MỤC LỤC

GIẢI TÍCH I

Sách dùng cho sinh viên trường Đại học xây dựng
và sinh viên các trường Đại học, Cao đẳng kĩ thuật

Chương 2

Hàm số, giới hạn hàm số và hàm liên tục

2.1 Hàm số sơ cấp

2.1.1 Hàm thực một biến số

Định nghĩa 2.1.1 *Ánh xạ* $f : X \to \mathbb{R}, \quad X \subset \mathbb{R}, X \neq \emptyset$ *được gọi là hàm số thực một biến số thực và gọi tắt là hàm một biến số.* X *được gọi là tập xác định của hàm số* f*, kí hiệu* $D_f = X$*. Tập ảnh* $f(X) \in \mathbb{R}$ *được gọi là tập giá trị của hàm số* f*, kí hiệu* $R_f = f(X)$*.*
$x \in D_f$ *được gọi là biến độc lập hay đối số của hàm* f*, ảnh* $f(x) \in R_f$ *được gọi là biến phụ thuộc hay hàm số. Để minh họa hàm* f *ứng mỗi* $x \in D_f$ *với phần tử xác định* $f(x) \in R_f$*, ta thường viết* $y = f(x)$ *hay*

$$f : X \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto y = f(x).$$

Ví dụ 2.1.1

1. Ánh xạ đồng nhất $f : R \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x$ hoặc kí hiệu $f(x) = x \ \forall x \in \mathbb{R}$.
   f còn được gọi là hàm đồng nhất trên $\mathbb{R}$.

2. $\mathrm{sign}(x) = \begin{cases} 1 & \text{nếu} \quad x > 0 \\ 0 & \text{nếu} \quad x = 0 \\ -1 & \text{nếu} \quad x < 0 \end{cases} \qquad \Big(\mathrm{sign}(x)$ được gọi là hàm dấu$\Big)$.
   Hiển nhiên $|x| = x\,\mathrm{sign}(x)$.

3. Hàm $E(x) = [x]$, $\forall x \in \mathbb{R}$, trong đó $[x]$ kí hiệu phần nguyên của x, là số nguyên lớn nhất không vượt quá x.

• Trong mặt phẳng dựng hai trục số thực $x'Ox, y'Oy$ vuông góc nhau tại O, $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ là các véc tơ đơn vị của các trục $x'Ox, y'Oy$. Nếu quay véc tơ $\overrightarrow{i}$ theo chiều dương (chiều ngược với chiều kim đồng hồ) góc 90^0 mà chiều của $\overrightarrow{i}$ trùng với chiều của $\overrightarrow{j}$, ta nói $x'Ox, y'Oy$ lập thành hệ trục tọa độ Đề các thuận. Trong giáo trình này ta chỉ xét hệ trục tọa độ Đề các thuận và thường gọi ngắn gọn xOy là hệ trục tọa độ Đề các.

Đồ thị của hàm số $f : X \to \mathbb{R}$ trong hệ trục tọa độ Đề các là tập các điểm $M(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2$ với mọi $x \in X$. Ta thường minh họa đồ thị hàm f là một đường cong vẽ trong hệ trục tọa độ Đề các.

• Cho ba tập hợp $X \subset \mathbb{R}, Y \subset \mathbb{R}, Z \subset \mathbb{R}$ và các hàm số

$$f : X \to Y, \quad g : Y \to Z.$$

Khi đó ánh xạ $X \to Z$

$$x \mapsto g(f(x))$$

được gọi là *hàm số hợp* của g và f, kí hiệu hàm hợp đó là $g \circ f$. (Chú ý đến thứ tự của các hàm f và g).

Ví dụ 2.1.2

Cho hai hàm số $f(x) = x^3 + x + 1$ và $g(x) = 3x + 2$. Khi đó

$$\big(g \circ f\big)(x) = g\big(f(x)\big) = 3f(x) + 2 = 3(x^3 + x + 1) + 2 = 3x^3 + 3x + 5$$

$$\big(f \circ g\big)(x) = f\big(g(x)\big) = g^3(x) + g(x) + 1 = (3x + 2)^3 + 3x + 2 + 1$$

• Cho hai tập hợp $X \subset \mathbb{R}, Y \subset \mathbb{R}$ và một song ánh $f : X \to Y$. Khi đó tồn tại ánh xạ ngược của f, ta thường gọi là *hàm ngược* của hàm số f và kí hiệu

$$f^{-1} : Y \to X$$

Như đã biết từ học phần trước, hàm ngược của hàm số f cũng là một song ánh từ Y lên X, hệ thức cơ bản của hàm ngược

$$\left(f^{-1} \circ f\right)(x) = x \ \forall x \in X, \quad \left(f \circ f^{-1}\right)(y) = y \ \forall y \in Y.$$

Từ đây ta suy ra nếu điểm $M(x, y)$ thuộc đồ thị hàm số f thì điểm $M'(y, x)$ thuộc đồ thị hàm ngược f^{-1}. Trong hệ tọa độ Đề các, điểm $M(x, y)$ và điểm $M'(y, x)$ đối xứng nhau qua đường phân giác $y = x$, suy ra đồ thị hàm số f và đồ thị hàm ngược f^{-1} đối xứng nhau qua đường thẳng $y = x$.

2.1.2 Các hàm sơ cấp cơ bản và hàm sơ cấp

Chúng ta đã làm quen với một số hàm sơ cấp cơ bản trong chương trình toán bậc phổ thông

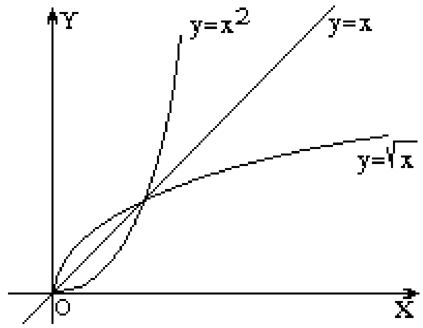
• Hàm không đổi: $f(x) = C \ \ \forall x \in \mathbb{R}$.
• *Hàm lũy thừa* $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, \quad f(x) = x^\alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$ là số thực cố định).
Hàm lũy thừa $f(x) = x^\alpha$ là một song ánh từ $\mathbb{R}^+$ lên $\mathbb{R}^+$, do vậy nó tồn tại hàm ngược

$$f^{-1} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, \quad f^{-1}(x) = x^{\frac{1}{\alpha}},$$

hàm ngược f^{-1} cũng là hàm lũy thừa.
Chú ý rằng người ta thường quy ước

> Nếu $\alpha \in \mathbb{N}$ là số tự nhiên, miền xác định của hàm là toàn bộ $\mathbb{R}$, chẳng hạn $f(x) = x^3$ xác định trên $\mathbb{R}$.
>
> Nếu $\alpha \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$ là số tự nhiên âm, miền xác định của hàm là tập $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, ví dụ hàm $f(x) = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$ xác định với mọi $x \neq 0$.
>
> Nếu $\alpha \in \mathbb{R}$ là số vô tỉ, miền xác định của hàm là tập $\mathbb{R}^+$.
>
> Người ta cũng quy ước, khi hàm lũy thừa được viết dưới dạng $f(x) = \sqrt[n]{x^m}$ (m, n là các số nguyên), miền xác định của hàm tùy thuộc vào tính chẵn, lẻ của m, n. Chẳng hạn khi $m \geq 0$ và n là số tự nhiên chẵn khi đó miền xác định của hàm là $\mathbb{R}^+$, tuy nhiên nếu n là số tự nhiên lẻ, miền xác định của hàm là toàn bộ $\mathbb{R}$.

• *Hàm số mũ* $f : R \to \mathbb{R}^+, \quad f(x) = a^x \quad (a > 0, a \neq 1)$. Hàm số mũ là một song ánh từ $\mathbb{R}$ lên $\mathbb{R}^+$, do vậy nó tồn tại hàm ngược $f^{-1} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, kí hiệu

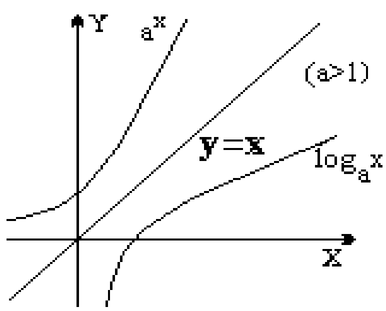


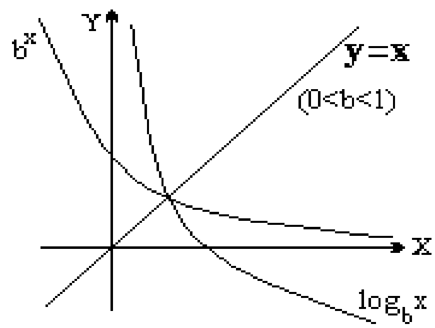
Hình 2.1: Hàm lũy thừa

$f^{-1}(x) = \log_a x$. Người ta gọi hàm ngược của hàm số mũ là *hàm logarit*. Nó thỏa mãn các hệ thức về hàm ngược

$$\big(f^{-1} \circ f\big)(x) = x \;\; \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{hay} \quad \log_a a^x = x \;\; \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\big(f \circ f^{-1}\big)(x) = x \;\; \forall x \in \mathbb{R}^+ \quad \text{hay} \quad a^{\log_a x} = x \;\; \forall x \in \mathbb{R}^+.$$





Hình 2.2: Hàm mũ, hàm logarit

• *Các hàm lượng giác* $\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x, \operatorname{cotg} x$ chúng ta đã biết trong chương trình phổ thông.

Bây giờ chúng ta sẽ lần lượt làm quen với các hàm lượng giác ngược

• Xét hạn chế của hàm $\sin x$ lên đoạn $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$$\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1] \quad \text{là song ánh.}$$

Do vậy nó tồn tại hàm ngược, kí hiệu arcsin

$$\arcsin : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

Hàm arcsin thỏa mãn các hệ thức về hàm ngược

$$\arcsin(\sin\, x) = x \ \ \forall x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \quad \text{và} \quad \sin(\arcsin x) = x \ \ \forall x \in [-1, 1].$$

• Xét hạn chế của hàm $\cos x$ lên đoạn $[0, \pi]$

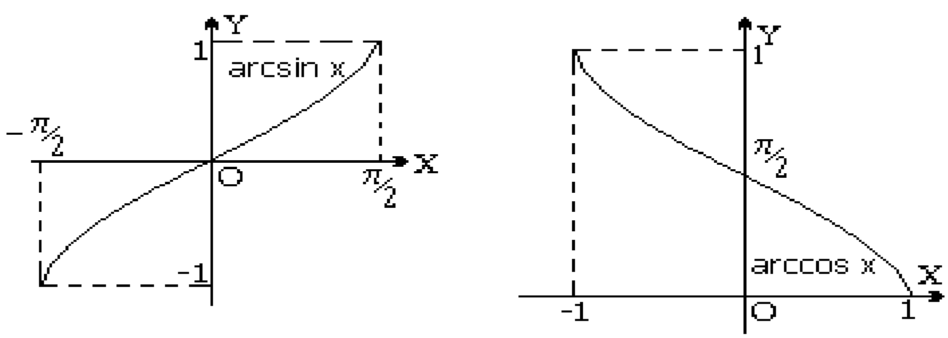
$$\cos : [0, \pi] \to [-1, 1] \quad \text{là song ánh.}$$

Do vậy nó tồn tại hàm ngược, kí hiệu arccos

$$\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$$

Hàm arccos thỏa mãn các hệ thức về hàm ngược

$$\arccos(\cos\, x) = x \ \ \forall x \in [0, \pi] \quad \text{và} \quad \cos(\arccos x) = x \ \ \forall x \in [-1, 1].$$



Hình 2.3: Đồ thị hàm ngược $y = \arcsin x$ và $y = \arccos x$

• Xét hạn chế của hàm $\mathrm{tg}\, x$ lên khoảng $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

$$\mathrm{tg} : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R} \quad \text{là song ánh.}$$

Do vậy nó tồn tại hàm ngược, kí hiệu arctg

$$\mathrm{arctg} : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

Hàm arctg thỏa mãn các hệ thức về hàm ngược

$$\mathrm{arctg}(\mathrm{arctg}\, x) = x \ \ \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{và} \quad \mathrm{arctg}(\mathrm{tg}\, x) = x \ \ \forall x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}).$$

• Xét hạn chế của hàm $\operatorname{cotg} x$ lên khoảng $(0, \pi)$

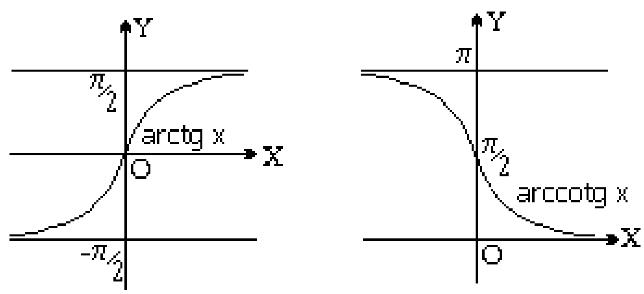
$$\operatorname{cotg} : (0, \pi) \to \mathbb{R} \quad \text{là song ánh.}$$

Do vậy nó tồn tại hàm ngược, kí hiệu arccotg

$$\operatorname{arccotg} : \mathbb{R} \to (0, \pi)$$

Hàm arccotg thỏa mãn các hệ thức về hàm ngược

$$\operatorname{cotg}(\operatorname{arccotg} x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{và} \quad \operatorname{arccotg}(\operatorname{cotg} x) = x \quad \forall x \in (0, \pi).$$



Hình 2.4: Đồ thị hàm ngược $y = \operatorname{arctg} x$ và $y = \operatorname{arccotg} x$

• Các hàm nhận được từ các hàm sơ cấp cơ bản bởi hữu hạn các phép toán cộng, trừ, nhân, chia và phép hợp các hàm được gọi là *hàm số sơ cấp*.

Ví dụ 2.1.3 *(Về các hàm số sơ cấp)*

- $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n \quad n \in \mathbb{N}, a_k \in \mathbb{R} \ \ \forall k \in \mathbb{N}.$
- $f(x) = \dfrac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_m x^m} \quad m, n \in \mathbb{N}, a_k, b_i \in \mathbb{R} \ \ \forall i, k \in \mathbb{N}$
- $f(x) = a^{\sqrt{x^2 - x + 1}} \quad (a > 0), \qquad f(x) = \log_2 \left(\dfrac{x^2 + 3x + 1}{x + 1} \right)$

• Các hàm hyperbolic là các hàm số sơ cấp được sử dụng khá rộng rãi trong giải tích. Chúng được định nghĩa như sau

Hàm *cosin hyperbol* $\quad \operatorname{ch} \ x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

Hàm *sin hyperbol* $\quad \text{sh } x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

Hàm *tang hyperbol* $\quad \text{th } x = \dfrac{\text{sh } x}{\text{ch } x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

Hàm *cotang hyperbol* $\quad \text{th } x = \dfrac{\text{ch } x}{\text{sh } x} = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

Các hàm hyperbolic có tính chất gần giống như các hàm lượng giác (bạn đọc tự chứng minh)

$$\begin{aligned} \text{sh}(x+y) &= \text{sh}\, x \,\text{ch}\, y + \text{ch}\, x \,\text{sh}\, y \\ \text{ch}(x+y) &= \text{ch}\, x \,\text{ch}\, y + \text{sh}\, x \,\text{sh}\, y \\ \text{sh}(x-y) &= \text{sh}\, x \,\text{ch}\, y - \text{ch}\, x \,\text{sh}\, y \\ \text{ch}(x-y) &= \text{ch}\, x \,\text{ch}\, y - \text{sh}\, x \,\text{sh}\, y \end{aligned}$$

$$\text{ch}^2 x - \text{sh}^2 x = 1, \quad \text{sh}2x = 2\text{sh}\, x \,\text{ch}\, x, \quad \text{ch}2x = \text{ch}^2 x + \text{sh}^2 x$$

Bài tập Chứng tỏ rằng hàm ngược của hàm $f(x) = \text{sh}\, x$ bằng

$$f^{-1}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

và hàm ngược của hàm $h(x) = \text{ch}\, x$

$$h^{-1} : [1, +\infty) \to [0, +\infty), \;\; h^{-1}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2-1}).$$

2.2 Giới hạn hàm số

2.2.1 Các khái niệm về giới hạn hàm số

Định nghĩa 2.2.1 *Cho hàm số từ tập $D \subset \mathbb{R}$ vào $\mathbb{R}$:*

$$f : D \to \mathbb{R},$$

x_0 là một điểm tụ của D. Ta nói $L \in \overline{\mathbb{R}}$ là giới hạn của hàm f khi $x \to x_0$ và kí hiệu

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L,$$

nếu cho trước một lân cận $U(L)$ tuỳ ý của L, tồn tại một lân cận $U(x_0)$ của x_0 sao cho với mọi $x \in U(x_0) \cap D$ và $x \neq x_0$

$$f(x) \in U(L).$$

Định nghĩa trên cũng có thể diễn đạt (dưới dạng "ngôn ngữ $\delta - \epsilon$") như sau:

- Trường hợp L hữu hạn:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L,$$

  nếu cho trước một số $\epsilon > 0$ tuỳ ý, tồn tại số $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ (δ phụ thuộc vào ϵ) sao cho với mọi x thoả mãn $x \in D$ và $0 < |x - x_0| < \delta$ ta có

$$|f(x) - L| < \epsilon.$$

- Trường hợp $L = +\infty$:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty,$$

  nếu cho trước một số $K > 0$ tuỳ ý, tồn tại số $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ sao cho với mọi x thoả mãn $x \in D$ và $0 < |x - x_0| < \delta$ ta có

$$f(x) > K.$$

- Trường hợp $L = -\infty$:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty,$$

  nếu cho trước một số $K > 0$ tuỳ ý, tồn tại số $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ sao cho với mọi x thoả mãn $x \in D$ và $0 < |x - x_0| < \delta$ ta có

$$f(x) < -K.$$

Chú ý rằng trong định nghĩa giới hạn, ta không quan tâm tới giá trị hàm số tại x_0, chỉ xét các giá trị hàm $f(x)$ tại các điểm $x \neq x_0$. Do vậy hàm $f(x)$ có thể không xác định tại chính điểm x_0 đó.

Ví dụ 2.2.1

1. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1} = 2$. Thật vậy, cho trước $\varepsilon > 0$ tùy ý, xét

$$\left|\frac{x^2-1}{x-1} - 2\right| = |x-1| \quad \text{với mọi} \quad x \neq 1.$$

   Nếu chọn $\delta = \varepsilon$ và $0 < |x-1| < \delta$, khi đó

$$\left|\frac{x^2-1}{x-1} - 2\right| = |x-1| < \varepsilon$$

   thỏa mãn định nghĩa giới hạn hàm số bằng 2.

2. Cho hàm $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{nếu} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{nếu} \quad x = 0 \end{cases}$. Ta sẽ chứng minh $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$. Thật vậy, cho trước $\varepsilon > 0$ tùy ý, xét

$$|f(x) - 0| = |x^2| < \varepsilon \Leftrightarrow |x| < \sqrt{\varepsilon} \quad \text{với mọi} \quad x \neq 0.$$

   Do đó nếu chọn $\delta = \sqrt{\varepsilon}$, mọi yêu cầu trong định nghĩa giới hạn hàm số đều thỏa mãn. (Trong ví dụ này, giá trị hàm số tại $x = 0$ không ảnh hưởng gì tới giới hạn hàm số).

Người ta còn đưa vào khái niệm giới hạn một phía của hàm $f : D \to \mathbb{R}$ và kí hiệu $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x) = f(x_0+)$ hoặc $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x) = f(x_0-)$

Định nghĩa 2.2.2 *Cho hàm số $f : D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ là một điểm tụ của D. Ta nói $L \in \overline{\mathbb{R}}$ là giới hạn phải của hàm f*

$$\lim_{x\to x_0+} f(x) = L,$$

nếu cho trước một lân cận $U(L)$ tuỳ ý của L, tồn tại số $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ sao cho với mọi x thoả mãn $x \in D$ và $x_0 < x < x_0 + \delta$ ta có

$$f(x) \in U(L).$$

Tương tự $L \in \overline{\mathbb{R}}$ là giới hạn trái của hàm f

$$\lim_{x\to x_0-} f(x) = L,$$

nếu cho trước một lân cận $U(L)$ tuỳ ý của L, tồn tại số $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ sao cho với mọi x thoả mãn $x \in D$ và $x_0 - \delta < x < x_0$ ta có

$$f(x) \in U(L).$$

Từ hai định nghĩa trên ta có ngay định lí sau

Định lí 2.2.1 *Điều kiện cần và đủ để tồn tại giới hạn* $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$, *là tồn tại các giới hạn một phía*

$$\lim_{x\to x_0+} f(x) = L, \quad \lim_{x\to x_0-} f(x) = L$$

và chúng cùng bằng L.

Trường hợp tập D không bị chặn trên (dưới), khi đó ta coi $+\infty(-\infty)$ là điểm tụ của D, do vậy ta cũng dẫn vào khái niệm

Định nghĩa 2.2.3
$L \in \overline{\mathbb{R}}$ *là giới hạn của hàm* f *khi* $x \to +\infty$ *và kí hiệu* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$, *nếu cho trước một lân cận* $U(L)$ *tuỳ ý của* L, *tồn tại số* $K > 0$ *sao cho với mọi* x *thoả mãn* $x \in D$ *và* $x > K$ *ta có*

$$f(x) \in U(L).$$

Tương tự $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$, *nếu cho trước một lân cận* $U(L)$ *tuỳ ý của* L, *tồn tại số* $K > 0$ *sao cho với mọi* x *thoả mãn* $x \in D$ *và* $x < -K$ *ta có*

$$f(x) \in U(L).$$

Ví dụ 2.2.2

1. $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$. Thật vậy cho trước một lân cận bán kính $\epsilon > 0$ tuỳ ý $U_\epsilon(0) = (-\epsilon, +\epsilon)$ của 0, chọn số $K = \frac{1}{\epsilon}$, khi đó với mọi $x > K$ ta có
$$\left|\frac{1}{x} - 0\right| < \frac{1}{K} = \epsilon \Leftrightarrow \frac{1}{x} \in U_\epsilon(0).$$

2. Hoàn toàn tương tự $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\sin x}{x} = 0$. Thật vậy cho trước một lân cận bán kính $\epsilon > 0$ tuỳ ý $U_\epsilon(0) = (-\epsilon, +\epsilon)$ của 0, chọn số $K = \frac{1}{\epsilon}$, khi đó với mọi $x > K$ ta có
$$\left|\frac{\sin x}{x} - 0\right| < \frac{1}{|x|} < \frac{1}{K} = \epsilon \Leftrightarrow \frac{\sin x}{x} \in U_\epsilon(0).$$

3. $\lim_{x\to 0}\sin x = 0$. Thật vậy cho trước một lân cận bán kính $\epsilon > 0$ tuỳ ý $U_\epsilon(0) = (-\epsilon, +\epsilon)$ của 0, chọn số $\delta = \epsilon$, khi đó với mọi $x \in U_\delta(0), x \neq 0$ hay $0 < |x| < \epsilon$ ta có
$$|\sin x - 0| < |x| = \epsilon \Leftrightarrow \sin x \in U_\epsilon(0).$$

4. Tuy nhiên không tồn tại giới hạn $\lim_{x\to+\infty}\sin x$. Thật vậy giả sử
$$\lim_{x\to+\infty}\sin x = L,$$
Khi đó (chọn $\epsilon = \frac{1}{4}$ chẳng hạn) tồn tại một số K nào đó sao cho với mọi $x > K$ nào đó
$$|\sin x - L| < \frac{1}{4} \Leftrightarrow \; L - \frac{1}{4} < \sin x < L + \frac{1}{4}.$$
Điều này cũng có nghĩa là khi $x > K$, giá trị lớn nhất, bé nhất của hàm $\sin x$ nằm trong khoảng $(L - \frac{1}{4}, L + \frac{1}{4})$, nói cách khác biên độ dao động của hàm sin bé hơn $(L + \frac{1}{4}) - (L - \frac{1}{4}) = \frac{1}{2}$.
Mặt khác ta biết rằng hàm sin tuần hoàn trên $\mathbb{R}$ do vậy trong khoảng $(K, +\infty)$ biên độ dao động của nó phải bằng 2 (từ -1 đến +1). Vậy giới hạn $\lim_{x\to+\infty}\sin x$ không tồn tại.

5. Bạn đọc dễ dàng chứng minh $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}$ không tồn tại, song tồn tại giới hạn một phía
$$\lim_{x\to 0+}\frac{1}{x} = +\infty, \quad \lim_{x\to 0+}\frac{1}{x} = -\infty.$$
Các giới hạn một phía đó bằng $+\infty, -\infty$.

Định lí 2.2.2 *Nếu hàm $f : D \to \mathbb{R}$, khi $x \to x_0$ có giới hạn $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$, khi đó giới hạn của hàm là duy nhất.*

Chứng minh. Thật vậy giả thiết tiếp $\lim_{x\to x_0} f(x) = L'$, với $L \neq L'$. Chọn $\epsilon > 0$ sao cho $U_\epsilon(L) \cap U_\epsilon(L') = \emptyset$ (chẳng hạn $\epsilon = \frac{|L-L'|}{2}$). Khi đó tồn tại $\delta = \delta(\epsilon) > 0$, sao cho với mọi $x \in U_\delta(x_0), x \neq x_0$ hay $x_0 < |x| < \epsilon$ ta có
$$f(x) \in U_\epsilon(L) \quad \text{và} \quad f(x) \in U_\epsilon(L') \Leftrightarrow f(x) \in \emptyset.$$
Điều đó vô lí với giả thiết phản chứng. ∎

Định lí 2.2.3 (Nguyên lí chuyển đổi giới hạn giữa hàm và dãy)

Cho hàm số $f : D \to \mathbb{R}$, x_0 là điểm tụ của D (x_0 có thể là $+\infty$ hoặc $-\infty$). Điều kiện cần và đủ để tồn tại giới hạn

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

là với mọi dãy số $\{x_n\}_1^\infty$, $\quad (x_n \in D, x_n \neq x_0)$ mà $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$, dãy tương ứng $\{f(x_n)\}_1^\infty$ cũng tồn tại giới hạn.

Lưu ý rằng định lí chỉ yêu cầu các dãy $\{f(x_n)\}_1^\infty$ tồn tại giới hạn, *không đòi hỏi chúng có cùng giới hạn bằng nhau và bằng L.* Điều đó sẽ được chứng minh trong phần chứng minh điều kiện đủ.

Chứng minh Điều kiện cần. Giả sử $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$, $\{x_n\}_1^\infty$ là một dãy bất kì $(x_n \in D,\ x_n \neq x_0)$ và $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$. Ta phải chứng minh

$$\lim_{x \to x_0} f(x_n) = L.$$

Thật vậy với mỗi lân cận $U(L)$ tuỳ ý của L, tồn tại một lân cận $U(x_0)$ của x_0, sao cho khi $x \in U(x_0) \cap D$ và $x \neq x_0$

$$f(x) \in U(L).$$

Do $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$ nên tồn tại số tự nhiên n_0 để với $n > n_0$, $x_n \in U(x_0)$. Suy ra khi đó $f(x_n) \in U(L)$. Vậy

$$\lim_{x \to x_0} f(x_n) = L.$$

Điều kiện đủ. Giả sử với bất kì dãy số $x_n \to x_0$, $\quad (x_n \in D, x_n \neq x_0)$, dãy các giá trị hàm tương ứng $\{f(x_n)\}_1^\infty$ cũng tồn tại giới hạn

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = L.$$

Trước hết ta chứng minh với bất kì một dãy $x_n \to x_0$, $\quad (x_n \in D, x_n \neq x_0)$, giới hạn của dãy hàm tương ứng $\{f(x_n)\}_1^\infty$ đều là một số L như nhau. Chính xác hơn giả sử ta có 2 dãy $x_n' \to x_0$ và $x_n'' \to x_0$. Ta sẽ chứng minh 2 dãy $\{f(x_n')\}_1^\infty$ và $\{f(x_n'')\}_1^\infty$ có cùng giới hạn. Lập một dãy mới

$$x_1', x_1'', x_2', x_2'', x_3', x_3'', \ldots$$

(ta kí hiệu dãy này là $\{x_n\}_1^\infty$). Dễ dàng nhận thấy dãy $\{x_n\}_1^\infty$ cũng có giới hạn là x_0. Theo giả thiết khi đó $\lim\limits_{x\to\infty} f(x_n)$ cũng tồn tại (giới hạn bằng L). Hai dãy $\{f(x_n^{'})\}_1^\infty$ và $\{f(x_n^{''})\}_1^\infty$ thực chất là hai dãy con của dãy $\{f(x_n)\}_1^\infty$ nên cả ba dãy có cùng giới hạn như nhau (cùng bằng L).

Bây giờ ta sẽ chứng minh $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$ bằng phản chứng. (Giả thiết cả x_0 cả L đều hữu hạn. Các trường hợp khác được chứng minh tương tự.) Giả sử rằng $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ không tồn tại hoặc tồn tại song không bằng L. Khi đó có ít nhất một số $\epsilon > 0$ sao cho với mọi lân cận bán kính $\delta = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$ của x_0, tồn tại một số $x_n \in D$ và x_n thuộc lân cận đó: $0 < |x_n - x_0| < \frac{1}{n}$ để

$$|f(x_n) - L| \geq \epsilon.$$

Với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, ta thu được một dãy $\{x_n\}_1^\infty$, theo bất đẳng thức trên dãy hàm tương ứng $\{f(x_n)\}_1^\infty$ không có giới hạn hoặc tồn tại giới hạn $\neq L$. Mặt khác do $0 < |x_n - x_0| < \frac{1}{n}$, dãy $\{x_n\}_1^\infty$ hội tụ tới x_0, suy ra dãy hàm tương ứng $\{f(x_n)\}_1^\infty$ hội tụ. Mâu thuẫn với giả thiết phản chứng. ■

Nhận xét rằng sử dụng định lí này, nhiều tính chất về giới hạn hàm số có thể suy ra ngay từ giới hạn dãy số. Ngoài ra người ta còn sử dụng định lí 2.2.3 để chứng minh sự *không tồn tại giới hạn* của một số hàm.

Chẳng hạn trong ví dụ thứ 4 của ví dụ 2.2.2, để chứng minh không tồn tại giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty} \sin x$, xét hai dãy số cùng tiến tới $+\infty$

$$x_n^{'} = \frac{\pi}{2} + 2n\pi \to +\infty \quad \text{và} \quad x_n^{''} = n\pi \to +\infty.$$

Hiển nhiên 2 dãy hàm tương ứng

$$f(x_n^{'}) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = 1 \to 1 \quad \text{và} \quad f(x_n^{''}) = \sin(n\pi) = 0 \to 0$$

tiến tới 2 giới hạn khác nhau.

2.2.2 Tính chất và các phép toán về giới hạn hàm số

Các tính chất sau là hiển nhiên, bạn đọc tự chứng minh:

• *Nếu tồn tại giới hạn hữu hạn*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L$$

thì $f(x)$ bị chặn trong một lân cận nào đó của x_0.
• *Cho hai hàm $f, g : D \to \mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x) \leq g(x)$ với mọi $x \in D$. Giả sử x_0 là điểm tụ của D và tồn tại các giới hạn*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L_1, \quad \lim_{x \to x_0} g(x) = L_2.$$

Khi đó $L_1 \leq L_2$.

Đặc biệt nếu hàm f bị chặn trên D $(\exists M\ |f(x)| \leq M\ \forall x \in D)$ và tồn tại giới hạn $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$, khi đó $|L| \leq M$.

Từ nguyên lí chuyển đổi giới hạn giữa hàm và dãy và định lí **??** về các phép toán giữa các dãy có giới hạn, ta có định lí sau

Định lí 2.2.4 *Giả sử tồn tại các giới hạn trong cùng một quá trình $x \to x_0$*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \alpha \quad \lim_{x \to x_0} g(x) = \beta.$$

Khi đó

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) \pm g(x)) = \alpha \pm \beta; \quad \lim_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \alpha \cdot \beta; \quad \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\alpha}{\beta}$$

với điều kiện $\alpha \pm \beta; \alpha \cdot \beta$ và $\frac{\alpha}{\beta}$ có nghĩa như các quy ước đã nhắc tới trong nhận xét sau định lí **??**.

Chẳng hạn nếu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty \quad \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$, khi đó $\pm\infty \cdot 0$ thuộc dạng vô định, do vậy ta không có kết luận gì về giới hạn $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x))$.

Tương tự nếu

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty, \lim_{x \to x_0} g(x) = \pm\infty \quad \text{hoặc} \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$$

ta cũng không có kết luận gì về giới hạn

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Cũng từ nguyên lí chuyển đổi giới hạn giữa hàm và dãy và định lí **??**, **??** ta có hai định lí sau. Tương tự như giới hạn dãy số, chúng cũng mang tên tiêu chuẩn kẹp và tiêu chuẩn hàm đơn điệu về giới hạn hàm số.

Định lí 2.2.5 (Tiêu chuẩn kẹp) *Cho các hàm số $f, g, h : D \to \mathbb{R}$ (D là tập con của $\mathbb{R}$), x_0 là một điểm tụ của D. Giả thiết rằng tồn tại một lân cận $U(x_0)$ của x_0 sao cho với mọi $x \neq x_0$ trong lân cận đó*

$$f(x) \leq h(x) \leq g(x).$$

Nếu

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = L$$

khi đó tồn tại giới hạn $\lim\limits_{x \to x_0} h(x)$, đồng thời

$$\lim_{x \to x_0} h(x) = L.$$

Định lí 2.2.6 (Giới hạn hàm đơn điệu) *Cho hàm đơn điệu tăng $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, x_0 là một điểm bất kì thuộc khoảng (a, b). Khi đó tồn tại các giới hạn một phía*

$$\lim_{x \to x_0-} f(x) = \sup_{x \in (a, x_0)} f(x), \quad \lim_{x \to x_0+} f(x) = \lim_{x \in (x_0, b)} f(x).$$

Người ta thường kí hiệu $\lim\limits_{x \to x_0-} f(x) = f(x_0-)$ và $\lim\limits_{x \to x_0+} f(x) = f(x_0+)$. Hiển nhiên

$$f(x_0-) \leq f(x_0) \leq f(x_0+).$$

Trường hợp hàm $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ đơn điệu giảm

$$\lim_{x \to x_0-} f(x) = \inf_{x \in (a, x_0)} f(x), \quad \lim_{x \to x_0+} f(x) = \sup_{x \in (x_0, b)} f(x)$$

và $f(x_0-) \geq f(x_0) \geq f(x_0+)$.

Tương tự như định lí Cauchy về dãy số trong mục trước, ta có định lí về giới hạn hàm số

Định lí 2.2.7 (Cauchy) *Cho hàm $f : D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ là điểm tụ của D. Giới hạn $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ tồn tại và hữu hạn trong quá trình $x \to x_0$ khi và chỉ khi cho trước $\epsilon > 0$ tuỳ ý, tồn tại $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ sao cho với mọi $x, y \in D$ và*

$$0 < |x - x_0| < \delta, 0 < |y - x_0| < \delta \quad (x, y \neq x_0 \text{ và thuộc lân cận } U_\delta(x_0))$$

ta có

$$|f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

(Điều kiện đó còn được gọi là điều kiện Cauchy).

Chứng minh
Điều kiện cần. Giả sử $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$. Khi đó theo định nghĩa giới hạn với $\epsilon > 0$, tồn tại $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ sao cho với mọi $x \in D$ và $0 < |x - x_0| < \delta$ (cũng như mọi $y \in D$ và $0 < |y - x_0| < \delta$)

$$|f(x) - L| < \frac{\epsilon}{2}, |f(y) - L| < \frac{\epsilon}{2} \Rightarrow |f(x) - f(y)| < |f(x) - L| + |L - f(y)| < \epsilon.$$

Điều kiện đủ. Giả sử điều kiện Cauchy trong định lí được thoả mãn. Xét một dãy số bất kì trong D hội tụ tới $x_0 : x_n \to x_0$ $(x_n \neq x_0)$. Khi đó tồn tại số tự nhiên n_0 sao cho với mọi $n, m > n_0$

$$x_n \in U_\delta(x_0), x_m \in U_\delta(x_0) \Rightarrow |f(x_n) - f(x_m)| < \epsilon.$$

Nói cách khác dãy $\{f(x_n)\}$ là dãy Cauchy. Theo định lí Cauchy **??**, dãy $\{f(x_n)\}$ hội tụ. Lưu ý rằng $\{x_n\}$ là dãy tuỳ ý hội tụ tới x_0, theo nguyên lí chuyển đổi giới hạn giữa hàm và dãy (định lí 2.2.3), giới hạn $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ tồn tại và hữu hạn. Định lí đã được chứng minh. ■

Ví dụ 2.2.3

1. Biết rằng với $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}: \quad |\sin x| < |x| < |\text{tg}x|$, suy ra

$$1 > \frac{\sin x}{x} > \frac{\sin x}{\text{tg}x} = \cos x \quad \forall x \neq 0.$$

Trong quá trình $x \to 0, \quad \cos x \to 1$. Sử dụng định lí 2.2.5 ta được

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

2. $\lim\limits_{x\to a} \sin x = \sin a$. Thật vậy trong quá trình $x \to a$

$$0 \leq |\sin x - \sin a| = \left|2\cos\frac{x+a}{2}\sin\frac{x-a}{2}\right| \leq \left|2\sin\frac{x-a}{2}\right| \leq |x - a| \to 0.$$

3. Với $x \in \mathbb{R}$ bất kì, tìm giới hạn của dãy số

$$a = \lim_{n\to\infty} \overbrace{\sin\sin\cdots\sin}^{n \text{ lần}} x.$$

Đặt $a_n = \overbrace{\sin\sin\cdots\sin}^{n \text{ lần}} x$. Do $|\sin x| \leq 1$ nên ta có quyền giả thiết $|x| \leq 1$.

Xét trường hợp $x > 0$, khi đó từ bất đẳng thức $\sin x < x$ suy ra $a_n \geq 0$ và dãy $\{a_n\}$ đơn điệu giảm. Vậy tồn tại giới hạn $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, kéo theo $\lim\limits_{n\to\infty} \sin a_n = \sin a$. Mặt khác $a_{n+1} = \sin a_n$ suy ra

$$\sin a = a \quad \text{hay} \quad a = 0.$$

Trường hợp $-1 \leq x \leq 0$

$$\lim_{n\to\infty} \overbrace{\sin\sin\cdots\sin}^{n \text{ lần}} x = -\lim_{n\to\infty} \overbrace{\sin\sin\cdots\sin}^{n \text{ lần}}(-x) = 0.$$

4. Ta sẽ chứng minh các giới hạn

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Trước hết ta xét trường hợp $x \to +\infty$. Kí hiệu $n_x = [x]$ là phần nguyên của số thực x. Ta có các bất đẳng thức sau với mọi $x > 1$

$$\left(1+\frac{1}{n_x+1}\right)^{n_x} < \left(1+\frac{1}{x}\right)^x < \left(1+\frac{1}{n_x}\right)^{n_x+1}.$$

Sử dụng giới hạn đã biết trong mục trước $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$, do đó

$$\left(1+\frac{1}{n_x+1}\right)^{n_x} = \left(1+\frac{1}{n_x+1}\right)^{n_x+1} \cdot \left(1+\frac{1}{n_x+1}\right)^{-1} \to e\cdot 1 = e$$

$$\left(1+\frac{1}{n_x}\right)^{n_x+1} = \left(1+\frac{1}{n_x}\right)^{n_x} \cdot \left(1+\frac{1}{n_x}\right)^{1} \to e\cdot 1 = e \quad \text{khi } x \to +\infty$$

Áp dụng định lí 2.2.5 suy ra $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$. Tương tự

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{1}{x+1}\right)^{-x} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{-(x+1)}\right)^{-(x+1)} \cdot \left(1-\frac{1}{x+1}\right)\cdot 1 = e.$$

Sử dụng cả hai kết quả này, đặt $t = \frac{1}{x}$ ta được

$$\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}} = e.$$

2.2.3 Vô cùng bé và vô cùng lớn

Định nghĩa 2.2.4 *Cho hàm $\alpha : D \to \mathbb{R}$, x_0 là điểm tụ của D (x_0 có thể là $+\infty$ hoặc $-\infty$). Ta nói $\alpha : D \to \mathbb{R}$ là vô cùng bé (VCB) trong quá trình $x \to x_0$ nếu*

$$\lim_{x \to x_0} \alpha(x) = 0.$$

Hàm $A : D \to \mathbb{R}$ là vô cùng lớn (VCL) trong quá trình $x \to x_0$ nếu

$$\lim_{x \to x_0} |A(x)| = +\infty.$$

Nhận xét rằng nếu hàm $f(x)$ có giới hạn hữu hạn L trong quá trình $x \to x_0$, khi đó $\alpha(x) = f(x) - L$ là vô cùng bé trong quá trình đó

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \;\Leftrightarrow\; \lim_{x \to x_0} (f(x) - L) = 0.$$

Từ nguyên lí chuyển đổi giới hạn giữa hàm và dãy và định lí **??** ta có định lí sau

Định lí 2.2.8 *Cho hai hàm $\alpha, \beta : D \to \mathbb{R}$, trong đó $\alpha(x)$ là vô cùng bé (VCB) trong quá trình $x \to x_0$, $\beta(x)$ là hàm bị chặn trên D. Khi đó tích $\alpha \cdot \beta$ cũng là VCB trong quá trình $x \to x_0$.*

Định nghĩa 2.2.5 *Hai VCB α, β trong cùng một quá trình $x \to x_0$ được gọi là tương đương, kí hiệu $\alpha \sim \beta$, nếu*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1.$$

VCB α được gọi là VCB cấp cao hơn VCB β trong quá trình $x \to x_0$, kí hiệu $\alpha = o(\beta)$, nếu

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0.$$

Định lí 2.2.9

1. Cho $\alpha : D \to \mathbb{R}$ là VCB trong quá trình $x \to x_0$ và $\alpha(x) \neq 0$ với mọi $x \in D$. Khi đó

$$\frac{1}{\alpha(x)} \quad \text{là VCL trong quá trình} \quad x \to x_0.$$

Ngược lại nếu $A(x)$ là VCL trong quá trình $x \to x_0$, khi đó

$$\frac{1}{A(x)} \quad \text{là VCB trong quá trình đó.}$$

2. Nếu α là VCB và β là VCB cấp cao hơn α trong quá trình $x \to x_0$. Khi đó $\alpha + \beta$ là VCB tương đương với VCB α trong quá trình $x \to x_0$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x) + \beta(x)}{\alpha(x)} = 1.$$

3. α, β là hai VCB (VCL) trong quá trình $x \to x_0$. Giả thiết rằng cũng trong quá trình đó α tương đương với $\overline{\alpha}$ và β tương đương với $\overline{\beta}$. Khi đó

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{\overline{\alpha}(x)}{\overline{\beta}(x)}.$$

Chứng minh.
1. và 2. được suy ngay từ định nghĩa về VCB và VCL. Đẳng thức

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\overline{\alpha}(x)} \cdot \frac{\overline{\alpha}(x)}{\overline{\beta}(x)} \cdot \frac{\overline{\beta}(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{\overline{\alpha}(x)}{\overline{\beta}(x)}$$

chứng minh phần 3. còn lại của định lí. ■

Ví dụ 2.2.4

1. Ta đã biết một trong các giới hạn quan trọng vừa chứng minh ở trên

   $$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

   Điều này cũng có nghĩa là trong quá trình $x \to 0$ hai VCB x và $\sin x$ tương đương: $x \sim \sin x$.

2. Một giới hạn quan trọng khác đã biết ở cuối mục trước

   $$\lim_{t \to 0} (1 + t)^{\frac{1}{t}} = e.$$

   Logarit cơ số e cả hai vế ta được

   $$\lim_{t \to 0} \frac{\ln(1 + t)}{t} = 1.$$

   Vậy $\ln(1 + t)$ và t cũng là hai VCB tương đương trong quá trình $t \to 0$.

3. Từ giới hạn $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t} = 1$, đặt $x = \ln(1+t)$ suy ra

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Nói cách khác trong quá trình $x \to 0$ hai VCB $e^x - 1$ và x tương đương.

4. Chúng ta có các VCB sau tương đương trong quá trình $x \to 0$

$$x \sim \sin x \sim \arcsin x \sim \operatorname{tg} x \sim \operatorname{arctg} x \sim \ln(x+1) \sim e^x - 1.$$

5. Ứng dụng các VCB tương đương, ta dễ dàng tính các giới hạn sau

• $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(x^2-3x+3)}{e^{x-1}-1} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln\big(1+(x-1)(x-2)\big)}{e^{x-1}-1} =$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)} = \lim_{x\to 1}(x-2) = -1.$$

• $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin(x^2+2x^3)}{1-\cos 2x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+2x^3}{2\sin^2 x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+2x^3}{2x^2} = \dfrac{1}{2}.$

2.3 Hàm liên tục

2.3.1 Khái niệm về hàm liên tục

Định nghĩa 2.3.1 *Cho hàm $f : D \to \mathbb{R}$, trong đó $D \subset \mathbb{R}$. Ta nói hàm f liên tục tại $x_0 \in D$ nếu cho trước một số $\epsilon > 0$ tuỳ ý, tồn tại số $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ (δ phụ thuộc vào ϵ) sao cho với mọi $x \in D$ và $|x - x_0| < \delta$ ta có*

$$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon.$$

Trường hợp f không liên tục tại x_0, ta nói hàm gián đoạn tại đó. Nếu f liên tục tại mọi điểm $x \in D$, ta nói hàm f liên tục trên tập D.

Định nghĩa trên tương đương với định nghĩa sau

Định nghĩa 2.3.2 *Cho hàm $f : D \to \mathbb{R}$, trong đó $D \subset \mathbb{R}$. Ta nói hàm f liên tục tại $x_0 \in D$ nếu cho trước một lân cận bất kì $V_\epsilon(f(x_0))$ của $f(x_0)$, tồn tại một lân cận $U_\delta(x_0)$ sao cho với mọi $x \in D \cap U_\delta(x_0)$ ta có*

$$f(x) \in V_\epsilon(f(x_0)) \quad \textit{hay} \quad f(D \cap U_\delta(x_0)) \subset V_\epsilon(f(x_0)).$$

Khi $x_0 \in D$ là điểm cô lập của tập D hiển nhiên f liên tục tại x_0. Trường hợp $x_0 \in D$ là điểm tụ của D, định nghĩa trên cũng có nghĩa là giới hạn bằng giá trị thay thế của hàm tại x_0

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Định nghĩa 2.3.3 (Hàm liên tục trái, liên tục phải)
Hàm f liên tục trái tại $x_0 \in D$ nếu cho trước một lân cận bất kì V của $f(x_0)$, tồn tại một lân cận trái $U = (x_0 - \delta, x_0]$ của x_0 sao cho với mọi $x \in D \cap U$ ta có

$$f(D \cap U) \subset V.$$

Hàm f liên tục phải tại $x_0 \in D$ nếu cho trước một lân cận bất kì V của $f(x_0)$, tồn tại một lân cận phải $U = [x_0, x_0 + \delta)$ của x_0 sao cho với mọi $x \in D \cap U$ ta có

$$f(D \cap U) \subset V.$$

Chú ý hàm $f(x)$ được gọi là liên tục trên đoạn $[a, b]$ nếu hàm xác định trên đó, liên tục tại mọi điểm trong khoảng mở (a, b) và hàm f liên tục phải tại đầu mút $x = a$, liên tục trái tại đầu mút $x = b$ của đoạn đó.

Nhờ khái niệm giới hạn phải, giới hạn trái ta có kết quả sau

Định lí 2.3.1 *Nếu $x_0 \in D$ là điểm tụ của D, điều kiện cần và đủ để f liên tục tại x_0 là tồn tại giới hạn trái, giới hạn phải tại x_0, các giới hạn đó bằng nhau và cùng bằng $f(x_0)$*

$$\lim_{x \to x_0+} f(x) = \lim_{x \to x_0-} f(x) = f(x_0).$$

Nói một cách ngắn gọn điều kiện cần và đủ để f liên tục tại x_0 là nó liên tục trái, liên tục phải tại $x_0 \in D$.

Định nghĩa 2.3.4 *Ta nói hàm f gián đoạn loại một tại $x_0 \in D$ nếu f gián đoạn (không liên tục) tại x_0, tồn tại các giới hạn trái, giới hạn phải*

$$\lim_{x \to x_0+} f(x) = f(x_0-), \quad \lim_{x \to x_0-} f(x) = f(x_0+)$$

và các giới hạn đó hữu hạn. Khi đó $f(x_0+) - f(x_0-)$ được gọi là bước nhảy của f tại điểm x_0.

Trường hợp f gián đoạn tại x_0 và không gián đoạn loại một tại đó, ta nói f gián đoạn loại hai tại x_0.

Định lí 2.3.2 *Hàm đơn điệu trên khoảng (a, b) chỉ có thể có điểm gián đoạn loại một.*

Chứng minh

Giả thiết f là hàm đơn điệu trên khoảng (a, b). Suy ra tồn tại các giới hạn trái, giới hạn phải $f(x_0-)$, $f(x_0+)$ và các giới hạn đó hữu hạn. Vậy các điểm gián đoạn của hàm đơn điệu chỉ có thể là gián đoạn loại một. ■

Nhận xét rằng cũng từ chứng minh của định lí trên suy ra hàm đơn điệu trên một khoảng có không quá đếm được các điểm gián đoạn.

Ví dụ 2.3.1

1. Trong chương trước chúng ta đã chứng minh $\lim\limits_{x\to x_0} \sin x = \sin x_0$, với mọi $x_0 \in \mathbb{R}$. Vậy hàm $\sin x$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

2. Hàm $f(x) = [x]$ (phần nguyên của x) gián đoạn loại một tại tất cả các điểm là các số nguyên và liên tục trên tập $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

3. Hàm

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & \text{nếu } x \neq 0 \\ 0 & \text{nếu } x = 0 \end{cases} \quad \text{gián đoạn loại hai tại } x = 0.$$

4. Hàm

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & \text{nếu } x \neq 0 \\ 0 & \text{nếu } x = 0 \end{cases} \quad \text{gián đoạn loại hai tại } x = 0.$$

2.3.2 Các tính chất của hàm liên tục

Định lí 2.3.3 *Cho $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ là hàm liên tục trên đoạn $[a, b]$, $(a, b \in \mathbb{R})$. Khi đó hàm f đạt giá trị lớn nhất và nhỏ nhất trên $[a, b]$. Nói cách khác tồn tại $u, v \in [a, b]$ sao cho*

$$\max_{x\in[a,b]} f(x) = f(u) \quad \text{và} \quad \min_{x\in[a,b]} f(x) = f(v).$$

Chứng minh

Trước hết ta chứng minh hàm f bị chặn trên đoạn $[a, b]$. Ta sẽ chứng minh khẳng định này bằng phản chứng. Thật vậy giả sử ngược lại, hàm f không bị chặn trên đoạn $[a, b]$. Khi đó với mỗi $n \in \mathbb{N}^*$ tồn tại $x_n \in [a, b]$ sao cho $|f(x_n)| > n$ (hay $\lim\limits_{n\to\infty} |f(x_n)| = +\infty$). Dãy $\{x_n\}_1^\infty \subset [a, b]$ là dãy bị chặn, theo định lí Bolzano **??** tồn tại một dãy con $\{x_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ hội tụ tới $x_0 \in [a, b]$ ($\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0$). Mặt khác f là hàm liên tục trên $[a, b]$ nên cũng liên tục tại $x_0 \in [a, b]$. Vậy

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x_0),$$

mâu thuẫn với giả thiết phản chứng $\lim\limits_{n\to\infty} |f(x_n)| = +\infty$.

Kí hiệu $M = \sup_{x\in[a,b]} f(x),\ m = \inf_{x\in[a,b]} f(x)$. Do hàm f bị chặn trên đoạn $[a, b]$ nên $m, M \in \mathbb{R}$. Ta sẽ chứng minh M là giá trị lớn nhất và m là giá trị nhỏ nhất của hàm f trên $[a, b]$. Thật vậy từ định nghĩa về cận trên đúng, tồn tại một dãy số $\{x_n\}_1^\infty \subset [a, b]$ thỏa mãn

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = M$$

Cũng theo định lí Bolzano **??**, dãy đó chứa một dãy con $\{x_{n_k}\}_1^\infty$ hội tụ tới $u \in [a, b]$. Khi đó do f liên tục tại $u \in [a, b]$

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(u) = M.$$

Hoàn toàn tương tự, hàm đạt giá trị nhỏ nhất tại $v \in [a, b],\ f(v) = m$. ■

Nhận xét rằng, bằng cách lập luận tương tự, ta có thể mở rộng định lí cho trường hợp hàm $f : D \to \mathbb{R}$ liên tục trên tập đóng và bị chặn D. Khi đó hàm f đạt giá trị lớn nhất và nhỏ nhất trên D.

Định lí 2.3.4 *Cho $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ là hàm liên tục trên đoạn $[a, b]$, $(a, b \in \mathbb{R})$. Giả thiết giá trị hàm f tại các đầu mút $x = a$ và $x = b$ trái dấu nhau*

$$f(a) \cdot f(b) < 0.$$

Khi đó tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho $f(c) = 0$.

Chứng minh

Không làm mất tính tổng quát, giả sử $f(a) < 0$. Kí hiệu H là tập

$$H = \{x \in [a, b] \mid f(x) < 0\}.$$

Hiển nhiên $H \neq \emptyset$ (do $a \in H$). Gọi $c = \sup H$, $c \in [a, b]$, ta sẽ chứng minh $f(c) = 0$. Thật vậy, do f liên tục trên $[a, b]$ và $f(x) < 0$ với mọi $x \in H$ suy ra $f(c) \leq 0$.

Mặt khác ta thấy $f(c) < 0$ không thể xảy ra. Giả sử ngược lại $f(c) < 0$, khi đó tồn tại một lân cận $U(c)$ của c sao cho với mọi $x \in U(c)$

$$f(x) < c,$$

điều đó mâu thuẫn với định nghĩa $c = \sup H$. Vậy $f(c) = 0$, đ.p.c.m. ■

Một cách chứng minh khác định lí trên: chia đôi đoạn $[a, b]$ thành 2 đoạn nhỏ có độ dài bằng nhau, gọi $[a_1, b_1]$ là một trong hai đoạn nhỏ đó sao cho giá trị hàm f tại các đầu mút $x = a_1$ và $x = b_1$ trái dấu nhau.
Sau đó tiếp tục chia đôi đoạn $[a_1, b_1]$ thành 2 đoạn nhỏ có độ dài bằng nhau, gọi $[a_2, b_2]$ là một trong hai đoạn nhỏ đó sao cho giá trị hàm f tại các đầu mút $x = a_2$ và $x = b_2$ trái dấu nhau.
Cứ tiếp tục qúa trình chia đôi đó, ta được một dãy các đoạn thẳng lồng nhau và thắt lại $\{[a_n, b_n]\}$. Gọi c là điểm chung duy nhất của dãy các đoạn thẳng đó. Hiển nhiên $f(c) = 0$.

Cách chứng minh này chỉ ra một thuật toán đơn giản hữu hiệu để tìm điểm c thỏa mãn yêu cầu $f(c) = 0$ của định lí.

Hệ quả 2.3.1 *Cho hàm $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ liên tục trên đoạn $[a, b]$. Kí hiệu*

$$M = \max_{x \in [a,b]} f(x), \quad \text{và} \quad m = \min_{x \in [a,b]} f(x).$$

Gọi L là giá trị trung gian bất kì thuộc khoảng (m, M). Khi đó tồn tại $c \in [a, b]$ sao cho

$$f(c) = L.$$

Chứng minh
Giả sử hàm f đạt giá trị lớn nhất và nhỏ nhất tại $x_1, x_2 \in [a, b]$ (không làm mất tính tổng quát giả thiết $x_1 < x_2$)

$$\max_{x \in [a,b]} f(x) = f(x_1), \quad \min_{x \in [a,b]} f(x) = f(x_2).$$

Xét hàm $g : [x_1, x_2] \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - L$. Hiển nhiên hàm g thoả mãn định lí 2.3.4

$$g(x_1) \cdot g(x_2) < 0,$$

suy ra tồn tại $c \in [a, b]$ sao cho $g(c) = 0$ hay $f(c) = L$ đ.p.c.m. ■

Hệ quả trên khẳng định tập ảnh của hàm liên tục trên đoạn $[a, b]$ lấp đầy đoạn $[m, M]$. Từ hệ quả này ta có thể dễ dàng chứng minh nếu f là hàm liên tục trên khoảng mở (a, b), kí hiệu

$$\alpha = \inf_{x\in(a,b)} f(x),\ \ \beta = \sup_{x\in(a,b)} f(x),$$

khi đó tập ảnh của f chỉ có thể là một trong 4 dạng (*ta gọi chúng là các tập liên thông trên* $\mathbb{R}$)

$$(\alpha, \beta),\ (\alpha, \beta],\ [\alpha, \beta),\ [\alpha, \beta].$$

2.3.3 Các phép toán trên các hàm liên tục

Từ định lí 2.2.4 về các phép toán giữa các hàm có giới hạn ta có định lí sau

Định lí 2.3.5 *Cho $f, g : D \to \mathbb{R}$ là các hàm liên tục tại cùng một điểm $x_0 \in D$. Khi đó các hàm $f + g, f - g, \alpha f, f.g$ cũng liên tục tại x_0. Ngoài ra nếu $g(x_0) \neq 0$, khi đó $\dfrac{f}{g}$ cũng liên tục tại x_0.*

Định lí sau liên quan tới phép tính hợp thành giữa hai hàm

Định lí 2.3.6 *Nếu $f : A \to B$ liên tục tại $x_0 \in A$ và $g : B \to \mathbb{R}$ liên tục tại $f(x_0) \in B \ \ (A, B \subset \mathbb{R})$, khi đó hợp của hai hàm $g \circ f$ cũng liên tục tại x_0.*

Chứng minh

Ta phải chứng minh $\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = g(f(x_0))$. Áp dụng định lí 2.2.3 (nguyên lí chuyển đổi giới hạn giữa hàm và dãy) nếu $\{x_n\}_1^\infty$ là một dãy bất kì trong A hội tụ tới x_0, khi đó do tính liên tục $f(x_n) \to f(x_0)$ khi $n \to \infty$ và $g(f(x_n)) \to g(f(x_0))$ khi $n \to \infty$, suy ra điều phải chứng minh. ■

Định lí 2.3.7 *Cho hàm $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ liên tục trên khoảng mở (a, b), điều kiện cần và đủ để tồn tại hàm số ngược f^{-1} là hàm f đơn điệu thực sự trên (a, b). Khi đó miền giá trị của f là một khoảng (α, β) nào đó, đồng thời hàm ngược f^{-1} cũng liên tục trên khoảng đó.*

Ta có nhận xét rằng định lí vẫn đúng trong trường hợp (a, b) là khoảng vô hạn.

Chứng minh

Giả sử f là hàm đơn điệu tăng thực sự trên (a, b). Kí hiệu

$$\alpha = \inf_{x \in (a,b)} f(x), \ \beta = \sup_{x \in (a,b)} f(x).$$

Do tính liên tục của hàm f, hiển nhiên miền giá trị (hay tập ảnh) $R(f)$ là khoảng (α, β). Áp dụng định lí 2.2.3 về nguyên lí chuyển đổi giới hạn giữa hàm và dãy, suy ra f^{-1} liên tục trên (α, β). (*Lập luận tương tự cho trường hợp f là hàm đơn điệu giảm thực sự trên* (a, b)).

Ngược lại giả thiết hàm f liên tục trên khoảng mở (a, b) và tồn tại hàm ngược f^{-1} (f là song ánh). Ta sẽ chứng minh hàm f đơn điệu thực sự trên (a, b).

Thật vậy giả sử $f(x_1) < f(x_2)$ và $f(x_2) > f(x_3)$ với $x_1 < x_2 < x_3$. Chọn $L \in \big(f(x_1), f(x_2)\big) \cap \big(f(x_3), f(x_2)\big)$, áp dụng hệ quả 2.1, khi đó tồn tại $c_1 \in (x_1, x_2)$ và $c_2 \in (x_2, x_3)$ sao cho $f(c_1) = f(c_2) = L$, vô lí với giả thiết f là song ánh. ■

Trong các ví dụ đã trình bày ở mục giới hạn hàm số cũng như trong phần hàm liên tục, ta đã biết các hàm sơ cấp cơ bản: hàm lũy thừa, hàm mũ, hàm logarit, hàm lượng giác, hàm hyperbolic và các hàm ngược là các hàm liên tục tại mọi điểm thuộc tập xác định. Áp dụng các định lí 2.3.5, 2.3.6, 2.3.7 vừa nêu trong mục này ta có định lí sau

Định lí 2.3.8 *Các hàm sơ cấp liên tục tại tất cả các điểm thuộc miền xác định của nó.*

2.3.4 Hàm số liên tục đều

Định nghĩa 2.3.5 *Cho hàm $f : D \to \mathbb{R}$, trong đó $D \subset \mathbb{R}$. Ta nói hàm f liên tục đều trên tập D nếu cho trước một số $\epsilon > 0$ tuỳ ý, tồn tại số $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ (δ phụ thuộc vào ϵ) sao cho với mọi $x, y \in D$ và $|x - y| < \delta$ ta có*

$$|f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

Theo định nghĩa trên hiển nhiên nếu f liên tục đều trên D, khi đó f liên tục tại mọi điểm $x \in D$.

Ví dụ 2.3.2

1. Các hàm
$$f(x) = x, \quad g(x) = \sin x$$
liên tục đều trên toàn bộ trục số (trên $\mathbb{R}$). Thật vậy với mọi $\epsilon > 0$ và mọi cặp $x, y \in \mathbb{R}$ sao cho $|x - y| < \epsilon$ ta có
$$|g(x) - g(y)| = |\sin x - \sin y| = 2\left|\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}\right| \leq |x - y| < \epsilon.$$

2. Hàm $f(x) = \frac{1}{x}$ liên tục tại mọi điểm thuộc khoảng $I = (0, 1)$, tuy nhiên nó không liên tục đều trên I.

   Thật vậy khi x và y "rất gần" với 0, chẳng hạn chọn
$$x_n = \frac{1}{n}, \quad y_n = \frac{1}{2n}$$
khi n là số tự nhiên đủ lớn, $x_n - y_n$ nhỏ tuỳ ý, song
$$|f(x_n) - f(y_n)| = |n - 2n| = n$$
không nhỏ theo ý muốn mà ngược lại $|f(x_n) - f(y_n)|$ lớn một cách tuỳ ý.

Định lí 2.3.9 *$f : D \to \mathbb{R}$ là hàm liên tục đều trên tập bị chặn D, khi đó f cũng bị chặn trên D.*

Chứng minh Từ giả thiết hàm f liên tục đều trên D, tồn tại số $\delta > 0$ sao cho với mọi $x, y \in D$ và $|x - y| < \delta$ ta có $|f(x) - f(y)| < 1$. Như vậy *hàm f bị chặn trên một đoạn bất kì có độ dài không vượt quá δ.*

Do D là tập bị chặn, tập D được chứa trong một đoạn $[a, b]$ nào đó. Mặt khác đoạn $[a, b]$ luôn luôn có thể được chia thành hợp của hữu hạn các đoạn nhỏ I_k, mỗi đoạn có độ dài không vượt quá δ. Hàm f bị chặn trên từng đoạn nhỏ I_k, suy ra nó cũng bị chặn trên toàn bộ tập D. ■

Nhận xét rằng một hàm liên tục đều trên một tập không bị chặn cũng có thể là hàm không bị chặn trên đó. Chẳng hạn hàm $f(x) = x$ là hàm liên tục đều trên $\mathbb{R}$ và cũng không bị chặn trên $\mathbb{R}$.

Định lí 2.3.10 *Cho $D \subset \mathbb{R}$ là tập đóng và bị chặn, $f : D \to \mathbb{R}$ là hàm liên tục trên D, khi đó f liên tục đều trên D.*

Chứng minh

Ta chứng minh bằng phản chứng. Thật vậy giả sử tồn tại một số $\epsilon > 0$ sao cho với mọi $\delta_n = \frac{1}{n}$ (n là số tự nhiên) luôn tồn tại một cặp số $x_n, y_n \in D : |x_n - y_n| < \delta_n$ để

$$|f(x_n) - f(y_n)| \geq \epsilon$$

Do D đóng và bị chặn nên từ dãy $\{x_n\}_1^\infty$, theo định lí Bolzano **??** tồn tại một dãy con $\{x_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ hội tụ tới $a \in D$ ($\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = a$). Đồng thời từ giả thiết phản chứng

$$|x_n - y_n| < \delta_n \to 0,$$

dãy con tương ứng $\{y_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ cũng hội tụ tới a. Mặt khác f là hàm liên tục trên D nên cũng liên tục tại $a \in D$. Vậy

$$\lim_{k\to\infty} (f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})) = f(a) - f(a) = 0,$$

mâu thuẫn với bất đẳng thức trên $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \epsilon$ với mọi n. ■

Từ định lí trên suy ra *nếu hàm f liên tục trên đoạn $[a, b]$, khi đó f liên tục đều trên đó.*