Bài 2

NHỮNG BÀI TOÁN VỀ VỊ TRÍ

Bài toán về vị trí liên quan đến việc xác định vị trí tương đối và tìm giao của đường thẳng với mặt phẳng và của hai mặt phẳng.

I. NHỮNG TRƯỜNG HỢP ĐẶC BIỆT

Đây là những trường hợp mặt phẳng hoặc đường thẳng vuông góc với mặt phẳng hình chiếu. Việc tìm giao trong trường hợp này được đưa về bài toán liên thuộc.

Thí dụ 1: Tìm giao điểm của đường thẳng chiếu đứng d với mặt phẳng $\mathscr{R}$(p//q) (H2.1).

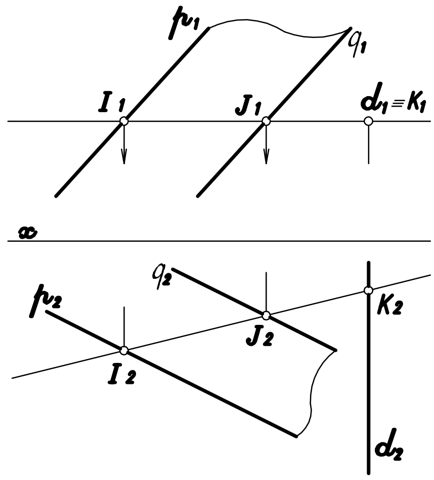
Giải: Gọi K = d $\cap$ $\mathscr{R}$. Rõ ràng $K_1 \equiv d_1$. Để tìm K_2 ta gắn điểm K vào đường thẳng IJ bất kỳ thuộc $\mathscr{R}$: $K_2 = d_2 \cap I_2J_2$.

Thí dụ 2: Tìm giao điểm của đường thẳng p với mặt phẳng chiếu đứng $\mathscr{R}$ (H2.2).

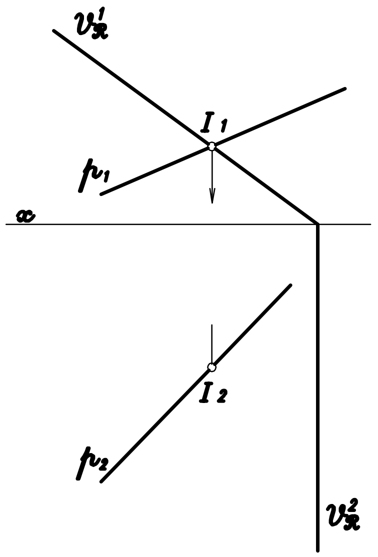
Giải: Gọi I = p $\cap$ $\mathscr{R}$, ta có ngay $I_1 = p_1 \cap \mathscr{R}_1$ và dễ dàng tìm được $I_2 \in p_2$.

Thí dụ 3: Tìm giao tuyến của mặt phẳng *Q*(p//q) bất kỳ với mặt phẳng chiếu đứng $\mathscr{R}$ (H2.3).

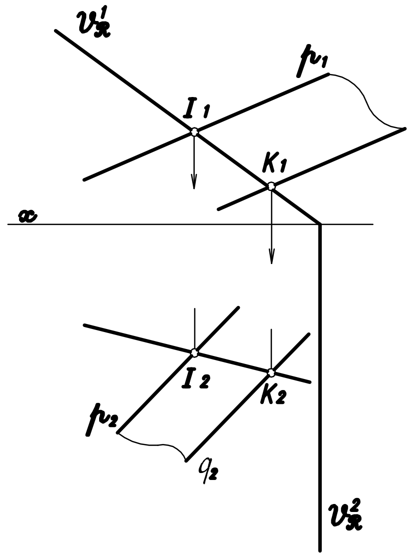
Giải: Tìm các giao điểm I = p$\cap\mathscr{R}$ và K = q$\cap\mathscr{R}$, như thí dụ 2. Đường thẳng IK là giao tuyến của hai mặt phẳng *Q* và $\mathscr{R}$.



H2.1



H2.2



H2.3

II. TRƯỜNG HỢP TỔNG QUÁT

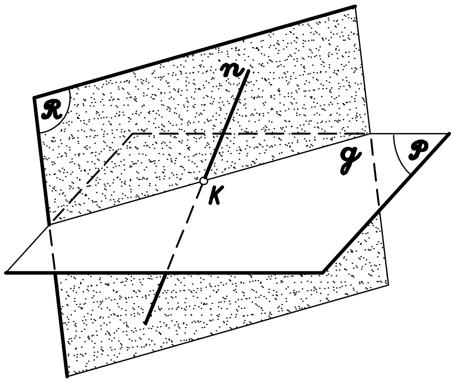
2.1. Giao điểm của đường thẳng với mặt phẳng

Để tìm giao điểm K của đường thẳng n với mặt phẳng $\mathcal{P}$ người ta dùng *phương pháp mặt phẳng phụ trợ*. Cách làm như sau (H2.4):

- Qua đường thẳng n dựng mặt phẳng $\mathcal{R}$ gọi là *mặt phẳng phụ trợ*;

- Tìm $g = \mathcal{R} \cap \mathcal{P}$ gọi là *giao tuyến phụ*;

- Tìm giao điểm $K = n \cap g$.



H2.4

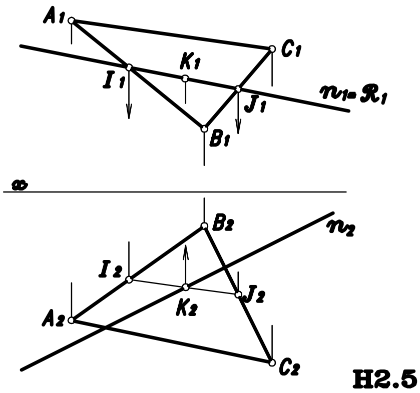
Thí dụ : Tìm giao điểm của đường thẳng n với mặt phẳng $\mathcal{P}$ (A, B, C) (H2.5).

Giải :

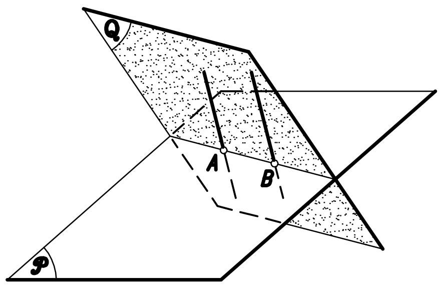
- Dựng qua n mặt phẳng phụ trợ là mặt phẳng chiếu đứng $\mathcal{R}$: $\mathcal{R}_1 \equiv n_1$;

- Tìm giao tuyến phụ IJ của hai mặt phẳng $\mathcal{R}$ và $\mathcal{P}$. Trong đó: $I = AB \cap \mathcal{R}$ và $J = BC \cap \mathcal{R}$;

- Tìm giao điểm $K = IJ \cap n$: $K_2 = I_2J_2 \cap n_2$; có K_2 suy ra $K_1 \in n_1$.



H2.5



H2.6

2.2. Giao tuyến của hai mặt phẳng

Để xác định giao tuyến của hai mặt phẳng $\mathcal{P}$ và Q cần phải tìm hai điểm chung của chúng. Mỗi điểm chung của $\mathcal{P}$ và Q có thể tìm bằng một trong hai cách sau:

Cách 1: Tìm giao điểm của một đường thẳng thuộc mặt phẳng này với mặt phẳng kia (H2.6).

Cách 2: Cắt cả hai mặt phẳng $\mathcal{P}$ và Q bằng mặt phẳng phụ trợ $\mathcal{R}$. Tìm hai giao tuyến phụ $m = \mathcal{R} \cap \mathcal{P}$ và $n = \mathcal{R} \cap Q$. Giao điểm $A = m \cap n$ là một điểm chung của $\mathcal{P}$ và Q (H2.7) (*Phương pháp mặt phẳng phụ trợ*).

Thí dụ 1: Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng $\mathcal{P}$(a//b) và Q(cxd).

Giải: Dùng cách 2 (H2.8)

+Tìm điểm chung thứ nhất:

- Dựng mặt phẳng phụ trợ chiếu đứng $\mathcal{R}$;

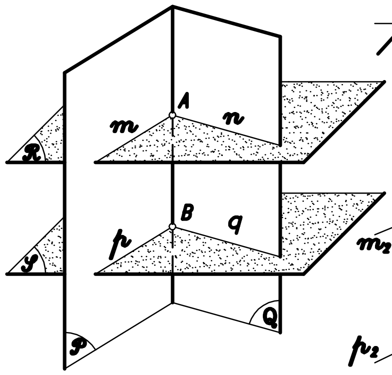
- Tìm giao tuyến $m = \mathcal{R} \cap \mathcal{P}$ bằng cách xác định hai giao điểm $E = a \cap \mathcal{R}$ và $F = b \cap \mathcal{R}$;

- Tìm giao tuyến $n = \mathcal{R} \cap Q$ bằng cách xác định hai giao điểm $G = c \cap \mathcal{R}$ và $H = d \cap \mathcal{R}$;

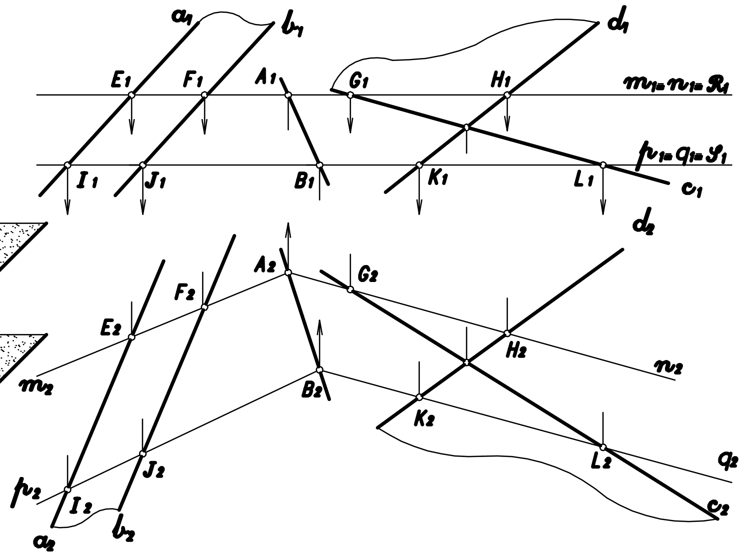
- Giao điểm A = m $\cap$ n là một điểm chung của hai mặt phẳng $\mathscr{P}$ và Q.

+ Để tìm điểm chung thứ hai (điểm B) của $\mathscr{P}$ và Q ta dùng mặt phẳng phụ trợ $\mathscr{S}$ và thực hiện các bước tương tự như trên.

+ Đường thẳng AB là giao tuyến của hai mặt phẳng $\mathscr{P}$ và Q.



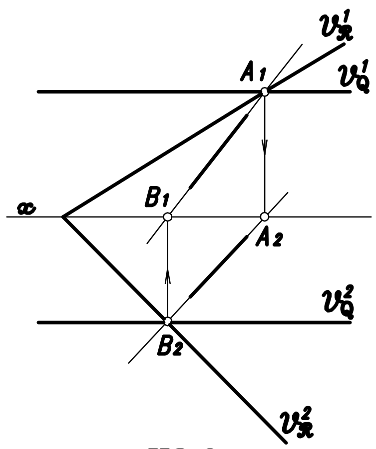
H2.7



H2.8

Thí dụ 2: Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng $\mathscr{R}$ và Q đều cho bằng vết (H2.9).

Giải: Dùng các mặt phẳng hình chiếu $\mathscr{P}^1$ và $\mathscr{P}^2$ làm các mặt phẳng phụ trợ. Dễ dàng tìm được giao điểm A của hai vết đứng và giao điểm B của hai vết bằng. Đường thẳng AB là giao tuyến của hai mặt phẳng $\mathscr{R}$ và Q.



H2.9

III. XÉT THẤY KHUẤT TRÊN HÌNH BIỂU DIỄN

Để tăng tính trực quan của bản vẽ cần phân biệt các phần thấy và các phần khuất của hình biểu diễn trên các hình chiếu.

Quy ước

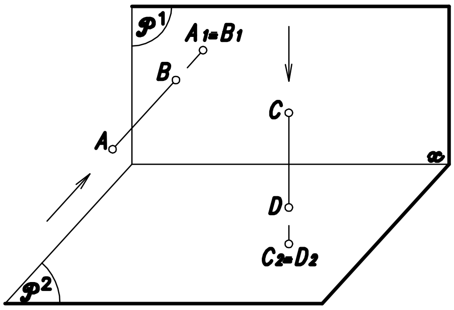
1. Khi xét thấy khuất trên hình chiếu đứng mắt người quan sát ở điểm vô tận của phương thẳng góc với $\mathscr{P}^1$ và phía trước của $\mathscr{P}^1$. Khi xét thấy khuất trên hình chiếu bằng mắt người quan sát ở điểm vô tận của phương thẳng góc với $\mathscr{P}^2$ và phía trên của $\mathscr{P}^2$ (H2.10).

2. Mọi đối tượng được biểu diễn và các mặt phẳng hình chiếu đều đục (không trong suốt).

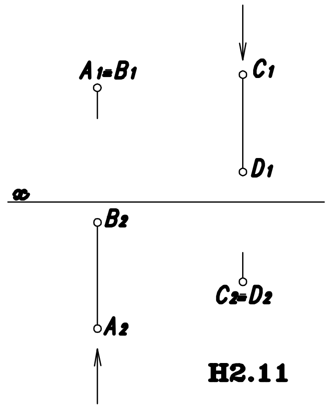
Từ hai qui ước trên suy ra:

- Nếu hai điểm cùng nằm trên một tia chiếu đứng thì hình chiếu đứng của điểm có độ xa lớn hơn sẽ thấy (trên H2.11: A_1 thấy, B_1 khuất);

- Nếu hai điểm cùng nằm trên một tia chiếu bằng thì hình chiếu bằng của điểm có độ cao lớn hơn sẽ thấy (trên H 2.11: C_2 thấy, D_2 khuất).



H2.10



H2.11

Thí dụ:

Vẽ giao tuyến và xét thấy khuất của hai tấm phẳng tam giác (ABC) và (DEF) (H2.12).

Giải :

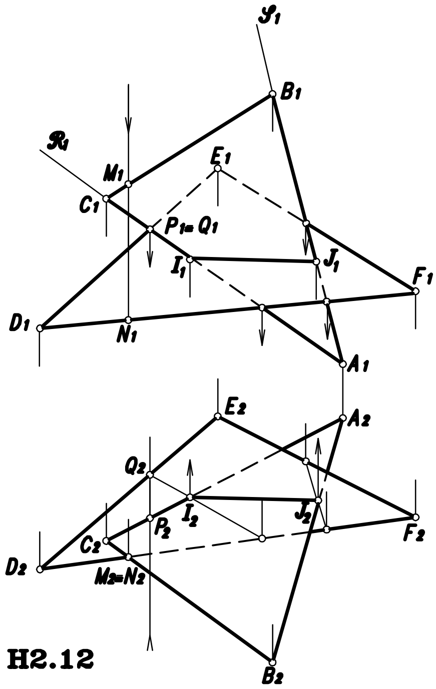
Tìm giao điểm I = AC ∩ (DEF) bằng cách dùng mặt phẳng phụ trợ chiếu đứng $\mathscr{R}$.

Tìm giao điểm J = AB ∩ (DEF) bằng cách dùng mặt phẳng phụ trợ chiếu đứng $\mathscr{S}$.

Đoạn thẳng IJ là giao tuyến của hai tấm phẳng tam giác đã cho.

Xét thấy khuất trên hình chiếu đứng: Lấy hai điểm P, Q cùng nằm trên một tia chiếu đứng. Điểm P ∈ AC có độ xa lớn hơn độ xa của điểm Q ∈ DE nên P_1 thấy. Từ đó suy ra tứ giác ($B_1C_1I_1J_1$) thấy.

Xét thấy khuất trên hình chiếu bằng: Dùng cặp điểm M, N cùng nằm trên một tia chiếu bằng. Điểm M ∈ BC có độ cao lớn hơn độ cao của điểm N ∈ DE nên M_2 thấy. Từ đó suy ra tứ giác ($B_2C_2I_2J_2$) thấy.



H2.12

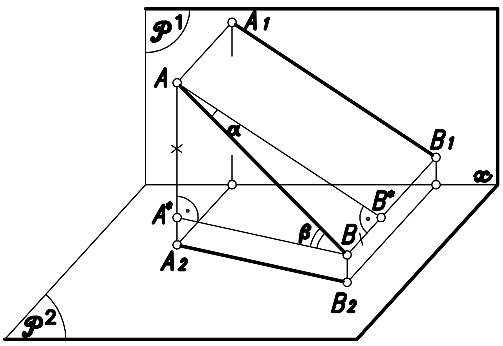
Bài 3

NHỮNG BÀI TOÁN VỀ LƯỢNG

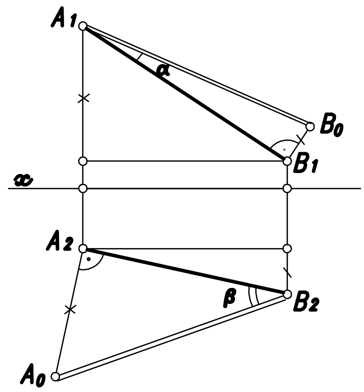
Bài toán về lượng liên quan đến việc xác định các đại lượng như: khoảng cách, góc, độ lớn của hình phẳng... Hai bài toán cơ bản làm cơ sở để giải các bài toán về lượng là xác định độ dài một đoạn thẳng và dựng đường thẳng và mặt phẳng vuông góc nhau.

I. XÁC ĐỊNH ĐỘ DÀI CỦA ĐOẠN THẲNG

Độ dài của đoạn thẳng AB bằng cạnh huyền của tam giác vuông có hai cạnh góc vuông lần lượt là hình chiếu bằng A_2B_2 và hiệu độ cao của hai điểm A và B. Trong tam giác vuông này, góc đối diện với hiệu độ cao bằng góc nghiêng của AB đối với mặt phẳng hình chiếu bằng $\mathscr{P}^2$ (góc β trên H3.1 và H3.2).



H3.1



H3.2

Tương tự, độ dài của đoạn thẳng AB bằng cạnh huyền của tam giác vuông có hai cạnh góc vuông lần lượt là hình chiếu đứng A_1B_1 và hiệu độ xa của hai điểm A, B. Trong tam giác vuông này, góc đối diện với hiệu độ xa bằng góc nghiêng của AB đối với mặt phẳng hình chiếu đứng $\mathscr{P}^1$ (góc α trên H3.1 và H3.2).

Phương pháp xác định độ dài đoạn thẳng nêu trên gọi là "*phương pháp tam giác*".

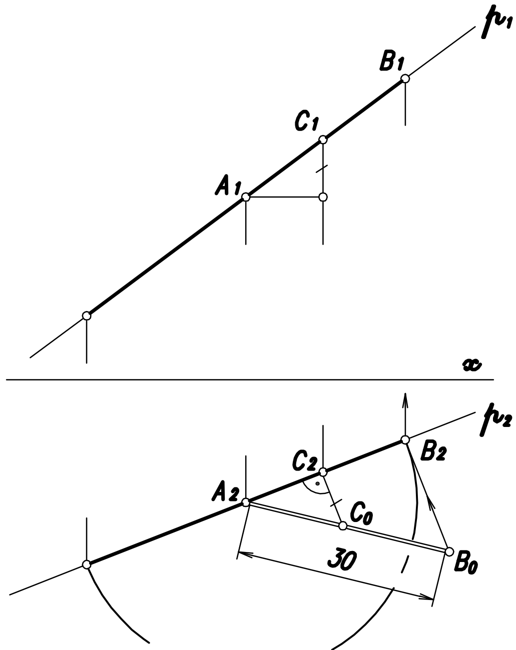
Thí dụ: Cho đường thẳng p và một điểm A thuộc p. Hãy đặt trên p một đoạn thẳng AB = 30mm (H3.3).

Giải:

- Lấy một điểm bất kỳ C ∈ p;

- Dựng tam giác vuông $A_2C_2C_0$ với cạnh C_2C_0 bằng hiệu độ cao của hai điểm A và C. Đặt trên tia A_2C_o một đoạn thẳng A_2B_0 = 30mm. Vẽ $B_0B_2 // C_0C_2$ ($B_2 \in p_2$). Từ B_2 suy ra $B_1 \in p_1$.

Dễ thấy bài toán có hai nghiệm.

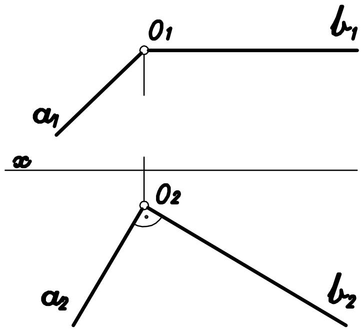


H3.3

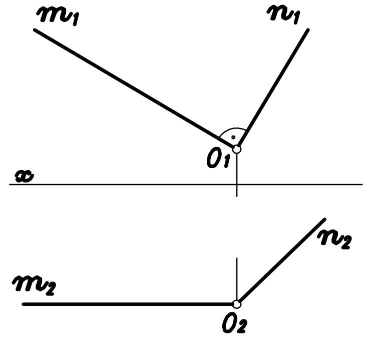
II. HÌNH CHIẾU CỦA GÓC VUÔNG

Từ tính chất của phép chiếu thẳng góc suy ra:

- Nếu góc $\angle aOb$ không thuộc một mặt phẳng chiếu bằng và có một cạnh là đường bằng thì $\angle aOb = 90^0 \leftrightarrow \angle a_2O_2b_2 = 90^0$ (H3.4).



H3.4

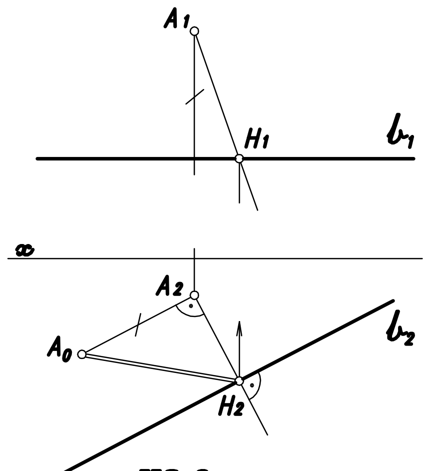


H3.5

- Nếu góc $\angle mOn$ không thuộc một mặt phẳng chiếu đứng và có một cạnh là đường mặt thì $\angle mOn = 90^0 \leftrightarrow \angle m_1O_1n_1 = 90^0$ (H3.5).

Thí dụ 1: Tìm khoảng cách từ điểm A tới đường bằng b (H3.6).

Giải: Vẽ AH $\perp$ b. Vì b là đường bằng nên $A_2H_2 \perp b_2$. Khoảng cách (A, b) = AH = A_0H_2 (A_0H_2 là cạnh huyền của tam giác vuông có cạnh góc vuông A_2A_0 bằng hiệu độ cao của hai điểm A và H).



H3.6

Thí dụ 2: Xác định góc nghiêng của $\mathscr{R}$ so với mặt phẳng hình chiếu bằng (H3.7).

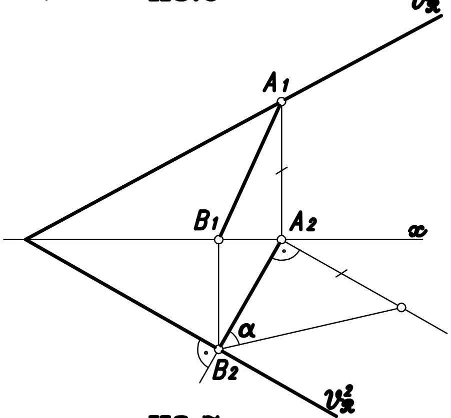
Giải :

- Vẽ trong $\mathscr{R}$ đường AB$\perp v^2\mathscr{R}$ ($A_2B_2 \perp v^2\mathscr{R}$);

- Xác định góc nghiêng của AB với $\mathscr{P}^2$. α cũng là góc nghiêng của $\mathscr{R}$ so với $\mathscr{P}^2$.

Chú ý: Đường thẳng thuộc $\mathscr{R}$ và vuông góc với vết bằng của $\mathscr{R}$ là đường thẳng có góc nghiêng với $\mathscr{P}^2$ lớn nhất so với những đường thẳng khác của $\mathscr{R}$, nó được gọi là *đường dốc nhất* của $\mathscr{R}$ so với $\mathscr{P}^2$. Góc giữa nó với $\mathscr{P}^2$ bằng góc nghiêng của $\mathscr{R}$ so với $\mathscr{P}^2$.

Dễ thấy đường dốc nhất của $\mathscr{R}$ so với mặt phẳng hình chiếu đứng $\mathscr{P}^1$ là đường thẳng thuộc $\mathscr{R}$ và vuông góc với vết đứng của $\mathscr{R}$.



H3.7

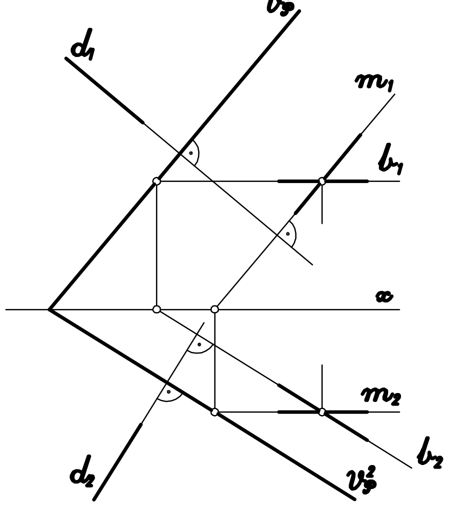
III. ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẲNG

3.1. MẶT PHẲNG KHÔNG SONG SONG VỚI TRỤC x

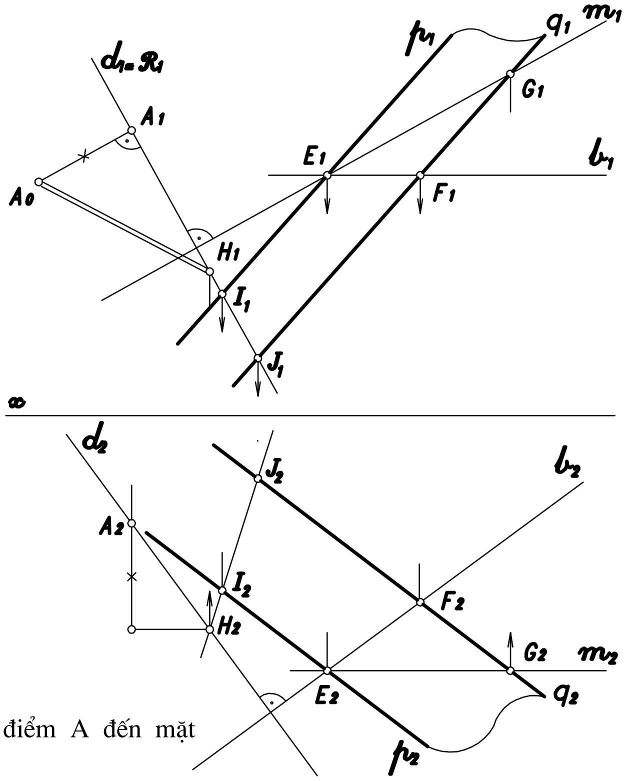
Định lý: Điều kiện cần và đủ để đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng $\mathscr{P}$ là

$$\begin{cases} d_1 \perp m_1 \\ d_2 \perp b_2 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} d_1 \perp v^1\mathscr{P} \\ d_2 \perp v^2\mathscr{P} \end{cases}$$

(m_1 là hình chiếu đứng của một đường mặt thuộc $\mathscr{P}$, b_2 là hình chiếu bằng của một đường bằng thuộc $\mathscr{P}$) (H3.8).



H3.8



H3.9

Thí dụ 1 : Tìm khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $\mathscr{P}$ (p//q) (H3.9).

Giải :

\+ Vẽ trên $\mathscr{P}$:

- Đường bằng b đi qua hai điểm E ∈ p và F ∈ q;
- Đường mặt m đi qua hai điểm E ∈ p và G ∈ q;

\+ Vẽ qua A đường thẳng d ⊥ $\mathscr{P}$: $d_1 \perp m_1$ và $d_2 \perp b_2$.

\+ Tìm giao điểm H = d ∩ $\mathscr{P}$:

Dùng mặt phẳng phụ trợ chiếu đứng $\mathscr{R}$.

\+ Xác định độ dài của đoạn thẳng AH:

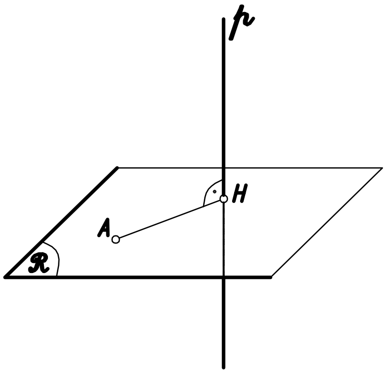
Dùng phương pháp tam giác.

Độ dài AH $=A_0H_1$ là khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $\mathscr{P}$.

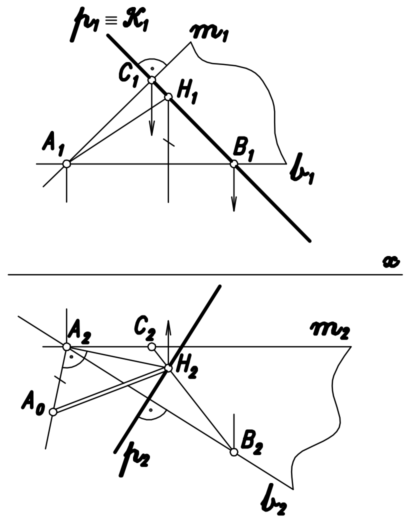
Thí dụ 2 : Tìm khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng p (H3.10).

Giải :

- Dựng mặt phẳng $\mathscr{R}$ xác định bởi đường mặt m và đường bằng b: $\mathscr{R}$(b, m) qua A và vuông góc với p ($m_1 \perp p_1$ và $b_2 \perp p_2$);
- Tìm giao điểm $H = p \cap \mathscr{R}$ (dùng mặt phẳng phụ trợ chiếu đứng $\mathscr{K}$);
- Tìm độ dài đoạn thẳng AH(phương pháp tam giác): khoảng cách (A, p) = AH = A_0H_2.



H3.10a



H3.10b

3.2. MẶT PHẲNG SONG SONG VỚI TRỤC x

Mặt phẳng song song với trục x là mặt phẳng chiếu cạnh (vuông góc với $\mathscr{P}^3$). Do đó cách đơn giản để giải bài toán trong trường hợp này là sử dụng hình chiếu cạnh.

Thí dụ: Tìm khoảng cách từ A đến mặt phẳng $\mathscr{R}$//x (H3.11).

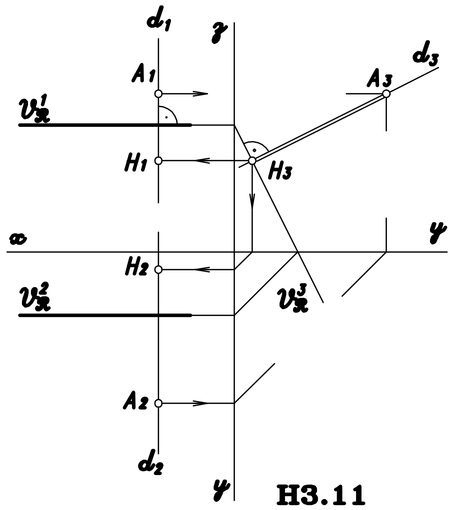
Giải:

Gọi H là chân đường vuông góc hạ từ A xuống $\mathscr{R}$: $AH \perp \mathscr{R}$ mà $\mathscr{R}$//x → $AH \perp x$ hay //$\mathscr{P}^3$ (AH là đường cạnh).

- Xác định hình chiếu cạnh A_3 của A và vết cạnh $v^3\mathscr{R}$ của mặt phẳng $\mathscr{R}$;

- Khoảng cách A_3H_3 từ A_3 đến $v^3\mathscr{R}$ chính là khoảng cách từ A đến $\mathscr{R}$ cần tìm.

Chú ý: Bằng liên hệ dóng dễ dàng tìm được hình chiếu đứng và hình chiếu bằng của H



H3.11

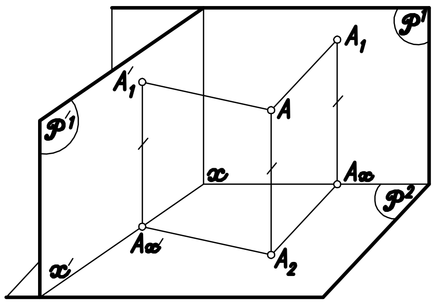
Bài 4

CÁC PHÉP BIẾN ĐỔI HÌNH CHIẾU

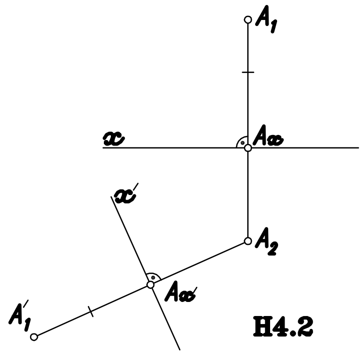
Để giải các bài toán một cách dễ dàng hơn, người ta tìm cách biến đổi sao cho các đối tượng tham gia bài toán có vị trí đặc biệt với mặt phẳng hình chiếu.

I. PHÉP THAY MẶT PHẲNG HÌNH CHIẾU

1.1. PHÉP THAY MẶT PHẲNG HÌNH CHIẾU ĐỨNG



H4.1



H4.2

1. Định nghĩa

Thay mặt phẳng hình chiếu đứng $\mathscr{P}^1$ là lấy mặt phẳng $\mathscr{P}'^1 \perp \mathscr{P}^2$ làm mặt phẳng hình chiếu đứng mới (H4.1).

Gọi $x' = \mathscr{P}'^1 \cap \mathscr{P}^2$ là trục hình chiếu mới.

2. Tính chất

- Hình chiếu bằng của đối tượng không thay đổi;
- Độ cao mới bằng độ cao cũ : $A'_1A_{x'} = A_1A_x$

3. Cách thực hiện (H4.2)

- Chọn mặt phẳng $\mathscr{P}'^1 \perp \mathscr{P}^2$ (vạch trục x');
- Vẽ hình chiếu đứng mới (vẽ đường dóng mới $\perp$ x', chuyển độ cao).

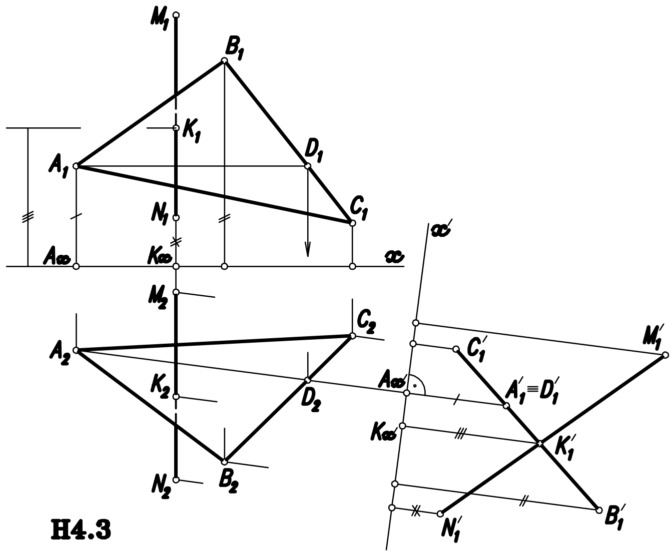
Thí dụ: Tìm giao điểm của đường cạnh MN với mặt phẳng $\mathscr{R}$ (ABC) (H4.3).

Giải: Thay mặt phẳng hình chiếu đứng $\mathscr{P}^1$ sao cho $\mathscr{R}$ trở thành mặt phẳng chiếu đứng mới.

- Chọn $\mathscr{P}'^1$: vẽ trên $\mathscr{R}$ một đường bằng AD và chọn trục $x' \perp A_2D_2$ để AD trở thành đường thẳng chiếu đứng mới;

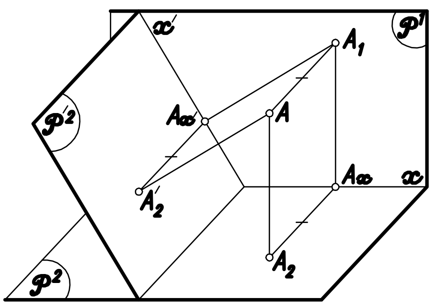
- Vẽ hình chiếu đứng mới. Trong hệ thống mới ($\mathscr{P}'^1$,$\mathscr{P}^2$), dễ dàng tìm được giao điểm $K = MN \cap \mathscr{R}$..

Để xác định K_1 chỉ cần chú ý $K_1K_x = K'_1K_{x'}$

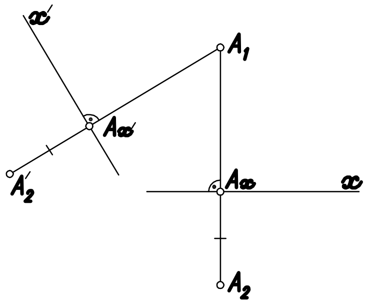


H4.3

1.2. PHÉP THAY MẶT PHẲNG HÌNH CHIẾU BẰNG



H4.4



H4.5

1. Định nghĩa

Thay mặt phẳng hình chiếu bằng $\mathscr{P}^2$ là lấy mặt phẳng $\mathscr{P}'^2 \perp \mathscr{P}^1$ làm mặt phẳng hình chiếu bằng mới (H4.4).

Gọi $x' = \mathscr{P}'^2 \cap \mathscr{P}^1$ là trục hình chiếu mới.

2. Tính chất

- Hình chiếu đứng của đối tượng không thay đổi;
- Độ xa mới bằng độ xa cũ: $A'_2A_{x'} = A_2A_x$

3. Cách thực hiện (H 4.5)

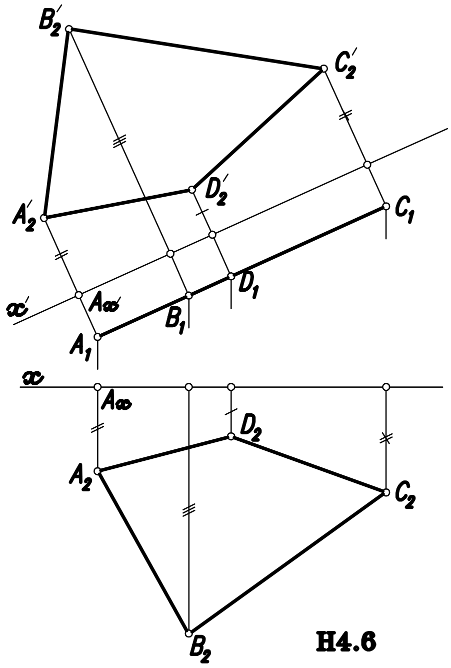
- Chọn mặt phẳng $\mathscr{P}'^2 \perp \mathscr{P}^1$ (vạch trục x');
- Vẽ hình chiếu bằng mới (vẽ đường dóng mới $\perp$ x' và chuyển độ xa).

Thí dụ: Tìm độ lớn thật của tứ giác phẳng ABCD nằm trong mặt phẳng chiếu đứng (H4.6).

Giải: Thay mặt phẳng hình chiếu bằng $\mathscr{P}^2$ bằng mặt phẳng $\mathscr{P}'^2$ sao cho mặt phẳng chứa ABCD trở thành mặt phẳng bằng.

- Vẽ trục x' // A_1C_1 (hình chiếu đứng của mặt phẳng chứa ABCD);
- Vẽ hình chiếu bằng mới A'_2 của đỉnh A phải thoả mãn: $A_1A'_2 \perp x'$ và $A'_2A_{x'} = A_2A_x$
- Việc dựng hình chiếu bằng mới của các đỉnh B, C, D tương tự như trên.

Độ lớn tứ giác $A'_2B'_2C'_2D'_2$ = độ lớn tứ giác ABCD.



H4.6

1.3. THAY LIÊN TIẾP HAI MẶT PHẲNG HÌNH CHIẾU

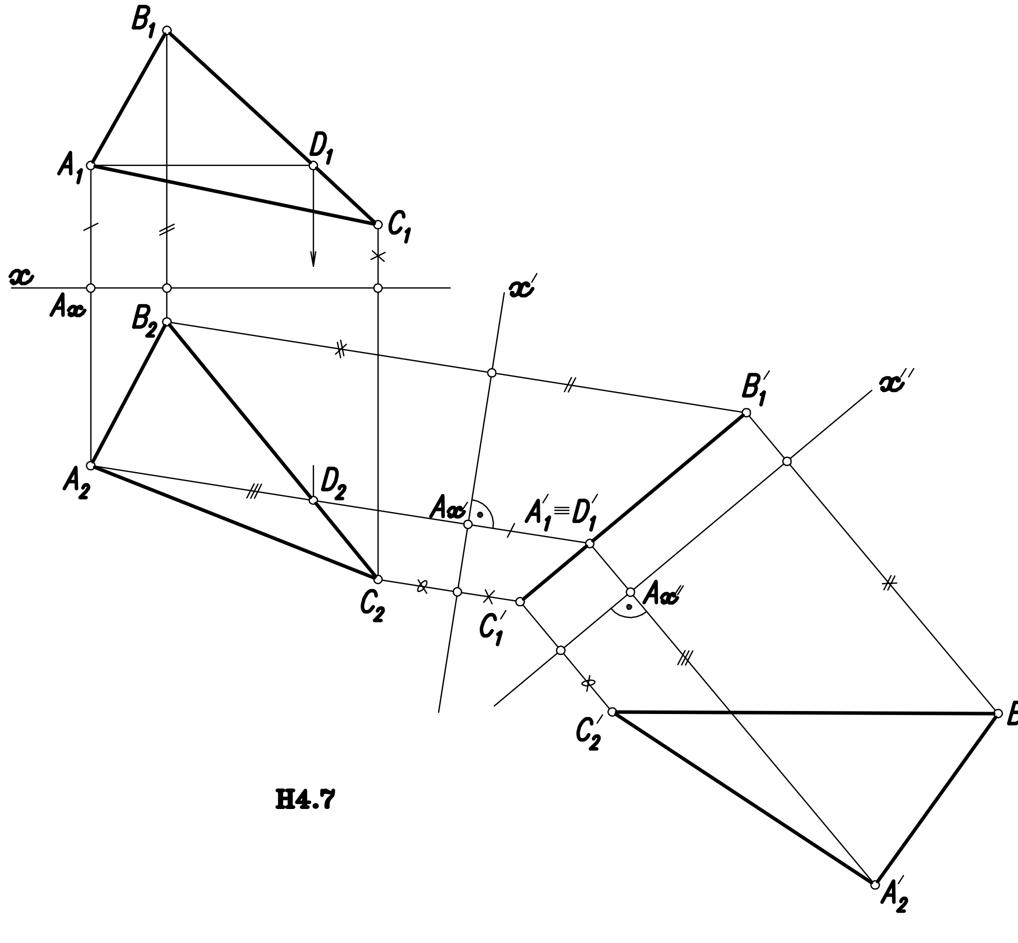
Nhiều bài toán nếu chỉ thực hiện một phép thay mặt phẳng hình chiếu đối tượng vẫn chưa có được vị trí đặc biệt đối với mặt phẳng hình chiếu. Trong trường hợp như vậy cần thực hiện liên tiếp hai phép thay mặt phẳng hình chiếu.

Thí dụ: Tìm độ lớn thực của tam giác ABC (H4.7).

Giải :

- Thay mặt phẳng hình chiếu đứng $\mathscr{P}^1$ để mặt phẳng (ABC) trở thành mặt phẳng chiếu đứng mới bằng cách chọn trục x' $\perp$ A_2D_2. (A_2D_2 là hình chiếu bằng của đường bằng AD thuộc mặt phẳng (ABC)).

- Thay mặt phẳng hình chiếu bằng $\mathscr{P}^2$ để mặt phẳng (ABC) trở thành mặt phẳng bằng mới bằng cách chọn trục x"// $B'_1C'_1$ ($B'_1C'_1$ là hình chiếu đứng đã suy biến thành đoạn thẳng của mặt phẳng (ABC)). Độ lớn tam giác $A'_2B'_2C'_2$ bằng độ lớn thực của tam giác ABC trong không gian.



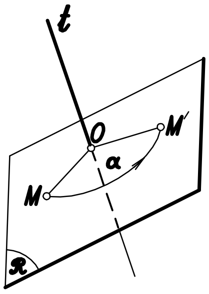
H4.7

II. PHÉP QUAY QUANH MỘT TRỤC

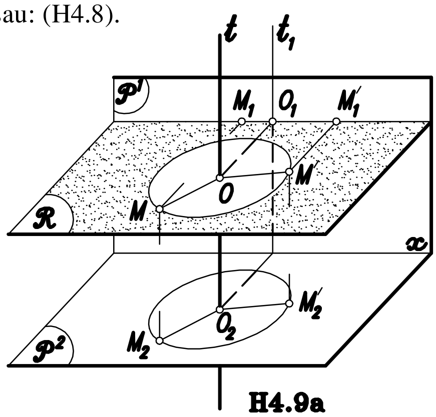
2.1. KHÁI NIỆM CƠ BẢN

1. Định nghĩa

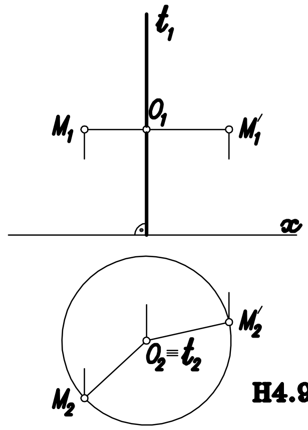
Quay một điểm M quanh trục t một góc định hướng α là biến điểm M thành một điểm M' thoả mãn các điều kiện sau: (H4.8).



H4.8



H4.9a



H4.9b

- M và M' cùng thuộc mặt phẳng $\mathcal{R}$ vuông góc với trục quay t;

- Khoảng cách từ các điểm M và M' tới trục t bằng nhau: MO = M'O = r;

- Góc $\angle MOM' = \alpha$.

Người ta gọi O là *tâm quay* và r là *bán kính quay* của điểm M.

Quay một hình là quay mọi điểm của hình đó.

2. Tính chất

- Cặp điểm tương ứng (M, M') nằm trên một đường tròn thuộc mặt phẳng vuông góc với trục t;

- Hai hình tương ứng bằng nhau.

Trong phép quay, để xác định hình tương ứng của hình gốc chỉ cần quay các yếu tố đủ xác định hình đó.

2.2. PHÉP QUAY QUANH ĐƯỜNG THẲNG CHIẾU

1. Quay quanh đường thẳng chiếu bằng

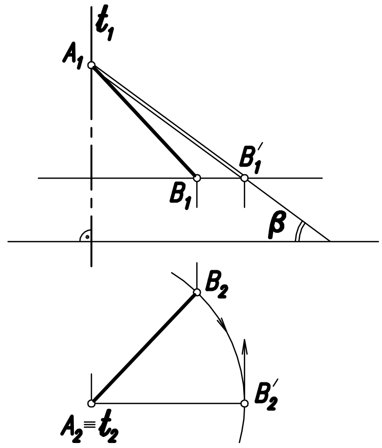
Trong phép quay quanh đường thẳng chiếu bằng t (H4.9), cặp điểm tương ứng (M, M') có:

- Hình chiếu đứng (M_1, M'_1) nằm trên một đường thẳng song song với trục x;

- Hình chiếu bằng (M_2, M'_2) nằm trên một đường tròn có tâm là hình chiếu bằng t_2 của trục t.

Thí dụ: Xác định độ dài của đoạn thẳng AB và góc nghiêng của AB đối với mặt phẳng hình chiếu bằng $\mathcal{P}^2$ (H4.10).

Giải : Gọi t là đường thẳng chiếu bằng đi qua điểm A. Quay đoạn thẳng AB đường thẳng t tới vị trí song song với $\mathcal{P}^1$ (AB sẽ trở thành đường mặt). Chỉ cần quay điểm B đến vị trí B' sao cho: $B_1B'_1//x$; $B_2B'_2$ nằm trên một đường tròn tâm $t_2 \equiv A_2$ và $A_2B'_2//$ x. Khi đó $A_1B'_1$ = AB và góc ($A_1B'_1$, x) bằng góc nghiêng giữa đường thẳng AB đối với mặt phẳng hình chiếu bằng $\mathcal{P}^2$.



H4.10

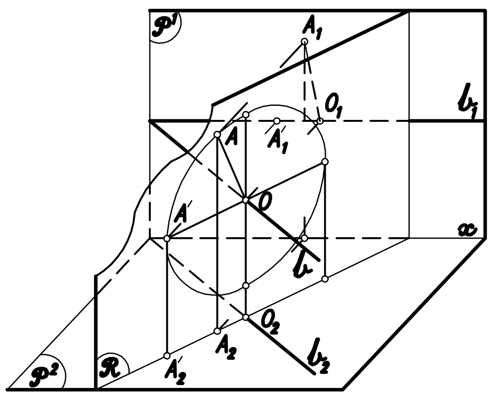
2. Quay quanh đường thẳng chiếu đứng

Thực hiện tương tự như phép quay quanh đường thẳng chiếu bằng.

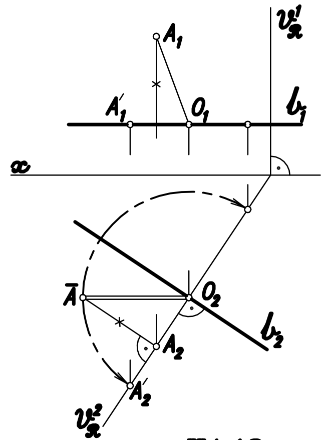
2.3. PHÉP QUAY MẶT PHẲNG QUANH ĐƯỜNG BẰNG HAY ĐƯỜNG MẶT CỦA NÓ

1. Quay mặt phẳng quanh đường bằng của nó

Mục đích: Đưa mặt phẳng đến vị trí song song với mặt phẳng hình chiếu bằng.



H4.11



H4.12

Để quay mặt phẳng Q (A, b) quanh đường bằng b của nó tới vị trí // $\mathcal{P}^2$ chỉ cần quay điểm A là đủ (H4.11 và H4.12).

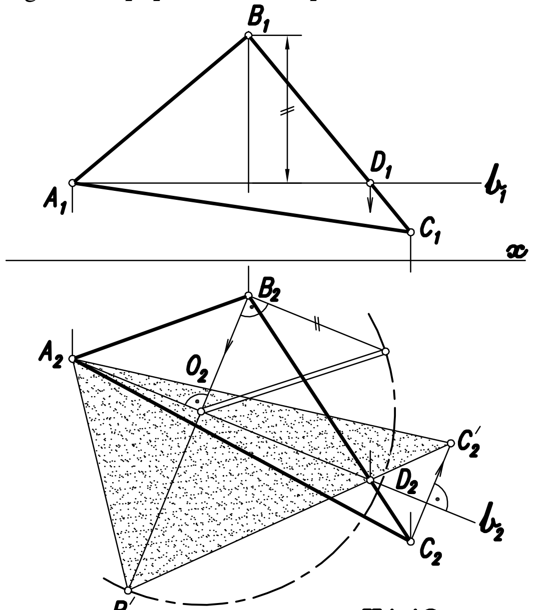
- Xác định tâm quay của A: $AO \perp b \rightarrow A_2O_2 \perp b_2$;
- Xác định bán kính quay: $AO = \overline{A}\,O_2$ (phương pháp tam giác);
- Vì sau khi quay Q trở thành mặt phẳng bằng nên $A'_2O_2 = AO = \overline{A}\,O_2$.

Thí dụ : Xác định độ lớn thật của tam giác ABC (H4.13).

Giải: Vẽ trong mặt phẳng Q (ABC) đường bằng b qua A, D. Quay Q quanh b tới vị trí trở thành mặt phẳng bằng. Chỉ cần quay điểm B tới vị trí B' (B'_2 được xác định như A'_2 trên H4.12). Khi đó điểm C sẽ tới vị trí C'_2 thoả mãn:

- $C'_2 \in B'_2D_2$ ($D \in b$ nên $D_2 \equiv D'_2$);
- $C_2C'_2 \perp b_2$.

Độ lớn tam giác $A_2B'_2C'_2$ bằng độ lớn tam giác ABC trong không gian.



H4.13

2. Quay mặt phẳng quanh đường mặt của nó

Tương tự như trên, quay mặt phẳng Q(A, m) quanh đường mặt m của nó để đưa nó tới vị trí // $\mathscr{P}^1$. Khi đó điểm A tới vị trí A' mà $A'_1O_1 = \overline{A}\,O_1$ ($AO \perp m$) (H4.14).

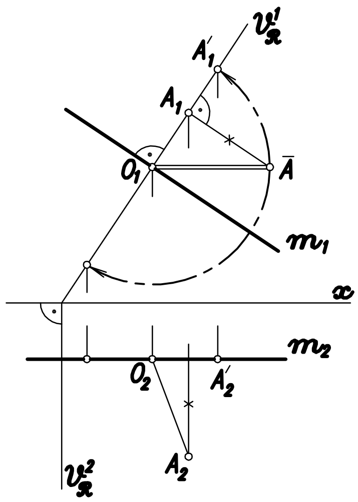
2.4. *GẬP MẶT PHẲNG VÀO MẶT PHẲNG HÌNH CHIẾU*

Phép quay mặt phẳng $\mathscr{P}$ quanh đường bằng là vết bằng $v^2\mathscr{P}$ của nó (sẽ đưa $\mathscr{P}$ tới vị trí trùng với mặt phẳng hình chiếu bằng) được gọi là phép gập mặt phẳng vào mặt phẳng hình chiếu bằng. Tương tự, khi quay $\mathscr{P}$ quanh vết đứng $v^1\mathscr{P}$ để đưa $\mathscr{P}$ đến trùng với $\mathscr{P}^1$ ta có phép gập mặt phẳng vào mặt phẳng hình chiếu đứng.

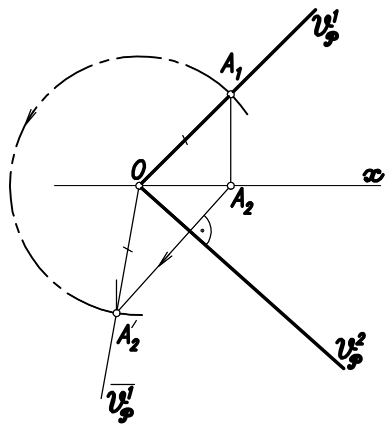
1. Gập mặt phẳng vào mặt phẳng hình chiếu bằng

Khi gập mặt phẳng vào $\mathscr{P}^2$ vết bằng và điểm $O = v^1\mathscr{P} \cap v^2\mathscr{P}$ không đổi. Để xác định hình gập của vết đứng ta chỉ cần tìm hình gập A' của một điểm $A \in v^1\mathscr{P}$. Hình chiếu bằng A'_2 của điểm A' phải thoả mãn hai điều kiện (H4.15):

- $A_2A'_2 \perp v^2\mathscr{P}$;
- $A'_2O = A_1O = AO$.



H4.14



H4.15

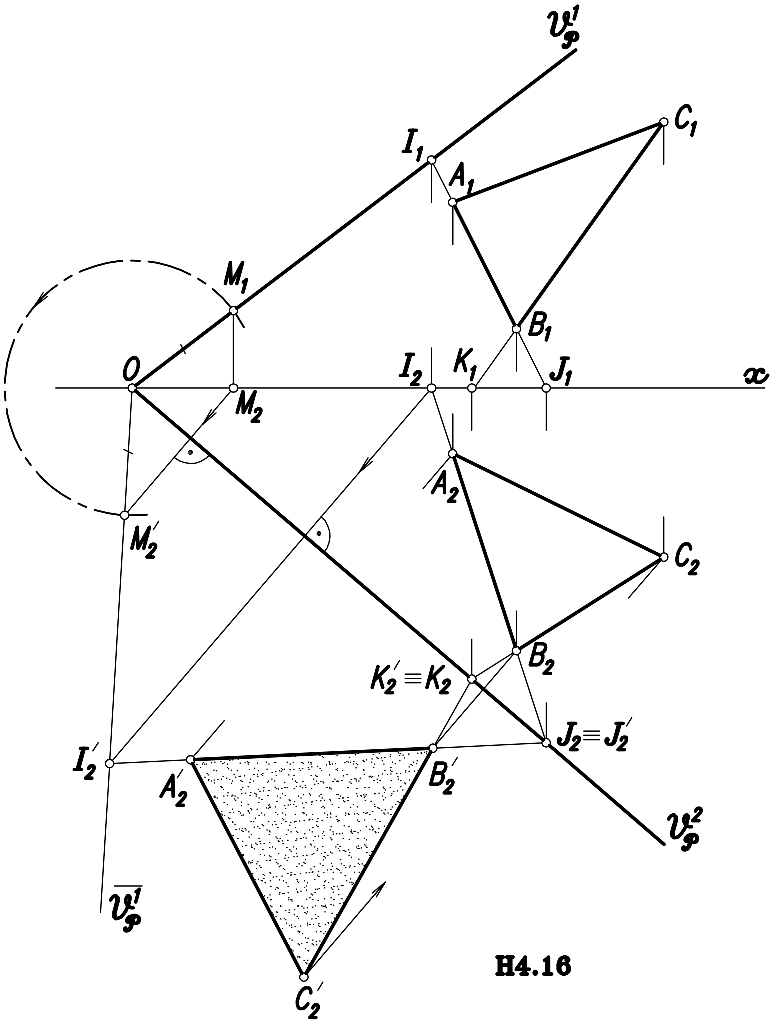
Thí dụ: Cho mặt phẳng $\mathscr{P}(v^1\mathscr{P}, v^2\mathscr{P})$ và đoạn thẳng AB thuộc $\mathscr{P}$. Dựng một tam giác đều ABC nằm trong $\mathscr{P}$ (H.16) .

Giải: Dùng phép gập $\mathscr{P}$ vào $\mathscr{P}^2$ quanh vết bằng $v^2\mathscr{P}$ của nó.

Hình gập của vết đứng $v^1\mathscr{P}$ xác định bởi điểm O và điểm M'_2 (M'_2 là hình gập của điểm M thuộc $v^1\mathscr{P}$).

Hình gập của đoạn thẳng AB là $A'_2B'_2$ được xác định nhờ hai điểm $I=AB\cap v^1\mathscr{P}$ và $J=AB\cap v^2\mathscr{P}$.

Hình gập của tam giác đều ABC cũng là một tam giác đều. Do vậy, chỉ cần dựng tam giác đều $A'_2B'_2C'_2$ rồi xác định các hình chiếu (C_1, C_2) của đỉnh C bằng cách gắn C vào đường thẳng BK của mặt phẳng $\mathscr{P}$.

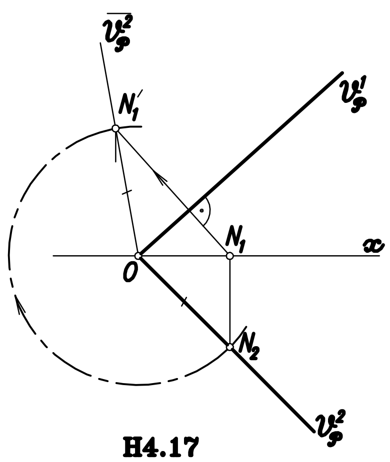


H4.16

2. Gập mặt phẳng vào mặt phẳng hình chiếu đứng

Tương tự như trên, để xác định hình gập của vết bằng $v^2\mathscr{P}$ vào $\mathscr{P}^1$ (H4.17), chỉ cần tìm hình gập N'_1 của điểm $N \in v^2\mathscr{P}$ với điều kiện:

$N_1N'_1 \perp v^1\mathscr{P}$ và $ON'_1 = ON_2 = ON$.



H4.17

BÀI 2. BÀI TOÁN VỀ VỊ TRÍ

1. Biết các mặt phẳng $\mathcal{P}$ và Q cùng chứa điểm A. Vẽ các vết còn lại và giao của $\mathcal{P}$ và Q (H2.1).

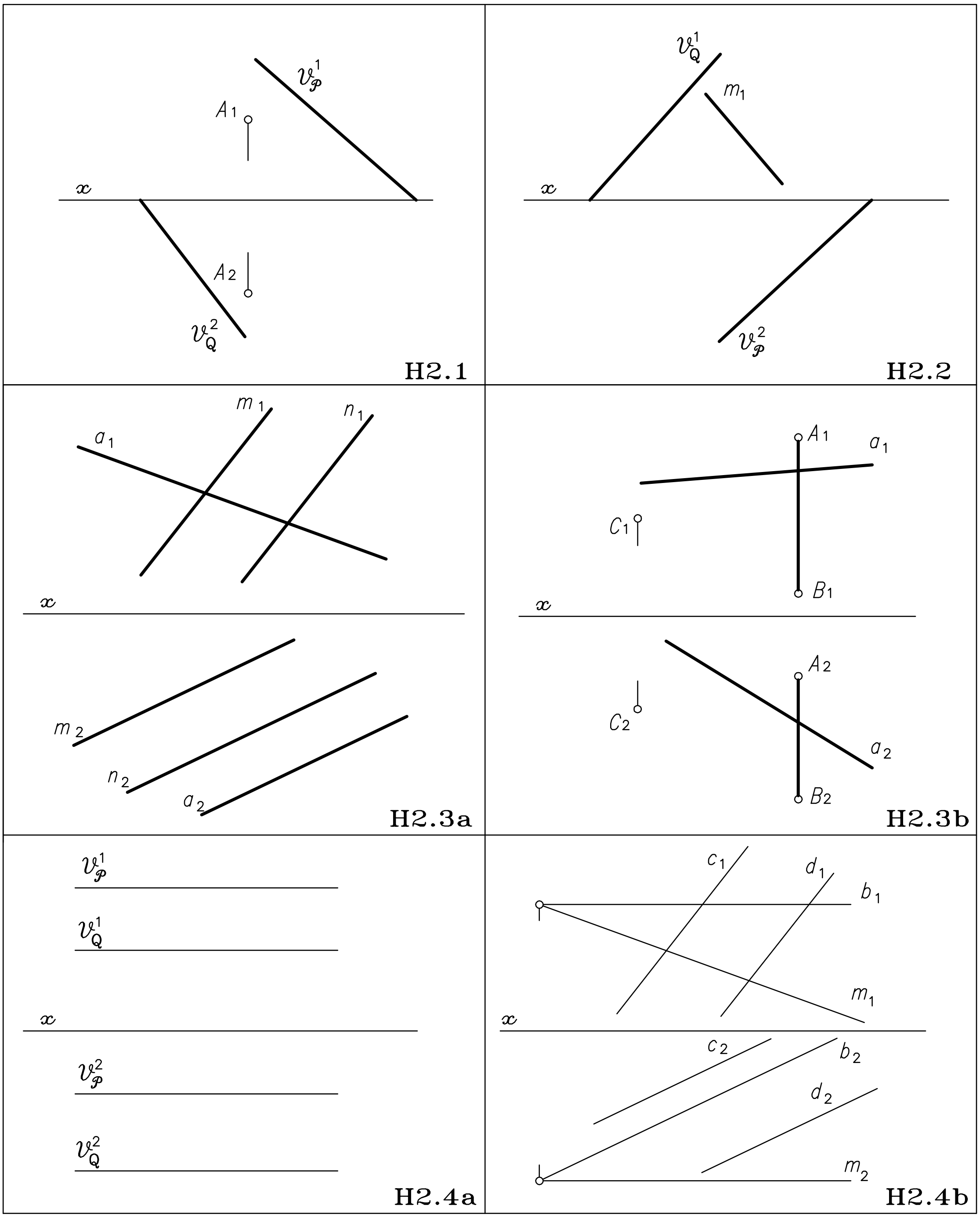
2. Biết các mặt phẳng $\mathcal{P}$ và Q cùng chứa đường thẳng m. Vẽ m_2 và các vết còn lại của $\mathcal{P}$ và Q (H2.2).

3. Tìm giao điểm của đường thẳng a và mặt phẳng $\mathcal{P}$ trong các trường hợp sau, xét thấy khuất:

a) $\mathcal{P}$ (m//n) (H2.3a). b) $\mathcal{P}$ (C, AB) (H2.3b).

4. Vẽ giao của hai mặt phẳng $\mathcal{P}$ và Q, xét thấy khuất trong các trường hợp sau:

a) Các mặt phẳng cho bởi các vết (H2.4a). b) $\mathcal{P}$ (c//d) và Q (b,m) (H2.4b).



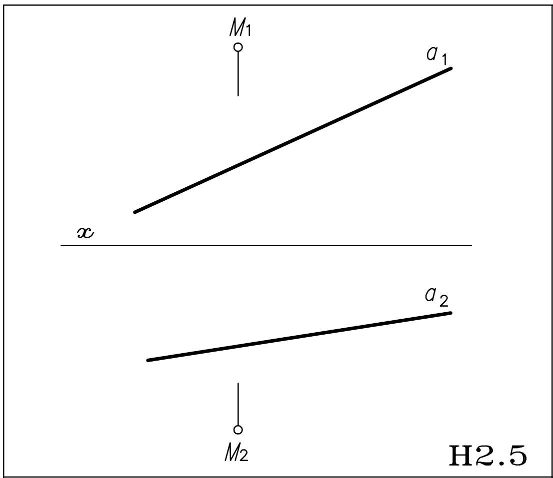
5. Qua điểm M vẽ đường thẳng cắt đường thẳng a và trục hình chiếu x (H2.5).

6. Vẽ đường thẳng d song song với trục hình chiếu x, cắt đường thẳng a và đường cạnh AB (H2.6).

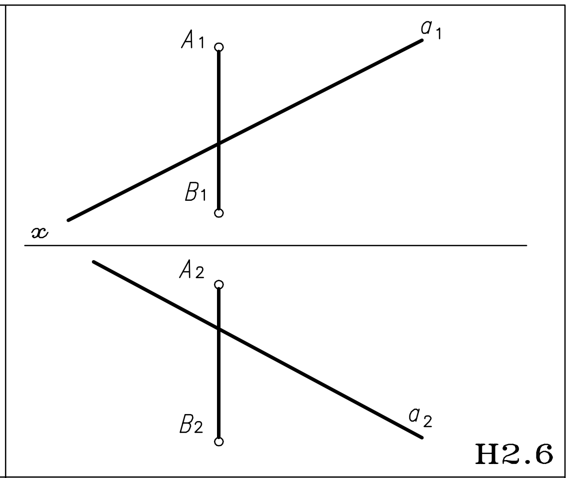
7. Qua điểm M vẽ đường thẳng d song song với mặt phẳng $\mathcal{P}$ và cắt đường thẳng a (H2.7).

8. Qua điểm M vẽ đường thẳng d song song với cả hai mặt phẳng $\mathcal{P}$ và Q (H2.8).

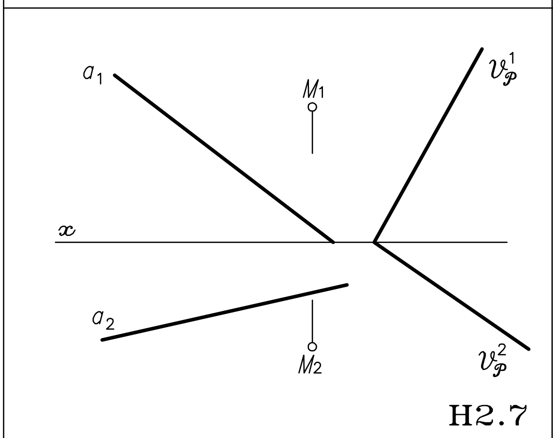
9. Hai mặt phẳng $\mathcal{P}$ và Q cùng song song với đường thẳng m (m_1, m_2). Vẽ các vết còn lại của $\mathcal{P}$ và Q trong các trường hợp: a) Biết $v^1\mathcal{P}$, v^1Q (H2.9a). b) Biết $v^1\mathcal{P}$, v^2Q (H2.9b).



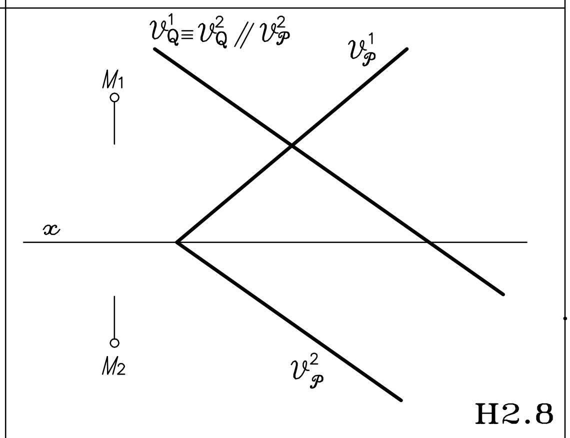
H2.5



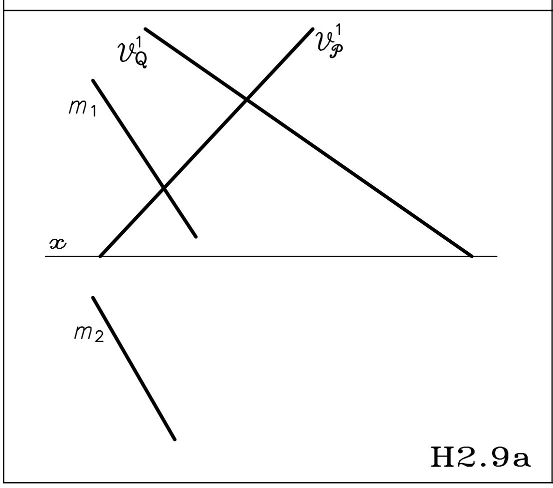
H2.6



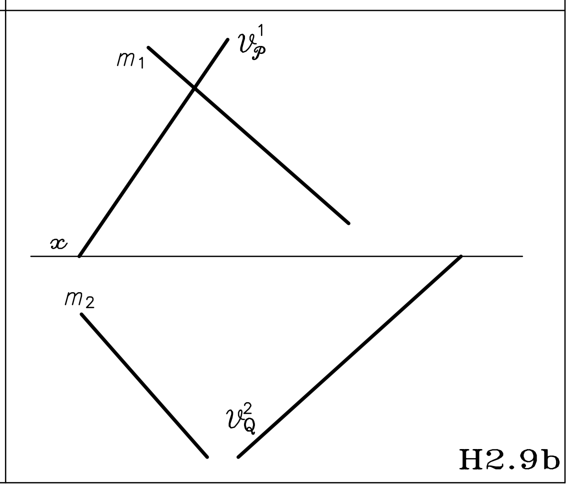
H2.7



H2.8



H2.9a



H2.9b

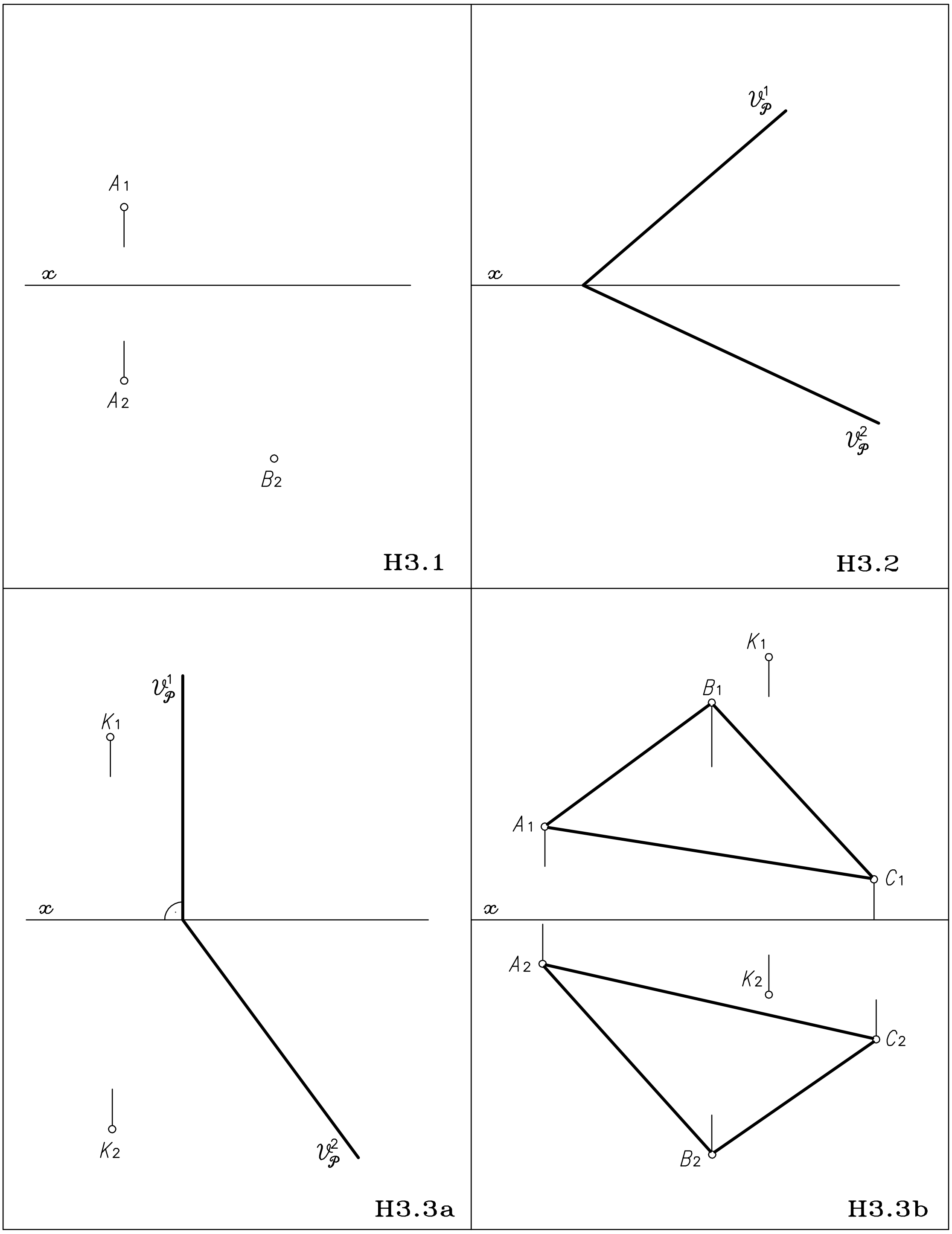
BÀI 3. BÀI TOÁN VỀ LƯỢNG

1. Cho điểm A và hình chiếu bằng của điểm B. Biết khoảng cách AB=30mm, tìm B_1 (H3.1).

2. Vẽ mặt phẳng Q song song và cách mặt phẳng $\mathcal{P}$ 20mm (H3.2).

3. Xác định khoảng cách từ điểm K đến mặt phẳng $\mathcal{P}$.

a) Mặt phẳng $\mathcal{P}$ cho bởi các vết (H3.3a). b) $\mathcal{P}$ (A,B,C) (H3.3b).

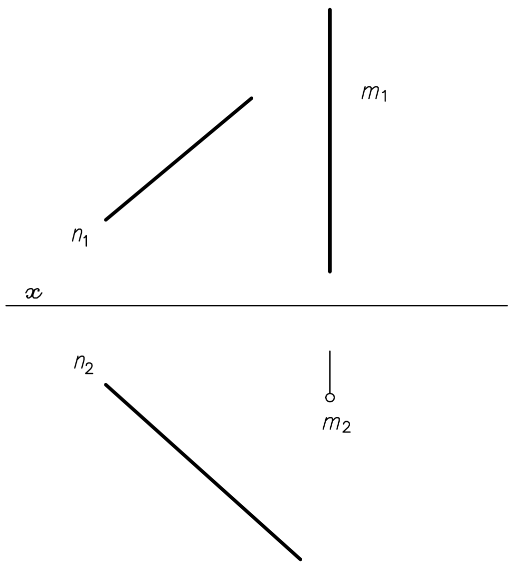


4. Vẽ đường vuông góc chung và xác định khoảng cách giữa hai đường m,n (H3.4).

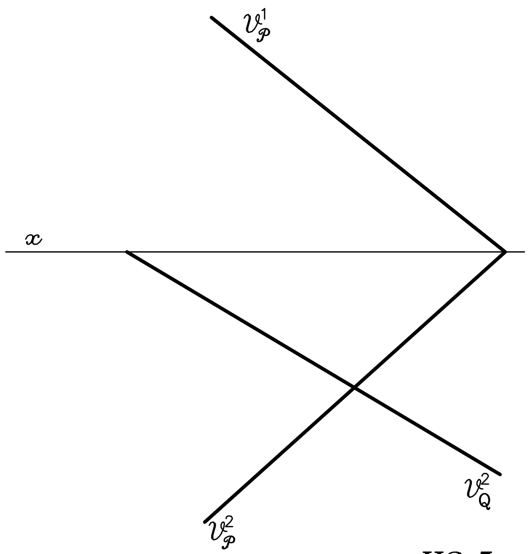
5. Vẽ vết đứng của mặt phẳng *Q* biết hai mặt phẳng $\mathscr{P}$ và *Q* vuông góc nhau (H3.5).

6. Vẽ hình vuông ABCD biết cạnh AB và hình chiếu đứng của tia Ad chứa cạnh AD (H3.6).

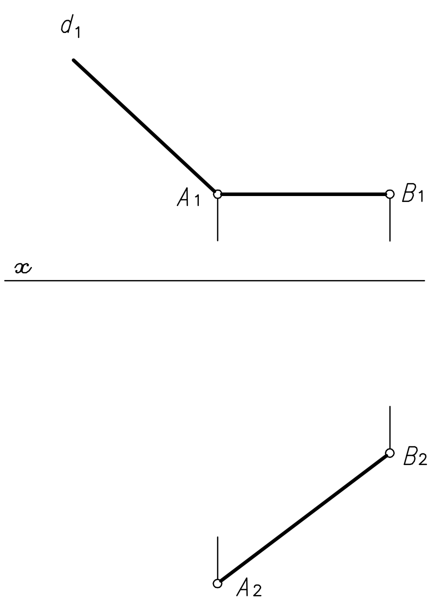
7. Cho điểm A, đường thẳng d và mặt phẳng $\mathscr{P}$**.** Vẽ đường thẳng qua A, vuông góc với d và song song với $\mathscr{P}$ (H3.7).



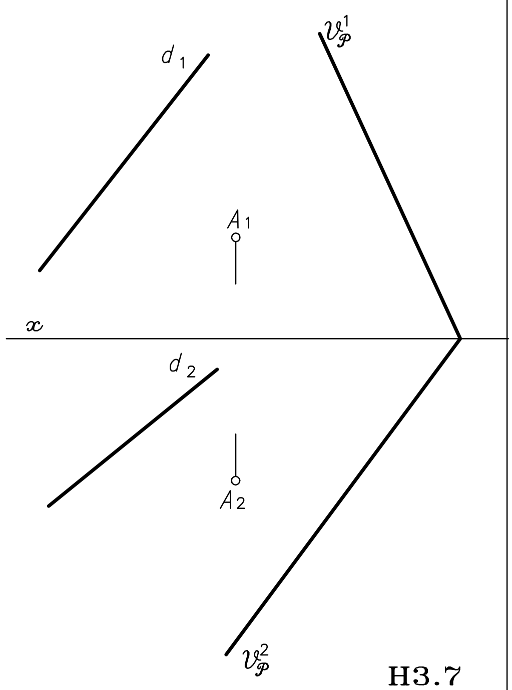
H3.4



H3.5



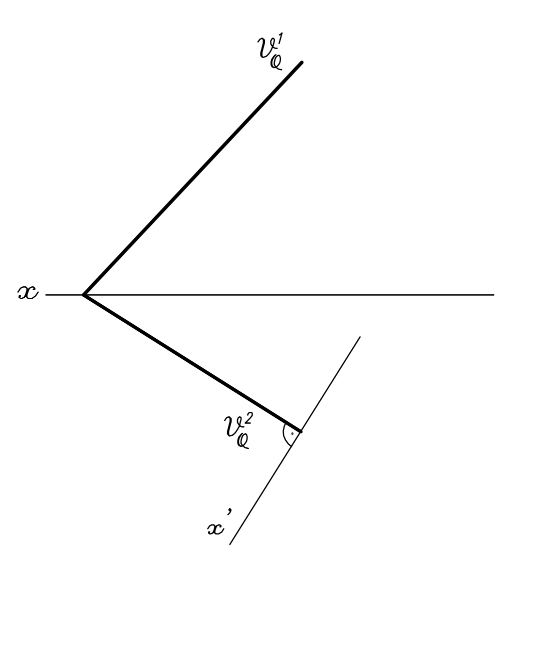
H3.6



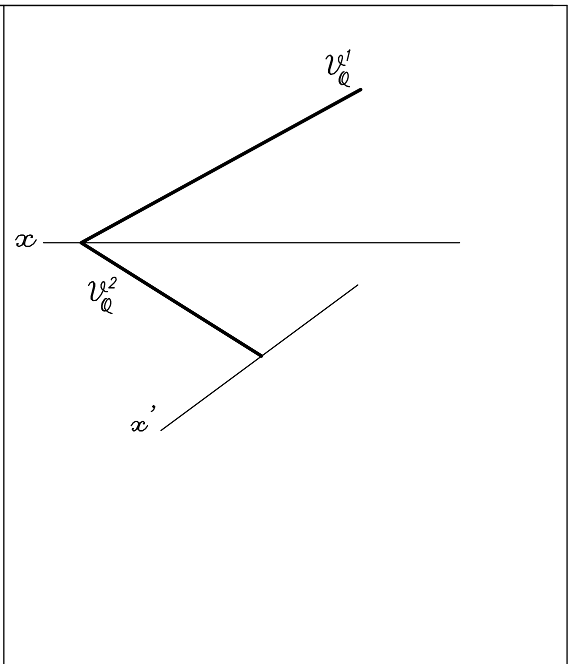
H3.7

BÀI 4. CÁC PHÉP BIẾN ĐỔI HÌNH CHIẾU

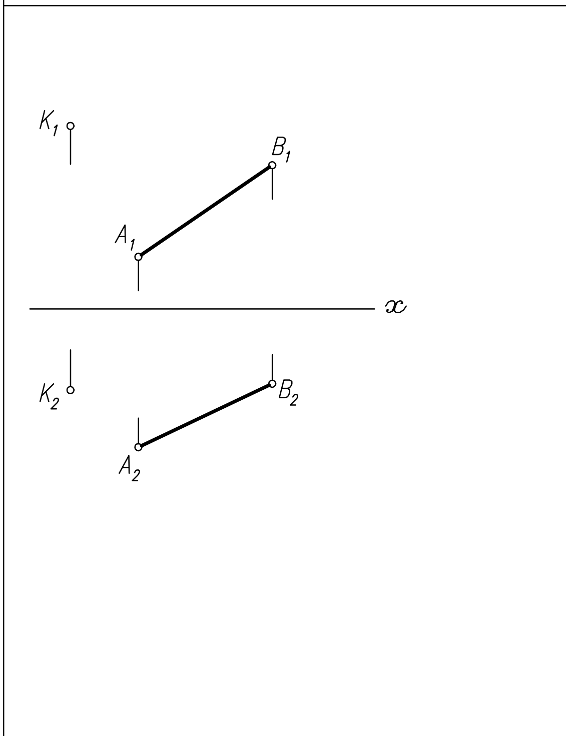
1. Cho mặt phẳng *Q*, xác định vết đứng mới của *Q* trong phép thay mặt phẳng hình chiếu đứng (H4.1a,b).
2. Tìm khoảng cách từ điểm K đến đường thẳng AB (H4.2a,b).



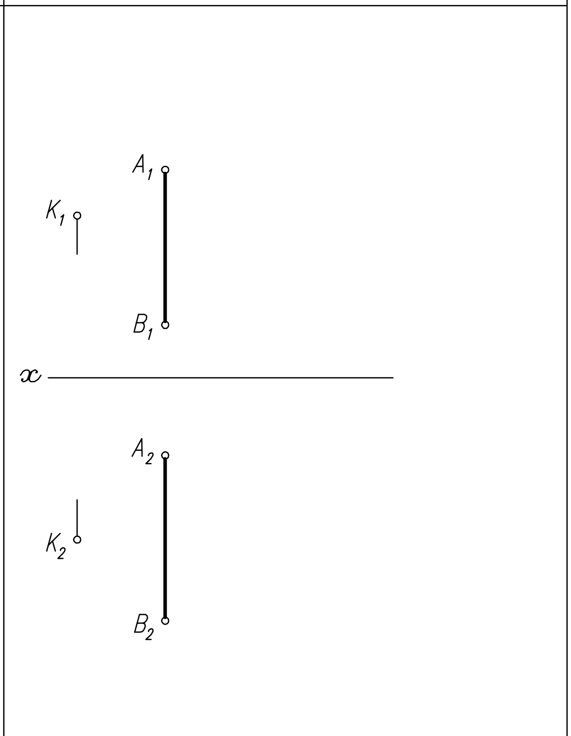
H4.1a



H4.1b



H4.2a

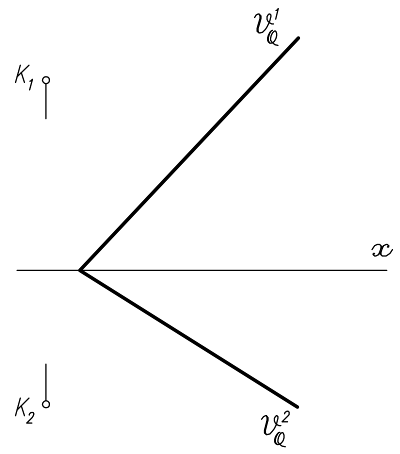


H4.2b

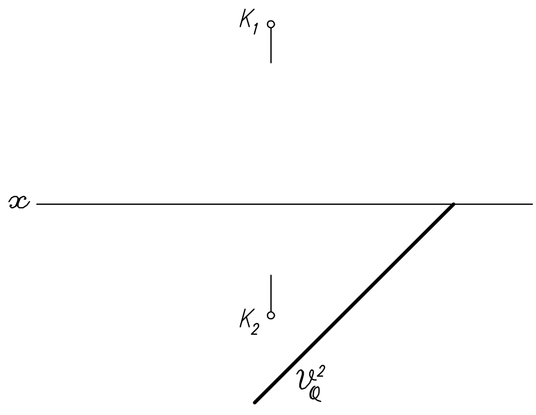
3. Xác định khoảng cách từ điểm K đến mặt phẳng *Q* (H4.3).

4. Vẽ vết đứng của mặt phẳng *Q* biết khoảng cách từ K đến *Q* bằng 25mm (H4.4).

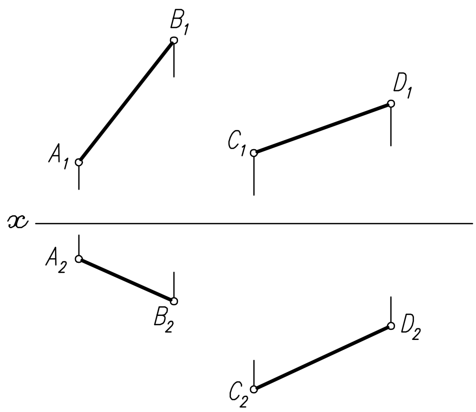
5. Vẽ đường vuông góc chung và xác định khoảng cách của hai đường thẳng chéo nhau AB và CD (H4.5).



H4.3

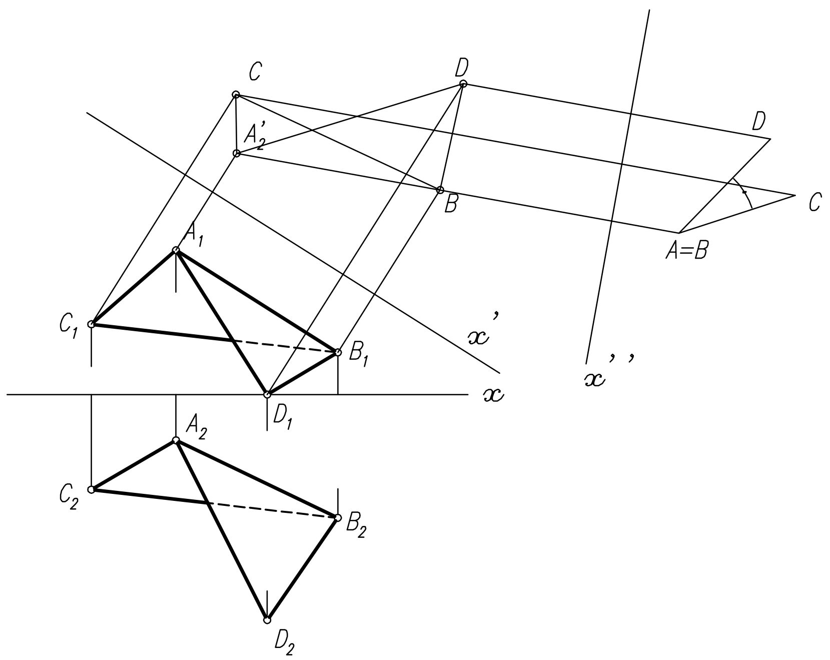


H4.4

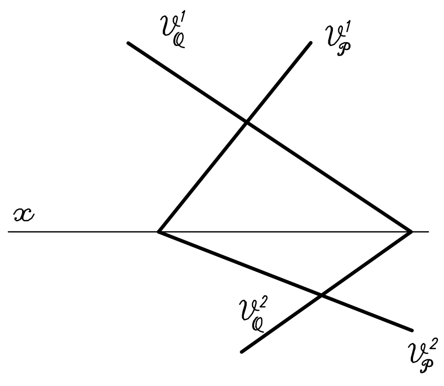


H4.5

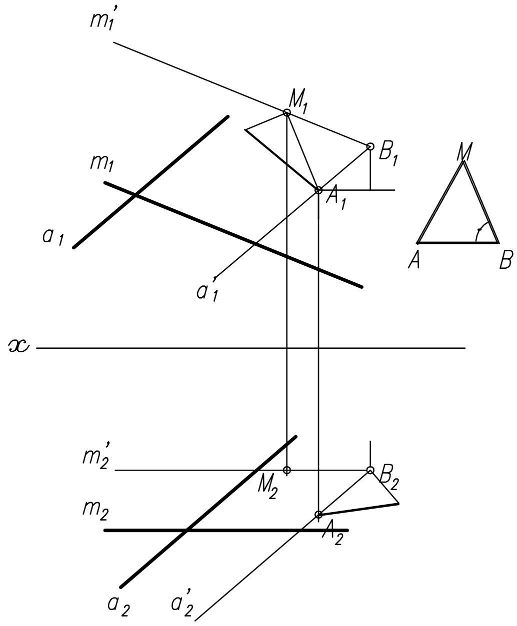
6. Xác định độ lớn thật của góc nhị diện (C,AB,D) (H4.6).
7. Xác định góc giữa hai mặt phẳng $\boldsymbol{\mathcal{P}}$ và Q (H4.7).
8. Xác định góc giữa đường thẳng a và đường mặt m (H4.8).



H4.6



H4.7

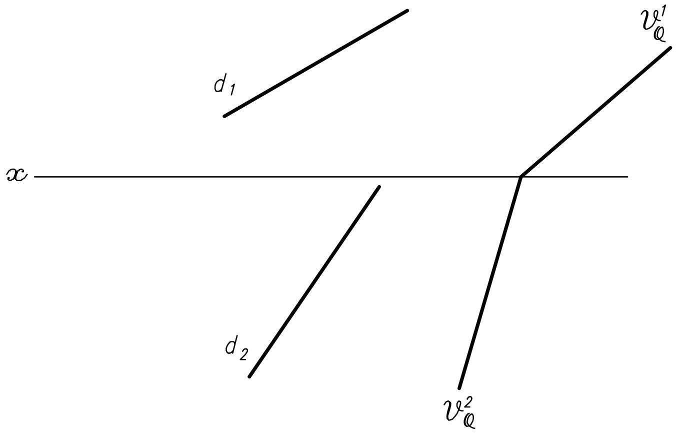


H4.8

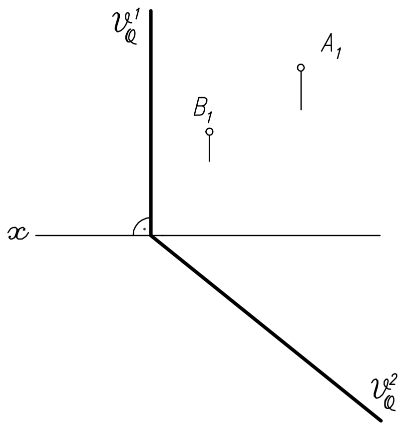
9. Xác định góc giữa đường thẳng d mặt phẳng *Q* (H4.9).

10. Cho hai điểm A, B thuộc mặt phẳng chiếu bằng *Q*. Trong mặt phẳng *Q*, vẽ tam giác đều ABC và tìm tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC (H4.10).

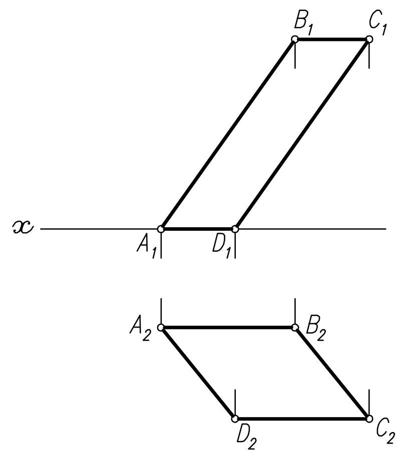
11. Tìm độ lớn thật của hình bình hành ABCD (H4.11).



H4.9



H4.10



H4.11