第九章 多元函数微分学及其应用

多元函数的极限、连续、偏导数与全微分（概念）

- **重极限的概念（二重极限、二维极限）**
  - 设函数$f(x,y)$在开区间（或闭区间）D内有定义,$P_0(x_0,y_0)$是D的内点或边界点，如果对任意给定的$\varepsilon>0,存在\delta>0$，使得对适合不等式$0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$且$P(x,y)\in D$的一切$P(x,y)$都有$|f(x,y)-A|<\varepsilon$，则称A为$f(x,y)$当$x\to x_0,y\to y_0$时的极限，记为$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)=A$
  - 注意
    - （1）（提高篇P130例题1）二元函数的重极限是指定义域D中的点$P(x,y)$**以任何形式**趋于点$P_0(x_0,y_0)$时，函数$f(x,y)$都无限趋近于同一常数A。换言之，
      - 若点$P(x,y)$**沿两种不同路径**趋向于点$P_0(x_0,y_0)$时，$f(x,y)$趋于不同常数，
        - 顾名思义就是设两个不同的**过原点的**$y=y_1(x),y=y_2(x)$分别带入二重极限中，然后对比两结果是否相同
      - 或点$P(x,y)$**沿某一路径**趋于$P_0(x_0,y_0)$时，$f(x,y)$的极限不存在，**则重极限**$\lim_{x\to x_0,y\to y_0}f(x,y)$**不存在**，**这是证明重极限不存在的常用的有效方法**
        - 顾名思义就是设一个**过原点的**$y=y(x)$（可能带参数的）带入二重极限中，然后计算结果是**不确定**或者∞
      - **确定**$y=y(x)$的方法（证明重极限不存在）
        - 先看题目中**分子分母的阶次**，如果是$\frac{a}{b},b\geq a$，则需要配合适的$y=kx^n$，就能得到**重极限结果不确定(k的存在，xy都同阶约掉)**
        - 如果是如果是$\frac{a}{b},b<a$，那么**极限一般存在**，用**带绝对值的夹逼准则**（注意这里的夹逼准则是有限制的，看（3））
    - （2）重极限的极限运算（有理运算，复合运算）和性质（保号性，夹逼性，局部有界性，极限与无穷小的关系）与一元函数完全类似
    - （3）总的来说，如果题目中**分子分母的阶次**，如果是$\frac{a}{b},b\geq a$，则**极限一般不存在**，**取不同路径证明**；如果是如果是$\frac{a}{b},b<a$，那么**极限一般存在**，用**夹逼准则。**
      - 注意这里说的是**一般**，提高篇P130例题1(3)和P131例题2(1)P133例题6给了**明显的答复**
      - **提高篇P130例题1(3)**：$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy}{x+y}$，阶次就是$\frac{2}{1}$，所以尝试用**带绝对值的夹逼准则**$0\leq\left|\frac{xy}{x+y}\right|\leq\left|\frac{x}{x+y}\right||y|$但是此时此刻我们并不知道$x,y$是正的还是负的，不知道分式$\frac{x}{x+y}$是$\geq 1,还是\leq 1$，所以夹逼准则无效了，**所以这就不能归类为“一般极限存在”**，这里就要用$y=ax+bx^2+cx^3+\cdots$来解决，并且结果为∞
      - **提高篇P131例题2(1)**：$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2+y^2}{|x|+|y|}$，阶次还是$\frac{2}{1}$，同样尝试使用**带绝对值的夹逼准则**
        $0\leq\left|\frac{x^2+y^2}{|x|+|y|}\right|=\left|\frac{x^2}{|x|+|y|}\right|+\left|\frac{y^2}{|x|+|y|}\right|\leq\left|\frac{x^2}{|x|}\right|+\left|\frac{y^2}{|y|}\right|=|x|+|y|=0$此时此刻我们知道$x,y$是正的，所以分式$\frac{x^2}{|x|+|y|}$中把$|y|$拿掉，一定有$\frac{x^2}{|x|+|y|}\leq\frac{x^2}{|x|}$，**所以夹逼准则有效了**，**所以这就能归类为“一般极限存在”**，极限结果为0。（这个想法可以引用到上一题，反之分母的必须要知道是正的，才能有这样的变换，否则夹逼准则用不下拉去）
      - **P133例题6**：$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2y}{x^2+y^2}$，阶次还是$\frac{3}{2}$，同样尝试使用**带绝对值的夹逼准则**$0\leq\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right|\leq\left|\frac{x^2y}{x^2}\right|=|y|=0$这里的$x,y$是正的，分式可以这么化简，这样就完成了夹逼准则，得到结果为0（这里跟前两题的做法都是相同的）
- **二元函数连续的概念**
  - 设函数$f(x,y)$在开区间（或闭区间）D内有定义，$P_0(x_0,y_0)$是D的**内点或边界点**，且$P_0\in D$，如果$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)=f(x_0,y_0)$，则称函数$f(x,y)$在点$P_0(x_0,y_0)$连续。
- **连续函数的性质**
  - **多元函数有与一元函数完全类似的性质**
  - （1）**连续函数的和、差、积、商（分母不为零）均是连续函数，连续函数的复合函数仍为连续函数**
  - （2）（**有界性与最大最小值定理**）在有界闭区域D上的多元连续函数，在该区域D上有界且能取得它的最大值和最小值
  - （3）（**介质定理**）在有界闭区域D上的多元连续函数，可取到它在该区域D上有最大值与最小值之间的任何值
  - （4）这里缺少了零点定理
  - **拉格朗日中值定理在二维微分**上的运用（提高篇P135例题9）
  - 一切多元初等函数在其定义域内处处连续
  - 这里的**定义区域**是指包含在定义域内的区域或闭区域
- **偏导数的定义**
  - 设函数$z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)的某一邻域内有定义，如果$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$存在，则称此极限为函数$z=f(x,y)$在点$(x_0,y_0)$处对$x$的**偏导数**，记为$f_x'(x_0,y_0)$
  - 类似地可定义$f_y'(x_0,y_0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}$
  - 如果$f_x'(x_0,y_0)=f_y'(x_0,y_0)$，说明函数在$(x_0,y_0)$可导（提高篇P132例题5）
  - 如果$f_x'(x_0^+,y_0)=f_x'(x_0^-,y_0)$，则$f_x'(x,y)$在$(x_0,y_0)$处的**偏导存在**；同理如果$f_y'(x_0,y_0^+)=f_y'(x_0,y_0^-)$，则$f_y'(x,y)$在$(x_0,y_0)$处的**偏导存在**（左导数等于右导数，则导数存在）
  - 定理：如果函数$z=f(x,y)$的两个二阶混合偏导数$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$和$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$在区域$D$内连续，那么在该区域内这两个二阶混合偏导必相等。

- **注意**
  - **由以上定义不难看出偏导数本质上是一元函数的导数**
  - 事实上偏导数$f_x'(x_0,y_0)$就是一元函数$\varphi(x)=f(x,y_0)$在$x=x_0$处的导数，即$f_x'(x_0,y_0)=\varphi(x_0)'=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x,y_0)\Big|_{x=x_0}$
  - 而偏导数$f_y'(x_0,y_0)$就是一元函数$\varphi(y)=f(x_0,y)$在$y=y_0$处的导数，即$f_y'(x_0,y_0)=\phi'(y_0)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}f(x_0,y)\Big|_{y=y_0}$
  - 也就是说在计算$f(x,y)$在(x_0,y_0)的**偏导数时，不要直接偏导数**，要把不相关的变量x_0或y_0带进去再偏导（提高篇P138例题1）这个思想在该用的时候就用，要不然计算量非常大，或者计算偏导不出来
  - 同时，正因为这样的偏导性质，**多元函数的偏导**推不出**多元函数的连续**
- **偏导数的几何意义**
  - 偏导数$f_x'(x_0,y_0)$在几何上表示曲面$z=f(x,y)$与平面$y=y_0$的交线在点$M_0(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$处的切线T_x对x轴正向的斜率，$f_x'(x_0,y_0)=\tan\alpha$
  - 偏导数$f_y'(x_0,y_0)$在几何上表示曲面$z=f(x,y)$与平面$x=x_0$的交线在点$M_0(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$处的切线T_y对y轴正向的斜率，$f_y'(x_0,y_0)=\tan\beta$
- **全微分的定义**（可微的定义）
  - 如果函数$z=f(x,y)$在点(x,y)处的全增量$\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)$可表示为$\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho)$，其中$A,B$不依赖于$\Delta x,\Delta y$，而仅与$x,y$有关，$\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$（**从各个方向趋于**$(x_0,y_0)$），则称函数$z=f(x,y)$在点$(x,y)$**可微**。而$A\Delta x+B\Delta y$称为函数$z=f(x,y)$在点$(x,y)$的**全微分**，记为$\mathrm{d}z=A\Delta x+B\Delta y$
  - 其中$o(\rho)=\frac{g(\Delta x,\Delta y)}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}$，明显$g(\Delta x,\Delta y)$比$\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$高阶，且$\lim_{\Delta x\to0,\Delta y\to0}g(\Delta x,\Delta y)=0$
  - 如果函数在区域D内各点处都可微分，那么称这函数在D内可微分
  - 这个定义也证明了**多元函数的可微**是“高于”**多元函数可偏导**的
  - 证明某$f(x,y)$在某点可微最硬核的方法，就是证明$\Delta z=f_x'(x_0,y_0)\Delta x+f_y'(x_0,y_0)\Delta y+o(\rho)$（提高篇P135例题9）
  - 在题目中可微定义的解题思路
    - （1）考察$f_x'(x_0,y_0)$和$f_y'(x_0,y_0)$是否都存在，如果$f_x'(x_0,y_0)$和$f_y'(x_0,y_0)$中至少有一个不存在，则函数$f(x,y)$在(x_0,y_0)不可微
    - （2）如果函数$f_x'(x_0,y_0)$和$f_y'(x_0,y_0)$都存在，考察

$$\lim_{\substack{\Delta x\to0\\ \Delta y\to0}}\frac{\left[f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)\right]-\left[f_x'(x_0,y_0)\Delta x+f_y'(x_0,y_0)\Delta y\right]}{\rho}=0$$

    其中$\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$。如果成立，则$f(x,y)$在$(x_0,y_0)$可微，否则就不可微。（提高篇P133例题6）
    - 其实就是上面全微分的定义式，有时候我们不能完全依赖这个结果，因为如果$f(x,y)$是不知道的，那么我们需要用到定义式去求解（提高篇P135例题9）
    - （提高篇P150例题2（**综合题**））题目中$\rho=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$出现的形式暗示题目的方向，题中直接把$\lim_{\substack{x\to1\\ y\to0}}\frac{f(x,y)+x+y-1}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}}=0$按照极限中分母$\to0$，分子也$\to0$的思想+前面面全微分的思想，有$f(x,y)=-(x-1)-y+o(\rho)$，还有这里跟前面（P135例题9）中**去掉极限符号**，**带上无穷小量**非常的相似（我觉得这一点在教材中应该一定会讲到的。）
- **可微的必要条件**
  - 如果函数$z=f(x,y)$在点(x,y)在点(x,y)处**可微**，则该函数在点(x,y)处的**偏导数**$\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$必定**存在**，且函数的**全微分**为$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y$
  - 可微⇒偏导存在
- **可微的充分条件**（证明函数可微，不需要全微分的定义式）
  - 如果函数$z=f(x,y)$的**偏导数**$\frac{\partial z}{\partial x}$和$\frac{\partial z}{\partial y}$在点$(x,y)$处**连续**，则函数$z=f(x,y)$在该处**可微**
  - 偏导连续⇒可微（**所以证明可微不需要通过全微分的方式**，只需要证明**函数偏导连续**）
  - **注意注意注意**
    - 这里的“函数$z=f(x,y)$的**偏导数**$\frac{\partial z}{\partial x}$和$\frac{\partial z}{\partial y}$在点$(x_0,y_0)$处**连续**”的**证明方法**是：先用**定义法**得到函数在点(x_0,y_0)处的偏导数结果$f_x'(x_0,y_0),f_y'(x_0,y_0)$，然后按照**求导的公式法**得到$\frac{\partial z}{\partial y}$和$\frac{\partial z}{\partial x}$，然后计算（**从各个方向趋于**$(x_0,y_0)$）$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}\frac{\partial z}{\partial x},\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}\frac{\partial z}{\partial y}$然后观察结果是否跟定义法的结果一致。**如果一致，则偏导连续；否则不连续**
    - 所以这样因为这样，使得**多元函数的可微**可以推出**多元函数的连续**，而**多元函数可偏导**推不出**多元函数可微**
- **多元函数连续、可导、可微之间的关系**
  - 多元函数
    - 一阶偏导连续→可微→可导
    - 一阶偏导连续→可微→连续（这个**可微推连续**在提高篇P161例题5（保号性）用到了，非常隐蔽。即，$f(x,y)$**在**(x,y)**平面上可微，则**$f(x,y)$**在**(x,y)**平面上连续**）
  - 一元函数
    - 可微→连续
    - 可微⇔可导
    - 可导→连续

多元函数的微分法

- **多元函数与一元函数的复合**
  - 对于函数$u=\varphi(t),v=\phi(t),z=f(u,v)$，则复合函数$z=f(u(t),v(t))$在$t$处的导数为$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t}$这里的$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$称为**全导数**
- **多元函数与多元函数的复合**

- 如果函数$u=\varphi(x,y),v=\phi(x,y)$在点$(x,y)$处有对$x,y$的偏导，函数$z=f(u,v)$在对应点有连续一阶偏导数，则复合函数$z=f[\varphi(x,y),\phi(x,y)]$在点$(x,y)$有对$x,y$的偏导数，且$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$
- u,v只需偏导存在，而$f(u,v)$需要有(u,v)的连续偏导

- **全微分形式不变性（复合函数可微定义）**
  - 设函数$z=f(u,v)$和$u=\varphi(x,y),v=\phi(x,y)$都具有**连续一阶偏导数**，则复合函数$z=f[\varphi(x,y),\phi(x,y)]$，则有**全微分**$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y$由以上知 $\begin{aligned}\mathrm{d}z&=\left(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)\mathrm{d}x+\left(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\mathrm{d}y\\&=\frac{\partial z}{\partial u}\mathrm{d}u+\frac{\partial z}{\partial v}\mathrm{d}v\end{aligned}$
  - 无论是把z看作自变量x和y的函数，还是把z看作中间变量u和v的函数，它的微分都具有同样的形式，这个形式叫**全微分形式不变性**
  - 复合函数偏导有点恶心的（提高篇P142例题10）
- **高阶偏导数及混合偏导数与求导次序无关问题**
  - 高阶偏导数的概念
    - $\begin{aligned}&\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''_{xx}(x,y),\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f''_{xy}(x,y)\\&\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=f''_{yx}(x,y),\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''_{yy}(x,y)\end{aligned}$
    - 同时也要学会从偏导数往前求$z=z(x,y)$的过程（提高篇P141例题6）
  - 混合偏导数与求导次序无关问题
    - $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$
    - 定理：如果函数$z=f(x,y)$的两个二阶混合偏导数$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$和$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$在区域$D$内连续，那么在该区域内这两个二阶混合偏导必相等。
- **由一个方程式确定的隐函数（一元函数$y=y(x)$）求导法（此方法只对一阶偏导有效）**
  - 设$F(x,y)$有连续一阶偏导数，且$F'_y\neq 0$，则由方程$F(x,y)=0$确定的函数$y=y(x)$可导，且$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{F'_x}{F'_y}$（$F'_x$**时**$y$**作常数**，$F'_y$**时**$x$**作常数**）
- **由一个方程式确定的隐函数（二元函数$z=z(x,y)$）求导法（此方法只对一阶偏导有效）**
  - 设$F(x,y,z)$由连续一阶偏导数，且$F'_z\neq 0$，$z=z(x,y)$由方程$F(x,y,z)=0$确定，则$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x}{F'_z}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y}{F'_z}$（$F'_x$**时**$y$**作常数**，$F'_y$**时**$x$**作常数**，$F'_z$**时**$x,y$**作常数**）
  - **对于隐函数的高阶偏导**，如果此时此刻还要对求$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$，那么建议
    - 一开始就对方程$z=z(x,y)$两边对x或y求偏导，得到$\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$，然后按照**分式求导**处理，中间出现$\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$时就能带入结果（**这种还是要多加练习**）（提高篇P146例题18）归根到底z是x,y的函数，x,y是自变量。
  - 相互嵌套式的隐函数（提高篇P147例题19）
- *由方程组所确定的隐函数（一元函数$y=y(x)$）求导法*
  - 设$u=u(x),v=v(x)$由方程组$\begin{cases}F(x,u,v)=0\\G(x,u,v)=0\end{cases}$所确定，要求$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$和$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$，可通过原方程组两端对x求导得到，即$\begin{cases}F'_x+F'_u\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+F'_v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=0\\G'_x+G'_u\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+G'_v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=0\end{cases}$
然后从以上方程组中解出$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$和$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$，这里假设由形式解出的$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$和$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$中的分母不为零
- **由方程组所确定的隐函数（二元函数$z=z(x,y)$）求导法**
  - 设$u=u(x,y),v=(x,y)$由方程$\begin{cases}F(x,y,u,v)=0\\G(x,y,u,v)=0\end{cases}$所确定，若要求$\frac{\partial u}{\partial x}$和$\frac{\partial v}{\partial x}$，可先对原方程组两端对$x$求偏导得到（这里$y$不是$x$的函数），即$\begin{cases}F'_x+F'_u\frac{\partial u}{\partial x}+F'_v\frac{\partial v}{\partial x}=0\\G'_x+G'_u\frac{\partial u}{\partial x}+G'_v\frac{\partial v}{\partial x}=0\end{cases}$然后从中解出解出$\frac{\partial u}{\partial x}$和$\frac{\partial v}{\partial x}$，这里假设由形式解出的$\frac{\partial u}{\partial x}$和$\frac{\partial v}{\partial x}$中的分母不为零

极值与最值

- **多元函数极值和极值点的定义**
  - 若存在$M_0(x_0,y_0)$点的某邻域$U_\delta(M_0)$，使得$f(x,y)\le f(x_0,y_0)$（或$f(x,y)\ge f(x_0,y_0)$），$\forall(x,y)\in U_\delta(M_0)$，则称$f(x,y)$在点$M_0(x_0,y_0)$取得极大值（极小值）$f(x_0,y_0)$，极大值与极小值统称为极值，点$M_0(x_0,y_0)$称为$f(x,y)$的极值点。
- **多元函数驻点的定义**
  - **凡能使$f'_x(x,y)=0,f'_y(x,y)=0$同时成立的点(x,y)称为函数$f(x,y)$的驻点**
  - 注意
    - 驻点不代表极值点；极值点也不一定是驻点
- **多元函数取得极值的必要条件**
  - 设函数$f(x,y)$在点$M_0(x_0,y_0)$的**一阶偏导数存在**，且在(x_0,y_0)取得**极值**，则$f'_x(x_0,y_0)=0$，$f'_y(x_0,y_0)=0$由此可见具有一阶偏导数的函数的**极值点一定是驻点**，但**驻点不一定是极值点**
- **二元函数取得极值的充分条件**（下述定理仅使用于**二元函数**）
  - 设函数$z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)的某邻域内**有连续的二阶偏导数**，且$f'_x(x_0,y_0)=0,f'_y(x_0,y_0)=0$，令$f'_{xx}(x_0,y_0)=A,f'_{xy}(x_0,y_0)=B,f'_{yy}(x_0,y_0)=C$，则
    - $AC-B^2>0$时，$f(x,y)$在点(x_0,y_0)取极值，且$\begin{cases}\text{当}A>0\text{时取极小值}\\\text{当}A<0\text{时取极大值}\end{cases}$

- $AC-B^2<0$时，$f(x,y)$在点(x_0,y_0)无极值
- $AC-B^2=0$时，不能确定$f(x,y)$在点(x_0,y_0)是否有极值，还需要进一步讨论（一般用极值定义）
- **注意**
  - 如果我们面对的是隐函数$F(x,y,z)=0$确定的$z=f(x,y)$，那么我们同样需要一开始就是对$z=f(x,y)$方程两边作偏导，**得到两个方程组**，然后带入$\frac{\partial z}{\partial x}=0, \frac{\partial z}{\partial y}=0$算出此时此刻的$(x_0,y_0)$，或者是先得到$z=g(x),u(y)$形式，然后带入$F(x,y,z)=0$确定$z_0$，然后再$z_0=g(x_0),u(y_0)$，才有$(x_0,y_0)$
  - 然后继续对**方程组**作偏导，**得到三个方程组**分别对应$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$，带入$(x_0,y_0,z_0), \frac{\partial z}{\partial x}=0, \frac{\partial z}{\partial y}=0$，就能得到$A,B,C$（提高篇P149例题1，**二刷简直出不来**）
  - 如果我们是打算使用诸如（提高篇P146例题18）那样用分式求导的形式，并且对于无关紧要的变量提前带入变量，然后再求导的方式，要注意：z这个变量先不带入z_0，x,y可提前带入变量。
  - 在求导过程中，一定会再次出现$\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$，这是非常要注意的点。最后带入剩下的变量，以及$\frac{\partial z}{\partial x}=0, \frac{\partial z}{\partial y}=0$就能得到结果（提高篇P149例题1用P146例题18的方法）。如果提前带入了z_0那么最后的结果是不准确，归根到底z是x,y的函数，x,y是自变量。
- **条件极值**
  - 函数$f(x,y)$在条件$\varphi(x,y)=0$条件下的**极值**的**必要条件**
    - **拉格朗日乘数法**：$F(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$，然后解方程组$\begin{cases}\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}+\lambda\frac{\partial \varphi}{\partial x}=0\\ \frac{\partial F}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial y}+\lambda\frac{\partial \varphi}{\partial y}=0\\ \frac{\partial F}{\partial \lambda}=\varphi(x,y)=0\end{cases}$满足此方程组的解$(x,y,\lambda)$中$(x,y)$是函数$f(x,y)$在条件$\varphi(x,y)=0$下的可能的极值点。**求解上面的方程组，一般都是透过观察，然后对前两个变形（不是硬算的），然后得到$x=(\lambda), y=(\lambda)$，然后带入到最后一个方程中计算出λ的数值**
  - 函数$f(x,y,z)$在条件$\varphi(x,y,z)=0, \phi(x,y,z)=0$下的极值的必要条件
    - 构造拉格朗日函数$F(x,y,z,\lambda,u)=f(x,y,z)+\lambda\varphi(x,y,z)+\mu\phi(x,y,z)$计算过程跟上面相同
    - 这里求五个方程组难度挺大的说实话
  - 提示：**其实对于$f(x,y)$在条件$\varphi(x,y)=0$条件下的极值，还能通过化简$\varphi(x,y)=0$得到$y=y(x)$来把$f(x,y)$化简成一元函数$f(x)$，然后求极值。这样就化简为无条件的最值问题。**
  - **在题目中**，条件极值会结合**曲面曲线**来考察，一般，都是考察坐标系中在曲面、曲线上的某个点能够形成某种最大最小值，这时一般题目给出的**曲面、曲线都是条件极值**，而题目问的所求的最大最小值才是需要构造的**目标函数**（提高篇P154例题8、9）
- **多元函数的极值问题**
  - 求出$f(x,y)$在D**内**可能取得极值点（驻点和一阶偏导数不存在的点）的函数值
    - 有时候对于同一个D**内**不能同时得到极小值和极大值，可能只有一个唯一驻点，那么就是一个极大值或一个极小值，不要纠结
  - 求出$f(x,y)$在D的**边界上**的最大、最小值
    - 边界上的点都是**带有条件**的
  - 求出$f(x,y)$在D的"**端点**"处的值
  - 将上面求得的D**内**可能取得极值点上得函数值与D的**边界点上**、**端点处**的最值进行**比较**，最大（小）者为最大（小）值

方向导数与梯度 多元微分在几何上的应用 泰勒定理

方向导数

- **方向导数定义**（方向导数的定义法）
  - 设l是xOy平面上以$P_0(x_0,y_0)$为起始点的**射线**，$\mathbf{e}$是与l同方向的**单位向量**，$P(x,y)$为l上一点，其中$x=x_0+t\cos\alpha, y=y_0+t\cos\beta (t\geq 0)$，如果极限$\lim_{t\to 0^+}\frac{f(x_0+t\cos\alpha, y_0+t\cos\beta)-f(x_0,y_0)}{t}$存在，则称此极限为$f(x,y)$在点$P_0(x_0,y_0)$处沿**方向**$l$的**方向导数**，记作$\frac{\partial f}{\partial l}\Big|_{(x_0,y_0)}$
  - 评注
    - **函数在一点可微（充分条件）→函数在该点任一方向上方向导数存在**
- **方向导数的存在性与计算**（方向导数的公式法）
  - 如果函数$f(x,y)$在点$P_0(x_0,y_0)$处**可微**，那么函数在该点沿**任一方向**l的**方向导数**存在，且有$\frac{\partial f}{\partial l}\Big|_{(x_0,y_0)}=f_x'(x_0,y_0)\cos\alpha+f_y'(x_0,y_0)\cos\beta$，其中$\cos\alpha,\cos\beta$为方向$l$的**方向余弦**，所以$l$的单位向量$\mathbf{e}=(\cos\alpha,\cos\beta)$
  - **总结**
    - 先求$f(x,y)$的$f_x'(x_0,y_0)$，然后求$f(x,y)$的$f_y'(x_0,y_0)$，然后求$f_x'(x_0,y_0)\cos\alpha+f_y'(x_0,y_0)\cos\beta$就是$f(x,y)$在某点$(x_0,y_0)$沿$(\cos\alpha,\cos\beta)$方向的方向导数
- **推广**
  - **方向导数**的定义及计算公式可推广到空间$Oxyz$的情形：$\frac{\partial f}{\partial l}\Big|_{(x_0,y_0,z_0)}=\lim_{t\to 0^+}\frac{f(x_0+t\cos\alpha, y_0+t\cos\beta, z_0+t\cos\gamma)-f(x_0,y_0,z_0)}{t}$
  - 设$f(x,y,z)$在点$P_0(x_0,y_0,z_0)$可微，则有以下的计算公式$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial l}\Big|_{(x_0,y_0,z_0)}&=f_x'(x_0,y_0,z_0)\cos\alpha+f_y'(x_0,y_0,z_0)\cos\beta+f_z'(x_0,y_0,z_0)\cos\gamma\\&=\{f_x'(x_0,y_0,z_0),f_y'(x_0,y_0,z_0),f_z'(x_0,y_0,z_0)\}\cdot\mathbf{e}\end{aligned}$其中$\mathbf{e}=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$为射线$l$方向的**单位向量**

梯度

- **梯度的定义**

- 设函数$u=u(x,y)$在区域D上有定义，点$P(x,y)\in D$。若存在向量$\mathbf{A}(x,y)$，它所指的方向为$u(x,y)$在点P处各方向的**方向导数取最大值**的**方向**，它的**模**$|\mathbf{A}(x,y)|$等于此**方向导数**的**最大值**，则称该向量$\mathbf{A}(x,y)$为函数$u(x,y)$在点$P(x,y)$处的梯度，记为$\mathbf{grad}u\Big|_P=\mathbf{A}(x,y)$
- 总结：
  - 梯度：方向导数最大的方向
  - 梯度的模：方向导数的最大值
- **往某个方向变化最激烈的方向导数**
- 梯度向量
  - $\mathbf{A}(x,y)\to$ 一个方向 $\to$ 确定P点沿l方向取最大值的这个l
- **骚的** 提高篇P160例题4：函数在曲线上的最大方向导数，这是什么意思?
  - 求解函数的最大方向导数，即**函数的梯度的模**
  - 在曲线上，意味着函数上(x,y)的取值只能在曲线上取到，所以这是一个**条件极值**

- **梯度的计算公式**
  - 设函数$u=u(x,y)$在区域D上具有连续的一阶偏导数，则有梯度的计算公式$\mathbf{grad}u(x,y)=\frac{\partial u}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\mathbf{j}$
  - 不会相加不会相加不会相加，结果是一个**向量**
  - 不用带入具体数值(x_0,y_0)
- **梯度与方向导数之间的关系公式**
  - 设$\mathbf{e}_l$为与l同方向的**单位向量**，显然有$\frac{\partial u}{\partial l}\Big|_P=\mathbf{grad}u\Big|_p\cdot\mathbf{e}_l$
  - 这是一个**数值**
  - $|\text{梯度}|=\text{最大方向导数}$，$|\mathbf{A}(x,y)|=\text{最大方向导数}$
- **推广**
  - 上述诸项可推广到三元函数$u=u(x,y,z)$的情形，在类似的条件下，有$\mathbf{grad}u(x,y,z)=\frac{\partial u}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\mathbf{k}$
  - 是一个向量，不用带入(x_0,y_0,z_0)

曲面的切平面与法线

- **曲面方程常见的两种形式**$F(x,y,z)=0$或$z=f(x,y)$
  - $F(x,y,z)=0$
    - **设**曲面Σ的方程为$F(x,y,z)=0$，并设$(x_0,y_0,z_0)\in\Sigma$，三个偏导数$F_x^{'}(x_0,y_0,z_0),F_y^{'}(x_0,y_0,z_0),F_z^{'}(x_0,y_0,z_0)$**不同时为零**（以后凡是讲到**法向量**时均如此设定）。则该曲面在点(x_0,y_0,z_0)处的法向量为$\mathbf{n}=\{F_x^{'}(x_0,y_0,z_0),F_y^{'}(x_0,y_0,z_0),F_z^{'}(x_0,y_0,z_0)\}$过点$(x_0,y_0,z_0)$的**切平面**和**法线方程**分 别为
    $$F_x^{'}(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F_y^{'}(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F_z^{'}(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0$$
    $$\frac{x-x_0}{F_x^{'}(x_0,y_0,z_0)}=\frac{y-y_0}{F_y^{'}(x_0,y_0,z_0)}=\frac{z-z_0}{F_z^{'}(x_0,y_0,z_0)}$$
  - $z=f(x,y)$
    - **设**曲面Σ的方程为$z=f(x,y)$，则该曲面方程可改写成$f(x,y)-z=0$。设$f(x,y)$在(x_0,y_0)处可导，由(1)知，该曲面在点(x_0,y_0,z_0)处的法向量为$\mathbf{n}=\{f_x^{'}(x_0,y_0),f_y^{'}(x_0,y_0),-1\}$
    - 切平面方程和法线方程与(1)类似
  - **曲面在某点处的偏导=法向量**
  - **曲线在某点处的偏导=切向量**

曲线的切线和法平面

- **曲线的切线和法平面**
  - 设曲线Γ的方程为参数式：$\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\\z=z(t)\end{cases}$，则该曲线在其上一点$P_0(x_0,y_0,z_0)$（该点参数为$t_0$，并设$x_0^{'}(t_0),y_0^{'}(t_0),z_0^{'}(t_0)$不同时为零）处的切向量为$\tau=\{x^{'}(t_0),y^{'}(t_0),z^{'}(t_0)\}$，则
    - $P_0(x_0,y_0,z_0)$点处的**切线方程**为$\frac{x-x_0}{x^{'}(t_0)}=\frac{y-y_0}{y^{'}(t_0)}=\frac{z-z_0}{z^{'}(t_0)}$
    - $P_0(x_0,y_0,z_0)$点处的**法平面方程**为$x^{'}(t_0)(x-x_0)+y^{'}(t_0)(y-y_0)+z^{'}(t_0)(z-z_0)=0$
  - 设曲线Γ的方程一般式$\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$，则该曲线在点$P_0(x_0,y_0,z_0)$处的**切向量**为曲面$F(x,y,z)=0$和$G(x,y,z)=0$在该点的**法向量**$\mathbf{n}_1$和$\mathbf{n}_2$的**向量积**，即切向量$\tau=\mathbf{n}_1\times\mathbf{n}_2$，其中
  $$\mathbf{n}_1=\{F_x^{'}(x_0,y_0,z_0),F_y^{'}(x_0,y_0,z_0),F_z^{'}(x_0,y_0,z_0)\}$$
  $$\mathbf{n}_2=\{G_x^{'}(x_0,y_0,z_0),G_y^{'}(x_0,y_0,z_0),G_z^{'}(x_0,y_0,z_0)\}$$
  记$\mathbf{n}_1\times\mathbf{n}_2=\{A,B,C\}$，则
    - $P_0(x_0,y_0,z_0)$点的**切线方程**为$\frac{x-x_0}{A}=\frac{y-y_0}{B}=\frac{z-z_0}{C}$
    - $P_0(x_0,y_0,z_0)$点的**法平面方程**为$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$
  - 值得注意的是，关于曲面的切平面和法线问题，关键是曲面的法向量$\mathbf{n}$
  - 关于曲线的切线和法平面问题，关键是曲线的切向量τ
  - 因此会求$\mathbf{n}$和τ是关键

（二元）泰勒定理（最高就去到二阶连续偏导了）

- 设二元函数$f(x,y)$在点$P_0(x_0,y_0)$的某邻域$U(P_0)$内具有二阶连续偏导数，点$P(x,y)\in U(P_0)$(所有的点都在$U(P_0)$内)，则存在$\theta\in(0,1)$，使得

$$f(x,y)=f(x_0,y_0)+f_x^{'}(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y^{'}(x_0,y_0)(y-y_0)+R_1$$

  其中，余项$R_1=\frac{1}{2!}\Big[\frac{\partial^2 f(P_1)}{\partial x^2}(x-x_0)^2+2\frac{\partial^2 f(P_1)}{\partial x\partial y}(x-x_0)(y-y_0)+\frac{\partial^2 f(P_1)}{\partial y^2}(y-y_0)^2\Big]$称为**拉格朗日余项**，点$P_1$为$(x_0+\theta(x-x_0),y_0+\theta(y-y_0))$
- 设二元函数$f(x,y)$在点$P_0(x_0,y_0)$的某邻域$U(P_0)$内具有二阶连续偏导数，点$P(x,y)\in U(P_0)$，则

$$\begin{aligned}f(x,y)=&f(x_0,y_0)+f_x^{'}(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y^{'}(x_0,y_0)(y-y_0)\\&+\frac{1}{2!}\Big[\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2}(x-x_0)^2+2\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x\partial y}(x-x_0)(y-y_0)+\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^2}(y-y_0)^2\Big]+o(\rho^2)\end{aligned}$$

  其中$\rho=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$，以上公式称为$f(x,y)$在点$P_0(x_0,y_0)$处带有**佩亚诺余项的二阶泰勒公式**