第八章 向量代数与空间几何

- **向量及其线性运算**
  - **向量（说起向量必须有这个概念）**
    - 有大小
    - 有方向
  - **向量的模**
    - $|\mathbf{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$
    - 是一个数值
  - **向量的坐标及坐标表述**
    - 向量a在直角坐标系上的投影xyz叫做向量a的坐标，记为
    $$\mathbf{a} = \{a_x, a_y, a_z\} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}$$
    ，模为$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$
    - 投影角度用的是方向余弦的吧
  - **零向量**
    - 模为0的向量为零向量$\mathbf{0}$，它的方向可以是任意的
  - **单位向量**
    - **模为1的向量叫做单位向量**
      - 所以不管向量的内容是什么，只要这个向量的模为1，这就是单位向量
      - 因此，后面会引入**方向余弦**的概念
    - 通常用$\mathbf{a}^o$表示与a**同方向**的单位向量
    $$\mathbf{a}^o = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \{\frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}, \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}, \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}\}$$
    - 每一个向量都有单位向量，它们模相同为1，但是方向不一样
  - **两向量夹角**
    - 两向量夹角的范围$[0, \pi]$
    - 两向量同向：0
    - 两向量相反：π
  - **向量a的方向余弦**
    - **总体来说，方向余弦就是单位向量，两者相互转换**
    - 对非零向量$\mathbf{a}$，它在坐标轴上的坐标为$\mathbf{r} = (x, y, z)$，由于x是向量在x轴的投影，则有
    $$\cos\alpha = \frac{x}{|\mathbf{r}|}$$
    ，同理，其他的方向角有
    $$\cos\beta = \frac{y}{|\mathbf{r}|}, \cos y = \frac{z}{|\mathbf{r}|}$$
    - 从而有
    $$\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos y\} = \{\frac{x}{|\mathbf{r}|}, \frac{y}{|\mathbf{r}|}, \frac{z}{|\mathbf{r}|}\} = \frac{1}{|\mathbf{r}|}(x, y, z) = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} = \mathbf{e}_r$$
    - 所以，**以向量r的方向余弦为坐标的向量就是于r同方向的单位向量e**
    - 反过来说，其实直接求解一个非零向量的**单位向量**，计算的结果就是各个**方向余弦**的值
  - **向量a的投影**
    - 总体来说，**向量的坐标就是投影**，投影就是向量在坐标系中的坐标
    - 但是题目会考察**某个向量在某个向量上的投影**，这是难点
    - 一般地，设定点O及单位向量e确定u轴，任给向量$\mathbf{r}$，作$OM = \mathbf{r}$，再过点M作与u轴垂直的**平面**交u轴于点M'（点M'叫做点M在u轴上的投影），则向量OM'称为向量$\mathbf{r}$在u轴上的分向量。设$OM' = \lambda\mathbf{e}$，则数λ称为向量$\mathbf{r}$在u轴上的投影，记作$Prj_u\mathbf{r}$或者$(\mathbf{r})_u$
      - 因此，这里的λ就是对应的x, y, z
      - 性质
        - $Prj_u\mathbf{r} = |\mathbf{r}|\cos\theta$（即$(\mathbf{r})_u = |\mathbf{r}|\cos\theta$），这里的$\theta$就是向量$\mathbf{r}$与$u$轴的夹角
        - $Prj_u(\mathbf{r} + \mathbf{m}) = Prj_u\mathbf{r} + Prj_u\mathbf{m}$（即$(\mathbf{r} + \mathbf{m})_u = (\mathbf{r})_u + (\mathbf{m})_u$）
        - $Prj_u\lambda\mathbf{r} = \lambda Prj_u\mathbf{r}$（即$(\lambda\mathbf{r})_u = \lambda(\mathbf{r})_u$）
    - 前面的方向余弦是，知道**投影**和**向量**求**方向角**
    - 这里的投影是，知道**方向余弦**和**向量**求**投影**
      - 所以某求向量a到向量b上的投影，先找出两向量的方向角和方向余弦，然后使用性质1求投影
      - 几何就是作过向量a的平面垂直于向量（数轴）b，交点就是投影点。
  - **向量的运算**
    - **加减运算**
      - 几何表示：$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{c}$箭头由减数指向被减数
      - 代数表示：$\mathbf{a} \pm \mathbf{b} = \{a_x \pm b_x, a_y \pm b_y, a_z \pm b_z\}$
    - **数乘运算**
      - 几何表示：$\lambda\mathbf{a}$是一个向量，$|\lambda\mathbf{a}| = |\lambda||\mathbf{a}|$，当$\lambda > 0$时$\lambda\mathbf{a}$与a同向；当$\lambda < 0$时$\lambda\mathbf{a}$与a反向；否则为零向量
      - 代数表述：$\lambda\mathbf{a} = \{\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z\}$

- **数量积**（点积，内积）
  - 几何表示：$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\theta=|\mathbf{a}|Prj_{\mathbf{a}}\mathbf{b}$, 其中$\theta=\langle\mathbf{a},\mathbf{b}\rangle$
  - 代数表示：$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$
  - 运算规律
    - 交换律：$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}$
    - 分配律：$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{c})=\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}$
    - 与数乘的结合率：$(\lambda\mathbf{a})\cdot\mathbf{b}=\lambda(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})$
  - 数量积在几何上的应用
    - 求向量的模：$|\mathbf{a}|=\sqrt{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}}\Leftrightarrow\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}=|\mathbf{a}|^2$
    - 求两个向量的夹角的余弦：$\cos\theta=\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|}$，其中$\theta=\langle\mathbf{a},\mathbf{b}\rangle$
      - **骚**：如果是要求两向量之间的角平分线，不要算两向量之间的夹角。直接计算两向量的单位向量，然后单位向量相加就是角平分线了
    - 判定两**向量垂直**：$\mathbf{a}\perp\mathbf{b}\Leftrightarrow\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=0$
- **向量积**（叉积，外积）
  - 几何表示：$\mathbf{a}\times\mathbf{b}$
  - 模：$|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|=|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\theta$，其中$\theta=\langle\mathbf{a},\mathbf{b}\rangle$
  - 方向：$\mathbf{a}\times\mathbf{b}$**同时垂直于**$\mathbf{a}$和$\mathbf{b}$，且符合**右手法则**
  - 代数表示：

$$\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\end{vmatrix}=\mathbf{a}\times\mathbf{b}$$

  - 运算规律
    - 交换律：$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=-(\mathbf{b}\times\mathbf{a})$
    - 分配率：$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}+\mathbf{c})=\mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{a}\times\mathbf{c}$
    - 与数乘的结合率：$(\lambda\mathbf{a})\times\mathbf{b}=\mathbf{a}\times(\lambda\mathbf{b})=\lambda(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$
  - 向量积在几何上的应用
    - **求同时垂直于a和b的向量**：$\mathbf{a}\times\mathbf{b}$
    - 求以$\mathbf{a}$和$\mathbf{b}$为邻边的**平行四边形面积**：$S=|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|$
    - **判定两向量平行**：$\mathbf{a}\parallel\mathbf{b}\Leftrightarrow\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\mathbf{0}$（这是因为两向量的夹角为0或pi，sin0=0）
- **混合积**
  - 定义
    - 称$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}$为三个矢量的混合积，记作$(\mathbf{abc})$，有的书写成$[\mathbf{abc}]$
    - 具体计算方式是

$$\begin{vmatrix}a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\\c_x&c_y&c_z\end{vmatrix}=(\mathbf{abc})$$

  - 运算规律
    - $\mathbf{abcab}\cdots$
    - 轮换对称性：$(\mathbf{abc})=(\mathbf{bca})=(\mathbf{cab})$
    - 两向量互换，混合积变号：$(\mathbf{abc})=-(\mathbf{acb})=-(\mathbf{cba})=-(\mathbf{bac})$
  - 混合积在几何上的应用
    - 求以$\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$为棱的**平行六面体体积**：$V_{平行六面体}=|(\mathbf{abc})|$
      - **三向量构成的四面体体积是平行六面体体积的六分之一**
    - **判定三向量共面**：$\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}共面\Leftrightarrow(\mathbf{abc})=0$
      - 同时垂直于ab的向量也垂直了c，所以abc共面

- **向量的位置关系**
  - **垂直**
  - **平行**
    - 定理1：设向量$\mathbf{a}$不是$\mathbf{0}$，则向量$\mathbf{b}$平行于$\mathbf{a}$的**充分必要条件**是：存在**唯一的**实数λ，使$\lambda\mathbf{a}=\mathbf{b}$
    - 这个定理也是建立数轴的理论依据（教材P6，有点意思的）
  - **三向量共面**
- **平面及其方程**
  - **平面方程**
    - **一般方程**

$$Ax+By+Cz+D=0$$

      ，其中$\mathbf{n}=\{A,B,C\}$为平面的**法向量**，其中ABC不全为0
    - **点法式方程**

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

      ，其中(x_0,y_0,z_0)为平面上的任意取到的一点，其中$\mathbf{n}=\{A,B,C\}$为平面的**法向量**，其中ABC不全为0。一般式就是点法式展开得到的
    - **截距式方程**（通过一般式推导的）

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

      ，其中abc分别为**平面在三个坐标面上的*截距*且均**不为零。
    - 如果平面通过xyz轴其中一个，那么说明平面的法向量垂直于这个轴。因此，法向量在此轴上的投影为0，对应的法向量ABC其中一个为0，同时平面通过原点，一般式的D也为0

- **建立平面方程的方法**
  - 知道平面过点$A(x_0,y_0,z_0)$，且平面得**法向量**，运用**点法式**建立平面方程
  - 知道平面过点$A(x_0,y_0,z_0)$，且知道与平面相**平行**的**两个不共线的向量$\mathbf{ab}$**。设$P(x,y,z)$为平面上任一点，三向量共面$(PA\mathbf{ab})=0$，也就是

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}=0$$

    （其实"与平面相**平行**的**两个不共线的向量$\mathbf{ab}$**"也包括在平面内的向量$\mathbf{ab}$）
  - 其实上述的方法也可也直接计算两向量的叉积，这个叉积就是所求平面的法向量了，然后用点法式就行。（**此方法和上述方法等价**）（**只要平面法向量垂直了两个向量，这个法向量就定了**）
- **空间直线及其方程**
  - **直线方程**
    - **一般式方程**:

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$$

      该直线为**两平面的交线**，这里假设这里**两平面的法向量不共线**。**平面相交成直线，那么直线的方向向量垂直于两平面的法向量**。
    - **对称式方程**：（**直线上两点的向量与方向向量平行**）

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$$

      ，其中(x_0,y_0,z_0)为直线上的任意取定的一点，$\mathbf{s}=\{l,m,n\}\neq\mathbf{0}$为**直线的方向向量**
    - **参数式方程**：（通过对称式方程推导）（用于求解**直线在平面上的交点**）

$$\begin{cases} x=x_0+lt, \\ y=y_0+mt, \\ z=z_0+nt \end{cases}$$

      ，其中(x_0,y_0,z_0)为直线上的任意取定的一点，$\mathbf{s}=\{l,m,n\}\neq\mathbf{0}$为**直线的方向向量**
- **平面与直线间的位置关系**
  - **平面与平面间的位置关系**
    - 设平面$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$，$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$
      - **平面平行**⇔

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$$

        ，其中若某分母为零，理解对应的分子也为零
      - **平面垂直**⇔

$$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$$

      - **平面之间的（正向）夹角**θ由公式确定：

$$\cos\theta=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}},\left(0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}\right)$$

  - **直线与直线间的位置关系**
    - 设两直线

$$\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1}\text{和}\frac{x-x_1}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}$$

      - **两直线平行**:

$$\frac{l_1}{l_2}=\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}$$

        ，其中若某分母为零，理解对应的分子也为零。（或者两方向向量的叉积为0）
      - **两直线垂直**：$l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0$
      - **两直线之间的（正向）夹角**θ由公式确定：

$$\cos\theta=\frac{|l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2|}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}\sqrt{l_2^2+m_2^2+n_2^2}},\left(0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}\right)$$

  - **平面与直线的位置关系**
    - 设

$$\text{平面}P:Ax+By+Cz+D=0\text{，直线}L:\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$$

      - **平面P平行于直线L**：$Al+Bm+Cn=0$
      - **平面P垂直于直线L**：

$$\frac{A}{l}=\frac{B}{m}=\frac{C}{n}$$

        ，其中若某分母为零，理解对应的分子也为零。
      - **直线L与平面P的夹角**θ由公式确定：

$$\sin\theta=\frac{|Al+Bm+Cn|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{l^2+m^2+n^2}},\left(0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}\right)$$

- **直线与平面的夹角**θ
  - 直线与平面相交，直线在平面上的**投影直线**与**直线**的**夹角**θ，就是**直线与平面的夹角**θ
  - 那么，如果平面的**法向量**(A,B,C) 已知，直线的**方向向量**(m,b,p)已知，直线与平面的**夹角**和方向向量与平面法向量的**夹角**为

$$\theta=|\frac{\pi}{2}-(\mathbf{s},\mathbf{n})|\Rightarrow\sin\theta=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}}$$

  - 而直线l_1在某一平面P_1上的投影直线m，是通过直线l_1的平面P_2垂直于平面P_1得到的
- **直线与平面相交**
  - 写出直线的参数方程
  - 带入直线的参数方程到平面中，得到直线与平面的交点
- **直线在平面上的投影直线**
  - 找出直线的平面束方程
  - 通过直线的平面要**垂直**已知平面
  - 两平面相交（联合两平面方程）就是投影的直线
- **直线与直线相交**
  - 过某一**点**，作与一直线l_1相交的**平面**P
  - 求解直线l_1与平面P的**交点**
  - **两点连线形成一条直线**l_2，相交于直线l_1
  - （骚）其实**两直线相交**，就说明**两直线共面**了，如果一直线l**与两**不共面不平行的直线mn**相交**，那么**直线**l**与**m**所处的平面**与**直线**l**与**n**所处的平面**相交的**相交线**就是直线l
    - 求lm共处的平面就是用三向量共面。如，给定

$$l:\mathbf{s}_l=(l_x,l_y,l_z)$$
$$m:\frac{x-x_0}{p}=\frac{y-y_0}{q}=\frac{z-z_0}{r}$$

      ，则三向量共面确定平面方程（在确立平面方程中就提过的）

$$\begin{vmatrix}x-x_0 & y-y_0 & z-z_0\\ p & q & r\\ l_x & l_y & l_z\end{vmatrix}=0$$

    - 同理在求ln共处的平面也是使用三向量共面的方法
    - 最后联合两个平面方程，就是所要求的直线l
- **平面束**方程的计算
  - 设某直线l由平面方程组所确定

$$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$$

    ，要计算通过这个直线的所有平面（不包括平面$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$），平面束方程为

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$$

    ，整理方程，根据条件算出未知量λ就能确定满足条件的那个过直线的平面（此方法通常用于计算**直线在平面下的投影直线**）
  - **我记得除了平面束以外，对于曲线，还可以转化成为曲线的参数方程**
  - 如果直线方程是给定为

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$$

    ，则过这条直线的平面束方程为

$$\frac{x-x_0}{l}-\frac{z-z_0}{n}+\lambda(\frac{y-y_0}{m}-\frac{z-z_0}{n})=0$$

    有点意思的
- 点(x_0,y_0,z_0)到平面$Ax+By+Cz+D=0$的**距离公式**

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

- 点(x_0,y_0,z_0)到直线$\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}$的**距离公式**

$$d=\frac{|\{x_1-x_0,y_1-y_0,z_1-z_0\}\times\{l,m,n\}|}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$$

- 两不相交（平行）**直线间**的距离公式
  - 必须知道两直线的方向向量s1s2
  - 知道直线1上的点A，直线2上的点B
  -

$$d=\frac{|(\mathbf{s_1}\mathbf{s_2}AB^{\rightarrow})|}{|\mathbf{s_1}\times\mathbf{s_2}|}$$

  - （提高篇P119给出了另一种方法（**多元函数极值的方法**））知道两直线的参数方程为

$$L_1:\begin{cases}x=x_1+lt,\\ y=y_1+mt,\\ z=z_1+nt\end{cases}\quad L_2:\begin{cases}x=x_2+ps,\\ y=y_2+qs,\\ z=z_2+rs\end{cases}$$

    ，两直线不共面，因此也不相交，它之间任一点之间距离的平方为

$$D=(x_1+lt-x_2-ps)^2+(y_1+mt-y_2-qs)^2+(z_1+nt-z_2-rs)^2$$

，分别对t,s求偏导（**其实就是求使距离方程取最小值的t和s**）

$$\frac{\partial D}{\partial t}=0$$
$$\frac{\partial D}{\partial s}=0$$

，联合求解t,s，带入D，开根号，得到两直线在任一点之间的距离

- **曲面及其方程**
  - 旋转面的定义
    - 由一条**平面曲线**绕其平面上的一条直线**旋转一周**所成的**曲面**叫作**旋转曲面**
    - **旋转曲线**称为旋转面的**母线**
    - **定直线**叫做旋转曲面的**轴**
  - 题外话
    - 凡是动的线都称为**母线**
    - 凡是定的线都称为**准线（轴）**
  - **旋转面方程**
    - 设有xOy面上的曲线L（在三维空间中定义第三维度$z=0$）

$$\begin{cases}f(x,y)=0,\\z=0\end{cases}$$

      - 曲线L**绕**x**轴**旋转产生旋转面方程为（x不变，其他的变）

$$f(x,\pm\sqrt{y^2+z^2})=0$$

        ，其中$\pm$号由y所允许的符号而定
      - 曲线L**绕**y**轴**旋转产生旋转面方程为（y不变，其他的变）

$$f(\pm\sqrt{x^2+z^2},y)=0$$

        ，其中$\pm$号由x所允许的符号而定
    - 设有yOz面上的曲线L（在三维空间中定义第三维度$x=0$）

$$\begin{cases}f(y,z)=0,\\x=0\end{cases}$$

      - 曲线L**绕**y**轴**旋转产生旋转面方程为（y不变，其他的变）

$$f(y,\pm\sqrt{z^2+x^2})=0$$

        ，其中$\pm$号由z所允许的符号而定
      - 曲线L**绕**z**轴**旋转产生旋转面方程为（z不变，其他的变）

$$f(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0$$

        ，其中$\pm$号由y所允许的符号而定
      - **解析**
        - 这是因为，在绕z轴旋转时，曲线上任何一个点的z坐标是保持不变的，而点到z轴的距离也是保持不变的，为$|y|$，因此有$\sqrt{x^2+y^2}=|y|$
    - 设有xOz面上的曲线L（在三维空间中定义第三维度$y=0$）

$$\begin{cases}f(x,z)=0,\\y=0\end{cases}$$

      - 曲线L**绕**x**轴**旋转产生旋转面方程为（x不变，其他的变）

$$f(x,\pm\sqrt{y^2+z^2})=0$$

        ，其中$\pm$号由z所允许的符号而定
      - 曲线L**绕**z**轴**旋转产生旋转面方程为（z不变，其他的变）

$$f(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0$$

        ，其中$\pm$号由x所允许的符号而定
  - **柱面及其方程**
    - 柱面定义
      - 平行于定直线并沿着曲线C移动的直线L形成的轨迹叫做柱面
      - **定曲线C**叫做柱面的**准线**
      - **动直线L**叫做柱面的**母线**
      - 所以要确定柱面，就要找到**准线**和**母线**
    - **柱面方程的建立**
      - **1111.** 准线L

$$\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$$

        ，**母线的方向向量**为$\{l,m,n\}$的柱面方程的建立：
        - 先在**准线上任取一个点**(x_0,y_0,z_0)，则过点(x_0,y_0,z_0)的母线方程为

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$$

        - 消去方程组

$$\begin{cases}F(x_0,y_0,z_0)=0\\G(x_0,y_0,z_0)=0\\\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}\end{cases}$$

，中的x_0,y_0,z_0，得到的关于x,y,z的方程即为所求的柱面方程。

  - 具体计算："**准线上任取一个点**(x_0,y_0,z_0)"不是真的要选一点，就直接设点(x_0,y_0,z_0)构建方程组，然后就是解方程了。其中使用最后一个方程拆成

$$\begin{cases}\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}\\\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}\end{cases}$$

就好了，这样就可以计算消除(x_0,y_0,z_0)了（**这里的选取跟前面建立平面束方程一样**）

  - 这个方法有点类似于通过通解求解微分方程的方法，消去任意常数，得到的方程就是微分方程

- **2222**. 准线L

$$\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\\z=z(t)\end{cases}$$

，**母线的方向向量**为$\{l,m,n\}$的柱面方程的建立：

  - （直接用上了直线的参数方程）柱面方程为

$$\begin{cases}x=x(t)+ls\\y=y(t)+ms\\z=z(t)+ns\end{cases}$$

，这里的t,s都是**参数**

- **3333**. 经常用到的是下面的特例
  - 设柱面的准线为xOy平面上的曲线L

$$\begin{cases}f(x,y)=0\\z=0\end{cases}$$

，**母线为平行于z轴的直线**，则该柱面的方程可以直接写成$S:f(x,y)=0$，这里的$z\in(0,\infty)$

- **常见的柱面方程**
  - 圆柱面

$$x^2+y^2=R^2,y^2+z^2=R^2,x^2+z^2=R^2$$

  - 椭圆柱面（z是一直到无穷）

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

  - 抛物柱面（z是一直到无穷）

$$y^2=2px$$

- **常见的二次曲面及图形**
  - 椭球面：把xOz上的**椭圆**（ac谁大，长轴就在哪个轴上）

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

绕z轴旋转，所得曲面称为**旋转椭球面**，方程为

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

，再把旋转椭球面**沿着y轴方向伸缩**$\frac{b}{a}$倍，便得到**椭球面**

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

  - 单叶双曲面：把xOz上的双曲线（x是正项，双曲线落在x轴上）

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

绕z轴旋转，所得曲面称为**旋转单叶双曲面**，方程为

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

，再把旋转单叶双曲面**沿着y轴方向伸缩**$\frac{b}{a}$倍，便得到**单叶双曲面**

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

  - 双叶双曲面（单叶双叶双曲面）：把xOz上的**双曲线**（x是正项，双曲线落在x轴上）

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

绕x轴旋转，所得曲面称为**旋转双叶双曲面**，方程为

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2+z^2}{c^2}=1$$

，再把旋转单叶双曲面**沿着y轴方向伸缩**$\frac{b}{c}$倍，便得到**双叶双曲面**

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

- 椭圆抛物面：把xOz上的**抛物线**

  $$\frac{x^2}{a^2}=z$$

  绕z轴旋转，所得曲面称为**旋转抛物面**，方程为

  $$\frac{x^2+y^2}{a^2}=z$$

  ，再把旋转抛物面**沿着y轴方向伸缩**$\frac{b}{a}$倍，便得到**椭圆抛物面**

  $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2pz(p>0)$$

- 双面抛物面（马鞍面）：

  $$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2pz(p>0)$$

- 二次锥面（椭圆锥面）（与单叶双叶面的区别，在二维上可以理解为二次锥面的二维就是双曲线的**渐进性**）

  $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0\text{或者}z=\sqrt{x^2+y^2}$$

  ，其实，当ab都**相等**的时候，那么就是一个**圆锥面**；但如果ab两**不相等**，就是一个**椭圆锥面。**同时ab都是小于1的

- **空间曲线及其方程**
  - **空间曲线方程常见形式**
    - **参数式**

      $$\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\\z=z(t)\end{cases}$$

    - **一般式**（两曲面方程联立）

      $$\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$$

      - **两曲面方程联立得到的曲线，可以得到曲线的参数方程**（提高篇P191例题4）
      - 先得到某个坐标面上投影的曲线方程，例如先消去z，然后建立投影曲线的xy的参数方程
      - 最后带入公式，求解z的参数方程
      - （注意这里用极坐标是得不到曲线的极坐标方程的）
  - **空间曲线的投影**
    - 设有空间曲线

      $$\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$$

      ，**先通过方程组消去z**，得到$h(x,y)=0$（这是一个柱面），则曲线在xOy面上的投影曲线方程包括在方程

      $$\begin{cases}h(x,y)=0\\z=0\end{cases}$$

      之中。这就是空间曲线在平面上的投影
    - 其实这里的**核心思想**还是通过**柱面**$h(x,y)=0$**与平面**z**垂直相交**得到空间曲线在z上的投影
    - 曲线投影在其他两个面上的方式也是一样的
    - （**注意**）当曲面有涉及球面的时候，曲面相交形成的曲线方程的**变量往往是有限制的**，同样，曲线在某平面上的投影也是有限制的（提高篇P126例题7）
- **空间曲面的参数方程**
  - 首先是由**空间曲线通过旋转得到的**，根据空间曲线的参数方程

    $$\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\\z=z(t)\end{cases}$$

  - 绕z轴旋转所得旋转曲面的方程为

    $$\begin{cases}x=\sqrt{x(t)^2+y(t)^2}\cos\theta\\y=\sqrt{x(t)^2+y(t)^2}\sin\theta\\z=z(t)\end{cases}$$

    ，其中$\alpha\le t\le\beta,0\le\theta\le 2\pi$
  - 又如球面$x^2+y^2+z^2=a^2$可看成zOx面上的半圆周（注意这里的半圆是x上的半圆，贯穿xz的参数）

    $$\begin{cases}x=a\sin\phi\\y=0\\z=a\cos\phi\\0\le\phi\le\pi\end{cases}$$

    绕z轴旋转所得球面方程

    $$\begin{cases}x=a\sin\phi\cos\theta\\y=a\sin\phi\sin\theta\\z=a\cos\phi\\0\le\phi\le\pi\\0\le\theta\le 2\pi\end{cases}$$

，用的就是上面的方程

- **空间曲线在坐标面上的投影**
    - 只说了曲线是一般方程时的做法