# MỤC LỤC

# GIẢI TÍCH I

*Sách dùng cho sinh viên trường Đại học xây dựng*
*và sinh viên các trường Đại học, Cao đẳng kĩ thuật*

# Chương 3

# Đạo hàm và vi phân

## 3.1 Đạo hàm hàm số

### 3.1.1 Hàm khả vi và đạo hàm hàm số

Nhiều bài toán trong các lĩnh vực khác nhau đòi hỏi phải tìm tiếp tuyến với đường cong hay tính vận tốc chuyển động của vật thể. Các bài toán đó dẫn đến khái niệm hàm khả vi cũng như đạo hàm hàm số.

Cho $X \subset \mathbb{R}$ là tập mở trong tập các số thực, $x_0 \in X$ và $f: X \to \mathbb{R}$ là hàm xác định trên $X$.

**Định nghĩa 3.1.1** *Hàm $f$ được gọi là khả vi tại $x_0$ nếu tồn tại giới hạn hữu hạn*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

*Ta gọi giới hạn đó là đạo hàm hàm $f$ tại $x_0$, kí hiệu*

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \tag{3.1}$$

Người ta thường sử dụng các kí hiệu sau trong các sách viết về hàm khả vi: số gia biến độc lập $\Delta x = x - x_0$, số gia hàm số tại $x_0$ ứng với số gia $\Delta x$ của biến độc lập

$$\Delta f = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

Như vậy $f$ khả vi tại $x_0$ khi và chỉ khi tồn tại giới hạn hữu hạn

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \tag{3.2}$$

**Nhận xét**

1. Nếu hàm $f$ khả vi tại $x_0$, khi đó do đẳng thức (3.1), tồn tại vô cùng bé (VCB) $\alpha(x)$ trong quá trình $x \to x_0$ sao cho
$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) + \alpha(x) \quad \text{hoặc dạng tương đương}$$
$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + \alpha(x) \cdot (x - x_0) \tag{3.3}$$

2. Biểu thức $\alpha(x) \cdot (x - x_0)$ trong đẳng thức (3.3) ở trên là VCB cấp cao hơn $x - x_0$ trong quá trình $x \to x_0$. Vì vậy nếu $f$ khả vi tại $x_0$, ta có
$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) \quad \text{hay}$$
$$\Delta f = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x) \tag{3.4}$$

**Định nghĩa 3.1.2** *Ta gọi đại lượng $f'(x_0)\Delta x$ trong đẳng thức (3.4) là vi phân của hàm $f$ tại $x_0$ và kí hiệu*
$$df(x_0) = f'(x_0)\Delta x.$$

Nhận xét rằng hàm đồng nhất $g(x) = x$ khả vi tại mọi điểm $x_0 \in \mathbb{R}$ và
$$g'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1$$

Suy ra biểu thức vi phân của hàm đồng nhất $dx = \Delta x$. Do vậy đối với hàm khả vi bất kì $f$ tại $x_0$, người ta viết biểu thức vi phân của $f$ tại $x_0$
$$df(x_0) = f'(x_0)\Delta x = f'(x_0)dx.$$

**Ý nghĩa cơ học của đạo hàm**

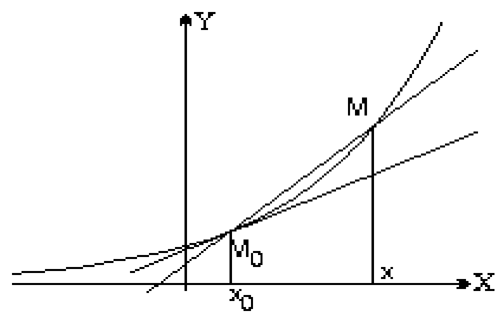
Một chất điểm chuyển động thẳng. Quan hệ giữa thời gian $t$ và quãng đường đi được trong khoảng thời gian $t$ được cho bởi hàm $s(t)$. Vận tốc trung bình của chất điểm trong khoảng thời gian giữa 2 thời điểm $t_0$ và $t$ bằng
$$v_{tb} = \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$$

Vậy vận tốc tức thời của chuyển động tại thời điểm $t_0$ bằng $\lim\limits_{t \to t_0} v_{tb} = s'(t_0)$.

**Ý nghĩa hình học của đạo hàm**

Hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Giả sử $M_0(x_0, f(x_0))$ và $M(x, f(x))$ là hai điểm thuộc đồ thị. Đường thẳng $M_0M$ có hệ số góc

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$




Hình 3.1: Tiếp tuyến

Khi $x$ tiến dần đến $x_0$, vị trí $M$ dần đến $M_0$ và đường thẳng $M_0M$ dần đến tiếp tuyến (nếu có) của đồ thị đường cong tại $M_0$. Do đó người ta coi $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ là hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị tại $M_0$. Phương trình của tiếp tuyến khi đó là

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Định lí sau cho ta mối liên hệ giữa tính khả vi và liên tục của hàm số

**Định lí 3.1.1** *Nếu $f: X \to \mathbb{R}$ khả vi tại $x_0 \in X$ thì $f$ liên tục tại $x_0$.*

*Chứng minh.* Do $f$ khả vi tại $x_0$, theo (3.3)

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + \alpha(x) \cdot (x - x_0),$$

trong đó $\alpha(x)$ là VCB trong quá trình $x \to x_0$. Suy ra

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0.$$

Vậy $f$ liên tục tại $x_0$. ■

Nhận xét rằng điều ngược lại của định lí trên không đúng: nếu $f$ liên tục tại $x_0$, hàm $f$ có thể không khả vi tại đó. Chẳng hạn hàm $f(x) = |x|$ liên tục tại $x = 0$, tuy nhiên dễ dàng chứng minh được giới hạn sau không tồn tại

$$\lim_{x \to 0} \frac{|x| - 0}{x - 0}.$$

**Định nghĩa 3.1.3** *$X \subset \mathbb{R}$ là tập mở, hàm $f : X \to \mathbb{R}$ được gọi là khả vi trên tập $X$ nếu $f$ khả vi tại mọi điểm thuộc $X$.*
*Ngoài ra nếu $f' : X \to R,\ x \mapsto f'(x)$ liên tục trên $X$, ta nói hàm $f$ khả vi liên tục trên tập $X$.*

**Ví dụ 3.1.1**

1. $f$ là hàm hằng $f \equiv C$, khi đó hiển nhiên $f'(x) = 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

2. Tính đạo hàm hàm số $f(x) = x^3$ tại $x = x_0$ bất kì. Kí hiệu $\Delta x = x - x_0$

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x_0 + \Delta x)^3 - x_0^3}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\Delta x)^3 + 3x_0^2 \Delta x + 3x_0 (\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (3x_0^2 + (\Delta x)^2 + 3x_0 \Delta x) = 3x_0^2.$$

   Như vậy hàm $f(x) = x^3$ khả vi với mọi $x \in \mathbb{R}$ và hàm đạo hàm

$$f'(x) = (x^3)' = 3x^2 \quad \text{với} \quad \forall x \in R.$$

3. Xét sự khả vi của hàm $f(x) = \sin x$ tại $x = 0$

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(0 + \Delta x) - \sin 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} = 1.$$

   Đạo hàm hàm $f(x) = \sin x$ tại $x = x_0$ bất kì bằng

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x_0 + \Delta x) - \sin x_0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2 \cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right) \sin \frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} = \cos x_0.$$

   Nói cách khác $(\sin x)' = \cos x$.
   Chứng minh tương tự ta có $(\cos x)' = -\sin x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

4. Nếu $f(x) = e^x$, khi đó $f'(x) = e^x$ với mọi $x$. Thật vậy

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x} = e^x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = e^x$$

5. Hoàn toàn tương tự ta có thể chứng minh

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \quad \text{với mọi} \quad x > 0.$$

### 3.1.2 Đạo hàm trái, đạo hàm phải, đạo hàm vô hạn

**Định nghĩa 3.1.4** *Hàm $f : X \to \mathbb{R}$ và giả thiết $X$ chứa một lân cận phải của $a \in X$. Nếu tồn tại giới hạn phải trong quá trình $x \to a$*

$$\lim_{x \to a+0} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

*và giới hạn đó hữu hạn, ta nói hàm $f$ có đạo hàm phải tại $a$ và kí hiệu $f'_+(a)$ bằng giới hạn đó.*
*Tương tự $f$ có đạo hàm trái tại a, kí hiệu*

$$f'_-(a) = \lim_{x \to a-0} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

*nếu tồn tại giới hạn trái ở trên và giới hạn đó hữu hạn.*

*Ví dụ.* Hàm $f(x) = |x|$ có đạo hàm phải, đạo hàm trái tại $x = 0$

$$f'_+(0) = \lim_{x \to 0+0} \frac{|x| - 0}{x} = 1 \quad \text{và} \quad f'_-(0) = \lim_{x \to 0-0} \frac{|x| - 0}{x} = -1.$$

Từ tính chất của giới hạn phải, giới hạn trái ta suy ra rằng hàm $f(x)$ khả vi tại $x = a$ khi và chỉ khi $f$ có đạo hàm phải $f'_+(a)$, đạo hàm trái $f'_-(a)$, các đạo hàm một phía đó bằng nhau và cùng bằng

$$f'(a) = f'_+(a) = f'_-(a).$$

Về mặt hình học ta nói đạo hàm phải $f'_+(a)$ là hệ số góc của tiếp tuyến phải với đồ thị hàm số tại điểm $(a, f(a))$ và tương tự $f'_-(a)$ là hệ số góc của tiếp tuyến trái.

**Định nghĩa 3.1.5** *Nếu tồn tại các giới hạn*

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=+\infty \quad \textit{hoặc} \quad \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=-\infty$$

*ta nói $f(x)$ có đạo hàm vô hạn tại $x=a$.*

Về mặt hình học nếu $f(x)$ có đạo hàm vô hạn tại $x=a$ khi đó tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại điểm $(a, f(a))$ có phương thẳng đứng (song song với trục tung). Bạn đọc tự suy ra các khái niệm đạo hàm vô hạn một phía.

*Ví dụ.* Xét hàm $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ với đồ thị là nửa đường tròn nằm trên trục hoành. Hàm $f$ có đạo hàm vô hạn tại các điểm $x=\pm 1$. Thật vậy

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{\sqrt{1-x^2}-0}{x-1}=-\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}=-\infty,\quad \lim_{x\to -1+0}\frac{\sqrt{1-x^2}-0}{x-(-1)}=+\infty$$

### 3.1.3 Các quy tắc tính đạo hàm

Định lí sau đưa ra các quy tắc tính đạo hàm của tổng, hiệu, tích, thương các hàm số

**Định lí 3.1.2** *Giả thiết $f, g : X \to \mathbb{R}$ là 2 hàm khả vi tại $x_0 \in X$, khi đó các hàm $f+g, \alpha f$ $(\alpha \in R), f\cdot g$ và $\frac{f}{g}$ (với $g(x_0)\neq 0$) cũng khả vi tại $x_0$ đồng thời*

- $(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$
- $(\alpha f)'(x_0)=\alpha f'(x_0)$
- $(f\cdot g)'(x_0)=f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)$
- $(\frac{f}{g})'(x_0)=\dfrac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$

*Chứng minh.* Ta sẽ chứng minh quy tắc đạo hàm của thương, các quy tắc còn lại được chứng minh tương tự. Đặt $u=\frac{f}{g}$, xét số gia hàm $u$ tại $x_0$

$$\Delta u=\frac{f(\Delta x+x_0)}{g(\Delta x+x_0)}-\frac{f(x_0)}{g(x_0)}=\frac{\Delta f+f(x_0)}{\Delta g+g(x_0)}-\frac{f(x_0)}{g(x_0)}=\frac{g(x_0)\Delta f-f(x_0)\Delta g}{g(x_0)(\Delta g+g(x_0))}$$

Chia cả 2 vế cho $\Delta x$ và chuyển qua giới hạn $\Delta x \to 0$, ta được điều phải chứng minh

$$\frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{g(x_0)\frac{\Delta f}{\Delta x} - f(x_0)\frac{\Delta g}{\Delta x}}{g(x_0)(\Delta g + g(x_0))} \to \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}. \quad \blacksquare$$

Nhận xét rằng từ 2 kết luận đầu của định lí: $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$ và $(\alpha f)'(x_0) = \alpha f'(x_0)$ suy ra đạo hàm của hiệu bằng hiệu các đạo hàm.

$$(f-g)'(x_0) = (f+(-g))'(x_0) = f'(x_0) + (-g)'(x_0) = f'(x_0) - g'(x_0).$$

**Ví dụ 3.1.2**

1. Hàm $f(x) = \cos x + \sin x - xe^x$ khả vi với mọi $x \in \mathbb{R}$ và

$$f'(x) = (\cos x + \sin x - xe^x)' = -\sin x + \cos x - x - xe^x.$$

2. Hàm $f(x) = \operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ khả vi tại mọi $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ và

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

3. Hàm $\operatorname{cotg} x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$ khả vi tại mọi $x \neq k\pi$ và

$$(\operatorname{cotg} x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{-1}{\sin^2 x}$$

4. Hàm $\log_a x$ khả vi với mọi $x > 0$ và

$$(\log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \frac{1}{x \ln a}$$

**Định lí 3.1.3 (Đạo hàm hàm hợp)** *Giả sử $U, V \subset \mathbb{R}$ là hai tập mở trong $\mathbb{R}$. Hàm $f : U \to V$ khả vi tại $x_0 \in U$ và hàm $g : V \to \mathbb{R}$ khả vi tại $f(x_0) \in V$. Khi đó hàm hợp $g \circ f : U \to \mathbb{R}$ khả vi tại $x_0$, đồng thời*

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

*Chứng minh.* Sử dụng các kí hiệu $\Delta x = x - x_0, \Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, lập số gia hàm số $h = g \circ f$ tại $x_0$

$$\Delta h = g(f(x_0 + \Delta x)) - g(f(x_0)) = g(f(x_0) + \Delta f) - g(f(x_0))$$

Do $g$ khả vi tại $y_0 = f(x_0)$, theo (3.4)

$$g(y_0 + t) - g(y_0) = g'(y_0)t + o(t).$$

Suy ra

$$\Delta h = g'(f(x_0))\Delta f + o(\Delta f) = g'(f(x_0))(f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)) + o(\Delta f)$$

Chia cả 2 vế cho $\Delta x$ và chuyển qua giới hạn khi $\Delta x \to 0$, sử dụng kết quả

$$\frac{o(\Delta f)}{\Delta x} = \frac{o(\Delta f)}{\Delta f} \cdot \frac{\Delta f}{\Delta x} \to 0$$

Ta được

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta h}{\Delta x} = g'(f(x_0))f'(x_0) + g'(f(x_0)) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{o(\Delta x)}{\Delta x} +$$
$$+ \lim_{\Delta x \to 0} \frac{o(\Delta f)}{\Delta x} = g'(f(x_0))f'(x_0), \text{ (đ.p.c.m.)} \quad \blacksquare$$

Nhận xét rằng vi phân hàm $f(x)$ thường được viết dưới dạng

$$df(x) = f'(x)dx.$$

Từ công thức tính đạo hàm hàm hợp $(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$ suy ra vi phân của $g \circ f$

$$d(g \circ f)(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)dx = g'(f(x))df(x).$$

Như vậy về mặt hình thức, vi phân của hàm số không phụ thuộc vào biến của nó là biến độc lập hay biến đó là biến phụ thuộc vào hàm khác. Ta nói tính chất đó là tính *bất biến của vi phân.*

**Ví dụ 3.1.3** *(Về đạo hàm hàm hợp)*

1. Hàm lũy thừa $f(x) = x^\alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}$, khả vi với mọi $x > 0$ và

$$(x^\alpha)' = (e^{\alpha \ln x})' = e^{\alpha \ln x}(\alpha \ln x)' = x^\alpha \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha - 1}.$$

2. Hàm $f(x) = \ln|x|$ khả vi với mọi $x \neq 0$ và

$$(\ln|x|)' = \frac{1}{|x|} \cdot (|x|)' = \begin{cases} \frac{1}{|x|} & \text{nếu } \ x > 0 \\ \frac{-1}{|x|} & \text{nếu } \ x < 0 \end{cases} \quad \text{hay} \quad (\ln|x|)' = \frac{1}{x}.$$

3. Hàm mũ $f(x) = a^x, a > 0$ khả vi với mọi $x \in \mathbb{R}$

$$(a^x)' = (e^{x\ln a})' = e^{x\ln a}(x\ln a)' = e^{x\ln a}\ln a = a^x \ln a.$$

**Định lí 3.1.4 (Đạo hàm hàm ngược)** *Hàm $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ khả vi liên tục trên khoảng mở $(a, b)$ và giả thiết $f'(x) \neq 0$ với mọi $x \in (a, b)$. Kí hiệu $T = Imf$ (tập ảnh hay còn gọi là tập giá trị của $f$). Khi đó tồn tại hàm ngược $f^{-1} : T \to (a, b)$, hàm ngược $f^{-1}(x)$ khả vi tại mọi $x \in T$, đồng thời*

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \quad \forall x \in T.$$

*Chứng minh.* Do $f'(x)$ liên tục trên $(a, b)$ và theo giả thiết $f'(x) \neq 0$ với mọi $x \in (a, b)$, suy ra $f'(x) > 0$ (hoặc $f'(x) < 0$) với mọi $x \in (a, b)$. Suy ra $f$ đơn điệu thực sự trên $(a, b)$, do vậy theo định lí **??**, tồn tại hàm ngược $f^{-1} : T \to (a, b)$ liên tục trên khoảng $T$. Để chứng minh $f^{-1}(x)$ khả vi tại điểm tùy ý $x_0 \in T$, kí hiệu $x = f(u), x_0 = f(u_0)$, ta có

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f^{-1}(x) - f^{-1}(x_0)}{x - x_0} = \lim_{u\to u_0} \frac{u - u_0}{f(u) - f(u_0)} = \lim_{u\to u_0} \frac{1}{\frac{f(u)-f(u_0)}{u-u_0}} = \frac{1}{f'(u_0)}.$$

Điều này chứng tỏ $f^{-1}(x)$ khả vi tại $x_0$ và

$$(f^{-1})'(x_0) = \frac{1}{f'(u_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(x_0))} \quad \forall x_0 \in T. \quad \blacksquare$$

**Ví dụ 3.1.4** *(Về đạo hàm hàm ngược)*

1. Hàm $\arcsin x$ là hàm ngược của $\sin x$, áp dụng công thức đạo hàm hàm ngược, với mọi $x \in T = (-1, 1)$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

2. Tương tự, với mọi $x \in (-1, 1)$

$$(\arccos x)' = \frac{1}{-\sin(\arccos x)} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2(\arccos x)}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

3. Hàm $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arccotg} x$ khả vi với mọi $x \in \mathbb{R}$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}, \quad (\operatorname{arccotg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

Chú ý rằng để thuận tiện cho việc tính toán, trong nhiều tài liệu, người ta sử dụng kí hiệu $x = x(y)$ làm hàm ngược của hàm $y = y(x)$. Khi đó với các điều kiện của định lí đạo hàm hàm ngược, hàm $x = x(y)$ khả vi và

$$x'(y) = \frac{1}{y'(x)}.$$

Ta xét một trường hợp riêng khi hàm $f$ cho dưới dạng tham số (ta sẽ trình bày kĩ hơn dạng tham số của đường cong trong phần cuối của chương, mục ứng dụng đạo hàm để khảo sát hàm số). Giả sử dạng tham số của hàm $f$ là

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

Nếu tại lân cận $t = t_0$, hàm $x = x(t)$ có hàm ngược $t = t(x)$, hàm ngược $t = t(x)$ khả vi tại lân cận $x_0 = x(t_0)$, khi đó tại lân cận điểm $x_0$ hàm $f$ có thể viết chi tiết dưới dạng hàm hợp $f(x) = y(t(x))$ và do vậy

$$f'(x) = y'(t)\Big|_{t=t(x)} \cdot t'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)}\Bigg|_{t=t(x)}$$

Đẳng thức trên được sử dụng để tính hệ số góc của tiếp tuyến của đường cong cho dưới dạng tham số.

**BẢNG ĐẠO HM MỘT SỐ HM SƠ CẤP**

| | |
|---|---|
| $(C)' = 0$ | $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ |
| $(e^x)' = e^x$ | $(a^x)' = (a^x)\ln a$ |
| $(\sin x)' = \cos x$ | $(\cos x)' = -\sin x$ |
| $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$ | $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x\ln a}$ |
| $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ | $(\operatorname{cotg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$ |
| $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$ | $(\operatorname{arccotg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$ |
| $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$ | $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$ |

**Ứng dụng vi phân để tính gần đúng**

Từ định nghĩa của vi phân

$$df(x_0) = f'(x_0)\Delta x$$

và theo công thức (3.4) $\Delta f = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)$ ta có

$$\Delta f = df(x_0) + o(\Delta x).$$

Như vậy với $\Delta x$ đủ nhỏ ta có thể xấp xỉ số gia hàm số $\Delta f$ tại $x_0$ với vi phân $df(x_0)$

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx df(x_0)$$

hay

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + df(x_0) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$$

Ta sử dụng công thức này để tính gần đúng $f(x_0 + \Delta x)$ khi $\Delta x$ đủ bé.

**Ví dụ 3.1.5**

1. Để tính gần đúng $\sin 31^0$, xét hàm $f(x) = \sin x$ tại $x_0 = \frac{\pi}{6}$

$$\sin(x_0 + \Delta x) \approx \sin(x_0) + \cos x_0 \cdot \Delta x$$

Số đo góc được tính theo radian

$$\sin 31^0 = \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{180}\right) \approx \sin\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{6} \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 0,0174533$$

Suy ra $\sin 31^0 \approx 0,515115$.

2. Tính gần đúng $\sqrt{170}$, xét hàm $f(x) = \sqrt{x}$ tại $x_0 = 169$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \ \Rightarrow f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + \frac{1}{2\sqrt{x_0}}\Delta x$$

Với $\Delta x = 1$ (khá bé so với $x_0 = 169$)

$$\sqrt{170} = \sqrt{169+1} \approx \sqrt{169} + \frac{1}{2\sqrt{169}} \cdot 1 = 13 + \frac{1}{26} \approx 13,038.5$$

### 3.1.4 Đạo hàm và vi phân cấp cao. Công thức Leibnitz

Cho hàm $f : X \to \mathbb{R}$ khả vi trên tập mở $X \subset \mathbb{R}$, khi đó hàm $f'$ được xác định trên $X$

$$f' : X \to R, x \mapsto f'(x).$$

**Định nghĩa 3.1.6** *Nếu tại $x_0 \in X$ hàm $f' : X \to \mathbb{R}$ khả vi, ta nói hàm $f$ khả vi cấp 2 tại $x_0$ và đạo hàm của hàm $f'$ tại $x_0$ được gọi là đạo hàm cấp 2 của $f$ tại $x_0$. Kí hiệu đạo hàm cấp 2 đó là $f''(x_0)$*

$$f''(x_0) = (f')'(x_0).$$

*Một cách tổng quát, giả sử tồn tại đạo hàm cấp $n-1$ của $f$ trên $X$*

$$f^{(n-1)} : X \to \mathbb{R}$$

*Nếu hàm $f^{(n-1)}$ khả vi tại $x_0 \in X$ thì đạo hàm của hàm $f^{(n-1)}$ tại $x_0$ được gọi là đạo hàm cấp $n$ của $f$ tại $x_0$, kí hiệu $f^{(n)}(x_0)$*

$$f^{(n)}(x_0) = (f^{(n-1)})'(x_0).$$

*Hàm có đạo hàm cấp $n$ tại $x_0$ được gọi là hàm khả vi cấp $n$ tại đó.*

Người ta còn sử dụng các thuật ngữ khác liên quan tới đạo hàm cấp cao, ví dụ ta nói $f$ *khả vi liên tục cấp $n$ trên tập $X$* nếu hàm $f^{(n)} : X \to \mathbb{R}$ liên tục trên tập $X$.
Hàm $f$ *khả vi vô hạn tại $x_0$* nếu $f$ có đạo hàm mọi cấp tại $x_0$.

**Định nghĩa 3.1.7** *$X \subset \mathbb{R}$ là tập mở và hàm $f : X \to \mathbb{R}$ khả vi cấp $n$ tại $x_0$, khi đó vi phân cấp $n$ của $f$ tại $x_0$ ứng với số gia $\Delta x$ (cố định) của đối số được xác định*

$$d^n f(x_0) = f^{(n)}(x_0)(\Delta x)^n \quad \textit{hoặc viết} \quad d^n f(x_0) = f^{(n)}(x_0)dx^n.$$

Từ định nghĩa trên suy ra

$$d^2 f(x) = d(df(x)) = f''(x)dx^2$$

$$d^3 f(x) = d(d^2 f(x)) = f^{(3)}(x)dx^3$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$d^n f(x) = d(d^{n-1} f(x)) = f^{(n)}(x)dx^n$$

Nhận xét rằng vi phân cấp cao không có tính bất biến như vi phân cấp một. Chẳng hạn khi $x = x(t)$ là hàm của biến độc lập $t$, vi phân cấp một, cấp hai

$$df(x) = f'(x)dx \quad \text{hay} \quad df(x(t)) = f'(x(t))x'(t)dt$$

$$d^2 f(x(t)) = (f''(x(t))x'^2(t) + f'(x(t))x''(t))dt^2 = f''(x)dx^2 + f'(x)d^2 x$$

**Ví dụ 3.1.6**

1. Hàm $f(x) = x^n$ ($n$ là số tự nhiên)

$$\begin{aligned}&f'(x) = nx^{n-1}\\ &f''(x) = n(n-1)x^{n-2}\\ &\cdots\cdots\cdots\\ &f^{(n)}(x) = n!\\ &f^{(n+1)}(x) = 0 \quad \text{với mọi} \quad x \in R.\end{aligned}$$

2. Cho hàm $f(x) = \operatorname{sh} x$, ta đã biết

$$\begin{aligned}&(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x\\ &(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x\end{aligned}$$

Vậy

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} \operatorname{ch} x & \text{nếu } n \text{ lẻ} \\ \operatorname{sh} x & \text{nếu } n \text{ chẵn} \end{cases}$$

3. Hàm $f(x) = \sin x$

$$\begin{aligned}&f'(x) = \cos x = \sin(x + \tfrac{\pi}{2})\\ &f''(x) = \cos(x + \tfrac{\pi}{2}) = \sin(x + 2 \cdot \tfrac{\pi}{2})\\ &\cdots\cdots\cdots\\ &f^{(n)}(x) = \sin(x + n \cdot \tfrac{\pi}{2})\end{aligned}$$

Đối với đạo hàm cấp cao, hiển nhiên ta có quy tắc tính đạo hàm sau

- $(f+g)^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0) + g^{(n)}(x_0)$
- $(\alpha f)^{(n)}(x_0) = \alpha f^{(n)}(x_0)$

với giả thiết $f, g : X \to \mathbb{R}$ khả vi cấp $n$ tại $x_0$.

**Định lí 3.1.5 (Công thức Leibnitz)** *Cho tập mở $X \subset \mathbb{R}$ và giả thiết các hàm $u, v : X \to \mathbb{R}$ khả vi cấp $n$ trên $X$. Khi đó hàm tích $u \cdot v : X \to \mathbb{R}$ cũng khả vi cấp $n$ trên $X$, đồng thời*

$$(u \cdot v)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)}(x) v^{(k)}(x).$$

*Chứng minh.* Ta chứng minh định lí bằng quy nạp theo $n$. Định lí đúng với $n = 1$

$$(u \cdot v)^{(n)}(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x).$$

Giả sử định lí đúng với số tự nhiên $n$ nào đó

$$(u \cdot v)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)}(x)v^{(k)}(x).$$

Khi đó

$$(u \cdot v)^{(n+1)}(x) = ((u \cdot v)^{(n)})'(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (u^{(n-k)}(x)v^{(k)})'(x) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k [u^{(n-k+1)}(x)v^{(k)}(x) + u^{(n-k)}(x)v^{(k+1)}(x)] =$$

$$= u^{(n+1)}(x)v(x) + \sum_{k=1}^{n-1} [C_n^k + C_n^{k-1}] u^{(n-k+1)}(x)v^{(k)}(x) + u(x)v^{(n+1)}(x)$$

$$\Rightarrow \quad (u \cdot v)^{(n+1)}(x) = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k u^{(n+1-k)}(x)v^{(k)}(x). \text{ (đ.p.c.m.)} \quad \blacksquare$$

**Ví dụ 3.1.7**

1. Cho $f(x) = (2x^2 + 3x + 1)e^x$. Tính $f^{(5)}(x)$

$$f^{(5)}(x) = C_5^0 (e^x)^{(5)}(2x^2 + 3x + 1) + C_5^1 (e^x)^{(4)}(2x^2 + 3x + 1)' +$$
$$+ C_5^2 (e^x)^{(3)}(2x^2 + 3x + 1)'' + 0 = e^x(2x^2 + 23x + 56)$$

2. Hãy tính đạo hàm cấp $n$ hàm $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{1-x}}$ với $x < 1$.
   Viết hàm $f(x)$ dưới dạng tích $f(x) = (1 - x)^{-\frac{1}{2}}(x + 1)$ và áp dụng công thức Leibnitz

$$f^{(n)}(x) = C_n^0 [(1-x)^{-\frac{1}{2}}]^{(n)}(x+1) + C_n^1 [(1-x)^{-\frac{1}{2}}]^{(n-1)} + 0 =$$
$$= \frac{1}{2}[(1-x)^{-\frac{3}{2}}]^{(n-1)}(x+1) + n[(1-x)^{-\frac{1}{2}}]^{(n-1)} =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}[(1-x)^{-\frac{5}{2}}]^{(n-2)}(x+1) + n\frac{1}{2}[(1-x)^{-\frac{3}{2}}]^{(n-2)} =$$
$$= \frac{(2n-1)!!}{2^n}(1-x)^{-\frac{2n+1}{2}}(x+1) + n\frac{(2n-3)!!}{2^{n-1}}(1-x)^{-\frac{2n-1}{2}}$$

## 3.2 Các định lí hàm khả vi

### 3.2.1 Các định lí trung bình

**Định nghĩa 3.2.1** *Cho $X \subset \mathbb{R}$ là tập mở và hàm $f : X \to \mathbb{R}$. Ta nói $f$ đạt cực đại (cực tiểu) tại $x_0 \in X$ nếu tồn tại một lân cận $V \subset X$ của $x_0$ sao cho*

$$f(x) \leq f(x_0) \quad (f(x) \geq f(x_0)) \quad \text{với mọi} \quad x \in V.$$

*Ta nói $f$ đạt cực trị tại $x_0$ nếu $f$ đạt cực đại hoặc cực tiểu tại đó.*

Khái niệm cực trị định nghĩa ở trên còn được gọi là cực trị địa phương. Định lí sau cho ta điều kiện cần để hàm đạt cực trị.

**Định lí 3.2.1 (Fermat)** *Cho tập mở $X \subset \mathbb{R}$ và hàm $f : X \to \mathbb{R}$. Nếu $f$ đạt cực trị tại $x_0 \in X$ và $f$ khả vi tại $x_0$, khi đó $f'(x_0) = 0$.*

*Chứng minh.* Giả sử $f$ đạt cực đại tại $x_0$, khi đó tồn tại một lân cận $V \subset X$ của $x_0$ sao cho $f(x) - f(x_0) \leq 0 \ \forall x \in V$. Suy ra

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0, \quad \forall x > x_0 \text{ và } x \in V \ \Rightarrow \ f'(x_0) = \lim_{x \to x_0+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0, \quad \forall x < x_0 \text{ và } x \in V \ \Rightarrow \ f'(x_0) = \lim_{x \to x_0-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

Vậy $f'(x_0) = 0$. Chứng minh tương tự trong trường hợp $f$ đạt cực tiểu tại $x_0$. ■

Giá trị $f'(x_0)$ đo tốc độ biến thiên của hàm $f$ tại $x_0$. Do định lí trên $f'(x_0) = 0$ khi $f$ đạt cực trị nên người ta thường gọi $x_0$ là *điểm dừng* của hàm $f$.

**Định lí 3.2.2 (Rolle)** *Giả sử hàm $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ liên tục trên khoảng đóng $[a, b]$ và khả vi trong khoảng mở $(a, b)$. Giả thiết tiếp $f(a) = f(b)$ khi đó tồn tại điểm $c \in (a, b)$ sao cho $f'(c) = 0$.*

*Chứng minh.* Hai trường hợp có thể xảy ra
• $f$ là hàm hằng trên đoạn $[a, b]$, khi đó kết luận của định lí là hiển nhiên.
• $f$ không là hàm hằng trên $[a, b]$. Do $f$ liên tục trên khoảng đóng $[a, b]$, hàm $f$ đạt max và min trên $[a, b]$. Mặt khác từ giả thiết $f(a) = f(b)$ suy ra ít nhất hoặc max hoặc min của $f$ phải đạt được tại điểm $c$ nào đó trong khoảng mở $(a, b)$. Theo định lí Fermat tại đó $f'(c) = 0$. ■

**Định lí 3.2.3 (Cauchy)** *Giả thiết 2 hàm* $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *liên tục trên khoảng đóng* $[a, b]$ *và khả vi trong khoảng mở* $(a, b)$. *Khi đó tồn tại một số* $c \in (a, b)$ *sao cho*

$$(f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c).$$

*Ngoài ra nếu giả thiết thêm* $g'(x) \neq 0 \ \forall x \in (a, b)$, *khi đó công thức trên có thể viết dưới dạng*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \tag{3.5}$$

*Chứng minh.* Xét hàm $h : [a, b] \to \mathbb{R}$

$$h(x) = (f(b) - f(a))g(x) - (g(b) - g(a))f(x).$$

Hiển nhiên $h$ thỏa mãn các điều kiện của định lí Rolle liên tục trên khoảng đóng $[a, b]$, khả vi trong khoảng mở $(a, b)$ và $h(a) = h(b) = f(b)g(a) - g(b)f(a)$. Suy ra tồn tại điểm $c \in (a, b)$ sao cho

$$h'(c) = (f(b) - f(a))g'(c) - (g(b) - g(a))f'(c) = 0$$

hay

$$(f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c).$$

Nếu $g'(x) \neq 0 \ \forall x \in (a, b)$ suy ra (cũng theo định lí Rolle) $g(a) \neq g(b)$. Chia cả 2 vế đẳng thức trên cho $(g(b) - g(a))g'(c)$ ta được điều phải chứng minh. ■

Định lí sau là trường hợp riêng của định lí Cauchy, chọn $g(x) = x$

**Định lí 3.2.4 (Lagrange)** *Nếu* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *liên tục trên khoảng đóng* $[a, b]$ *và khả vi trong khoảng mở* $(a, b)$ *thì tồn tại điểm* $c \in (a, b)$ *sao cho*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

**Ví dụ 3.2.1**

1. Cho $f(x)$ là hàm khả vi trên $\mathbb{R}$. Khi đó giữa 2 nghiệm thực của phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm của phương trình

   $$f'(x) = 0.$$

   Thật vậy gọi $x = a$ và $x = b$ là 2 nghiệm khác nhau của của phương trình $f(x) = 0$. Áp dụng định lí Rolle, tồn tại điểm $c \in (a, b)$ sao cho $f'(c) = 0$.

2. Chứng minh bất đẳng thức

$$|\sin x - \sin y| \leq |x - y|,\ \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Áp dụng định lí Lagrange trên đoạn $[x, y]$, tồn tại điểm $c \in (x, y)$ sao cho

$$|\sin x - \sin y| = |\cos c \cdot (x - y)| \leq |x - y|.$$

3. Tương tự như ví dụ trên, xét hàm $f(t) = \sqrt{t}$ và áp dụng định lí Lagrange cho đoạn $[x, y]$ với $x, y \geq 1$

$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| = \frac{1}{2\sqrt{c}} \quad \text{với} \quad c \in (x, y).$$

Do $c \in (x, y) \Rightarrow c > 1$, ta có bất đẳng thức

$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| = \frac{1}{2\sqrt{c}}|x - y| \leq \frac{1}{2}|x - y|,\ \forall x, y \geq 1.$$

### 3.2.2 Công thức Taylor

Cho hàm $f(x)$ xác định tại lân cận nào đó của $a$. Giả sử $f$ khả vi đến cấp $n$ tại điểm $a$. Kí hiệu $P_n(x)$ là đa thức (theo biến $x$)

$$P_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n$$

$P_n(x)$ có các tính chất sau

$$P_n(a) = f(a)$$

$$P_n'(x) = f'(a) + \frac{f''(a)}{1!}(x - a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{(n-1)!}(x - a)^{n-1} \Rightarrow P_n^{'}(a) = f'(a)$$

$$P_n''(x) = f''(a) + \frac{f'''(a)}{1!}(x - a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{(n-2)!}(x - a)^{n-2} \Rightarrow P_n^{''}(a) = f''(a)$$

Cứ tiếp tục như vậy dễ dàng chứng minh được $P_n^{(n)}(a) = f^{(n)}(a)$. Như vậy hàm $f(x)$ và đa thức $P_n(x)$ có giá trị tại điểm $a$ cũng như đạo hàm các cấp từ đạo hàm cấp một tới đạo hàm cấp $n$ tại $a$ đều bằng nhau. Các định lí sau (mang tên Taylor) sẽ cho ta mối quan hệ giữa hàm $f(x)$ và đa thức $P_n(x)$ tại lân cận của điểm $a$ đó.

**Định lí 3.2.5 (Công thức Taylor dạng Peano)** *Cho $X \subset \mathbb{R}$ là tập mở và nếu hàm $f : X \to \mathbb{R}$ khả vi đến cấp $n$ tại $a \in X$ thì*

$$f(a+x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}x + \frac{f''(a)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}x^n + o(x^n), \tag{3.6}$$

*trong đó $o(x^n)$ là VCB cấp cao hơn $x^n$ trong quá trình $x \to 0$.*

*Chứng minh.* Ta sẽ chứng minh công thức (3.6) bằng quy nạp theo $n$. Với $n = 1$ (3.6) có dạng

$$f(a+x) = f(a) + f'(a)x + o(x).$$

Điều này được suy ra từ công thức (3.4) ngay sau định nghĩa đạo hàm.

Giả sử (3.6) đúng với $n-1$. Xét hàm

$$g(x) = f(a+x) - \left( f(a) + \frac{f'(a)}{1!}x + \frac{f''(a)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}x^n \right)$$

$$g'(x) = f'(a+x) - \left( f'(a) + \frac{f''(a)}{1!}x + \frac{f^{(3)}(a)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{(n-1)!}x^{n-1} \right)$$

Theo giả thiết quy nạp (áp dụng cho hàm $f'(a+x)$ và các đạo hàm của nó đến cấp $n-1$), $g'(x) = o(x^{n-1})$, nói cách khác với $\varepsilon > 0$ tùy ý tồn tại $\delta > 0$ sao cho khi $|x| < \delta$

$$|g'(x)| < \varepsilon |x|^{n-1}.$$

Áp dụng định lí Lagrange cho hàm $g$ trong khoảng $[0, x]$ (với các giá trị $x$ thỏa mãn $|x| < \delta$)

$$|g(x) - g(0)| = |g(x) - 0| = |g'(c)| \cdot |x - 0| < \varepsilon |x|^{n-1} \cdot |x| = \varepsilon |x|^n.$$

Suy ra $g(x) = o(x^n)$. Ta đã chứng minh xong giả thiết quy nạp. ■

Với giả thiết mạnh hơn về tính khả vi của hàm $f$ so với định lí trên, ta có định lí sau

**Định lí 3.2.6 (Công thức Taylor với số dư dạng Lagrange)**
*Giả sử hàm $f(x)$ có đạo hàm cấp $n+1$ trong lân cận nào đó của điểm $x = a$. Với mọi $x$ thuộc lân cận đó kí hiệu $h = x - a$, khi đó tồn tại $c$ nằm giữa $a$ và $x$ sao cho*

$$f(x) = f(a+h) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}h + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}h^{n+1} \tag{3.7}$$

*Chứng minh.* Đặt

$$F(t) = f(a+t) - [f(a) + \frac{f'(a)}{1!}t + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}t^n] \quad \forall t \in [0,h]$$

Dễ dàng chứng minh được

$$F(0) = F'(0) = \cdots = F^{(n)}(0) = 0$$

Áp dụng định lí Cauchy cho hai hàm $F(t)$ và $G(t) = t^{n+1}$ trên đoạn $[0,h]$ (công thức (3.5))

$$\frac{F(h)}{h^{n+1}} = \frac{F(h) - F(0)}{h^{n+1} - 0^{n+1}} = \frac{F'(c_1)}{(n+1)c_1^n} = \frac{F'(c_1) - F'(0)}{(n+1)(c_1^n - 0^n)} = \frac{F''(c_2)}{(n+1)nc_2^{n-1}} =$$

$$= \frac{F''(c_2) - F''(0)}{(n+1)n(c_2^{n-1} - 0^{n-1})} = \cdots = \frac{F^{(n)}(c_n) - F^{(n)}(0)}{(n+1)!(c_n - 0)} = \frac{F^{(n+1)}(c_{n+1})}{(n+1)!}$$

Nhận xét rằng các số $c_i$ theo định lí Cauchy đều thuộc khoảng $(0,h)$ đồng thời $F^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(a+t)$ suy ra

$$F(h) = \frac{f^{(n+1)}(a + c_{n+1})}{(n+1)!}h^{n+1}$$

Đặt $c = a + c_{n+1}$ và thay lại $F$ theo $f$ ta được điều phải chứng minh

$$f(a+h) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}h + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}h^{n+1} \quad \blacksquare$$

Kí hiệu $R_n(a,h)$ là số hạng cuối cùng trong công thức (3.7)

$$R_n(a,h) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}h^{n+1}$$

$R_n(a,h)$ được gọi là *phần dư thứ n của công thức Taylor dạng Lagrange.*

**Nhận xét**

- Các công thức Taylor (3.6), (3.7) còn được viết dưới dạng

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o\Big((x-a)^n\Big)$$

  với $x$ là điểm thuộc lân cận nào đó của $a$, hoặc tồn tại $c$ nằm giữa $a$ và $x$

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

  Ta nói chúng là các *khai triển Taylor* hàm $f$ tại lân cận điểm $a$. Trường hợp $a = 0$, khai triển Taylor còn được gọi là *khai triển Mac Laurin*.

- Phần dư $R_n(a, h)$ chính là sai số khi xấp xỉ hàm $f$ với một đa thức bậc $n$. Sai số đó khá nhỏ khi $n$ tương đối lớn, vì vậy nhiều ước lượng quan trọng liên quan tới hàm $f$ sẽ được tính toán thông qua đa thức xấp xỉ đó.

- Các công thức (3.3), (3.4) là trường hợp riêng của công thức Taylor dạng Peano (3.6) với $n = 1$

$$f(a+x) = f(a) + f'(a)x + o(x).$$

- Công thức Lagrange là trường hợp riêng của công thức Taylor số dư dạng Lagrange (3.7) với $n = 0$

$$f(b) = f(a) + f'(c)(b-a).$$

- Khai triển Taylor của một hàm là duy nhất. Nói cách khác nếu $f$ khả vi cấp $n$ tại $a$ và

$$f(a+x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots + a_n(x-a)^n + o\big((x-a)^n\big)$$

  khi đó

$$a_0 = f(a), a_1 = \frac{f'(a)}{1!}, a_2 = \frac{f''(a)}{2!}, ..., a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

  Thật vậy, không làm mất tính tổng quát ta sẽ chứng minh khai triển Mac Laurin hàm $f$ tại lân cận điểm $x = 0$ là duy nhất. Giả sử hàm $f$ có hai dạng khai triển sau

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + o(x^n) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n + o(x^n)$$

Chuyển qua giới hạn cả 2 vế trong quá trình $x \to 0$ ta được $a_0 = b_0$. Rút gọn $a_0$ ở cả hai vế sau đó chia cả 2 vế cho $x$

$$a_1 + a_2x + \cdots + a_nx^{n-1} + o(x^{n-1}) = b_1 + b_2x + \cdots + b_nx^{n-1} + o(x^{n-1})$$

Chuyển qua giới hạn trong quá trình $x \to 0$, ta được $a_1 = b_1$. Rút gọn $a_1$ ở cả hai vế rồi chia 2 vế cho $x$... Tiếp tục quá trình đó, sau $n+1$ bước ta được $a_n = b_n$.

Bằng lập luận trên ta đã chứng minh các hệ số trong khai triển Taylor của một hàm là duy nhất.

Áp dụng nhận xét này ta có thể tính đạo hàm cấp cao một số hàm nếu biết các khai triển Taylor của các hàm đó (xem phần *một số ứng dụng của khai triển Taylor* ở ngay dưới đây).

### Khai triển Mac Laurin một số hàm sơ cấp cơ bản

1. Hàm $f(x) = e^x$ khả vi vô hạn lần tại mọi điểm và $f^{(n)}(x) = e^x$ với mọi số tự nhiên $n$. Tại $x = 0$ ta luôn có $f^{(n)}(0) = 1$, do vậy theo (3.7)

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x),$$

trong đó $R_n(x) = \frac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1}$, $c$ nằm giữa 0 và $x$. Ta cũng thường sử dụng khai triển hàm $f(x) = e^x$ theo dạng Peano

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n).$$

2. Hàm $f(x) = \sin x$ khả vi mọi cấp và $f^{(2n)}(0) = 0, f^{(2n+1)}(0) = (-1)^n$. Do đó

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n}).$$

3. Tương tự, khai triển Mac Laurin của hàm $f(x) = \cos x$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}).$$

4. Khai triển Mac Laurin hàm $f(x) = (1+x)^\alpha$ với $\alpha$ là số thực tùy ý. Bằng quy nạp ta có thể chứng minh đạo hàm cấp $n$ của $f$ tại lân cận điểm $x = 0$
$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}.$$
Vậy
$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$$

5. Trong một số các tính toán sau này, ta thường sử dụng các khai triển Taylor của các hàm sơ cấp cơ bản đến cấp 3, cấp 4 hoặc cấp 5. Để thuận tiện cho công việc đó, chúng ta liệt kê một vài khai triển Taylor thường gặp

   (a) $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^6)$

   (b) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$

   (c) $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^4)$

   (d) $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + o(x^3)$

   (e) $\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^5)$

   (f) $\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + o(x^5)$

   (g) $\ln\cos x = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^4)$

   (h) $\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5)$

   (i) $\sqrt{1-x} = 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{16} - \frac{5x^4}{128} + o(x^4)$

   (j) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{3x^4}{8} + \frac{5x^6}{16} + o(x^7)$

   Chẳng hạn để có khai triển Mac Laurin cấp 4 hàm $\ln\cos x$, ta sử dụng khai triển $(b)$ và $(c)$
$$\ln\cos x = \ln\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) +$$

$$-\frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)\right)^2+o\left(\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)\right)^2\right)=$$

$$=-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)-\frac{1}{2}\left(\frac{x^4}{4}+o(x^4)\right)=-\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{12}+o(x^4)$$

**Một số ứng dụng của khai triển Taylor**

1. Tính đạo hàm cấp $n$ hàm $f(x)=x^3e^x$ tại $x=0$. Ta đã biết

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^{n-3}}{(n-3)!}+o(x^{n-3})$$

Suy ra

$$f(x)=x^3e^x=x^3+\frac{x^4}{1!}+\frac{x^5}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{(n-3)!}+o(x^n)$$

Mặt khác trong công thức khai triển Taylor (3.6), hệ số của $x^n$ bằng

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!}=\frac{1}{(n-3)!}\quad\Rightarrow\quad f^{(n)}(0)=\frac{n!}{(n-3)!}=n(n-1)(n-2).$$

2. Cho hàm $f(x)=\frac{x}{1+x^3}$. Hãy tính $f^{(7)}(0)$.

Sử dụng khai triển Mac Laurin hàm $f(t)=(1+t)^\alpha$ với $\alpha=-1$

$$\frac{1}{1+t}=1-t+t^2+o(t^2),\quad\text{thay}\quad t=x^3\ \Rightarrow\ \frac{1}{1+x^3}=1-x^3+x^6+o(x^6).$$

Suy ra

$$f(x)=\frac{x}{1+x^3}=x-x^4+x^7+o(x^7)\quad\Rightarrow\quad f^{(7)}(0)=7!=5040.$$

3. Khai triển Mac Laurin hàm $f(x)=\sin(\sin x)$ đến số hạng $x^4$, rồi áp dụng để tính $f^{(3)}(0), f^{(4)}(0)$. Từ khai triển $\sin x=x-\frac{x^3}{6}+o(x^4)$ ta có

$$\sin(\sin x)=\sin(x-\frac{x^3}{6}+o(x^4))=x-\frac{x^3}{6}-\frac{1}{6}(x-\frac{x^3}{6}+o(x^4))^3+o(x^4)=$$

$$=x-\frac{x^3}{6}-\frac{1}{6}x^3+o(x^4))=x-\frac{x^3}{3}+o(x^4)$$

Vậy $f^{(3)}(0)=-\frac{1}{3}\cdot 3!=-2,\quad f^{(4)}(0)=0.$

4. Xét hàm

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{nếu } \ x \neq 0 \\ 0 & \text{nếu } \ x = 0 \end{cases}$$

Dễ dàng chứng minh $f$ có đạo hàm mọi cấp trên $\mathbb{R}$. Mặt khác $f(x) = o(x^n)$ là VCB cấp cao hơn $x^n$ trong quá trình $x \to 0$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^n} = 0.$$

Đẳng thức $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} = o(x^n)$ chứng tỏ các hệ số trong khai triển Taylor hàm $f$ đều bằng 0, vậy $f^{(n)}(0) = 0$ với mọi số tự nhiên $n$.

5. Sử dụng khai triển $\sin(\sin x) = x - \frac{x^3}{3} + o(x^4)$ để tính giới hạn

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin(\sin x)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^3}{3} + o(x^4)}{x^3} = \frac{1}{3}.$$

6. Sử dụng khai triển

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1}$$

để tính gần đúng số $e$ với sai số bé hơn 0,001.

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{e^c}{(n+1)!}, \quad 0 < c < 1$$

Chọn $n$ sao cho phần dư $R_n = \frac{e^c}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!} < 0,001$. Dễ dàng nhận thấy với $n = 6$ số dư trong phép xấp xỉ trên bé hơn 0,001. Vậy

$$e \approx 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} = 2,71806.$$

### 3.2.3 Quy tắc LHospital và ứng dụng để khử dạng vô định

Ta nói giới hạn

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

có dạng vô định $\frac{0}{0}$ nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$ (hoặc có dạng vô định $\frac{\infty}{\infty}$ nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty$). Một cách tương tự các dạng

$$+\infty - \infty, \quad \pm\infty\cdot 0, \quad 1^{\pm\infty}, \quad 0^0, \quad \infty^0$$

cũng được gọi là các dạng vô định. Giới hạn của hàm tương ứng với các dạng vô định có thể tồn tại hoặc không tồn tại. Trong mục này ta sẽ nêu ra một phương pháp, quy tắc L'Hospital, khá hiệu quả để tìm giới hạn của hàm ứng với các dạng vô định kể trên.

**Định lí 3.2.7 (Quy tắc LHospital 1)** *Giả sử $f$ và $g$ là các hàm khả vi tại lân cận điểm $x_0$, thỏa mãn điều kiện $f(x_0) = g(x_0) = 0$ và $g'(x) \neq 0$ trong lân cận đó (có thể trừ $x_0$).*

$$\text{Nếu} \quad \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)} = A \quad \text{khi đó} \quad \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = A.$$

*Chứng minh.* Áp dụng định lí Cauchy cho các hàm $f$ và $g$ (sử dụng giả thiết $f(x_0) = g(x_0) = 0$)

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

trong đó $c$ nằm giữa $x$ và $x_0$. Chuyển qua giới hạn $x \to x_0$ kéo theo $c \to x_0$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{c\to x_0}\frac{f'(c)}{g'(c)} = A. \quad \blacksquare$$

Nhận xét rằng định lí vẫn đúng nếu ta thay điều kiện $f(x_0) = g(x_0) = 0$ bởi điều kiện $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$.

Định lí cũng đúng nếu thay cho các giới hạn đã xét trong định lí bằng các giới hạn một phía.

Ta có quy tắc L'Hospital cho trường hợp $x \to \infty$ thể hiện trong định lí sau

**Định lí 3.2.8 (Quy tắc LHospital 2)** *Giả sử $f$ và $g$ là các hàm khả vi trong lân cận của $+\infty$, thỏa mãn điều kiện $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$ và $g'(x) \neq 0$ trong lân cận đó.*

$$\text{Nếu} \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)} = A \quad \text{khi đó} \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = A.$$

*Chứng minh.* Đặt $x = \frac{1}{t}$ và nhận xét $x \to +\infty$ khi $t \to 0+$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t\to 0+} \frac{f(\frac{1}{t})}{g(\frac{1}{t})} = \lim_{t\to 0+} \frac{f'(\frac{1}{t})(-\frac{1}{t^2})}{g'(\frac{1}{t})(-\frac{1}{t^2})} = \lim_{t\to 0+} \frac{f'(\frac{1}{t})}{g'(\frac{1}{t})} = A. \blacksquare$$

Hiển nhiên định lí vẫn đúng nếu thay cho giới hạn $x \to +\infty$ đã xét trong định lí là giới hạn $x \to -\infty$.

**Định lí 3.2.9 (Quy tắc LHospital 3)** *Giả sử $f$ và $g$ là các hàm khả vi tại lân cận điểm $x_0$, $g'(x) \neq 0$ trong lân cận đó (có thể trừ $x_0$). Ngoài ra*

$$\lim_{x\to x_0} |f(x)| = +\infty, \quad \lim_{x\to x_0} |g(x)| = +\infty.$$

*Khi đó*

$$\text{nếu} \quad \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \quad \text{thì} \quad \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = A.$$

*Chứng minh.* Với $\varepsilon > 0$ tùy ý cho trước, tồn tại một lân cận $V$ của điểm $x_0$ sao cho

$$A - \varepsilon < \frac{f'(x)}{g'(x)} < A + \varepsilon, \quad \forall x \in V \setminus \{x_0\}$$

Áp dụng định lí Cauchy cho các hàm $f$ và $g$ trên đoạn $[x_0, x_1]$ $(x_0, x_1 \in V \setminus \{x_0\})$

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{g(x) - g(x_1)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

trong đó $c$ nằm giữa $x$ và $x_1$. Mặt khác

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_1)}{g(x) - g(x_1)} \cdot \frac{\frac{g(x)-g(x_1)}{g(x)}}{\frac{f(x)-f(x_1)}{f(x)}} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \cdot \frac{1 - \frac{g(x_1)}{g(x)}}{1 - \frac{f(x_1)}{f(x)}}$$

Theo giả thiết $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = +\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0} |g(x)| = +\infty$ suy ra với $x_1$ cố định và cho $x \to x_0$ ta được $\frac{1-\frac{g(x_1)}{g(x)}}{1-\frac{f(x_1)}{f(x)}} \to 1$. Vậy

$$A - \varepsilon \le \liminf_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \le \limsup_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \le A + \varepsilon$$

Suy ra
$$\left|\liminf_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}-\limsup_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}\right|\le 2\varepsilon.$$

Do $\varepsilon>0$ tùy ý nên $\liminf\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\limsup\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ và
$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\liminf_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\limsup_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=A. \quad \blacksquare$$

Nhận xét rằng quy tắc L'Hospital 2 (xét giới hạn trong quá trình $x\to\pm\infty$) được suy ra từ quy tắc L'Hospital 1 bằng phép đổi biến $x=\frac{1}{t}$. Hoàn toàn tương tự ta có thể khẳng định quy tắc L'Hospital 3 cũng đúng trong quá trình $x\to\pm\infty$.

Các quy tắc L'Hospital 1, 2, 3 nêu trên nhằm khử các dạng vô định $\frac{0}{0}$ hoặc $\frac{\infty}{\infty}$. Các dạng vô định khác đều có thể đưa về một trong 2 dạng vô định trên và áp dụng các quy tắc L'Hospital để tính giới hạn.

**Ví dụ 3.2.2** *(Về áp dụng quy tắc LHospital)*

1. Tìm giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$. Giới hạn có dạng $\frac{0}{0}$, áp dụng quy tắc L'Hospital
$$A=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{(x-\sin x)'}{(x^3)'}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}$$
Giới hạn $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{1-\cos x}{3x^2}$ vẫn có dạng $\frac{0}{0}$, ta áp dụng quy tắc L'Hospital lần nữa
$$A=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)'}{(3x^2)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}=\frac{1}{6}$$

2. Tìm giới hạn
$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-2x-1}{\sin^2 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{2e^{2x}-2}{6\sin 3x\cos 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{4e^{2x}}{18\cos 6x}=\frac{2}{9}$$

3. Tìm giới hạn sau trong quá trình $x\to+\infty$
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^2 x}{x^3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln^2 x)'}{(x^3)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\ln x}{3x^3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{9x^3}=0$$

4. Từ ví dụ trên ta có thể mở rộng hơn: *hàm loga (cơ số lớn hơn 1) tiến ra vô cùng chậm hơn rất nhiều so với hàm lũy thừa.* Thật vậy xét giới hạn sau (với $k$ lớn tùy ý và $\alpha > 0$ nhỏ tùy ý)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log_a^k x}{x^\alpha} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\log_a x}{x^{\frac{\alpha}{k}}}\right)^k = \left(\lim_{x\to+\infty} \frac{\log_a x}{x^{\frac{\alpha}{k}}}\right)^k =$$

$$= \left(\lim_{x\to+\infty} \frac{(\log_a x)'}{(x^{\frac{\alpha}{k}})'}\right)^k = \left(\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\frac{\alpha}{k}\ln a \cdot x^{\frac{\alpha}{k}}}\right)^k = 0.$$

5. Ta cũng có khẳng định: *hàm mũ (cơ số lớn hơn 1) tiến ra vô cùng nhanh hơn rất nhiều so với hàm lũy thừa.* ($a > 1$ và $k$ lớn tùy ý)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x^k} = \left(\lim_{x\to+\infty} \frac{a^{\frac{x}{k}}}{x}\right)^k = \left(\lim_{x\to+\infty} \frac{a^{\frac{x}{k}}\ln a}{1}\right)^k = +\infty$$

6. Tìm giới hạn (có dạng vô định $+\infty - \infty$)

$$A = \lim_{x\to 0}\left(\operatorname{cotg}^2 x - \frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2\cos^2 x - \sin^2 x}{x^2\sin^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2\cos^2 x - \sin^2 x}{x^4}$$

Ở đây ta thay mẫu số bằng VCB tương đương $x^2\sin^2 x \sim x^4$ để sau khi áp dụng quy tắc L'Hospital hàm cần tính giới hạn có dạng gọn hơn

$$A = \lim_{x\to 0}\left(\frac{x\cos x + \sin x}{x}\right)\left(\frac{x\cos x - \sin x}{x^3}\right) = 2\lim_{x\to 0} \frac{x\cos x - \sin x}{x^3}$$

Áp dụng quy tắc L'Hospital cho giới hạn này

$$A = 2\lim_{x\to 0} \frac{-x\sin x}{3x^2} = 2\lim_{x\to 0} \frac{-\sin x}{3x} = -\frac{2}{3}$$

7. Tìm giới hạn $L = \lim\limits_{x\to 0+} x^x$.

   Việc tìm giới hạn trên tương đương với việc tìm giới hạn (lấy loga hai vế)

$$\ln L = \lim_{x\to 0+} x\ln x = \lim_{x\to 0+} \frac{\ln x}{x^{-1}} = \lim_{x\to 0+} \frac{(\ln x)'}{(x^{-1})'} = \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{x}}{-x^{-2}} = 0$$

   Vậy giới hạn cần tìm $L = 1$.

8. Tìm giới hạn
$$A = \lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{\pi}\text{arccos } x\right)^{\frac{1}{x}}.$$
Tương tự ví dụ trên
$$\ln A = \lim_{x\to 0+}\frac{1}{x}\ln\left(\frac{2}{\pi}\text{arccos } x\right) = -\frac{2}{\pi}.$$
Suy ra $A = e^{-\frac{2}{\pi}}$.

Khi áp dụng các quy tắc L'Hospital cần chú ý rằng giới hạn $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ có thể không tồn tại trong khi giới hạn $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ tồn tại hữu hạn. Chẳng hạn khi $x\to+\infty$ giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-\cos x}{x}$ thuộc dạng vô định $\frac{\infty}{\infty}$ và
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x-\cos x}{x} = 1 \quad \text{tuy nhiên} \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{(x-\cos x)'}{(x)'} = \lim_{x\to+\infty}(1+\sin x)$$
không tồn tại.

## 3.3 Cực trị, hàm lồi lõm và ứng dụng đạo hàm khảo sát hàm số

### 3.3.1 Hàm đơn điệu và phương pháp tìm cực trị hàm số

**Định nghĩa 3.3.1** *Hàm $f : X\to\mathbb{R}$ được gọi là đơn điệu tăng (hoặc không giảm) trên tập $X\subset\mathbb{R}$ nếu với mọi $x_1, x_2\in X$ và $x_1 < x_2$ ta có $f(x_1)\le f(x_2)$.*
*Hàm $f : X\to\mathbb{R}$ được gọi là đơn điệu giảm (hoặc không tăng) trên tập $X$ nếu với mọi $x_1, x_2\in X$ và $x_1 < x_2$ ta có $f(x_1)\ge f(x_2)$.*
*Nếu với mọi $x_1, x_2\in X$ và $x_1 < x_2$ ta luôn có $f(x_1) < f(x_2)$ khi đó ta nói hàm $f$ tăng thực sự trên $X$. Định nghĩa tương tự với hàm giảm thực sự.*
*Một hàm đơn điệu tăng (hoặc tăng thực sự), đơn điệu giảm (hoặc giảm thực sự) được gọi chung là hàm đơn điệu.*

Dựa vào đạo hàm hàm số ta có các tiêu chuẩn sau để khảo sát tính đơn điệu của hàm.

**Định lí 3.3.1** *Giả sử $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ là hàm khả vi trên $(a, b)$*

- *Nếu $f'(x) = 0$ với mọi $x \in (a, b)$ thì $f$ là hàm hằng số $f(x) \equiv C$ trên $(a, b)$.*
- *Nếu $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) với mọi $x \in (a, b)$ thì $f$ là hàm tăng (giảm) thực sự trên $(a, b)$.*
- *Nếu $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) với mọi $x \in (a, b)$ thì $f$ là hàm đơn điệu tăng (đơn điệu giảm) trên $(a, b)$.*

*Chứng minh.* Phần thứ nhất của định lí là cơ sở cho khái niệm tích phân bất định sau này. Để chứng minh $f$ là hàm hằng số trên $(a, b)$ ta phải chứng minh

$$f(x_1) = f(x_2) \quad \text{với mọi} \quad x_1, x_2 \in (a, b).$$

Thật vậy áp dụng định lí Lagrange cho đoạn $[x_1, x_2]$, tồn tại $c \in (x_1, x_2)$ để

$$f(x_1) - f(x_2) = f'(c)(x_1 - x_2) = 0 \;\Rightarrow\; f(x_1) = f(x_2) \;\forall x_1, x_2 \in (a, b).$$

Phần thứ thứ hai, thứ ba của định lí được chứng minh tương tự. Chẳng hạn để chứng minh $f$ là hàm tăng thực sự trên $(a, b)$, xét $f(x_1) - f(x_2)$ với $x_1 > x_2$

$$f(x_1) - f(x_2) = f'(c)(x_1 - x_2) > 0 \;\Rightarrow f(x_1) > f(x_2). \quad \blacksquare$$

Nhận xét rằng nếu $f'(x) \geq 0$ với mọi $x \in (a, b)$ và chỉ tồn tại hữu hạn điểm thuộc $(a, b)$ để $f'(x) = 0$ khi đó hàm $f$ vẫn tăng tăng thực sự trên $(a, b)$.

Bây giờ ta nêu một phương pháp tìm cực trị hàm số dựa vào nhận xét sau: Nếu hàm $f$ liên tục tại $x_0$ và trong lân cận trái $(x_0 - \delta, x_0]$ của $x_0$ hàm $f$ đơn điệu tăng (giảm), trong lân cận phải $[x_0, x_0 + \delta)$ của $x_0$ hàm $f$ đơn điệu giảm (tăng), khi đó hàm đạt cực đại (cực tiểu) tại $x = x_0$. Ta tóm tắt nhận xét đó thành quy tắc tìm cực trị hàm số

**Định lí 3.3.2** *Cho hàm $f$ liên tục tại $x_0$, khả vi trong một lân cận của $x_0$ (có thể trừ chính $x_0$)*

- *Nếu $f'(x)$ đổi dấu từ + sang - khi $x$ biến thiên tăng vượt qua $x = x_0$ thì $f$ đạt cực đại tại $x = x_0$.*
- *Nếu $f'(x)$ đổi dấu từ - sang + khi $x$ biến thiên tăng vượt qua $x = x_0$ thì $f$ đạt cực tiểu tại $x = x_0$.*
- *Nếu $f'(x)$ không đổi dấu khi $x$ biến thiên tăng vượt qua $x = x_0$ thì $f$ không đạt cực trị tại $x_0$.*

**Ví dụ 3.3.1**

1. Tìm cực trị hàm $f(x) = xe^x$.
   Xét dấu $f'(x) = (x+1)e^x$

| $x$ | $-\infty$ | | -1 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | 0 | $+$ | |
| $f(x)$ | | $\searrow$ | $-\frac{1}{e}$ | $\nearrow$ | |

   Hàm $f'(x)$ đổi dấu từ - sang + khi $x$ biến thiên tăng vượt qua $x = -1$. Vậy $f$ đạt cực tiểu tại $x = -1$ và giá trị cực tiểu bằng $f(-1) = -\frac{1}{e}$.

2. Tìm cực trị hàm $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$.
   Hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và khả vi tại mọi điểm trừ điểm $x = 0$. Xét dấu

$$f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

   Hàm $f'(x)$ đổi dấu từ - sang + khi $x$ biến thiên tăng vượt qua $x = 0$ (hàm $f'(x)$ không xác định tại $x = 0$). Vậy hàm $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ đạt cực tiểu tại $x = 0$ và giá trị cực tiểu bằng $f(0) = 0$.

Trường hợp hàm $f$ khả vi tại lân cận điểm $x_0$, theo định lí Fermat điều kiện cần để hàm đạt cực trị tại $x_0$ là $f'(x_0) = 0$. Định lí sau đưa ra một phương pháp khác để tìm cực trị hàm số dựa vào đạo hàm cấp hai tại $x_0$.

**Định lí 3.3.3** *Hàm $f$ khả vi đến cấp hai tại $x_0$. Giả thiết $x = x_0$ là điểm dừng $f'(x_0) = 0$ và đạo hàm cấp hai tại đó $f''(x_0) \neq 0$. Khi đó $f$ đạt cực trị tại $x_0$. Chi tiết hơn nếu*
- *$f''(x_0) > 0$ thì $f$ đạt cực tiểu tại $x_0$.*
- *$f''(x_0) < 0$ thì $f$ đạt cực đại tại $x_0$.*

*Chứng minh.* Giả sử $f''(x_0) > 0$. Từ định nghĩa của đạo hàm cấp hai

$$f''(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{x - x_0} > 0$$

suy ra tồn tại một lân cận của $x_0$ để với mọi $x$ trong lân cận đó
- $f'(x) < 0$ nếu $x < x_0$ và
- $f'(x) > 0$ nếu $x > x_0$.

Như vậy $f'(x)$ đổi dấu từ - sang + khi $x$ biến thiên tăng vượt qua $x = x_0$, theo định lí trên, hàm $f$ đạt cực tiểu tại $x_0$.
Trường hợp $f''(x_0) < 0$ định lí được chứng minh tương tự. ■

Định lí vừa chứng minh là trường hợp riêng của định lí sau

**Định lí 3.3.4** *Hàm $f$ khả vi đến cấp $n+1$ tại $x_0$ và*

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n)}(x_0) = 0, f^{(n+1)}(x_0) \neq 0.$$

*Nếu $n$ là số chẵn thì hàm không đạt cực trị tại $x_0$. Nếu $n$ là số lẻ và*
- *$f^{(n+1)}(x_0) > 0$ thì $f$ đạt cực tiểu tại $x_0$.*
- *$f^{(n+1)}(x_0) < 0$ thì $f$ đạt cực đại tại $x_0$.*

*Chứng minh.* Theo công thức khai triển Taylor (3.6) hàm $f$ tại lân cận điểm $x_0$

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} + o((x-x_0)^{n+1}).$$

Do $o((x-x_0)^{n+1})$ là VCB cấp cao hơn $(x-x_0)^{n+1}$, ta đặt

$$o((x-x_0)^{n+1}) = \alpha(x)(x-x_0)^{n+1},$$

trong đó $\alpha(x)$ là VCB trong quá trình $x \to x_0$. Ta có

$$f(x) - f(x_0) = \left(\frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!} + \alpha(x)\right)(x-x_0)^{n+1}.$$

Vì $\lim \alpha(x) = 0$, tồn tại một lân cận của $x_0$ để thừa số thứ nhất của vế phải luôn khác 0 với mọi $x$ thuộc lân cận đó. Xét trường hợp $n$ là số chẵn, khi đó $n+1$ lẻ và thừa số thứ hai $(x-x_0)^{n+1}$ đổi dấu khi $x$ biến thiên vượt qua $x = x_0$. Suy ra $f(x) - f(x_0)$ cũng đổi dấu khi $x$ biến thiên vượt qua $x = x_0$, hàm không đạt cực trị tại $x_0$.
Trường hợp $n$ là số lẻ, thừa số thứ hai $(x-x_0)^{n+1} \geq 0$ với mọi $x$ trong lân cận đủ nhỏ của $x_0$ và do đó dấu của $f(x)-f(x_0)$ dương hoặc âm tùy theo $f^{(n+1)}(x_0) > 0$ hoặc $f^{(n+1)}(x_0) < 0$. Định lí được suy ra từ khẳng định này. ■

**Ví dụ 3.3.2**

1. Tìm cực trị hàm $f(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1 = (x-1)^4$.
   Ta có $f'(x) = 4(x-1)^3 = 0$ khi và chỉ khi $x = 1$. Tại điểm dừng duy nhất $x = 1$
   $$f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 0, \quad f^{(4)} = 4! = 24 > 0.$$
   Suy ra $f$ đạt cực tiểu tại $x = 1$, giá trị cực tiểu $f(1) = 0$.

2. Tìm cực trị hàm
   $$f(x) = \frac{|x-1|}{x^2} = \begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} & \text{nếu } x \geq 1 \\ \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} & \text{nếu } x < 1 \end{cases}$$
   Hàm không xác định tại $x = 0$.
   Hàm liên tục tại $x = 1$ nhưng không khả vi tại đó. Ta thấy $f(x) \geq 0 \; \forall x \neq 0$ và $f(1) = 0$. Vậy hàm đạt cực tiểu tại $x = 1$.
   $$f'(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^3} - \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^3}(2-x) & \text{nếu } x > 1 \\ \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3} = \frac{1}{x^3}(x-2) & \text{nếu } x < 1 \end{cases}$$
   $f'(x) = 0$ tại điểm $x = 2$ và $f'(x)$ đổi dấu từ + sang - khi $x$ biến thiên tăng vượt qua $x = 2$, hàm $f$ đạt cực đại tại $x = 2$, giá trị cực đại $f(2) = \frac{1}{4}$.

   Ta cũng có thể khẳng định hàm đạt cực đại tại $x = 2$ bằng cách xét đạo hàm cấp hai tại điểm dừng $x = 2$. Tại lân cận đó
   $$f''(x) = \frac{2}{x^3} - \frac{6}{x^4} = \frac{2}{x^4}(x-3) \;\Rightarrow\; f''(2) = -\frac{1}{8} < 0.$$

## 3.3.2 Hàm lồi, lõm

Trước hết chúng ta đưa vào định nghĩa sau

**Định nghĩa 3.3.2** *Hàm f(x) xác định trên $(a,b)$ được gọi là lồi trên $(a,b)$ nếu:*
$$f((1-t)x_1 + tx_2)) \geq (1-t)f(x_1) + tf(x_2) \tag{3.8}$$
*với mọi $x_1, x_2 \in (a,b)$ và mọi số thực $t$ thoả mãn $0 \leq t \leq 1$.*

**Nhận xét**
Dễ dàng nhận thấy $x_1 \leq (1-t)x_1 + tx_2 \leq x_2$ khi $0 \leq t \leq 1$, do vậy khi $t$ biến thiên từ 0 đến 1, vế trái của (3.8) biểu diễn một cung của đồ thị hàm $f(x)$ tương ứng với khoảng $(x_1, x_2)$, còn vế phải của (3.8) là đoạn thẳng nối 2 điểm $(x_1, f(x_1))$ và $(x_2, f(x_2))$. (Hai điểm $(x_1, f(x_1))$ và $(x_2, f(x_2))$ là hai đầu mút của cung). Như vậy định nghĩa trên về hàm lồi có thể phát biểu dưới dạng sau:

*Hàm $f(x)$ xác định trên $(a, b)$ được gọi là lồi trên $(a, b)$ nếu mọi cung của đồ thị đều nằm ở phía trên dây tương ứng với cung đó.*

**Bổ đề 3.3.1** *Giả sử hàm $f(x)$ lồi trên khoảng $(a, b)$ và $x_0 \in (a, b)$ là điểm tuỳ ý. Đặt $F_{x_0}(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, khi đó hàm $F(x)$ đơn điệu giảm trên tập $(a, b) \setminus \{x_0\}$.*

*Chứng minh*
• Xét trường hợp $x_1 < x_0 < x_2$ khi đó

$$F_{x_0}(x_1) \geq F_{x_0}(x_2) \Leftrightarrow \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \geq \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x_2 - x_0}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x_0 - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2) \leq f(x_0).$$

Bất đẳng thức cuối này đúng do định nghĩa hàm lồi (với $\frac{x_2-x_0}{x_2-x_1} = t$, $\frac{x_0-x_1}{x_2-x_1} = 1-t$ và $0 \leq t \leq 1$).
• Các trường hợp còn lại ($x_0 < x_1 < x_2$ và $x_1 < x_2 < x_0$) việc chứng minh $F_{x_0}(x_1) \geq F_{x_0}(x_2)$ được tiến hành tương tự. ■

**Định lí 3.3.5** *Nếu hàm $f(x)$ lồi trên khoảng $(a, b)$, khi đó hàm liên tục trên khoảng $(a, b)$ đó.*

*Chứng minh*

Ta sẽ chứng minh hàm lồi $f(x)$ liên tục tại điểm $x_0 \in (a, b)$ tuỳ ý. Thật vậy, chọn $x_1, x_2 \in (a, b)$ sao cho $x_1 < x_0 < x_2$, khi đó theo bổ đề với mọi $x$ thuộc lân cận của $x_0$ và $x_1 < x < x_2$ $(x \neq x_0)$: $F_{x_0}(x_1) \geq F_{x_0}(x) \geq F_{x_0}(x_2)$, suy ra

$$F_{x_0}(x_2).(x - x_0) \leq f(x) - f(x_0) \leq F_{x_0}(x_1).(x - x_0)$$

nếu $x_0 < x$. Vì vậy $\lim\limits_{x \to x_0+} (f(x) - f(x_0)) = 0$ hay $\lim\limits_{x \to x_0+} f(x) = f(x_0)$. Chứng minh tương tự $\lim\limits_{x \to x_0-} f(x) = f(x_0)$ (đpcm). ■

**Định lí 3.3.6** *Cho hàm $f(x)$ khả vi trên khoảng $(a, b)$, khi đó điều kiện cần và đủ để $f(x)$ lồi trên khoảng $(a, b)$ là hàm $f'(x)$ đơn điệu giảm trên $(a, b)$.*

*Chứng minh*

**Điều kiện cần** Lấy $x_1 < x_2$ tuỳ ý thuộc khoảng $(a, b)$. Giả sử $x_1 < x < x_2$, theo bổ đề 3.3.1, $F_{x_1}(x) = \frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}$ đơn điệu giảm, vì vậy theo tiêu chuẩn hội tụ của hàm đơn điệu và bị chặn, tồn tại các giới hạn:

$$\lim_{x\to x_1+} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \geq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \geq \lim_{x\to x_2-} \frac{f(x) - f(x_2)}{x - x_2}$$

Mặt khác theo giả thiết hàm $f(x)$ khả vi trên $(a, b)$, suy ra $f'(x_1) \geq f'(x_2)$.

**Điều kiện đủ** Ta chứng minh bằng phản chứng. Thật vậy giả sử hàm $f(x)$ không lồi trên $(a, b)$, khi đó tồn tại các điểm $x_1 < x < x_2$, kí hiệu $x = (1 - t)x_1 + tx_2$, trong đó $0 \leq t \leq 1$, sao cho giá trị của hàm tại $x$ nằm dưới dây cung nối 2 điểm $(x_1, f(x_1))$ và $(x_2, f(x_2))$: $f(x) = f((1 - t)x_1 + tx_2) < (1 - t)f(x_1) + tf(x_2)$. Suy ra

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} < \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}.$$

Bất đẳng thức cuối này theo công thức Lagrange có thể viết dưới dạng tương đương $f'(\xi_1) < f'(\xi_2)$, trong đó $x_1 < \xi_1 < x < \xi_2 < x_2$, điều này vô lí với giả thiết hàm $f'(x)$ đơn điệu giảm. ■

Từ định lí trên ta dễ dàng suy ra hệ quả

**Hệ quả 3.3.1** *Cho hàm $f(x)$ khả vi đến cấp 2 trên khoảng $(a, b)$, khi đó điều kiện cần và đủ để $f(x)$ lồi trên khoảng $(a, b)$ là $f''(x) \leq 0$ với mọi $x \in (a, b)$.*

**Định lí 3.3.7** *Cho hàm $f(x)$ khả vi trên khoảng $(a, b)$. Điều kiện cần và đủ để $f(x)$ lồi trên khoảng $(a, b)$ là mọi tiếp tuyến của đồ thị hàm số đều nằm trên đường cong biểu diễn đồ thị của hàm số đó.*

*(Nói cách khác $f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \geq f(x)$ với mọi $x \in (a, b)$, trong đó $x_0 \in (a, b)$ tuỳ ý.)*

*Chứng minh*

**Điều kiện cần** $L(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ là phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại $(x_0, f(x_0))$. Ta phải chứng minh với mọi $x \in (a, b)$, $L(x) \geq f(x)$ hay $f'(x_0)(x - x_0) \geq f(x) - f(x_0) = f'(\xi_x)(x - x_0)$ (theo công thức Lagrange, trong đó $\xi_x$ nằm giữa $x_0$ và $x$). Điều này suy ra từ từ định lí 3.3.6, theo đó $f'(x_0) - f'(\xi_x)$ và $x - x_0$ luôn cùng dấu.

**Điều kiện đủ** Ta chứng minh bằng phản chứng. Thật vậy giả sử hàm $f(x)$ không lồi trên $(a, b)$, khi đó tồn tại các điểm $x_1 < x_0 < x_2$, kí hiệu $x_0 = (1 - t)x_1 + tx_2$, trong đó $0 \leq t \leq 1$, sao cho giá trị của hàm tại $x_0$ nằm dưới dây cung nối 2 điểm $(x_1, f(x_1))$ và $(x_2, f(x_2))$:

$$f(x_0) = f((1 - t)x_1 + tx_2)) < (1 - t)f(x_1) + tf(x_2) \tag{3.9}$$

Xét tiếp tuyến tại $(x_0, f(x_0))$ của hàm số, gọi $L(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ là phương trình tiếp tuyến. Khi đó theo giả thiết của điều kiện đủ, tiếp tuyến nằm trên đồ thị hàm số tức là

$$L(x_1) \geq f(x_1), \quad \text{và} \quad L(x_2) \geq f(x_2).$$

Mặt khác do $x_0 = (1 - t)x_1 + tx_2$ suy ra

$$f(x_0) = (1 - t)L(x_1) + tL(x_2) \geq (1 - t)f(x_1) + tf(x_2),$$

vô lí với (3.9) trong giả thiết phản chứng. ■

**Nhận xét**

• Đẳng thức (3.8) trong định nghĩa hàm lồi cũng có thể viết dưới dạng sau:

$$f(t_1x_1 + t_2x_2) \geq t_1f(x_1) + t_2f(x_2) \quad \text{với mọi} \quad x_1, x_2 \in (a, b)$$

$$(0 \leq t_1, t_2, t_1 + t_2 = 1).$$

Bằng quy nạp, ta dễ dàng suy ra

$$f(t_1x_1 + t_2x_2 + \cdots + t_nx_n) \geq t_1f(x_1) + t_2f(x_2) + \cdots + t_nf(x_n) \tag{3.10}$$

với mọi $x_1, x_2, ..., x_n \in (a, b)$, $\quad 0 \leq t_1, t_2, ..., t_n, \quad t_1 + t_2 + \cdots + t_n = 1.$

Rất nhiều bất đẳng thức quan trọng được suy ra từ bất đẳng thức hàm lồi trên đây, chúng ta sẽ đề cập đến sau ở phần các ví dụ.

• *Hàm $f(x)$ được gọi là lõm trên $(a, b)$* nếu $-f(x)$ là hàm lồi trên $(a, b)$. Nói cách khác hàm $f(x)$ lõm trên $(a, b)$ nếu

$$f(t_1x_1 + t_2x_2) \leq t_1f(x_1) + t_2f(x_2) \quad \text{với mọi} \quad x_1, x_2 \in (a, b)$$

$$(0 \leq t_1, t_2, t_1 + t_2 = 1).$$

hay

$$f(t_1x_1 + t_2x_2 + \cdots + t_nx_n) \leq t_1f(x_1) + t_2f(x_2) + \cdots + t_nf(x_n) \tag{3.11}$$

với mọi $x_1, x_2, ..., x_n \in (a, b), \quad 0 \leq t_1, t_2, ..., t_n, \quad t_1 + t_2 + \cdots + t_n = 1.$

Sử dụng các kết quả trên bạn đọc dễ dàng suy ra các điều kiện cần và đủ để hàm lõm trên một khoảng.

• Điểm thuộc đồ thị hàm số và phân cách giữa cung lồi, cung lõm của đường cong được gọi là *điểm uốn của đường cong*. Từ hệ quả của định lí và các kết quả tương tự liên quan tới hàm lõm ta có thể khẳng định

*Nếu đạo hàm cấp hai $f''(x)$ đổi dấu khi $x$ biến thiên vượt qua $x = x_0$ thì điểm $U(x_0, f(x_0)$ thuộc đồ thị hàm số là điểm uốn của đường cong biểu diễn đồ thị hàm số đó.*

**Ví dụ 3.3.3**

1. Hàm $f(x) = x^2$ là hàm lõm trên $\mathbb{R}$ vì $f''(x) = 2 > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

2. Hàm $f(x) = x^\alpha$ với $0 < \alpha < 1$ là hàm lồi trên khoảng $(0, +\infty)$ vì $f''(x) = \alpha(\alpha - 1)x^{\alpha-2} < 0$ với mọi $x > 0$.
   Đặc biệt $f(x) = \sqrt{x}$ là hàm lồi trên khoảng $(0, +\infty)$.

3. Hàm $f(x) = a^x$ với $a > 0,\ a \neq 1$ là hàm lõm trên cả khoảng $(-\infty, +\infty)$ vì $f''(x) = a^x(\ln a)^2 > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

4. Hàm $f(x) = e^{-x^2}$ có $f'(x) = -2xe^{-x^2},\ f''(x) = (4x^2 - 2)e^{-x^2}$.
   Đạo hàm cấp hai $f''(x) = (4x^2 - 2)e^{-x^2} = 0$ khi và chỉ khi $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ đồng thời $f''(x)$ đổi dấu khi $x$ biến thiên vượt qua $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. Vậy hàm có hai điểm uốn
   $$M_1\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{e}}\right) \quad \text{và} \quad M_2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$$

5. Hàm $f(x) = \ln x$ là hàm lồi trong khoảng $(0, +\infty)$ vì $f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$ với mọi $x > 0$. Áp dụng bất đẳng thức (3.10) với $t_i = \frac{1}{n}$, ta được bất đẳng thức Cauchy quen thuộc sau:

$$\ln \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \frac{\ln x_1 + \ln x_2 + \cdots + \ln x_n}{n}$$

hay

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$$

Tổng quát hơn, giả sử $\alpha_i$ là các số dương tuỳ ý, $1 \leq i \leq n$. Áp dụng bất đẳng thức (3.10) với $t_i = \frac{\alpha_i}{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n}$ , ta được bất đẳng thức Cauchy tổng quát:

$$\frac{\sum \alpha_i x_i}{\sum \alpha_i} \geq \left(\prod x_i^{\alpha_i}\right)^{\frac{1}{\sum \alpha_i}}.$$

6. Hàm $f(x) = x^p$ với $p > 1$ là hàm lõm trên $(0, +\infty)$. Thật vậy xét đạo hàm cấp hai $f''(x) = p(p-1)x^{p-1} > 0$ với mọi $x > 0$. Áp dụng định nghĩa hàm lõm với $t_1 = t_2 = \frac{1}{2}$ ta được

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^p \leq \frac{x_1^p + x_2^p}{2}$$

Tổng quát hơn áp dụng bất đẳng thức (3.11) với các hệ số $t_i$ thích hợp, ta được bất đẳng thức Cauchy-Holder:

$$\sum a_i b_i \leq \left(\sum a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}, \tag{3.12}$$

trong đó $p, q > 0$ và $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Thật vậy với các số $u_1, u_2, ..., u_n$ dương tuỳ ý, áp dụng bất đẳng thức (3.11) ta được

$$\left(\frac{u_1 x_1 + u_2 x_2 + \cdots + u_n x_n}{\sum u_i}\right)^p \leq \frac{1}{\sum u_i}(u_1 x_1^p + u_2 x_2^p + \cdots + u_n x_n^p),$$

hay

$$(\sum u_i x_i)^p \leq (\sum u_i)^{p-1} \cdot \sum u_i x_i^p.$$

Thay $u_i = b_i^{\frac{p}{p-1}} (= b_i^q)$ và $x_i = a_i b_i^{-\frac{1}{p-1}} (\Rightarrow u_i x_i^p = a_i^p)$, ta được bất đẳng thức (3.12).

Bất đẳng thức Cauchy-Bunhacốpxki

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}$$

là trường hợp riêng của (3.12) với $p = 2$.

### 3.3.3 Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số

Trước hết chúng ta đưa vào khái niệm *tiệm cận* của một đường cong.
Đường thẳng $d$ được gọi là *tiệm cận* của đường cong nếu khoảng cách từ một điểm $M$ thuộc đường cong tới đường thẳng $d$ tiến dần đến 0 khi $M$ chạy ra vô cùng trên đường cong.

Đồ thị đường cong thường được vẽ trong hệ trục tọa độ Đề các, tiệm cận với đồ thị được phân loại thành *tiệm cận đứng, tiệm cận ngang hay tiệm cận xiên* tùy theo vị trí của đường thẳng tiệm cận trong hệ trục tọa độ song song với trục tung, song song với trục hoành hay cắt cả 2 trục tọa độ.

• *Tiệm cận đứng*: đường thẳng $x = a$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm $f(x)$ nếu

$$\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty \quad \text{hoặc} \quad \lim_{x \to a+} f(x) = \pm\infty \quad \text{hoặc} \quad \lim_{x \to a-} f(x) = \pm\infty$$

• *Tiệm cận ngang*: đường thẳng $y = b$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm $f(x)$ nếu

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = b \quad \text{hoặc} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = b$$

• *Tiệm cận xiên*: đường thẳng $y = ax + b$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm $f(x)$ nếu

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - ax - b) = 0 \quad \text{hoặc} \quad \lim_{x \to -\infty} (f(x) - ax - b) = 0$$

Chú ý rằng tiệm cận ngang là trường hợp đặc biệt của tiệm cận xiên khi hệ số góc của đường thẳng tiệm cận xiên bằng 0.

Hiển nhiên nếu $y = ax + b$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm $f(x)$ khi đó

$$a = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{và} \quad b = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - ax).$$

**Ví dụ 3.3.4**

1. Hàm $f(x) = \operatorname{tg} x$ có rất nhiều tiệm cận đứng: $x = \pm\frac{\pi}{2},\ x = \pm\frac{3\pi}{2}, \ldots$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+} \operatorname{tg} x = -\infty, \quad \lim_{x\to\frac{3\pi}{2}-} \operatorname{tg} x = +\infty, \ldots$$

2. Hàm $f(x) = \operatorname{arctg} x$ có hai tiệm cận ngang $y = \frac{\pi}{2}$ và $y = -\frac{\pi}{2}$

$$\lim_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x\to-\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2}$$

3. Hàm $f(x) = 2x + 1 + \frac{\sin x}{x}$ có tiệm cận xiên $y = 2x + 1$ vì

$$\lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - 2x - 1) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sin x}{x} = 0.$$

4. Xác định các tiệm cận hàm $f(x) = x \operatorname{arctg} x$. Xét các giới hạn

$$a = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x \operatorname{arctg} x}{x} = \frac{\pi}{2}$$

$$b = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x\to+\infty} \left(x \operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{2} x\right) = -1.$$

   Vậy $y = \dfrac{\pi}{2}x - 1$ là tiệm cận xiên về phía $+\infty$.

   Tương tự khi điểm thuộc đồ thị có hoành độ $x \to -\infty$ đồ thị có tiệm cận xiên

$$y = -\frac{\pi}{2}x - 1.$$

Cho đến bây giờ chúng ta đã làm quen với một số khái niệm liên quan tới hàm số như tính đơn điệu, cực trị, hàm lồi lõm, tiệm cận. Nó giúp ta nắm được quy luật biến thiên của hàm. Tuy nhiên để có cái nhìn tổng quát hơn, người ta cần vẽ đồ thị hàm số.

Người ta thường tiến hành các bước sau đây trước khi vẽ đồ thị hàm số và gọi chung là **quy trình khảo sát hàm số**.
1. Tìm miền xác định (chỉ rõ các điểm gián đoạn của hàm). Nhận xét về tính chẵn, lẻ tuần hoàn nếu có.
2. Chỉ rõ chiều biến thiên (hay các khoảng mà hàm đơn điệu trên đó). Tính các cực trị hàm số, khảo sát tính lồi lõm, điểm uốn của đồ thị. (Nếu đạo hàm bậc hai quá phức tạp ta có thể bỏ qua việc khảo sát tính lồi lõm, điểm uốn).
3. Tìm các đường thẳng tiệm cận của đồ thị.
4. Dựa vào các kết quả trên lập bảng biến thiên ghi tóm tắt các tính chất vừa thu được.
5. Vẽ đồ thị hàm số, có thể bổ sung thêm một số điểm thuộc đồ thị để vẽ cho chính xác hơn.

**Ví dụ 3.3.5**

Khảo sát và vẽ đồ thị hàm $f(x) = \sqrt[3]{2x^2 - x^3}$.

Hàm xác định và liên tục với mọi $x \in \mathbb{R}$.

$$f'(x) = \frac{4x - 3x^2}{3\sqrt[3]{(2x^2 - x^3)^2}}$$

Hàm $f'(x)$ không xác định tại $x = 0$ và $x = 2$. $f'(x) = 0$ tại $x = \frac{4}{3}$. Hàm $f$ đơn điệu tăng trên khoảng $(0, \frac{4}{3})$ và đơn điệu giảm trong các khoảng $(-\infty, 0)$ và $(\frac{4}{3}, +\infty)$.

Do vậy hàm đạt cực đại tại $x = \frac{4}{3}, f(\frac{4}{3}) = 2\frac{\sqrt[3]{4}}{3}$ và đạt cực tiểu tại điểm $x = 0, f(0) = 0$.

Đạo hàm cấp hai

$$f''(x) = -\frac{8}{9} \cdot \frac{x^2}{(2x^2 - x^3)^{\frac{5}{3}}} \quad \text{không xác định tại} \quad x = 0, x = 2.$$

Như vậy $f''(x) < 0$ trong khoảng $(-\infty, 0)$ (hàm $f'(x)$ không xác định tại $x = 0$) và $f''(x) < 0$ trong khoảng $(0, 2)$. Do đó hàm lồi trên các khoảng $(-\infty, 0)$, $(0, 2)$ và lõm trên khoảng $(2, +\infty)$.
Điểm $M(2, 0)$ thuộc đồ thị là điểm uốn duy nhất.

Bảng biến thiên của $f$ được ghi lại dưới đây

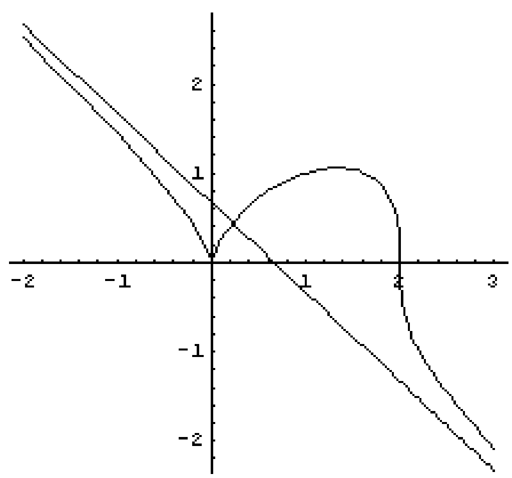
| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $\frac{4}{3}$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $\|$ | $+$ | $0$ | $-$ | $\|$ | $-$ | |
| $f''(x)$ | | $-$ | $\|$ | $-$ | | $-$ | $\|$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $2\frac{\sqrt[3]{4}}{3}$ | $\searrow$ | $0$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

Tiệm cận của đồ thị

$$a = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sqrt[3]{2x^2 - x^3}}{x} = -1$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) + x) = \lim_{x\to\pm\infty} (\sqrt[3]{2x^2 - x^3} + x) = \frac{2}{3}$$

Đồ thị có tiệm cận xiên về cả 2 phía $y = -x + \frac{2}{3}$ khi $x \to \pm\infty$.
Vậy đồ thị có dạng




<u>*Khảo sát đường cong cho dưới dạng tham số*</u>

Xét một hệ hai hàm

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \qquad \text{với} \qquad t \in T.$$

Tập hợp các điểm $M$ có tọa độ $(x(t), y(t))$ trên mặt phẳng chứa hệ trục tọa độ Đề các, với tham số $t$ biến thiên trong tập $T$ được gọi là *đường cong cho dưới dạng tham số*

*Ví dụ.* Đường thẳng $y = x$ cũng là đường cong cho dưới dạng tham số

$$\begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases} \qquad t \in R.$$

Đường thẳng $y = x$ có thể cho dưới dạng tham số khác

$$\begin{cases} x = t^3 \\ y = t^3 \end{cases} \qquad t \in R.$$

Như vậy một đường cong có thể được cho bởi các dạng tham số khác nhau.

$$\begin{cases} x = t^2 \\ y = t^2 \end{cases} \qquad t \in R, \text{ biểu diễn tia phân giác góc phần tư thứ nhất.}$$

$$\begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases} \qquad t \in [0, 1], \text{ biểu diễn một đoạn thẳng của tia phân giác } y = x$$

$$\begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi], \text{ biểu diễn đường tròn tâm O bán kính } R$$

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi], \quad \text{là dạng tham số của ellip } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Qũy đạo chuyển động của các vật thể thường được cho dưới dạng tham số. Trong phần này chúng ta sẽ trình bày phương pháp khảo sát và vẽ đồ thị đường cong cho dưới dạng tham số.

Các bước khảo sát đường cong cho dưới dạng tham số được tiến hành như khảo sát hàm $f(x)$ trước đây

1. Tìm miền xác định của các hàm $x(t), y(t)$. Nhận xét về tính chẵn, lẻ tuần hoàn nếu có.
2. Khảo sát sự biến thiên của các hàm $x(t), y(t)$ thông qua việc tính các đạo hàm $x'(t), y'(t)$.
3. Tìm các đường thẳng tiệm cận của đồ thị đường cong. Lưu ý rằng nếu $t \to t_0$ hoặc $t \to \pm\infty$ mà $x$ hoặc $y \to \pm\infty$ thì đường cong có thể có tiệm cận. Cụ thể

- Nếu trong quá trình $t \to t_0$ hoặc $t \to \pm\infty$ mà

$$\lim x(t) = a, \ \ \lim y(t) = \pm\infty \quad \text{thì} \quad x = a \quad \text{là tiệm cận đứng.}$$

- Nếu trong quá trình $t \to t_0$ hoặc $t \to \pm\infty$ mà

$$\lim x(t) = \pm\infty, \ \ \lim y(t) = b \quad \text{thì} \quad y = b \quad \text{là tiệm cận ngang.}$$

- Nếu trong quá trình $t \to t_0$ hoặc $t \to \pm\infty$ cả hai hàm $x(t), y(t)$ đều dần tới vô cùng và

$$a = \lim \frac{y(t)}{x(t)}, \ \ \lim(y(t) - ax(t)) = b \ \Rightarrow \ y = ax + b \ \text{ là tiệm cận ngang.}$$

4. Lập bảng biến thiên ghép đồng thời cả hai hàm $x(t), y(t)$ vào một bảng.
5. Vẽ đồ thị hàm số, có chú ý đến tiếp tuyến tại một số điểm đặc biệt để vẽ đồ thị chính xác hơn.

Nhận xét về cách tính *hệ số góc của tiếp tuyến với đường cong cho dưới dạng tham số*

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

Giả sử $M_0(x_0), y_0), \ x_0 = x(t_0), y_0 = y(t_0)$ là một điểm thuộc đường cong và tại lân cận điểm $t_0$ hàm $x(t)$ có hàm ngược $t = t(x)$, khi đó cung đường cong xung quanh điểm $M_0$ là đồ thị của hàm $f(x) = y\big(t(x)\big)$ (hàm hợp của $y(t)$ và $t(x)$. Nói cách khác đồ thị của hàm $f(x)$ tại lân cận điểm $x = x_0$ biểu diễn cung đường cong cho dưới dạng tham số xung quanh $M_0$. Như vậy hệ số góc của tiếp tuyến với đường cong tại $M_0$ bằng

$$f'(x_0) = y'(t(x_0)) \cdot t'(x_0) = \frac{y'(t_0)}{x'(t_0)}.$$

Trong nhiều tài liệu người ta thường viết tắt

$$f'(x_0) = \frac{dy}{dx}\Big|_{x=x_0} = \frac{y'(t_0)dt}{x'(t_0)dt} = \frac{y'(t_0)}{x'(t_0)}.$$

Việc khảo sát tính lồi lõm của đường cong cho dưới dạng tham số cũng được tính thông qua đạo hàm cấp hai

$$f''(x) = \left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right)'_t \cdot t'_x = \frac{y''(t)x'(t) - y'(t)x''(t)}{(x'(t))^2} \cdot t'_x =$$

$$= \frac{y''(t)x'(t) - y'(t)x''(t)}{(x'(t))^2} \cdot \frac{1}{x'(t)} = \frac{y''(t)x'(t) - y'(t)x''(t)}{(x'(t))^3}.$$

**Ví dụ 3.3.6**

Khảo sát và vẽ đồ thị đường cong cho bởi $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases} \quad (a > 0)$

Nhận xét rằng $x(t)$ là hàm chẵn, $y(t)$ là hàm lẻ. Như vậy điểm $M_1(x(t), y(t))$ và $M_2(x(-t), y(-t))$ thuộc đồ thị tương ứng với các tham số $t$ và $-t$ đối xứng nhau qua trục hoành. Suy ra đồ thị nhận trục $Ox$ làm trục đối xứng. Các hàm $x(t), y(t)$ lại tuần hoàn với chu kì $2\pi$ do đó ta chỉ cần khảo sát và vẽ đồ thị đường cong trong khoảng $[0, \pi]$. (Đồ thị của toàn bộ đường cong sẽ được bổ sung thêm phần lấy đối xứng qua trục hoành).

$$x'(t) = -3a\cos^2 t \sin t = 0 \quad \text{khi } t = 0, \frac{\pi}{2}, \pi$$

$$y'(t) = 3a\sin^2 t \cos t = 0 \quad \text{khi } t = 0, \frac{\pi}{2}, \pi$$

Đường cong không có tiệm cận ($x(t), y(t)$ bị chặn, không dần tới $\infty$).

Lập bảng biến thiên

| $t$ | $0$ | | $\frac{\pi}{2}$ | | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x'(t)$ | $0$ | $-$ | $0$ | $-$ | $0$ |
| $x(t)$ | $a$ | $\searrow$ | $0$ | $\searrow$ | $-a$ |
| $y'(t)$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ |
| $y(t)$ | $0$ | $\nearrow$ | $a$ | $\searrow$ | $0$ |
| $\frac{y'(t)}{x'(t)}$ | $0$ | | $\infty$ | | $0$ |

Hàng cuối cùng của bảng biến thiên cho ta hệ số góc của tiếp tuyến tại các điểm ứng với $t = 0, \frac{\pi}{2}, \pi$

$$\lim_{t\to 0}\frac{y'(t)}{x'(t)} = -\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{\cos t} = 0, \quad \lim_{t\to\frac{\pi}{2}}\frac{y'(t)}{x'(t)} = \infty, \quad \lim_{t\to\pi}\frac{y'(t)}{x'(t)} = 0$$

Như vậy tiếp tuyến tại các điểm thuộc đồ thị ứng với $t = 0, t = \pi$ chính là trục hoành.
Tiếp tuyến tại điểm thuộc đồ thị ứng với $t = \frac{\pi}{2}$ là trục tung $Oy$.

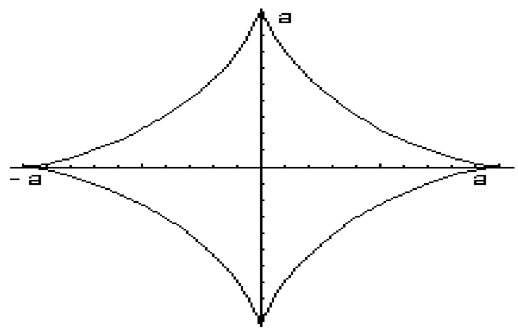
Đạo hàm cấp hai tại điểm thuộc đồ thị ứng với $t$

$$f''(x) = \frac{y''(t)x'(t) - y'(t)x''(t)}{(x'(t))^3} = \frac{1}{3a\cos^4 t\sin t}$$

Hàm không có đạo hàm cấp hai tại điểm thuộc đồ thị ứng với $t = \frac{\pi}{2}$ và $f''(x) > 0$ tại các điểm khác. Do đó đồ thị gồm 2 cung lõm (cung thứ nhất ứng với $0 < t < \frac{\pi}{2}$ hay $0 < x < a$, cung thứ hai ứng với $0 < \frac{\pi}{2} < t < \pi$ hay $-a < x < 0$).

Đường cong mang tên *đường Axtrôit*. Người ta còn viết phương trình Axtrôit ẩn trong hệ thức

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}.$$




Hình 3.2: Đồ thị đường Axtrôit

*Hệ tọa độ cực và khảo sát đường cong trong hệ tọa độ cực*

Trong mặt phẳng chọn một điểm $O$ cố định làm *gốc cực* và một tia $Ox$ làm *trục cực*. Vị trí của mỗi điểm $M$ trong mặt phẳng được xác định hoàn toàn bởi véc tơ $\overrightarrow{OM}$.
Gọi độ dài của véc tơ $\overrightarrow{OM}$ (kí hiệu $r = |\overrightarrow{OM}|$) là *bán kính véc tơ* của điểm $M$, góc giữa trục cực và véc tơ $\overrightarrow{OM}$ (kí hiệu $\varphi = (Ox, \overrightarrow{OM})$) là *góc cực*.
Góc $\varphi$ có thể nhận được bằng cách quay trục cực quanh gốc $O$ cho tới khi trục cực trùng với tia chứa véc tơ $\overrightarrow{OM}$. Góc $\varphi$ do vậy là một góc lượng giác $-\infty < \varphi < +\infty$. Cặp số $(r, \varphi)$ xác định điểm $M$ và được gọi là *tọa độ cực* của điểm $M$.

Mỗi điểm $M$ trong mặt phẳng tương ứng một-một với cặp tọa độ $(r, \varphi)$ của nó nếu ta hạn chế chỉ xét các cặp tọa độ $(r, \varphi)$ thỏa mãn điều kiện

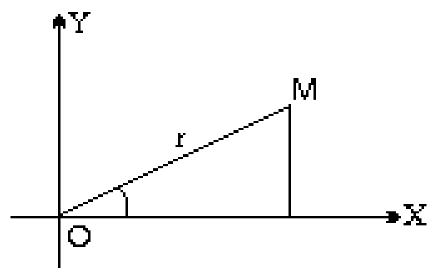
$$r > 0,\ 0 \le \varphi < 2\pi.$$

Trong phần này và các phần tiếp theo chúng ta luôn xét tọa độ cực mở rộng: mỗi cặp $(r, \varphi)$ với $-\infty < \varphi < +\infty$ và $-\infty < r < +\infty$ xác định duy nhất một điểm $M$:
• Nếu $r > 0$, $M$ nằm trên tia tạo với trục cực $Ox$ góc lượng giác $\varphi$ và có bán kính véc tơ bằng $r$.
• Nếu $r < 0$, $M$ nằm trên tia đối của tia tạo với trục cực $Ox$ góc lượng giác $\varphi$ và có bán kính véc tơ bằng $-r$.

Ví dụ các cặp $(2, \frac{\pi}{4} + 2k\pi)$ cùng với $(-2, \frac{5\pi}{4} + 2k\pi)$, $k = \pm 1, \pm 2, ...$ là tọa độ cực của cùng một điểm $M$.

Người ta gắn hệ trục tọa độ Đề các vào hệ tọa độ cực: gốc cực trùng với gốc gốc $O$ của hệ trục tọa độ Đề các đồng thời trục cực trùng với trục hoành $Ox$. Hiển nhiên ta có mối quan hệ sau giữa tọa độ cực và tọa độ Đề các của cùng một điểm

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \tag{3.13}$$




Hình 3.3: Tọa độ cực

Thông qua mối quan hệ đó các đường cong trong mặt phẳng (là tập hợp các điểm $M(x, y)$ trong hệ trục tọa độ Đề các thoả mãn các hệ thức liên hệ giữa hoành độ $x$ và tung độ $y$) đồng thời cũng có thể là tập hợp các điểm $M$ (có tọa độ $(r, \varphi)$ trong hệ tọa độ cực) thoả mãn hệ thức nào đó.

• Chẳng hạn $r = 2$ (trong hệ tọa độ cực) là tập hợp các điểm có bán kính véc tơ bằng 2, đồng thời cũng là đường tròn

$$x^2 + y^2 = 4$$

trong hệ trục tọa độ Đề các.

• Trong hệ tọa độ cực $\varphi = \frac{\pi}{4}$ là tập hợp các điểm có góc cực bằng $\frac{\pi}{4}$, đồng thời cũng là nửa đường thẳng

$$y = x \quad \text{với } x > 0.$$

• Sử dụng (3.13) ta cũng có thể thấy $r = 2\cos\varphi$ là đường tròn $(x-1)^2 + y^2 = 1$ trong hệ trục tọa độ Đề các.

Để khảo sát và vẽ đường cong cho bởi phương trình $r = r(\varphi)$ trong hệ tọa độ cực, người ta cũng tiến hành các bước như khảo sát hàm trong hệ trục tọa độ Đề các

1. Gắn hệ trục tọa độ Đề các vào hệ tọa độ cực như đã trình bày ở trên. Tìm miền xác định của hàm $r = r(\varphi)$, nhận xét về tính chẵn, lẻ tuần hoàn nếu có.

- Nếu $r = r(\varphi)$ là hàm tuần hoàn chu kì $T$ $(r(\varphi) = r(T+\varphi),\ \forall\varphi)$, ta chỉ cần khảo sát và vẽ đồ thị hàm ứng với $\varphi$ biến thiên trong một khoảng có độ dài bằng chu kì (chẳng hạn xét trong khoảng $0 \leq \varphi < T$). Trong khoảng có độ dài bằng chu kì tiếp theo $T \leq \varphi < 2T$, đồ thị nhận được từ cung vừa vẽ bằng cách quay theo chiều dương một góc bằng $T$ xung quanh gốc cực, cứ mỗi lần quay như vậy ta đều được một phần đồ thị của hàm. Ta chỉ dừng lại khi quá trình quay không xuất hiện thêm các cung mới.
- Nếu $r = r(\varphi)$ là hàm chẵn $r(\varphi) = r(-\varphi)$, $\forall\varphi$, các điểm $M(r,\varphi)$ và $M'(r,-\varphi)$ cùng thuộc đồ thị luôn luôn đối xứng nhau qua trục hoành (trục cực). Do vậy đồ thị hàm số nhận trục hoành làm trục đối xứng.
- Tương tự nếu $r = r(\varphi)$ là hàm lẻ $-r(\varphi) = r(-\varphi)$, $\forall\varphi$, các điểm $M(r,\varphi)$ và $M'(-r,-\varphi)$ cùng thuộc đồ thị luôn luôn đối xứng nhau qua trục tung. Đồ thị hàm số nhận trục tung làm trục đối xứng.

2. Khảo sát sự biến thiên của hàm $r = r(\varphi)$.

3. Tìm các đường thẳng tiệm cận của đồ thị đường cong nếu có. Lưu ý rằng, sử dụng (3.13), cách tìm tiệm cận như đã xét trong phần khảo sát đường cong cho dưới dạng tham số.

4. Lập bảng biến thiên và có thể tính hệ số góc của tiếp tuyến với đường cong tại một số điểm nào đó.

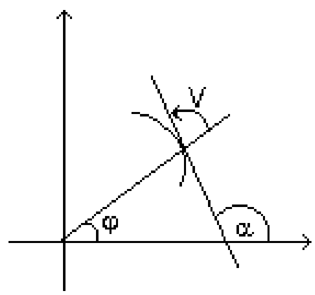
5. Vẽ đồ thị hàm số, bổ sung thêm một số điểm đặc biệt nếu cần để vẽ đồ thị chính xác hơn.

Điểm $M$ thuộc đường cong ứng với góc cực $\varphi$ và tọa độ của $M$ trong hệ trục tọa độ Đề các

$$\begin{cases} x(\varphi) = r(\varphi)\cos\varphi \\ y(\varphi) = r(\varphi)\sin\varphi \end{cases}$$

Hệ số góc của tiếp tuyến với đường cong tại điểm $M$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y'(\varphi)}{x'(\varphi)} = \frac{r'(\varphi)\sin\varphi + r(\varphi)\cos\varphi}{r'(\varphi)\cos\varphi - r(\varphi)\sin\varphi}$$




Nhận xét rằng công thức này dài và khó nhớ. Ta sẽ đưa ra một công thức khác gọn hơn để xác định phương của tiếp tuyến. Kí hiệu $V$ là góc hợp bởi véc tơ $\overrightarrow{OM}$ và tiếp tuyến. Khi đó

$$\operatorname{tg}V = \operatorname{tg}(\alpha-\varphi) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\varphi}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\varphi} = \frac{\dfrac{r'\sin\varphi + r\cos\varphi}{r'\cos\varphi - r\sin\varphi} - \dfrac{\sin\varphi}{\cos\varphi}}{1 + \dfrac{r'\sin\varphi + r\cos\varphi}{r'\cos\varphi - r\sin\varphi}\cdot\dfrac{\sin\varphi}{\cos\varphi}} = \frac{r(\varphi)}{r'(\varphi)}.$$

Nếu $\operatorname{tg}V = 0$ khi đó góc hợp bởi véc tơ $\overrightarrow{OM}$ và tiếp tuyến bằng 0, nói cách khác tiếp tuyến tại $M$ và tia $OM$ trùng nhau.
Nếu $\lim\limits_{\varphi}\operatorname{tg}V = \infty$ khi đó góc hợp bởi véc tơ $\overrightarrow{OM}$ và tiếp tuyến là góc vuông, tiếp tuyến tại $M$ vuông góc với tia $OM$.

**Ví dụ 3.3.7** *(Về các đường cong trong hệ tọa độ cực)*

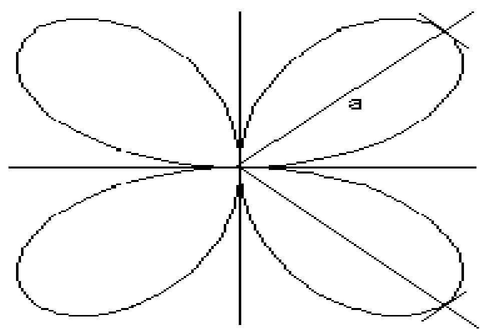
1. Khảo sát và vẽ đồ thị đường cong $r = a\sin 2\varphi \quad (a>0)$.
   $r(\varphi) = a\sin 2\varphi$ là hàm tuần hoàn với chu kì $T=\pi$ do vậy ta chỉ cần khảo sát hàm số với $\varphi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
   $r(\varphi)$ là hàm lẻ, đồ thị nhận $Oy$ làm trục đối xứng. Vậy ta chỉ khảo sát hàm số với $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

$$r'(\varphi) = 2a\cos 2\varphi,\ r'(\varphi) = 0 \ \Rightarrow\ \varphi = \frac{\pi}{4},\ \varphi = \frac{3\pi}{4}$$

Bảng biến thiên

| $\varphi$ | $0$ | | $\frac{\pi}{4}$ | | $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $r'(\varphi)$ | $2a$ | $+$ | $0$ | $-$ | $-2a$ |
| $r(\varphi)$ | $0$ | $\nearrow$ | $a$ | $\searrow$ | $0$ |
| $\operatorname{tg} V$ | $0$ | | $\infty$ | | $0$ |

Vẽ đồ thị đường cong trong góc phần tư thứ nhất rồi lấy đối xứng qua $Oy$. Quay cung đồ thị vừa vẽ xung quanh $O$ theo chiều dương một góc bằng $\pi$ ta được toàn bộ đồ thị hàm số. (Xem hình 3.4)




Hình 3.4: Đồ thị $r = a\sin 2\varphi$

2. Khảo sát và vẽ đồ thị đường cong $r = \frac{1}{\varphi}$ với $\varphi > 0$.
Đạo hàm hàm số $r' = -\frac{1}{\varphi^2} < 0$ với mọi $\varphi > 0$, hàm đơn điệu giảm hay bán kính véc tơ của các điểm trên đường cong luôn giảm khi góc cực $\varphi$ tăng. Đặc biệt khi $\varphi$ giảm dần đến 0

$$r(\varphi) = \lim_{\varphi\to 0+} \frac{1}{\varphi} = +\infty,$$

các điểm trên đồ thị dần ra vô cực, hàm có thể có tiệm cận. Biểu diễn đường cong trên theo tham số $\varphi$

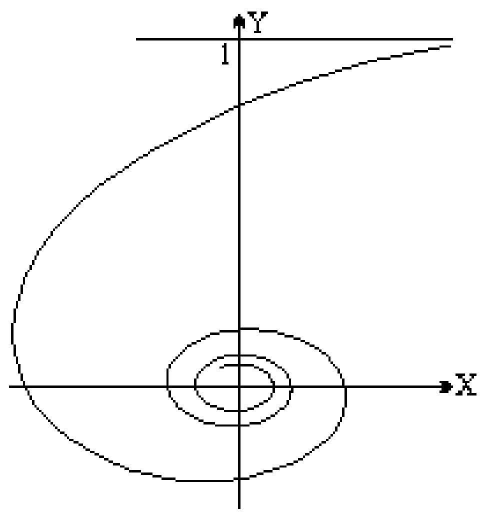
$$\begin{cases} x(\varphi) = r\cos\varphi = \frac{\cos\varphi}{\varphi} \to +\infty \\ y(\varphi) = r\cos\varphi = \frac{\sin\varphi}{\varphi} \to 1 \end{cases} \qquad \text{khi} \quad \varphi \to 0+$$

Vậy đường cong có tiệm cận ngang $y = 1$.

Bảng biến thiên

| $\varphi$ | $0$ | | $\frac{\pi}{2}$ | | $\pi$ | | $2\pi$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $r'(\varphi)$ | $+\infty$ | $-$ | $-\frac{4}{\pi^2}$ | $-$ | $-\frac{1}{\pi^2}$ | $-$ | $-\frac{1}{4\pi^2}$ | $-$ | $0$ |
| $r(\varphi)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $\frac{2}{\pi}$ | $\searrow$ | $\frac{1}{\pi}$ | $\searrow$ | $\frac{1}{2\pi}$ | $\searrow$ | $0$ |
| $\operatorname{tg} V$ | $0$ | | $-\frac{\pi}{2}$ | | $-\pi$ | | $-2\pi$ | | $-\infty$ |

Nhận xét rằng từ hàng cuối của bảng biến thiên, $\operatorname{tg} V \to -\infty$ khi $\varphi \to +\infty$, suy ra đồ thị đường cong cuộn tròn xung quanh gốc cực theo một hình gần hình tròn và tiến dần tới gốc cực.




Hình 3.5: Đồ thị đường cong $r = \frac{1}{\varphi}$