第四第五第六章 不定积分与定积分及其应用

- **不定积分的概念及性质**
  - **原函数的概念**
    - 原函数存在定理：**连续函数在对应区间I上有原函数**
    - 结论
      - 若函数在区间I上有**跳跃间断点**，那么在这个区间上**没有**原函数
      - 若函数在区间I上有**第二类间断点**，那么在这个区间上**可能**有原函数，例如$h(x)=\begin{cases}2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}\to F(x)=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$
  - **不定积分的概念**
    - **原函数+常数项=不定积分**
    - 有个带有积分的标记而已
  - **不定积分的性质**
    - 分项求和
    - 倍数
  - **基本积分表**
- **换元积分法**
  - **第一类换元积分**
    - 就是凑微分
    - 三角形求定积分的一般规律$\begin{cases}R(-\sin x,\cos x)=-R(\sin x,\cos x) & 凑\mathbf{d}\cos x\\ R(\sin x,-\cos x)=-R(\sin x,\cos x) & 凑\mathbf{d}\sin x\\ R(-\sin x,-\cos x)=-R(\sin x,\cos x) & 凑\mathbf{d}\tan x\end{cases}$
  - **第二类换元积分**
    - 对x进行换元：设$x=\varphi(t)$是**单调的可导函数**，并且$\varphi'(t)\neq 0$，又设$f[\varphi(t)]\varphi'(t)$具有原函数，则有换元公式$\int f(x)\mathbf{d}x=\left[f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathbf{d}x\right]_{t=\varphi^{-1}(x)}$，其中，$\varphi^{-1}(x)$是$x=\varphi(t)$的**反函数**
    - **然后注意换元的区间，在根号中注意**$\pm$
- **分部积分法**
  - 反对幂指三
  - 分部形成规律
    - 常见有$\int e^{ax}\sin\beta x,\int e^{ax}\cos\beta x$
- **有理函数的积分**
  - **有理函数的积分**
    - 教材上P213：两个多项式的商$\frac{P(x)}{Q(x)}$称为有理函数，又称为有理分式。我们总假定分子多项式$P(x)$与分母多项式$Q(x)$之间没有公因式（也就是他们已经是化为最简的结果了）。当分子多项式$P(x)$的次数小于分子多项式$Q(x)$的次数时，称这有理函数为**真分式**，否则称为**假分式。**
    - **利用多项式的除法，总能将一个假分式化成一个多项式与一个真分式之和的形式**（这样处理才能做不定积分）例如$\frac{2x^4+x^2+3}{x^2+1}=2x^2-1+\frac{4}{x^2+1}$
    - 对于真分式$\frac{P(x)}{Q(x)}$而言，如果分母可以分解为两个多项式的乘积$Q(x)=Q_1(x)Q_2(x)$，且$Q_1(x)$与$Q_2(x)$没有公因式，那么它可拆分成两个真分式之和

      $$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}+\frac{P_2(x)}{Q_2(x)}$$

      ，这样的方法，称为**把真分式化为部分分式之和**
    - 最后，有理函数的分解式中只出现多项式，$\frac{P_1(x)}{(x-a)^k}$，$\frac{P_2(x)}{(x^2+px+q)^l}$等三类函数（这里$p^2-4q<0$，$P_1(x)$**为小于$k$次的多项式**，$P_2(x)$**为小于$2l$次的多项式**）
  - **三角函数**（P216，三角函数的万能变换）
    - $\sin x,\cos x$都可以用$u=\tan\frac{x}{2}$的**有理式**来表示，有$\sin x=\frac{2u}{1+u^2},\cos x=\frac{1-u^2}{1+u^2}$
  - **无理函数的有理化**
    - 如果被积函数中含有简单根式$\sqrt[n]{ax+b},\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$，可以令这个简单根式为$u$，由于这样的变换具有反函数，且反函数是$u$的有理函数，因此原积分可化为有理函数的积分
- **定积分的概念与性质**
  - **定义**：略
  - **定积分存在定理**（充分条件）
    - 定理1：设$f(x)$在区间$[a,b]$上连续，则$f(x)$在$[a,b]$上可积
    - 定理2：设$f(x)$在区间$[a,b]$上有界，且只有有限个间断点，则$f(x)$在$[a,b]$上可积
    - 定理3（条件强度依次减小）：$f(x)$在$[a,b]$上仅有有限个第一类间断点
  - **性质**
    - 分项法+拆分区间
    - **不等式性质**
      - 1：如果在区间$[a,b]$上$f(x)\leq 0$，那么$\int_a^b f(x)\mathbf{d}x\leq 0(a<b)$
      - 2：如果在区间$[a,b]$上$f(x)\leq g(x)$，那么$\int_a^b f(x)\mathbf{d}x\leq\int_a^b g(x)\mathbf{d}x(a<b)$（**要提前积累基本初等函数的不等式关系**）
      - 3（推论）：$\left|\int_b^a f(x)\mathbf{d}x\right|\leq\int_b^a|f(x)|\mathbf{d}x(a<b)$
      - 4（最大最小值）：设Mm分别是$f(x)$的最大最小值，则$m(b-a)\leq\int_b^a f(x)\mathbf{d}x\leq M(b-a)(a<b)$
    - **定积分中值定理**
      - 如果函数$f(x)$在积分区间$[a,b]$上连续，那么在$[a,b]$上至少存在一个点ε，使得$\int_b^a f(x)\mathbf{d}x=f(\varepsilon)(b-a)(a\leq\varepsilon\leq b)$
      - 推论：若$f(x),g(x)$在$[a,b]$上连续，$g(x)$不变号，则$\int_b^a f(x)g(x)\mathbf{d}x=f(\varepsilon)\int_b^a g(x)\mathbf{d}x$

- 拉哥证明：$\int_b^a f(x)\mathbf{d}x = F(b) - F(a) = F'(\varepsilon)(b-a) = f(\varepsilon)(b-a)(a \le \varepsilon \le b)$

- **微积分基本公式**
  - **积分上限的函数及其导数**
    - **定义**：如果函数$f(x)$在区间$[a,b]$上连续，那么积分上限的函数$\backslash\mathbf{F}(x)\ \int_a^x f(x)\mathbf{d}t$在$[a,b]$上可导，并且它的导数$F'(x)=f(x)$（联系了积分和微分，同时使用了原函数的存在定理）
    - **证明**：突破点是$\Delta x \to 0$, 则$\varepsilon \to x$
    - **原函数存在定理**：如果函数$f(x)$在区间$[a,b]$上连续，那么函数$F(x)=\int_a^x f(t)\mathbf{d}t$就是$f(x)$在$[a,b]$上的一个原函数。
    - **积分上限函数的导数**
      - 1、2、3种情况
      - 1. $\left[\int_{q(x)}^{p(x)} f(t)\mathbf{d}t\right]' = f(p(x))p'(x) - f(q(x))q'(x)$
      - 1. $\left[\int_{q(x)}^{p(x)} f(x,t)\mathbf{d}t\right]' = \int_{q(x)}^{p(x)} \frac{\partial f(x,t)}{\partial x}\mathbf{d}t + f(x,p(x))p'(x) - f(x,q(x))q'(x)$
      - 2. $\left[\int_b^a f(x,t)\mathbf{d}t\right]' = \int_b^a \frac{\partial f(x,t)}{\partial x}\mathbf{d}t$
  - **牛顿-莱布尼兹公式（微积分基本定理）**
    - $\int_b^a f(x)\mathbf{d}x = F(b) - F(a)$
    - 证明一下
- **定积分的换元法和分步积分法**
  - 换元法：注意换元后**根号下的正负号**
  - 奇偶函数在积分上的简化运算
  - 两个三角函数的等价转换
  - 周期函数的定积分计算
  - 分部积分（算不出来就找规律）
    - **点火公式**：$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\mathbf{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x)\mathbf{d}x = \begin{cases} \frac{n-1}{n}, \frac{n-3}{n-2}, \cdots, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{\pi}{2}, n\text{正偶数} \\ \frac{n-1}{n}, \frac{n-3}{n-2}, \cdots, \frac{4}{5}, \frac{2}{3},\ n\text{大于1的正奇数} \end{cases}$
- **反常积分**
  - **无穷限的反常积分**
    - 1. 设函数$f(x)$在区间$[a,+\infty)$上连续，如果极限$\int_a^{+\infty} f(x)\mathbf{d}x$收敛，并且称此极限为该反常积分的值，如果极限不存在，那么称发散
    - 2. 设函数$f(x)$在区间$(-\infty,b)$上连续，如果极限$\int_{-\infty}^b f(x)\mathbf{d}x$收敛，并且称此极限为该反常积分的值，如果极限不存在，那么称发散
    - 3. 设函数$f(x)$在区间$(-\infty,+\infty)$上连续，如果极限$\int_0^{+\infty} f(x)\mathbf{d}x$与$\int_{-\infty}^0 f(x)\mathbf{d}x$收敛，并且称此极限$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathbf{d}x$为该反常积分的值，如果极限不存在，那么称发散
    - 牛顿莱布尼茨公式
  - **无界函数的反常积分**
    - 1. 设函数$f(x)$在区间$(a,b]$上连续，如果极限$\lim_{t\to a}\int_t^b f(x)\mathbf{d}x$收敛，并且称此极限为该反常积分的值，如果极限不存在，那么称发散
    - 2. 设函数$f(x)$在区间$[a,b)$上连续，如果极限$\lim_{t\to b}\int_a^t f(x)\mathbf{d}x$收敛，并且称此极限为该反常积分的值，如果极限不存在，那么称发散
    - 3. 设函数$f(x)$在区间$[a,c),(c,b]$上连续，c为瑕点，如果极限$\lim_{t\to c}\int_a^t f(x)\mathbf{d}x$和$\lim_{t\to c}\int_t^b f(x)\mathbf{d}x$收敛，并且称此极限为该反常积分的值，如果任一极限不存在，那么称发散
    - 牛顿莱布尼茨公式
  - **反常积分的审敛法**
    - **无穷限的审敛法**
      - **无穷限反常积分收敛的定理1（本质）**：设函数$f(x)$在区间$[a,+\infty)$上连续，且$f(x)\ge 0$，若函数$F(x)=\int_a^x f(t)\mathbf{d}t$在$[a,+\infty)$上有**上界**，则反常积分收敛
      - **比较审敛法**（证明下列方法的基本公理，不再用上面的了，比较废话）
        - 设函数$f(x),g(x)$在区间$[a,+\infty)$上连续。如果
        - $0\le f(x)\le g(x)(a\le x<+\infty)$，并且$\int_a^{+\infty} g(x)\mathbf{d}x$收敛，那么$\int_a^{+\infty} f(x)\mathbf{d}x$也收敛；$0\le g(x)\le f(x)(a\le x<+\infty)$，并且$\int_a^{+\infty} g(x)\mathbf{d}x$发散，那么$\int_a^{+\infty} f(x)\mathbf{d}x$也发散。
        - 证明
      - **比较审敛法的极限形式（极限形式）**
        - 设$f(x),g(x)$在$[a,+\infty)$上非负连续，$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lambda$，则
          - 当$\lambda>0$时，$\int_a^{+\infty} f(x)\mathbf{d}x, \int_a^{+\infty} g(x)$同敛散
          - 当$\lambda=0$时，$\int_a^{+\infty} g(x)\mathbf{d}x$收敛，则$\int_a^{+\infty} f(x)\mathbf{d}x$收敛
          - 当$\lambda<0$时，$\int_a^{+\infty} g(x)\mathbf{d}x$发散，则$\int_a^{+\infty} f(x)\mathbf{d}x$发散
          - 一般这个$g(x)$取在$[a,+\infty)$或$(-\infty,b]$上积分的x^p，$p>1$收敛，$p\le 1$发散
        - 证明
      - **绝对收敛**（绝对收敛的反常积分$\int_a^{+\infty} f(x)\mathbf{d}x$一定收敛）
        - 假设反常积分的被积函数在所讨论的区间上**可取正值也可取负值**，那么，设函数$f(x)$在区间$[a,+\infty)$上连续。如果是反常积分$\int_a^{+\infty}|f(x)|\mathbf{d}x$收敛，那么反常积分$\int_a^{+\infty} f(x)\mathbf{d}x$也收敛。（这结论类似与级数中的绝对收敛，绝对收敛的反常积分$\int_a^{+\infty} f(x)\mathbf{d}x$必定收敛）
        - 证明：$\left|\int_b^a f(x)\mathbf{d}x\right| \le \int_b^a |f(x)|\mathbf{d}x(a<b)$
      - 常用的已知敛散性的常数：在$[a,+\infty)$或$(-\infty,b]$上积分的x^p，$p>1$收敛，$p\le 1$发散
    - **无界函数的审敛法**（与前面一样，就是区间不一样）
      - **比较审敛法**：(设$x=a$是瑕点)
        - 设函数$f(x),g(x)$在区间$(a,b]$上连续。如果
        - $0\le f(x)\le g(x)(a<x\le b)$，并且$\int_a^b g(x)\mathbf{d}x$收敛，那么$\int_a^b f(x)\mathbf{d}x$也收敛；$0\le g(x)\le f(x)(a<x\le b)$，并且$\int_a^b g(x)\mathbf{d}x$发散，那么$\int_a^b f(x)\mathbf{d}x$也发散。
      - **比较审敛法的极限形式**(设$x=a$是瑕点)
        - 设$f(x),g(x)$在$(a,b]$上非负连续，$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lambda$，则

- 当$\lambda > 0$时，$\int_a^b f(x)\mathbf{d}x, \int_a^b g(x)$同敛散
- 当$\lambda = 0$时，$\int_a^b g(x)\mathbf{d}x$收敛，则$\int_a^b f(x)\mathbf{d}x$收敛
- 当$\lambda = +\infty$时，$\int_a^b g(x)\mathbf{d}x$发散，则$\int_a^b f(x)\mathbf{d}x$发散
- 常用的已知敛散性的常数：在$[a,b)$或$(a,b]$或$[a,b]$上积分的$(x-a)^p, (b-x)^p$，$p < 1$收敛，$p \geq 1$发散
- $\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\mathbf{d}u = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$
- **定积分的应用**
  - **平面图形的面积**
    - 就记住一个公式：$\int\int 1\mathbf{d}s = \int_a^b \mathbf{d}x \int_{g(x)}^{f(x)} \mathbf{d}y = S$
    - 对于极坐标情形：$\int\int 1\mathbf{d}s = \int_\beta^\alpha \mathbf{d}\theta \int_0^{\rho(\theta)} \rho\mathbf{d}\rho = S$
  - **旋转体的体积**
    - 记住原理：确定某个区域S的在xy上的范围，选取一点x_0, y_0，计算到直线$ax + by + C$的距离$r(x,y)$，然后计算绕线一圈的长度$2\pi r(x,y)$，乘上x_0, y_0附近上的$\mathbf{d}s$，就是$\mathbf{d}V$，最后对$\mathbf{d}s$做积分
    - 就记住一个**通用**公式：$2\pi r(x,y)\mathbf{d}s = \mathbf{d}V$，$V = 2\pi\int\int_D r(x,y)\mathbf{d}s$，$r(x,y) = \frac{|ax_0 + by_0 + C|}{\sqrt{a^2+b^2}}$
  - **平面曲线的弧长**
    - 平面坐标：$s = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2(x)}\mathbf{d}x$
    - 参数方程：$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\mathbf{d}t$
    - 极坐标：$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2(\theta) + r'^2(\theta)}\mathbf{d}\theta$
  - **旋转体的面积**
    - 记住原理
    - 记住一个公式：$2\pi f(x)\mathbf{d}s = S = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'^2(x)}\mathbf{d}x$
  - **物理应用**
    - 先略了