第二第三章 导数及其应用

第二章 导数与微分

- **导数的概念**
  - **导数的定义**
    - **定义**：函数在**一点处**的导数及导函数
      - 设函数$y=f(x)$在点x_0的**某个领域内有定义**（不需要去心），当自变量x在x_0处取得增量Δx（点$x+\Delta x$仍在该领域内）时，相应地，因变量取得增量$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x_0)$；如果$\Delta y$与$\Delta x$之比当$\Delta x\to 0$时的极限存在，那么称函数$y=f(x)$在点$x_0$处**可导**，并称这个极限为函数$y=f(x)$在点$x_0$处的**导数**，即$f^{'}(x_0)=\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$
      - 函数$f(x)$在点x_0处**可导**也可说成函数在点x_0**具有导数**或**导数存在**
      - 如果函数$f(x)$在一个开区间I内的每点处都可导，那么就称函数$f(x)$在开区间I内可导。这时，对于任意的$x\in I$，都对应着$f(x)$的一个确定的导数值。这样就构成一个新的函数$f^{'}(x)$，也是原来函数$f(x)$的**导函数**，即$f^{'}(x)=\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$(其中$x$是常量，$\Delta x,h$是变量)
    - **导数与导函数的关系**
      - 导函数$f^{'}(x)$可简称为$f(x)$的导数
      - 函数$f(x)$在某点x_0处的导数$f^{'}(x_0)$就是导函数$f^{'}(x)$在点$x=x_0$处的函数值
      - $f(x)$在I上处处可导
        - $\Leftrightarrow f^{'}(x)$在I上处处有定义（只是单纯的每一个x_0对应一个函数值$y_0^{'}$）
        - $\times\Leftrightarrow f^{'}(x)$在$I$上处处有极限
        - $\times\Leftrightarrow f^{'}(x)$在$I$上处处连续
    - **区别定义法和公式法**（李正元P48评注）
      - **一般函数的公式法和定义法**
        - **定义法**
          - 只需要考虑$f(x)$在$x=x_0$的邻域上是否有定义
        - **公式法**
          - 必须考虑：$f^{'}(x)$在$x=x_0$的去心邻域上是否有定义（$f(x)$在$x=x_0$的去心邻域上是否可导）
          - 必须考虑：$f^{'}(x)$在$x=x_0$处是否连续
          - 满足以上条件才能用定义法；或者用了公式法就默认了以上条件成立
      - **分段函数上的定义法和公式法**（李正元P41P50）
        - 例如$\begin{cases}g(x),x<x_0\\h(x),x\geq x_0\end{cases}$
        - 分段区间上不包括分段点x_0，就是求$g^{'}(x_0)$
          - 定义法（武）
          - 公式法+极限（李正元P50）
        - 分段区间上包括分段点x_0，就是求$h^{'}(x_0)$
          - 公式法(因为x_0已经在定义域中了)
        - 而要算某一区间段上的**导函数**，可以直接用公式法得到，不用定义法（定义法仅用于求值）
        - (李正元P50上的例2.30分段函数求导，用了李正元给出的方法+武忠祥教的基本方法)
    - **左右导数**
      - **定义**
        - $f(x)$在点x_0处可导的**充分必要条件**是函数$f(x)$的左右极限存在且相等，即$f_{-}^{'}(x_0)=f_{+}^{'}(x_0)$
        - 左导数，右导数统称为单侧导数
        - 如果函数$f(x)$在开区间(a,b)内可导，且$f_{+}^{'}(a),f_{-}^{'}(b)$都存在，那么称$f(x)$在闭区间$[a,b]$上可导
      - 公式法？定义法？（看上面的分度函数求导）
      - **联系**：函数在某点处**连续**的充要条件$\rightarrow$函数在某点处**可导**的充要条件
      - （这个左右导数的应用在李正元P41P50的分段函数中体现出来了
  - **导数的几何意义**
    - 直线的点斜式方程$y-y_0=f^{'}(x_0)(x-x_0)$
  - **函数可导性与连续性的关系**
    - 可导——>连续
    - 非连续——>非可导
    - 导数与导函数的关系结合洛必达法则
      - 洛必达法则使用准则
        - $g(x),f(x)$在$x=a$处的**去心邻域可导**
        - $\Leftrightarrow g^{'}(x),f^{'}(x)$在$x=a$处的**去心邻域有定义**
        - $\Leftrightarrow \lim_{x\to a}g^{'}(x),\lim_{x\to a}f^{'}(x)$**极限都存在**
      - n阶可导
        - n阶有定义
        - 而不能说明n阶在某点处极限存在or连续
        - 所以洛必达只能执行到n-1阶
      - n阶连续可导
        - n阶有定义，且n阶上连续
        - 所以能够说明n阶在某点极限存在and连续
        - 所以洛必达可用执行到n阶
- **函数的求导法则**

- 函数的和、差、积、商的求导法则
- **反函数的求导法则**
    - 简单来说，反函数的导数就是直接函数导数的倒数
    - 从几何上理解，$\tan\beta = \frac{1}{\tan\alpha}$
- 复合函数的求导法则
- **隐函数的求导法则**
    - 相关变化率
- 参数方程的求导法则
- 基本求导法则
- **导数公式法**
    - 常数和基本初等函数的导数公式
    - 函数的和差积商求导法则
    - 反函数的求导法则
    - 复合函数的求导法则
    - 对数求导法则
- **导数不存在的点**
    - 先用公式法求导
    - 对求导结果写出定义域，找出无定义的点
    - 这些点就是导数不存在的点

- **高阶导数**
    - 如果函数$f(x)$在x_0处具有n阶可导，那么在x_0的某领域$f(x)$必有一切低于n阶的导数
    - $f(x)$n阶可导，则$f^{(n-1)}(x)$在x处连续
    - **四个高阶导数公式**
        - $(e^x)^{(n)} = e^x$
        - $\sin(x)^{(n)} = \sin(x + n\cdot\frac{\pi}{2})$
        - $\cos(x)^{(n)} = \cos(x + n\cdot\frac{\pi}{2})$
        - $\ln(1+x)^{(n)} = (-1)^{(n-1)}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$
        - $(x^n)^{(n)} = n(n-1)(n-2)\dots 321 = n!$
        - $(x^n)^{(n+k)} = 0$
        - $(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}$
- **函数的微分**
    - **微分的定义**：
        - $\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = A\Delta x + \alpha(\Delta x)$
        - 而$A\Delta$叫做函数$y = f(x)$在点x_0相应于自变量增量Δx的微分，记作$\mathbf{d}y = A\Delta x$
        - 函数$f(x)$在点x_0可微的充分必要条件是函数$f(x)$在点x_0可导，且当$f(x)$在点x_0可微时，有$\mathbf{d}y = f^{'}(x_0)\Delta x$
    - **微分的几何意义**
        - 有$\Delta y = \mathbf{d}y + o(\mathbf{d}y)$，其中$\Delta y$是原函数纵坐标的变化，而$\mathbf{d}y$是过点切线上纵坐标的变化；一般两者近似；而$\Delta x = \mathbf{d}x$
    - **切线方程**
    - **法线方程**
    - **基本初等函数的微分公式与微分运算法则**

第三章 微分中值定理与导数的应用

- **微分中值定理**
    - **费马定理**：设函数$f(x)$在点x_0的某领域$U(x_0)$内有定义，并且在x_0处可导，如果对任意的$x\in U(x_0)$，有$f(x)\le f(x_0)\quad(\text{或}f(x)\ge f(x_0))$，那么$f^{'}(x_0) = 0$
    - **罗尔定理**：如果函数$f(x)$满足
        - 在闭区间$[a,b]$上连续
        - 在开区间(a,b)内可导
        - 在区间端点处的函数值相等，即$f(a) = f(b)$
        - 那么在(a,b)内至少有一点$\epsilon(a<\epsilon<b)$，使得$f^{'}(\epsilon) = 0$
    - **拉格朗日中值定理**：如果函数$f(x)$满足
        - 在闭区间$[a,b]$上连续
        - 在开区间(a,b)内可导
        - 那么在(a,b)内至少有一点$\epsilon(a<\epsilon<b)$，使得$f(b)-f(a) = f^{'}(\epsilon)(b-a) = 0$
        - 几何意义：如果连续曲线$f(x)$的弧AB上除端点外处处具有不垂直于x轴的切线，那么这弧上至少有一点C，使得曲线在点C处的切线平行于弦AB
        - 推论
            - 有限增量定理：$\Delta y = f^{'}(x+\theta\Delta x)\cdot\Delta x$
        - 用拉格朗日中值定理证明的一个经典不等式：$\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x(x>0)$
        - 给定条件可以转化为罗尔：$f(a) = f(b)$
    - **柯西中值定理**：如果函数$f(x)$及$F(x)$满足
        - 在闭区间$[a,b]$上连续
        - 在开区间(a,b)内可导
        - 对任一$x\in(a,b)$，$F^{'}(x)\ne 0$
        - 那么在(a,b)内至少有一点ϵ，使等式$\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)} = \frac{f^{'}(\epsilon)}{F^{'}(\epsilon)}$成立
        - 取$F(x) = x$，则可转化为拉哥

- **三个中值定理的关系**
  - 费马——>罗尔
  - 罗尔——>拉哥
  - 罗尔——>柯西
- **洛必达法则**
  - 略
  - 拉哥——>洛必达（？？）
- **泰勒中值定理**
  - **定理1**：局部
    - 如果函数$f(x)$在x_0处具有n阶导数，那么存在x_0的一个**小邻域**，对于该邻域内的任一x，有 $f(x)=f(x_0)+f^{'}(x_0)(x-x_0)+\frac{f^{''}(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)$，其中$R_n(x)=o((x-x_0)^n)$。将此称为函数$f(x)$在$x_0$处的**带佩亚诺余项的n次泰勒多项式**
    - 应用:
      - 研究$f(x)$的局部，如极值、极限
  - **定理2**：整体
    - 如果函数$f(x)$在x_0的某个领域$U(x_0)$内具有(n+1)阶导数，那么对任一$x\in U(x_0)$，有 $f(x)=f(x_0)+f^{'}(x_0)(x-x_0)+\frac{f^{''}(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)$，其中$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\epsilon)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$，其中$\epsilon$是介于$x,x_0$之间。这个就是**带拉格朗日余项的**
    - 应用
      - 研究$f(x)$的整体，如最值、不等式
  - **共同点**：多项式逼近原函数；$f(x)$与$f^{(n)}(x)$的关系
  - **不同点**：使用条件不同；余项；定理1在一个小邻域内，定理2在一个大邻域内
  - **麦克劳林公式**：将定理2中的$x=0$，带的是拉哥余项
  - **常用六个麦克劳林公式**
    - $$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots,x\in(-\infty,+\infty)\begin{cases}R_n(x)=o(x^n)\\R_n(x)=\frac{1}{(n+1)!}e^{\theta x}x^{n+1}\end{cases}$$
    - $$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^nx^{2n+1}}{(2n+1)!}=x-\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{(-1)^nx^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots,x\in(-\infty,+\infty),\begin{cases}R_{2n}(x)=o(x^{2n})\\R_{2n}(x)=(-1)^n\frac{\cos\theta x}{2n+1!}x^{2n+1}\end{cases}$$
    - $$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^nx^{2n}}{(2n)!}=1-\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{(-1)^nx^{2n}}{(2n)!}+\cdots,x\in(-\infty,+\infty)\begin{cases}R_{2n+1}(x)=o(x^{2n+1})\\R_{2n}(x)=(-1)^{n+1}\frac{\cos\theta x}{2n+2!}x^{2n+2}\end{cases}$$
    - $$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}=x-\frac{x^2}{2}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}+\cdots,x\in(-1,1]\begin{cases}R_n(x)=o(x^n)\\R_n(x)=\frac{(-1)^nx^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}\end{cases}$$
    - $$(1+x)^a=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!}x^n=1+ax+\frac{a(a-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!}x^n+\cdots,x\in(-1,1)$$
- **函数的单调性、极值以及凹凸性**
  - **函数单调性的判定法与驻点**
    - **单调性的由来以及定义**
      - 通过拉格朗日中值定理推导出导数正负可以决定单调性
    - **单调性的判定**：通过导数正负判定
    - **驻点的定义**：通常称导数等于零的点为函数的驻点，或稳定点、临界点
    - **计算函数的单调性要划分函数的定义区间**
      - 驻点
      - 导数不存在的点
      - （这里很多好地引出了极值点的必要条件和充分条件
  - **曲线凹凸性与拐点**
    - **凹凸性的定义**
      - 凹：$f(\frac{x_1+x_2}{2})<\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$
      - 凸：$f(\frac{x_1+x_2}{2})>\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$
    - **凹凸性的判定**（定理2）
      - 设$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内具有一阶和二阶导数，那么
      - 若在(a,b)内$f^{''}(x)>0$，则$f(x)$在$[a,b]$上的图形是凹的
      - 若在(a,b)内$f^{''}(x)<0$，则$f(x)$在$[a,b]$上的图形是凸的
    - **拐点的定义**（稍微地区别于驻点）
      - 如果曲线$y=f(x)$在经过点x_0时，曲线的凹凸性发生改变，那么就称点$(x_0,f(x_0))$为曲线的拐点，因此拐点就是$f^{''}(x_0)=0$和二阶导不存在的点
    - **找出拐点的方法**
      - 求$f^{''}(x)$
      - 令$f^{''}(x)=0$，解出这个方程在区间I内的实根，并求出在区间I内$f^{''}(x)$不存在的点
      - 对于(2)中求出的每一个实根或二阶导数不存在的点x_0，检查$f^{''}(x)$在x_0左右两侧邻近的符号，那么当两侧的符号相反时，点$(x_0,f(x_0))$是拐点，当两侧的符号相等时，点$(x_0,f(x_0))$不是拐点

- **类似于极值点的找出驻点的方法**
  - 拐点的必要条件（？）
  - **拐点的第一充分条件**
    - 设$f'(x)$在$x=x_0$**处连续**，在$x=x_0$的去心邻域内可导
    - 若在$x=x_0$的左侧邻域内$f''(x)>0$，右侧邻域内$f''(x)<0$，则$(x_0,f(x_0))$为拐点
    - 若在$x=x_0$的左侧邻域内$f''(x)<0$，右侧邻域内$f''(x)>0$，则$(x_0,f(x_0))$为拐点
  - **拐点的第二充分条件**
    - $f(x)$三阶可导，$f''(x_0)=0$
    - 若$f'''(x_0)\neq 0$，则点$(x_0,f(x_0))$是曲线上的拐点
    - 若$f'''(x_0)=0$，则不能说明点$(x_0,f(x_0))$是否是曲线上的拐点
- **函数的极值及其求法**
  - **极值点的定义**（注意）
    - 设函数$f(x)$在点x_0的某邻域$U(x_0)$内有定义，如果对于去心邻域内任一x，有$f(x)<f(x_0)$ （或$f(x)>f(x_0)$），那么就称$f(x_0)$是函数$f(x)$的一个极大值（或极小值）
    - 极值只能在开区间(a,b)上取得，不能在端点处取得极值
    - 极值点：$f'(x_0)=0$或$f'(x)$不存在
  - **极值点的必要条件**：设函数$f(x)$在x_0处可导，且在x_0处取得极值，则$f'(x_0)=0$
  - **极值点的第一充分条件**
    - 设$f(x)$在$x=x_0$**处连续**，在$x=x_0$的去心邻域内可导
    - 若在$x=x_0$的左侧邻域内$f'(x)>0$，右侧邻域内$f'(x)<0$，则$f(x_0)$为极大值
    - 若在$x=x_0$的左侧邻域内$f'(x)<0$，右侧邻域内$f'(x)>0$，则$f(x_0)$为极小值
  - **找出极值点和相应的极值**
    - 求出导数$f'(x)$
    - 求出$f(x)$的全部驻点与不可导点（在判断单调性时也要给出不可导点）
    - 考察$f''(x)$的符号在每个驻点或不可导点的左、右邻近的情形，以确定该店是否为极值点；如果是极值点，进一步判断是极大值点还是极小值点
    - 求出各极值点的函数值，就得函数$f(x)$的全部极值
  - **极值点的第二充分条件**
    - 设$f(x)$在$x=x_0$处存在二阶导数$f'(x_0)=0,f''(x_0)\neq 0$
    - (1) 若$f''(x_0)<0$，则$f(x_0)$为极大值（凸）
    - (2) 若$f''(x_0)>0$，则$f(x_0)$为极小值（凹）
    - 通过**函数的局部保号性**得到证明
- **最大最小值**
  - **计算步骤**
    - 求出$f(x)$在(a,b)内的驻点及不可导点（一般函数的尖角都是不可导点）
    - 计算$f(x)$在上述驻点，不可导点处的函数值及$f(a),f(b)$
    - 比较（2）中诸值的大小，其中最大得便是$f(x)$在$[a,b]$上的最大值，最小值便是$f(x)$上的最小值
  - 当在区间中有**唯一驻点，且是极值点时**，就是**唯一**极值点——>即使区间的**最值点**

- **曲率**
  - **弧微分**：$\mathbf{d}s=\sqrt{1+y'^2}\mathbf{d}x$
  - **曲率及其计算公式**：$K=\dfrac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}$
  - **曲率圆与曲率半径**：$\rho=\dfrac{1}{K}$
- **渐近线**
  - **水平渐近线**
    - 若$\lim_{x\to+\infty}f(x)=b_1$，则$y=b_1$是一条水平渐进线；若又有$\lim_{x\to-\infty}f(x)=b_2$，则$y=b_2$是一条水平渐进线（若$b_1=b_2$，则当然只能算作一条）
  - **铅直渐近线**
    - 若存在x_0，使$\lim_{x\to x_0^-}f(x)=\infty$（或$\lim_{x\to x_0^+}f(x)=\infty$），则$x=x_0$是一条铅直渐近线
    - 这里得x_0先由观察法得，一般考虑分母为零处、对数得真数为零处等
  - **斜渐近线**
    - $y=ax+b$是曲线$y=f(x)$的一条斜渐进线的充要条件是$\lim_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=a$，$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-ax)=b$。这里$x\to+\infty$也可以改成$x\to-\infty$。若$a=0$上式成立，即为水平渐进线