第十十一章多元函数积分学及其应用

重积分

- **二重积分**
  - **定义**
    - 讲究的是**平面上有界闭区域D**
  - **几何意义**
    - 二重积分$\iint_D f(x,y)\mathbf{d}\sigma$在几何上表示以区域$D$为底，曲面$z=f(x,y)$为顶，侧面是以$D$的边界为准线、母线平行于$z$轴的柱面的**曲顶主体的体积**
  - **二重积分的性质**
    - **线性定理**：

$$\iint_D \Big[\alpha f(x,y)+\beta g(x,y)\Big]\mathbf{d}\sigma=\alpha\iint_D f(x,y)\mathbf{d}\sigma+\beta\iint_D g(x,y)\mathbf{d}\sigma$$

    - **划分定理**：如果闭区域D被有限条曲线分为有限个部分闭区域，那么在D上的二重积分等于在各部分闭区域上的二重积分的和

$$\iint_D f(x,y)\mathbf{d}\sigma=\iint_{D_1} f(x,y)\mathbf{d}\sigma+\iint_D f(x,y)\mathbf{d_2}\sigma$$

    - **面积定理**：如果在D上，$f(x,y)=1$，σ为D的面积，那么

$$\sigma=\iint_D 1\mathbf{d}\sigma=\iint_D \mathbf{d}\sigma$$

    - **比较定理**：如果在D上，$f(x,y)\le g(x,y)$则

$$\iint_D f(x,y)\mathbf{d}\sigma\le\iint_D g(x,y)\mathbf{d}\sigma$$

      - 特殊地，由于$-|f(x,y)|\le f(x,y)\le|f(x,y)|$，有

$$\Big|\iint_D f(x,y)\mathbf{d}\sigma\Big|\le\iint_D |f(x,y)|\mathbf{d}\sigma$$

    - **估值定理**：设M，m分别为连续函数$f(x,y)$在闭区域D上的**最大值**和**最小值**，S表示D的面积，则

$$mS\le\iint_D f(x,y)\mathbf{d}\sigma\le MS$$

    - **二重积分中值定理**：设函数$f(x,y)$在闭区域D上连续，S为D的面积，则在D上至少存在一点(ε,η)，使

$$\iint_D f(x,y)\mathbf{d}\sigma=f(\varepsilon,\eta)S$$

  - **二重积分的计算**
    - **在直角坐标下计算**
      - **先y后x**

$$\iint_D f(x,y)\mathbf{d}\sigma=\int_a^b\mathbf{d}x\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)}f(x,y)\mathbf{d}y$$

        可见，最前面的x是确定的上下限，而对y的积分是用$y_1=\phi_1(x),y_2=\phi_2(x)$确定的上下限
      - **先x后y**

$$\iint_D f(x,y)\mathbf{d}\sigma=\int_c^d\mathbf{d}y\int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)}f(x,y)\mathbf{d}x$$

        可见，最前面的y是确定的上下限，而对x的积分是用$x_1=\varphi_1(y),x_2=\varphi_2(y)$确定的上下限
      - 对于复杂的平面图形需要分割图形成若干个符合二重积分计算的区域
    - **在极坐标下计算**
      - （这里的设定有那么一点点讲究）
      - **一般极坐标设定**

$$\begin{cases}x=r\cos\theta\\y=r\sin\theta\\0\le\theta\le2\pi\end{cases}$$

      - 极点O在区间D之外

$$\iint_D f(x,y)\mathbf{d}\sigma=\int_\alpha^\beta\mathbf{d}\theta\int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathbf{d}r$$

- 极点O在区间D的边界上

$$\iint_D f(x,y)\mathbf{d}\sigma = \int_\alpha^\beta \mathbf{d}\theta \int_0^{r(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\mathbf{d}r$$

- 极点O在区间D的内部(如果圆的圆心O是在坐标原点上，那么$r(\theta)=r$是一个确定的值)

$$\iint_D f(x,y)\mathbf{d}\sigma = \int_0^{2\pi} \mathbf{d}\theta \int_0^{r(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\mathbf{d}r$$

- 环形域，且极点O在环形域内部

$$\iint_D f(x,y)\mathbf{d}\sigma = \int_0^{2\pi} \mathbf{d}\theta \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\mathbf{d}r$$

  - **适合用极坐标计算的**
    - 二重积分的**被积函数**一般具有下列形式

$$f(\sqrt{x^2+y^2}),\quad f\left(\frac{y}{x}\right),\quad f\left(\frac{x}{y}\right)$$

      之所以适合极坐标是由于它们**在极坐标下**都可以化为r或θ的**一元函数**
    - 适合用极坐标计算的二重积分的**积分域**一般应具有以下形状
      - 圆心在原点的圆域
      - 圆环域或它的一部分（如扇形）
      - **中心在坐标轴上且边界圆过原点的圆域**（$x^2+y^2=2ax(r=2a\cos\theta)$；$x^2+y^2=2by(r=2b\sin\theta)$）或者它们的一部分
- **极坐标的灵活设定**（对于圆心不在坐标原点上的，只要不在坐标原点上的，用这个比较好）
  - 例如对于D为$x^2+y^2\le x+y$，则它的灵活设定为

$$\begin{cases} x = r\cos\theta + \dfrac{1}{2} \\ y = r\sin\theta + \dfrac{1}{2} \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{cases}$$

  - **这样当带入xy参数时，对应的θ就是从$[0,2\pi]$上积分**，具体是

$$\int_0^{2\pi} \mathbf{d}\theta \int_0^R f(x-\frac{1}{2}, y-\frac{1}{2})\rho\mathbf{d}\rho$$

  - **此方法可以预先跟对称性结合使用**（提高篇P172例题5）
- **利用对称性和奇偶性进行计算(一定**要用这性质对积分进行**化简**)
  - 利用积分域的对称性和被积函数的**奇偶性**
    - 若积分域D关于y轴对称，且被积函数$f(x,y)$关于x有奇偶性，则

$$\iint_D f(x,y)\mathbf{d}\sigma = \begin{cases} 2\iint_{D_1} f(x,y)\mathbf{d}\sigma, & f(x,y)\text{关于}x\text{为偶函数，即}f(-x,y)=f(x,y) \\ 0, & f(x,y)\text{关于}x\text{为奇函数，即}f(-x,y)=-f(x,y) \end{cases}$$

    - 若积分域D关于x轴对称，且被积函数$f(x,y)$关于y有奇偶性，则

$$\iint_D f(x,y)\mathbf{d}\sigma = \begin{cases} 2\iint_{D_1} f(x,y)\mathbf{d}\sigma, & f(x,y)\text{关于}y\text{为偶函数，即}f(x,-y)=f(x,y) \\ 0, & f(x,y)\text{关于}y\text{为奇函数，即}f(x,-y)=-f(x,y) \end{cases}$$

  - 利用变量的**对称性**
    - 若**积分域D**关于直线y=x对称，换言之，**表示积分域D的等式或不等式中将x与y对调后原等式或不等式不变**

$$\iint_D f(x,y)\mathbf{d}\sigma = \iint_D f(y,x)\mathbf{d}\sigma$$

      即被积函数中x和y对调积分值不变（有时候这是解题的关键）
    - **骚**，其实这里的对称可以**有选择性地对称**（提高P175方法1），例如对于$\sin\sqrt{x^2+y^2}$可以不用对称，直接后面写成$\sin r$
- **计算步骤**
  - 画出积分域D的草图，判定**积分域是否有对称性**，**被积函数是否有奇偶性**，如果能用对称性，奇偶性计算或化简原积分就先进行计算或化简，否则进行下一步（**化简步骤一定要做**，即使无明显化简，也要**切分积分域寻找对称**）
  - 划分**不规则**积分域为**规则**积分域（**形成对称性**）
  - 选择化为累次积分的**坐标系**（直角or极坐标？）（主要根据积分域的形状和被积函数的形式）
  - 选择累次积分的**积分次序**（谁前谁后）（主要根据积分域和被积函数）
  - 确定累次积分的**积分限**并计算**累次积分**
  - （**补充**：对于被积函数中带有绝对值的，需要**划分不同的积分区域去掉绝对值**（提高篇P174例题7））
- **骚**，**边界曲线为参数方程的二重积分**（提高篇P174例题6）
  - 就是围城D的方程由**曲线的参数方程**给出
  - 先大概画出草图

        - 直接用上$y(x)$并根据草图确定积分限并带入被积函数中计算
        - 先计算dy的积分，把y看成被积变量
        - 当只剩下$y(x)$的dx积分时，用y的参数方程替代所有$y(x)$，而用x的参数方程替换所有的dx，最后是dt，同样积分限上的也要变
        - （**事实证明，离开例子谈算法是最抽象的事情了**）
    - **累次积分交换积分次序**
        - 如果题目给出的累次积分次序不好算，通常要**交换积分次序**进行计算
        - 如果交换积分次序后任不好算，就需要**更换坐标系**
    - **二重积分的综合题（骚气）（完整的一个系列，是二重积分的代数运算）**
        - 主要的思路是把二重积分转化为一元积分（然后使用一元积分的性质等）
        - **如果给定D**，对

$$f(x,y)=g(x,y)+\iint_D f(u,v)\mathbf{d}u\mathbf{d}v$$

        这种嵌套的，其实后面的$\iint_D f(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$应该看成**一个常数**，而$f(x,y)$在同样的D上做二重积分就等于这个常数
        - **如果没有给定D**，仅有

$$f(t)=g(t)+\iint_{x^2+y^2\le 4t^2} f(\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2})\mathbf{d}x\mathbf{d}y$$

        这种后面的二重积分出来只能是一个对t的函数且是**一个变上限积分，并不是一个常数**，那么就需要化简后面的二重积分得到一个**变上限积分**，对于变上限积分，需要对之**求导**，所以题目变成**微分方程**
        - **对于二重积分的变上限积分求导**（两次求导）

$$\int_0^x \mathbf{d}u\int_0^{u^2} f(t,u)\mathbf{d}t\rightarrow \text{对}x\text{求导}\rightarrow\int_0^{x^2} f(t,x)\mathbf{d}t\rightarrow\text{对}x\text{求导}\rightarrow f(x^2,x)2x$$

        - **骚气**，如果求导都已经帮你求好了，那么就是要**求积分**了（提高篇P180例题16）

$$\begin{aligned}\iint_D\frac{xf_x'+yf_y'}{x^2+y^2}\mathbf{d}x\mathbf{d}y&\rightarrow\int_0^{2\pi}\mathbf{d}\theta\int_\epsilon^1\cos\theta f_x'+\sin\theta f_y'\mathbf{d}r(\text{竟然看不到下一步})\\&\rightarrow\int_0^{2\pi}\mathbf{d}\theta\int_\epsilon^1\cos\theta f_x'(r\cos\theta,r\sin\theta)+\sin\theta f_y'(r\cos\theta,r\sin\theta)\mathbf{d}r\\&\rightarrow(\text{这是典型的对}r\text{求导后得到(关键一步)})\\&\rightarrow\int_0^{2\pi}\mathbf{d}\theta\Big[f(r\cos\theta,r\sin\theta)\Big]\Big|_\epsilon^1\text{（根据题意）}=-\int_0^{2\pi}f(\epsilon\cos\theta,\epsilon\sin\theta)\mathbf{d}\theta\\&\rightarrow(\text{超级无敌积分中值定理消去积分号})\\&\rightarrow-2\pi f(\epsilon\cos\bar\theta,\epsilon\sin\bar\theta)\\&\rightarrow\text{恭喜你成功计算最难的二重积分}\end{aligned}$$

    - **二重积分与积分不等式**（都是地狱题）
        - **将相乘的一元积分转变为二重积分，通过改变积分的变量而不会影响积点的结果**

$$\int_a^b f(x)\mathbf{d}x\int_a^b g(x)\mathbf{d}x=\int_a^b f(x)\mathbf{d}x\int_a^b g(y)\mathbf{d}y=\iint_{D=\{a\le x\le b,a\le y\le b\}}f(x)g(y)\mathbf{d}x\mathbf{d}y$$

        这样的做法相比于一元积分中更换积分上限，在理论上有质的飞跃
        - 而D往往具有强烈的$y=x$对称性，**如果直接x换y或者y换x往往会直接等于**0
        - 不等式的奥秘就是跟据题意，运用对称性，**绕圈子，绕出不等的结果**
        - 一定会遇到的"**柯西—施瓦茨积分不等式**"（用二重积分的去解决，主要是运用了一元积分中积分结果与积分变量无关，所以这里**一元积分和二重积分相互渗透了**，骚的一批）提高P182li18
        - 将相乘的绕各种圈子就是为了用上题目的条件，这也是不等式的解题方法，似乎题目的条件有预示着解题思路的走向（提高P181li19）
        - 提高P182li20，**对积分域的放大缩小**；利用泰勒公式来得到e^{-x^2}的上界
- **三重积分**
    - **定义**
        - 讲就是的是**空间有界闭区域Ω上**的
    - **几何意义**
        - 若$f(x,y,z)=1$，$\iiint_\Omega\mathbf{d}V=$积分域Ω的体积
        - 若$\mu=f(x,y,z)$为空间物体Ω的体密度，$\iiint_\Omega f(x,y,z)\mathbf{d}V=$空间物体Ω的质量
    - **三重积分性质**
        - **在直角坐标下计算**
            - **先一后二**：空间体是一个柱体，空间体的截面往某平面上的投影区域D恒定的（自己的理解，**其实不一定的**（提高篇P183例题21））并且空间体**有明显的上下曲面为界**
                - 如果投影区域为D_{xy}则

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\mathbf{d}V=\iint_{D_{xy}}\mathbf{d}x\mathbf{d}y\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}f(x,y,z)\mathbf{d}z$$

- 如果投影到其他平面则依此类推
- **先二后一**：空间体的截面往某平面的投影区域D不是恒定的（自己的理解）并且**没有明显的上下曲面为界**，曲面几乎是相容在一起（提高篇P183例题22）
  - 设空间闭区域$\Omega=\{(x,y,z)|(x,y)\in D_z, a\le z\le b\}$，其中$D_z$为坐标为$z$的平面截闭区域$\Omega$所得到**平面闭区域**，则

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\mathbf{d}V=\int_a^b \mathbf{d}z\iint_{D_z} f(x,y,z)\mathbf{d}x\mathbf{d}y$$

  就是选取任意平面z截空间区域Ω，然后求截面D_z，其实就是xy在截面D_z上的投影
- **三重积分交换积分次序（提高篇P186例题28）**
  - 题目中**被积函数只出现了z所以将z的积分dz要放在最后**
  - 而交换积分只能是**两两交换**
  - 例如对

$$\int_0^1\mathbf{d}x\int_0^x\mathbf{d}y\int_0^y\frac{\sin z}{(1-z)^2}\mathbf{d}z$$

  先是画出$\mathbf{d}y\mathbf{d}z$的平面图，然后交换成$\mathbf{d}z\mathbf{d}y$积分，得到

$$\int_0^1\mathbf{d}x\int_0^x\mathbf{d}z\int_z^x\frac{\sin z}{(1-z)^2}\mathbf{d}y=\int_0^1\mathbf{d}x\int_0^x\frac{(x-z)\sin z}{(1-z)^2}\mathbf{d}z$$

  - 然后画出$\mathbf{d}x\mathbf{d}z$的平面图，然后交换成$\mathbf{d}z\mathbf{d}x$积分，得到

$$\int_0^1\mathbf{d}z\int_z^1\frac{(x-z)\sin z}{(1-z)^2}\mathbf{d}z$$

- **在柱坐标下计算**
  - 柱坐标(r,θ,z)与**直角坐标**的关系

$$\begin{cases}x=r\cos\theta, & 0\le r<+\infty\\ y=r\sin\theta, & 0\le\theta\le 2\pi\\ z=z, & -\infty<z<+\infty\end{cases}$$

  - $\mathbf{d}V=r\mathbf{d}r\mathbf{d}\theta\mathbf{d}z$
  -

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\mathbf{d}V=\iiint_\Omega f(r\cos\theta,r\sin\theta,z)r\mathbf{d}r\mathbf{d}\theta\mathbf{d}z$$

  - 适合用柱坐标计算的三重积分的**被积函数**一般应具形式

$$f(x,y,z)=\varphi(z)g(x^2+y^2)$$

  - 适合用柱坐标计算的三重积分的**积分域**一般应为**柱体、锥体、柱面、锥面**与其他曲面所围空间体等
- **在球坐标下计算**
  - 球坐标(r,φ,θ)与**直角坐标**的关系

$$\begin{cases}x=r\sin\varphi\cos\theta, & 0\le r<+\infty\\ y=r\sin\varphi\sin\theta, & 0\le\varphi<\pi\\ z=r\cos\varphi, & 0\le\theta\le 2\pi\end{cases}$$

  - $\mathbf{d}V=r^2\sin\varphi\mathbf{d}r\mathbf{d}\varphi\theta$
  -

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)=\iiint_\Omega f(r\sin\varphi\cos\theta,r\sin\varphi\sin\theta,r\cos\varphi)r^2\sin\varphi\mathbf{d}r\mathbf{d}\varphi\mathbf{d}\theta$$

  - 适合用球坐标计算的三重积分的**被积函数**一般应具形式

$$f(x,y,z)=\varphi(x^2+y^2+z^2)$$

  - 适合用球坐标计算的三重积分的**积分域**一般应为**球体、半球体、锥面与球面**所围空间体等
- 利用**对称性**和**奇偶性**进行计算
  - 利用积分域的被积函数的**奇偶性**（化简的第一步）
    - 若积分域Ω关于xOy坐标面对称，且被积函数$f(x,y,z)$关于z有奇偶性，则

$$\iiint_\Omega f(x.y,z)\mathbf{d}V=\begin{cases}2\iiint_{\Omega_1} f(x,y,z)\mathbf{d}V, & f(x,y,z)\text{关于}z\text{是偶函数，即}f(x,y,-z)=f(x,y,z)\\ 0, & f(x,y,z)\text{关于}z\text{是奇函数，即}f(x,y,-z)=-f(x,y,z)\end{cases}$$

    其中Ω_1为Ω在xOy面上侧的部分
    - 对于积分域关于其他xOz，yOz，有相似的结论
  - 利用变量的**对称性**
    - **若将表示积分域Ω的方程中的x和y对调后方程不变，则将被积函数中x和y对调积分值不变**，即

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\mathbf{d}V=\iiint_\Omega f(y,x,z)\mathbf{d}V$$

- 当然还有其他的情况
- 例如要计算

$$\iiint_\Omega (x^2+y^2)\mathbf{d}V$$

，其中Ω由$x^2+y^2+z^2=a^2(a>0)$围成
由于在方程$x^2+y^2+z^2=a^2$中将x和y对调方程不变，则

$$\iiint_\Omega x^2\mathbf{d}V=\iiint_\Omega y^2\mathbf{d}V$$
$$\iiint_\Omega x^2\mathbf{d}V=\iiint_\Omega z^2\mathbf{d}V$$

则

$$\iiint_\Omega (x^2+y^2)\mathbf{d}V=\frac{2}{3}\iiint_\Omega (x^2+y^2+z^2)\mathbf{d}V=\frac{2}{3}\int_0^{2\pi}\mathbf{d}\theta\int_0^\pi\mathbf{d}\varphi\int_0^a r^4\sin\varphi\mathbf{d}r=\frac{8\pi a^5}{15}$$

你不觉得这样计算很方便吗?

- **重积分的应用**
  - **曲面的面积**
    - **直接法**
      - 对于$z=f(x,y)$的曲面

$$A=\iint_{D_{xy}}\sqrt{1+(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2}\mathbf{d}x\mathbf{d}y$$

      - 对于$x=g(y,z)$的曲面

$$A=\iint_{D_{yz}}\sqrt{1+(\frac{\partial x}{\partial y})^2+(\frac{\partial x}{\partial z})^2}\mathbf{d}y\mathbf{d}z$$

      - 对于$y=f(x,z)$的曲面

$$A=\iint_{D_{xz}}\sqrt{1+(\frac{\partial y}{\partial x})^2+(\frac{\partial y}{\partial z})^2}\mathbf{d}x\mathbf{d}z$$

    - 利用曲面的参数方程求曲面的面积（没讲）
  - **质心**
    - 质心坐标，$\mu(x,y)$是总质量

$$\bar{x}=\frac{M_y}{M}=\frac{\iint_D x\mu(x,y)\mathbf{d}\sigma}{\iint_D \mu(x,y)\mathbf{d}\sigma},\bar{y}=\frac{M_x}{M}=\frac{\iint_D y\mu(x,y)\mathbf{d}\sigma}{\iint_D \mu(x,y)\mathbf{d}\sigma}$$

  - **转动惯量**
    - 在设有一薄片，占有xOy面上的闭区域D，在点(x,y)处的面密度为$\mu(x,y)$，假定$\mu(x,y)$在D上连续。现在要求该薄片对于x轴的转动惯量I_x以及对于y轴的转动惯量I_y。

$$I_x=\iint_D y^2\mu(x,y)\mathbf{d}\sigma,I_y=\iint_D x^2\mu(x,y)\mathbf{d}\sigma$$

    - 类似第，占有空间有界闭区域Ω，在点(x,y,z)处的密度为$\rho(x,y,z)$（假定$\rho(x,y,z)$在Ω上连续）的物体对于x,y,z轴的转动惯量为

$$I_x=\iiint_\Omega (y^2+z^2)\rho(x,y,z)\mathbf{d}v$$
$$I_y=\iiint_\Omega (z^2+x^2)\rho(x,y,z)\mathbf{d}v$$
$$I_z=\iiint_\Omega (x^2+y^2)\rho(x,y,z)\mathbf{d}v$$

  - **引力**：空间中一物体对物体外一点$P_0(x_0,y_0,z_0)$处单位质量的质点的引力问题
    - $$F=(F_x,F_y,F_z)=\Big(\iiint_\Omega\frac{G\rho(x,y,z)(x-x_0)}{r^3}\mathbf{d}v,\iiint_\Omega\frac{G\rho(x,y,z)(y-y_0)}{r^3}\mathbf{d}v,\iiint_\Omega\frac{G\rho(x,y,z)(z-z_0)}{r^3}\mathbf{d}v\Big)$$
    - 物体密度$\rho(x,y,z)$
    - $r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$
    - 如果是二维的空间，那么就是把Ω换成D就行

曲线积分与曲面积分

- **曲线积分**
  - **第一类线积分**（对弧长的线积分）

- 定义，一个有界函数的定义域是一分段光滑曲线L，则函数在L上对弧长的线积分为$\int_L f(x,y)\mathbf{d}s$
- **性质**
  - **与积分路径方向无关**，即$\int_{L(\overset{\frown}{AB})} f(x,y)\mathbf{d}s = \int_{L(\overset{\frown}{BA})} f(x,y)\mathbf{d}s$
  - **线性性质**：$\int_L \left[\alpha f(x,y) + \beta g(x,y)\right]\mathbf{d}s = \alpha\int_L f(x,y)\mathbf{d}s + \beta\int_L g(x,y)\mathbf{d}s$
  - **分段性质**：$\int_L f(x,y)\mathbf{d}s = \int_{L_1} f(x,y)\mathbf{d}s + \int_{L_2} f(x,y)\mathbf{d}s\backslash$
  - **不等式性质**：设在L上$f(x,y) \le g(x,y)$，则

$$\int_L f(x,y)\mathbf{d}s \le \int_L g(x,y)\mathbf{d}s$$

    ，特别地，有

$$\Big|\int_L f(x,y)\mathbf{d}s\Big| \le \int_L \big|f(x,y)\big|\mathbf{d}s$$

- **计算方法**
  - **直接法（总的来说，计算方法是确定的）**
    - 若曲线L用参数方程

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \quad \alpha \le t \le \beta$$

      则

$$\int_L f(x,y)\mathbf{d}s = \int_\alpha^\beta f(x(t),y(t))\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\mathbf{d}t$$

      注意这里的积分限下限小上限大
    - 若曲线L用直角坐标$y = y(x), a \le x \le b$表示，则

$$\int_L f(x,y)\mathbf{d}s = \int_a^b f(x,y(x))\sqrt{1+y'^2(x)}\mathbf{d}x$$

    - 若曲线L用极坐标方程$r = r(\theta), \alpha \le \theta \le \beta$给出，则（同样的这里的计算方式跟参数方程一样）（**有些时候是需要用一股脑的极坐标去转化某些曲线的，因为直接算算不了，同时直接转化为参数方程又很难**（提高篇P191例题3））

$$\int_L f(x,y)\mathbf{d}s = \int_\alpha^\beta f(r(\theta)\cos\theta, r(\theta)\sin\theta)\sqrt{r^2+r'^2}\mathbf{d}\theta$$

  - **利用奇偶性和对称性**（**对曲线曲面积分同样适用，不单单是在二重积分中**）
    - **奇偶性**
      - 若积分曲线L关于y轴对称，且**被积函数**$f(x,y)$关于x由奇偶性，则

$$\int_L f(x,y)\mathbf{d}s = \begin{cases} 2\int_{L_1} f(x,y)\mathbf{d}s, & \text{当}f(x,y)\text{关于}x\text{为偶函数} \\ 0, & \text{当}f(x,y)\text{关于}x\text{为奇函数} \end{cases}$$

      - 若积分曲线L关于x轴对称，且被积函数$f(x,y)$关于y奇偶性，则

$$\int_L f(x,y)\mathbf{d}s = \begin{cases} 2\int_{L_1} f(x,y)\mathbf{d}s, & \text{当}f(x,y)\text{关于}y\text{为偶函数} \\ 0, & \text{当}f(x,y)\text{关于}y\text{为奇函数} \end{cases}$$

        这里的L_1为L在x轴上侧的部分
    - 利用变量的**对称性**
      - 若积分曲线L_1关于直线$y = x$对称，则$\int_L f(x,y)\mathbf{d}s = \int_L f(y,x)\mathbf{d}s$
      - 以上只讨论了**平面上对弧长的线积分**，**空间中对弧长的线积分**完全类似（提高篇P191例题4，**秀我一脸**，**对称性在平面相交成曲线中也是能够利用的**）
      - 例如，如果空间曲线为

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2 = R^2 \\ x+y+z = 0 \end{cases}$$

        这里通过**曲面**得到的**曲线**也是有**对称性**的，对于被积函数$\oint_L x^2\mathbf{d}s$能够写成$\frac{1}{3}\oint_L x^2+y^2+z^2\mathbf{d}s$（🐂🍺）
      - （当然这里的正规做法是**求出曲线的参数方程**）
      - 这类题目是无法得到曲线的参数方程的，并且唯一的切入点就是**坐标之间相互对称+曲线的弧长**。并且尽量地**使用空间曲线中的公式去表示原式中的公式**
- **第二类的曲面积分**（对坐标的线积分）
  - **定义**

$$\int_{L(\overset{\frown}{AB})} P(x,y)\mathbf{d}x + Q(x,y)\mathbf{d}y$$

  - **性质**
    - **与积分路径的方向有关**，即

$$\int_{L(\overline{AB})} P\mathbf{d}x+Q\mathbf{d}y=-\int_{L(\overline{BA})} P\mathbf{d}x+Q\mathbf{d}y$$

- **两类线积分的联系**

$$\int_{L(\overline{AB})} P\mathbf{d}x+Q\mathbf{d}y=\int_{L(\overline{AB})}(P\cos\alpha+Q\cos\beta)\mathbf{d}s$$

其中$\cos\alpha,\cos\beta$为有向曲线L的**切线的方向余弦**，它们存在这样的关系

$$\begin{cases}\mathbf{d}s\cos\alpha=\mathbf{d}x\\ \mathbf{d}s\cos\beta=\mathbf{d}y\end{cases}$$

（在向量中我们知道，方向余弦是向量在xy轴上的投影分量，方向余弦表示一个单位向量，所以ds在xy上的分量就是通过上述计算得到dxdy）

- 曲线上的**外法线向量的方向余弦与切线的方向余弦**的关系(提高篇P197例题12)

$$\cos(\mathbf{n},x)=\cos(\tau,y)=\cos\beta$$
$$\cos(\mathbf{n},y)=-\cos(\tau,x)=-\cos\alpha$$

- 有

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial\mathbf{n}}\mathbf{d}s=\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\cos(\mathbf{n},x)\mathbf{d}s+\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\cos(\mathbf{n},y)\mathbf{d}s$$

- 结合上面外法线和切线的方向余弦的转换关系，有

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial\mathbf{n}}\mathbf{d}s=\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\cos(\mathbf{n},x)\mathbf{d}s+\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\cos(\mathbf{n},y)\mathbf{d}s=\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\mathbf{d}y-\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\mathbf{d}x$$

- **计算方法**
  - L是否封闭?
    - 是：格林
    - 否：是否与路径无关
      - 是：换路径or原函数
      - 否：直接算or补线用格林公式
  - 1. **直接法**
    - 设平面光滑曲线段（**曲线开闭**）

$$L:\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\end{cases},\quad t\in[\alpha,\beta]\text{或}t\in[\beta,\alpha]$$

，则**直接带入参数函数**

$$\int_L P\mathbf{d}x+Q\mathbf{d}y=\int_\alpha^\beta[P(x(t),y(t))x'(t)+Q(x(t),y(t))y'(t)]\mathbf{d}t$$

这里下限α对应L的起点，上限β对应L的终点

  - 2. **利用格林公式**（闭区域要求路径正向）（**曲线闭合**）
    - 设**闭区域**D由分段光滑曲线L围成，$P(x,y)$及$Q(x,y)$在D上有连续一阶偏导数(**这声明条件很重要**)，则（**线积分变为二重积分，注意利用==对称性和奇偶性**）

$$\oint_L P\mathbf{d}x+Q\mathbf{d}y=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{d}x\mathbf{d}y$$

其中L是D的**取正面的边界曲线**（所谓L的正向是指有人沿着L的某一方向前进，区域D始终在他的**左侧**==)

- **注意1**
  - 提高篇P193例题7，**对于不包括圆心的D，PQ自然在D上有一阶偏导数，所以直接使用格林公式**
  - 如果偏导后两者相等，**那么就直接等于0了，同时说明线积分与路径无关**
  - 但是对于通过圆心的椭圆，*PQ在原点上是没有意义的*，所以PQ并不是在D中都有一阶偏导数！所以结合线积分与路径无关，可以把L改为绕开原点O的路径，通常取新的路径为L+C，C路径为$ax^2+by^2=\epsilon^2$。同时对于$ax^2+by^2=\epsilon^2$需要带入被积函数中把ax^2+by^2更换为ϵ^2，其实这个ϵ的取值并不影响结果，所以取1就很好否则如果直接求PQ偏导计算，那么还是0。
  - 其实对新路径L+C求线积分$\oint_L+\oint_C=0$，使用格林公式计算结果还是0，所以最后是$\oint_L=\oint_{-C}$
  - 满足上述解题思路的被积函数有

$$\begin{cases}\int_L\dfrac{(x-y)\mathbf{d}x+(x+y)\mathbf{d}y}{x^2+y^2}\\ \int_L\dfrac{(x+y)\mathbf{d}x-(x-y)\mathbf{d}y}{x^2+y^2}\\ \int_L\dfrac{x\mathbf{d}y-y\mathbf{d}x}{4x^2+y^2}\\ \int_L\dfrac{x\mathbf{d}y-y\mathbf{d}x}{x^2+y^2}\end{cases}$$

- 沿着任何一段**不包含原点在内**的分段光滑闭曲线的**积分为0**
- 沿着任何一段**包含原点在在内**的分段光滑闭曲线的**积分均相等**
- （类似题目，提高篇P194例题8）
- **注意2**
- $P(x, y) Q(x, y)$在闭区域D上处处有连续一阶偏导数
- 积分曲线L为闭曲线且取正向

- 3. **补线用格林公式**（补线后围城区域取路径正向）（**曲线不闭合**）
  - 若要计算的线积分的积分曲线$L(\overparen{AB})$**不封闭**，但**直接法计算也不方便**，此时可补一条曲线$L_1(\overline{BA})$，**使原曲线变成封闭曲线**，则

$$\int_{L(\overline{AB})} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \oint_{L(\overline{AB})+L_1(\overline{BA})} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y - \int_{L_1(\overline{BA})} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$$

此时，对等式右端有一项如果满足格林公式条件，**则可用格林公式**，**第二项考虑用方法4**（提高篇P195例题9）

- 4. **利用线积分与路径无关**（**曲线不闭合**）
  - **首先**，判断所要计算的线积分与路径无关
    - **线积分与路径无关的判定**
      - **定理1**：设$(x, y) Q(x, y)$在单独连通D上有连续一阶偏导数，则以下**四条等价**：
        - 线积分$\int P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$与路径无关（**没见过**）
        - $\oint_C P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = 0$，其中$C$是$D$中任一分段光滑闭曲线（提高篇P196例题10）
        - $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \forall (x, y), \in D$（**判断线积分是否与路径无关**）
        - 存在可微函数$F(x, y)$，使$P(x, y)\mathrm{d}x + Q(x, y)\mathrm{d}y = \mathrm{d}F(x, y)$（**此条件与上条件等价**）
  - **其次**，如果与线积分路径无关，应该怎么样去计算比较好
    - 计算与路径无关的线积分
      - **方法1：折线法**
        - 通常取平行于坐标轴的折线
        - 且折现的运动方向要跟原路径的运动方向一致，**并不是两点之间的连线**
      - **方法2：利用原函数**：
        - 设$F(x, y)$是$P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$的原函数，即$P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \mathrm{d}F(x, y)$，则

$$\int_{(A)}^{(B)} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = F(x_2, y_2) - F(x_1, y_1)$$

其中L的起点为$A(x_1, y_1)$，终点为$B(x_2, y_2)$

        - 求$F(x, y)$常用的有两种方法，即**偏积分**和**凑微分**
          - 就是对当前的PQ两函数求他们的原函数
          - 最后PQ原函数应该相等，并且P的原函数对y偏导应等于Q；同理Q的原函数对x偏导应等于P

- 注意
  - 2.的格林公式和4的路径无关之间是有点区别的
    - 2中直接计算出来的$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$是说明在闭区域D内的线积分为0，同时也说明路径无关，那么在遇到PQ偏导不存在的情况，路径无关的性质说明可以绕开“PQ偏导不存在的情况”，这并不会影响结果
    - 4中直接计算出来的$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$是说明在路线不闭合的情况，可以使用**折线法**和**原函数法**，与2有着根本的区别
- **总结**：用以上四种方法计算**对坐标的线积分**时考虑问题的**基本思路**是：
  - 首先考察积分曲线L是否封闭
    - 如果**曲线L封闭**，考虑用格林公式计算
      - 考察PQ偏导是否都存在
        - **都存在**：直接用格林公式计算（线积分化为二重积分并且注意使用对称性奇偶性）
        - **某些情况不存在**
          - 考察PQ偏导是否相等
            - **相等**：说明路径无关，抠出使PQ偏导不存在的情况，然后按照**2格林公式注意1**计算
            - **不相等**：*说明路径有关，（这种情况还没遇到过）*
    - 如果**曲线L不封闭**，应考虑方法4
      - 考察PQ是否相等（不用考察是否存在）
        - **相等**：说明路径无关
          - 折现法
          - 原函数法
        - **不相等**：说明路径有关（例题11）
          - 补线用格林公式法
          - 直接法
- 对**空间的线积分**$\int_L P(x, y, z)\mathrm{d}x + Q(x, y, z)\mathrm{d}y + R(x, y, z)\mathrm{d}z$，定义，性质，计算方法都与平面线积分完全类似，在这不一一重复，这里只就**空间线积分**常用的两种计算方法进行讨论

- **直接法**：设空间曲线的参数方程

$$L:\begin{cases}x=x(t),\\ y=y(t), & t\in[\alpha,\beta]\text{或}t\in[\beta,\alpha]\\ z=z(t)\end{cases}$$

  则**直接带入参数函数**

$$\int_L P\mathbf{d}x+Q\mathbf{d}y+R\mathbf{d}z=\int_\alpha^\beta[P(x(t),y(t),z(t))x^{'}(t)+Q(x(t),y(t),z(t))y^{'}(t)+R(x(t),y(t),z(t))z^{'}(t)]\mathbf{d}t$$

  这里下限α对应于L的起点，上限β对应于L的终点
- **利用斯托克斯公式**：设Γ为分段光滑的空间有向**闭曲线**，Σ是以Γ为边界的分段光滑**有向曲面**，Γ的方向与Σ符合右手法则，P,Q,R在Σ上有连续一阶偏导数，则（提高篇P198）

$$\oint_\Gamma P\mathbf{d}x+Q\mathbf{d}y+R\mathbf{d}z=\iint_\Sigma\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathbf{d}y\mathbf{d}z+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathbf{d}z\mathbf{d}x+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{d}x\mathbf{d}y$$

  该式子就叫做**斯托克斯公式**

$$\iint_\Sigma\begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}\mathbf{d}s\quad\text{有}\begin{cases}\cos\alpha\cdot\mathbf{d}s=\mathbf{d}y\mathbf{d}z\\ \cos\beta\cdot\mathbf{d}s=\mathbf{d}z\mathbf{d}x\\ \cos\gamma\cdot\mathbf{d}s=\mathbf{d}x\mathbf{d}y\end{cases}$$

- **曲面积分**
  - **定义**
    - 设Σ为分片光滑曲面片，$f(x,y,z)$为定义在Σ上的有界函数，$f(x,y,z)$在Σ上对面的面积分为$\iint_\Sigma f(x,y,z)\mathbf{d}S$
  - **性质**
    - 与曲面Σ的侧的选取无关，即

$$\iint_\Sigma f(x,y,z)\mathbf{d}S=\iint_{-\Sigma}f(x,y,z)\mathbf{d}S$$

    其中$-\Sigma$表示曲面Σ的另外一侧
  - **对面积的面积分（第一类面积分）**
    - **直接法**
      - 设积分曲面Σ由方程$z=z(x,y)$给出，Σ在xOy面上的投影域为D，函数$z(x,y)$在D上有连续一阶偏导数，$f(x,y,z)$在Σ上连续，则

$$\iint_\Sigma f(x,y,z)\mathbf{d}S=\iint_D f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+(z_x^{'})^2+(z_y^{'})^2}\mathbf{d}x\mathbf{d}y$$

      如果积分曲面Σ由方程$x=x(y,z)$或$y=y(x,z)$给出，也可类似地把对面积的**曲面积分**化为相应的**二重积分**（如果$z(x,y)$没有，就要转化成$x=x(y,z)$或$y=y(x,z)$）
      - 注意
        - 这里的$z=z(x,y)$是这么理解的
        - 如果这个曲面Σ是由两个曲面截取得到的，那么这个曲面Σ就用其中一个曲面的方程来表示就行（提高篇P202例题1）例如*锥面和柱面相截，截面同样用锥面的方程来表示*
    - **利用奇偶性和对称性**
      - 利用积分曲面的**关于平面的对称性**和被积函数的**奇偶性**
        - 若积分曲面Σ关于xOy坐标面对称，且被积函数$f(x,y,z)$关于z有奇偶性，则

$$\iint_\Sigma f(x,y,z)\mathbf{d}S=\begin{cases}2\iint_{\Sigma_1}f(x,y,z)\mathbf{d}S, & \text{当}f(x,y,z)\text{关于}z\text{为偶函数}\\ 0, & \text{当}f(x,y,z)\text{关于}z\text{为奇函数}\end{cases}$$

        其中Σ_1为Σ在xOy坐标面以上的部分
        - 当积分曲面Σ关于xOz坐标面对称，且被积函数关于y有奇偶性；当积分曲面Σ关于yOz坐标面对称，且被积函数关于x有奇偶性时有相应的结论
      - 利用**变量的对称性**
        - 如果**积分曲面**Σ方程中某两个变量对调其方程不变，则将被积函数中这两个变量对调积分值不变
        - 例如：若Σ的方程中x和y对调方程不变，则

$$\iint_\Sigma f(x,y,z)\mathbf{d}S=\iint_\Sigma f(y,x,z)\mathbf{d}S$$

        - 计算积分

$$\iint_\Sigma x^2\mathbf{d}S$$

        ，其中Σ为球面$x^2+y^2+z^2=R^2$
        - 由于$x^2+y^2+z^2=R^2$中将x和y对调方程不变，则

$$\iint_\Sigma x^2\mathbf{d}S=\iint_\Sigma y^2\mathbf{d}S$$

. 同理，由于在$x^2+y^2+z^2=R^2$中将x和z对调方程不变，则

$$\iint_\Sigma x^2 \mathbf{d}S = \iint_\Sigma z^2 \mathbf{d}S$$

于是

$$\iint_\Sigma x^2 \mathbf{d}S = \frac{1}{3}\iint_\Sigma (x^2+y^2+z^2)\mathbf{d}S = \frac{1}{3}\iint_\Sigma R^2 \mathbf{d}S = \frac{4\pi}{3}R^4$$

- **解题思路**
  - 先利用**奇偶性**和**对称性**进行简化
    - **骚气**，这里的奇偶性除了是直接的跟据xOy，yOz，xOz平面对称外，其实还可以是$z=a$，$x=b$，$y=c$这种平面对称
    - **找被积函数中的奇函数**（偶函数部分找也没用），想办法在曲面区域中构成关于奇函数变量的对称区间（提高篇P203例题3）只有这么做才能极大地简化计算过程，并且确保计算结果准确
  - 然后按照直接法计算
    - 如果曲面能用方程$z=z(x,y)$给出
      - 利用方程$z=z(x,y)$画出积分曲面Σ的草图，并确定Σ在xOy面上的投影
      - 利用$z=z(x,y)$，求出面积微元$\mathbf{d}S=\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\mathbf{d}x\mathbf{d}y$
      - 计算重积分$\iint_D f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\mathbf{d}x\mathbf{d}y$
    - 如果曲面不能用方程$z=z(x,y)$给出（提高篇P202例题2）
      - 那么就要转化成$x=x(y,z)$或$y=y(x,z)$
      - 然后对$\mathbf{d}S$部分用x_x',x_y',x_z'或y_x',y_y',y_z'计算
- **对坐标的面积分（第二类面积分）**
  - **定义**
    - 设Σ为光滑有向曲面，$P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)$在$\Sigma$上有界，则

$$\iint_\Sigma P\mathbf{d}y\mathbf{d}z+Q\mathbf{d}z\mathbf{d}x+R\mathbf{d}x\mathbf{d}y$$

  - **性质**
    - 积分与曲面的侧有关，即

$$\iint_\Sigma P\mathbf{d}y\mathbf{d}z+Q\mathbf{d}z\mathbf{d}x+R\mathbf{d}x\mathbf{d}y = -\iint_{-\Sigma} P\mathbf{d}y\mathbf{d}z+Q\mathbf{d}z\mathbf{d}x+R\mathbf{d}x\mathbf{d}y$$

    其中$-\Sigma$表示曲面Σ的另外一侧
  - **两类面积分的联系（这里的联系没有理解）**

$$\iint_\Sigma P\mathbf{d}y\mathbf{d}z+Q\mathbf{d}z\mathbf{d}x+R\mathbf{d}x\mathbf{d}y = \iint_\Sigma P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma\mathbf{d}S$$

  其中$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$为曲面$\Sigma$上点$P(x,y,z)$处指定侧的**法线向量**的**方向余弦**(*注意不是切线的*)（跟这里**提高篇P197例题12**不一样，那里需要的是**切向向量**的**方向余弦**）有

$$\begin{cases} z=z(x,y)\to z-z(x,y,z)=F(x,y,z)=0 \\ \cos\alpha=\dfrac{F_x'}{\sqrt{(F_x')^2+(F_y')^2+(F_z')^2}}=\dfrac{-z_x'}{\sqrt{(z_x')^2+(z_y')^2+1}} \\ \cos\beta=\dfrac{F_y'}{\sqrt{(F_x')^2+(F_y')^2+(F_z')^2}}=\dfrac{-z_y'}{\sqrt{(z_x')^2+(z_y')^2+1}} \\ \cos\gamma=\dfrac{F_z'}{\sqrt{(F_x')^2+(F_y')^2+(F_z')^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{(z_x')^2+(z_y')^2+1}} \\ \mathbf{d}S=\sqrt{(F_x')^2+(F_y')^2+(F_z')^2}\mathbf{d}x\mathbf{d}y=\sqrt{(z_x')^2+(z_y')^2+1}\mathbf{d}x\mathbf{d}y \end{cases}$$

  - **计算方法**
    - **直接法**
      - 设有向曲面$\Sigma: x=x(y,z),(y,z)\in D_{yz}$（投影到$yOz$面上），则

$$\iint_\Sigma P(x,y,z)\mathbf{d}y\mathbf{d}z=\pm\iint_{D_{yz}} P(x(y,z),y,z)\mathbf{d}y\mathbf{d}z$$

        若有向曲面Σ的法向量**与x轴正向的夹角为锐角**，即右侧，上式中取“$+$”号，否则取“$-$”号
      - 设有向曲面$\Sigma: y=y(z,x),(z,x)\in D_{zx}$（投影到$xOz$面上），则

$$\iint_\Sigma Q(x,y,z)\mathbf{d}z\mathbf{d}x=\pm\iint_{D_{zx}} Q(x,y(z,x),z)\mathbf{d}z\mathbf{d}x$$

        若有向曲面Σ的法向量**与y轴正向的夹角为锐角**，即右侧，上式中取“$+$”号，否则取“$-$”号
      - 设有向曲面$\Sigma: z=z(x,y),(x,y)\in D_{xy}$（投影到$xOy$面上），则

$$\iint_{\Sigma} R(x,y,z)\mathbf{d}x\mathbf{d}y = \pm\iint_{D_{xy}} R(x,y,z(x,y))\mathbf{d}x\mathbf{d}y$$

若有向曲面Σ的法向量**与z轴正向的夹角为锐角**，即右侧，上式中取“$+$”号，否则取“$-$”号

- 按以上直接计算法计算形如

$$\iint_{\Sigma} P(x,y,z)\mathbf{d}y\mathbf{d}z + Q(x,y,z)\mathbf{d}z\mathbf{d}x + R(x,y,z)\mathbf{d}x\mathbf{d}y$$

的积分，往往计算量比较大，如果整个曲面Σ可用方程$z=z(x,y)$或$(x=x(y,z),y=y(x,z))$表示，则可以一次性将以上面积分化为一个重积分计算：

  - 若有向曲面Σ由方程$z=z(x,y)$给出，Σ在xOy面上的投影域为D_{xy}，$z=z(x,y)$在D_{xy}上由连续一阶偏导数，$P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)$在$\Sigma$上连续，则

$$\iint_{\Sigma} P\mathbf{d}y\mathbf{d}z + Q\mathbf{d}z\mathbf{d}x + R\mathbf{d}x\mathbf{d}y = \pm\iint_{D_{xy}}\Big[P(x,y,z(x,y))\Big(-\frac{\partial z}{\partial x}\Big) + Q(x,y,z(x,y))\Big(-\frac{\partial z}{\partial y}\Big) + R(x,y,z(x,y))\Big]\mathbf{d}x\mathbf{d}y$$

其中正负号由Σ的方向来决定，若Σ的法向量**与z轴正向的夹角为锐角**取"+"号，“-”号（上侧为正，下侧为负）

  - 若曲面Σ可以用方程$x=x(y,z)$或$y=y(x,z)$表示，则有类似的结论

- **利用高斯公式**
  - 设空间闭区域Ω是由分片光滑的**闭曲面**Σ所围成，函数$P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)$在$\Omega$上有连续一阶偏导数（**也是一个关键条件**），闭曲面Σ取**外侧**，则

$$\oint\oint_{\Sigma} P\mathbf{d}y\mathbf{d}z + Q\mathbf{d}z\mathbf{d}x + R\mathbf{d}x\mathbf{d}y = \iiint_{\Omega}\Big(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\Big)\mathbf{d}V$$

- **补面用高斯公式**
  - 若要计算的面积分的**积分曲面**Σ**不封闭**，且用直接法计算不方便，此时可补一块曲面Σ_1，使**原曲面**变成**封闭曲面**，则

$$\iint_{\Sigma} = \oint\oint_{\Sigma+\Sigma_1} - \iint_{\Sigma_1}$$

等式右边第一项如果满足高斯公式，则可用高斯公式计算，第二项用直接法计算

- **解题思路**
  - 积分曲面封闭
    - 高斯公式
  - 积分曲面不封闭
    - 补面用高斯公式
    - 直接法

(以一下这一部分我实在是当时没蚌埠住了，梯度我到11月1好才过完，回过头看这部分完全就懵逼了)

- **场论初步**
  - **梯度**
    - 第五章
  - **通量**
    - 定义
      - 设有向量场$\mathbf{A}(x,y,z)=P(x,y,z)\mathbf{i}+Q(x,y,z)\mathbf{j}+R(x,y,z)\mathbf{k}$，则称沿场中某**有向曲面**的一侧$\Sigma$的面积分$\Phi=\iint_{\Sigma}\mathbf{A}\cdot\mathbf{dS}$为向量场穿过曲面$\Sigma$这一侧的通量
    - 计算

$$\begin{aligned}&\mathbf{A}=P\mathbf{i}+Q\mathbf{j}+R\mathbf{k}\\&\mathbf{dS}=\mathbf{d}y\mathbf{d}z\mathbf{i}+\mathbf{d}z\mathbf{d}x\mathbf{j}+\mathbf{d}x\mathbf{d}y\mathbf{k}\\&\Phi=\iint_{\Sigma}P\mathbf{d}y\mathbf{d}z+Q\mathbf{d}z\mathbf{d}x+R\mathbf{d}x\mathbf{d}y\end{aligned}$$

  - **散度**
    - 设有向量场$\mathbf{A}(x,y,z)=P(x,y,z)\mathbf{i}+Q(x,y,z)\mathbf{j}+R(x,y,z)\mathbf{k}$，其中$PQR$都有连续一阶偏导，向量场$\mathbf{A}$在**点**$(x,y,z)$处的散度的计算公式为

$$div\mathbf{A}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial R}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$$

  - **旋度**
    - 设有向量场$\mathbf{A}(x,y,z)=P(x,y,z)\mathbf{i}+Q(x,y,z)\mathbf{j}+R(x,y,z)\mathbf{k}$，其中$PQR$都有连续一阶偏导，向量场$\mathbf{A}$在**点**$(x,y,z)$处的旋度的计算公式为

$$\mathbf{rot}(\mathbf{A})=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\\frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\P&Q&R\end{vmatrix}$$

（相当于斯托克公式）

- **多元积分的应用**
  - 公式汇合（等做题之后再来汇总吧）
  - **变力做功**
    - 设有力场$\mathbf{F}(x,y,z)=P\mathbf{i}+Q\mathbf{j}+R\mathbf{k}$，则力$\mathbf{F}$沿曲线$\bar{AB}$从A到B所做的**功**为

$$\mathbf{W}=\int_{\bar{AB}}P\mathbf{d}x+Q\mathbf{d}y+R\mathbf{d}z$$

  - **通量**

$$\Phi=\iint_{\Sigma}P\mathbf{d}y\mathbf{d}z+Q\mathbf{d}z\mathbf{d}x+R\mathbf{d}x\mathbf{d}y$$