## §2 – Điều kiện cân bằng và PTCB các hệ lực

## 1. Hệ lực không gian cân bằng.

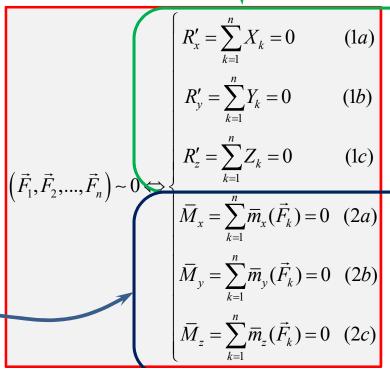
b. Phương trình cân bằng

# $\left(\vec{F}_{1},\vec{F}_{2},...,\vec{F}_{n}\right)\sim\left(\vec{R}_{O}',\vec{M}_{O}\right)$

## a. Điều kiện:

Điều kiện cần và đủ để cho một hệ lực không gian cân bằng là véctơ chính bằng không và véctơ mômen chính lấy đối với một tâm nào đó bằng không.

$$(\vec{F_1}, \vec{F_2}, ..., \vec{F_n}) \sim 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{R_0} = 0 \\ \overrightarrow{M_0} = 0 \end{cases}$$



$$R'_{y} = \sum_{k=1}^{n} Y_{k} = 0 {1b}$$

$$R'_{z} = \sum_{k=1}^{n} Z_{k} = 0 (1c)$$

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n) \sim$$

$$\overline{M}_{x} = \sum_{k=1}^{n} \overline{m}_{x}(\vec{F}_{k}) = 0 \quad (2a)$$

$$|\bar{M}_{y}| = \sum_{k=1}^{n} \bar{m}_{y}(\vec{F}_{k}) = 0$$
 (2b)

$$\bar{M}_z = \sum_{k=1}^{n} \bar{m}_z(\vec{F}_k) = 0 \quad (2c)$$

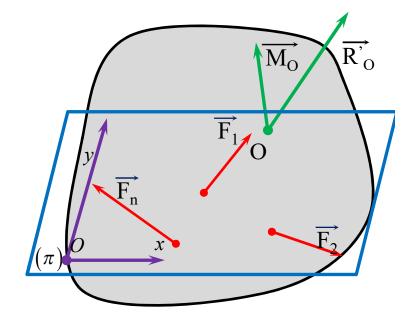
# §2 – Điều kiện cân bằng và PTCB các hệ lực

## 2. Hệ lực phẳng cân bằng.

#### a. Điều kiện:

Điều kiện cần và đủ để cho một hệ lực phẳng cân bằng là véctơ chính bằng không và véctơ mômen chính lấy đối với một tâm nào đó bằng không.

$$(\vec{F_1}, \vec{F_2}, ..., \vec{F_n}) \sim 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{R_0} = 0 \\ \overrightarrow{M_0} = 0 \end{cases}$$



#### b. Phương trình cân bằng

+ 
$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n)$$
 nằm trong mặt phẳng Oxy  
+ $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n) \sim 0$ 

**Dạng 1**. Điều kiện cần và đủ để hệ lực phẳng cân bằng là tổng hình chiếu của các lực lên hai phương bất kỳ bằng 0 và tổng mômen của các lực lấy đối với tâm bất kỳ bằng 0:

$$\begin{pmatrix}
\vec{F}_{1}, \vec{F}_{2}, ..., \vec{F}_{n}
\end{pmatrix} \sim 0 \Leftrightarrow
\begin{cases}
R'_{x} = \sum_{k=1}^{n} X_{k} = 0 & (1a) \\
R'_{y} = \sum_{k=1}^{n} Y_{k} = 0 & (1b) \\
\bar{M}_{O} = \sum_{k=1}^{n} \bar{m}_{Oz}(\vec{F}_{k}) = 0 & (1c)
\end{cases}$$

- 2. Hệ lực phẳng cân bằng.
- b. Phương trình cân bằng

$$+ (\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$$
 nằm trong mặt phẳng Oxy  $+ (\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n) \sim 0$ 

**Dạng 2.** Điều kiện cần và đủ để hệ lực phẳng cân bằng là tổng mômen của các lực lấy đối với hai tâm bất kỳ bằng 0 và tổng hình chiếu của các lực lên trục không vuông góc với đường nối hai tâm đó bằng 0:

$$\left(\vec{F}_{1}, \vec{F}_{2}, ..., \vec{F}_{n}\right) \sim 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{M}_{A} = \sum_{k=1}^{n} \vec{m}_{A}(\vec{F}_{k}) = 0 & (a) \\ \vec{M}_{B} = \sum_{k=1}^{n} \vec{m}_{B}(\vec{F}_{k}) = 0 & (b) \\ R'_{x} = \sum_{k=1}^{n} X_{k} = 0 & (c) \end{cases}$$

**Dạng 3**. Điều kiện cần và đủ để hệ lực phẳng cân bằng là tổng mômen của các lực lấy đối với ba tâm không thẳng hàng bằng 0:

$$\left(\vec{F}_{1}, \vec{F}_{2}, ..., \vec{F}_{n}\right) \sim 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{M}_{A} = \sum_{k=1}^{n} \overline{m}_{A}(\vec{F}_{k}) = 0 & (a) \\ \overline{M}_{B} = \sum_{k=1}^{n} \overline{m}_{B}(\vec{F}_{k}) = 0 & (b) \\ \overline{M}_{C} = \sum_{k=1}^{n} \overline{m}_{C}(\vec{F}_{k}) = 0 & (c) \end{cases}$$

## Sinh viên tìm hiểu thêm

# 3. Hệ lực đồng quy cân bằng.

## a. Điều kiện:

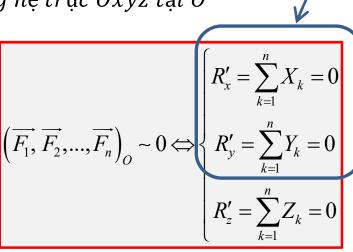
$$(\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, \dots, \overrightarrow{F_n})_O \sim \overrightarrow{R'_O}$$

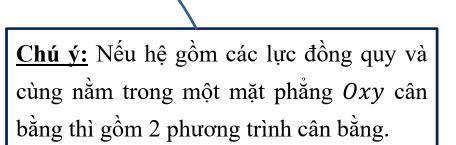
Điều kiện cần và đủ để hệ lực đồng qui cân bằng là tổng hình chiếu của các lực lên ba phương không đồng phẳng bằng 0.

### b. Phương trình cân bằng

$$+ (\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$$
 đồng quy tại O

+Dựng hệ trục Oxyz tại O





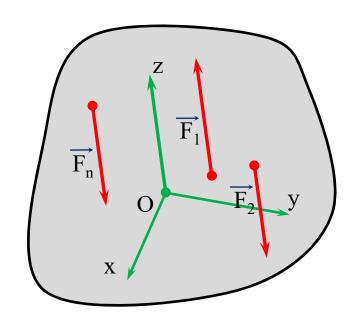
## Sinh viên tìm hiểu thêm

## 4. Hệ lực song song cân bằng.

$$(\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, \dots, \overrightarrow{F_n})_{\parallel}$$

### a. Điều kiện:

Điều kiện cần và đủ để hệ lực song song cân bằng là tổng hình chiếu của các lực lên trục song song với hệ lực bằng 0 và tổng mômen của các lực đối với hai trục vuông góc với hệ lực bằng 0.



#### b. Phương trình cân bằng

Gọi z là trục song song với hệ lực, ta dùng hệ tọa độ đề các:

$$+ (\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$$
 song song  $+ D \psi ng \ h \hat{e} \ tr \psi c \ O x y z$ 

$$\begin{cases} \overline{M}_x = \sum_{k=1}^n \overline{m}_x(\vec{F}_k) = 0 \\ (\overline{F_1}, \overline{F_2}, ..., \overline{F_n})_{\parallel} \sim 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{M}_y = \sum_{k=1}^n \overline{m}_y(\vec{F}_k) = 0 \\ R'_z = \sum_{k=1}^n Z_k = 0 \end{cases}$$

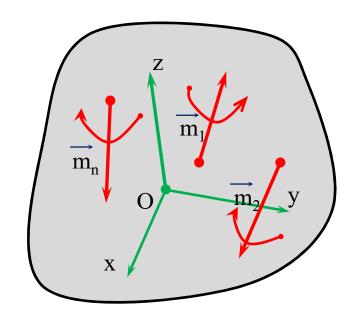
## Sinh viên tìm hiểu thêm

5. Hệ ngẫu lực cân bằng.

a. Điều kiện:  $\overline{M_1}: \overline{M_2} - \overline{M_n} \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}}$ 

Điều kiện cần và đủ để hệ ngẫu lực cân bằng là tổng hình chiếu của các ngẫu lực lên ba phương không đồng phẳng bằng không.

#### b. Phương trình cân bằng



$$+ (\vec{m}_1, \vec{m}_2, ..., \vec{m}_n) \sim 0$$
  
+ $D \psi ng \ h \dot{e} \ tr \psi c \ O x y z$ 

$$\left\{ \vec{M}_{x} = \sum_{k=1}^{n} m_{kx} = 0 \\
\vec{M}_{y} = \sum_{k=1}^{n} m_{ky} = 0 \\
\vec{M}_{z} = \sum_{k=1}^{n} m_{kz} = 0 \right\}$$

## §3 – Các bước giải một bài cân bằng tĩnh định

Trong một số bài toán tĩnh học, bao giờ cũng thành lập được một số phương trình độc lập nhất định và phải tìm một số ẩn độc lập nào đó. Nếu số ẩn bằng số phương trình cân bằng tĩnh học thì bài toán đó được gọi là: bài toán tĩnh định. Ngược lại, nếu số phương trình ít hơn số ẩn thì gọi là bài toán siêu tĩnh.

#### Chúng ta nên giải quyết bài toán CB tĩnh định theo các trình tự sau đây:

Bước 1: Chọn vật khảo sát

**Bước 2**: Chỉ ra các ngoại lực, các phản lực liên kết tác dụng lên vật khảo sát ( mô tả các lực đó lên hình vẽ)

**Bước 3**: Nhận xét đặc điểm hình học của hệ lực mà chọn cách thiết lập phương trình cân bằng tương ứng.

Bước 4: Giải và biện luận kết quả tìm được

## §4 – Một số bài toán cân bằng tĩnh định

#### 1. Một vật cân bằng trong không gian. (sinh viên tự học thêm)

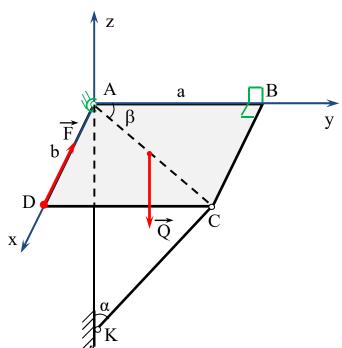
**Bài toán.** Cho vật rắn chịu tác dụng của các lực và chịu liên kết. Tìm điều kiện để vật rắn ở trạng thái cân bằng và xác định phản lực liên kết tác dụng lên vật.

**Ví dụ1.** Một tấm phẳng đồng chất hình chữ nhật ABCD, trọng lượng của tấm Q = 15N. Tấm được giữ ở vị trí nằm ngang nhờ liên kết bản lề cầu tại A, bản lề trụ tại B và liên kết thanh CK. Tấm chịu tác dụng của lực F = 30N. Cho biết góc  $\alpha = 45^{\circ}$ ,  $\beta = 30^{\circ}$ . Hãy xác định phản lực tại A, B và lực trong thanh CK.

#### Bài giải:

Bước 1: Xét trạng thái cân bằng của tấm ABCD

- Giải phóng liên kết tại A, B, C ta có:
- +Tại A liên kết bản lề cầu, ta có thành phần phản lực liên kết:  $\overrightarrow{X_A}, \overrightarrow{Y_A}, \overrightarrow{Z_A}$
- +Tại B liên kết bản lề trụ, ta có thành phần phản lực liên kết:  $\overrightarrow{X_B}$ ,  $\overrightarrow{Z_B}$
- +Tại C có phản lực thanh CK:  $\overrightarrow{S_{KC}}$



Suy ra hệ lực tác dụng lên tấm:

$$(\overrightarrow{Q}, \overrightarrow{F}, \overrightarrow{X_A}, \overrightarrow{Y_A}, \overrightarrow{Z_A}, \overrightarrow{X_B}, \overrightarrow{Z_B}, \overrightarrow{S_{KC}}) \sim 0$$

- Vì hệ lực tác dụng là hệ lực không gian nên ta có hệ 6 phương trình:

$$\sum F_{kx} = X_A + X_B + S_{KC} \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta - F = 0$$

$$\sum F_{ky} = Y_A + S_{KC} \cdot \sin\alpha \cdot \cos\beta = 0$$

$$\sum F_{kz} = Z_A + Z_B + S_{KC} \cdot \cos\alpha - Q = 0$$

$$\sum \overline{m}_x(\vec{F}_k) = a \cdot Z_B + a \cdot S_{KC} \cdot \cos\alpha - \frac{a}{2} \cdot Q = 0$$

$$\sum \overline{m}_y(\vec{F}_k) = -b \cdot S_{KC} \cdot \cos\alpha + \frac{b}{2} \cdot Q = 0$$

$$\sum \overline{m}_z(\vec{F}_k) = -a \cdot X_B = 0$$

Giải hệ ta được:

$$S_{x} = S_{KC} \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta$$

$$S_{y} = S_{KC} \cdot \sin\alpha \cdot \cos\beta$$

$$S_{z} = S_{KC} \cdot \cos\alpha$$
ên ta
$$X_{A} = X_{A} = X_{A}$$

$$X_{B} = X_{C} \cdot \cos\alpha$$

$$X_{A} = X_{C} \cdot \cos\alpha$$

$$X_{C} = X_{C} \cdot \cos\alpha$$

$$X_{C} = X_{C} \cdot \cos\alpha$$

$$X_B = Z_B = 0$$

$$S_{KC} = \frac{Q}{2 \cdot \cos 45^o} = \frac{15\sqrt{2}}{2} (N)$$

$$X_A = F - S_{KC} \sin 45^o \cdot \sin 30^o = 30 - \frac{15\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{4} = 26,25N$$

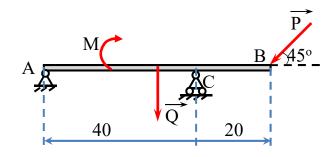
$$Y_A = -S_{KC} \sin 45^o \cos 30^o = -\frac{15\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{15\sqrt{3}}{4} N$$

$$Z_A = Q - S_{KC} \cos 45^o = 15 - \frac{15\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 7,5N$$

132

#### 2. Một vật phẳng cân bằng.

**Ví dụ 1.** Thanh đồng chất AB có trọng lượng Q = 200N, chịu liên kết như hình vẽ. Trên thanh tác dụng ngẫu lực có mômen M = 50Nm và lực tập trung  $P = 50\sqrt{2}N$  nghiêng góc  $\alpha = 45^{\circ}$  so với phương ngang. Cho biết AC = 2CB = 40cm. Xác định phản lực liên kết tại gối A, C.

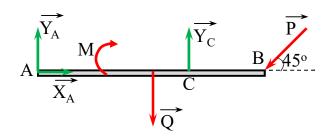


#### Bài giải:

- -Khảo sát TTCB thanh AB
  -Giải phóng liên kết tại A, C ta được phản lực liên kết:  $\overrightarrow{X_A}$ ,  $\overrightarrow{Y_A}$  và  $\overrightarrow{Y_C}$
- -Thanh AB cân bằng dưới tác dụng của hệ lực:

$$(\overrightarrow{P}, \overrightarrow{Q}, \overrightarrow{M}, \overrightarrow{X_A}, \overrightarrow{Y_A}, \overrightarrow{Y_C}) \sim 0$$

- Ta có hệ 3 phương trình cân bằng của hệ lực phẳng:

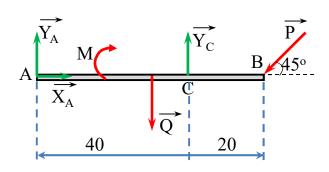


#### Bài giải:

- -Khảo sát TTCB thanh AB
- -Giải phóng liên kết tại A, C ta được phản lực liên kết:  $\overrightarrow{X_A}$ ,  $\overrightarrow{Y_A}$  và  $\overrightarrow{Y_C}$
- -Thanh AB cân bằng dưới tác dụng của hệ lực:

$$(\overrightarrow{P}, \overrightarrow{Q}, \overrightarrow{M}, \overrightarrow{X_A}, \overrightarrow{Y_A}, \overrightarrow{Y_C}) \sim 0$$

- Ta có hệ 3 phương trình cân bằng của hệ lực phẳng:



$$\sum X_k = X_A - P \cdot \cos\alpha = 0$$

$$\sum Y_k = Y_A + Y_C - Q - P \cdot \sin\alpha = 0$$

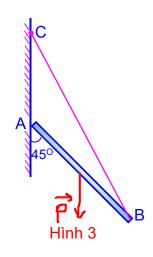
$$\sum \overline{m}_A(\overrightarrow{F}_k) = Y_C \cdot AC - Q \cdot \frac{AB}{2} - P \cdot AB \cdot \sin\alpha - M = 0$$

Thay số và giải ta có:

$$\begin{cases} \sum X_k = X_A - 50.\sqrt{2}.\frac{1}{\sqrt{2}} = 0 \\ \sum Y_k = Y_A + Y_C - 200 - 50.\sqrt{2}.\frac{1}{\sqrt{2}} = 0 \\ \sum \overline{m}_A(\overrightarrow{F}_k) = Y_C.0.4 - 200.\frac{0.6}{2} - 50.\sqrt{2}.0.6.\frac{1}{\sqrt{2}} - 50 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_A = 50N \\ Y_A = -100N \\ Y_C = 350N \end{cases}$$

### 2. Một vật cân bằng trong mặt phẳng.

**Ví dụ 2.** Thanh đồng chất AB dài 2L, trọng lượng *P*. Đầu A của thanh tựa vào tường thẳng đứng nhẵn tron, còn đầu B buộc vào đầu một dây mềm không giãn, dây có trọng lượng không đáng kể. Thanh được giữ ở trạng thái cân bằng và hợp với phương thẳng đứng góc 45°. Hãy xác định vị trí điểm buộc dây C với tường, sức căng của dây và áp lực của thanh lên tường.



#### Bài giải:

- -Xét cân bằng của thanh AB.
- -Lực tác dụng lên thanh:
- +Trọng lực của thanh đi qua trung điểm G của AB và có phương thẳng đứng, chiều đi xuống.
- +Phản lực liên kết tại A là  $\overrightarrow{N_A}$  có phương nằm ngang và vuông góc với tường
- + Giải phóng liên kết với dây tại B, Khi đó phản lực liên kết của dây là  $\overrightarrow{T_B}$  có điểm đặt tại B và có hướng dọc theo dây, nhưng điểm buộc C chưa biết nên phương chiều của  $\overrightarrow{T_B}$  chưa xác định.
- -Hai lưc  $\overrightarrow{P}$ ,  $\overrightarrow{N_A}$  cắt nhau tại I (Hình vẽ).

Do AB cân bằng chỉ chịu tác dụng của 3 lực cân bằng  $(\vec{P}, \vec{N}_A, \vec{T}) \sim 0$ 

Nên 3 lực này phải đồng quy tại điểm I

 $-\overrightarrow{T}$  phải qua I tức là C phải nằm trên đường BI Do hệ lực cân bằng là hệ lực phẳng đồng quy nên ta nhận được:

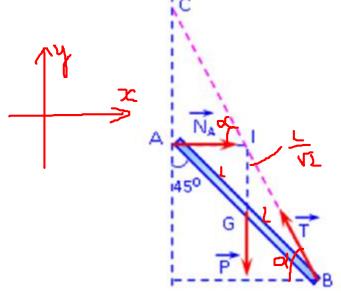
$$\begin{cases} \sum X_k = N_A - T.\cos\alpha = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum Y_k = -P + T.\sin\alpha = 0 \end{cases}$$

$$\cos\alpha = \frac{AI}{CI}; \sin\alpha = \frac{AC}{CI}$$

$$CI = \sqrt{2.L^2 + \frac{L^2}{2}} = L\sqrt{\frac{5}{2}}$$

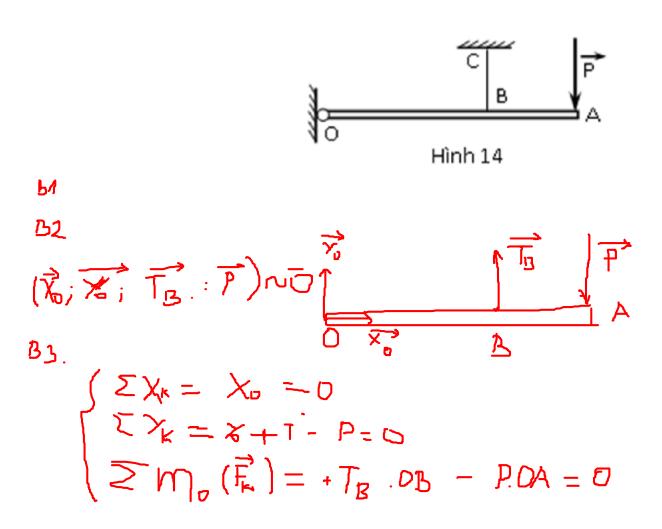
$$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}; \sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$$



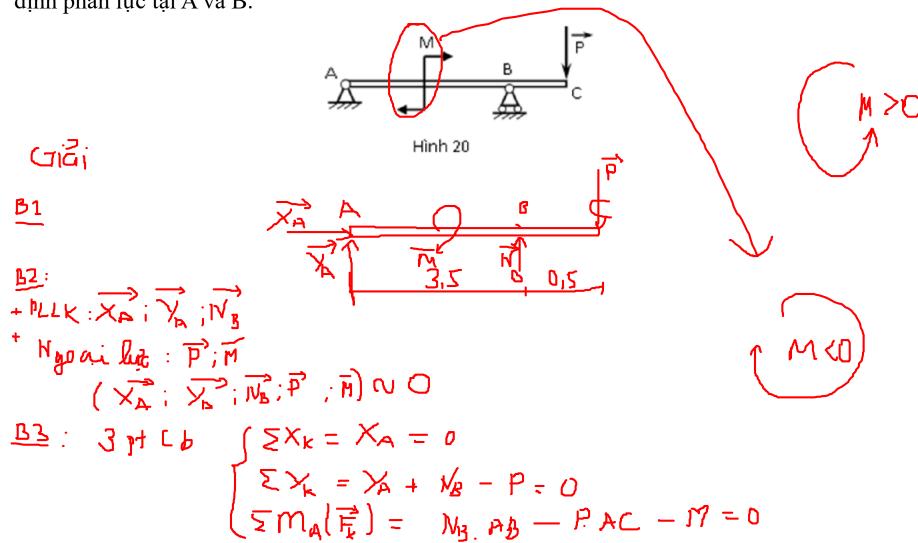
$$\begin{cases} T = \frac{P}{\sin\alpha} = \frac{P}{2}\sqrt{5} \\ N_A = T \cdot \cos\alpha = \frac{P}{2} \end{cases}$$

Do đó:

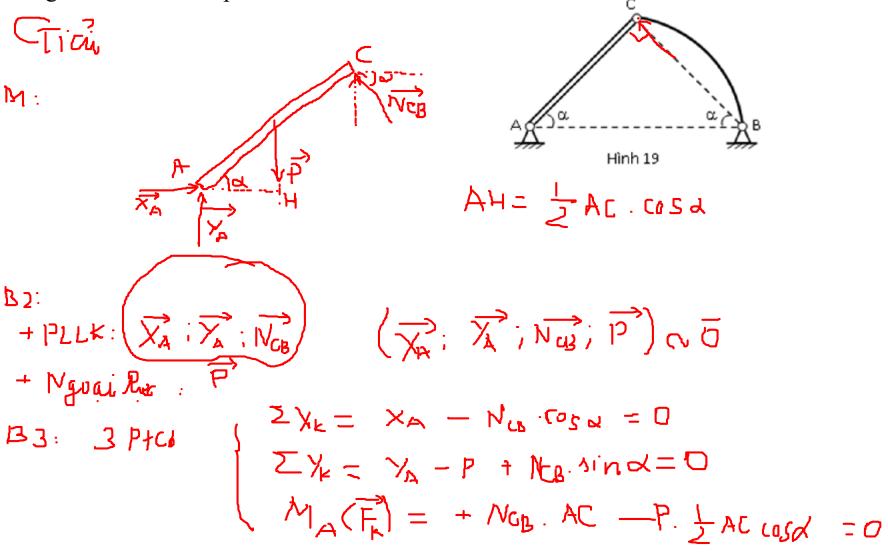
**Ví dụ 3.** Thanh OA bỏ qua trọng lượng cân bằng nằm ngang nhờ liên kết bản lề với tường và liên kết với dây CB. Tại đầu A có lực tác dụng P thẳng đứng. Biết dây CB vuông góc với thanh. OB = 2AB. Hãy xác định phản lực tại O và lực căng của sợi dây CB.



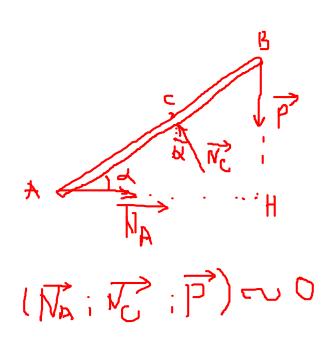
 $\underline{Vi}$  dụ 4. Thanh AB được bỏ qua trọng lượng, cân bằng nằm ngang nhờ liên kết với nền bằng gối cố định A và gối di động B. Thanh chịu tác dụng của ngẫu lực có mô men M=6 kN.m và lực tập trung P=2kN vuông góc với thanh tại C. Cho biết AB=3,5 m, BC=0,5 m. Hãy xác định phản lực tại A và B.

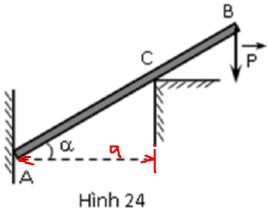


Ví dụ 5. Thanh AB đồng chất có trọng lượng P nằm cân bằng trong mặt phẳng thẳng đứng nhờ liên kết gối cố định A và liên kết thanh BC. Biết AB và BC cùng tạo với phương ngang AC một góc 45°. Xác định phản lực tại A và B.



Ví dụ 6. Thanh AB độ dài l bỏ qua trọng lượng chịu tác dụng của lực P thẳng đứng tại B. Thanh cân bằng trong mặt phẳng thẳng đứng nhờ tựa vào tường nhẵn thẳng đứng tại A và tựa vào gờ nhẵn C. Xác định phản lực tại A, C và khoảng cách AC. Cho biết thanh tạo với phương ngang một góc α.





$$\begin{cases} \sum X_{k} = N_{A} - 1 + N_{C} \cdot N_{C} = 0 \\ \sum X_{k} = N_{C} \cdot C_{O} \cdot S_{k} - P = 0 \\ \sum M(F_{k}) = N_{C} \cdot AC - P \cdot C \cdot L_{B} \cdot S_{k} \end{cases}$$

<u>Ví dụ 7.</u> Thanh AB trọng lượng không đáng kể cân bằng nằm ngang nhờ liên kết ngàm vào tường tại A. Thanh chịu tác dụng của hệ lực phân bố đều cường độ q = 1,5 kN/m có phương vuông góc với thanh, ngẫu lực mô men M = 2kN.m và lực tập trung P = 4kN. Các kích thước cho như trên hình vẽ. Hãy xác định phản lực tại ngàm A.

|32:

-PLLK: 
$$\times A$$
;  $\times A$ ;  $\times M_A$ 

-Ngua,  $A$ ;  $A$