EDF,$$

falls ein Strahl  $\overrightarrow{DG}$  existiert, der im Inneren von  $\angle EDF$  liegt, sodass gilt:

$$\angle BAC \cong_w \angle GDF.$$

**Lemma 1.34** (Wohldefinierte Ordnung für Winkel)

In einer Hilbertebene gilt:

1. Falls  $\alpha \cong_w \alpha'$  und  $\beta \cong_w \beta'$ , so folgt:

$$\alpha < \beta \iff \alpha' < \beta'.$$

2. Die Relation  $<$  liefert eine strenge Totalordnung auf den Kongruenzklassen von Winkeln:

$$(2.1) \quad \alpha < \beta \text{ und } \beta < \gamma \implies \alpha < \gamma.$$

(2.2) Für Winkel  $\alpha, \beta$  gilt genau eine der folgenden Relation:

$$\alpha < \beta, \quad \alpha = \beta, \quad \alpha > \beta.$$

*Beweis.* Analog zu Proposition 1.24. □

**Definition 1.35** (Rechter Winkel)

In einer Hilbertebene heißt ein Winkel  $\alpha$  **rechter Winkel**, falls er kongruent zu einem seiner Nebenwinkel ist. Zwei Geraden heißen **orthogonal**, falls sie sich schneiden und einer (und daher alle) der durch ihren Schnittpunkt gebildeten Winkel rechte Winkel sind.

**Proposition 1.36** (Alle Rechte Winkel sind kongruent)

In einer Hilbertebene sind zwei rechte Winkel kongruent.

*Beweis.* Sei  $\alpha = \angle CAB$  und  $\alpha' = \angle C'A'B'$  rechte Winkel. Nach Definition sind sie kongruent zu ihren jeweiligen Nebenwinkeln  $\beta$  und  $\beta'$ .

Angenommen,  $\alpha \not\cong_w \alpha'$ , dann folgt nach Lemma 1.34, dass  $\alpha < \alpha'$  oder  $\alpha' < \alpha$ . Ohne Einschränkung sei  $\alpha < \alpha'$ , d.h., es existiert ein Strahl  $\overrightarrow{A'E'}$  im Inneren von  $\alpha'$ , sodass  $\alpha \cong_w \angle E'A'B'$ .

Nun folgt, dass  $\overrightarrow{A'C'}$  im Inneren von  $\angle D'A'E'$  liegt, was wiederum bedeutet, dass  $\beta' < \angle E'A'D'$ . Aber  $\angle E'A'D'$  ist ein Nebenwinkel von  $\angle E'A'B'$ , und da  $\angle E'A'B' \cong_w \alpha$ , folgt nach Proposition 1.29, dass  $\beta \cong_w \angle E'A'D'$ .

Somit gilt  $\beta' < \beta$ , aber da  $\alpha \cong_w \beta$  und  $\alpha' \cong_w \beta'$ , ergibt sich der Widerspruch:

$$\alpha' < \alpha \quad \text{und} \quad \alpha < \alpha'.$$

Daher muss  $\alpha \cong_w \alpha'$  gelten, und alle rechten Winkel sind kongruent. □

## 1.4 Geometrie in der Hilbertebene

**Proposition 1.37** (Pons Asinorum)

In einer Hilbertebene sei  $\triangle ABC$  ein Dreieck. Dann gilt:

$$\overline{AB} \cong \overline{AC} \iff \angle ABC \cong_w \angle ACB.$$

*Beweis. Hinrichtung:* Angenommen,  $\overline{AB} \cong \overline{AC}$ . Nach (S2) existieren Punkte  $D \in \overline{AB}$  und  $E \in \overline{AC}$  mit  $A * B * D$  und  $A * C * E$ . Nach (K1) existieren außerdem Punkte  $F \in \overline{AD}$  und  $G \in \overline{AE}$  mit  $A * B * F$ ,  $A * C * G$  und  $\overline{AF} \cong \overline{AG}$ .

Nach (K6) gilt:

$$\angle AFC \cong_w \angle AGB \quad \text{und} \quad \angle ACF \cong_w \angle ABG.$$

Mit Lemma 1.22 erhalten wir  $\overline{BF} \cong \overline{CG}$ .

(K6) impliziert, dass die Dreiecke  $\triangle FBC$  und  $\triangle GCB$  kongruent sind. Insbesondere gilt:

$$\angle CBG \cong_w \angle BCF \implies \angle ABC \cong_w \angle ACB.$$

**Rückrichtung:** Angenommen,  $\angle ABC \cong_w \angle ACB$ , aber  $\overline{AB} \not\cong \overline{AC}$ . Nach Satz 1.24 existiert ohne Einschränkung der Allgemeinheit ein Punkt  $D \in \overline{AC}$ , sodass  $\overline{CD} \cong \overline{AB}$ . Nach (K6) sind die Dreiecke  $\triangle DBC$  und  $\triangle ABC$  kongruent. Insbesondere gilt:

$$\angle DBC \cong_w \angle ACB \cong_w \angle ABC.$$

Mit (K4) folgt, dass  $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA}$ . Die Eindeutigkeit impliziert, dass  $D = A$ , da  $D, A \in \overline{AC}$  und  $\overline{BA} \cap \overline{AC} \leq 1$ . Dies steht im Widerspruch dazu, dass  $D \neq A$  und  $D * C * A$ . Somit muss  $\overline{AB} \cong \overline{AC}$  gelten.  $\square$

**Proposition 1.38** (SSS)

In einer Hilbertebene gilt für zwei Dreiecke  $\triangle ABC$  und  $\triangle A'B'C'$ :

$$\overline{AB} \cong \overline{A'B'}, \quad \overline{AC} \cong \overline{A'C'}, \quad \overline{BC} \cong \overline{B'C'}$$

impliziert:

$$\angle ABC \cong_w \angle A'B'C', \quad \angle BAC \cong_w \angle B'A'C', \quad \angle ACB \cong_w \angle A'C'B'.$$

*Beweis.* Nach (K4) und (K1) konstruieren wir einen Winkel  $\angle C'A'B'' \cong_w \angle BAC$ , sodass  $B''$  auf der anderen Seite von  $B'$  bezüglich  $\overline{A'C'}$  liegt und  $\overline{A'B''} \cong \overline{A'B'}$  erfüllt. Nach (K6) folgt:

$$\overline{BC} \cong \overline{B''C'}.$$

Konstruiere die Strecke  $\overline{B'B''}$ . Dann gilt:

$$\overline{A'B'} \cong \overline{A'D} \cong \overline{A'B''},$$

was bedeutet, dass  $\triangle B''A'B'$  ein gleichschenkliges Dreieck ist.

Mit Hilfe von Proposition 1.37 erhalten wir:

$$\angle ABB' \cong_w \angle AB'B.$$

Auf ähnliche Weise ist  $\overline{B'C'} \cong \overline{B''C'}$ , und das Dreieck  $\triangle BCB'$  ist gleichschenkl. Es folgt:

$$\angle B''B'C \cong_w \angle B'B''C.$$

Damit folgt:

$$\angle A'B'C' \cong_w \angle A'B''C'.$$

Da wir bereits wissen, dass  $\angle A'B''C' \cong_w \angle ABC$ , erhalten wir durch Transitivität:

$$\angle ABC \cong_w \angle A'B'C'.$$

Die Behauptung folgt nun aus (K6), da  $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$  ist und somit auch:

$$\angle BAC \cong_w \angle B'A'C', \quad \angle ACB \cong_w \angle B'C'A'.$$

□

**Proposition 1.39** (Außenwinkelsatz)

In einer Hilbertebene sei  $\triangle ABC$  ein gegebenes Dreieck und  $D \in \overrightarrow{BC}$  mit  $D * C * B$ .  
Dann gilt:

$$\angle BAC < \angle ACD \quad \text{und} \quad \angle ABC < \angle ACD.$$

**Proposition 1.40** (WSW)

In einer Hilbertebene gelten für zwei Dreiecke  $\triangle ABC$  und  $\triangle A'B'C'$ :

$$\overline{AB} \cong \overline{A'B'}, \quad \angle BAC \cong_w \angle B'A'C', \quad \angle ABC \cong_w \angle A'B'C'$$

impliziert:

$$\overline{BC} \cong \overline{B'C'}, \quad \overline{AC} \cong \overline{A'C'}, \quad \angle ACB \cong_w \angle A'C'B'.$$

*Beweis.* Nach (K1) existiert ein Punkt  $C'' \in \overline{A'C'}$ , sodass:

$$\overline{A'C''} \cong \overline{AC}.$$

Nach (K6) gilt:

$$\angle A'B'C'' \cong_w \angle ABC \cong_w \angle A'B'C'.$$

Da  $\angle A'B'C'' \cong_w \angle A'B'C'$ , folgt:

$$\overrightarrow{B'C''} = \overrightarrow{B'C'}.$$

Somit liegt  $C''$  sowohl auf der Geraden  $\overline{B'C'}$  als auch auf der Geraden  $\overline{A'C'}$ . Nun gilt:

$$C'' \in \overline{A'C'} \cap \overline{B'C'} \supseteq \{C'\}.$$

Daraus folgt:

$$C'' = C'.$$

Also gilt:

$$\overline{A'C'} \cong \overline{AC}, \quad \overline{B'C'} \cong \overline{BC}, \quad \angle A'C'B' \cong_w \angle ACB.$$

□



**Proposition 1.41** (SWW)

In einer Hilbertebene gelten für zwei Dreiecke  $\triangle ABC$  und  $\triangle A'B'C'$ :

$$\overline{AB} \cong \overline{A'B'}, \quad \angle ABC \cong_w \angle A'B'C', \quad \angle ACB \cong_w \angle A'C'B'$$

impliziert:

$$\overline{BC} \cong \overline{B'C'}, \quad \overline{AC} \cong \overline{A'C'}, \quad \angle BAC \cong_w \angle B'A'C'.$$

*Beweis.* Nach (K1) existiert ein Punkt  $C'' \in \overline{A'C'}$ , sodass:

$$\overline{A'C''} \cong \overline{AC}.$$

Mit (K6) erhalten wir:

$$\angle A'C''B' \cong_w \angle ACB \cong_w \angle A'C'B'.$$

Dies impliziert:

$$\angle A'C''B' \cong_w \angle A'C'B'.$$

Da  $\angle A'C''B'$  und  $\angle A'C'B'$  kongruent sind, folgt aus der Eindeutigkeit der Winkel, dass  $C'' = C'$ . Wäre nämlich  $C'' \neq C'$ , müsste gelten  $A' * C'' * C'$  oder  $A' * C' * C''$ . Ohne Einschränkung der Allgemeinheit sei  $A' * C'' * C'$ .

Nach dem Außenwinkelsatz gilt dann:

$$\angle B'C''A' > \angle B'C'A',$$

was im Widerspruch dazu steht, dass  $\angle B'C''A' \cong_w \angle B'C'A'$ .

Somit muss  $C'' = C'$  gelten. Daher sind die Dreiecke  $\triangle ABC$  und  $\triangle A'B'C'$  kongruent, und es folgt:

$$\overline{BC} \cong \overline{B'C'}, \quad \overline{AC} \cong \overline{A'C'}, \quad \angle BAC \cong_w \angle B'A'C'.$$

□

**Bemerkung:** Die folgenden Tripel sind keine Kongruenzsätze in der Hilbertebene:

- **WSS:** Ein Dreieck ist im Allgemeinen nicht eindeutig bestimmt, wenn zwei Winkel und die ihnen folgende Seite gegeben sind.
- **WWW:** Drei Winkel bestimmen in der Hilbertebene kein eindeutiges Dreieck. Allerdings ist WWW ein Kongruenzsatz in der **hyperbolischen Ebene**.

Es gilt jedoch der Kongruenzsatz **RWSS**, bei dem ein rechter Winkel, eine anliegende und die gegenüber liegende Seite gegeben sind.

**Proposition 1.42** (Mittelpunkte, Senkrechte, Lot, Winkelhalbierende)

In einer Hilbertebene gelten die folgenden Aussagen:

1. Zu  $\overline{AB}$  existiert ein eindeutiger Punkt  $M \in \overline{AB}$  mit  $A * M * B$  und  $\overline{AM} \cong \overline{MB}$ . Der Punkt  $M$  heißt **Mittelpunkt** von  $\overline{AB}$ .
2. Sei  $C \in \overline{AB}$ . Für jede Seite von  $\overline{AB}$  existiert ein eindeutiger Strahl  $\overrightarrow{CD}$  mit  $\angle DCA$  ein rechter Winkel ist. Der Strahl  $\overrightarrow{CD}$  heißt **Senkrechte** zu  $\overline{AB}$  in  $C$ .
3. Sei  $\overline{AB}$  eine Gerade und  $C \notin \overline{AB}$ . Es existiert ein eindeutiger Punkt  $D \in \overline{AB}$ , sodass  $\overrightarrow{CD}$  orthogonal zu  $\overline{AB}$  ist. Der Punkt  $D$  heißt **Lotfußpunkt** von  $C$  auf  $\overline{AB}$ .
4. Sei  $\angle BAC$  ein Winkel. Es existiert ein eindeutiger Strahl  $\overrightarrow{AE}$  im Inneren von  $\angle BAC$ , sodass:

$$\angle BAE \cong_w \angle EAC.$$

Der Strahl  $\overrightarrow{AE}$  heißt **Winkelhalbierende** von  $\angle BAC$ .

**Proposition 1.43** (Parallelen und Hilbertebene)

In einer Hilbertebene sei  $g$  eine Gerade und  $A \in \Pi$  ein Punkt. Dann existiert eine zu  $g$  parallele Gerade  $g'$  mit  $A \in g'$ .

*Beweis.* Wir unterscheiden zwei Fälle:

**Fall 1:**  $A \in g$  In diesem Fall ist  $g' := g$ . Damit ist die Behauptung erfüllt.

**Fall 2:**  $A \notin g$  Nach Proposition 1.42 existiert ein eindeutiger Punkt  $B \in g$ , sodass der Strahl  $\overrightarrow{BA}$  senkrecht auf  $g$  steht. Nach (S2) existiert ein Punkt  $C \in \overline{AB}$  mit  $B * A * C$ . Wieder mit Proposition 1.42 existiert ein Punkt  $D \in \Pi \setminus \overline{AB}$ , sodass  $\overrightarrow{AD}$  senkrecht auf  $\overline{AB}$  steht, das heißt,  $\angle BAD$  ist ein rechter Winkel.

Wir behaupten, dass  $AD \parallel g$ . Angenommen,  $AD \not\parallel g$ , dann existiert ein Punkt  $E \in AD \cap g$ . Da  $AD \neq g$  (weil  $A \notin g$ ), ist  $\triangle BAE$  ein Dreieck, in dem sowohl  $\angle BAE$  als auch  $\angle ABE$  rechte Winkel sind.

Nun ist einerseits der Nebenwinkel von  $\angle BAE$  ein rechter Winkel. Andererseits ist nach dem Außenwinkelsatz der Nebenwinkel von  $\angle BAE$  echt größer als  $\angle ABE$ , der ebenfalls ein rechter Winkel ist.

Dies führt zu einem Widerspruch. Daher muss  $AD \parallel g$  gelten, und  $AD = g'$  ist die gesuchte Parallele zu  $g$  durch  $A$ . □

## 1.5 Bewegung in der Hilbertebene

**Definition 1.44** (Bewegung)

Es sei  $(\Pi, \Gamma, Z, \cong, \cong_w)$  eine angeordnete Inzidenzgeometrie, die die Axiome (I1–I3; S1–S3) erfüllt. Eine **Bewegung** ist eine Bijektion  $\phi : \Pi \rightarrow \Pi$ , welche die folgenden Bedingungen erfüllt:

1.  $g \in \Gamma \iff \phi(g) \in \Gamma$ ,
2. Für alle  $A, B, C \in \Pi$  gilt:

$$A * B * C \iff \phi(A) * \phi(B) * \phi(C).$$

Insbesondere gilt:

$$\phi(\overline{AB}) = \overline{\phi(A)\phi(B)} \quad \text{und} \quad \phi(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{\phi(A)\phi(B)} \quad \text{für } A \neq B.$$

3. Für alle  $A, B \in \Pi$  mit  $A \neq B$  gilt:

$$\overline{AB} \cong \overline{\phi(A)\phi(B)}.$$

4. Für alle  $A, B, C \in \Pi$ , die nicht kollinear sind, gilt:

$$\angle BAC \cong_w \angle \phi(B)\phi(A)\phi(C).$$

**Bemerkungen:** Die Menge der Bewegungen

$$\{\phi : \Pi \rightarrow \Pi \mid \phi \text{ ist eine Bewegung}\}$$

bildet mit der Komposition eine Gruppe.

**Definition 1.45** (Existenz von Bewegungen)

In einer Hilbertebene sagen wir, dass die Bedingung **(EB)** erfüllt ist, wenn die folgenden Eigenschaften gelten:

1. Für alle  $A, A' \in \Pi$  existiert eine Bewegung  $\phi : \Pi \rightarrow \Pi$  mit  $\phi(A) = A'$  (Translation).
2. Für alle  $O \in \Pi$  und  $A, A' \in \Pi \setminus \{O\}$  existiert eine Bewegung  $\phi : \Pi \rightarrow \Pi$ , sodass:

$$\phi(O) = O \quad \text{und} \quad \phi(\overrightarrow{OA}) = \overrightarrow{OA'}$$

(Drehung).

3. Für jede Gerade  $g \in \Gamma$  existiert eine Bewegung  $\phi : \Pi \rightarrow \Pi$ , sodass:

$$\forall P \in g : \phi(P) \in g \quad \text{und} \quad \phi \text{ vertauscht die beiden Seiten von } g$$

(Spiegelung).

Eine große Anzahl an Symmetrien ist in gewisser Weise äquivalent zu (K6).

**Proposition 1.46** ((EB)  $\implies$  (K6))

In einer Hilbertebene, in der (K6) nicht zum Axiomensystem gehört, gilt:

$$(EB) \implies (K6).$$

*Beweis.* Seien  $\triangle ABC$  und  $\triangle A'B'C'$  zwei Dreiecke mit

$$\overline{AB} \cong \overline{A'B'}, \quad \overline{AC} \cong \overline{A'C'}, \quad \angle BAC \cong_w \angle B'A'C'.$$

Nach (EB) existiert eine Bewegung  $\phi : \Pi \rightarrow \Pi$  mit  $\phi(A) = A'$ . Für  $B'' := \phi(B)$  gilt:

$$\overline{A'B''} \cong \overline{AB},$$

und wegen der Transitivität von  $\cong$  folgt:

$$\overline{A'B'} \cong \overline{AB} \cong \overline{A'B''}.$$

Wieder nach (EB) existiert eine Bewegung  $\psi : \Pi \rightarrow \Pi$ , sodass:

$$\psi(\overrightarrow{A'B''}) = \overrightarrow{A'B'}.$$

Nach der Eindeutigkeit von (K1) gilt:

$$\psi(B'') = B'.$$

Definiere  $C'' := \psi \circ \phi(C)$ . Betrachte nun die Gerade  $A'B'$  und die Strahlen  $\overrightarrow{A'C'}$  und  $\overrightarrow{A'C''}$ . Wieder nach (EB) existiert eine Bewegung  $G : \Pi \rightarrow \Pi$ , die die Gerade  $A'B'$  punktweise fixiert und die Seiten bezüglich  $A'B'$  vertauscht.

Falls  $\overrightarrow{A'C'}$  und  $\overrightarrow{A'C''}$  auf derselben Seite von  $A'B'$  liegen, setze:

$$\theta := \psi \circ \phi.$$

Andernfalls setze:

$$\theta := G \circ \psi \circ \phi.$$

Definiere  $C''' := \theta(C)$ . Dann liegen  $C'$  und  $C'''$  auf derselben Seite von  $A'B'$ . Da  $\theta$  eine Bewegung ist, gilt:

$$\angle BAC \cong_w \angle B'A'C''' \quad \text{und} \quad \angle BAC \cong_w \angle B'A'C',$$

woraus folgt:

$$\angle B'A'C' \cong_w \angle B'A'C''' \implies \overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{A'C'''}$$

Es folgt wie oben, wegen der Transitivität von  $\cong$  und der Eindeutigkeit in (K1):

$$\overline{A'C'} \cong \overline{AC}, \quad \overline{A'C'} \cong \overline{A'C'''} \implies C' = C'''.$$

Insgesamt gilt:

$$\theta(A) = A', \quad \theta(B) = B', \quad \theta(C) = C'.$$

Da  $\theta$  eine Bewegung ist, folgt die Kongruenz der Dreiecke:

$$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'.$$

□

**Proposition 1.47** ((K6)  $\implies$  (EB))

In einer Hilbertebene gilt (EB)

*Beweis. Plan:* Wir konstruieren zunächst Spiegelungen und bauen die übrigen Bewegungen daraus auf.

Es sei  $g$  eine Gerade. Wir konstruieren eine Spiegelung  $G$  an  $g$ , die Punkte auf  $g$  invariant lässt und die beiden Seiten von  $g$  vertauscht:

- Falls  $P \in g$ , setze  $G(P) := P$ .
- Falls  $P \notin g$ , betrachte das Lot von  $P$  auf  $g$ . Es existiert ein eindeutiger Punkt  $P_0 \in g$ , sodass  $\overrightarrow{P_0P}$  senkrecht auf  $g$  steht. Nach (K1) existiert ein Punkt  $P'$  auf der anderen Seite von  $P_0$  bezüglich  $g$  mit  $\overline{P_0P'} \cong \overline{P_0P}$ . Setze  $G(P) := P'$ .

Offenbar gilt  $G^2 = \text{Id}$ , also ist  $G$  bijektiv.

Seien  $A, B \notin g$ . Wir zeigen, dass  $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$ , wobei  $A' = G(A)$  und  $B' = G(B)$ .

- Falls  $A, B$  auf derselben Lotgeraden zu  $g$  liegen, folgt die Behauptung direkt aus der Subtraktion von Segmenten.
- Falls  $A, B$  auf unterschiedlichen Lotgeraden zu  $g$  liegen, ergibt sich eine Konfiguration wie in der Skizze. Nach Konstruktion gilt:

$$\overline{AA_0} \cong \overline{A_0A'} \quad \text{und} \quad \overline{BB_0} \cong \overline{B_0B'}.$$

Außerdem sind  $\angle AA_0B_0$  und  $\angle A'A_0B_0$  rechte Winkel, sodass nach Proposition 1.36 gilt:

$$\triangle AA_0B_0 \cong \triangle A'A_0B_0.$$

Mit (K6) folgt:

$$\overline{AB_0} \cong \overline{A'B_0} \quad \text{und} \quad \angle AB_0A_0 \cong_w \angle A'B_0A_0.$$

Daraus folgt:

$$\angle AB_0B \cong_w \angle A'B_0B',$$

und erneut mit (K6) erhalten wir  $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$ .

Für  $A, B, C$  drei nicht kollineare Punkte gilt, dass auch  $A', B', C'$  nicht kollinear sind.

Wären  $A', B', C'$  kollinear, so gelte o.B.d.A.  $A' * B' * C'$ . Dann folgt:

$$\overline{A'C'} = \overline{A'B'} + \overline{B'C'} \implies \overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC},$$

ein Widerspruch.

Es gilt:

$$\overline{A'B'} \cong \overline{AB}, \quad \overline{A'C'} \cong \overline{AC}, \quad \overline{B'C'} \cong \overline{BC}.$$

Mit (SSS)(Proposition 1.38):

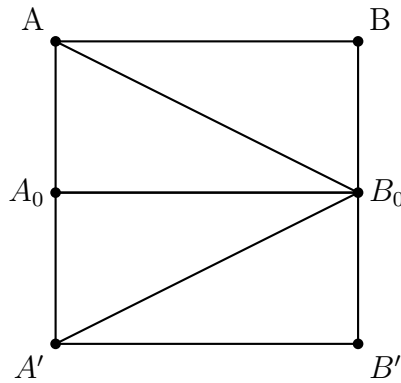
$$\angle BAC \cong_w \angle B'A'C'.$$

Insbesondere erhält  $G$  Winkel. Analog wie hier sieht man, dass  $G$  Geraden und auch Streckenordnung erhält. Wir haben die Existenz von Spiegelungen gezeigt.

Seien  $A, A' \in \Pi$ . Betrachte den Mittelpunkt  $M$  zwischen  $A$  und  $A'$  und die Senkrechte durch  $M$ , die wir  $S$  nennen. Nach Konstruktion gilt  $G_S(A) = A'$ . Dies zeigt die Existenz von Translationen.

Für Drehungen seien  $O, A, A'$  drei nicht kollineare Punkte. Sei  $W$  die Winkelhalbierende von  $\angle AOA'$ . Nach Konstruktion gilt  $G(O) = O$  und  $G(\overrightarrow{OA}) = \overrightarrow{OA'}$ .

Damit ist (EB) bewiesen. □



## 1.6 Hilbertebene mit (P)

### Proposition 1.48

In einer Hilbertebene mit (P) seien  $\overline{AB}$  und  $\overline{AP}$  zwei Geraden mit  $\overline{AB} \cap \overline{AP} = \{A\}$ , und sei  $\overline{PD}$  die eindeutige zu  $\overline{AB}$  parallele Gerade durch  $P$ . Dann gilt:

1. (**Stufenwinkelsatz**) Liegen  $B$  und  $D$  auf derselben Seite von  $\overline{AP}$ , so existiert ein

Punkt  $C$  mit  $A * P * C$  und

$$\angle DPC \cong_w \angle BAC.$$

2. Jeder Strahl im Inneren von  $\angle APD$  mit Ursprung  $P$  schneidet  $\overline{AB}$  in einem Punkt  $E$ , der auf derselben Seite von  $\overline{PA}$  wie  $D$  liegt.

*Beweis.* **(1) Stufenwinkelsatz:** Nach (S2) existiert ein Punkt  $C$  mit  $A * P * C$ . Nach (K4) existiert ein eindeutiger Strahl  $\overrightarrow{PD'}$  mit:

$$\angle D'PC \cong_w \angle BAC,$$

wobei  $D'$  auf derselben Seite von  $\overline{AC}$  wie  $D$  liegt. Wie im Beweis von Proposition 1.42 folgt, dass  $\overrightarrow{PD'} \parallel \overline{AB}$ .

Das Parallelaxiom (P) impliziert, dass  $\overline{PD'}$  die eindeutige Parallele zu  $\overline{AB}$  durch  $P$  ist. Da  $\overline{PD'} = \overline{PD}$ , folgt  $\angle DPC \cong_w \angle BAC$ .

**(2):** Sei  $\overrightarrow{PE}$  ein Strahl im Inneren von  $\angle CAD$ . Die Gerade  $\overline{PE}$  ist daher nicht parallel zu  $\overline{AB}$ , das heißt:

$$\overline{PE} \cap \overline{AB} \neq \emptyset.$$

Da  $\overrightarrow{PE} \setminus \{P\}$  auf derselben Seite von  $\overline{DP}$  wie  $\overline{AB}$  liegt, schneidet  $\overrightarrow{PE}$  die Gerade  $\overline{AB}$  in einem Punkt  $E$ .

Außerdem liegt  $\overrightarrow{PE} \setminus \{P\}$  auf derselben Seite von  $\overline{PA}$  wie  $D$ , also liegt  $E$  auf derselben Seite von  $\overline{PA}$  wie  $D$ . Die Aussage folgt.  $\square$

**Proposition 1.49** (Innenwinkelsumme)

Es sei eine Hilbertebene mit  $(P)$  gegeben und  $\triangle ABC$  ein Dreieck. Sei  $\angle CAD$  der Nebenwinkel von  $\angle CAB$ . Dann existiert ein Strahl  $\overrightarrow{AE}$  im Inneren von  $\angle CAD$ , sodass:

$$\angle EAD \cong_w \angle ABC \quad \text{und} \quad \angle EAC \cong_w \angle ACB.$$

**Satz 1.50** (Thales)

In einer Hilbertebene mit  $(P)$  sei  $\triangle ABC$  ein gegebenes Dreieck, und sei  $M \in \overline{AB}$  der Mittelpunkt von  $\overline{AB}$ , sodass:

$$\overline{AM} \cong \overline{MB} \cong \overline{MC}.$$

Dann ist  $\angle BCA$  ein rechter Winkel.

*Beweis.* Die Dreiecke  $\triangle AMC$  und  $\triangle BMC$  sind gleichschenkelig. Nach Proposition 1.37 gilt:

$$\angle CAM \cong_w \angle ACM \quad (= \alpha) \quad \text{und} \quad \angle CBM \cong_w \angle BCM \quad (= \beta).$$

Sei nun  $\overrightarrow{ME'}$  ein Strahl wie in Proposition 1.49 im Inneren von  $\angle CMB$ . Dann gilt:

$$\alpha \cong_w \angle CME' \cong_w \angle BME'.$$

Nach dem Crossbar-Satz (Proposition 1.16) existiert ein Punkt  $E \in \overline{BC}$ . Mit dem Kongruenzsatz WSW erhalten wir, dass die Dreiecke  $\triangle CEM$  und  $\triangle MEB$  kongruent sind. Insbesondere gilt:

$$\angle CEM \cong_w \angle BEM.$$

Da  $\angle CEM$  und  $\angle BEM$  Nebenwinkel sind, sind beide rechte Winkel. Somit gilt:

$$\overline{ME} \parallel \overline{AC}.$$

Nach Proposition 1.48 folgt, dass  $\angle BCA$  ein rechter Winkel ist. Die Behauptung ist damit bewiesen.  $\square$

## 1.7 Körper und Hilbertebenen mit (P)

Es gibt eine 1-zu-1-Korrespondenz zwischen Körpern mit zusätzlichen Annahmen und Hilbertebenen mit (P), die wir im Folgenden skizzieren wollen.

**Definition 1.51** (Ordnung auf einem Körper)

Eine **Ordnung** auf einem Körper  $\mathbb{K}$  ist eine Teilmenge  $P \subseteq \mathbb{K}$  (die Menge der positiven Elemente), die folgende Bedingungen erfüllt:

1. Für alle  $a, b \in P$  gilt:

$$a + b \in P \quad \text{und} \quad a \cdot b \in P.$$

2. Für alle  $a \in \mathbb{K}$  gilt genau eine der folgenden Bedingungen:

$$a \in P, \quad a = 0, \quad -a \in P.$$

Wir definieren die Relation  $<$  auf  $\mathbb{K}$  durch:

$$a < b \iff b - a \in P \quad (\text{analog für } >).$$

**Lemma 1.52** (Eigenschaften von geordneten Körpern)

Es sei  $\mathbb{K}$  ein geordneter Körper, und sei  $P$  die Menge der positiven Elemente. Dann gilt:

1. Für alle  $a \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$  gilt:

$$a^2 \in P.$$

2.  $\mathbb{K}$  hat Charakteristik 0.



*Beweis.* **1.** Sei  $a \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ . Dann gibt es zwei Fälle:

- Falls  $a \in P$ , so gilt nach der Definition von  $P$ , dass  $a \cdot a \in P$ .
- Falls  $a \notin P$ , dann ist  $-a \in P$ . Es folgt:

$$(-a) \cdot (-a) = a^2 \in P.$$

**2.** Die Aussage über die Charakteristik ist trivial: Ein geordneter Körper kann nicht endliche Charakteristik haben, da in diesem Fall keine Ordnung konsistent definiert werden könnte. □

**Bemerkung:** Der Körper  $\mathbb{C}$  kann nicht geordnet werden. Angenommen,  $\mathbb{C}$  wäre ein geordneter Körper, dann wäre  $1 = 1^2 \in P$ , da  $1 > 0$ . Andererseits wäre  $-1 = i^2 \in P$ , was zu einem Widerspruch führt, da  $-1 \in P$  und  $1 \in P$  unmöglich gleichzeitig sein können.

**Lemma 1.53** (Eigenschaften von  $<$ )

*Es sei  $\mathbb{K}$  ein geordneter Körper, und  $<$  sei wie in Definition 1.51 definiert. Dann gelten die folgenden Eigenschaften:*

1. Für alle  $a, b, c \in \mathbb{K}$  gilt:

$$a < b, c \in \mathbb{K} \implies a + c < b + c.$$

2. Für alle  $a, b, c \in \mathbb{K}$  gilt:

$$a < b, b < c \implies a < c.$$

3. Für alle  $a, b \in \mathbb{K}$  und  $c > 0$  gilt:

$$a < b \implies ac < bc.$$

4. Für alle  $a, b \in \mathbb{K}$  gilt genau eine der folgenden Bedingungen:

$$a = b, \quad a < b, \quad b < a.$$

*Beweis.* **1.** Angenommen,  $a < b$ , das heißt  $b - a \in P$ . Dann gilt:

$$(b + c) - (a + c) = b - a \in P.$$

Daher  $a + c < b + c$ .

**2.** Angenommen,  $a < b$  und  $b < c$ , das heißt  $b - a \in P$  und  $c - b \in P$ . Da  $P$  unter Addition abgeschlossen ist, folgt:

$$c - a = (c - b) + (b - a) \in P.$$

Daher  $a < c$ .

**3.** Angenommen,  $a < b$ , das heißt  $b - a \in P$ , und  $c > 0$ , das heißt  $c \in P$ . Da  $P$  unter Multiplikation abgeschlossen ist, gilt:

$$c \cdot (b - a) \in P.$$

Das bedeutet:

$$bc - ac = c \cdot (b - a) \in P.$$

Daher  $ac < bc$ .

**4.** Für  $a, b \in \mathbb{K}$  gilt nach Definition von  $P$  und der Trichotomie:

$$b - a \in P \implies a < b, \quad b - a = 0 \implies a = b, \quad a - b \in P \implies b < a.$$

Genau eine dieser Bedingungen ist erfüllt. □

**Definition 1.54** (Pythagoreischer Körper)

Ein Element  $x \in \mathbb{K}$  in einem Körper  $\mathbb{K}$  hat eine **Wurzel**, falls ein  $y \in \mathbb{K}$  existiert mit:

$$y^2 = x.$$

Der Körper  $\mathbb{K}$  heißt **pythagoreisch**, falls für alle  $x \in \mathbb{K}$  das Element  $1 + x^2$  eine Wurzel besitzt.

**Bemerkung:** Die kartesische Ebene  $\Pi_{\mathbb{K}}$  über einem angeordneten, pythagoreischen Körper  $\mathbb{K}$  ist eine Hilbertebene mit (P).

**Proposition 1.55** ((K1)  $\iff$   $\mathbb{K}$  pythagoreisch)

Es sei  $\mathbb{K}$  ein angeordneter Körper und  $\Pi_{\mathbb{K}}$  die kartesische Ebene über  $\mathbb{K}$ . Dann gilt:

$$\Pi_{\mathbb{K}} \text{ erfüllt (K1)} \iff \mathbb{K} \text{ ist pythagoreisch.}$$

*Beweis. Hinrichtung:* Angenommen,  $\Pi_{\mathbb{K}}$  erfüllt (K1). Betrachte das Segment  $\overline{(0,0)(a,1)}$  und den Strahl durch  $(0,0)$  und  $(b,0)$ . Um einen Punkt  $(b',0)$  auf dem Strahl zu finden, sodass:

$$\overline{(0,0)(a,1)} \cong \overline{(0,0)(b',0)},$$

muss gelten:

$$1 + a^2 = b'^2.$$

Das zeigt, dass  $\mathbb{K}$  pythagoreisch ist, da  $b' = \sqrt{1 + a^2} \in \mathbb{K}$  existieren muss.

**Rückrichtung:** Sei  $\mathbb{K}$  pythagoreisch. Für  $a, b \in \mathbb{K}$  mit  $a \neq 0$  können wir schreiben:

$$a^2 + b^2 = |a| \cdot \sqrt{1 + c^2}, \quad \text{mit } c := \frac{b}{a}.$$

Daraus folgt:

$$\text{dist}(A, B) \in \mathbb{K} \quad \text{für alle Punkte } A, B \in \Pi_{\mathbb{K}}.$$

Betrachte nun eine Gerade mit Steigung  $m \neq 0$ , gegeben durch die Gleichung  $y = mx + b$ , und einen Punkt  $A$  auf der Geraden. Es sei  $A = (a, ma + b)$  für ein  $a \in \mathbb{K}$ . Wir möchten ein Segment der Länge  $d \in \mathbb{K}$  abtragen. Gesucht ist ein Punkt  $C = (c, mc + b)$ , sodass:

$$\text{dist}(A, C) = d.$$

Es folgt:

$$\sqrt{(a - c)^2 + ((ma + b) - (mc + b))^2} = d,$$

das heißt:

$$\sqrt{(a - c)^2 + m^2(a - c)^2} = |a - c|\sqrt{1 + m^2}.$$

Wenn  $\sqrt{1 + m^2} \in \mathbb{K}$  existiert, ist diese Gleichung lösbar für  $c$ . Da  $\mathbb{K}$  pythagoreisch ist, gilt  $\sqrt{1 + m^2} \in \mathbb{K}$ . Somit ist die Abtragung des Segments möglich, und  $\Pi_{\mathbb{K}}$  erfüllt (K1). □

Wir wollen nun eine Äquivalenzrelation auf  $\Pi_{\mathbb{K}}$  einführen. Dazu definieren wir folgende Mengen:

•

$$O(\mathbb{K}, 2) := \{M \in \mathbb{K}^{2 \times 2} \mid M^T \cdot M = I = M \cdot M^T\},$$

die Menge der orthogonalen Matrizen über  $\mathbb{K}$ .

•

$$E(\mathbb{K}, 2) := \{\phi : \Pi_{\mathbb{K}} \rightarrow \Pi_{\mathbb{K}} \mid \exists M \in O(\mathbb{K}, 2), P \in \mathbb{K}^2, \phi(A) = M \cdot A + P \forall A \in \mathbb{K}^2\},$$

die Menge der **euklidischen Bewegungen**, bestehend aus Transformationen durch orthogonale Matrizen und Translationen.

• Für zwei Winkel  $\angle BAC$  und  $\angle EDF$  definieren wir die Äquivalenzrelation:

$$\angle BAC \cong_w \angle EDF \iff \exists \phi \in E(\mathbb{K}, 2) \text{ mit } \phi(\angle BAC) = \angle EDF.$$

**Lemma 1.56** ( $\Pi_{\mathbb{K}}$  erfüllt (EB))

Sei  $\Pi_{\mathbb{K}}$  die kartesische Ebene über  $\mathbb{K}$ , und seien  $\Gamma, Z, \cong$  wie bisher definiert. Dann gilt:  $\Pi_{\mathbb{K}}$  erfüllt (EB).

*Beweis.* **Zu (EB) 1:** Es genügt zu zeigen, dass Translationen  $T_C$  der Form:

$$T_C(A) := A + C$$

Bewegungen sind. Für zwei Punkte  $A, B \in \Pi_{\mathbb{K}}$  gilt:

$$d(T_C(A), T_C(B)) = d(A + C, B + C) = d(A, B).$$

Da die Distanz invariant bleibt, ist  $T_C$  eine Bewegung.

**Zu (EB) 2:** Es genügt zu zeigen, dass Rotationen Bewegungen sind. Betrachte die Rotation, die den Punkt  $(1, 0)$  auf  $V = (V_1, V_2)$  mit  $V_1^2 + V_2^2 = 1$  abbildet. Sie ist gegeben durch:

$$\phi_V(A) := \begin{pmatrix} V_1 & -V_2 \\ V_2 & V_1 \end{pmatrix} \cdot A.$$

Für  $A, B \in \Pi_{\mathbb{K}}$  gilt:

$$d(\phi_V(A), \phi_V(B)) = \|\phi_V(A) - \phi_V(B)\| = \|M_V \cdot (A - B)\| = \|A - B\|,$$

wobei  $M_V$  die Rotationsmatrix ist. Da die Distanz invariant bleibt, ist  $\phi_V$  eine euklidische Bewegung.

**Zu (EB) 3:** Es genügt zu zeigen, dass Spiegelungen Bewegungen sind. Betrachte die Spiegelung an einer Achse mit Richtungsvektor  $V = (V_1, V_2)$  und  $V_1^2 + V_2^2 = 1$ , definiert durch:

$$S_V(A) := \begin{pmatrix} V_1 & V_2 \\ V_2 & -V_1 \end{pmatrix} \cdot A.$$

Analog zur Rotation gilt:

$$d(S_V(A), S_V(B)) = \|S_V(A) - S_V(B)\| = \|A - B\|,$$

sodass  $S_V$  eine euklidische Bewegung ist.

**Zusammenführung:** Um zu zeigen, dass (EB) 3 erfüllt ist, wähle beliebige Punkte  $A, B \in g$ , einer gegebenen Geraden  $g$ . Dann zeigt die folgende Komposition, dass  $\Pi_{\mathbb{K}}$  (EB) erfüllt:

$$T_A \circ \phi_{B-A} \circ S_{(1,0)} \circ \phi_{B-A}^{-1} \circ T_{-A}.$$

Diese Transformation ist eine Bewegung, die die Punkte  $A, B \in g$  belässt und die Seiten von  $g$  vertauscht. Somit ist auch (EB) 3 erfüllt.

Da alle Bedingungen gezeigt wurden, erfüllt  $\Pi_{\mathbb{K}}$  (EB). □

**Lemma 1.57** ( $\Pi_{\mathbb{K}}$  erfüllt (K4) und (K5))

*Sei  $(\Pi_{\mathbb{K}}, \Gamma, Z, \cong, \cong_w)$  wie oben definiert. Dann gelten auch die Axiome (K4) und (K5).*

*Beweis.* **Zu (K5):** Das Axiom (K5) folgt unmittelbar aus der Tatsache, dass  $E(\mathbb{K}, 2)$  eine Gruppe ist. Da  $E(\mathbb{K}, 2)$  alle Bewegungen enthält, die  $Z, \Gamma, \cong$ , und  $\cong_w$  respektieren, erfüllt  $\Pi_{\mathbb{K}}$  (K5).

**Zu (K4):** Nach den Ausführungen in Lemma 1.56 können wir annehmen, dass  $O = A = D$  gilt und  $\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{AC}$ .

Die erste Wahl für den Punkt  $E$  ist gegeben durch die Identität:

$$\phi = \text{Id}, \quad E := \phi(B) = B.$$

Die zweite Wahl (auf der anderen Seite von  $\overrightarrow{DF}$ ) ist gegeben durch die Abbildung:

$$\phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \phi(B) = \begin{pmatrix} b_1 \\ -b_2 \end{pmatrix}.$$

Da  $-b_2 < 0$ , liegt  $\phi(B)$  auf der anderen Seite von  $\overrightarrow{DF}$ .

Somit sind genau zwei Strahlen möglich, einer auf jeder Seite von  $\overrightarrow{DF}$ , und es folgt, dass (K4) erfüllt ist.  $\square$

**Bemerkung:** Wir haben gezeigt, dass  $(\Pi_{\mathbb{K}}, \Gamma, Z, \cong, \cong_w)$  die Axiome I1–I3, S1–S4, K1–K5 sowie  $(EB)$  erfüllt. Nach Proposition 1.46 ergibt sich daraus der folgende Satz:

**Satz 1.58** (Geordneter pythagoreischer Körper impliziert Hilbertebene)

*Es sei  $\mathbb{K}$  ein geordneter pythagoreischer Körper, und  $(\Pi_{\mathbb{K}}, \Gamma, Z, \cong, \cong_w)$  sei wie oben definiert. Dann definiert  $\mathbb{K}$  eine Hilbertebene mit  $(P)$ .*

**Bemerkung:** Wir wollen klären in welchem Sinne diese Zuordnung eindeutig ist.

**Definition 1.59** (Hilbertebenen-Isomorphismus)

*Seien  $H$  und  $H'$  zwei Hilbertebenen. Ein **Isomorphismus** von Hilbertebenen ist eine bijektive Abbildung  $\phi : H \rightarrow H'$ , die alle Strukturen einer Hilbertebene erhält. Das bedeutet:*

1. Für jede Gerade  $g \subseteq H$  gilt:

$$g \subseteq H \iff \phi(g) \subseteq H'.$$

2. Für  $A, B, C \in H$  gilt:

$$A *_H B *_H C \iff \phi(A) *_H \phi(B) *_H \phi(C).$$

3. Für Segmente  $\overline{AB}, \overline{CD}$  in  $H$  gilt:

$$\overline{AB} \cong_H \overline{CD} \iff \overline{\phi(A)\phi(B)} \cong_{H'} \overline{\phi(C)\phi(D)}.$$

4. Für Winkel  $\angle BAC$  und  $\angle EDF$  in  $H$  gilt:

$$\angle BAC \cong_w \angle EDF \iff \angle \phi(B)\phi(A)\phi(C) \cong_w \angle \phi(E)\phi(D)\phi(F).$$

Existiert ein Isomorphismus zwischen  $H$  und  $H'$ , so heißen  $H$  und  $H'$  **isomorph**.

**Definition 1.60** (Körperisomorphismus)

Seien  $\mathbb{K}$  und  $\mathbb{K}'$  zwei geordnete Körper. Ein **Körperisomorphismus** ist eine bijektive Abbildung  $\phi : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}'$ , die die folgenden Eigenschaften erfüllt:

1.  $\phi(a + b) = \phi(a) + \phi(b)$  für alle  $a, b \in \mathbb{K}$ .
2.  $\phi(a \cdot b) = \phi(a) \cdot \phi(b)$  für alle  $a, b \in \mathbb{K}$ .
3.  $a > 0 \iff \phi(a) > 0$

Existiert ein Isomorphismus  $\phi : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}'$ , so heißen  $\mathbb{K}$  und  $\mathbb{K}'$  **isomorph**.

**Bemerkung:** Ein Isomorphismus  $\phi : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}'$  zwischen angeordneten, pythagoreischen Körpern induziert einen Isomorphismus  $\psi : \Pi_{\mathbb{K}} \rightarrow \Pi_{\mathbb{K}'}$ , gegeben durch:

$$(\lambda, \mu) \mapsto (\phi(\lambda), \phi(\mu)),$$

zwischen den zugehörigen Hilbertebenen.

Wir wollen nun aus einer Hilbertebene  $\Pi$  mit (P) einen Körper  $\mathbb{K}$  konstruieren. Betrachte dazu die Menge:

$$S(\Pi) := \{\overline{AB} \mid A, B \in \Pi, A \neq B\} / \cong$$

In einfachen Worten ist  $S(\Pi)$  die Menge aller Strecken in  $\Pi$ , wobei Strecken die gleich lang sind als identisch betrachtet werden. Auf  $S(\Pi)$  ist nach Definition 1.18 eine Addition  $+$  definiert.

**Lemma 1.61** (Eigenschaften von  $+$  auf  $S(\Pi)$ )

In einer Hilbertebene ist auf der Menge  $S(\Pi)$  eine Addition  $+$  definiert, die folgende Eigenschaften erfüllt:

1. Addition ist transitiv:

$$\overline{AB} \cong \overline{A'B'} \text{ und } \overline{CD} \cong \overline{C'D'} \implies \overline{AB} + \overline{CD} \cong \overline{A'B'} + \overline{C'D'}.$$

2. Addition ist kommutativ:

$$\overline{AB} + \overline{CD} \cong \overline{CD} + \overline{AB}.$$

3. Addition ist assoziativ:

$$\overline{AB} + (\overline{CD} + \overline{EF}) \cong (\overline{AB} + \overline{CD}) + \overline{EF}.$$

4. Für  $\overline{AB}, \overline{CD} \in S(\Pi)$  gilt genau eine der folgenden Möglichkeiten:

- (a)  $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ ,
- (b) Es existiert ein  $\overline{EF} \in S(\Pi)$  mit  $\overline{AB} + \overline{EF} \cong \overline{CD}$ ,
- (c) Es existiert ein  $\overline{EF} \in S(\Pi)$  mit  $\overline{AB} \cong \overline{CD} + \overline{EF}$ .

*Beweis.* **1, 2, 3:** Diese Eigenschaften folgen direkt aus den Lemmata 1.20 und 1.21, die die Eigenschaften der Addition auf  $S(\Pi)$  begründen.

**4:** Die Trichotomie der Addition folgt aus dem Axiom (S3). □

**Definition 1.62** (Multiplikation  $\cdot$  auf  $S(\Pi)$ )

Sei  $\Pi$  eine Hilbertebene mit  $(P)$ , und wähle ein beliebiges Element  $1 \in S(\Pi)$ , das wir fixieren und als 1 bezeichnen. Für  $\overline{AB}, \overline{CD} \in S(\Pi)$  definieren wir das Produkt  $\overline{AB} \cdot \overline{CD}$  wie folgt:

1. Betrachte  $\triangle ABE$ , wobei  $\overline{BE}$  die eindeutige orthogonale Gerade zu  $\overline{AB}$  durch  $B$  ist (nach Proposition 1.42). Wähle  $E \in \overrightarrow{BE}$  so, dass:

$$\overline{BE} \cong 1.$$

2. Im rechtwinkligen Dreieck  $\triangle ABE$  sei  $\alpha := \angle AEB < \angle ABE$  (nach dem Außenwinkelsatz).

3. Wähle  $X \in \overrightarrow{EB}$ , sodass:

$$\overline{EX} \cong \overline{CD}.$$

4. Sei  $\overrightarrow{XF}$  der Strahl orthogonal zu  $\overrightarrow{EX}$  durch  $X$ , der auf derselben Seite von  $\overrightarrow{EB}$  wie  $A$  liegt.

5. Nach Proposition 1.29 und der Bedingung  $\alpha < \frac{\pi}{2}$  schneiden sich  $\overrightarrow{EA}$  und  $\overrightarrow{XF}$  in einem eindeutigen Punkt  $Y$  (hier benötigen wir das Parallelaxiom  $(P)$ ).

Wir definieren:

$$\overline{AB} \cdot \overline{CD} := \overline{XY}.$$

**Proposition 1.63** (Eigenschaften von  $\cdot$  auf  $S(\Pi)$ )

Sei  $\Pi$  eine Hilbertebene mit  $(P)$ , und sei  $\cdot$  die auf  $S(\Pi)$  definierte Multiplikation. Dann gelten die folgenden Eigenschaften:

1. Für alle  $\overline{AB}, \overline{CD}, \overline{A'B'}, \overline{C'D'} \in S(\Pi)$  gilt:

$$\overline{AB} \cdot \overline{CD} \cong \overline{A'B'} \cdot \overline{C'D'}.$$

2. Die Multiplikation ist kommutativ:

$$\overline{AB} \cdot \overline{CD} \cong \overline{CD} \cdot \overline{AB}.$$

3. Die Multiplikation ist assoziativ:

$$\overline{AB} \cdot (\overline{CD} \cdot \overline{EF}) \cong (\overline{AB} \cdot \overline{CD}) \cdot \overline{EF}.$$

4. Es gilt die Distributivität:

$$\overline{AB} \cdot (\overline{CD} + \overline{EF}) \cong \overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{AB} \cdot \overline{EF}.$$

5. Das Element  $1 \in S(\Pi)$  ist das neutrale Element der Multiplikation:

$$\overline{AB} \cdot 1 \cong \overline{AB}.$$

6. Für jedes  $\overline{AB} \in S(\Pi)$  existiert ein  $\overline{CD} \in S(\Pi)$ , sodass:

$$\overline{AB} \cdot \overline{CD} \cong 1.$$

Das Element  $\overline{CD}$  ist bis auf Kongruenz eindeutig.

*Beweis. Zu 5:* In der Definition der Multiplikation ist  $X = B$  (wegen der Eindeutigkeit aus (K1)), und somit ist  $Y = A$ . Es folgt:

$$\overline{AB} \cdot 1 \cong \overline{AB}.$$

□

**Definition 1.64** (Der Körper  $\overline{S(\Pi)}$ )

Definiere  $\overline{S(\Pi)} := (S(\Pi) \times S(\Pi)) / \sim$ , wobei die Äquivalenzrelation  $\sim$  wie folgt definiert ist:

$$(a, b) \sim (a', b') \iff a + b = a' + b',$$

für  $(a, b), (a', b') \in S(\Pi) \times S(\Pi)$ .

Auf  $\overline{S(\Pi)}$  definieren wir:

1. Die Addition:

$$(a, b) + (c, d) := (a + c, b + d).$$

2. Die Multiplikation:

$$(a, b) \cdot (c, d) := (ac + bd, ad + bc).$$

Die Menge der positiven Elemente ist definiert als:

$$P(\overline{S(\Pi)}) := \{(a + b, b) \mid a, b \in S(\Pi)\}.$$

Diese Definitionen sind wohldefiniert und machen  $\overline{S(\Pi)}$  zu einem geordneten Körper.



**Bemerkung:** Wir nehmen nun den Körper  $\overline{S(\Pi)}$  als gegeben an. Für  $\overline{AB} =: a$  und  $\overline{CD} =: b$  können wir deren Verhältnis definieren als:

$$\frac{a}{b} \in \mathbb{K},$$

wobei  $\mathbb{K}$  der aus  $\overline{S(\Pi)}$  konstruierte geordnete Körper ist.

Wir sagen, dass die Strecken mit Längen  $a, b, c, d \in \mathbb{K}$  **proportional** sind, falls gilt:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \text{in } \mathbb{K}.$$

**Proposition 1.65** (Umkreis)

*Es sei  $\triangle ABC$  ein Dreieck in einer Hilbertebene mit  $(P)$ . Dann existiert ein eindeutiger Punkt  $I \in \Pi$  mit  $AI \cong BI \cong CI$ .*

*Beweis.* Konstruiere zu  $AB$  und  $AC$  jeweils die Mittelsenkrechte, das heißt, die Mittelpunkte  $M_{AB}$ ,  $M_{AC}$  und errichte darauf die Senkrechten zu  $AB$  und  $AC$ , bezeichne diese mit  $l$  und  $m$ . Wir behaupten  $l \nparallel m$ .

Sei  $I$  der Schnittpunkt von  $l$  und  $m$ . Es gilt  $l \perp AB$  und  $m \perp AC$ , was bedeutet, dass  $AB \parallel AC$ . Denn  $AB$  ist das eindeutige Lot auf  $l$  durch  $A$ . Außerdem gilt  $AB \cap m \neq \emptyset$ , sonst wäre  $AB \parallel m$  und  $l \parallel m \implies AB \parallel l$ . Widerspruch.

Bezeichne mit  $I$  den eindeutigen Schnittpunkt zwischen  $l$  und  $m$ .

**Behauptung:** Ein Punkt  $P$  liegt genau dann auf der Mittelsenkrechten  $M_{AB}$ , wenn  $AP \cong BP$ .

**Rückrichtung:** Gilt  $AP \cong BP$ , so folgt die Behauptung aus dem *SSS*-Kriterium, da  $AM \cong BM$  nach Voraussetzung und  $\triangle AMP \cong \triangle BMP$  die Seite  $MP$  gemeinsam haben.

**Hinrichtung:** Die Behauptung folgt aus dem *SWS*-Kriterium, da  $\angle AMP \cong \angle BMP$  ein rechter Winkel ist.

Aus der Behauptung folgt  $IA \cong IB \cong IC$  sowie die Eindeutigkeit von  $I$ . □

**Satz 1.66** (Zentriwinkelsatz)

*Sei  $\triangle ABC$  ein Dreieck in einer Hilbertebene mit  $(P)$ ,  $I$  ein eindeutiger Punkt wie zuvor und  $\vec{IE}$  die Winkelhalbierende von  $\angle BIC$ . Dann gilt:*

*1) Falls  $E$  auf der entgegengesetzten Seite von  $A$  bezüglich  $BC$  liegt, dann gilt*

$$\angle BIE \cong_w \angle BAC.$$

*2) Falls  $E$  auf der gleichen Seite von  $A$  bezüglich  $BC$  liegt, konstruiere  $E'$  auf der anderen Seite von  $BC$ , dann gilt*

$$\angle BIE' \cong_w \angle BAC.$$

*Beweis.* Wegen  $AI \cong BI$  folgt  $\angle IAB \cong_w \angle IBA$ . Ebenso gilt  $\angle IAC \cong_w \angle ICA$ . Betrachte die Gerade  $AI$  und  $A'$  auf der anderen Seite von  $I$ . Dann existieren nach dem Innenwinkelsummensatz die Punkte  $D$  und  $D'$ , sodass

$$\angle BID \cong_w \angle BIA' \cong_w \angle IAB \quad \text{und} \quad \angle CID' \cong_w \angle CIA' \cong_w \angle IAC.$$

Aus der Subtraktion der Winkel folgt nun die Behauptung.

Punkt 2) folgt analog zu Punkt 1). □

**Korollar 1.67** (Peripheriewinkelsatz)

*In einer Hilbertebene mit (P) seien die Punkte  $A, B, C, D, I \in \Pi$  gegeben mit  $AI \cong BI \cong CI \cong DI$ . Dann gilt*

$$\angle CAD \cong_w \angle CBD.$$

*Beweis.* Konstruiere wie in Satz 1.66 die Winkelhalbierenden. Dann gilt

$$\angle CAD \cong_w \angle BIE \cong_w \angle CBD.$$

□

**Korollar 1.68** (Eingeschriebenes Viereck)

*In einer Hilbertebene mit (P) seien  $A, B, C, D \in \Pi$  gegeben. Dann existiert ein  $I \in \Pi$  mit  $AI \cong BI \cong CI \cong DI$  genau dann, wenn*

$$\angle CAD \cong_w \angle CBD.$$

*Beweis.* Die Hinrichtung wird durch Korollar 1.67 gezeigt. Die andere Implikation folgt wie folgt: Nach Proposition 1.65 existiert ein  $I \in \Pi$  mit  $AI \cong CI \cong DI$ . Wir wollen nun  $AI \cong BI$  folgern. Angenommen,  $AI < BI$ . Finde  $B'$  auf  $BI$  auf der gleichen Seite wie  $B$ , sodass  $B'I \cong AI$ . Nach Korollar 1.67 gilt

$$\angle CB'D \cong_w \angle CAD \cong_w \angle CBD,$$

was im Widerspruch zum Außenwinkelsatz steht. □

**Definition 1.69** (Ähnliche Dreiecke)

*In einer Hilbertebene mit (P) heißen zwei Dreiecke  $\triangle ABC$  und  $\triangle A'B'C'$  ähnlich, falls die drei korrespondierenden Winkel kongruent und die korrespondierenden Seiten proportional sind, das heißt*

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}.$$

**Lemma 1.70** (Inkreis)

*Sei  $\Pi$  eine Hilbertebene mit (P) und  $\triangle ABC$  ein Dreieck. Dann gilt:*

- 1) Die Winkelhalbierenden von  $\triangle ABC$  treffen sich in einem Punkt  $I$ .
- 2) Es bezeichne jeweils  $F, E, D$  die Lote von  $I$  auf  $AB, AC, BC$ . Dann gilt

$$FI \cong EI \cong DI.$$

**Proposition 1.71** (WWW für Ähnlichkeit)

Falls für zwei Dreiecke die korrespondierenden Winkel kongruent sind, so sind die Dreiecke ähnlich.

*Beweis.* Zeichne die Winkelhalbierenden der Dreiecke ein und bezeichne mit  $I$  ihren Schnittpunkt. Führe die Lote von  $I$  auf die drei Seiten, dann erhalten wir drei kongruente Segmente  $h$  und Schnittpunkte  $D, E, F$ . Nach dem Satz von der Winkelhalbierenden (SWW) sind

$$\triangle AFI \cong \triangle AEI, \quad \triangle CIE \cong \triangle CDI, \quad \triangle BDI \cong \triangle BIF.$$

Insbesondere gilt:

$$AE \cong AF =: x, \quad BD \cong BF =: y, \quad CD \cong CE =: z.$$

Analog gilt dies für  $\triangle A'B'C'$ . Sei  $\alpha$  der halbe Winkel in  $A$  und zeichne ihn ein. Dann folgt:

$$h = r \cdot x \quad \text{nach Definition der Multiplikation.}$$

Ebenso in  $\triangle A'B'C'$  gilt  $h' = r \cdot x'$ , daher

$$\frac{h}{h'} = \frac{x}{x'}.$$

Ebenso für alle anderen Dreiecke gilt:

$$\frac{y}{y'} = \frac{h}{h'} = \frac{z}{z'} =: k.$$

Daraus folgt:

$$x = k \cdot x', \quad y = k \cdot y', \quad z = k \cdot z'.$$

Nun gilt:

$$a = y + z \quad \text{und} \quad a' = y' + z' \quad \Rightarrow \quad a = k \cdot a'.$$

Ebenso gilt:

$$b = k \cdot b' \quad \text{und} \quad c = k \cdot c'.$$

□

**Proposition 1.72** (Pythagoras)

In einer Hilbertebene mit  $(P)$  sei  $\triangle ABC$  ein rechtwinkliges Dreieck mit Hypotenuse  $c$  und Seiten  $a, b$ . Dann gilt im assoziierten Körper  $\mathbb{K}$ :

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

*Beweis.* Führe das Lot von der Ecke des rechten Winkels auf die gegenüberliegende Seite. Nenne den Fußpunkt  $D$ . Das Dreieck  $\triangle ABC$  ist nach Proposition 1.71 ähnlich zu  $\triangle BDC$ , da  $\triangle ADC$  und  $\triangle BDC$  jeweils ähnlich zu  $\triangle ABC$  sind. Zwei Winkel stimmen überein, der letzte ergibt sich durch Proposition 1.49 und die Differenz von Winkeln. Sei  $x$  die Strecke, die mit der Strecke  $\overline{AD}$  in  $\mathbb{K}$  korrespondiert. Es gilt:

$$\frac{x}{a} = \frac{a}{c} \quad \text{und} \quad \frac{c-x}{b} = \frac{b}{c}.$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt:

$$cx = a^2 \quad \text{und} \quad c^2 - cx = b^2.$$

Daraus ergibt sich:

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

□

**Korollar 1.73** ( $\mathbb{K}$  ist pythagoreisch)

In einer Hilbertebene mit  $(P)$  ist  $\mathbb{K}$  pythagoreisch.

*Beweis.* Sei  $a \in \mathbb{K}$ . Falls  $a = 0$ , ist nichts zu zeigen. Falls  $a < 0$ , gehe zu  $-a$  über. Es gilt also  $a > 0$ , was bedeutet, dass  $a$  durch ein Segment repräsentiert wird.

Konstruiere ein Dreieck, wobei  $\overline{AB}$  mit  $a$  und  $\overline{AC}$  mit 1 korrespondiert. Dann repräsentiert  $\overline{BC}$  den Wert  $\sqrt{1+a^2}$ . □

**Satz 1.74** (Korrespondenz Körper Hilbertebene)

Sei  $\Pi$  eine Hilbertebene mit  $(P)$  und  $\mathbb{K}$  der geordnete Körper aus Definition 1.64. Nach Korollar 1.73 ist  $\mathbb{K}$  pythagoreisch. Dann ist  $\Pi$  isomorph zur kartesischen Ebene  $\mathbb{K}^2$  über  $\mathbb{K}$ .

## 1.8 Hyperbolische Ebene

Wir geben ein Modell für die hyperbolische Ebene an und zeigen damit, dass eine Hilbertebene existiert, welche das Parallelaxiom nicht erfüllt.

**Definition 1.75** (Hyperbolische Ebene)

Die hyperbolische Ebene ist die wie folgt definierte Geometrie  $(\mathbb{H}, \Gamma_{\mathbb{H}})$ : Die Menge der

Punkte ist die der Halbebene

$$\mathbb{H} := \{z = x + iy \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) > 0\}.$$

Die Menge  $\Gamma_{\mathbb{H}}$  der  $h$ -Geraden ist definiert durch

$$z \in g \in \Gamma_{\mathbb{H}} \iff \text{Es existieren } \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \text{ mit } \beta^2 - \alpha\gamma > 0,$$

sodass

$$\alpha z \bar{z} + \beta(z + \bar{z}) + \gamma = 0.$$

Man rechnet nach, dass  $h$ -Geraden in zwei Typen kommen und umgekehrt jede Menge dieser Form eine  $h$ -Gerade ist.

**Typ 1:** ( $\alpha = 0$ ) Die Gerade  $g$  ist ein Strahl, der senkrecht zur  $x$ -Achse ist, da  $2\beta x = -\gamma$ .

**Typ 2:** ( $\alpha \neq 0$ ) Die Gerade  $g$  ist ein Halbkreis mit Mittelpunkt  $x_0 = -\frac{\beta}{\alpha} \in \mathbb{R}$ ,  $y_0 = 0$  und Radius

$$r = \frac{\beta^2 - \alpha\gamma}{\alpha^2}.$$

**Lemma 1.76** ( $\mathbb{H}$  ist Inzidenzgeometrie)

Durch zwei verschiedene Punkte  $z_1 = x_1 + i \cdot y_1, z_2 = x_2 + i \cdot y_2 \in \mathbb{H}$  geht genau eine  $h$ -Gerade.

*Beweis.* Wir müssen zeigen, dass das lineare Gleichungssystem:

$$\alpha z_1 \bar{z}_1 + \beta(z_1 + \bar{z}_1) + \gamma = 0 \quad (1),$$

$$\alpha z_2 \bar{z}_2 + \beta(z_2 + \bar{z}_2) + \gamma = 0 \quad (2),$$

einen eindimensionalen Lösungsraum mit  $\beta^2 - \alpha\gamma > 0$  hat.

Für  $z_1 \neq z_2$  können wir schreiben:

$$z_1 \bar{z}_1 = x_1^2 + y_1^2, \quad z_1 + \bar{z}_1 = 2x_1, \quad z_2 \bar{z}_2 = x_2^2 + y_2^2, \quad z_2 + \bar{z}_2 = 2x_2.$$

Die Vektoren

$$\begin{pmatrix} x_1^2 + y_1^2 \\ 2x_1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} x_2^2 + y_2^2 \\ 2x_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sind aufgrund von  $z_1 \neq z_2$  linear unabhängig. Daher ist der Lösungsraum des obigen Gleichungssystems eindimensional, und die Lösungen

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

sind gerade die Vektoren, die orthogonal zu den beiden gegebenen Vektoren stehen.

Nun müssen wir zeigen, dass  $\beta^2 - \alpha\gamma > 0$ . Dies prüfen wir für drei Fälle:

**Fall 1:**  $x_1^2 + y_1^2 \neq x_2^2 + y_2^2$  und  $x_1 \neq x_2$ . In diesem Fall folgt  $\beta^2 - \alpha\gamma > 0$  direkt durch Einsetzen in die beiden Gleichungen.

**Fall 2:**  $x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2$  und  $x_1 \neq x_2$ . Da  $x_1 \neq x_2$ , erhalten wir aus dem Gleichungssystem:

$$2\beta(x_1 - x_2) = 0 \implies \beta = 0.$$

Einsetzen in die Gleichungen ergibt:

$$\alpha = -\frac{\gamma}{x_1^2 + y_1^2}.$$

Insbesondere gilt  $-\alpha\gamma > 0$ , da  $x_1^2 + y_1^2 > 0$ .

**Fall 3:**  $x_1 = x_2$ . Hier folgt  $y_1 \neq y_2$ , da  $z_1 \neq z_2$ . Aus den Gleichungen ergibt sich:

$$\alpha = 0, \quad \beta \neq 0 \quad (\text{da sonst auch } \gamma = 0 \text{ wäre}).$$

Somit gilt:

$$\beta^2 - \alpha\gamma = \beta^2 > 0.$$

In allen Fällen folgt  $\beta^2 - \alpha\gamma > 0$ , und daher existiert genau eine  $h$ -Gerade durch  $z_1$  und  $z_2$ . □

**Korollar 1.77** ( $(\mathbb{H}, \Gamma_{\mathbb{H}})$  ist eine Inzidenzgeometrie)

*Das Paar  $(\mathbb{H}, \Gamma_{\mathbb{H}})$  ist eine Inzidenzgeometrie.*

*Beweis.* Nach Lemma 1.76 ist gerade Axiom (I1) erfüllt. Axiom (I2) ist unmittelbar klar.

Für (I3) betrachten wir die Punkte  $(0, 1)$ ,  $(0, 2)$  und  $(1, 1)$ .

Angenommen, diese Punkte lägen alle auf einer gemeinsamen Geraden. Dann müsste insbesondere  $(1, 1)$  auf der Geraden durch  $(0, 1)$  und  $(0, 2)$  liegen. Da diese Gerade aber senkrecht zur  $x$ -Achse verläuft, kann  $(1, 1)$  nicht auf ihr liegen. Damit sind die drei Punkte nicht kollinear, und (I3) ist erfüllt. □

**Lemma 1.78** ( $(\mathbb{H}, \Gamma_{\mathbb{H}})$  erfüllt (P) nicht)

*Das Paar  $(\mathbb{H}, \Gamma_{\mathbb{H}})$  erfüllt das Parallelaxiom (P) nicht.*

*Beweis.* Betrachte die Punkte  $(0, 1)$  und  $(3, 1)$  in  $\mathbb{H}$ .

Die beiden Geraden

$$g_1 = \{z \in \mathbb{H} \mid z + \bar{z} = 0\}$$

und

$$g_2 = \{z \in \mathbb{H} \mid z \cdot \bar{z} = 1\}$$

verlaufen beide durch  $(0, 1)$  und schneiden sich nicht mit der Geraden

$$g_3 = \{z \in \mathbb{H} \mid (z - 3)(\bar{z} - 3) = 1\}.$$

Da also durch  $(0, 1)$  mehr als eine Gerade existiert, die zu  $g_3$  parallel ist, ist das Parallelaxiom  $(P)$  verletzt. □

**Definition 1.79** (Streckenordnung auf  $\mathbb{H}$ )

Auf  $(\mathbb{H}, \Gamma_{\mathbb{H}})$  definieren wir die Streckenordnung wie folgt:

Seien  $A, B, C \in g$  für eine Gerade  $g \in \Gamma_{\mathbb{H}}$ . Dann setzen wir:

- Falls  $g$  vom Typ 1 ist, gilt:

$$A * B * C \iff p_y(A) * p_y(B) * p_y(C) \text{ in } \mathbb{R}^+,$$

wobei die Projektion  $p_y : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}^+$  definiert ist durch

$$p_y(x, y) = (0, y).$$

- Falls  $g$  vom Typ 2 ist, gilt:

$$A * B * C \iff p_x(A) * p_x(B) * p_x(C) \text{ in } \mathbb{R},$$

wobei die Projektion  $p_x : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}$  definiert ist durch

$$p_x(x, y) = x.$$

**Lemma 1.80** ( $\mathbb{H}$  erfüllt  $(S1)$ – $(S4)$ )

Sei  $(\mathbb{H}, \Gamma_{\mathbb{H}})$  die hyperbolische Ebene mit Streckenordnung wie in Definition 1.79. Dann gelten die Axiome  $(S1)$ – $(S4)$ .

*Beweis.* Die Axiome  $(S1)$ – $(S3)$  folgen daraus, dass  $h$ -Geraden durch  $p_x$  bzw.  $p_y$  bijektiv und ordnungserhaltend auf offene Intervalle in  $\mathbb{R}$  abgebildet werden.

Für  $(S4)$  nutzen wir bekannte Eigenschaften aus  $\mathbb{R}^2$ : Für Geraden und Kreise in  $\mathbb{R}^2$  lassen sich natürliche Begriffe für Seiten sowie Inneres und Äußeres definieren. Dies erlaubt uns, eine Seite einer  $h$ -Geraden im Sinne von Proposition 1.11 zu betrachten. Nun wenden wir diese Eigenschaften auf Paschs Axiom an: Sei  $\triangle ABC$  ein Dreieck in  $\mathbb{H}$  und  $g \in \Gamma_{\mathbb{H}}$  eine Gerade mit  $A, B, C \notin g$ , die  $\overline{AB}$  schneidet.

Falls  $g \cap \overline{BC} \neq \emptyset$ , so liegen  $A$  und  $C$  auf derselben Seite von  $g$ , woraus folgt, dass  $\overline{AC} \cap g = \emptyset$ . Falls hingegen  $g \cap \overline{AC} \neq \emptyset$ , so liegen  $B$  und  $C$  auf derselben Seite von  $g$ , was  $\overline{BC} \cap g = \emptyset$  impliziert.

Wäre jedoch  $\overline{AC} \cap g = \emptyset = \overline{BC} \cap g$ , so wären  $A, B, C$  einerseits gemeinsam auf einer Seite von  $g$ , andererseits würden aber  $A$  und  $B$  auf verschiedenen Seiten von  $g$  liegen – ein Widerspruch. Damit ist (S4) erfüllt.  $\square$

**Definition 1.81** (Möbiustransformation)

Sei  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{R})$ . Eine Möbiustransformation ist eine Abbildung der Form

$$f_A : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}, \quad z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}$$

oder

$$\bar{f}_A : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}, \quad z \mapsto \frac{-a\bar{z} + b}{-c\bar{z} + d}.$$

Wir bezeichnen mit  $I_{\mathbb{H}}$  die Menge aller Möbiustransformationen.

**Lemma 1.82** ( $I_{\mathbb{H}}$  ist wohldefiniert)

Für  $A \in SL(2, \mathbb{R})$  gilt:

1.  $f_A(\mathbb{H}) = \mathbb{H} = \bar{f}_A(\mathbb{H})$ .
2.  $I_{\mathbb{H}}$  ist eine Gruppe.
3.  $I_{\mathbb{H}}$  wird erzeugt von Abbildungen der Form

$$z \mapsto -\frac{1}{z}, \quad z \mapsto az, \quad z \mapsto -\bar{z}, \quad z \mapsto z + b$$

mit  $a \in \mathbb{R}^+$ ,  $b \in \mathbb{R}$ . Das heißt,  $f_A$  und  $\bar{f}_A$  sind endliche Verknüpfungen dieser Abbildungen.

4.  $I_{\mathbb{H}}$  bildet  $h$ -Geraden auf  $h$ -Geraden ab.
5.  $I_{\mathbb{H}}$  erhält Streckenordnungen.

**Definition 1.83** (Kongruenzrelationen  $\cong$  und  $\cong_w$  auf  $\mathbb{H}$ )

Für Strecken  $\overline{AB}, \overline{CD} \subseteq \mathbb{H}$  definieren wir die Kongruenzrelation

$$\overline{AB} \cong \overline{CD} \iff \exists f \in I_{\mathbb{H}} \text{ mit } f(\overline{AB}) = \overline{CD}.$$

Für Winkel  $\angle ABC, \angle DEF$  in  $\mathbb{H}$  definieren wir

$$\angle ABC \cong_w \angle DEF \iff \exists f \in I_{\mathbb{H}} \text{ mit } f(\angle ABC) = \angle DEF.$$

Insbesondere ist nach dieser Definition die Gruppe  $I_{\mathbb{H}}$  eine Untergruppe der Bewegungsgruppe von  $\mathbb{H}$ .



**Proposition 1.84** ( $\mathbb{H}$  erfüllt (EB))

Die Geometrie  $(\mathbb{H}, \Gamma_{\mathbb{H}}, Z_{\mathbb{H}}, \cong, \cong_w)$  erfüllt (EB).

**Lemma 1.85**

Sei  $g \in \Gamma_{\mathbb{H}} \subseteq \mathbb{H}$ ,  $P, Q \in g$ ,  $P \neq Q$ ,  $R, S \in \mathbb{H}$ ,  $R \neq S$ .

Dann existieren genau zwei Abbildungen  $f_A, \bar{f}_B \in I_{\mathbb{H}}$  mit  $f_A(R) = \bar{f}_B(R) = P$  und  $f_A(S), \bar{f}_B(S)$  auf der selben Seite von  $P$  wie  $Q$ .

Weiter gilt  $f_A(S) = \bar{f}_B(S)$ .

**Lemma 1.86** (Punktetausch)

Sei  $\overline{PQ}$  Strecke in  $\mathbb{H}$ , dann existiert  $f \in I_{\mathbb{H}}$  mit  $f(p) = Q$ ,  $f(Q) = P$ . Insbesondere

$$f(\overline{PQ}) = \overline{QP}$$

**Satz 1.87** ( $(\mathbb{H}, \Gamma_{\mathbb{H}}, Z_{\mathbb{H}}, \cong, \cong_w)$  ist eine Hilbertebene)

Die Hyperbolische Ebene erfüllt die Axiome (K1)-(K5).

## 2 Topologie

### 2.1 Metrische und topologische Räume

**Definition 2.1** (Metrischer Raum)

Ein metrischer Raum ist ein Paar  $(M, d)$ , bestehend aus einer Menge  $M \neq \emptyset$  und einer Abbildung  $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ , sodass folgende Eigenschaften gelten:

$$(i) \quad d(x, y) = 0 \iff x = y \quad (\text{Positiv definit})$$

$$(ii) \quad d(x, y) = d(y, x) \quad (\text{Symmetrie})$$

$$(iii) \quad d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \quad (\text{Dreiecksungleichung})$$

In einem metrischen Raum gibt es Begriffe wie *Stetigkeit*, *Kongruenz* und *Kompaktheit*.

**Definition 2.2** (Offene Mengen in  $(M, d)$ )

Sei  $(M, d)$  ein metrischer Raum. Eine Teilmenge  $O \subset M$  heißt offen, falls für alle  $x \in O$  ein  $\epsilon(x) > 0$  existiert, sodass gilt:

$$B_{\epsilon}(x) \subset O,$$

wobei  $B_{\epsilon}(x) = \{y \in M : d(x, y) < \epsilon\}$  der  $\epsilon$ -Ball ist.

Bemerkung: Ein  $\epsilon$ -Ball ist stets offen.

**Beispiel 2.3** ( $d_{\infty}$ - und  $d_2$ -Metrik)

Auf  $\mathbb{R}^2$  lassen sich die folgenden Metriken definieren:

- $d_\infty((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \max(|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|)$ ,
- $d_2((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$ .

Die Einheitsbälle mit Radius 1 um den Ursprung 0 unterscheiden sich in diesen Metriken:

- Der  $d_\infty$ -Ball ist ein Quadrat,
- Der  $d_2$ -Ball ist ein Kreis.

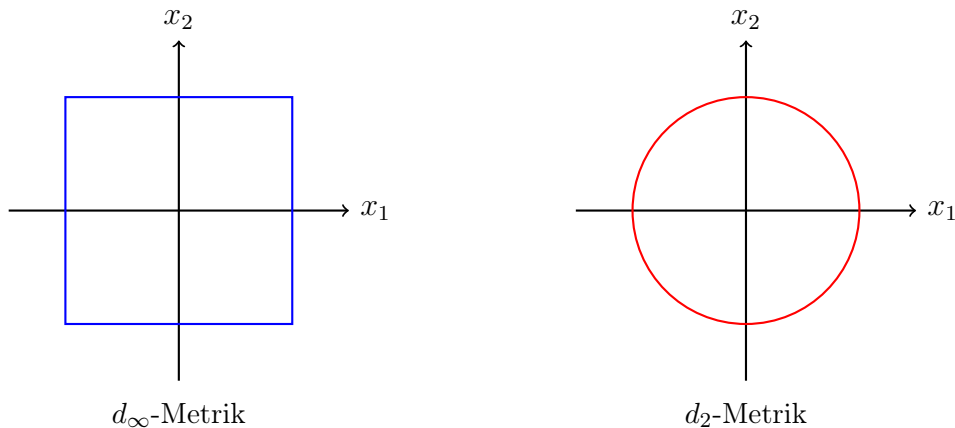


Abbildung 1: Vergleich der Einheitsbälle in  $d_\infty$ - und  $d_2$ -Metrik auf  $\mathbb{R}^2$ .

**Lemma 2.4** (Stetigkeit in  $(M, d)$ )

Sei  $f : (M, d) \rightarrow (M', d')$  eine Abbildung zwischen metrischen Räumen. Dann ist die Abbildung  $f$  stetig, wenn und nur wenn für jedes  $\epsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  existiert, sodass für alle  $x \in M$  gilt:

$$d(x, y) < \delta \quad \Rightarrow \quad d'(f(x), f(y)) < \epsilon.$$

Die Stetigkeit von  $f$  ist äquivalent dazu, dass für jede offene Menge  $O \subset M'$  gilt:

$$f^{-1}(O) \subset M \text{ ist offen.}$$

**Definition 2.5**

Eine **Topologie** auf einer Menge  $X$  ist ein Mengensystem  $\tau \subset \mathcal{P}(X)$ , dessen Elemente offene Mengen genannt werden, und das folgende Eigenschaften erfüllt:

1.  $\emptyset, X \in \tau$ ,
2. Wenn  $A, B \in \tau$ , dann gilt  $A \cap B \in \tau$ ,
3. Wenn  $U_i \in \tau$  für jedes  $i \in I$ , dann gilt  $\bigcup_{i \in I} U_i \in \tau$ .

Ein **topologischer Raum** ist ein Paar  $(X, \tau)$ , bestehend aus einer Menge  $X$  und einer Topologie  $\tau$  auf  $X$ .

**Beispiel 2.6** (Topologien)

Beispiele für Topologien:

1. Sei  $(M, d)$  ein metrischer Raum. Dann definiert

$$\tau_d := \{O \subset M : O \text{ ist offen bezüglich } d\}$$

eine Topologie auf  $M$ . Wir nennen  $\tau_d$  die von der Metrik induzierte Topologie.

2. Sei  $(X, \tau)$  ein topologischer Raum und  $Y \subset X$ . Dann definiert

$$\tau_Y := \{O \subset Y : \text{es existiert ein } V \subset X, \text{ offen in } X, \text{ mit } V \cap Y = O\}$$

eine Topologie auf  $Y$ . Diese Topologie wird **Relativtopologie** oder **Teilraum** genannt.

3. Für jede Menge  $X$  gibt es die **diskrete Topologie**, gegeben durch  $\tau = \mathcal{P}(X)$ .
4. Für jede Menge  $X$  gibt es die **indiskrete Topologie**, gegeben durch  $\tau = \{\emptyset, X\}$ .

**Definition 2.7** (Stetigkeit)

Eine Abbildung  $f : (X, \tau_X) \rightarrow (Y, \tau_Y)$  heißt stetig, falls für jede offene Menge  $O \subset Y$  gilt:

$$f^{-1}(O) \text{ ist offen in } X.$$

**Lemma 2.8** (Stetige Abbildungen)

Folgende Abbildungen sind stetig:

1. Die Identität  $\text{id}_X : (X, \tau_X) \rightarrow (X, \tau_X)$  ist stetig für alle topologischen Räume  $(X, \tau_X)$ .
2. Seien  $X \xrightarrow{f} Y$  und  $Y \xrightarrow{g} Z$  stetige Abbildungen. Dann ist auch die Verkettung  $X \xrightarrow{g \circ f} Z$  stetig.
3. Sei  $A \subset Z$  ein Teilraum und  $f : X \rightarrow A$  eine Abbildung. Dann gilt:  $X \xrightarrow{f} A$  ist stetig genau dann, wenn  $X \xrightarrow{f} Z$  stetig ist.

**Beispiel 2.9** (Stetigkeit)

Die Abbildung

$$f : [0, 1] \rightarrow S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}, \quad t \mapsto e^{2\pi ti}$$

ist stetig, wobei  $[0, 1]$  und  $S^1$  jeweils mit der Relativtopologie versehen sind.

**Definition 2.10** (Produkttopologie)

Seien  $(X, \tau_X)$  und  $(Y, \tau_Y)$  topologische Räume. Wir definieren die **Produkttopologie** auf  $X \times Y$  wie folgt:

Betrachte dazu

$$\mathcal{B} := \{U \times V : U \in \tau_X, V \in \tau_Y\},$$

und setze

$$\tau_{X \times Y} := \left\{ \bigcup_{i \in I} B_i : B_i \in \mathcal{B}, i \in I \right\}.$$

Dann ist  $\tau_{X \times Y}$  eine Topologie auf  $X \times Y$ .

**Lemma 2.11** (Produkttopologie und Projektionen)

Eine Abbildung  $f : Z \rightarrow X \times Y$  mit der Produkttopologie ist genau dann stetig, wenn die Abbildungen

$$\pi_X \circ f : Z \rightarrow X \quad \text{und} \quad \pi_Y \circ f : Z \rightarrow Y$$

stetig sind, wobei  $\pi_X : X \times Y \rightarrow X$  und  $\pi_Y : X \times Y \rightarrow Y$  die kanonischen Projektionen sind.

**Definition 2.12** (Homöomorphismen)

Eine Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  zwischen topologischen Räumen heißt **Homöomorphismus**, falls  $f$  stetig, bijektiv und  $f^{-1}$  ebenfalls stetig ist.

**Definition 2.13** (Inneres)

Sei  $(X, \tau)$  ein topologischer Raum und  $A \subset X$  eine Teilmenge. Das Innere von  $A$  in  $X$  ist definiert durch:

$$A^\circ := \bigcup_{O \subset A, O \text{ offen}} O.$$

Das Innere  $A^\circ$  ist die größte offene Teilmenge, die in  $A$  enthalten ist.

**Definition 2.14** (Abgeschlossenheit)

Sei  $(X, \tau)$  ein topologischer Raum und  $A \subset X$  eine Teilmenge. Wir nennen  $A$  abgeschlossen in  $X$ , falls  $X \setminus A = A^C$  offen ist.

Es gelten folgende Eigenschaften:

1.  $\emptyset$  und  $X$  sind abgeschlossen.
2. Sind  $A, B \subset X$  abgeschlossen, so ist auch  $A \cup B$  abgeschlossen.
3. Sind  $(A_i)_{i \in I}$  eine Familie abgeschlossener Mengen in  $X$ , so ist auch  $\bigcap_{i \in I} A_i$  abgeschlossen.

Eine Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  zwischen topologischen Räumen ist stetig, genau dann, wenn  $A \subset Y$  abgeschlossen impliziert  $f^{-1}(A)$  abgeschlossen.

**Definition 2.15** (Abschluss)

Sei  $(X, \tau)$  ein topologischer Raum und  $A \subset X$  eine Teilmenge. Der Abschluss von  $A$  ist

definiert durch:

$$\overline{A} := \bigcap_{\substack{A \subset U \\ U \text{ abgeschlossen}}} U.$$

$\overline{A}$  ist die kleinste abgeschlossene Menge, die  $A$  enthält.

Ein Punkt  $x \in \overline{A}$  genau dann, wenn jede offene Menge  $O \subset X$  mit  $x \in O$  die Menge  $A$  schneidet, das heißt:

$$O \cap A \neq \emptyset.$$

**Lemma 2.16** (Abschluss und Stetigkeit)

Eine Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  zwischen topologischen Räumen ist stetig, genau dann, wenn für alle  $A \subset X$  gilt:

$$f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}.$$

Wir fragen uns: Welche Topologien werden von Metriken induziert? Ein notwendiges Kriterium ist:

**Definition 2.17** (Hausdorff-Raum)

Ein topologischer Raum  $(X, \tau)$  heißt hausdorffsch, falls für alle  $x, y \in X$  mit  $x \neq y$  Mengen  $U, V \in \tau$  existieren, sodass gilt:

$$x \in U, \quad y \in V \quad \text{und} \quad U \cap V = \emptyset.$$

**Definition 2.18** (Zusammenhang)

Ein topologischer Raum  $(X, \tau)$  heißt zusammenhängend, falls jede stetige Abbildung von  $X$  in einen beliebigen diskreten Raum konstant ist.

**Beispiel 2.19** (Zusammenhängende Räume)

Hier sind Beispiele für zusammenhängende und nicht zusammenhängende Räume:

1. Sei  $X$  ein diskreter topologischer Raum. Dann ist  $X$  genau dann zusammenhängend, wenn  $|X| \leq 1$ . Falls  $|X| > 1$ , betrachte  $x, y \in X$  mit  $x \neq y$  und die stetige Abbildung  $f : X \rightarrow \mathbb{Z}_2$ , definiert durch:

$$f(z) = \begin{cases} 0, & \text{falls } z = x, \\ 1, & \text{falls } z \neq x. \end{cases}$$

Dann ist  $f$  stetig, aber nicht konstant. Somit ist  $X$  nicht zusammenhängend.

2. Der Raum  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  ist nicht zusammenhängend, da die Abbildung

$$\text{sgn} : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \{-1, 1\}, \quad x \mapsto \begin{cases} -1, & \text{falls } x < 0, \\ 1, & \text{falls } x > 0 \end{cases}$$

stetig, aber nicht konstant ist.

3. Sind  $X$  und  $Y$  zusammenhängende Räume, so ist auch die Produkttopologie  $X \times Y$  zusammenhängend.

**Lemma 2.20** (Charakterisierung des Zusammenhangs)

Ein topologischer Raum  $(X, \tau)$  ist genau dann zusammenhängend, wenn  $\emptyset$  und  $X$  die einzigen Mengen sind, die sowohl offen als auch abgeschlossen sind.

**Lemma 2.21** (Stetige Bilder zusammenhängender Mengen)

Sei  $f : X \rightarrow Y$  eine stetige, surjektive Abbildung zwischen topologischen Räumen. Dann gilt:

$$X \text{ zusammenhängend} \implies Y \text{ zusammenhängend.}$$

**Korollar 2.22** (Zwischenwertsatz)

Sei  $(X, \tau)$  zusammenhängend und  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Falls  $x < y$  für  $x, y \in f(X)$ , dann gilt:

$$[x, y] \subset f(X).$$

**Satz 2.23** ( $[0, 1]$  zusammenhängend)

Das Einheitsintervall  $[0, 1]$  mit der Teilraumtopologie von  $\mathbb{R}$  ist zusammenhängend.

**Definition 2.24** (Wegzusammenhängend)

Ein topologischer Raum  $X$  heißt **wegzusammenhängend**, falls es für alle  $x, y \in X$  eine stetige Abbildung  $f : [0, 1] \rightarrow X$  gibt, sodass  $f(0) = x$  und  $f(1) = y$ .

**Lemma 2.25** (Bild eines wegzusammenhängenden Raums ist wegzusammenhängend)

Sei  $f : X \rightarrow Y$  eine stetige Abbildung zwischen topologischen Räumen und sei  $X$  wegzusammenhängend. Dann ist auch  $f(X)$  wegzusammenhängend.

**Lemma 2.26** (Wegzusammenhängend impliziert zusammenhängend)

Sei  $X$  ein wegzusammenhängender topologischer Raum. Dann ist  $X$  auch zusammenhängend.

**Satz 2.27** (Dimensionsinvarianz für  $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ )

Der topologische Raum  $\mathbb{R}^n$  ist homöomorph zu  $\mathbb{R}$  genau dann, wenn  $n = 1$ .

**Lemma 2.28** (Äquivalenzrelation)

Sei  $X$  ein topologischer Raum. Wir definieren die Äquivalenzrelation  $\sim$  auf  $X$  durch

$x \sim y$  genau dann, wenn es einen stetigen Weg  $f : [0, 1] \rightarrow X$  mit  $f(0) = x$  und  $f(1) = y$  gibt.

Dann ist  $\sim$  eine Äquivalenzrelation auf  $X$ .

**Lemma 2.29** (Verklebungslemma)

Sei  $X$  ein topologischer Raum und  $A, B \subset X$  seien abgeschlossen mit  $A \cup B = X$ . Seien  $f : A \rightarrow Y$  und  $g : B \rightarrow Y$  stetige Abbildungen zwischen topologischen Räumen, und sei  $f(x) = g(x)$  für alle  $x \in A \cap B$ . Dann ist die Abbildung

$$h : X \rightarrow Y, \quad h(x) = \begin{cases} f(x), & \text{für } x \in A, \\ g(x), & \text{für } x \in B, \end{cases}$$

stetig.

**Definition 2.30** (Wegzusammenhangskomponenten)

Sei  $X$  ein topologischer Raum und sei  $\sim$  eine Äquivalenzrelation auf  $X$  wie in 2.28. Die Äquivalenzklassen von  $\sim$  heißen **Wegzusammenhangskomponenten** von  $X$ .

## 2.2 Kompaktheit

**Definition 2.31** (Kompaktheit)

Ein topologischer Raum  $X$  heißt **kompakt**, falls für jede offene Überdeckung  $\{U_i : i \in I\}$  von  $X$  (d.h.  $U_i$  ist offen und  $\bigcup_{i \in I} U_i = X$ ) eine endliche Teilüberdeckung existiert, d.h. es gibt eine endliche Menge  $J \subset I$ , so dass

$$\bigcup_{j \in J} U_j = X.$$

Beispiel: Jeder endliche topologische Raum ist kompakt.

**Lemma 2.32** (Kompaktheit von  $f(K)$ )

Sei  $K$  ein kompakter topologischer Raum,  $Y$  ein topologischer Raum und  $f : K \rightarrow Y$  eine surjektive stetige Abbildung. Dann ist  $f(K)$  kompakt in  $Y$ .

**Lemma 2.33** (Abgeschlossene Teilmengen eines kompakten Raums sind kompakt)

Sei  $K$  ein kompakter topologischer Raum und  $A \subset K$  eine abgeschlossene Menge. Dann ist  $A$  mit der Teilraumtopologie kompakt.

**Lemma 2.34** (Kompakte metrische Räume sind beschränkt)

Sei  $(M, d)$  ein kompakter metrischer Raum, d.h.  $(M, \tau_d)$  ist kompakt. Dann ist  $M$  beschränkt, das heißt, für jedes  $x \in M$  existiert ein  $R(x) > 0$ , so dass  $B_R(x) = M$ , wobei  $B_R(x)$  die offene Bälle um  $x$  mit Radius  $R$  bezeichnet.

**Satz 2.35**

Sei  $X$  ein topologischer Hausdorff-Raum und  $K \subset X$  eine kompakte Teilmenge. Dann ist  $K$  abgeschlossen.

**Korollar 2.36** (Kompakt und Maxima)

Sei  $K \neq \emptyset$  ein kompakter topologischer Raum und  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Abbildung. Dann besitzt  $f$  ein Maximum, das heißt, es existiert ein  $x \in K$ , sodass für alle  $y \in K$  gilt:

$$f(x) \geq f(y).$$

**Korollar 2.37** (Homöomorphiekriterium)

Sei  $f : K \rightarrow Y$  eine stetige Abbildung zwischen topologischen Räumen, wobei  $K$  kompakt und  $Y$  hausdorffsch ist. Dann ist  $f$  eine abgeschlossene Abbildung, das heißt, für jede abgeschlossene Menge  $A \subset K$  gilt:

$$f(A) \subset Y \text{ ist abgeschlossen.}$$

**Satz 2.38** ( $[0, 1]$  ist kompakt)

Betrachte  $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ . Dann ist  $[0, 1]$  mit der Teilraumtopologie kompakt.

**Korollar 2.39** (Heine-Borel)

Sei  $A \subset \mathbb{R}$ . Dann ist  $A$  genau dann kompakt, wenn  $A$  in  $\mathbb{R}$  abgeschlossen und beschränkt ist.

Wir untersuchen weitere Charakterisierungen von Kompaktheit. Um Kompaktheit mit Hilfe von Kovergenz zu charakterisieren, müssen wir den Konvergenzbegriff verallgemeinern.

**Definition 2.40** (Grenzproblem)

Ein Grenzproblem in einem topologischen Raum  $X$  besteht aus:

- einem topologischen Raum  $D$  mit Basispunkt  $\infty \in D$ , sodass  $\overline{D \setminus \{\infty\}} = D$ , das heißt,  $D \setminus \{\infty\}$  liegt dicht in  $D$ ,
- einer stetigen Abbildung  $f : D \setminus \{\infty\} \rightarrow X$ .

Eine Lösung des Grenzproblems  $(D, f)$  ist eine stetige Fortsetzung  $F : D \rightarrow X$  von  $f$ .

**Beispiel 2.41** (Folgen)

Eine Folge  $x : \mathbb{N} \rightarrow X$  in  $X$  liefert ein Grenzproblem in  $X$ . Sei

$$D = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$$

mit der Topologie, bei der  $O \subset D$  genau dann offen ist, wenn gilt:

- $O \subset \mathbb{N}$ , oder
- es existiert ein  $N \in \mathbb{N}$  mit  $[N, \infty] \subset O$ .



Dabei trägt  $\mathbb{N}$  die diskrete Topologie, und somit ist  $f : \mathbb{N} \rightarrow X$  stets stetig.

Eine Abbildung  $F : D \rightarrow X$  ist genau dann stetig, wenn  $x_n \rightarrow a$  für  $n \rightarrow \infty$  gilt, wobei  $F(\infty) = a$ .

**Definition 2.42** (Häufungspunkt)

Ein Element  $a \in X$  in einem topologischen Raum heißt Häufungspunkt des Grenzproblems  $(D, f)$ , falls für alle offenen Teilmengen  $O \subset X$  mit  $a \in O$  und für alle offenen Teilmengen  $V \subset D$  mit  $\infty \in V$  gilt:

$$f(V \setminus \{\infty\}) \cap O \neq \emptyset.$$

**Satz 2.43** (Charakterisierung der Kompaktheit)

Für einen topologischen Raum  $X$  sind folgende Aussagen äquivalent:

1.  $X$  ist kompakt.
2. Für alle  $U \subset X \times Y$  offen und alle  $y \in Y$  mit  $X \times \{y\} \subset U$  existiert eine offene Menge  $V \subset Y$  mit  $y \in V$  und  $X \times V \subset U$ . (Teilungslemma)
3. Für jeden topologischen Raum  $Y$  ist die Projektion  $\pi : X \times Y \rightarrow Y$ , definiert durch  $\pi(x, y) = y$ , eine abgeschlossene Abbildung.
4. Jedes Grenzproblem in  $X$  besitzt einen Häufungspunkt.

**Lemma 2.44** (Graphen und Häufungspunkte)

Für ein Grenzproblem  $(D, f)$  in einem topologischen Raum  $X$  und  $a \in X$  sind folgende Aussagen äquivalent:

1.  $a$  ist ein Häufungspunkt von  $(D, f)$ .
2.  $(\infty, a) \in \overline{\text{graph}(f)}$ , wobei  $\text{graph}(f)$  der Graph von  $f$  ist und der Abschluss in  $D \times X$  betrachtet wird.

**Satz 2.45** (Produkte von kompakten Räumen)

Seien  $X$  und  $Y$  kompakte topologische Räume. Dann ist auch  $X \times Y$  mit der Produkttopologie kompakt.

**Korollar 2.46** ( $[0, 1]^n$  ist kompakt)

Betrachte  $[0, 1]^n \subset \mathbb{R}^n$ . Dann ist  $[0, 1]^n$  kompakt in der Teilraumtopologie von  $\mathbb{R}^n$ .

**Korollar 2.47** (Heine-Borel in  $\mathbb{R}^n$ )

Sei  $A \subset \mathbb{R}^n$ . Dann ist  $A$  genau dann kompakt, wenn  $A$  in  $\mathbb{R}^n$  abgeschlossen und beschränkt ist.

Wir wollen einen kleinen Exkurs zu universellen Konstruktionen machen:

**Satz 2.48** (Induzierte Topologie)

Sei  $X$  eine Menge und  $f_i : X \rightarrow X_i$  Abbildungen für  $X_i$  für  $i \in I$  topologische Räume.

Dann existiert genau eine Topologie auf  $X$  mit folgender Eigenschaft:

Für jeden topologischen Raum  $Z$  und jede Abbildung  $g : Z \rightarrow X$  ist  $g : Z \rightarrow X$  stetig genau dann, wenn für alle  $i \in I$  ist  $f_i \circ g$  stetig ist.

Diese Topologie heißt induziert von der Familie  $(f_i)_{i \in I}$ .

**Beispiele:**

1.  $I = \emptyset$  induziert die Klumpentopologie auf  $X$ , da diese Topologie die Eigenschaft hat, dass jede Abbildung  $g : Z \rightarrow X$  stetig ist. Aus der Eindeutigkeit in 2.47 folgt die Behauptung

2. Sei  $X \subset Y$  Teilraum,  $Y$  topologischer Raum. Die Familie  $i : X \rightarrow Y$  (Inklusion) induziert die Teilraumtopologie auf  $X$ , denn nach 2.8 3) ist eine Abbildung

$$Z \xrightarrow{g} X \text{ ist stetig genau dann, wenn } Z \xrightarrow{g} X \xrightarrow{i} Y \text{ stetig ist.}$$

3. Seien  $X_1, X_2$  topologische Räume und  $X := X_1 \times X_2$ . Die Projektionen

$$\pi_i : X \rightarrow X_i, \quad (x_1, x_2) \mapsto x_i \quad \text{für } i = 1, 2,$$

induzieren die Produkttopologie auf  $X$ .

4. Seien  $(X_i)_{i \in I}$  eine Familie topologischer Räume. Dann sei  $X := \prod_{i \in I} X_i$ . Die Familie der Projektionen

$$\pi_i : X \rightarrow X_i, \quad (x_i)_{i \in I} \mapsto x_i \quad \text{für } i \in I,$$

induziert die Produkttopologie auf  $X$ .

5. Es gilt: Eine Abbildung  $f = (f_i)_{i \in I} : Z \rightarrow \prod_{i \in I} X_i$  ist genau dann stetig, wenn für alle  $i \in I$  die Abbildungen  $f_i : Z \rightarrow X_i$  stetig sind.

**Satz 2.49** (Koinduzierte Topologie)

Sei  $X$  eine Menge und  $(X_i)_{i \in I}$  eine Familie topologischer Räume mit Abbildungen  $f_i : X_i \rightarrow X$  für  $i \in I$ . Dann gibt es genau eine Topologie auf  $X$ , die die folgende Eigenschaft erfüllt:

Für jeden topologischen Raum  $Z$  und jede Abbildung  $g : X \rightarrow Z$  gilt:

$$g : X \rightarrow Z \text{ ist stetig} \iff \forall i \in I : X_i \xrightarrow{f_i} X \xrightarrow{g} Z \text{ ist stetig.}$$

Diese Topologie heißt die koinduzierte Topologie von der Familie  $(f_i)_{i \in I}$ .

### Beispiel 2.50

Es folgen Beispiele zur koinduzierten Topologie:

1. Die leere Familie  $(f_i)_{i \in \emptyset}$  koinduziert die diskrete Topologie auf  $X$ .
2. Eine Abbildung  $f : Y \rightarrow X$  von einem topologischen Raum  $Y$  nach  $X$  koinduziert die Quotiententopologie auf  $X$ .
3. Seien  $X_1$  und  $X_2$  topologische Räume und  $X := X_1 \cup X_2$ . Die Inklusionsabbildungen

$$i_1 : X_1 \rightarrow X, \quad i_2 : X_2 \rightarrow X,$$

koinduzieren die disjunkte Vereinigungstopologie auf  $X$ .

4. Allgemeiner: Seien  $(X_i)_{i \in I}$  eine Familie topologischer Räume und  $X := \bigcup_{i \in I} X_i$ . Die Familie der Inklusionsabbildungen

$$i_i : X_i \rightarrow X \quad \text{für alle } i \in I,$$

koinduziert die disjunkte Vereinigungstopologie auf  $X$ . In dieser Topologie gilt:

$$f = (f_i)_{i \in I} : \bigcup_{i \in I} X_i \rightarrow Z \text{ ist stetig} \iff \forall i \in I : f_i : X_i \rightarrow Z \text{ ist stetig.}$$

### Satz 2.51 (Tychonoff)

Sei  $(K_i)_{i \in I}$  eine Familie kompakter topologischer Räume. Dann ist das Produkt

$$\prod_{i \in I} K_i$$

mit der Produkttopologie kompakt.

Mit dem Tychonoff-Satz können wir zeigen, dass Kompaktheit im Allgemeinen nicht Folgenkompaktheit impliziert. Ein Beispiel ist das Produkt unendlich vieler kompakter Räume, das zwar kompakt, aber nicht folgenkompakt ist.

### Definition 2.52 (Verfeinerung von Grenzproblemen)

Seien  $(D, f)$  und  $(D', f')$  Grenzprobleme in  $X$ . Wir sagen, dass  $(D', f')$  eine Verfeinerung von  $(D, f)$  ist, falls es eine stetige Abbildung

$$\alpha : D' \rightarrow D$$

gibt mit den Eigenschaften:

- $\alpha(\infty) = \infty$ ,
- $\alpha(D' \setminus \{\infty\}) \subset D \setminus \{\infty\}$ ,

- $f' = f \circ \alpha$ .

*Bemerkung:* Teilfolgen liefern Verfeinerungen der zugehörigen Grenzprobleme.

**Satz 2.53** (Häufungspunkte und Verfeinerungen)

Für ein Grenzproblem  $(D, f)$  in  $X$  und  $a \in X$  sind folgende Aussagen äquivalent:

1.  $a$  ist ein Häufungspunkt von  $(D, f)$ .
2.  $a$  ist ein Grenzwert einer Verfeinerung von  $(D, f)$ .
3.  $a$  ist ein Grenzwert von  $(D, f)$  in einer eventuell feineren Topologie, für die  $D \setminus \{\infty\} \subset D$  immer noch dicht ist.

Wir wollen der Frage nachgehen, wann ein topologischer Raum metrisierbar ist, das heißt, ob  $(X, \tau) = (X, \tau_d)$  für eine Metrik  $d$  gilt.

## 2.3 Trennungsaxiome

Sei  $(M, d)$  ein metrischer Raum und  $A \subset M$ . Dann ist die Abbildung

$$d_A : M \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \inf_{a \in A} d(a, x)$$

eine stetige Funktion mit der Eigenschaft:

$$d_A(x) = 0 \iff x \in \overline{A}.$$

**Lemma 2.54** (Metrische Räume und Trennungseigenschaften)

In einem metrischen Raum  $(M, d)$  gilt:

1. Sei  $A \subset M$  abgeschlossen. Dann existiert eine stetige Funktion  $f : M \rightarrow [0, \infty)$  mit

$$f^{-1}(\{0\}) = A.$$

2. Sind  $A, B \subset M$  abgeschlossen mit  $A \cap B = \emptyset$ , so existiert eine stetige Funktion  $f : M \rightarrow [0, 1]$  mit

$$f^{-1}(\{0\}) = A \quad \text{und} \quad f^{-1}(\{1\}) = B.$$

3. Für alle abgeschlossenen Mengen  $A, B \subset M$  mit  $A \cap B = \emptyset$  existieren offene Mengen  $U, V \subset M$  mit

$$A \subset U, \quad B \subset V, \quad \text{und} \quad U \cap V = \emptyset.$$

**Satz 2.55** (Urysohns Lemma)

Für einen topologischen Raum  $X$  sind die folgenden Aussagen äquivalent:

1. Für alle abgeschlossenen Mengen  $A, B \subset X$  mit  $A \cap B = \emptyset$  existieren offene Mengen  $U, V \subset X$  mit

$$A \subset U, \quad B \subset V, \quad \text{und} \quad U \cap V = \emptyset.$$

2. Für alle abgeschlossenen Mengen  $A, B \subset X$  mit  $A \cap B = \emptyset$  existiert eine stetige Funktion  $f : X \rightarrow [0, 1]$  mit

$$f|_A = 0, \quad f|_B = 1.$$

**Definition 2.56** (Trennungsaxiome)

Sei  $(X, \tau)$  ein topologischer Raum. Dann nennt man  $(X, \tau)$ :

- ein  $T_0$ -Raum, falls für alle  $p, y \in X$  mit  $p \neq y$  eine offene Umgebung  $U_p$  von  $p$  existiert mit  $y \notin U_p$  oder eine offene Umgebung  $U_y$  von  $y$  mit  $p \notin U_y$ .
- ein  $T_1$ -Raum, falls für alle  $p, y \in X$  mit  $p \neq y$  offene Umgebungen  $U_p, U_y$  existieren mit  $p \in U_p, y \notin U_p$  und umgekehrt  $y \in U_y, p \notin U_y$ .
- ein  $T_2$ -Raum (Hausdorff-Raum), falls für alle  $p, y \in X$  mit  $p \neq y$  offene Mengen  $U_p, U_y$  existieren mit  $p \in U_p, y \in U_y$  und  $U_p \cap U_y = \emptyset$ .
- ein  $T_3$ -Raum oder regulär, falls  $X$  ein  $T_1$ -Raum ist und für alle  $p \in X$  und jede abgeschlossene Teilmenge  $A \subset X$  mit  $p \notin A$  offene Mengen  $U, V \subset X$  existieren mit

$$p \in U, \quad A \subset V, \quad \text{und} \quad U \cap V = \emptyset.$$

- ein  $T_{3\frac{1}{2}}$ -Raum oder vollständig regulär, falls  $X$  ein  $T_1$ -Raum ist und für alle  $p \in X$  und alle abgeschlossenen Teilmengen  $A \subset X$  mit  $p \notin A$  eine stetige Funktion

$$f : X \rightarrow [0, 1]$$

existiert mit  $f(p) = 0$  und  $f|_A = 1$ .

- ein  $T_4$ -Raum, falls  $X$  ein  $T_1$ -Raum ist und die Eigenschaft (1) aus Lemma 2.54 gilt.

**Satz 2.57** (Urysohns Metrisierbarkeitssatz)

Sei  $(X, \tau)$  ein topologischer Raum. Falls  $X$  die folgenden Eigenschaften erfüllt:

1.  $X$  ist ein  $T_2$ -Raum (Hausdorff-Raum),
2.  $X$  ist normal,

3.  $X$  erfüllt das zweite Abzählbarkeitsaxiom, d.h. es existiert eine abzählbare Menge  $S \subset \tau$ , sodass jedes  $O \in \tau$  als Vereinigung von Mengen  $S_i \in S$  für  $i \in \mathbb{N}$  geschrieben werden kann,

dann ist  $X$  metrisierbar, d.h. es existiert eine Metrik  $d$  auf  $X$ , sodass  $\tau = \tau_d$ .

**Definition 2.58** (Topologische Mannigfaltigkeit)

Sei  $n \in \mathbb{N}_0$ . Ein topologischer Raum  $(M, \tau)$  heißt  $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit, falls  $M$  die folgenden Bedingungen erfüllt:

1.  $M$  ist ein  $T_2$ -Raum (Hausdorff-Raum).
2.  $M$  erfüllt das zweite Abzählbarkeitsaxiom, d.h. es existiert eine abzählbare Menge  $S \subset \tau$ , sodass jede offene Menge in  $M$  als Vereinigung von Mengen aus  $S$  geschrieben werden kann.
3.  $M$  ist lokal homöomorph zu  $\mathbb{R}^n$ , d.h. zu jedem  $x \in M$  existiert eine offene Umgebung  $U \subset M$ , eine offene Menge  $\hat{U} \subset \mathbb{R}^n$  und ein Homöomorphismus

$$\varphi : U \rightarrow \hat{U}.$$

**Bemerkungen:**

1. Keine der drei Eigenschaften folgt aus den beiden anderen.
2. Mannigfaltigkeiten sind normal und damit metrisierbar.
3. Der Satz über die Invarianz der Dimension stellt sicher, dass im Fall  $M \neq \emptyset$  die Dimension wohldefiniert ist.

**Beispiel 2.59**

Beispiele für  $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeiten sind:

1. Die leere Menge  $\emptyset$  mit der eindeutigen Topologie ist eine  $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit für jedes  $n \in \mathbb{N}$ .
2. Jede offene Teilmenge  $U \subset \mathbb{R}^n$  ist eine  $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit, denn:
  - $U$  als Teilraum von  $\mathbb{R}^n$  ist ein  $T_2$ -Raum.
  - $U$  erfüllt das zweite Abzählbarkeitsaxiom, da  $\mathbb{R}^n$  es erfüllt und  $U$  eine Teilmenge davon ist.
  - Die Identitätsabbildung liefert einen Homöomorphismus  $\text{id} : U \rightarrow U$ .

3. Die  $n$ -Sphäre  $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$  ist eine  $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit. Sie ist  $T_2$ -Raum und erfüllt das zweite Abzählbarkeitsaxiom. Die Sphäre ist lokal homöomorph zu  $\mathbb{R}^n$  mittels der stereographischen Projektion.
4. Definiere für  $V, W \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$  die Äquivalenzrelation

$$W \sim V \iff V = \lambda W \text{ für ein } \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Schreibe  $\mathbb{R}P^n$  für die Menge der Äquivalenzklassen  $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} / \sim$  mit der Quotiententopologie, die durch die kanonische Projektion induziert wird. Dieser Raum heißt der  $n$ -dimensionale reelle projektive Raum und ist eine  $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit.

## 3 Kurven und Flächen

### 3.1 Krümmung und ebene Kurven

**Definition 3.1** (Glatte Kurve)

Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein offenes Intervall. Eine parametrisierte differenzierbare (für uns  $C^\infty$ ) Kurve ist eine differenzierbare Abbildung

$$\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

Die Kurve  $\gamma$  heißt regulär, falls für alle  $t \in I$  gilt:

$$\gamma'(t) \neq 0.$$

Falls  $I = [a, b]$ , heißt  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  differenzierbar, wenn es eine differenzierbare Fortsetzung

$$\hat{\gamma} : (a - \varepsilon, b + \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^n$$

für ein  $\varepsilon > 0$  gibt.

Die Menge  $\text{Bild}(\gamma)$  heißt Spur der Kurve  $\gamma$ .

### Beispiel 3.2

Die Abbildung

$$\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto R \cdot \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

ist eine reguläre parametrisierte glatte Kurve mit

$$\text{Spur}(\gamma) = S_R^1,$$

wobei  $S_R^1$  den Kreis mit Radius  $R$  bezeichnet.

**Definition 3.3** (Länge von Kurven)

Es sei  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine glatte parametrisierte Kurve. Die Länge von  $\gamma$  ist definiert durch

$$L(\gamma) := \int_I \|\gamma'(t)\| dt \in [0, \infty],$$

wobei die Norm durch

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \gamma'_i(t)^2} = \sqrt{\langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle}$$

gegeben ist.

Wir suchen nach optimalen Parametrisierungen. In diesem Sinne sagen wir, dass eine Kurve  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  nach Bogenlänge parametrisiert ist, falls

$$\|\gamma'(t)\| = 1 \quad \text{für alle } t \in I.$$

In diesem Fall vereinfacht sich die Längenformel zu

$$L(\gamma) = \int_I 1 dt = |I|.$$

Eine zentrale Frage ist, ob jede Kurve nach Bogenlänge parametrisiert werden kann.

**Definition 3.4** (Umparametrisierung)

Seien  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  und  $\tilde{\gamma} : J \rightarrow \mathbb{R}^n$  parametrisierte glatte Kurven. Wir nennen  $\tilde{\gamma}$  eine Umparametrisierung von  $\gamma$ , falls ein Diffeomorphismus

$$\phi : J \rightarrow I$$

existiert, sodass

$$\tilde{\gamma} = \gamma \circ \phi.$$

Die Abbildung  $\phi$  heißt Parameterwechsel.

Ein solcher Parameterwechsel heißt

- orientierungserhaltend, falls  $\phi'(t) > 0$  für alle  $t \in J$ ,
- orientierungsumkehrend, falls  $\phi'(t) < 0$  für alle  $t \in J$ .

**Lemma 3.5** (Parametrisierung nach Bogenlänge)

Sei  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine parametrisierte reguläre glatte Kurve. Dann existiert eine bis auf



*Translation und Orientierung eindeutige Umparametrisierung*

$$\phi : J \rightarrow I,$$

sodass  $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \phi$  nach Bogenlänge parametrisiert ist.

**Definition 3.6** (Krümmung einer ebenen Kurve)

Eine parametrisierte, glatte Kurve  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  heißt ebene Kurve. Ist  $\gamma$  zusätzlich regulär und nach Bogenlänge parametrisiert, so definieren wir den Normalenvektor

$$n_\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, \quad t \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \gamma'_1(t) \\ \gamma'_2(t) \end{pmatrix}.$$

Weil  $\gamma$  nach Bogenlänge parametrisiert ist, gilt

$$\frac{d}{dt} \langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle = 2 \langle \gamma'(t), \gamma''(t) \rangle = 0,$$

was impliziert, dass  $\gamma''(t)$  proportional zu  $n_\gamma(t)$  ist. Daher existiert eine Funktion  $R : I \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$\gamma''(t) = R(t) \cdot n_\gamma(t).$$

Die Funktion  $R$  heißt die Krümmung der Kurve  $\gamma$ .

Für eine beliebige ebene Kurve  $\tilde{\gamma} : J \rightarrow \mathbb{R}^2$  definieren wir die Krümmung als

$$\tilde{R} : J \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto R(\phi^{-1}(t)),$$

wobei  $R : I \rightarrow \mathbb{R}$  die Krümmung einer orientierungserhaltenden Umparametrisierung  $\gamma = \tilde{\gamma} \circ \phi$ ,  $\phi : I \rightarrow J$ , von  $\tilde{\gamma}$  nach Bogenlänge ist.

**Lemma 3.7** (Frenet-Gleichungen in der Ebene)

Sei  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  eine nach Bogenlänge parametrisierte, reguläre Kurve. Definiere den Tangentialvektor als

$$v(t) := \gamma'(t),$$

und den Normalenvektor als

$$n(t) := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot v(t).$$

Dann gelten die Frenet-Gleichungen:

$$v'(t) = R_\gamma(t) \cdot n(t),$$

$$n'(t) = -R_\gamma(t) \cdot v(t),$$

wobei  $R_\gamma(t)$  die Krümmung der Kurve ist.

**Satz 3.8** (Hauptsatz der ebenen Kurventheorie)

Sei  $R : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine glatte Funktion, sowie  $t_0 \in I$ ,  $p_0 \in \mathbb{R}^2$ ,  $v_0 \in \mathbb{R}^2$  mit  $\|v_0\| = 1$ .

Dann existiert genau eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve

$$\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$$

mit den Anfangsbedingungen

$$\gamma(t_0) = p_0, \quad \gamma'(t_0) = v_0$$

und der Krümmung

$$R_\gamma(t) = R(t) \quad \text{für alle } t \in I.$$

**Definition 3.9** (Drehwinkelfunktion)

Sei  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve. Eine Abbildung  $\theta : I \rightarrow \mathbb{R}$  heißt Drehwinkelfunktion von  $\gamma'$ , falls gilt:

$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} \cos(\theta(t)) \\ \sin(\theta(t)) \end{pmatrix} \quad \text{für alle } t \in I.$$

**Bemerkung:** Drehwinkelfunktionen sind nicht eindeutig. Ist  $\theta : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine Drehwinkelfunktion zu einer nach Bogenlänge parametrisierten Kurve  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ , so ist für jedes  $k \in \mathbb{Z}$  auch

$$\theta'(t) = \theta(t) + 2\pi k$$

eine Drehwinkelfunktion von  $\gamma'$ .

**Lemma 3.10** (Krümmung ist eine Drehwinkelfunktion)

Sei  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve mit Krümmung

$$R_\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

und sei  $\theta_0 \in \mathbb{R}$  mit

$$\gamma'(a) = \begin{pmatrix} \cos(\theta_0) \\ \sin(\theta_0) \end{pmatrix}.$$

Dann ist die Funktion

$$\theta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto \theta_0 + \int_a^t R_\gamma(s) ds$$

eine glatte Drehwinkelfunktion von  $\gamma'$ .

**Definition 3.11** (Tangentendrehzahl)

Sei  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve mit

$$\gamma(a) = \gamma(b), \quad \gamma'(a) = \gamma'(b).$$

Sei ferner  $\theta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Drehwinkelfunktion für  $\gamma'$ . Dann definiert man die Tangentendrehzahl von  $\gamma$  als

$$n_\gamma := \frac{1}{2\pi}(\theta(b) - \theta(a)).$$

Die Tangentendrehzahl ist stets ganzzahlig und wohldefiniert.

**Lemma 3.12** (Krümmung und Tangentendrehzahl)

Sei  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve mit

$$\gamma(a) = \gamma(b), \quad \gamma'(a) = \gamma'(b).$$

Dann gilt:

$$\frac{1}{2\pi} \int_a^b R_\gamma(t) dt = n_\gamma.$$

**Definition 3.13** (Einfach geschlossene Kurve)

Eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve  $\hat{c} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  heißt einfach geschlossen, falls eine positive Zahl  $L$  existiert mit

$$\hat{c}(t + L) = \hat{c}(t) \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}$$

und  $\hat{c}|_{(0,L)}$  injektiv ist. Man nennt  $L$  die Periode von  $\hat{c}$ . Es gilt

$$c(0) = \hat{c}(L) \quad \text{und allgemeiner} \quad c^{(k)}(0) = c^{(k)}(L) \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Ist umgekehrt  $c : [a, a + L] \rightarrow \mathbb{R}^2$  eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve mit

$$c^{(k)}(a) = c^{(k)}(a + L) \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}_0$$

und  $c|_{[a,a+L]}$  injektiv, so existiert eine einfach geschlossene Kurve  $\hat{c} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit

$$\hat{c}|_{[a,a+L]} = c.$$

Man nennt  $c$  ebenfalls einfach geschlossen.

**Lemma 3.14** (Stetige Drehwinkelfunktion)

Sei  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit  $\gamma(t) \in S^1$  für alle  $t \in [a, b]$  stetig. Dann existiert eine stetige

Funktion  $\theta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos(\theta(t)) \\ \sin(\theta(t)) \end{pmatrix} \quad \text{für alle } t \in [a, b].$$

Darüber hinaus ist  $\theta$  eindeutig bestimmt bis auf eine additive Konstante  $2\pi k$  mit  $k \in \mathbb{Z}$ .

**Lemma 3.15** (Liftungslemma)

Sei  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  sternförmig bezüglich  $x_0 \in X$  und  $\gamma : X \rightarrow S^1$  stetig. Dann existiert eine stetige Abbildung  $\theta : X \rightarrow \mathbb{R}$  sodass

$$\gamma(x) = \begin{pmatrix} \cos(\theta(x)) \\ \sin(\theta(x)) \end{pmatrix} \quad \text{für alle } x \in X.$$

Jede weitere Funktion  $\tilde{\theta}$  erfüllt

$$\tilde{\theta} = \theta + 2\pi k \quad \text{für ein } k \in \mathbb{Z}.$$

**Satz 3.16** (Umlaufsatz, Hopf 1935)

Sei  $\gamma : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^2$  eine nach Bogenlänge parametrisierte einfach geschlossene Kurve. Dann gilt:

$$n_\gamma \in \{\pm 1\}.$$

**Definition 3.17** (Konvexe Kurve)

Eine reguläre Kurve  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  heißt konvex, wenn für alle  $t_0 \in I$  die Funktion

$$d_{\gamma, t_0} : I \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto \langle \gamma(t) - \gamma(t_0), J \cdot \gamma'(t_0) \rangle$$

ihr Vorzeichen nicht ändert, wobei

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

die Drehmatrix um  $90^\circ$  ist.

## 3.2 Raumkurven

**Definition 3.18** (Krümmung von Raumkurven)

Sei  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine nach Bogenlänge parametrisierte Raumkurve. Dann ist die Krümmung  $R_\gamma$  von  $\gamma$  definiert durch

$$R_\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto \|\gamma''(t)\|.$$

**Definition 3.19** (Frenet-Dreibein)

Sei  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine nach Bogenlänge parametrisierte Raumkurve und sei  $t_0 \in I$  mit  $R_\gamma(t_0) > 0$ . Dann definieren wir die folgenden Vektoren:

- Der Tangentialvektor ist  $v(t_0) := \gamma'(t_0)$ .

- Der Normalenvektor ist

$$n(t_0) := \frac{\gamma''(t_0)}{\|\gamma''(t_0)\|}.$$

- Der Binormalenvektor ist

$$b(t_0) := v(t_0) \times n(t_0).$$

Da  $\gamma$  nach Bogenlänge parametrisiert ist, gilt  $v(t_0) \perp n(t_0)$ . Nach Definition des Kreuzprodukts folgt zudem  $v(t_0) \perp b(t_0)$  und  $n(t_0) \perp b(t_0)$ . Damit ist das Tripel  $(v(t_0), n(t_0), b(t_0))$  eine Orthonormalbasis von  $\mathbb{R}^3$ , die als Frenet-Dreibein bezeichnet wird.

Die Größe

$$T_\gamma(t_0) := \langle n'(t_0), b(t_0) \rangle$$

heißt Torsion zur Zeit  $t_0$ .

**Satz 3.20** (Frenet-Gleichungen in 3D)

Sei  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve mit  $R_\gamma(t) > 0$  für alle  $t \in I$ . Dann gilt für das Frenet-Dreibein  $(v(t), n(t), b(t))$ :

$$\begin{aligned} v'(t) &= R_\gamma(t) \cdot n(t), \\ n'(t) &= -R_\gamma(t) \cdot v(t) + T_\gamma(t) \cdot b(t), \\ b'(t) &= -T_\gamma(t) \cdot n(t). \end{aligned}$$

**Lemma 3.21** (Großkreise sind kürzeste Wege in  $S^2$ )

Seien  $v, w \in S^2$  und sei  $\gamma : [a, b] \rightarrow S^2$  eine differenzierbare Kurve mit

$$\gamma(a) = v, \quad \gamma(b) = w.$$

Dann gilt für die Länge von  $\gamma$ :

$$L(\gamma) \geq \angle(v, w).$$

Gleichheit tritt genau dann ein, wenn  $\gamma$  einen Großkreisbogen zwischen  $v$  und  $w$  in monotoner Weise durchläuft.

**Korollar 3.22** (Sphärische Kurven und Hemisphären)

Sei  $\gamma : [0, L] \rightarrow S^2$  eine geschlossene Kurve mit

$$L(\gamma) < 2\pi.$$

Dann existiert ein Punkt  $q \in S^2$ , sodass

$$\langle \gamma(t), q \rangle > 0 \quad \forall t \in [0, L].$$

**Satz 3.23** (Fenchel 1929)

Sei  $\hat{\gamma} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine nach Bogenlänge parametrisierte periodische Kurve mit Periode  $L > 0$ . Setze  $\gamma := \hat{\gamma}|_{[0, L]}$ . Dann gilt:

$$\int_0^L R_\gamma(t) dt \geq 2\pi.$$

Gleichheit tritt genau dann ein, wenn  $\gamma$  eine konvexe ebene Kurve ist.

### 3.3 Flächen

**Definition 3.24** (Immersion)

Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen. Eine differenzierbare Abbildung

$$f : U \rightarrow \mathbb{R}^{n+k}, \quad u \mapsto (f_1(u), \dots, f_{n+k}(u)), \quad k \in \mathbb{N}_0,$$

heißt Immersion, falls für alle  $u \in U$  das Differential

$$Df_u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+k}$$

injektiv ist.

Wir identifizieren  $Df_u$  mit der Jacobi-Matrix  $Jf_u$  von  $f$  im Punkt  $u \in U$ , also

$$Jf_u = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_{n+k}}{\partial x_1} & \frac{\partial f_{n+k}}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_{n+k}}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Wir schreiben auch

$$Df_u = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right).$$

**Definition 3.25** (Parametrisiertes Flächenstück)

Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^2$  offen. Eine Immersion

$$f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$$

heißt parametrisiertes Flächenstück.

Falls zusätzlich  $f : U \rightarrow f(U)$  ein Homöomorphismus ist, so heißt  $f$  ein eingebettetes Flächenstück.

**Satz 3.26** (Parametrisierte Flächenstücke behalten Eingebettetheit lokal)

Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^2$  offen und sei

$$f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$$

ein parametrisiertes Flächenstück.

Dann existiert für jedes  $u_0 \in U$  ein  $\varepsilon(u_0) > 0$ , sodass die Umgebung

$$B_\varepsilon(u_0) := \{u \in U \mid \|u - u_0\| < \varepsilon\} \subseteq U$$

ganz in  $U$  liegt und die Einschränkung

$$f|_{B_\varepsilon(u_0)} : B_\varepsilon(u_0) \rightarrow \mathbb{R}^3$$

ein eingebettetes Flächenstück ist.

**Definition 3.27** (Tangentialebene)

Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^2$  offen und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  ein parametrisiertes Flächenstück. Für  $u_0 \in U$  heißt die Menge

$$T_{u_0}f := \text{Bild } Df_{u_0} = \text{Spann}\{f_x(u_0), f_y(u_0)\}$$

die Tangentialebene von  $f$  in  $u_0$ . Die Elemente

$$Df_{u_0} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = v_1 f_x(u_0) + v_2 f_y(u_0)$$

heißen Tangentialvektoren.

**Definition 3.28** (Gaußabbildung)

Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^2$  offen und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  ein parametrisiertes Flächenstück. Dann heißt die Abbildung

$$N : U \rightarrow S^2, \quad u \mapsto \frac{f_x(u) \times f_y(u)}{\|f_x(u) \times f_y(u)\|}$$

die Gaußabbildung von  $f$ .

**Definition 3.29** (Parametertransformation)

Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^2$  offen und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  ein parametrisiertes Flächenstück. Eine Parametertransformation von  $f$  ist ein Diffeomorphismus

$$\phi : V \rightarrow U, \quad V \subseteq \mathbb{R}^2 \text{ offen.}$$

Man sagt, dass

$$\tilde{f} : V \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad v \mapsto f(\phi(v))$$

eine Umparametrisierung von  $f$  ist.

Gilt  $\det D\phi(v) > 0$  (bzw.  $< 0$ ) für alle  $v \in V$ , so heißt  $\phi$  orientierungserhaltend (bzw. orientierungsumkehrend).

**Lemma 3.30**

Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^2$  offen und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  ein parametrisiertes Flächenstück. Sei weiter  $\phi : V \rightarrow U$  eine Parametertransformation. Dann gilt:

$$\tilde{f} : V \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad v \mapsto f(\phi(v))$$

ist ebenfalls ein parametrisiertes Flächenstück mit

$$\text{Bild}(f) = \text{Bild}(\tilde{f})$$

und

$$T_v(\tilde{f}) = T_{\phi(v)}f \quad \text{für alle } v \in V.$$

**Lemma 3.31** (Transformationsregel für die Gaußabbildung)

Sei  $U \subset \mathbb{R}^3$  offen,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  ein parametrisierbares Flächenstück und  $\varphi : V \rightarrow U$  eine Parametrisierungstransformation. Sei weiter

$$\bar{f} : V \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad v \mapsto f(\varphi(v))$$

die durch  $\varphi$  transformierte Parametrisierung. Bezeichne mit  $N$  bzw.  $\bar{N}$  die Gaußabbildung bezüglich  $f$  bzw.  $\bar{f}$ . Dann gilt:

$$\bar{N}(v) = \text{sign}(\det D\varphi_v) \cdot N(\varphi(v)).$$

**Definition 3.32** (Reguläre Fläche)

Eine Teilmenge  $M^2 \subset \mathbb{R}^3$  heißt reguläre Fläche, falls für jeden Punkt  $p \in M^2$  eine offene Umgebung  $V_p^3 \subset \mathbb{R}^3$  von  $p$  und eine Einbettung

$$f : U_p \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad U_p \subset \mathbb{R}^2 \text{ offen}$$

existieren, sodass gilt:

$$M^2 \cap V_p^3 = f(U_p).$$

Dann nennt man  $M^2 \cap V_p^3$  eine Koordinatenumgebung von  $p$ , und der Tangentialraum von  $M^2$  im Punkt  $p$  ist definiert als:

$$T_p M^2 := Df(T_{U_p}).$$

**Satz 3.33** (Satz vom regulären Wert)

Sei  $W \subset \mathbb{R}^3$  offen und  $\gamma : W \rightarrow \mathbb{R}$  eine differenzierbare Funktion. Sei ferner  $c \in \mathbb{R}$  und



definiere die Niveaufläche

$$M_c^2 := \{(x, y, z) \in W \mid \gamma(x, y, z) = c\}.$$

Falls für alle  $p \in M_c^2$  die Bedingung

$$\nabla \gamma(p) \neq 0$$

gilt, dann ist  $M_c^2$  eine reguläre Fläche.

**Lemma 3.34** (Gradient orthogonal zur Niveaufläche)

Sei  $\delta : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  eine differenzierbare Funktion und

$$M_c^2 = \{p \in \mathbb{R}^3 \mid \delta(p) = c\}$$

eine reguläre Fläche. Dann gilt für alle  $p \in M_c^2$ , dass der Gradient von  $\delta$  orthogonal zum Tangentialraum  $T_p M_c^2$  ist, das heißt:

$$\nabla \delta(p) \perp T_p M_c^2.$$

**Definition 3.35** (Erste Fundamentalform)

Sei  $U \subset \mathbb{R}^2$  offen und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  ein parametrisierbares Flächenstück. Für  $i, j \in \{1, 2\}$  nennt man die Funktion

$$g_{ij} : U \rightarrow \mathbb{R}, \quad u \mapsto \langle f_{U_i}(u), f_{U_j}(u) \rangle$$

die Koeffizienten der ersten Fundamentalform.

*Bemerkungen:* Da  $f$  glatt ist, sind die Funktionen  $g_{ij}$  in  $C^\infty(U)$ . Die Matrix  $(g_{ij})_{i,j}$  ist symmetrisch und positiv definit.

**Lemma 3.36** (Erste Fundamentalform und Bogenlänge)

Sei  $U \subset \mathbb{R}^2$  offen und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  ein parametrisierbares Flächenstück. Sei  $\gamma : I \rightarrow U$  eine glatte Kurve. Dann gilt für die durch  $f$  parametrisierte Raumkurve

$$c : I \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto f(\gamma(t)),$$

dass ihre Bogenlänge durch die erste Fundamentalform gegeben ist:

$$L(c) = \int_I \left( \sum_{1 \leq i, j \leq 2} \gamma'_i(t) \gamma'_j(t) g_{ij}(\gamma(t)) \right)^{\frac{1}{2}} dt.$$

**Definition 3.37** (Flächeninhalt)

Sei  $U \subset \mathbb{R}^2$  offen und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  ein parametrisierbares Flächenstück. Der

Flächeninhalt von  $f$  ist definiert durch

$$A(f) = \int_U \sqrt{\det(g_{ij}(u))} du \in [0, \infty],$$

wobei  $(g_{ij})$  die Koeffizienten der ersten Fundamentalform von  $f$  sind.

Wir wollen die Gaußabbildung etwas genauer betrachten. Dazu benötigen wir folgendes Lemma:

**Lemma 3.38**

Sei  $U \subset \mathbb{R}^2$  offen und seien  $X, Y : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  glatte Abbildungen. Dann ist die Funktion

$$f : U \rightarrow \mathbb{R}, \quad u \mapsto \langle X(u), Y(u) \rangle$$

glatt, und es gilt für die partiellen Ableitungen:

$$\frac{\partial f}{\partial u_i}(u) = \langle X(u), \frac{\partial Y}{\partial u_i}(u) \rangle + \langle \frac{\partial X}{\partial u_i}(u), Y(u) \rangle.$$

**Korollar 3.39**

Sei  $U \subset \mathbb{R}^2$  offen und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine Parametrisierung einer Fläche. Dann gilt für alle  $u \in U$ :

$$\text{Bild}(DN_u) \subset \text{Bild}(Df_u) = T_u f.$$

**Definition 3.40** (Weingarten-Abbildung)

Sei  $U \subset \mathbb{R}^2$  offen und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  ein parametrisierbares Flächenstück. Sei

$$N : U \rightarrow S^2$$

die zugehörige Gaußabbildung. Dann heißt der Endomorphismus

$$L_u := -DN_u \circ (Df_u)^{-1} : T_u f \rightarrow T_u f$$

die Weingarten-Abbildung von  $f$  im Punkt  $u \in U$ .

Dabei ist

$$(Df_u)^{-1} : T_u f \rightarrow \mathbb{R}^2$$

die Umkehrabbildung des Vektorraum-Isomorphismus

$$Df_u : \mathbb{R}^2 \rightarrow T_u f.$$

Da gilt

$$Df_u(e_i) = f_{u_i},$$

folgt für die Inverse:

$$(Df_u)^{-1}(f_{u_i}) = e_i.$$

Daraus ergibt sich die Darstellung:

$$L_u(f_{u_i}) = DN_u \circ (Df_u)^{-1}(f_{u_i}) = DN_u(e_i).$$

**Lemma 3.41**

Die Weingarten-Abbildung  $L_u : T_u f \rightarrow T_u f$  ist ein selbstadjungierter Endomorphismus bezüglich der Metrik  $g_u$  auf  $T_u f$ . Das bedeutet, dass für alle  $v, w \in T_u f$  gilt:

$$g_u(L_u v, w) = g_u(v, L_u w).$$

**Definition 3.42** (Zweite Fundamentalform)

Sei  $U \subset \mathbb{R}^2$  offen und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  ein parametrisierbares Flächenstück. Die zweite Fundamentalform von  $f$  im Punkt  $u \in U$  ist die symmetrische Bilinearform

$$h_u : T_u f \times T_u f \rightarrow \mathbb{R}, \quad (v, w) \mapsto g_u(L_u v, w),$$

wobei  $g_u$  die durch die erste Fundamentalform gegebene Metrik auf  $T_u f$  und  $L_u$  die Weingarten-Abbildung ist.

**Lemma 3.43** (Formel für die zweite Fundamentalform)

Sei  $U \subset \mathbb{R}^2$  offen und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  ein parametrisierbares Flächenstück. Dann gilt für alle  $u \in U$ :

$$h_{ij}(u) = \langle N(u), \frac{\partial^2 f}{\partial u_i \partial u_j}(u) \rangle.$$

**Lemma 3.44** (Darstellende Matrix von  $L_u$ )

Sei  $U \subset \mathbb{R}^2$  offen und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  ein parametrisierbares Flächenstück. Dann gilt für die darstellende Matrix von  $L_u$  bezüglich der Basis  $\{f_{u_1}, f_{u_2}\}$ :

$$M_{f_{u_1}, f_{u_2}}(L) = (g_{ij})^{-1}(h_{ij}),$$

wobei  $(g_{ij})$  die Matrix der ersten Fundamentalform und  $(h_{ij})$  die Matrix der zweiten Fundamentalform ist. Explizit ergibt sich:

$$(g_{ij})^{-1} = \frac{1}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} \begin{pmatrix} g_{22} & -g_{12} \\ -g_{12} & g_{11} \end{pmatrix},$$

sodass

$$M_{f_{u_1}, f_{u_2}}(L) = \frac{1}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} \begin{pmatrix} g_{22} & -g_{12} \\ -g_{12} & g_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{12} & h_{22} \end{pmatrix}.$$

**Definition 3.45** (Krümmungen einer Fläche)

Sei  $U \subset \mathbb{R}^2$  offen und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  ein parametrisierbares Flächenstück.

- Die Eigenwerte  $R_1(u)$  und  $R_2(u)$  der Weingarten-Abbildung  $L_u$  heißen die Hauptkrümmungen von  $f$  im Punkt  $u$ .
- Die zugehörigen Eigenvektoren der Länge 1 heißen die Hauptkrümmungsrichtungen von  $f$  im Punkt  $u$ .
- Die Größe

$$K(u) = \det L_u = R_1(u) \cdot R_2(u)$$

heißt die Gaußkrümmung von  $f$  im Punkt  $u$ .

- Die Größe

$$H(u) = \frac{1}{2} \operatorname{spur}(L_u) = \frac{R_1(u) + R_2(u)}{2}$$

heißt die mittlere Krümmung von  $f$  im Punkt  $u$ .

**Lemma 3.46** (Formeln für  $K$  und  $H$ )

Sei  $U \subset \mathbb{R}^2$  offen und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  ein parametrisierbares Flächenstück. Sei  $(g_{ij})$  die Matrix der ersten Fundamentalform und  $(h_{ij})$  die Matrix der zweiten Fundamentalform. Dann gelten die folgenden Formeln für die Krümmungen:

1. Die Gaußkrümmung ist gegeben durch:

$$K = \frac{\det(h_{ij})}{\det(g_{ij})}.$$

2. Die mittlere Krümmung ist gegeben durch:

$$H = \frac{h_{11}g_{22} - 2h_{12}g_{12} + h_{22}g_{11}}{2 \det(g_{ij})}.$$

**Definition 3.47** (Normalenschnitte)

Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^2$  offen und sei  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  ein parametrisiertes Flächenstück. Für  $u_0 \in U$  und  $v \in T_{u_0}f \setminus \{0\}$  heißt eine Kurve

$$\gamma : [a, b] \rightarrow \operatorname{Bild}(f)$$

ein Normalenschnitt, falls gilt:

- $\gamma(t_0) = f(u_0)$  für ein  $t_0 \in (a, b)$ ,
- $\gamma(t) \in \gamma(t_0) + \operatorname{Span}\{N(u_0), v\}$  für alle  $t \in [a, b]$ .

*Ein Normalenschnitt kann als ebene Kurve aufgefasst werden.*

**Lemma 3.48** (Existenz von Normalenschnitten)

*Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^2$  offen,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  ein parametrisiertes Flächenstück,  $u_0 \in U$  und  $v \in T_{u_0}f \setminus \{0\}$ . Dann existiert ein Normalenschnitt*

$$\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^3$$

*mit  $\gamma(0) = f(u_0)$  und  $\gamma'(0) = v$ .*

**Definition 3.49** (Normalenkrümmung)

*Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^2$  offen und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  ein parametrisiertes Flächenstück. Sei  $c_v = f \circ \gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^3$  ein nach Bogenlänge parametrisierter Normalenschnitt mit  $c'_v(0) = v$ . Dann heißt die Funktion*

$$R_{\text{nor}}(t) := \langle c''_v(t), N(\gamma(t)) \rangle$$

*die Normalenkrümmung von  $c_v$  bezüglich des parametrisierten Flächenstücks  $f$ .*

*Ist  $R_{c_v}$  die Krümmung der ebenen Kurve  $c_v$ , so gilt:*

$$R_{\text{nor}} = |R_{c_v}|$$

*falls  $c_v$  zur Normalen  $N$  hingekrümmt ist, und*

$$R_{\text{nor}} = -|R_{c_v}|$$

*falls  $c_v$  von  $N$  weggekrümmt ist.*

**Proposition 3.50** (2. Fundamentalform geometrisch)

*Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^2$  offen und sei  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  ein parametrisiertes Flächenstück. Sei  $u_0 \in U$  und  $v \in T_{u_0}f$  mit  $\|v\| = 1$ . Sei*

$$c_v = f \circ \gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^3$$

*ein nach Bogenlänge parametrisierter Normalenschnitt mit  $c_v(0) = f(u_0)$  und  $c'_v(0) = v$ .*

*Dann gilt:*

$$R_{\text{nor}}(0) = h_{u_0}(v, v).$$

**Proposition 3.51** (Euler)

*Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^2$  offen und sei  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  ein parametrisiertes Flächenstück. Für  $u \in U$  seien  $v_1(u), v_2(u)$  die Hauptkrümmungsrichtungen von  $f$  in  $U$ . Für  $\theta \in [0, 2\pi)$  setze*

$$v = \cos(\theta)v_1(u) + \sin(\theta)v_2(u).$$

Dann ist die Normalenkrümmung von  $f$  in  $U$  in Richtung  $v$  durch die Eulersche Formel gegeben:

$$h_u(v, v) = \cos^2(\theta)R_1(u) + \sin^2(\theta)R_2(u).$$

Gilt  $R_2(u) \geq R_1(u)$ , so folgt, dass alle Normalenkrümmungen durch  $R_2(u)$  und  $R_1(u)$  nach oben bzw. nach unten beschränkt sind.

Falls  $R_2(u) > R_1(u)$ , so wird die *Maximalkrümmung* genau in Richtung  $v = \pm v_2(u)$  und die *Minimalkrümmung* genau in Richtung  $v = v_1(u)$  angenommen.

Falls hingegen  $R_2(u) = R_1(u)$ , so sind alle Normalenkrümmungen gleich.

Wir wollen die Lage eines parametrisierten Flächenstücks relativ zur affinen Tangentialebene

$$f(u_0) + T_{u_0}f$$

beschreiben. Dazu betrachten wir die Funktion

$$d_{f,u_0} : U \rightarrow \mathbb{R}, \quad u \mapsto \langle f(u) - f(u_0), N(u_0) \rangle.$$

### Lemma 3.52

Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^2$  offen und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  ein parametrisiertes Flächenstück. Sei  $u_0 \in U$ . Dann gilt:

1.  $(\nabla d_{f,u_0})_{u_0} = 0$ ,
2. Die Hesse-Matrix von  $d_{f,u_0}$  in  $u_0$  ist gegeben durch

$$\text{Hess}(d_{f,u_0})(u_0) = (h_{ij}(u_0))_{1 \leq i,j \leq 2}.$$

### Korollar 3.53 (Krümmung und $T_{u_0}f$ )

Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^2$  offen und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  ein parametrisiertes Flächenstück. Falls für  $u_0 \in U$  die Bildfläche  $\text{Bild}(f)$  nahe  $f(u_0)$  ganz auf einer Seite von  $f(u_0) + T_{u_0}f$  liegt, so gilt

$$K(u_0) \geq 0.$$

### Lemma 3.54 (Krümmung und $T_{u_0}f$ , Teil 2)

Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^2$  offen und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  ein parametrisiertes Flächenstück. Falls  $R(u_0) > 0$  für ein  $u_0 \in U$ , so existiert ein  $\varepsilon > 0$ , sodass

$$B_\varepsilon(f(u_0)) \cap \text{Bild}(f)$$

ganz auf einer Seite von  $f(u_0) + T_{u_0}f$  liegt.

### Lemma 3.55 (Krümmung und $T_{u_0}f$ , Teil 3)

Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^2$  offen und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine parametrisierte Fläche. Falls  $R(u_0) < 0$  für ein

$u_0 \in U$  und seien  $v_1(u_0), v_2(u_0)$  die Hauptkrümmungsrichtungen, dann liegen die zu  $v_1(u_0)$  und  $v_2(u_0)$  gehörenden Normalenschnitte auf zwei verschiedenen Seiten von  $f(u_0) + T_{u_0}f$ .

**Satz 3.56** (Tangentiale Sphäre)

Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^2$  offen und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  ein parametrisiertes Flächenstück. Falls die Funktion

$$g : U \rightarrow \mathbb{R}, \quad u \mapsto \|f(u)\|^2$$

in  $u_0 \in U$  ein lokales Maximum annimmt, dann gilt

$$R(u_0) \geq \frac{1}{\|f(u_0)\|^2}.$$

**Korollar 3.57** (Kompakte reguläre Flächen haben Punkte positiver Krümmung)

Auf jeder kompakten regulären Fläche  $M^2 \subseteq \mathbb{R}^3$  existieren Punkte positiver Krümmung.