第七章 微分方程

- **微分方程的基本概念**
  - 未知函数是**一元函数**的微分方程就是**常微分方程**
    - 对于$\varphi^{(n)}(x) = f(x, \varphi(x), \varphi^{'}(x), .., \varphi^{(n-1)}(x))$或者$y^{(n)}(x) = f(x, y, y^{'}, .., y^{(n-1)})$
      - 需要注意的是，这里面只有$\varphi^{(n)}(x)$是需要出现的，其他的不一定都要出现
      - 它的一个解就是$y = \varphi(x)$，同时也说明y在$[a, b]$上连续且有n阶导数
      - 如果这个解里面含有了**n个**独立的**任意常数**，如$y = \varphi(x, C_1, C_2, ..., C_n)$，$a < x < b$，那么这个解就是微分方程的**通解**
      - 如果里面的**任意常数确定了**，那么这个解就是微分方程的**特解**
      - 条件$y(x_0) = y_0$，$y^{'}(x_0) = y_0^{'}$，等等，叫做n阶微分方程的**初始条件**
        - 如果求解的是一阶微分方程，那么初始条件一般是给出$y(x_0) = y_0$
        - 如果求解的是二阶微分方程，那么初始条件一般是给出$y(x_0) = y_0$，$y^{'}(x_0) = y_0^{'}$
        - （补充）具有**微分方程和初始条件**的问题就叫做**初值问题**
          - **几何意义**(教材P300)
            - 微分方程的解$y = \varphi(x)$的图形是一条曲线，叫做微分方程的积分曲线
            - 一阶微分方程的初值问题的几何意义就是**求微分方程的通过点**(x_0, y_0)**的那条积分曲线**
            - 二阶微分方程的初值问题的几何意义就是**求微分方程的通过点**(x_0, y_0)**且在该点处的切线斜率为**$y_0^{'}$**那条积分曲线**
      - **通解**通过**初始条件**确定**特解**
- **可分离变量的微分方程**
  - 变量可分离的**一阶**微分方程
    - **xy各自移到一边**

$$\frac{dy}{dx} = h(x)g(y) \Rightarrow \frac{dy}{g(y)} = h(x)dx$$

    - 两边积分便得到**通解**

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int h(x)dx$$

- **齐次方程**
  - **齐次方程**
    - 齐次微分方程就是对

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

命

$$\frac{y}{x} = u$$

其中$x \neq 0$，构造出

$$\frac{dy}{dx} = f(\frac{y}{x})$$

通过$y = ux$，则原方程就是

$$f(x, y) = f(x, ux) = \varphi(u)$$

(与x无关)，则原微分方程就是*齐次微分方程*。并且有

$$\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx} = \varphi(u)$$

    - 最后将$y = ux$回代u得到最后**通解**
  - **可化为齐次的方程**
    - 对于方程

$$\frac{dy}{dx} = f\Big(\frac{ax + by + c}{a_1x + b_1y + c_1}\Big)$$

一般有两个方法可以把方程转化为齐次的方程
      - 当$c = c_1 = 0$时，方程就是齐次微分方程
      - 当$c \neq c_1 \neq 0$，方程就是非齐次微分方程
        - 令$x = X + h$和$y = Y + k$，其中h和k都是待定系数
        - 于是有了$dx = dX$和$dy = dY$，分别带入以上变换到原方程式
        - 得到

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X} = \frac{aX + bY + ah + bk + c}{a_1X + b_1Y + a_1h + b_1k + c_1}$$

        - 如果线性方程组满足

$$\begin{cases} ah + bk + c = 0, \\ a_1h + b_1k + c_1 = 0 \end{cases}$$

，且它的系数行列式

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \frac{a1}{a} \neq \frac{b_1}{b}$$

，那么可以唯一地得到h和k的结果，使得

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X}=\frac{aX+bY}{a_1X+b_1Y}$$

，转化为齐次方程

- 计算出通解，回代$X=x-h, Y=y-k$
- ***如果系数行列式不能满足满秩的条件***，即

$$\frac{a1}{a}=\frac{b_1}{b}$$

，那么h和k无法得到，上述方法并不能得到结果

- 此时令

$$\frac{a1}{a}=\frac{b_1}{b}=\lambda$$

- 改写

$$\frac{dy}{dx}=\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{ax+by+c}{\lambda(ax+by)+c_1}$$

- 引入新的变量$v=ax+by$
- 就能够使用可分离变量了

- **一阶线性微分方程**
  - **线性方程**
    - 形式就是

$$y^{'}+P(x)y=Q(x)$$

如果$Q(x)=0$那么这个方程就是齐次的，否则是非齐次的

- 它的通解是固定的

$$y=e^{-\int P(x)dx}\Big(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C\Big)$$

- 就是这么朴素无华
  - 这里有一个**坑**。在两处$\int P(x)dx$的不定积分中，凡是出现了$\frac{1}{x}$，那么结果**都不加上绝对值。**
  - 在其他情况，例如题目知道$x>0$的情况，例如$\ln x, \sqrt{x}$这些情况，都知道了x就是大于零，那么不定积分就不加上绝对值。
  - **除了上述的两种情况，其余都得加上绝对值**
- 变量代换（只要合适的都可以变量代换，然后带入相似的微分方程求解）

- **伯努利方程**
  - 比一阶线性微分方程稍微多了一点

$$y^{'}+P(x)y=Q(x)y^n$$

，其中$n\neq 1, n\neq 0$.（如果n是0或1，那么就是一阶线性微分方程了）

- 原式往一阶线性微分方程上靠（其实就是使用**变量代换**转变方程为一阶线性微分方程）
  - 右端的y^n移到左边，形成

$$y^{-n}y^{'}+P(x)y^{1-n}=Q(x)$$

- 变量代换$z=y^{1-n}$，得到

$$\frac{1}{1-n}\cdot\frac{dz}{dx}+P(x)z=Q(x)$$

其中，$y=z^{\frac{1}{1-n}}$

- 使用一阶微分方程的固定公式求解通解
- 回代y，得到原微分方程的通解

- **可降解的高阶微分方程**（二阶及以上）
  - $y^{(n)}=f(x)$型的微分方程
    - 只需要对方程两端反复对x求积分，便可得到原方程的解
  - $y^{''}=f(x,y^{'})$型的微分方程（缺y，p**对**x**求导**，因为此时p是x的函数）
    - 做变换$y^{'}=p$，则

$$y^{''}=\frac{dp}{dx}$$

，**无论如何，都是对p的x求导**，带入原方程得到

$$\frac{dp}{dx}=f(x,p)$$

，求解此方程就能得到（**注意此时p单纯是x的函数**）

$$p=\varphi(x,C_1)$$

，回代p后直接**对x再积分**，能得到

$$\frac{dy}{dx}=\varphi(x,C_1)\Rightarrow y=\int\varphi(x,C_1)+C_2$$

为原方程的解

- $y^{''}=f(y,y^{'})$型的微分方程（缺x，p**对**x**求导**，但要引出dy，因为此时p是y的函数）

- 做变换$y^{'}=p$，则

$$y^{''}=\frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx}=p\frac{dp}{dy}$$

，**无论如何，都是对p的x求导**，带入原方程得到

$$p\frac{dp}{dy}=f(x,p)$$

，求解此方程就能得到（**注意此时p单纯是y的函数**）

$$p=y^{'}=\varphi(y,C_1)$$

，使用**分离变量积分**，求解此方程就能得到原方程的解

$$\int\frac{dy}{\varphi(y,C_1)}=x+C_2$$

- **高阶线性微分方程**
  - **二阶线性微分方程**
    - *n阶***线性***非齐次微分方程
      - 对于方程为

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(x)y^{'}+a_n(x)y=f(x),(f(x)\neq 0)$$

，其中$a_i(x)$为已知的函数，$f(x)$为自由项。这样的方程就是**n阶线性非齐次**微分方程
    - *n阶***线性**齐次*微分方程
      - 对于方程为

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(x)y^{'}+a_n(x)y=0$$

，就是**n阶线性齐次**微分方程。如果$a_i(x)$跟前面的非齐次微分方程相同，那么这个方程就称为n阶线性非齐次微分方程**对应的**n阶线性齐次微分方程
    - 线性相关与线性无关
      - 对于m个函数$y_1(x),y_2(x),\cdots,y_m(x)$是定义在区间$(a,b)$内的，如果存在**不全为0**的m个常数k，使得

$$k_1y_1(x)+\cdots+k_my_m(x)=0$$

成立，那么这m个函数为**线性相关**的函数
      - 如果只存在**全为0**的m个常数k，使得

$$k_1y_1(x)+\cdots+k_my_m(x)=0$$

，那么称为这m个函数在区间上是**线性无关**的
      - 题目中，有这样的说法

$$y_1\text{和}y_2\text{线性无关}\Leftrightarrow y_1\text{和}y_2\text{的比值不是常数}$$

（基础版P188例题1；提高版P254例题11这里包含了解的结构）
      - 教材原话P332，对于两个函数的情形，它们线性相关与否，只要看它们的比是否为常数
        - 如果比值为常数，那么它们就线性相关
        - 如果比值不为常数，那么它们就线性无关
  - **线性微分方程的解的结构**
    - n阶**齐次**线性方程**解的叠加**
      - n阶**齐次**线性方程的m个解，它们的线性组合**也是**n阶齐次线性方程的**解**（叠加解）

$$y=\sum_{i=1}^{m}C_iy_i$$

，其中C_i表示的是m个任意常数，y_i表示n阶**齐次**线性方程**m个解**
    - n阶**齐次**线性方程的**通解结构**
      - **必须是n阶齐次线性方程的n个线性无关的解的线性组合，才是n阶齐次线性微分的通解**

$$y=\sum_{i=1}^{n}C_iy_i$$

，其中C_i表示的是n个任意常数，y_i表示n阶**齐次**线性方程**n个线性无关的解**
    - **所以说，事实上，n阶齐次线性微分方程对应的应该是无数个线性相关或在线性无关的解，但是只有n个线性无关的解的线性组合才能成为齐次通解；m个随机解的线性组合还是一个齐次解（不是通解，只是叠加解）**，是这个意思吧（结合提高版题目P254例题11）
    - n阶**非齐次**线性方程的**解的叠加**
      - 如果$y_1^*(x)$ $y_2^*(x)$分别为下列n阶非齐次线性微分方程的**特解**

$$\begin{cases}y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(x)y^{'}+a_n(x)y=f_1(x)\\y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(x)y^{'}+a_n(x)y=f_2(x)\end{cases}$$

，那么$y_1^*(x)+y_2^*(x)$为

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(x)y^{'}+a_n(x)y=f_1(x)+f_2(x)$$

的**特解**（这个方式能够化简计算，有时候右端一大堆东西实在难懂）
    - n阶**非齐次**线性方程的**通解结构**
      - **非齐次**的**解**+（对应）**齐次**的**通解** =**非齐次**的**通解**

$$y=y^*(x)+Y(x)$$

- **二阶非齐次线性方程**的**通解**的另一种求法（教材P334）
  - 其实面对二阶非齐次线性微分方程

    $$y^{''}+P(x)y^{'}+Q(x)y=f(x)$$

    ，**没有特定的求解通解的方法**，求解它对应的齐次方程也只是使用上面说的**通解结构**的性质；或者像教材那样，给你两个解，首先判断这两个解都满满足齐次解，并且它们之间的比值不为常数，这样就能直接得到齐次通解。（**但是对于二阶常系数齐次微分方程，有特定的求法**）
  - 对于求解非齐次通解，教材给出了一种求法：**常数变易法**
    1. 已知**齐次微分方程**的通解$y(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$，去求解**非齐次线性微分方程**的通解
       - 首先要得到对应二阶齐次线性微分方程的**通解**

         $$Y(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$$

         ，其中$y_1(x)$和$y_2(x)$是齐次方程的解，两两线性无关
       - 将常数$C_{1,2}$都换成未知函数$v_{1,2}(x)$，得到

         $$y(x)=v_1(x)y_1(x)+v_2(x)y_2(x)$$

         ，这个结果要满足原微分方程的结果
       - 先求上述函数的一阶导，得到

         $$y^{'}=y_1v_1^{'}+y_2v_2^{'}+y_1^{'}v_1+y_2^{'}v_2$$

       - （**不知道为什么**）为了使二阶导的时候不会含$v_1^{''}$和$v_2^{''}$，那么上面一阶导的结果必须使得所有含有$v_1^{'}$和$v_2^{'}$的项都得0，即

         $$y_1v_1^{'}+y_2v_2^{'}=0$$

       - 从而使得

         $$\begin{cases}y=v_1y_1+v_2y_2\\y^{'}=y_1^{'}v_1+y_2^{'}v_2\\y^{''}=y_1^{'}v_1^{'}+y_2^{'}v_2^{'}+y_1^{''}v_1+y_2^{''}v_2\end{cases}$$

       - 将上述结果带入原二阶非齐次线性微分方程中，得到

         $$y_1^{'}v_1^{'}+y_2^{'}v_2^{'}+y_1^{''}v_1+y_2^{''}v_2+P(x)(y_1^{'}v_1+y_2^{'}v_2)+Q(x)(v_1y_1+v_2y_2)=f(x)$$

       - 化简得

         $$(y_1^{'}v_1^{'}+y_2^{'}v_2^{'})(y_1^{''}+P(x)y_1^{'}+Q(x)y_1)v_1+(y_2^{''}+P(x)y_2^{'}+Q(x)y_2)v_2=f$$

         ，由于$y_1(x)$和$y_2(x)$是齐次方程的解，那么左端后两项结果为0
       - 得到

         $$y_1^{'}v_1^{'}+y_2^{'}v_2^{'}=f(x)$$

         ，联立方程$y_1v_1^{'}+y_2v_2^{'}=0$，得到（**这是可直接拿来用的**，前面都可以跳过）

         $$\begin{cases}y_1^{'}v_1^{'}+y_2^{'}v_2^{'}=f(x)\\y_1v_1^{'}+y_2v_2^{'}=0\end{cases}$$

         ，在系数行列式中，如果

         $$W=\begin{vmatrix}y_1&y_2\\y_1^{'}&y_2^{'}\end{vmatrix}=y_1y_2^{'}-y_1^{'}y_2\neq0$$

         ，可解得

         $$v_1^{'}=-\frac{y_2(x)f(x)}{W},v_2^{'}=\frac{y_1(x)f(x)}{W}$$

       - 对上述两式积分，得到

         $$v_1=C_1+\int\Big(-\frac{y_2f}{W}\Big)dx,v_2=C_2+\int\Big(\frac{y_1f}{W}\Big)dx$$

       - 于是，得到非齐次方程得通解为

         $$y=C_1y_1+C_2y_2-y_1\int\frac{y_2f}{W}dx+y_2\int\frac{y_1f}{W}dx$$

         ，这尼玛是真的🐂🍺
    2. 只给出**一个齐次通解**，求**二阶非齐次线性微分方程的通解**或**齐次方程的另一个通解**，参考教材P336。🐂🍺
  -
- **定理1**（有这么个定理）
  - 如果函数$y_1(x)$与$y_2(x)$是方程$y^{''}+P(x)y^{'}+Q(x)y=0$的两个**解**，那么$y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$也是方程的**解**， 其中C_1,C_2为任意常数
- **定理2**
  - 如果函数$y_1(x)$与$y_2(x)$是方程$y^{''}+P(x)y^{'}+Q(x)y=0$的两个**特解**，那么$y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$是方程的**通解**， 其中C_1,C_2为任意常数
  - 推论
    - 如果$y_1(x),y_2(x),\dots,y_n(x)$是n阶齐次线性方程$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}y^{'}+a_n(x)y_n=0$的n个**线性无关的解**，那么此方程的**通解**为$y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+\cdots+C_ny_n(x)$，其中$C_i$为任意常数
- **定理3**
  - 设y_1^{*}为二阶非齐次线性微分方程的**一个特解**
  - 设Y_1^{*}为对应齐次方程的**一个通解**
  - 则$y^{*}=y_1^{*}+Y_1^{*}$为二阶**非齐次**线性微分方程的**一个通解**

- **定理4**
  - 设y_1^*和y_2^*为n阶非齐次线性微分方程的**两个解**
  - 那么$y^*=y_1^*-y_2^*$为对应齐次方程的**一个解**
- **常数变易法**（上面提过了）
- **常系数齐次线性微分方程**
  - **二阶常系数齐次线性微分方程**
    - 常系数：系数不是函数，而是任意常数而已

$$y^{''}+py^{'}+qy=0$$

，（如果pq不全为常数，那么称为二阶***变系数***线性齐次微分方程）

    - 可以直接得到方程的**特征方程**

$$r^2+pr+q=0$$

，它的根r为**特征根**

    - 根据特征根的不同情况，二阶**常系数**线性**齐次**微分方程的**通解**为(详细推导请看教材P338-341)
    -

特征方程$r^2+pr+q=0$的根	**微分方程$y^{''}+py^{'}+qy=0$的通解**
一对不相等的实数根$r_1\neq r_2$	$y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}$
一对相等的实数根$r_1=r_2$	$y=(C_1+C_2x)e^{r_1x}$
一对共轭复数根$r_{1,2}=a\pm\beta_i,\beta>0$	$y=e^{ax}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$

  - **n阶常系数齐次线性微分方程**
    - n阶***常系数*****线性**齐次微分方程的通解求法及公式

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}y^{'}+a_ny=0$$

      - 对应的**特征方程**为

$$r^n+a_1r^{n-1}+\cdots+a_{n-1}r+a_n=0$$

      - 根据特征根的不同情况，n阶**常系数**线性**齐次**微分方程的**通解**为(详细推导请看教材P338-341)
      -

特征方程的根	**微分方程的通解**
单重实数根r	对应一项Ce^{rx}
k重实数根r	对应k项$(C_1+C_2x+\cdots+C_kx^{k-1})e^{rx}$
单重复数根$r_{1,2}=a\pm\beta_i,\beta>0$	对应两项（这里不管β前的正负号）$e^{ax}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$
k重复数根$r_{1,2}=a\pm\beta_i,\beta>0$	对应2k项（这里不管β前的正负号）$e^{ax}((C_1+C_2x+\cdots+C_kx^{k-1})\cos\beta x+(D_1+D_2x+\cdots+D_kx^{k-1})\sin\beta x)$

      - 这里的特性方程**有且仅有**n个根（包括实的、复的，以及它们的重数），按上表对应通解中的n项，相加便得到了通解
  - **微分算子**（在后面欧拉方程）
- **常系数非齐次线性微分方程**
  - 二阶***常系数线性***非齐次方程**求通解**
    - 一般形式

$$y^{''}+py^{'}+qy=f(x)$$

    - 求通解就是先求对应齐次方程的**通解**（运用上面的表格）
    - 再求非齐次的**特解**（主要）（使用的都是**待定系数法**）
      - 考题中主要是对应以下两种$f(x)$(详细推导请看教材P348-354)
        - $f(x)=e^{\lambda x}P_m(x)$型，λ为已知常数，$P_m(x)$为x的**m次已知多项式**$A_1x^m+A_2x^{m-1}+A_3x^{m-2}+\cdots+A_mx+B$
          - 待定特解为

$$y^*=x^ke^{\lambda x}Q_m(x)$$

，其中k是特征方程$r=\lambda$的**重数**，$Q_m(x)$为系数待定待定的x的**m次多项式**$C_1x^m+C_2x^{m-1}+C_3x^{m-2}+\cdots+C_mx+D$

            - k的取值为

$$k=\begin{cases}0, & 当\lambda不是特征根时\\ 1, & 当\lambda是单重特征根时\\ 2, & 当\lambda是二重特征根时\end{cases}$$

            - 最后，确定特解的结果，$Q_m(x)$中一定有任意常数，这时需要把最终的特解代回原*非齐次微分方程中*，利用**待定系数法**求解出所有任意常数
        - $f(x)=e^{\lambda x}P_l(x)\cos wx$
          $f(x)=e^{\lambda x}P_n(x)\sin wx$
          $f(x)=e^{\lambda x}\Big[P_l(x)\cos wx+P_n(x)\sin wx\Big]$
          λ为已知常数，$P_l(x)$和$P_n(x)$分别为x的**l次和n次已知多项式**
          - 其待定特解为

$$y^*=x^ke^{\lambda x}\Big[R_m(x)\cos wx+S_m(x)\sin wx\Big]$$

，其中k特征方程根$r=\lambda+iw$或者$r=\lambda-iw$的**重数**（注意这里用的是λ和w），$R_m(x)S_m(x)$为**系数待定**的x的**m次多项式**（$m=\max(l,n)$），它们两的**系数是不一样**的，但是x的多项式一样。

            - k的取值为（k是特征方程中含根$\lambda+iw$或$\lambda-iw$的**重复次数**）

$$k=\begin{cases}0, & \text{当}\lambda+iw\text{不是特征根时}\\ 1, & \text{当}\lambda+iw\text{是单重特征根时}\end{cases}$$

- 二阶或者高阶的**可降阶的微分方程**（前面有讲）
- **欧拉方程**
  - 二阶及高阶**欧拉方程**
    - 欧拉方程是二阶或高阶**变系数**非齐次线性微分方程，能够使用**变量代换**的方法把变系数转变为**常系数非齐次方程**
    - 二阶欧拉方程的形式（基础版）

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+a_1x\frac{dy}{dx}+a_2y=f(x)$$

      ，其中a_1a_2为已知的常数
      - 解法
        - 若$x>0$，命$x=e^t$**作变量代换**，有$t=\ln x$，从而

$$\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}$$

          ，并且得到

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}\right)=-\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt}+\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\right)=-\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt}+\frac{1}{x^2}\frac{d^2y}{dt^2}$$

          ，**观察原方程，在变换之后，各项x就可以被消除，只留下常系数，这样就能把变系数非齐次变为常系数非齐次微分方程。**原方程化简为

$$\frac{d^2y}{dt^2}+(a_1-1)\frac{dy}{dt}+a_2y=f(e^t)$$

          ，是一个**二阶常系数线性非齐次**微分方程，解之，再还原x即可
        - 若$x<0$，命$x=-e^t$**作变量代换**，计算过程同上
    - n阶欧拉方程的形式（提高版）

$$x^ny^{(n)}+a_1x^{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}xy^{'}+a_ny=f(x)$$

      ，计算的过程一样的（好像没涉及到这个的习题，没什么印象）
      - 采用**微分算子D**来算更加简便

$$x^ky^{(k)}=D(D-1)\cdots(D-k+1)y$$

      - 这样可以直接地把x都去掉，快速进入常系数状态。后面的计算先是代数运算，然后就是常系数微分方程求解（教材P355-356）