第一章 函数与映射

第一章 函数与映射

- **映射与函数**
  - **映射**
  - **函数**
    - **函数的特性**(处理函数问题可以从这四个方面去发散思维)
      - **有界性**：（充要条件）函数$f(x)$在X上既有上界又有下界
        - **有界**：如果存在正数M，使得$|f(x)| \leq M$对于任意$x \in X$都成立，那么称函数$f(x)$在X有界；
          - **上界**：在$f(x)$的定义域内，如果存在数K_1，使得$f(x) \leq K_1$对任意$x \in X$都成立，那么称函数$f(x)$在X有上界
          - **下界**：在$f(x)$的定义域内，如果存在数K_2，使得$f(x) \geq K_2$对任意$x \in X$都成立，那么称函数$f(x)$在X有下界
        - **无界**：如果对于任何正数M，总存在$x_1 \in X$，使得$|f(x)| > M$，那么函数$f(x)$在X无界
      - **周期性**：设函数$f(x)$的定义域为D，区间$I \in D$。如果对于区间I上任意两点x_1, x_2，当$x_1 < x_2$时，
        - **单调增加**：（在区间I上）恒有$f(x_1) < f(x_2)$
        - **单调不减**：（在区间I上）恒有$f(x_1) \leq f(x_2)$
        - **单调减小**：（在区间I上）恒有$f(x_1) > f(x_2)$
        - **单调不增**：（在区间I上）恒有$f(x_1) \geq f(x_2)$
      - **奇偶性**：设函数$f(x)$的定义域D关于原点对称，
        - **偶函数**：（关于y轴对称）$f(-x) = f(x)$
        - **奇函数**：（关于原点对称）$f(-x) = -f(x)$；如果$f(x)$关于原点对称，且$f(x)$在$x = 0$处有定义，则$f(0) = 0$，如果$f(0) \neq 0$，则不是奇函数
        - **奇偶性变形**：$f(x) - f(-x) = 奇函数$，$f(x) + f(-x) = 偶函数$
      - **单调性**：设函数$f(x)$的定义域为D，如果存在一个正数l，使得对于任意$x \in D$有$(x \pm l) \in D$，且$f(x + l) = f(x)$恒成立，那么称$f(x)$为周期函数，l称为$f(x)$的周期（最小正周期）
        - **单调性应用**：$f(ax + b)$的最小正周期为$\frac{T}{|a|}$，其中T是$f(x)$的最小正周期
    - **反函数与复合函数**
      - **反函数**：（充要条件）$y = f(x)$是一一映射关系。一般$y = f(x), x \in D$的反函数记成$y = f^{-1}(x), x \in f(D)$，两者关于$y = x$对称
        - **反函数单调性不变**P62：如果函数$y = f(x)$在区间I_x上单调增加（或单调减小）且连续，那么它的反函数$x = f^{-1}(y)$也在对应的区间$I_y = \{y|y = f(x), x \in I_x\}$上单调增加（或单调减小）且连续（例子：$y = \sin x$在闭区间$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$上单增且连续，则反函数$y = \arcsin x$在闭区间$[-1, 1]$上单增且连续）
        - 单调函数→反函数；反函数 推不出 单调函数
        - 反函数记号：$f^{-1}[f(x)] = f[f^{-1}(x)] = x$
      - **复合函数**
        - **复合函数**：g与f能构成复合函数$f[g(x)]$的条件是：函数g的值域R_g必须包含于函数f的定义域D_f，即$R_g \subset D_f$；否则不能构成复合函数
        - **定理6复合函数的极限运算法则P44**：设函数$y = f[g(x)]$是由函数$u = g(x)$与函数$y = f(u)$复合而成，$y = f[g(x)]$在点x_0的某去心邻域内由定义，若$\lim_{x \to x_0} g(x) = u_0$，$\lim_{u \to u_0} f(u) = A$，且存在$\delta_0 > 0$，当$x \in \mathring{U}(x_0, \delta_0)$时，有$g(x) \neq u_0$，则$\lim_{x \to x_0} f[g(x)] = \lim_{u \to u_0} f(u) = A$
        - **复合函数的连续性P62**
          - **定理3**：设函数$y = f[g(x)]$由函数$u = g(x)$与函数$y = f(u)$复合而成，$\mathring{U}(x_0) \subset D_{f \circ g}$，如果$\lim_{x \to x_0} g(x) = u_0$，而函数$y = f(u)$在$u = u_0$连续，则$\lim_{x \to x_0} f[g(x)] = \lim_{u \to u_0} f(u) = f(u)$
          - **定理4**：设函数$y = f[g(x)]$由函数$u = g(x)$与函数$y = f(u)$复合而成，$U(x_0) \subset D_{f \circ g}$，如果函数$u = g(x)$在$x = x_0$连续，且$g(x_0) = u_0$，而函数$y = f(u)$在$u = u_0$连续，则复合函数$y = f[g(x)]$在$x = x_0$连续
    - **基本初等函数**（学会画图）
      - 幂函数：$y = x^\mu$（是常数）
      - 指数函数：$y = a^x$（$a > 0$且$a \neq 1$）
      - 对数函数：（$a > 0$且$a \neq 1$，特别当$a = e$时，记为$y = \ln x$）
      - 三角函数：$y = \sin x, y = \cos x, y = \tan x$
      - 反三角函数：$y = \arcsin x, \arccos x, \arctan x$
- **数列的极限**
  - **数列极限的定义**：设$\{x_n\}$为一数列，如果存在常数a，对于任意给定的正数ϵ（不论它多么小），总存在正整数N，使得当$n > N$时，不等式$|x_n - a| < \epsilon$都成立，那么就称常数a是数列$\{x_n\}$的极限，或者称数列$\{x_n\}$收敛于a，记为$\lim_{n \to \infty} x_n = a$
    - $\epsilon - \delta$**语言**：$\lim_{n \to \infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0，\exists 正整数N，当n > N时，有|x_n - a| < \epsilon$
    - **注**：
      - ϵ与N的函数关系：
        - $N = f^{-1}(\epsilon)$使用的前提条件是$f^{-1}(\epsilon) > 1$
        - 先将$|x_n - a|$等价变形，适当放大，使N容易由放大后的量小于ϵ的不等式求出
      - 几何意义；
      - 数列$\{x_n\}$的极限与有限项无关；
      - $\lim_{n \to \infty} x_n = a \Leftrightarrow \lim_{n \to \infty} x_{2n} = a$和$\lim_{n \to \infty} x_{2n-1} = a$
    - 一些经典反例：$x_n = (-1)^n$
    - 如果要证明$\lim_{n \to \infty} x_n = 0$，则可以上绝对值证明$\lim_{n \to \infty} |x_n| = 0$，可以使用夹逼
  - **数列极限的性质**
    - **极限的唯一性**：如果数列$\{x_n\}$收敛，那么它的极限唯一
    - **收敛数列的有界性**：如果数列$\{x_n\}$收敛，那么数列$\{x_n\}$一定有界，有$|x_n| < M$（有界是收敛的必要条件）
      - 证明
    - **收敛数列的保号性**：如果$\lim_{n \to \infty} x_n = a$，且$a > 0$（或$a < 0$），那么存在正整数$N$，当$n > N$时，都有$x_n > 0$（或$x_n < 0$）
      - **推论**：如果数列x_n从某项起有$x_n \geq 0$（或$x_n \leq 0$），且$\lim_{n \to \infty} x_n = a$，那么$a \geq 0$（或$a \leq 0$）；也可以有$x_n > 0 (< 0)$，有$a \geq 0 (\leq 0)$

- 1. $A>0(<0)\to x_n>0(<0)$；但$A\ge 0(\le 0)\times\to x_n\ge 0(\le 0)$
- 2. $x_n\ge 0(\le 0)\to A\ge 0(\le 0)$；但$x_n>0(<0)\times\to A>0(<0)$（反例$x_n=\frac{1}{n}$）

- **收敛数列与其子数列间的关系**：如果数列$\{x_n\}$收敛于a，那么它的任一子数列也收敛，且极限也是a

- **函数的极限**
  - **函数极限的定义**：
    - **自变量趋于有限值**：设函数$f(x)$在点x_0的某一去心邻域内有定义，如果存在常数A，对于任意给定的正数ϵ（不论它多么小），总存在正数δ，使得当x满足不等式$0<|x-x_0|<\delta$时，对应的函数值$f(x)$都满足不等式$|f(x)-A|<\epsilon$，那么常数A就叫做函数$f(x)$当$x\to x_0$时的极限，记作$\lim_{x\to x_0}f(x)=A$
      - $\epsilon-\delta$**语言**：$\lim_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\epsilon>0$，$\exists\delta>0$，当$0<|x-x_0|<\delta$时，有$|f(x)-A|<\epsilon$
      - **注**：定义中$0<|x-x_0|<\delta$表示x取不到x_0，所以函数$f(x)$在$x\to x_0$有没有极限，与$f(x)$在点x_0是否有定义并没有关系
      - **求左右极限的问题**
        - 分段函数在分界处的极限
        - e^∞型极限，$\arctan\infty$，$\sqrt{x^2+1}$求左右极限拉绝对值
      - 函数在某点$x=x_0$处**极限存在的充要条件**：在$x=x_0$处左极限、右极限各自存在并且相等，即$f(x_0^-)=f(x_0^+)$
    - **自变量趋于无穷大时**：设函数$f(x)$当$|x|$大于某一正数时有定义，如果存在常数A，对于任意给定的正数ϵ（不论它多么小），总存在正数X，使得当x满足不等式$|x|>X$时，对应的函数值$f(x)$都满足不等式$|f(x)-A|<\epsilon$，那么常数A就叫做函数$f(x)$当$x\to\infty$时的极限，记作$\lim_{x\to\infty}f(x)=A$
      - ∞同时表示$+\infty,-\infty$
      - $\epsilon-\delta$**语言**：$\lim_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\epsilon>0$，$\exists X>0$，当$|x|>X$时，有$|f(x)-A|<\epsilon$
      - 几何意义：A是函数$f(x)$的水平渐近线
  - **函数极限的性质**：
    - **函数极限的唯一性**：若$\lim_{x\to x_0}f(x)$存在，则此极限值必唯一
    - **函数极限的局部有界性**：如果$\lim_{x\to x_0}f(x)=A$，那么存在常数$M>0$和$\delta>0$，使得当$0<|x-x_0|<\delta$时，有$f(x)\le M$（去心邻域内有界）
      - 有界是函数收敛的必要条件（例$f(x)=\sin 1/x$）
    - **函数极限的局部保号性**：如果$\lim_{x\to x_0}f(x)=A$，且$A>0$（或$A<0$），那么存在常数$\delta>0$，使得当$0<|x-x_0|<\delta$时，有$f(x)>0$（或$f(x)<0$）（仅在x_0的去心领域保号）
      - **推论**：如果在x_0的某去心邻域内$f(x)\ge 0$（或$f(x)\le 0$），而且$\lim_{x\to x_0}f(x)=A$，那么$A\ge 0$（或$A\le 0$）。如果在x_0的某去心邻域内$f(x)>0$（或$f(x)<0$），而且$\lim_{x\to x_0}f(x)=A$，那么$A\ge 0$（或$A\le 0$）
    - **函数极限与数列极限的关系**：如果极限$\lim_{x\to x_0}f(x)$存在，$\{x_n\}$为函数$f(x)$的定义域内任一收敛于x_0的数列，且满足$x_n\ne x_0$（$n\in N_+$），那么相应的函数值数列$\{f(x_n)\}$必收敛，且$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=\lim_{x\to x_0}f(x)$
      - 证明
      - 可以理解为$\{x_n\}$是x_0去心邻域上组成的数列（自变量数列）
    - **无穷小给定的函数具有极限的充要条件P35**：在自变量的同一变化过程$x\to x_0$（或$x\to\infty$）中，函数$f(x)$具有极限A的**充分必要条件**是$f(x)=A+\alpha$，其中α是无穷小
- **无穷小与无穷大**
  - **无穷小定义**
    - **定义**：如果函数$f(x)$当$x\to x_0$（或$x\to\infty$）时的极限为零，那么称函数$f(x)$为当$x\to x_0$（或$x\to\infty$）时的无穷小
    - **定理1**：在自变量的同一变化过程$x\to x_0$（或$x\to\infty$）中，函数$f(x)$具有极限A的**充分必要条件**是$f(x)=A+\alpha$，其中α是无穷小
    - **性质**：
      - 有限个无穷小的和仍为无穷小
      - 有限个无穷小的积仍是无穷小
      - 无穷小量与有界量的积仍为无穷小
  - **无穷大定义**
    - **定义**：设函数$f(x)$在x_0的某一去心邻域内有定义（或$|x|$大于某一正数时有定义）。如果对于任意给定的正数M（不论它多么大），总存在正数δ（或正数X），只要x适合不等式$0<|x-x_0|<\delta$（或$|x|>X$），对应的函数值$f(x)$**总满足不等式**$|f(x)|>M$，那么称函数$f(x)$是当$x\to x_0$（或$x\to\infty$）时的无穷大
    - **定理2**：在自变量的同一变化过程中，如果$f(x)$为无穷大，那$\frac{1}{f(x)}$为无穷小；反之，如果$f(x)$为无穷小，且$f(x)\ne 0$，那么$\frac{1}{f(x)}$为无穷大
    - **无穷大量与无界大量P55**
      - 数列$\{x_n\}$是无穷大量：$\forall M>0,\exists N>0$恒有$|x_n|>M$
      - 数列$\{x_n\}$是无界变量：$\forall M>0,\exists N>0$有$|x_n|>M$（只存在一个就行）
      - 无穷大量一定是无界变量，无界变量不一定是无穷大量（$x_n=n$(偶)，0(奇)）
    - **无穷大函数和数列的天然不等式**（贴在墙上）
- **极限运算法则**
  - **定理1**：有限无穷小的和是无穷小
  - **定理2**：有界函数与无穷小的乘积是无穷小
    - **推论1**：常数与无穷的乘积是无穷小
    - **推论2**：有限个无穷小的乘积是无穷小
  - **定理3**：极限存在，那么函数的四则运算也是极限的四则运算
    - **推论**：如果$\lim f(x)$存在，而n是正整数，那么$\lim[f(x)]^n=[\lim f(x)]^n$
  - **定理4**：极限存在，那么数列的四则运算也是极限的四则运算
  - **定理5保序性**（局部保号性推论）：如果$\varphi(x)\ge\psi(x)$，而$\lim\varphi(x)=A$，$\lim\psi(x)=B$，那么$A\ge B$
  - **定理6复合函数的极限运算**：上面
- **极限存在准则 两个重要的极限**
  - **准则1 夹逼准则**
    - **数列**：如果数列$\{x_n\}$，$\{y_n\}$及$\{z_n\}$满足下列条件：
      - 从某项起，即$\exists n_0\in N_+$，当$n>n_0$时，有$y_n\le x_n\le z_n$
      - $\lim_{n\to\infty}y_n=a,\lim_{n\to\infty}z_n=a$
      - 那么数列$\{x_n\}$的极限存在，且$\lim_{n\to\infty}x_n=a$
    - **函数**：如果

        - 当$x \in \mathring{U}(x_0, r)$（或$|x| > M$）时，$g(x) \le f(x) \le h(x)$
        - $\lim_{x \to x_0, \infty} g(x) = A, \lim_{x \to x_0, \infty} h(x) = A$
        - 那么$\lim_{x \to x_0, \infty} f(x)$存在，且等于$A$
  - **准则2 单调有界性准则**
    - **数列**：单调有界数列必有极限。（只要研究无穷项，满足单调有界，就能确定数列收敛）
    - **函数**：设函数$f(x)$在点x_0的某个左邻域内单调并且有界，则$f(x)$在x_0的左极限$f(x_0^-)$必定存在
- **无穷小的比较**
  - **定义**：设$x \to *$时$\alpha(x)$与$\beta(x)$为两个无穷小，$\beta(x) \neq 0$，$\alpha(x)$不恒等于0，设$\lim_{x \to *} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = A$
    - 若$A \neq 0$，则称$x \to *$时$\alpha(x)$与$\beta(x)$为**同阶无穷小**
    - 若$A = 1$，则称$x \to *$时$\alpha(x)$与$\beta(x)$为**等价无穷小**，记成$x \to *$时$\alpha(x) \sim \beta(x)$
    - 若$A = 0$，则称$x \to *$时$\alpha(x)$为$\beta(x)$的**高阶无穷小**，记成$x \to *$时$\alpha(x) = o(\beta(x))$
    - 如果$\lim_{x \to *} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \infty$，则称$x \to *$时$\alpha(x)$为$\beta(x)$的**低阶无穷小**
    - 如果$\lim_{x \to *} \dfrac{\alpha(x)}{\beta^k(x)} = A \neq 0$，则$\alpha(x)$是$\beta(x)$的$k$阶无穷小
  - **等价无穷小的两个定理**
    - **定理1**：β与α是等价无穷小的充分必要条件为$\beta = \alpha + o(\alpha)$
    - **定理2**：设$\alpha \sim \tilde{\alpha}, \beta \sim \tilde{\beta}$且$\lim \dfrac{\tilde{\beta}}{\tilde{\alpha}}$存在，则$\lim \dfrac{\beta}{\alpha}$ $=\lim \dfrac{\tilde{\beta}}{\tilde{\alpha}}$(仅对乘除形式而言)
- **函数的连续性与间断点**
  - **函数的连续性**：
    - **最基本的定义**：设函数$y = f(x)$在点x_0的某一领域内有定义，如果$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = 0$，那么就称函数$y = f(x)$在点$x_0$连续
    - **最常用的定义**：设函数$y = f(x)$在点x_0的某一领域内有定义，如果$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$，则称函数$f(x)$在点$x_0$处连续
    - $\epsilon - \delta$**语言**：$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0$，$\exists \delta > 0$，当$|x - x_0| < \delta$时，有$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$
    - **左连续**：$f(x_0^-) = f(x_0)$
    - **右连续**：$f(x_0^+) = f(x_0)$
    - 在区间上每一点都连续的函数，叫做在该区间上的连续函数，或者说函数在该区间上连续
  - **函数的间断点**
    - **定义**：设函数$f(x)$在点x_0的某去心领域内有定义，**在此前提下**，函数间断点有三种情况
      - 在$x = x_0$处没有定义
      - 虽然在$x = x_0$有定义，但$\lim_{x \to x_0} f(x)$不存在（第二类）
      - 虽然$x = x_0$有定义，且$\lim_{x \to x_0} f(x)$存在，但是$\lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$（第一类）
      - 则称$f(x)$在x_0处不连续，x_0为函数间断点
    - **应用**：
      - 第一条是对初等函数而言，第二三条是对分段函数而言，或者是极限形式的初等函数化为分段函数
      - 根据间断点一二三条件判断函数间断点
      - 根据x_0左右极限情况判断第一类还是第二类间断点；如果是第一类间断点则说明是可去还是跳跃，如果是第二类间断点则说第二类就行
        - 左右极限存在：相等（可取间断点）；不相等（跳跃间断点）
        - 左右极限不存在：第二类间断点
- **连续函数的计算与初等函数的连续性**
  - **连续函数的积、差、商的连续性**
    - 设函数$f(x)$和$g(x)$在点x_0连续，则它们和差积商都在点x_0连续
  - **反函数与复合函数的连续性**
    - 反函数（前面讲了）
    - 复合函数（前面讲了）
  - **初等函数的连续性**
    - 定义域包括离散的点，但是定义区间并不包括离散点（区间就是有邻域，有范围的东西）。函数$f(x)$剔除所有间断点，剩下就是定义区间，但是定义域中还包括部分非间断点的离散点
    - 所有基本初等函数通过四则运算法则形成的函数都是初等函数
    - **定义**：基本初等函数在它们的定于域内都连续
    - **定义**：一切初等函数在其定义区间内都是连续的
- **闭区间上连续函数的性质**
  - **有界性与最大最小值定理**（充分条件）
    - 在**闭区间**上连续的函数在该区间上有界且一定能取得它的最大值和最小值
    - **注**：
      - 如果函数在开区间内连续，或者函数在闭区间上有间断点（分段函数），那么函数在该区间上不一定有界，也不一定有最大值或最小值
      - 闭区间上不能有间断点（分段函数的情况）
      - 只有在闭区间+连续的情况下可取最大最小值
      - 函数的最大最小值可以相等！
  - **介值定理**
    - 设函数$f(x)$在闭区间$[a, b]$上连续，且在这区间的端点取不同的函数值$f(a) = A$及$f(b) = B$，则对于A与B之间的任意一个数C，在开区间(a, b)内至少有一点ξ，使得$f(\xi) = C$
  - **零点定理**
    - 设函数$f(x)$在闭区间$[a, b]$上连续，且$f(a)$与$f(b)$异号（即$f(a)f(b) < 0$），则在开区间(a, b)内至少有一点ξ，使$f(\xi) = 0$