第十二章 无穷级数

第十二章 无穷级数

- **常数项级数的概率和性质**
  - **常数项级数的概念**
    - **无穷级数**：首先是数列$\{u_n\}$ $\{u_n\}=\{u_1,u_2,u_3,\cdots,u_n\}$，则称数列求和$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=u_1+u_2+\cdots+u_n$为**无穷级数**
    - **级数的部分和数列**：数列的部分和

$$\begin{aligned}&S_1=u_1\\&S_2=u_1+u_2\\&\vdots\\&S_n=\sum_{i=1}^{n}u_i=u_1+u_2+\cdots+u_n\end{aligned}$$

      ，$\langle S_n\rangle$称为**部分和数列。**
    - **无穷级数和部分和数列具有相同的敛散性**
      - 如果有（仅对知道S_n的情况有用，对于只知道u_n来说是无用的）$\lim_{n\to\infty}S_n=S$，则称无穷级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$**收敛**；如果部分和数列$\langle S_n\rangle$没有极限，则无穷级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$**发散**
      - 部分和数列**有界**⇔部分和数列有**极限**，**这是常数项级数收敛的充分必要条件**
    - 无穷级数收敛的**必要条件**：$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}S_n-S_{n-1}=0$
  - **收敛级数的基本性质**
    - **性质1**
      - 非零常数k乘上级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$，那么级数前后**同收敛**
    - **性质2**
      - 敛±敛=敛
      - 敛±散=散
      - 散±散=无法确定（可能收敛可能发散）
    - **性质3**
      - 级数中的有限项=常数
      - 改变级数的**前有限项**，不影响级数的敛散性
    - **性质4**
      - **收敛级数**加括号仍收敛，且和不变；一个级数**加括号以后**收敛，原级数**不一定收敛**（未知级数收敛情况）
      - 逆否命题
        - 一个级数**加括号以后**发散，原级数一定**发散**（未知级数收敛情况）
    - **性质5（无穷级数收敛的必要条件）**
      - 级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$**收敛**的必要条件是$\lim_{n\to\infty}u_n=0$（**为某个常数也不行，必须为零**）
      - 逆否命题
        - （**重点**）相应的，如果**极限不为0**或无极限，那么**级数发散**
- **常数项级数的审敛法**
  - **方法一**：级数收敛的必要条件
  - **方法二**：$\lim_{n\to\infty}S_n=S$存在
    - 正项级数，则$\langle S_n\rangle$有上界
  - **方法三**：分**正项级数**、**交错级数**、**任意项**
    - **正项级数**及其审敛法（VIP）
      - **充要条件**：正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(u_n\geq 0)$的**部分和数列**$\langle S_n\rangle$有界
      - **比较审敛法**（靠别人）（次要考虑使用）
        - 若$0\leq u_n\leq v_n$，则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$发散，那么$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$一定发散；则$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$收敛，那么$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$一定收敛
          - $0\leq u_n$**必须要存在：**一定要确定出$0\leq u_n$才能说明 “则u_n发散，那么v_n一定发散；则v_n收敛，那么u_n一定收敛**”
        - 靠别人
          - 经典的级数
            - 等比级数：等比级数$\sum_{n=1}^{\infty}aq^n,(a>0,q>0)\begin{cases}收敛, & 当0<q<1\\ 发散, & 当q\geq 1\end{cases}$
            - p级数：
              1. （与$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x$同敛散）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}\begin{cases}收敛, & p>1\\ 发散, & p\leq 1\end{cases}$
              2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^p}\begin{cases}绝对收敛, & p>1\\ 条件收敛(有||才发散，没就收敛), & 0<p\leq 1\\ 发散, & p\leq 0\end{cases}$
            - 对数p级数：$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^p\ln^q n}\begin{cases}当p\geq 1且q>1 & 收敛\\ 当p\leq 1且q\leq 1 & 发散\end{cases}$；当$p=1$时，级数变为，主要看$q$来判断敛散性
        - $n^p,\ln n$（一般处理的对象）
      - **比较审敛法的极限形式**（靠别人）（次要考虑使用）
        - 设定$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=l(0\leq l\leq+\infty)$
          - if $0<l<+\infty$，则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$与$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$**同敛散**
          - if $l=0$，则$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$收敛⇒$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$发散⇒$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$发散
            - $u_n<<v_n$
          - if $l=+\infty$，则$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$发散⇒ $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$发散，则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛⇒$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$收敛
            - $v_n<<u_n$

                - 靠别人：等比级数或p级数
                - $n^p, \ln n$（一般处理的对象）
            - **比值审敛法**（靠自己）（主要考虑使用）
                - 设定$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\rho$，则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n\begin{cases}\text{收敛，} & \text{当}\rho<1\text{时，}\\ \text{发散，} & \text{当}\rho>1\text{时（包含正无穷），}\\ \text{不确定，} & \text{当}\rho=1\text{时（用其他方法判断）}\end{cases}$
                - **其他方法**只能是（提高版P217例题2（1））
                    - 使用必要条件求解（主要）
                    - 继续使用比值判别法
                    - **如果必要条件明显有解，一律使用必要条件；如果必要条件无解，凑合使用方法二**
                - 注意：这里是**充分条件**而已，右边条件可以推出左边结论，但是左边结论不能推右边条件
                - 含幂：a^n, n^n（一般处理的对象）
            - **根植审敛法**（靠自己）（主要考虑使用）
                - 设定$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\rho$，则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n\begin{cases}\text{收敛，} & \text{当}\rho<1\text{时，}\\ \text{发散，} & \text{当}\rho>1\text{时（包含正无穷），}\\ \text{不确定，} & \text{当}\rho=1\text{时（用其他方法判断）}\end{cases}$
                - **其他方法**只能是（提高版P217例题2（2））
                    - 使用必要条件求解（主要）
                    - 继续使用根植判别法
                    - **如果必要条件明显有解，一律使用必要条件；如果必要条件无解，凑合使用方法二**
                    - 在计算的过程中，带上根号取极限比较难算，参考教材P264，可以把n次根号写成$\exp(\frac{\ln f(x)}{n})$的形式去计算，如果$f(x)$取极限收敛，就很好算了
                - 注意：这里是**充分条件**而已，右边条件可以推出左边结论，但是左边结论不能推右边条件
                - 阶乘：$n!$（一般处理对象）
            - **积分审敛法**（可用于证明p级数和对数p级数）
                - 设定$f(x)>0$（说明函数非负的，对应正项级数），$f'(x)<0$（说明函数单减，级数必要条件成立），且$a_n=f(n)$，则$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$与$\int_1^{+\infty}f(x)dx$**同敛散**（例题2，（5））
                - 很明显，**级数求和的范围和积分的范围时相同的**，它们两就是**同敛散**
        - **交错级数及其审敛法**
            - 交错级数具体的级数形式是$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n, u_n>0$
            - **莱布尼茨定理**
                - $u_n\geq u_{n+1}(n=1,2,\cdots)$（$u_n\downarrow$）（不必考虑-1项）
                    - 利用$\frac{u_{n+1}}{u_n}\leq 1$
                    - 利用$u_{n+1}-u_n\leq 0$
                    - (**积分判别法**)找一个可导函数$f(x)$，使得$f(n)=u_n$（这里就不要求级数是正项的），用$f'(x)<0$说明u_n单调递减；再考察$\lim_{n\to\infty}u_n=0$时，也可考察$\lim_{n\to\infty}f(x)=0$
                - $\lim_{n\to}u_n=0(u_n>0)$（不必考虑-1项）
                - 则级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$收敛
                - 这里是否是$(-1)^{n-1}$问题不大，只要是交错级数都这么搞
            - 当**莱布尼兹判别准则不中用**时
                - 考虑极限$\lim_{n\to\infty}S_{2n}$和$\lim_{n\to\infty}S_{2n+1}$是否相等（**判断通项的奇偶项是否相等**）
                - 或考察原级数**加括号**以后的级数（**如果加括号之后级数发散，那么原级数一定发散**）
                - 或考察其绝对值收敛，利用**绝对收敛的级数一定收敛**的性质
                - （**以上这两点+必要条件，是比较通用的判别任意级数是否收敛的方法**）
        - 任意项级数的**绝对收敛与条件收敛**
            - 任意项：具体级数可以是**任意项**$\sum_{n=1}^{\infty}u_n, u_n$为任意实数
        - **绝对、条件收敛级数的性质**
            - **绝对收敛的性质**：若级数$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$收敛，则称级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$**绝对收敛**
            - **条件收敛的性质**：若级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，而级数$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$发散，则称级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$**条件收敛**
            - **处理任意项**
                - 考虑通过证明绝对收敛来证明级数收敛
                - 考虑通过证明绝对值的级数的比值判别法$\rho>1$或根植判别法$\rho>1$来证明级数发散
        - 关于**绝对收敛**和**条件收敛**的基本结论
            - 绝对收敛的级数一定收敛，即$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$收敛$\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛
                - 如果绝对值级数$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$**发散**，当然**不能断定原级数发散**，判断原级数是否发散，往往要用到级数的*性质和定义*。（教材给了答复P268）必须用**比值判别法**$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\rho>1$或**根植判别法**$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|u_n|}=\rho>1$去判断$|u_n|$是否发散，如果发散，则$u_n$发散
                    - 因为此时$|u_n|>0$且单增，$|u_n|$则不趋于0，则按照级数收敛的必要条件的逆否命题，有$u_n, n\to\infty$时不趋于0，来证明原级数发散
                - 因此对于**所有的级数**，如果需要证明**收敛**，那么就计算**绝对值之后的级数是否收敛（此时S_n都是单调增的）**，如果要证明**发散**，就用**比值判别法**或**根植判别法**来证明发散
                - 注意**绝对收敛的数学表述**是"$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$收敛"，对于交错级数，这个绝对值到底放在哪？
                    - 教材P268给了解答，对于交错级数，可以把$u_n=(-1)^n v_n$来看待，然后计算收敛性的时候，写成$|u_n|=v_n$这样，然后可以**尝试比值或者根号先证明发散**
                - 还有一个（第一章第一节）通过证明**取绝对值后的级数**的部分和S_n是**单调有界数列必有极限**，来证明级数是绝对收敛，这个方法比较万能（教材P271）
            - 条件收敛的级数所有正项（或负项）构成的级数**一定发散**
                - 即若级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$条件收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n+|u_n|}{2}$和$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n-|u_n|}{2}$**都发散**(如果两级数，**一个收敛一个发散**，它们的*和差***一定发散**)
- **幂级数**
    - **函数项级数的概念**
        - 函数项无穷级数的具体的形式$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)$，是定义在区间$I$上的函数项级数，其中$u_i(x)$是定义在区间$I$上的**函数序列**

- 若存在$x_0 \in I$，函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$收敛，那么称$x_0$为的$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$收敛点，否则称为**发散点**，所有**收敛点**x_0构成的集合称为**收敛域。**即I=收敛域+发散域
- 函数项级数的**和函数**$S(x)$定义在这个**收敛域**内，即$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$，它跟函数项级数唯一的**区别**，就是**函数项级数**是定义在I上的，而这个**和函数**是定义在**收敛域**上的，明显，$\text{收敛域} \in I$。**在后面会用收敛区间来表示**
- **收敛域**
  - **带绝对值的根植和比值判别法是最基本的判断函数项级数收敛域的方法**
    - $\rho < 1$则是绝对收敛，同时得到收敛域
    - $\rho > 1$则是$|u_n|$发散，同时也是u_n发散，所以得到发散域
    - 对于$\rho = 1$处的x_0，带入函数项级数计算常数项是否收敛，是则加入收敛域中
- 发散域

- **幂级数及其收敛性**
  - **阿贝尔定理**
    - 如果级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$
    - 当$x = x_0 (x_0 \neq 0)$时**收敛**，则当$|x| < |x_0|$时$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$**绝对收敛**
    - 当$x = x_0$时**发散**，则当$|x| > |x_0|$时$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$**发散**
  - 收敛半径，收敛区间，收敛域
    - **收敛半径**
      - 幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的*收敛情况*，**有且仅有下述3种**
        - 仅在$x = 0$处该幂级数**收敛**，在$x \neq 0$时，该幂级数**发散**（幂级数的收敛半径为$R = 0$）
        - 对于$x \in (-\infty, +\infty)$，该**幂级数都收敛且绝对收敛**（幂级数的收敛半径为$R = +\infty$）
        - 存在$R > 0$，当$x \in (-R, R)$时，该**幂级数收敛且绝对收敛**；当$|x| > R$时，该**幂级数发散**（幂级数的收敛半径为R）
        - $x = \pm R$处，幂级数可能收敛也可能发散
      - **求解收敛半径的方法（比值判别法或根植判别法）**
        - 对待$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$和$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$都一样
        - 设当n充分大时$a_n \neq 0$，并设$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho$，或$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho$，则
          - 若$\rho = +\infty$，则$R = 0$，即级数仅在零点处收敛
          - 若$\rho = 0$，则$R = +\infty$
          - 若$0 < \rho < +\infty$，则$R = \frac{1}{\rho}$
        - **注意这里的系数一定是相邻的两项，一个是奇次项一个是偶次项**，如果级数中全是奇次项或全是偶次项，则不能使用，只能使用**带绝对值的幂级数系数的比值判别法**$\lim_{n\to+\infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \frac{|a_{n+1} x_{n+1}|}{|a_n x_n|}$求收敛半径，也可以用**带绝对值的根植判别法**，**其实就是计算函数项无穷级数的收敛域**
    - **收敛区间**
      - 当$R > 0$时，***开区间***$(-R, R)$称为幂级数的**收敛区间**
      - 对于任何一个得到的幂级数，都必须给出它的收敛区间；注意这里的比值和根植判别法都带上了**绝对值**
      - 对于$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$，它的收敛区间直接就是$(-R, R)$
      - 对于$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$，它的收敛区间是$(x_0 - R, x_0 + R)$
        - 若幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$在$x = b$处条件收敛，则$x = b$为该幂级数收敛区间的一个端点（提高P232例题3）
      - 如果a_n都是比1小，那么x^n的收敛半径都比1大(提高篇P240例题14（1））
    - **收敛域**（教材P275有说明为什么这样处理）
      - 最后考虑收敛区间的端点$x = x_0 \pm R$，**带入级数考虑敛散性**，如果是**收敛**，那么**开区间变闭区间**，最后得到**收敛域**
    - **总结**
      - 幂级数相邻两项系数→收敛半径→收敛区间→ $x = \pm R$ →收敛域
  - 幂级数的**条件收敛**的点x_0必定是收敛区间的端点
    - x_0不可能在$(-R, R)$之内，因为$(-R, R)$内全是绝对收敛的点
    - x_0不可能在$(-\infty, -R)(R, +\infty)$之内，因为全是发散的点
    - 所以x_0只能是端点
    - 确定收敛半径、区间、收敛域
- **幂级数的运算**
  - **幂级数四则运算**
    - 若$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的收敛半径为$R_1$，和函数为$S_1(x)$，$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$的收敛半径为$R_2$，和函数为$S_2(x)$，令$R = \min(R_1, R_2)$
  - **幂级数的和函数的性质**
    - 设幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的收敛半径为$R > 0$，和函数$S(x)$，则
    - （1. **连续性**）$S(x)$在**收敛域**$(-R, R)$上连续
    - （2. **可导性**）$S(x)$在**收敛区间**$(-R, R)$上可导，且可**逐项求导**，**求导前后的收敛半径不变**，即$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$反复使用，可得结论：幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的和函数$s(n)$在其收敛区间$(-R, R)$内**具有任意阶导数**
      - 子型级数
        - $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad |x| < 1$（等比数列）
        - $\sum_{n=0}^{\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{1-x}' \to \sum_{n=0}^{\infty} n x^n = \frac{1}{1-x}' x$
        - $\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) x^{n-2} = \frac{1}{1-x}'' \to \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) x^n = \frac{1}{1-x}'' x^2$
        - $a \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) x^n + (a+b) \sum_{n=0}^{\infty} n x^n + c \sum_{n=0}^{\infty} x^n \to \sum_{n=0}^{\infty} (an^2 + bn + c) x^n$
      - 端点处是否可导不能保证
    - （3. **可积性**）$S(x)$在**收敛域**$(-R, R)$内可积，且可**逐项积分（一般都是从0-x上积分）**，**积分前后的收敛半径不变**，即$\int_0^x S(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}, (x \in (-R, R))$
      - 母型级数
        - $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad |x| < 1$（等比数列）

- $\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x t^n \mathbf{d}t = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1} = -\ln(1-x)$
- $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$，带入$x=\pm 1$算收敛域（积分后端点处的敛散性具体问题具体分析）
- 得到$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n} = -\ln(1-x) \quad -1 \le x < 1$

- **求幂级数的和函数**（教材P280）
  1. 先求幂级数的收敛域
  2. 通过变形，利用逐项求导和逐项积分求出和函数

- **函数展开成幂级数**
  - 函数在某点邻域内泰勒展开的充要条件（这个一般不用到）
  - 直接法
  - **间接法**
    - 几个常用的麦克劳林展开式（**以下的都是对级数展开常用的*间接法***）
      - 记住（√）的展开式，其余的能够通过这三个求得（教材P285,286）
      - 通过间接法使用下面得方法去计算函数的幂级数展开式时，最后不需要研究余项的极限是否为0
      - $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty}x^n = 1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n+\cdots, x\in(-1,1)$
      - （√）$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n = -x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^n x^n+\cdots, x\in(-1,1)$
      - （√）$e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots, x\in(-\infty,+\infty)$**有时候在构造$e^x$时候，例如$\frac{x}{2}=t$应该被看做为一个整体来得到$e^{\frac{x}{2}}$此时做导数，是对$\frac{x}{2}$做的导数，而不是对x做的导数。**在这地方摔过两次了（提高篇P238例题10(4)）
      - （√）$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x-\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots, x\in(-\infty,+\infty)$
      - $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1-\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}+\cdots, x\in(-\infty,+\infty)$
      - $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} = x-\frac{x^2}{2}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}+\cdots, x\in(-1,1]$
      - $-\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$
      - $(1+x)^a = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!}x^n = 1+ax+\frac{a(a-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!}x^n+\cdots, x\in(-1,1)$（特别地对于$a=\pm\frac{1}{2}$）
      - 以上前六个展开后面所给的区间均为**收敛域**，即为收敛点的全体；**最后一个仅为收敛区间**，它的收敛域要视a的具体情况而定(教材P289)

- **傅里叶级数**
  - 三角级数
  - **三角函数系的正交性**
    - 三角函数系中**任何两个不同函数积在**$[-\pi,\pi]$**上的积分为零**，即

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos n\pi \mathbf{d}x = 0$$
$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin n\pi \mathbf{d}x = 0$$
$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cos mx \mathbf{d}x = 0$$
$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\sin mx \mathbf{d}x = 0$$
$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cos mx \mathbf{d}x = 0$$

    - 两个相同函数的乘积在$[-\pi,\pi]$上的积分不为零

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 n\pi \mathbf{d}x = \pi$$
$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 n\pi \mathbf{d}x = \pi$$

  - **函数展开成傅里叶级数**
    - **傅里叶系数公式**
      - 称

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx \mathbf{d}x, n=0,1,2,3,\cdots$$
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx \mathbf{d}x, n=1,2,3,4,\cdots$$

      ，为$f(x)$的傅里叶系数
      - 则$f(x)$的**傅里叶级数**为

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

    - **收敛定理**（迪利克雷充分条件）
      - 迪利克雷定理(充分条件)：设$f(x)$是以2π为周期的周期函数，且在$[-\pi,\pi]$上满足
        - 除有限个第一类间断点外都连续
        - 只有有限个极限点
      - 则$f(x)$的傅里叶级数在$[-\pi,\pi]$上处收敛，且收敛于
        - $f(x)$，当x为$f(x)$的连续点
        - $\frac{f(x^-)+f(x^+)}{2}$，x为$f(x)$的间断点
        - $\frac{f(-\pi^+)+f(\pi^-)}{2}$，当$x=\pm\pi$
  - **正弦级数和余弦级数**
    - 当$f(x)$为奇函数，傅里叶级数只有正弦级数

    - 当$f(x)$为偶函数，傅里叶级数只有余弦级数
    - 定义在$[0,\pi]$上的函数展开为正弦级数和余弦级数
        - 在$[-\pi,\pi]$上作**奇延拓**展开为正弦级数（因为奇偶性，在实际积分求傅里叶系数时积分区间还是$[0,\pi]$）
        - 在$[-\pi,\pi]$上作**偶延拓**展开为余弦级数（因为奇偶性，在实际积分求傅里叶系数时积分区间还是$[0,\pi]$）
- **周期为$2l$的函数的傅里叶展开**
    - 第一步：计算傅里叶系数a_n, b_n，并**写出傅里叶级数**
    - 第二步：利用收敛性定理**确定**其傅里叶级数在$[-l,l]$上**收敛的情况**
    - 在$[-l,l]$上展开

$$
a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\mathbf{d}x, n=0,1,2,3,\cdots \\
b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathbf{d}x, n=1,2,3,4,\cdots \\
\left\{C = x|f(x) = \frac{1}{2}\left[f(x^-)+f(x^+)\right]\right\}
$$

    - 在$[-l,l]$上奇偶函数的展开
        - $f(x)$为奇函数

$$
a_n = 0 \\
b_n = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathbf{d}x, n=1,2,3,4,\cdots
$$

        - $f(x)$为偶函数

$$
a_n = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\mathbf{d}x, n=0,1,2,3,\cdots \\
b_n = 0
$$

        - 有时候能够通过题目给出的$a_n b_n$形式来推断$f(x)$的**周期**和**奇偶性**
        - 如果对$f(x), x\in(5,15)$，展开成以10为周期的傅里叶级数，其实就直接带进去算$a_n b_n$，$l=5$，积分上界为5，下届为15
    - 在$[0,l]$上展开为**正弦级数**或展开为**余弦级数**
        - 展开为**正弦级数**

$$
a_n = 0 \\
b_n = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathbf{d}x, n=1,2,3,4,\cdots \\
f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l} \quad (x\in C)
$$

        - 展开为**余弦级数**

$$
a_n = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\mathbf{d}x, n=0,1,2,3,\cdots \\
b_n = 0 \\
f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l} \quad (x\in C)
$$

- **一些结论**(教材P320)
    - $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$
    - $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$
    - $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2} = \frac{\pi^2}{24}$
    - $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$