届不到的爱恋

$n \le 8$: 暴搜。

$s_i = 1$: 直接奇数城市和偶数城市匹配即可。

$s_i = n/2$:

可以考虑一条道路的贡献，推式子。

$ans = \sum_{i=1}^{n-1}(x_{i+1} - x_i)\sum_{j=0}^{\min(i,n-i)}\binom{i}{j}f_{i-j} \times \binom{n-i}{j}f_{n-i-j} \times j! \times j$

f_i 表示 i 个城市形成完备匹配的方案数，i 是奇数的时候 $f_i = 0$。

现在使 i 是偶数，那么考虑城市 1 的匹配，有 $i-1$ 种方法，所以 $f_i = f_{i-2} \times (i-1)$。

时间 $\mathcal{O}(n^2)$。

$n \le 2000$:

也考虑一条边的贡献，然后 dp。

$f_{i,j}$ 表示前 i 个城市，有 j 个城市没匹配的方案数。

$f_{i+1,j+1} \leftarrow f_{i,j}, f_{i+1,j-1} \leftarrow f_{i,j} \times j$

类似的，可以算出后缀的方案数，那么

$ans = \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=0}^{\min i,n-i} f_{i,j} \times g_{i+1,j} \times j! \times j$

时间 $\mathcal{O}(n^2)$。

幸福的记忆

$n = 0$: 若你特判直接输出 0，就错了……因为 $(0,0)$ 的答案是 1。

$n = 1$: 除了 $(1,0)$ 的答案是 0，其他都是 1。

$n = 2$: 可以直接算。

$n = 3$: 可以枚举第一次跳到哪里，算出答案。

$n \le 8, m \le 300$:

若 (a,b) 可以跳到 (c,d)，等价于 $\gcd(c-a, d-b) = 1$。

那么我们可以 dp，$f_{i,j}$ 表示跳到 (i,j) 的方案数，然后枚举下一次跳到了哪里，判断一下 $\gcd$ 即可。时间 $\mathcal{O}(n^2m^2\log m)$。

$n\le 8,m=10^5$：用刚才的暴力跑一跑，打个表即可。

$n\le 8,m\le 10^5$：

回到刚才的暴力，我们可以把 $\gcd(c-a,d-b)=1$ 用莫比乌斯反演变成 $\sum[x|(c-a),x|(d-b)]\mu(x)$。

那么 dp 方程就变成了 $f_{c,d}=\sum_{x=1}^{\min(c,d)}\mu(x)\sum_{i=1}^{\lfloor c/x\rfloor}\sum_{j=1}^{\lfloor d/x\rfloor}f_{c-ix,d-jx}$。

我们可以对于每一行处理对于 $\mu(x)$ 不为 0，d 模 x 为 $0,1,\dots,x-1$ 的前缀和，然后 dp 即可。时间 $\mathcal{O}(n^3m)$。

时之魔法

$n\le 8$：暴搜

$n\le 20$：枚举前 $\frac{n}{2}$ 个数在哪些位置，$\binom{20}{10}=184756$ 应该是可以通过的。

$P_i=i$：直接输出 Yes。

$n\le 2000$：

这已经是正解的部分分了。

我们考虑前缀 $\max$ 的位置 $l_1<l_2<\ldots<l_k$，那么 $[l_i,l_{i+1})$ 一定连在一起，因为若选了 l_i，那么另一个序列开头 $>P_{l_i}$，那么这一段就会连在一起。

那么问题就转换成是否能在若干数选一些数，使得这些数的总和 $=\frac{n}{2}$。

这可以 01 背包，时间 $\mathcal{O}(n^2)$。

$n\le 3\times 10^4$：

用 bitset 优化 01 背包，时间 $\mathcal{O}(\frac{n^2}{32})$。

若出计数的话则可以用分治 FFT 计算方案数，但已经超出 NOIP 范围，不在此处讨论。

WHITE ALBUM

ljc：看起来可以 polylog，但是想不到怎么 polylog……

如果有人想出 polylog 的解法可以暴打出题人哦 qwq

其实这题刚开始不是想分块的，就是想不到其他解法才分块的。

$n,m,q\le 2000$：直接暴力。

操作序列 b 中 $l=1,r=m$：发现询问中 x 没用了，可以用线段树维护区间加区间 $\max$。

没有 $op=1$：可以在序列 a 中跑扫描线，然后线段树维护单点修改区间 $\max$。

$n,m\le 5\times 10^4$ 给一些神奇的 $\mathcal{O}(n\sqrt{n}\log n)$ 的解法和被卡常的选手。

$n,m,q\le 10^5$：

考虑分块。将操作序列分成 $\sqrt{n}$ 个块，在块中维护答案，将询问拆成 $\sqrt{n}$ 次询问。

块中的答案如何维护？发现操作序列 b 中 l, r 不变，可以将块中的 l, r 离散化，然后执行 $\sqrt{n}$ 次区间取 $\max$。我们将询问的 x 排序后，可以对于每个块双指针得到 x 在当前块的位置。这些操作是 $\mathcal{O}(n\sqrt{n})$ 的。

现在就要解决一个问题，n 个区间取 $\max$ 操作，序列长度为 $2n$，时间要低于 $O(n\log n)$。直接用可删除堆维护大概率会 TLE。

发现我们要询问所有的答案，那么可以将 x 从大到小排序，转换成区间覆盖，而且后面的覆盖无法覆盖已覆盖的点。这个可以并查集暴力维护。因为并查集缩完已覆盖的位置后，一定是形如这样的，$0,0,1,0,1,0,0,1$，0 表示没覆盖，1 表示有覆盖。这样总覆盖的位置数很少，而且每次访问到以前的位置不多，这样时间是 $\mathcal{O}(n\alpha(n))$ 的。

而排序可以整块维护加法标记，零散块用归并排序，这样是 $\mathcal{O}(n\sqrt{n})$ 的。

以上的实现可以做到询问 $\mathcal{O}(\sqrt{n})$ ，修改 $\mathcal{O}(\sqrt{n}\alpha(\sqrt{n}))$ 。实际实现可以把块长设为 $\sqrt{\frac{n}{\alpha(n)}}$，大概在 $\frac{\sqrt{n}}{2}$ 左右达到最优复杂度。实际实现的时候，最大的数据块长在 $100\sim150$ 时最优。

感觉这个解法不是严格 $\sqrt{n}$ 的，如果能链表代替并查集就更好了。

因为暴力修改操作可以打标记，而正解修改操作常数极大，所以重新造了数据，把修改操作的次数设成 2.5×10^4 ，顺便卡掉了暴力，应该不会卡常，正解选手应该是可以通过的~

后记

因为出题人是雪菜党，所以前两题标题是 ic 和 cc 的 OP，第三题标题是雪菜 TE 的 ED，第四题大家应该都知道（笑），如果你是冬马党可以把第三题标题换成 Closing 哦~

出题人还是挺良心的，因为第四题出题人写了 3h，所以大样例每题都放了 $2\sim5$ 个，没打对拍也不会挂太多，体验应该还是挺好的~

题出的好！难度适中，覆盖知识点广，题目又着切合实际的背景，解法比较自然，考察了选手 dp、莫比乌斯反演、分块、并查集、离散化、归并排序、双指针等 NOIP 范围内的知识点。

给出题人点赞！