第十章重积分及其应用

重积分

- **二重积分**
  - **定义**
    - 讲究的是**平面上有界闭区域D**
  - **几何意义**
    - 二重积分$\iint_D f(x,y)\mathbf{d}\sigma$在几何上表示以区域$D$为底，曲面$z=f(x,y)$为顶，侧面是以$D$的边界为准线、母线平行于$z$轴的柱面的**曲顶主体的体积**
  - **二重积分的性质**
    - **线性定理**：

$$\iint_D \Big[\alpha f(x,y)+\beta g(x,y)\Big]\mathbf{d}\sigma=\alpha\iint_D f(x,y)\mathbf{d}\sigma+\beta\iint_D g(x,y)\mathbf{d}\sigma$$

    - **划分定理**：如果闭区域D被有限条曲线分为有限个部分闭区域，那么在D上的二重积分等于在各部分闭区域上的二重积分的和

$$\iint_D f(x,y)\mathbf{d}\sigma=\iint_{D_1} f(x,y)\mathbf{d}\sigma+\iint_D f(x,y)\mathbf{d_2}\sigma$$

    - **面积定理**：如果在D上，$f(x,y)=1$，σ为D的面积，那么

$$\sigma=\iint_D 1\mathbf{d}\sigma=\iint_D \mathbf{d}\sigma$$

    - **比较定理**：如果在D上，$f(x,y)\le g(x,y)$则

$$\iint_D f(x,y)\mathbf{d}\sigma\le\iint_D g(x,y)\mathbf{d}\sigma$$

      - 特殊地，由于$-|f(x,y)|\le f(x,y)\le|f(x,y)|$，有

$$\Big|\iint_D f(x,y)\mathbf{d}\sigma\Big|\le\iint_D |f(x,y)|\mathbf{d}\sigma$$

    - **估值定理**：设M，m分别为连续函数$f(x,y)$在闭区域D上的**最大值**和**最小值**，S表示D的面积，则

$$mS\le\iint_D f(x,y)\mathbf{d}\sigma\le MS$$

    - **二重积分中值定理**：设函数$f(x,y)$在闭区域D上连续，S为D的面积，则在D上至少存在一点(ε,η)，使

$$\iint_D f(x,y)\mathbf{d}\sigma=f(\varepsilon,\eta)S$$

  - **二重积分的计算**
    - **在直角坐标下计算**
      - **先y后x**

$$\iint_D f(x,y)\mathbf{d}\sigma=\int_a^b\mathbf{d}x\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)}f(x,y)\mathbf{d}y$$

        可见，最前面的x是确定的上下限，而对y的积分是用$y_1=\phi_1(x),y_2=\phi_2(x)$确定的上下限
      - **先x后y**

$$\iint_D f(x,y)\mathbf{d}\sigma=\int_c^d\mathbf{d}y\int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)}f(x,y)\mathbf{d}x$$

        可见，最前面的y是确定的上下限，而对x的积分是用$x_1=\varphi_1(y),x_2=\varphi_2(y)$确定的上下限
      - 对于复杂的平面图形需要分割图形成若干个符合二重积分计算的区域
    - **在极坐标下计算**
      - （这里的设定有那么一点点讲究）
      - **一般极坐标设定**

$$\begin{cases}x=r\cos\theta\\y=r\sin\theta\\0\le\theta\le2\pi\end{cases}$$

      - 极点O在区间D之外

$$\iint_D f(x,y)\mathbf{d}\sigma=\int_\alpha^\beta\mathbf{d}\theta\int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathbf{d}r$$

- 极点O在区间D的边界上

$$\iint_D f(x,y)\mathbf{d}\sigma=\int_\alpha^\beta \mathbf{d}\theta\int_0^{r(\theta)} f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathbf{d}r$$

- 极点O在区间D的内部(如果圆的圆心O是在坐标原点上，那么$r(\theta)=r$是一个确定的值)

$$\iint_D f(x,y)\mathbf{d}\sigma=\int_0^{2\pi} \mathbf{d}\theta\int_0^{r(\theta)} f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathbf{d}r$$

- 环形域，且极点O在环形域内部

$$\iint_D f(x,y)\mathbf{d}\sigma=\int_0^{2\pi} \mathbf{d}\theta\int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathbf{d}r$$

  - **适合用极坐标计算的**
    - 二重积分的**被积函数**一般具有下列形式

$$f(\sqrt{x^2+y^2}),\quad f\left(\frac{y}{x}\right),\quad f\left(\frac{x}{y}\right)$$

      之所以适合极坐标是由于它们**在极坐标下**都可以化为r或θ的**一元函数**
    - 适合用极坐标计算的二重积分的**积分域**一般应具有以下形状
      - 圆心在原点的圆域
      - 圆环域或它的一部分（如扇形）
      - **中心在坐标轴上且边界圆过原点的圆域**（$x^2+y^2=2ax(r=2a\cos\theta)$；$x^2+y^2=2by(r=2b\sin\theta)$）或者它们的一部分
- **极坐标的灵活设定**（对于圆心不在坐标原点上的，只要不在坐标原点上的，用这个比较好）
  - 例如对于D为$x^2+y^2\le x+y$，则它的灵活设定为

$$\begin{cases}x=r\cos\theta+\dfrac{1}{2}\\ y=r\sin\theta+\dfrac{1}{2}\\ 0\le\theta\le2\pi\end{cases}$$

  - **这样当带入xy参数时，对应的θ就是从$[0,2\pi]$上积分**，具体是

$$\int_0^{2\pi}\mathbf{d}\theta\int_0^R f(x-\frac{1}{2},y-\frac{1}{2})\rho\mathbf{d}\rho$$

  - **此方法可以预先跟对称性结合使用**（提高篇P172例题5）
- **利用对称性和奇偶性进行计算(一定**要用这性质对积分进行**化简**)
  - 利用积分域的对称性和被积函数的**奇偶性**
    - 若积分域D关于y轴对称，且被积函数$f(x,y)$关于x有奇偶性，则

$$\iint_D f(x,y)\mathbf{d}\sigma=\begin{cases}2\iint_{D_1} f(x,y)\mathbf{d}\sigma, & f(x,y)关于x为偶函数，即f(-x,y)=f(x,y)\\ 0, & f(x,y)关于x为奇函数，即f(-x,y)=-f(x,y)\end{cases}$$

    - 若积分域D关于x轴对称，且被积函数$f(x,y)$关于y有奇偶性，则

$$\iint_D f(x,y)\mathbf{d}\sigma=\begin{cases}2\iint_{D_1} f(x,y)\mathbf{d}\sigma, & f(x,y)关于y为偶函数，即f(x,-y)=f(x,y)\\ 0, & f(x,y)关于y为奇函数，即f(x,-y)=-f(x,y)\end{cases}$$

  - 利用变量的**对称性**
    - 若**积分域D**关于直线y=x对称，换言之，**表示积分域D的等式或不等式中将x与y对调后原等式或不等式不变**

$$\iint_D f(x,y)\mathbf{d}\sigma=\iint_D f(y,x)\mathbf{d}\sigma$$

      即被积函数中x和y对调积分值不变（有时候这是解题的关键）
    - **骚**，其实这里的对称可以**有选择性地对称**（提高P175方法1），例如对于$\sin\sqrt{x^2+y^2}$可以不用对称，直接后面写成$\sin r$
- **计算步骤**
  - 画出积分域D的草图，判定**积分域是否有对称性**，**被积函数是否有奇偶性**，如果能用对称性，奇偶性计算或化简原积分就先进行计算或化简，否则进行下一步（**化简步骤一定要做**，即使无明显化简，也要**切分积分域寻找对称**）
  - 划分**不规则**积分域为**规则**积分域（**形成对称性**）
  - 选择化为累次积分的**坐标系**（直角or极坐标？）（主要根据积分域的形状和被积函数的形式）
  - 选择累次积分的**积分次序**（谁前谁后）（主要根据积分域和被积函数）
  - 确定累次积分的**积分限**并计算**累次积分**
  - （**补充**：对于被积函数中带有绝对值的，需要**划分不同的积分区域去掉绝对值**（提高篇P174例题7））
- **骚**，**边界曲线为参数方程的二重积分**（提高篇P174例题6）
  - 就是围城D的方程由**曲线的参数方程**给出
  - 先大概画出草图

- 直接用上$y(x)$并根据草图确定积分限并带入被积函数中计算
- 先计算dy的积分，把y看成被积变量
- 当只剩下$y(x)$的dx积分时，用y的参数方程替代所有$y(x)$，而用x的参数方程替换所有的dx，最后是dt，同样积分限上的也要变
- **（事实证明，离开例子谈算法是最抽象的事情了）**

- **累次积分交换积分次序**
  - 如果题目给出的累次积分次序不好算，通常要**交换积分次序**进行计算
  - 如果交换积分次序后任不好算，就需要**更换坐标系**
- **二重积分的综合题（骚气）（完整的一个系列，是二重积分的代数运算）**
  - 主要的思路是把二重积分转化为一元积分（然后使用一元积分的性质等）
  - **如果给定D**，对

$$f(x,y)=g(x,y)+\iint_D f(u,v)\mathbf{d}u\mathbf{d}v$$

这种嵌套的，其实后面的$\iint_D f(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$应该看成**一个常数**，而$f(x,y)$在同样的D上做二重积分就等于这个常数

  - **如果没有给定D**，仅有

$$f(t)=g(t)+\iint_{x^2+y^2\le 4t^2} f(\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2})\mathbf{d}x\mathbf{d}y$$

这种后面的二重积分出来只能是一个对t的函数且是**一个变上限积分，并不是一个常数**，那么就需要化简后面的二重积分得到一个**变上限积分**，对于变上限积分，需要对之**求导**，所以题目变成**微分方程**

  - **对于二重积分的变上限积分求导**（两次求导）

$$\int_0^x \mathbf{d}u\int_0^{u^2} f(t,u)\mathbf{d}t \to 对x求导 \to \int_0^{x^2} f(t,x)\mathbf{d}t \to 对x求导 \to f(x^2,x)2x$$

  - **骚气**，如果求导都已经帮你求好了，那么就是要**求积分**了（提高篇P180例题16）

$$\begin{aligned}\iint_D \frac{xf_x'+yf_y'}{x^2+y^2}\mathbf{d}x\mathbf{d}y &\to \int_0^{2\pi}\mathbf{d}\theta\int_\epsilon^1 \cos\theta f_x'+\sin\theta f_y'\mathbf{d}r(竟然看不到下一步)\\ &\to \int_0^{2\pi}\mathbf{d}\theta\int_\epsilon^1 \cos\theta f_x'(r\cos\theta,r\sin\theta)+\sin\theta f_y'(r\cos\theta,r\sin\theta)\mathbf{d}r\\ &\to(这是典型的对r求导后得到(关键一步))\\ &\to \int_0^{2\pi}\mathbf{d}\theta\Big[f(r\cos\theta,r\sin\theta)\Big]\Big|_\epsilon^1（根据题意）=-\int_0^{2\pi} f(\epsilon\cos\theta,\epsilon\sin\theta)\mathbf{d}\theta\\ &\to(超级无敌积分中值定理消去积分号)\\ &\to -2\pi f(\epsilon\cos\bar\theta,\epsilon\sin\bar\theta)\\ &\to 恭喜你成功计算最难的二重积分\end{aligned}$$

- **二重积分与积分不等式**（都是地狱题）
  - **将相乘的一元积分转变为二重积分，通过改变积分的变量而不会影响积点的结果**

$$\int_a^b f(x)\mathbf{d}x\int_a^b g(x)\mathbf{d}x=\int_a^b f(x)\mathbf{d}x\int_a^b g(y)\mathbf{d}y=\iint_{D=\{a\le x\le b,a\le y\le b\}} f(x)g(y)\mathbf{d}x\mathbf{d}y$$

这样的做法相比于一元积分中更换积分上限，在理论上有质的飞跃

  - 而D往往具有强烈的$y=x$对称性，**如果直接x换y或者y换x往往会直接等于**0
  - 不等式的奥秘就是跟据题意，运用对称性，**绕圈子，绕出不等的结果**
  - 一定会遇到的“**柯西—施瓦茨积分不等式**”（用二重积分的去解决，主要是运用了一元积分中积分结果与积分变量无关，所以这里**一元积分和二重积分相互渗透了**，骚的一批）提高P182li18
  - 将相乘的绕各种圈子就是为了用上题目的条件，这也是不等式的解题方法，似乎题目的条件有预示着解题思路的走向（提高P181li19）
  - 提高P182li20，**对积分域的放大缩小**；利用泰勒公式来得到e^{-x^2}的上界

- **三重积分**
  - **定义**
    - 讲就是的是**空间有界闭区域Ω上**的
  - **几何意义**
    - 若$f(x,y,z)=1$，$\iiint_\Omega \mathbf{d}V=$积分域Ω的体积
    - 若$\mu=f(x,y,z)$为空间物体Ω的体密度，$\iiint_\Omega f(x,y,z)\mathbf{d}V=$空间物体Ω的质量
  - **三重积分性质**
    - **在直角坐标下计算**
      - **先一后二**：空间体是一个柱体，空间体的截面往某平面上的投影区域D恒定的（自己的理解，**其实不一定的**（提高篇P183例题21））并且空间体**有明显的上下曲面为界**
        - 如果投影区域为D_{xy}则

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\mathbf{d}V=\iint_{D_{xy}}\mathbf{d}x\mathbf{d}y\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\mathbf{d}z$$

- 如果投影到其他平面则依此类推
- **先二后一**：空间体的截面往某平面的投影区域D不是恒定的（自己的理解）**并且没有明显的上下曲面为界**，曲面几乎是相容在一起（提高篇P183例题22）
  - 设空间闭区域$\Omega=\{(x,y,z)|(x,y)\in D_z,a\le z\le b\}$，其中$D_z$为坐标为$z$的平面截闭区域$\Omega$所得到**平面闭区域**，则

$$\iiint_{\Omega}f(x,y,z)\mathbf{d}V=\int_a^b\mathbf{d}z\iint_{D_z}f(x,y,z)\mathbf{d}x\mathbf{d}y$$

  就是选取任意平面z截空间区域Ω，然后求截面D_z，其实就是xy在截面D_z上的投影
- **三重积分交换积分次序（提高篇P186例题28）**
  - 题目中**被积函数只出现了z所以将z的积分dz要放在最后**
  - 而交换积分只能是**两两交换**
  - 例如对

$$\int_0^1\mathbf{d}x\int_0^x\mathbf{d}y\int_0^y\frac{\sin z}{(1-z)^2}\mathbf{d}z$$

  先是画出$\mathbf{d}y\mathbf{d}z$的平面图，然后交换成$\mathbf{d}z\mathbf{d}y$积分，得到

$$\int_0^1\mathbf{d}x\int_0^x\mathbf{d}z\int_z^x\frac{\sin z}{(1-z)^2}\mathbf{d}y=\int_0^1\mathbf{d}x\int_0^x\frac{(x-z)\sin z}{(1-z)^2}\mathbf{d}z$$

  - 然后画出$\mathbf{d}x\mathbf{d}z$的平面图，然后交换成$\mathbf{d}z\mathbf{d}x$积分，得到

$$\int_0^1\mathbf{d}z\int_z^1\frac{(x-z)\sin z}{(1-z)^2}\mathbf{d}z$$

- **在柱坐标下计算**
  - 柱坐标(r,θ,z)与**直角坐标**的关系

$$\begin{cases}x=r\cos\theta, & 0\le r<+\infty\\ y=r\sin\theta, & 0\le\theta\le 2\pi\\ z=z, & -\infty<z<+\infty\end{cases}$$

  - $\mathbf{d}V=r\mathbf{d}r\mathbf{d}\theta\mathbf{d}z$
  - $$\iiint_{\Omega}f(x,y,z)\mathbf{d}V=\iiint_{\Omega}f(r\cos\theta,r\sin\theta,z)r\mathbf{d}r\mathbf{d}\theta\mathbf{d}z$$
  - 适合用柱坐标计算的三重积分的**被积函数**一般应具形式

$$f(x,y,z)=\varphi(z)g(x^2+y^2)$$

  - 适合用柱坐标计算的三重积分的**积分域**一般应为**柱体、锥体、柱面、锥面**与其他曲面所围空间体等
- **在球坐标下计算**
  - 球坐标(r,φ,θ)与**直角坐标**的关系

$$\begin{cases}x=r\sin\varphi\cos\theta, & 0\le r<+\infty\\ y=r\sin\varphi\sin\theta, & 0\le\varphi<\pi\\ z=r\cos\varphi, & 0\le\theta\le 2\pi\end{cases}$$

  - $\mathbf{d}V=r^2\sin\varphi\mathbf{d}r\mathbf{d}\varphi\theta$
  - $$\iiint_{\Omega}f(x,y,z)=\iiint_{\Omega}f(r\sin\varphi\cos\theta,r\sin\varphi\sin\theta,r\cos\varphi)r^2\sin\varphi\mathbf{d}r\mathbf{d}\varphi\mathbf{d}\theta$$
  - 适合用球坐标计算的三重积分的**被积函数**一般应具形式

$$f(x,y,z)=\varphi(x^2+y^2+z^2)$$

  - 适合用球坐标计算的三重积分的**积分域**一般应为**球体、半球体、锥面与球面**所围空间体等
- 利用**对称性**和**奇偶性**进行计算
  - 利用积分域的被积函数的**奇偶性**（化简的第一步）
    - 若积分域Ω关于xOy坐标面对称，且被积函数$f(x,y,z)$关于z有奇偶性，则

$$\iiint_{\Omega}f(x.y,z)\mathbf{d}V=\begin{cases}2\iiint_{\Omega_1}f(x,y,z)\mathbf{d}V, & f(x,y,z)\text{关于}z\text{是偶函数，即}f(x,y,-z)=f(x,y,z)\\ 0, & f(x,y,z)\text{关于}z\text{是奇函数，即}f(x,y,-z)=-f(x,y,z)\end{cases}$$

    其中Ω_1为Ω在xOy面上侧的部分
    - 对于积分域关于其他xOz，yOz，有相似的结论
  - 利用变量的**对称性**
    - **若将表示积分域Ω的方程中的x和y对调后方程不变，则将被积函数中x和y对调积分值不变**，即

$$\iiint_{\Omega}f(x,y,z)\mathbf{d}V=\iiint_{\Omega}f(y,x,z)\mathbf{d}V$$

- 当然还有其他的情况
- 例如要计算

$$\iiint_{\Omega}(x^2+y^2)\mathbf{d}V$$

，其中Ω由$x^2+y^2+z^2=a^2(a>0)$围成
由于在方程$x^2+y^2+z^2=a^2$中将x和y对调方程不变，则

$$\iiint_{\Omega}x^2\mathbf{d}V=\iiint_{\Omega}y^2\mathbf{d}V$$
$$\iiint_{\Omega}x^2\mathbf{d}V=\iiint_{\Omega}z^2\mathbf{d}V$$

则

$$\iiint_{\Omega}(x^2+y^2)\mathbf{d}V=\frac{2}{3}\iiint_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\mathbf{d}V=\frac{2}{3}\int_0^{2\pi}\mathbf{d}\theta\int_0^{\pi}\mathbf{d}\varphi\int_0^a r^4\sin\varphi\mathbf{d}r=\frac{8\pi a^5}{15}$$

你不觉得这样计算很方便吗?

- **重积分的应用**
  - **曲面的面积**
    - **直接法**
      - 对于$z=f(x,y)$的曲面

$$A=\iint_{D_{xy}}\sqrt{1+(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2}\mathbf{d}x\mathbf{d}y$$

      - 对于$x=g(y,z)$的曲面

$$A=\iint_{D_{yz}}\sqrt{1+(\frac{\partial x}{\partial y})^2+(\frac{\partial x}{\partial z})^2}\mathbf{d}y\mathbf{d}z$$

      - 对于$y=f(x,z)$的曲面

$$A=\iint_{D_{xz}}\sqrt{1+(\frac{\partial y}{\partial x})^2+(\frac{\partial y}{\partial z})^2}\mathbf{d}x\mathbf{d}z$$

    - 利用曲面的参数方程求曲面的面积（没讲）
  - **质心**
    - 质心坐标，$\mu(x,y)$是总质量

$$\bar{x}=\frac{M_y}{M}=\frac{\iint_D x\mu(x,y)\mathbf{d}\sigma}{\iint_D\mu(x,y)\mathbf{d}\sigma},\bar{y}=\frac{M_x}{M}=\frac{\iint_D y\mu(x,y)\mathbf{d}\sigma}{\iint_D\mu(x,y)\mathbf{d}\sigma}$$

  - **转动惯量**
    - 在设有一薄片，占有xOy面上的闭区域D，在点(x,y)处的面密度为$\mu(x,y)$，假定$\mu(x,y)$在D上连续。现在要求该薄片对于x轴的转动惯量I_x以及对于y轴的转动惯量I_y。

$$I_x=\iint_D y^2\mu(x,y)\mathbf{d}\sigma,I_y=\iint_D x^2\mu(x,y)\mathbf{d}\sigma$$

    - 类似第，占有空间有界闭区域Ω，在点(x,y,z)处的密度为$\rho(x,y,z)$（假定$\rho(x,y,z)$在Ω上连续）的物体对于x,y,z轴的转动惯量为

$$I_x=\iiint_{\Omega}(y^2+z^2)\rho(x,y,z)\mathbf{d}v$$
$$I_y=\iiint_{\Omega}(z^2+x^2)\rho(x,y,z)\mathbf{d}v$$
$$I_z=\iiint_{\Omega}(x^2+y^2)\rho(x,y,z)\mathbf{d}v$$

  - **引力**：空间中一物体对物体外一点$P_0(x_0,y_0,z_0)$处单位质量的质点的引力问题
    - $$F=(F_x,F_y,F_z)=\left(\iiint_{\Omega}\frac{G\rho(x,y,z)(x-x_0)}{r^3}\mathbf{d}v,\iiint_{\Omega}\frac{G\rho(x,y,z)(y-y_0)}{r^3}\mathbf{d}v,\iiint_{\Omega}\frac{G\rho(x,y,z)(z-z_0)}{r^3}\mathbf{d}v\right)$$
    - 物体密度$\rho(x,y,z)$
    - $r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$
    - 如果是二维的空间，那么就是把Ω换成D就行