第十一章 曲线积分与曲面积分

曲线积分与曲面积分

- **曲线积分**
  - **第一类线积分**（对弧长的线积分）
    - 定义，一个有界函数的定义域是一分段光滑曲线L，则函数在L上对弧长的线积分为$\int_L f(x,y)\mathbf{d}s$
    - **性质**
      - **与积分路径方向无关**，即$\int_{L(\overset{\frown}{AB})} f(x,y)\mathbf{d}s = \int_{L(\overset{\frown}{BA})} f(x,y)\mathbf{d}s$
      - **线性性质**：$\int_L \Big[\alpha f(x,y) + \beta g(x,y)\Big]\mathbf{d}s = \alpha\int_L f(x,y)\mathbf{d}s + \beta\int_L g(x,y)\mathbf{d}s$
      - **分段性质**：$\int_L f(x,y)\mathbf{d}s = \int_{L_1} f(x,y)\mathbf{d}s + \int_{L_2} f(x,y)\mathbf{d}s\backslash$
      - **不等式性质**：设在L上$f(x,y)\le g(x,y)$，则
$$\int_L f(x,y)\mathbf{d}s \le \int_L g(x,y)\mathbf{d}s$$
，特别地，有
$$\Big|\int_L f(x,y)\mathbf{d}s\Big| \le \int_L \Big|f(x,y)\Big|\mathbf{d}s$$
    - **计算方法**
      - **直接法（总的来说，计算方法是确定的）**
        - 若曲线L用参数方程
$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \quad \alpha \le t \le \beta$$
则
$$\int_L f(x,y)\mathbf{d}s = \int_\alpha^\beta f(x(t),y(t))\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\mathbf{d}t$$
注意这里的积分限下限小上限大
        - 若曲线L用直角坐标$y=y(x), a\le x\le b$表示，则
$$\int_L f(x,y)\mathbf{d}s = \int_a^b f(x,y(x))\sqrt{1+y'^2(x)}\mathbf{d}x$$
        - 若曲线L用极坐标方程$r=r(\theta), \alpha\le\theta\le\beta$给出，则（同样的这里的计算方式跟参数方程一样）（**有些时候是需要用一股脑的极坐标去转化某些曲线的，因为直接算算不了，同时直接转化为参数方程又很难**（提高篇P191例题3））
$$\int_L f(x,y)\mathbf{d}s = \int_\alpha^\beta f(r(\theta)\cos\theta, r(\theta)\sin\theta)\sqrt{r^2+r'^2}\mathbf{d}\theta$$
      - **利用奇偶性和对称性**（**对曲线曲面积分同样适用，不单单是在二重积分中**）
        - **奇偶性**
          - 若积分曲线L关于y轴对称，且**被积函数**$f(x,y)$关于x由奇偶性，则
$$\int_L f(x,y)\mathbf{d}s = \begin{cases} 2\int_{L_1} f(x,y)\mathbf{d}s, & \text{当}f(x,y)\text{关于}x\text{为偶函数} \\ 0, & \text{当}f(x,y)\text{关于}x\text{为奇函数} \end{cases}$$
          - 若积分曲线L关于x轴对称，且被积函数$f(x,y)$关于y奇偶性，则
$$\int_L f(x,y)\mathbf{d}s = \begin{cases} 2\int_{L_1} f(x,y)\mathbf{d}s, & \text{当}f(x,y)\text{关于}y\text{为偶函数} \\ 0, & \text{当}f(x,y)\text{关于}y\text{为奇函数} \end{cases}$$
这里的L_1为L在x轴上侧的部分
        - 利用变量的**对称性**
          - 若积分曲线L_1关于直线$y=x$对称，则$\int_L f(x,y)\mathbf{d}s = \int_L f(y,x)\mathbf{d}s$
          - 以上只讨论了**平面上对弧长的线积分**，**空间中对弧长的线积分**完全类似（提高篇P191例题4，**秀我一脸**，**对称性在平面相交成曲线中也是能够利用的**）
          - 例如，如果空间曲线为
$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2 = R^2 \\ x+y+z = 0 \end{cases}$$
这里通过**曲面**得到的**曲线**也是有**对称性**的，对于被积函数$\oint_L x^2\mathbf{d}s$能够写成$\frac{1}{3}\oint_L x^2+y^2+z^2\mathbf{d}s$（🐂🍺）
          - （当然这里的正规做法是**求出曲线的参数方程**）
          - 这类题目是无法得到曲线的参数方程的，并且唯一的切入点就是**坐标之间相互对称+曲线的弧长。并且尽量地使用空间曲线中的公式去表示原式中的公式**

- **第二类的曲面积分**（对坐标的线积分）
  - **定义**

$$\int_{L(\overset{\frown}{AB})} P(x,y)\mathbf{d}x + Q(x,y)\mathbf{d}y$$

  - **性质**
    - **与积分路径的方向有关**，即

$$\int_{L(\overset{\frown}{AB})} P\mathbf{d}x + Q\mathbf{d}y = -\int_{L(\overset{\frown}{BA})} P\mathbf{d}x + Q\mathbf{d}y$$

  - **两类线积分的联系**

$$\int_{L(\overset{\frown}{AB})} P\mathbf{d}x + Q\mathbf{d}y = \int_{L(\overset{\frown}{AB})} (P\cos\alpha + Q\cos\beta)\mathbf{d}s$$

  其中$\cos\alpha, \cos\beta$为有向曲线L的**切线的方向余弦**，它们存在这样的关系

$$\begin{cases} \mathbf{d}s\cos\alpha = \mathbf{d}x \\ \mathbf{d}s\cos\beta = \mathbf{d}y \end{cases}$$

  （在向量中我们知道，方向余弦是向量在xy轴上的投影分量，方向余弦表示一个单位向量，所以ds在xy上的分量就是通过上述计算得到dxdy）
  - 曲线上的**外法线向量的方向余弦**与**切线的方向余弦**的关系(提高篇P197例题12)

$$\cos(\mathbf{n}, x) = \cos(\tau, y) = \cos\beta$$
$$\cos(\mathbf{n}, y) = -\cos(\tau, x) = -\cos\alpha$$

  - 有

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial \mathbf{n}}\mathbf{d}s = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\cos(\mathbf{n}, x)\mathbf{d}s + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\cos(\mathbf{n}, y)\mathbf{d}s$$

  - 结合上面外法线和切线的方向余弦的转换关系，有

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial \mathbf{n}}\mathbf{d}s = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\cos(\mathbf{n}, x)\mathbf{d}s + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\cos(\mathbf{n}, y)\mathbf{d}s = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\mathbf{d}y - \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\mathbf{d}x$$

  - **计算方法**
    - L是否封闭?
      - 是：格林
      - 否：是否与路径无关
        - 是：换路径or原函数
        - 否：直接算or补线用格林公式
    1. **直接法**
      - 设平面光滑曲线段（**曲线开闭**）

$$L: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \quad t \in [\alpha, \beta]\text{或}t \in [\beta, \alpha]$$

      ，则**直接带入参数函数**

$$\int_L P\mathbf{d}x + Q\mathbf{d}y = \int_\alpha^\beta [P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)]\mathbf{d}t$$

      这里下限α对应L的起点，上限β对应L的终点
    2. **利用格林公式**（闭区域要求路径正向）（**曲线闭合**）
      - 设**闭区域**D由分段光滑曲线L围成，$P(x,y)$及$Q(x,y)$在D上有连续一阶偏导数(**这声明条件很重要**)，则（**线积分变为二重积分，注意利用==对称性和奇偶性**）

$$\oint_L P\mathbf{d}x + Q\mathbf{d}y = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{d}x\mathbf{d}y$$

      其中L是D的**取正面的边界曲线**（所谓L的正向是指有人沿着L的某一方向前进，区域D始终在他的**左侧**==)
        - **注意1**
          - 提高篇P193例题7，**对于不包括圆心的D，PQ自然在D上有一阶偏导数，所以直接使用格林公式**
          - 如果偏导后两者相等，**那么就直接等于0了，同时说明线积分与路径无关**
          - 但是对于通过圆心的椭圆，*PQ在原点上是没有意义的*，所以PQ并不是在D中都有一阶偏导数！所以结合线积分与路径无关，可以把L改为绕开原点O的路径，通常取新的路径为L+C，C路径为$ax^2 + by^2 = \epsilon^2$。同时对于$ax^2 + by^2 = \epsilon^2$需要带入被积函数中把$ax^2 + by^2$更换为ϵ^2，其实这个ϵ的取值并不影响结果，所以取1就很好否则如果直接求PQ偏导计算，那么还是0。
          - 其实对新路径L+C求线积分$\oint_L + \oint_C = 0$，使用格林公式计算结果还是0，所以最后是$\oint_L = \oint_{-C}$
          - 满足上述解题思路的被积函数有

$$\begin{cases}\int_L \frac{(x-y)\mathrm{d}x+(x+y)\mathrm{d}y}{x^2+y^2} \\ \int_L \frac{(x+y)\mathrm{d}x-(x-y)\mathrm{d}y}{x^2+y^2} \\ \int_L \frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{4x^2+y^2} \\ \int_L \frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}\end{cases}$$

- 沿着任何一段**不包含原点在内**的分段光滑闭曲线的**积分为0**
- 沿着任何一段**包含原点在在内**的分段光滑闭曲线的**积分均相等**
- （类似题目，提高篇P194例题8）

- **注意2**
- $P(x,y)Q(x,y)$在闭区域D上处处有连续一阶偏导数
- 积分曲线L为闭曲线且取正向

3. **补线用格林公式**（补线后围城区域取路径正向）（**曲线不闭合**）
- 若要计算的线积分的积分曲线$L(\overline{AB})$**不封闭**，但**直接法计算也不方便**，此时可补一条曲线$L_1(\overline{BA})$，**使原曲线变成封闭曲线**，则

$$\int_{L(\overline{AB})} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\oint_{L(\overline{AB})+L_1(\overline{BA})} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y-\int_{L_1(\overline{BA})} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$$

此时，对等式右端有一项如果满足格林公式条件，**则可用格林公式**，**第二项考虑用方法4**（提高篇P195例题9）

4. **利用线积分与路径无关（曲线不闭合）**
- **首先**，判断所要计算的线积分与路径无关
  - **线积分与路径无关的判定**
    - **定理1**：设$(x,y)Q(x,y)$在单独连通D上有连续一阶偏导数，则以下**四条等价**：
      - 线积分$\int P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$与路径无关（**没见过**）
      - $\oint_C P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=0$，其中$C$是$D$中任一分段光滑闭曲线（提高篇P196例题10）
      - $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x},\forall(x,y),\in D$（**判断线积分是否与路径无关**）
      - 存在可微函数$F(x,y)$，使$P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\mathrm{d}F(x,y)$（**此条件与上条件等价**）
- **其次**，如果与线积分路径无关，应该怎么样去计算比较好
  - 计算与路径无关的线积分
    - **方法1：折线法**
      - 通常取平行于坐标轴的折线
      - 且折现的运动方向要跟原路径的运动方向一致，**并不是两点之间的连线**
    - **方法2：利用原函数**：
      - 设$F(x,y)$是$P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$的原函数，即$P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\mathrm{d}F(x,y)$，则

$$\int_{(A)}^{(B)} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=F(x_2,y_2)-F(x_1,y_1)$$

其中L的起点为$A(x_1,y_1)$，终点为$B(x_2,y_2)$

      - 求$F(x,y)$常用的有两种方法，即**偏积分**和**凑微分**
        - 就是对当前的PQ两函数求他们的原函数
        - 最后PQ原函数应该相等，并且P的原函数对y偏导应等于Q；同理Q的原函数对x偏导应等于P

- 注意
  - 2.的格林公式和4的路径无关之间是有点区别的
    - 2中直接计算出来的$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$是说明在闭区域D内的线积分为0，同时也说明路径无关，那么在遇到PQ偏导不存在的情况，路径无关的性质说明可以绕开"PQ偏导不存在的情况"，这并不会影响结果
    - 4中直接计算出来的$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$是说明在路线不闭合的情况，可以使用**折线法**和**原函数法**，与2有着根本的区别
- **总结**：用以上四种方法计算**对坐标的线积分**时考虑问题的**基本思路**是：
  - 首先考察积分曲线L是否封闭
    - 如果**曲线L封闭**，考虑用格林公式计算
      - 考察PQ偏导是否都存在
        - **都存在**：直接用格林公式计算（线积分化为二重积分并且注意使用对称性奇偶性）
        - **某些情况不存在**
          - 考察PQ偏导是否相等
            - **相等**：说明路径无关，抠出使PQ偏导不存在的情况，然后按照**2格林公式注意1**计算
            - **不相等**：*说明路径有关，（这种情况还没遇到过）*
    - 如果**曲线L不封闭**，应考虑方法4
      - 考察PQ是否相等（不用考察是否存在）
        - **相等**：说明路径无关
          - 折现法

- 原函数法
- **不相等**：说明路径有关（例题11）
  - 补线用格林公式法
  - 直接法

- 对**空间的线积分**$\int_L P(x,y,z)\mathbf{d}x+Q(x,y,z)\mathbf{d}y+R(x,y,z)\mathbf{d}z$，定义，性质，计算方法都与平面线积分完全类似，在这不一一重复，这里只就**空间线积分**常用的两种计算方法进行讨论
  - **直接法**：设空间曲线的参数方程

$$L:\begin{cases}x=x(t),\\ y=y(t), & t\in[\alpha,\beta]\text{或}t\in[\beta,\alpha]\\ z=z(t)\end{cases}$$

则**直接带入参数函数**

$$\int_L P\mathbf{d}x+Q\mathbf{d}y+R\mathbf{d}z=\int_\alpha^\beta[P(x(t),y(t),z(t))x^{'}(t)+Q(x(t),y(t),z(t))y^{'}(t)+R(x(t),y(t),z(t))z^{'}(t)]\mathbf{d}t$$

这里下限α对应于L的起点，上限β对应于L的终点

  - **利用斯托克斯公式**：设Γ为分段光滑的空间有向**闭曲线**，Σ是以Γ为边界的分段光滑**有向曲面**，Γ的方向与Σ符合右手法则，P,Q,R在Σ上有连续一阶偏导数，则（提高篇P198）

$$\oint_\Gamma P\mathbf{d}x+Q\mathbf{d}y+R\mathbf{d}z=\iint_\Sigma\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathbf{d}y\mathbf{d}z+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathbf{d}z\mathbf{d}x+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{d}x\mathbf{d}y$$

该式子就叫做**斯托克斯公式**

$$\iint_\Sigma\begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}\mathbf{d}s\quad\text{有}\begin{cases}\cos\alpha\cdot\mathbf{d}s=\mathbf{d}y\mathbf{d}z\\ \cos\beta\cdot\mathbf{d}s=\mathbf{d}z\mathbf{d}x\\ \cos\gamma\cdot\mathbf{d}s=\mathbf{d}x\mathbf{d}y\end{cases}$$

- **曲面积分**
  - **定义**
    - 设Σ为分片光滑曲面片，$f(x,y,z)$为定义在Σ上的有界函数，$f(x,y,z)$在Σ上对面的面积分为$\iint_\Sigma f(x,y,z)\mathbf{d}S$
  - **性质**
    - 与曲面Σ的侧的选取无关，即

$$\iint_\Sigma f(x,y,z)\mathbf{d}S=\iint_{-\Sigma}f(x,y,z)\mathbf{d}S$$

其中$-\Sigma$表示曲面Σ的另外一侧

  - **对面积的面积分（第一类面积分）**
    - **直接法**
      - 设积分曲面Σ由方程$z=z(x,y)$给出，Σ在xOy面上的投影域为D，函数$z(x,y)$在D上有连续一阶偏导数，$f(x,y,z)$在Σ上连续，则

$$\iint_\Sigma f(x,y,z)\mathbf{d}S=\iint_D f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+(z_x^{'})^2+(z_y^{'})^2}\mathbf{d}x\mathbf{d}y$$

如果积分曲面Σ由方程$x=x(y,z)$或$y=y(x,z)$给出，也可类似地把对面积的**曲面积分**化为相应的**二重积分**（如果$z(x,y)$没有，就要转化成$x=x(y,z)$或$y=y(x,z)$）

      - 注意
        - 这里的$z=z(x,y)$是这么理解的
        - 如果这个曲面Σ是由两个曲面截取得到的，那么这个曲面Σ就用其中一个曲面的方程来表示就行（提高篇P202例题1）例如*锥面和柱面相截，截面同样用锥面的方程来表示*
    - **利用奇偶性和对称性**
      - 利用积分曲面的**关于平面的对称性**和被积函数的**奇偶性**
        - 若积分曲面Σ关于xOy坐标面对称，且被积函数$f(x,y,z)$关于z有奇偶性，则

$$\iint_\Sigma f(x,y,z)\mathbf{d}S=\begin{cases}2\iint_{\Sigma_1}f(x,y,z)\mathbf{d}S, & \text{当}f(x,y,z)\text{关于}z\text{为偶函数}\\ 0, & \text{当}f(x,y,z)\text{关于}z\text{为奇函数}\end{cases}$$

其中Σ_1为Σ在xOy坐标面以上的部分

        - 当积分曲面Σ关于xOz坐标面对称，且被积函数关于y有奇偶性；当积分曲面Σ关于yOz坐标面对称，且被积函数关于x有奇偶性时有相应的结论
      - 利用**变量的对称性**
        - 如果**积分曲面**Σ方程中某两个变量对调其方程不变，则将被积函数中这两个变量对调积分值不变
        - 例如：若Σ的方程中x和y对调方程不变，则

$$\iint_\Sigma f(x,y,z)\mathbf{d}S=\iint_\Sigma f(y,x,z)\mathbf{d}S$$

        - 计算积分

$$\iint_\Sigma x^2\mathbf{d}S$$

，其中Σ为球面$x^2+y^2+z^2=R^2$

- 由于$x^2+y^2+z^2=R^2$中将x和y对调方程不变，则

$$\iint_\Sigma x^2\mathbf{d}S=\iint_\Sigma y^2\mathbf{d}S$$

. 同理，由于在$x^2+y^2+z^2=R^2$中将x和z对调方程不变，则

$$\iint_\Sigma x^2\mathbf{d}S=\iint_\Sigma z^2\mathbf{d}S$$

于是

$$\iint_\Sigma x^2\mathbf{d}S=\frac{1}{3}\iint_\Sigma(x^2+y^2+z^2)\mathbf{d}S=\frac{1}{3}\iint_\Sigma R^2\mathbf{d}S=\frac{4\pi}{3}R^4$$

- **解题思路**
  - 先利用**奇偶性**和**对称性**进行简化
    - **骚气**，这里的奇偶性除了是直接的跟据xOy，yOz，xOz平面对称外，其实还可以是$z=a$，$x=b$，$y=c$这种平面对称
    - **找被积函数中的奇函数**（偶函数部分找也没用），想办法在曲面区域中构成关于奇函数变量的对称区间（提高篇P203例题3）只有这么做才能极大地简化计算过程，并且确保计算结果准确
  - 然后按照直接法计算
    - 如果曲面能用方程$z=z(x,y)$给出
      - 利用方程$z=z(x,y)$画出积分曲面Σ的草图，并确定Σ在xOy面上的投影
      - 利用$z=z(x,y)$，求出面积微元$\mathbf{d}S=\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\mathbf{d}x\mathbf{d}y$
      - 计算重积分$\iint_D f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\mathbf{d}x\mathbf{d}y$
    - 如果曲面不能用方程$z=z(x,y)$给出（提高篇P202例题2）
      - 那么就要转化成$x=x(y,z)$或$y=y(x,z)$
      - 然后对$\mathbf{d}S$部分用x_x',x_y',x_z'或y_x',y_y',y_z'计算

- **对坐标的面积分（第二类面积分）**
  - **定义**
    - 设Σ为光滑有向曲面，$P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)$在$\Sigma$上有界，则

$$\iint_\Sigma P\mathbf{d}y\mathbf{d}z+Q\mathbf{d}z\mathbf{d}x+R\mathbf{d}x\mathbf{d}y$$

  - **性质**
    - 积分与曲面的侧有关，即

$$\iint_\Sigma P\mathbf{d}y\mathbf{d}z+Q\mathbf{d}z\mathbf{d}x+R\mathbf{d}x\mathbf{d}y=-\iint_{-\Sigma}P\mathbf{d}y\mathbf{d}z+Q\mathbf{d}z\mathbf{d}x+R\mathbf{d}x\mathbf{d}y$$

    其中$-\Sigma$表示曲面Σ的另外一侧

  - **两类面积分的联系（这里的联系没有理解）**

$$\iint_\Sigma P\mathbf{d}y\mathbf{d}z+Q\mathbf{d}z\mathbf{d}x+R\mathbf{d}x\mathbf{d}y=\iint_\Sigma P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma\mathbf{d}S$$

  其中$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$为曲面$\Sigma$上点$P(x,y,z)$处指定侧的**法线向量**的**方向余弦**(*注意不是切线的*)（跟这里**提高篇P197例题12**不一样，那里需要的是**切向向量**的**方向余弦**）有

$$\begin{cases}z=z(x,y)\to z-z(x,y,z)=F(x,y,z)=0\\ \cos\alpha=\dfrac{F_x'}{\sqrt{(F_x')^2+(F_y')^2+(F_z')^2}}=\dfrac{-z_x'}{\sqrt{(z_x')^2+(z_y')^2+1}}\\ \cos\beta=\dfrac{F_y'}{\sqrt{(F_x')^2+(F_y')^2+(F_z')^2}}=\dfrac{-z_y'}{\sqrt{(z_x')^2+(z_y')^2+1}}\\ \cos\gamma=\dfrac{F_z'}{\sqrt{(F_x')^2+(F_y')^2+(F_z')^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{(z_x')^2+(z_y')^2+1}}\\ \mathbf{d}S=\sqrt{(F_x')^2+(F_y')^2+(F_z')^2}\mathbf{d}x\mathbf{d}y=\sqrt{(z_x')^2+(z_y')^2+1}\mathbf{d}x\mathbf{d}y\end{cases}$$

  - **计算方法**
    - **直接法**
      - 设有向曲面$\Sigma:x=x(y,z),(y,z)\in D_{yz}$（投影到$yOz$面上），则

$$\iint_\Sigma P(x,y,z)\mathbf{d}y\mathbf{d}z=\pm\iint_{D_{yz}}P(x(y,z),y,z)\mathbf{d}y\mathbf{d}z$$

      若有向曲面Σ的法向量**与x轴正向的夹角为锐角**，即右侧，上式中取“$+$”号，否则取“$-$”号

- 设有向曲面$\Sigma: y=y(z,x),(z,x)\in D_{zx}$（投影到$xOz$面上），则

$$\iint_\Sigma Q(x,y,z)\mathbf{d}z\mathbf{d}x=\pm\iint_{D_{zx}}Q(x,y(z,x),z)\mathbf{d}z\mathbf{d}x$$

若有向曲面Σ的法向量**与y轴正向的夹角为锐角**，即右侧，上式中取“$+$”号，否则取“$-$”号

- 设有向曲面$\Sigma: z=z(x,y),(x,y)\in D_{xy}$（投影到$xOy$面上），则

$$\iint_\Sigma R(x,y,z)\mathbf{d}x\mathbf{d}y=\pm\iint_{D_{xy}}R(x,y,z(x,y))\mathbf{d}x\mathbf{d}y$$

若有向曲面Σ的法向量**与z轴正向的夹角为锐角**，即右侧，上式中取“$+$”号，否则取“$-$”号

- 按以上直接计算法计算形如

$$\iint_\Sigma P(x,y,z)\mathbf{d}y\mathbf{d}z+Q(x,y,z)\mathbf{d}z\mathbf{d}x+R(x,y,z)\mathbf{d}x\mathbf{d}y$$

的积分，往往计算量比较大，如果整个曲面Σ可用方程$z=z(x,y)$或$(x=x(y,z),y=y(x,z))$表示，则可以一*次性*将以上面积分化为一个重积分计算：

  - 若有向曲面Σ由方程$z=z(x,y)$给出，Σ在xOy面上的投影域为D_{xy}，$z=z(x,y)$在D_{xy}上由连续一阶偏导数，$P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)$在$\Sigma$上连续，则

$$\iint_\Sigma P\mathbf{d}y\mathbf{d}z+Q\mathbf{d}z\mathbf{d}x+R\mathbf{d}x\mathbf{d}y=\pm\iint_{D_{xy}}\Big[P(x,y,z(x,y))\Big(-\frac{\partial z}{\partial x}\Big)+Q(x,y,z(x,y))\Big(-\frac{\partial z}{\partial y}\Big)+R(x,y,z(x,y))\Big]\mathbf{d}x\mathbf{d}y$$

其中正负号由Σ的方向来决定，若Σ的法向量**与z轴正向的夹角为锐角**取"+"号，“-”号（上侧为正，下侧为负）

  - 若曲面Σ可以用方程$x=x(y,z)$或$y=y(x,z)$表示，则有类似的结论

- **利用高斯公式**
  - 设空间闭区域Ω是由分片光滑的**闭曲面**Σ所围成，函数$P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)$在$\Omega$上有连续一阶偏导数（**也是一个关键条件**），闭曲面Σ取**外侧**，则

$$\oint\!\!\oint_\Sigma P\mathbf{d}y\mathbf{d}z+Q\mathbf{d}z\mathbf{d}x+R\mathbf{d}x\mathbf{d}y=\iiint_\Omega\Big(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\Big)\mathbf{d}V$$

- **补面用高斯公式**
  - 若要计算的面积分的**积分曲面**Σ**不封闭**，且用直接法计算不方便，此时可补一块曲面Σ_1，使**原曲面**变成**封闭曲面**，则

$$\iint_\Sigma=\oint\!\!\oint_{\Sigma+\Sigma_1}-\iint_{\Sigma_1}$$

等式右边第一项如果满足高斯公式，则可用高斯公式计算，第二项用直接法计算

- **解题思路**
  - 积分曲面封闭
    - 高斯公式
  - 积分曲面不封闭
    - 补面用高斯公式
    - 直接法

(以一下这一部分我实在是当时没蚌埠住了，梯度我到11月1好才过完，回过头看这部分完全就懵逼了)

- **场论初步**
  - **梯度**
    - 第五章
  - **通量**
    - 定义
      - 设有向量场$\mathbf{A}(x,y,z)=P(x,y,z)\mathbf{i}+Q(x,y,z)\mathbf{j}+R(x,y,z)\mathbf{k}$，则称沿场中某**有向曲面**的一侧$\Sigma$的面积分$\Phi=\iint_\Sigma\mathbf{A}\cdot\mathbf{dS}$为向量场穿过曲面$\Sigma$这一侧的通量
    - 计算

$$\begin{aligned}&\mathbf{A}=P\mathbf{i}+Q\mathbf{j}+R\mathbf{k}\\&\mathbf{dS}=\mathbf{d}y\mathbf{d}z\mathbf{i}+\mathbf{d}z\mathbf{d}x\mathbf{j}+\mathbf{d}x\mathbf{d}y\mathbf{k}\\&\Phi=\iint_\Sigma P\mathbf{d}y\mathbf{d}z+Q\mathbf{d}z\mathbf{d}x+R\mathbf{d}x\mathbf{d}y\end{aligned}$$

  - **散度**
    - 设有向量场$\mathbf{A}(x,y,z)=P(x,y,z)\mathbf{i}+Q(x,y,z)\mathbf{j}+R(x,y,z)\mathbf{k}$，其中$PQR$都有连续一阶偏导，向量场$\mathbf{A}$在**点**$(x,y,z)$处的散度的计算公式为

$$div\mathbf{A}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial R}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$$

  - **旋度**

- 设有向量场$\mathbf{A}(x,y,z)=P(x,y,z)\mathbf{i}+Q(x,y,z)\mathbf{j}+R(x,y,z)\mathbf{k}$，其中$PQR$都有连续一阶偏导，向量场$\mathbf{A}$在**点**$(x,y,z)$处的旋度的计算公式为

$$\mathbf{rot(A)}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}$$

（相当于斯托克公式）

- **多元积分的应用**
  - 公式汇合（等做题之后再来汇总吧）
  - **变力做功**
    - 设有力场$\mathbf{F}(x,y,z)=P\mathbf{i}+Q\mathbf{j}+R\mathbf{k}$，则力$\mathbf{F}$沿曲线$\bar{AB}$从A到B所做的**功**为

$$\mathbf{W}=\int_{\bar{AB}}P\mathbf{d}x+Q\mathbf{d}y+R\mathbf{d}z$$

  - **通量**

$$\Phi=\iint_{\Sigma}P\mathbf{d}y\mathbf{d}z+Q\mathbf{d}z\mathbf{d}x+R\mathbf{d}x\mathbf{d}y$$