

§4 – Một số bài toán cân bằng tĩnh định

3. Bài toán hệ vật phẳng cân bằng.

Trong kỹ thuật, ta thường gặp bài toán cân bằng của các cơ cấu cơ khí, kết cấu công trình,... Nó là tập hợp của nhiều vật rắn liên kết với nhau và cần xét cân bằng của chúng cùng một lúc. Đó là bài toán cân bằng hệ vật.



Chương 3: HỆ LỰC PHẪNG VÀ ĐIỀU KIỆN CÂN BẰNG HỆ LỰC PHẪNG.

-Khi khảo sát cân bằng của hệ vật ấy ta có bài toán cân bằng hệ vật.

-Khi hệ vật cân bằng thì từng vật trong hệ cũng cân bằng và ngược lại.

A, Bài toán : Cho hệ gồm n vật phẳng S_1, S_2, \dots, S_n liên kết với nhau. Chịu tác dụng của các lực đã cho $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_m$. Hãy tìm điều kiện để hệ vật cân bằng, xác định các phản lực liên kết của các vật gây liên kết tác dụng lên vật, lực tương tác giữa các vật thuộc hệ

B, Phân loại lực tác dụng

+Ngoại lực (\vec{F}_e) là những lực do các vật bên ngoài không thuộc hệ tác dụng lên các vật trong hệ.

+Nội lực (\vec{F}_i) là những vật trong hệ tác động lên nhau. Nó thỏa mãn tiên đề 4 (tác dụng và phản lực tác dụng).

C, Cách giải bài toán

C1, Phương pháp tách vật: Tách rời riêng rẽ từng vật và xét cân bằng từng vật. Mỗi vật phẳng riêng rẽ nói chung có 3 phương trình cân bằng. Như vậy, với n vật ta sẽ có $3n$ phương trình độc lập, đủ để giải bài toán.

xác định $3n$ ẩn là các phản lực liên kết và lực tương tác giữa các vật

Chương 3: HỆ LỰC PHẪNG VÀ ĐIỀU KIỆN CÂN BẰNG HỆ LỰC PHẪNG.

C, Cách giải bài toán

C2, Phương pháp hóa rắn:

- Coi toàn hệ là 1 vật rắn và chịu tác dụng của ngoại lực và lập thành 3 phương trình cân bằng.
- Nếu số phương trình chưa đủ thì ta có thể xét thêm tối đa $(n-1)$ vật nữa để có thêm $3(n-1)$ phương trình. Vậy, số phương trình độc lập tối đa cũng chỉ có $3n$ phương trình.
- Ưu điểm:** của phương pháp này là cho phép thiết lập số phương trình cân bằng tĩnh học độc lập đúng bằng số ẩn số cần tìm. Do đó số lượng phương trình cân bằng tĩnh học để giải bài toán sẽ giảm xuống, giảm được khối lượng tính toán khi giải bài toán.

Hệ có $3n$ ẩn nhưng yêu cầu xác định m ẩn ($m < 3n$) thì sử dụng PP hóa rắn để thiết lập đủ m PTCB để đủ xác định các ẩn cần tìm

d. Một số ví dụ

Chương 3: HỆ LỰC PHẪNG VÀ ĐIỀU KIỆN CÂN BẰNG HỆ LỰC PHẪNG.

Ví dụ 1

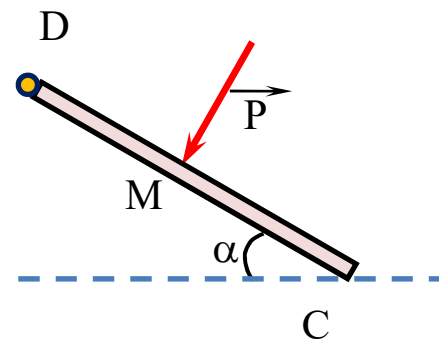
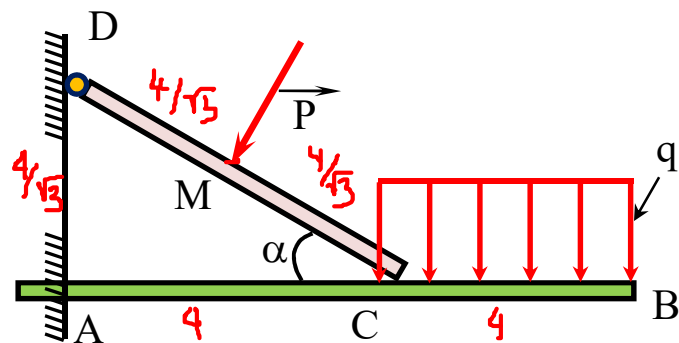
Cho cơ hệ gồm dầm nằm ngang AB và thanh CD nghiêng góc $\alpha = 30^\circ$ so với phương ngang, trọng lượng của dầm và thanh không đáng kể. Đầu C của thanh CD tựa lên dầm AB nằm ngang, thanh CD được liên kết bằng bản lề trụ với tường thẳng đứng, dầm AB liên kết ngàm với tường như hình vẽ. Lực $P = 10\text{kN}$ tác dụng tại điểm M trên thanh CD theo phương vuông góc với trục thanh CD. Trên đoạn CB tác dụng lực phân bố đều $q = 5\text{kN/m}$. Cho biết $CM = MD$, $AC = CB = 4\text{m}$.

Hãy xác định phản lực liên kết tại A, C, D.

Bài giải

Phương pháp tách vật: tách riêng từng vật để xét trạng thái cân bằng

+) Xét TTCB thanh CD



Chương 3: HỆ LỰC PHẪNG VÀ ĐIỀU KIỆN CÂN BẰNG HỆ LỰC PHẪNG.

Ví dụ 1

Bài giải

Phương pháp tách vật: tách riêng từng vật để xét trạng thái cân bằng

+) Xét TTCB thanh CD

+Ngoại lực: \vec{P}

-Hệ lực tác dụng lên vật:

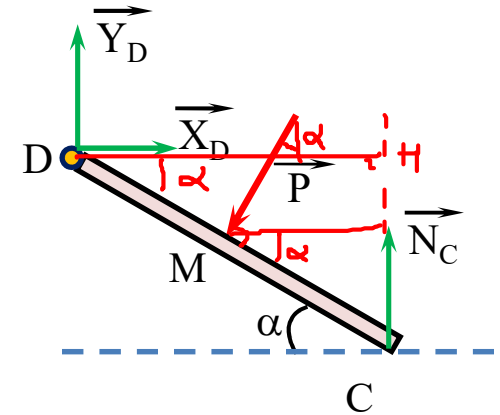
$$(\vec{P}, \vec{X}_D, \vec{Y}_D, \vec{N}_C) \sim 0$$

+Phản lực LK: $\vec{X}_D, \vec{Y}_D, \vec{N}_C$

-Ta có 3 phương trình cân bằng hệ lực phẳng:

$$\begin{cases} \sum X_k = X_D - P \cdot \sin \alpha = 0 \\ \sum Y_k = Y_D + N_C - P \cdot \cos \alpha = 0 \\ \sum m_D(\vec{F}_k) = N_C \cdot DC \cdot \cos \alpha - P \cdot DM = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_D = P \cdot \sin \alpha \\ Y_D = \frac{P \cdot (2 \cos^2 \alpha - 1)}{2 \cdot \cos \alpha} \\ N_C = \frac{P}{2 \cdot \cos \alpha} \end{cases} \quad \begin{cases} X_D = 5 (kN) \\ Y_D = 5/\sqrt{3} (kN) \\ N_C = 10/\sqrt{3} (kN) \end{cases}$$



+) Xét TTCB thanh AB

Chương 3: HỆ LỰC PHẪNG VÀ ĐIỀU KIỆN CÂN BẰNG HỆ LỰC PHẪNG.

+)Xét TTCB thanh AB

-Hệ lực tác dụng lên vật:

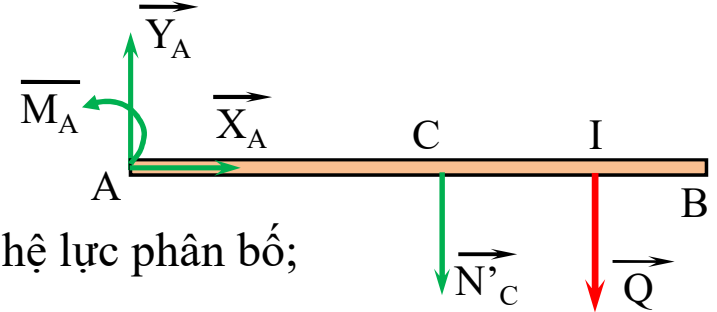
+Ngoại lực: \vec{Q}

-Thu gọn hệ lực phân bố đều q ta được hợp lực \vec{Q}

+Phương, chiều cùng với hệ lực phân bố;

+Độ lớn $Q = q.CB = 5 \times 4 = 20 \text{ kN}$

+Điểm đặt tại I có $CI = CB/2 = 4/2 = 2 \text{ m}$.



$$N'_C = N_C = 10/\sqrt{3} \text{ (kN)}$$

+Phản lực LK: $\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{N}'_C, M_A$

$$(\vec{Q}, \vec{N}'_C, \vec{X}_A, \vec{Y}_A, M_A) \sim 0$$

-Ta có 3 phương trình cân bằng hệ lực phẳng:

$$\begin{cases} \sum X_k = X_A = 0 \\ \sum Y_k = Y_A - \underline{N'_C} - Q = 0 \\ \sum m_A(\vec{F}_k) = M_A - N'_C.AC - Q.AI = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_A = 0 \\ Y_A = N_C + Q \\ M_A = N_C.AC + Q.AI \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_A = 0; \\ Y_A = \frac{10.(1 + 2.\sqrt{3})}{\sqrt{3}} \text{ kN}; \\ M_A = \frac{40.(1 + 3.\sqrt{3})}{\sqrt{3}} \text{ kN.m} \end{cases}$$

Chương 3: HỆ LỰC PHẪNG VÀ ĐIỀU KIỆN CÂN BẰNG HỆ LỰC PHẪNG.

Ví dụ 2

Cho kết cấu hệ thanh gồm ba thanh AB, DC và EF (Bỏ qua trọng lượng của các thanh). Các thanh liên kết với nhau bằng bản lề trụ tại C và E. Đầu D và F của thanh CD và EF liên kết gối cố định. Đầu A của thanh AB liên kết gối di động. Cho biết $AC = CB = a$, $CE = ED$, góc BAD bằng 45° .

Tác dụng lên thanh AB lực P đặt tại đầu B theo phương ngang. Tác dụng lên thanh DC ngẫu lực $M = 3Pa/\sqrt{2}$. Hãy xác định phản lực tại A, D và ứng lực trong thanh EF theo P.

Bài giải

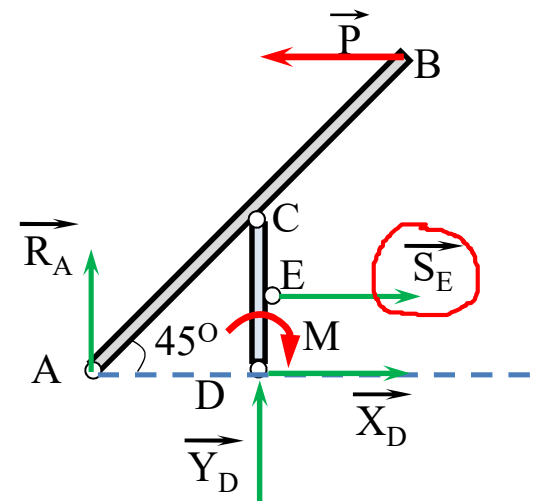
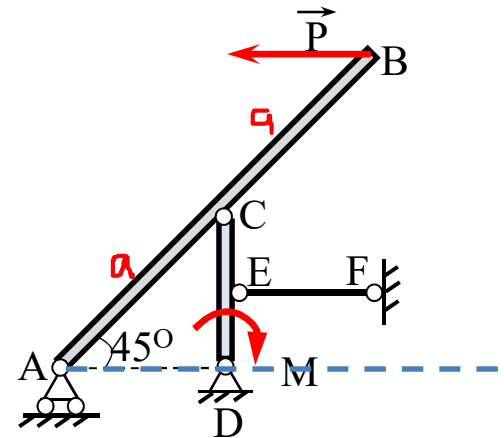
Phương pháp hóa rắn:

- Hóa rắn phần hệ gồm thanh AB và CD, xét TTCB của hệ này.

- Hệ lực tác dụng lên kết cấu:

$$(\vec{P}, M, \vec{R}_A, \vec{X}_D, \vec{Y}_D, \vec{S}_E) \sim 0$$

- Hệ phương trình cân bằng cho hệ lực phẳng:



Chương 3: HỆ LỰC PHẪNG VÀ ĐIỀU KIỆN CÂN BẰNG HỆ LỰC PHẪNG.

Bài giải

Phương pháp hóa rắn:

- Hóa rắn phần hệ gồm thanh AB và CD, xét TTCB của hệ này.

- Hệ lực tác dụng lên kết cấu:

$$(\vec{P}, M, \vec{R}_A, \vec{X}_D, \vec{Y}_D, \vec{S}_E) \sim 0$$

- Hệ phương trình cân bằng cho hệ lực phẳng:

$$\begin{cases} \sum X_k = X_D + S_E - P = 0 \\ \sum Y_k = R_A + Y_D = 0 \\ \sum m_D(\vec{F}_k) = -R_A \cdot AD - S_E \cdot DE + P \cdot \underline{AB \cdot \sin 45^\circ} - M = 0 \end{cases}$$

~~ĐH~~

$$\begin{cases} X_D + S_E - P = 0 \\ R_A + Y_D = 0 \\ 2 \cdot R_A + S_E = -2P \end{cases}$$

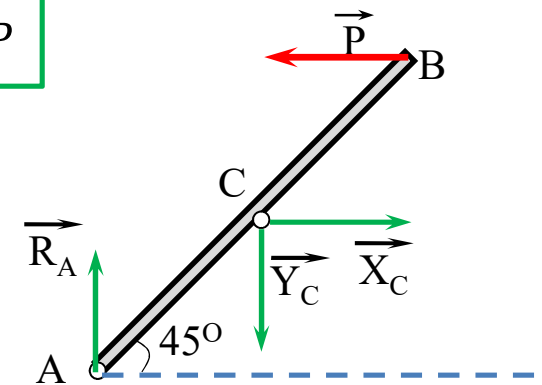
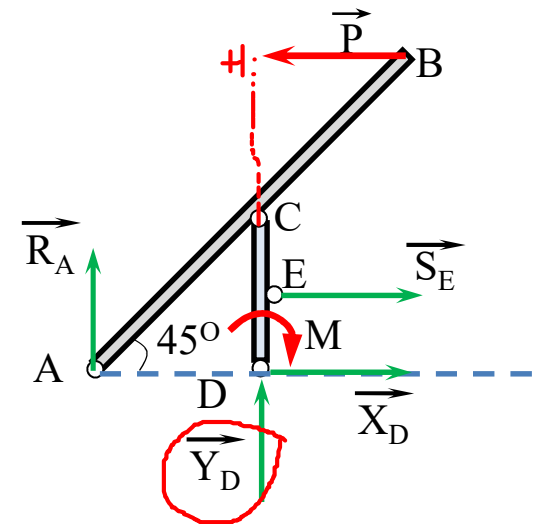
- Xét trạng thái cân bằng thanh AB.

- Hệ lực cân bằng tác dụng lên thanh AB:

$$(\vec{P}, \vec{R}_A, \vec{X}_C, \vec{Y}_C) \sim 0$$

$$\begin{aligned} \sum m_C(\vec{F}_k) &= -R_A \cdot AC \cdot \cos 45^\circ + P \cdot CB \cdot \sin 45^\circ = 0 \\ \Rightarrow R_A &= P \end{aligned}$$

④



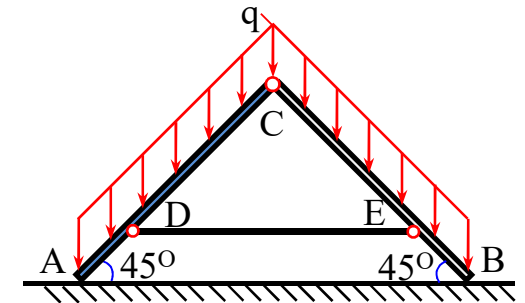
$$R_A = P; S_E = -4P.$$

$$X_D = 5P; Y_D = -P.$$

Chương 3: HỆ LỰC PHẪNG VÀ ĐIỀU KIỆN CÂN BẰNG HỆ LỰC PHẪNG.

Ví dụ 3

Các đòn tay của mái nhà gồm hai thanh đồng chất, mỗi đòn tay có trọng lượng P và được nối với nhau bằng bản lề tại C . Các đòn tay được giữ ở vị trí nghiêng với phương ngang một góc $\alpha = 45^\circ$ bởi thanh ngang DE . Xác định lực dọc trong thanh DE . Cho biết $DC=EC= 0,75l$; $AC=CB=l$, trọng lượng của thanh DE được bỏ qua.



Hình 3

Bài giải

Phương pháp hóa rắn:

$$\vec{Q}_1 \begin{cases} - P_1, \text{ ch } \vec{q} \\ - \text{Đặt tại trung điểm AC} \\ - \text{ĐL: } Q_1 = q.l \end{cases}$$

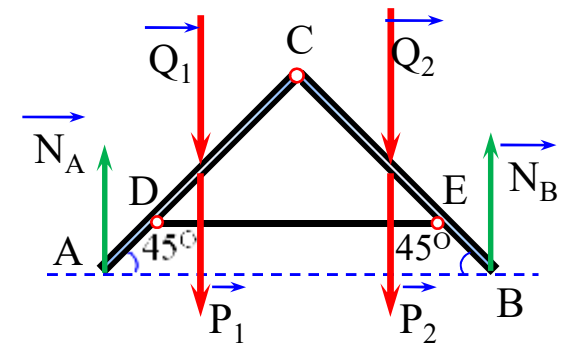
-Hệ lực tác dụng lên vật gồm:

+Trọng lượng bản thân của các thanh là \vec{P}_1, \vec{P}_2

+Lực phân bố đều được thay bằng các lực tập trung \vec{Q}_1, \vec{Q}_2

+Phản lực liên kết \vec{N}_A, \vec{N}_B

$$(\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{Q}_1, \vec{Q}_2, \vec{N}_A, \vec{N}_B) \sim 0$$



Chương 3: HỆ LỰC PHẪNG VÀ ĐIỀU KIỆN CÂN BẰNG HỆ LỰC PHẪNG.

$$(\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{Q}_1, \vec{Q}_2, \vec{N}_A, \vec{N}_B) \sim 0$$

Đây là hệ lực song song cân bằng nên ta có:

$$\sum Y_k = N_A + N_B - P_1 - P_2 - Q_1 - Q_2 = 0$$

$$\sum \bar{m}_A(\vec{F}_k) = -(P_1 + Q_1) \frac{AB}{4} - (P_2 + Q_2) \frac{3}{4} \cdot AB + N_B \cdot AB = 0$$

ta xác định được $N_A = N_B = P + q \cdot l$

Tách vật xét cân bằng của thanh AC

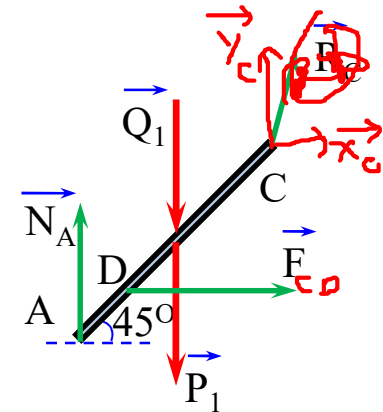
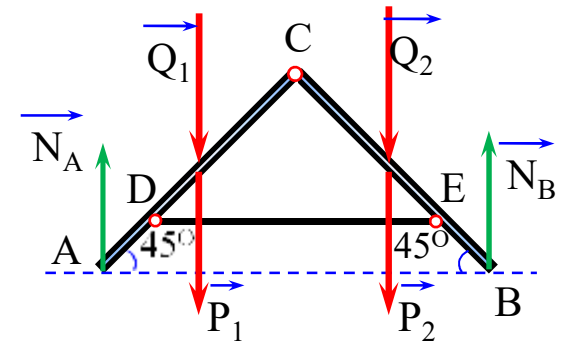
+Lực tác dụng lên thanh AC:

$$(\vec{P}_1, \vec{Q}_1, \vec{N}_A, \vec{F}_C, \vec{F}) \sim 0$$

Do đó:

$$\sum \bar{m}_C(\vec{F}_k) = -N_A \cdot AC \cdot \cos 45^\circ + (P_1 + Q_1) \cdot \frac{AC}{2} \cdot \cos 45^\circ + F \cdot \frac{3}{4} AC \cdot \sin 45^\circ = 0$$

$$F = \left[N_A - \frac{(P_1 + Q_1)}{2} \right] \cdot \frac{4}{3} = \frac{2}{3} (P + q \cdot l)$$

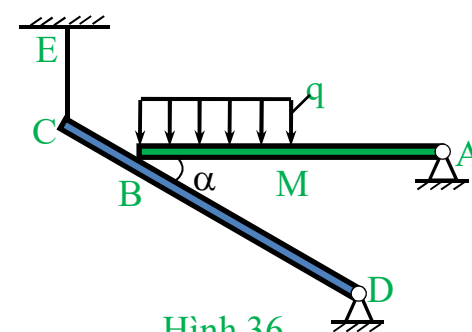


Chương 4– MỘT SỐ BÀI TOÁN TĨNH HỌC TRONG KỸ THUẬT

ÔN TẬP

Bài toán cân bằng hệ vật phẳng.

Bài 36. Thanh AB nằm ngang liên kết với nền bằng bản lề tại A, đầu B tựa trên thanh CD và chịu lực phân bố đều cường độ $q = 4\text{kN/m}$ trên đoạn BM. Dây EC có phương thẳng đứng. Góc nghiêng của thanh CD so với phương ngang là $\alpha = 30^\circ$. Biết $BM = MA = 2\text{ m}$, $CB = 1\text{ m}$, $BD = 3\text{ m}$. Bỏ qua trọng lượng của các thanh. Hãy xác định phản lực tại A, B, D và lực căng dây EC.



Hình 36

Bài giải

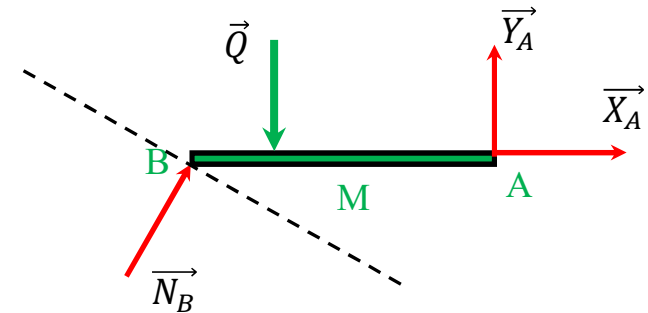
Chương 4: MỘT SỐ BÀI TOÁN TĨNH HỌC TRONG KỸ THUẬT

-Xét trạng thái cân bằng thanh AB.

+Lực tác dụng lên thanh AB là: $(\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{N}_B, \vec{Q}) \sim 0$

+Đây là hệ lực phẳng cân bằng, ta thiết lập được 3 phương trình cân bằng:

$$\begin{cases} \sum X_k = X_A + N_B \cdot \cos 60^\circ = 0 \\ \sum Y_k = Y_A + N_B \cdot \sin 60^\circ - Q = 0 \\ \sum M_A(\vec{F}_k) = -N_B \cdot \sin 60^\circ \cdot AB + Q(1/2 BM + MA) = 0 \end{cases}$$

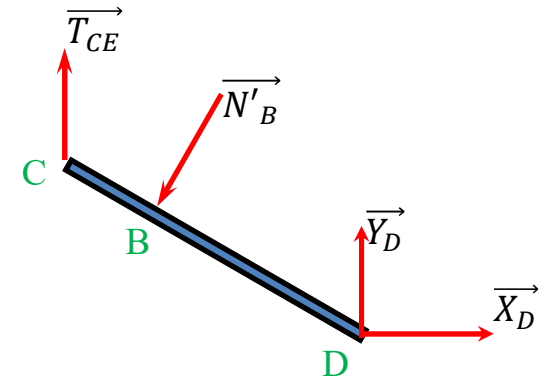


-Xét trạng thái cân bằng thanh CD:

+Lực tác dụng lên thanh CD là: $(\vec{X}_D, \vec{Y}_D, \vec{N}'_B, \vec{T}_{CE}) \sim 0$

+Đây là hệ lực phẳng cân bằng, ta thiết lập được 3 phương trình cân bằng:

$$\begin{cases} \sum X_k = X_D - N_B \cdot \cos 60^\circ = 0 \\ \sum Y_k = Y_D - N_B \cdot \sin 60^\circ + T_{CE} = 0 \\ \sum M_D(\vec{F}_k) = N_B \cdot BD - T_{CE} \cdot CD \cdot \cos 30^\circ = 0 \end{cases}$$



Chương 4: MỘT SỐ BÀI TOÁN TĨNH HỌC TRONG KỸ THUẬT

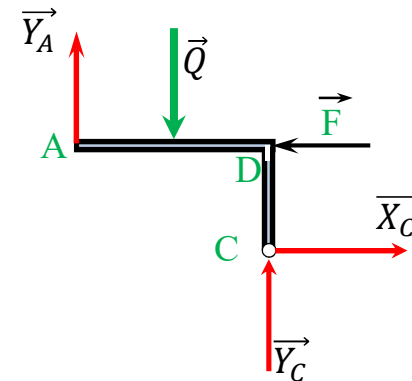
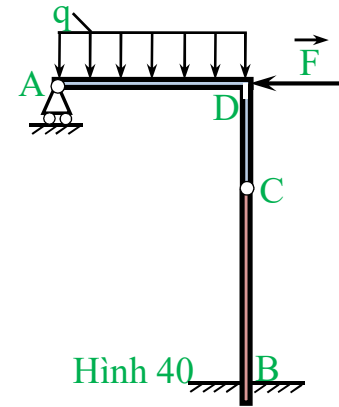
Bài 40. Hệ khung dầm chịu lực gồm hai dầm ADC và CB liên kết với nhau và với nền như hình vẽ. Dầm ADC chịu tác dụng của hệ lực phân bố đều cường độ : $q = 5 \text{ kN/m}$ và lực tập trung $F = 20 \text{ kN}$. Biết $AD = 2 \text{ m}$, $DC = 1 \text{ m}$, $CB = 2 \text{ m}$. Tìm phản lực tại A, B và C.

Bài giải

-Xét trạng thái cân bằng thanh ADC.

+Lực tác dụng lên thanh ADC là: $(\vec{X}_C, \vec{Y}_C, \vec{Y}_A, \vec{Q}, \vec{F}) \sim 0$

$$\begin{cases} \sum X_k = X_C - F = 0 \\ \sum Y_k = Y_A + Y_C - Q = 0 \\ \sum M_C(\vec{F}_k) = -Y_A \cdot AD + Q \cdot 1/2 AD + F \cdot DC = 0 \end{cases}$$



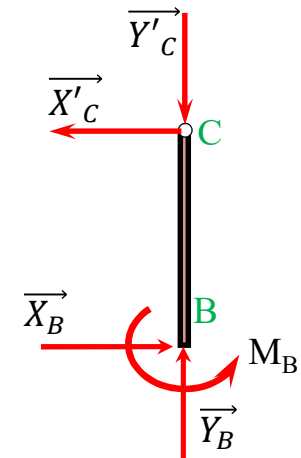
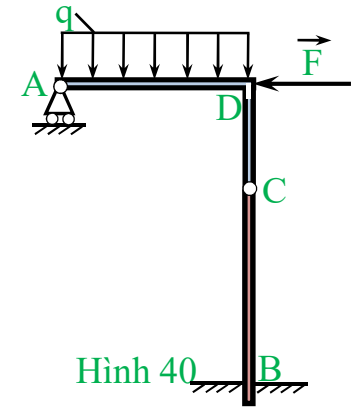
Chương 4: MỘT SỐ BÀI TOÁN TĨNH HỌC TRONG KỸ THUẬT

-Xét trạng thái cân bằng thanh CB:

+Lực tác dụng lên thanh CD là: $(\vec{X}_B, \vec{Y}_B, M_B, \vec{X}'_C, \vec{Y}'_C) \sim 0$

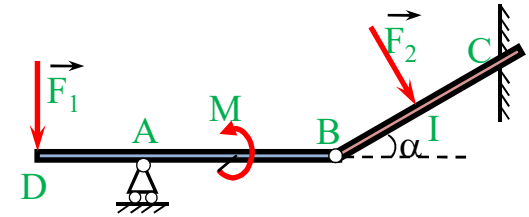
+Đây là hệ lực phẳng cân bằng, ta thiết lập được 3 phương trình cân bằng:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum X_k = X_B - X_C = 0 \\ \sum Y_k = Y_B - Y_C = 0 \\ \sum M_B(\vec{F}_k) = X_C \cdot BC + M_B = 0 \end{array} \right.$$

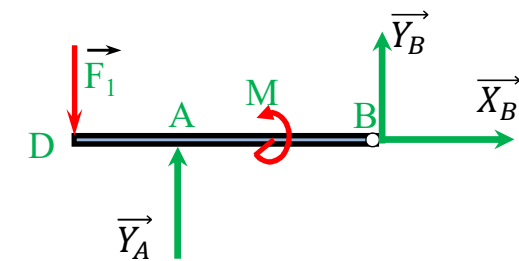


Chương 4: MỘT SỐ BÀI TOÁN TĨNH HỌC TRONG KỸ THUẬT

Bài 44. Hai thanh được bỏ qua trọng lượng DB và BC liên kết bản lề với nhau tại B. Hệ được giữ cân bằng trong mặt phẳng thẳng đứng nhờ liên kết ngàm tại C và liên kết gối di động tại A với nền. Hệ chịu tác dụng của lực tập trung $F_1 = 10 \text{ kN}$ vuông góc với DB tại D, lực tập trung $F_2 = 10 \text{ kN}$ vuông góc với BC tại I và ngẫu lực có mô men $M = 5 \text{ kN.m}$ trên DB. Biết $AD = 1 \text{ m}$, $AB = 2 \text{ m}$, $BI = IC = 1 \text{ m}$, BC tạo với DB một góc $\alpha = 45^\circ$. Tìm phản lực tại A, B và C.



Hình 44



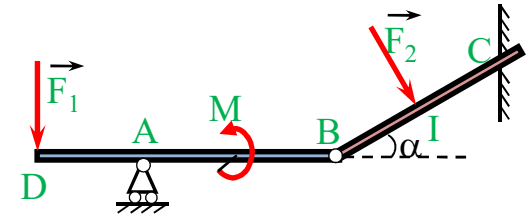
Bài Giải.

-Xét trạng thái cân bằng thanh DAB.

+Lực tác dụng lên thanh DAB là: $(\vec{X}_B, \vec{Y}_B, \vec{Y}_A, M, \vec{F}_1) \sim 0$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum X_k = X_B = 0 \\ \sum Y_k = Y_A + Y_B - F_1 = 0 \\ \sum M_B(\vec{F}_k) = -Y_A \cdot AB + M + F_1 \cdot DB = 0 \end{array} \right.$$

Chương 4: MỘT SỐ BÀI TOÁN TĨNH HỌC TRONG KỸ THUẬT

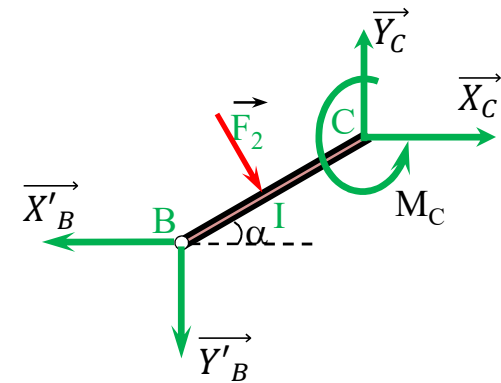


Hình 44

-Xét trạng thái cân bằng thanh CB:

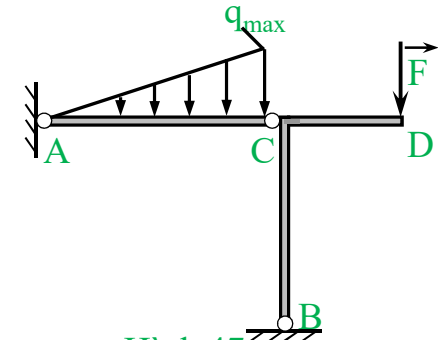
+Lực tác dụng lên thanh BC là: $(\vec{X}'_B, \vec{Y}'_B, M_C, \vec{X}_C, \vec{Y}_C, \vec{F}_2) \sim 0$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum X_k = -X_B + X_C + F_2 \sin \alpha = 0 \\ \sum Y_k = -Y_B + Y_C - F_2 \cos \alpha = 0 \\ \sum M_C(\vec{F}_k) = -X_B \cdot BC \cdot \sin \alpha + M_C + Y_B \cdot BC \cdot \cos \alpha + F_2 \cdot CI = 0 \end{array} \right.$$



Chương 4: MỘT SỐ BÀI TOÁN TĨNH HỌC TRONG KỸ THUẬT

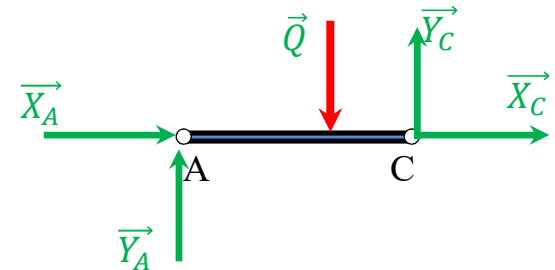
Bài 47. Cho hệ khung gồm hai dầm liên kết với nhau, liên kết với tường và nền thông qua các khớp bản lề tại C, A và B. Hệ chịu tác dụng của một hệ lực phân bố tam giác có cường độ lớn nhất là $q_{\max} = 4,5 \text{ kN/m}$ và một lực tập trung $F = 2 \text{ kN}$ tại vị trí biểu diễn như hình vẽ. Biết $AC = 6 \text{ m}$, $BC = 5 \text{ m}$, $CD = 3,5 \text{ m}$. Tìm phản lực tại A, B và C.



Bài Giải.

-Xét trạng thái cân bằng thanh AC.

+Lực tác dụng lên thanh AC là: $(\vec{X}_C, \vec{Y}_C, \vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{Q}) \sim 0$



$$\begin{cases} \sum X_k = X_A + X_C = 0 \\ \sum Y_k = Y_A + Y_C - Q = 0 \\ \sum M_C(\vec{F}_k) = -Y_A \cdot AC + Q \cdot \frac{1}{3} AC = 0 \end{cases}$$

Chương 4: MỘT SỐ BÀI TOÁN TĨNH HỌC TRONG KỸ THUẬT

-Xét trạng thái cân bằng thanh BCD:

+Lực tác dụng lên thanh BCD là: $(\vec{X}_B, \vec{Y}_B, \vec{F}, \vec{X}'_C, \vec{Y}'_C) \sim 0$

+Đây là hệ lực phẳng cân bằng, ta thiết lập được 3 phương trình cân bằng:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum X_k = X_B - X_C = 0 \\ \sum Y_k = Y_B - Y_C - F = 0 \\ \sum M_C(\vec{F}_k) = X_B \cdot BC - F \cdot CD = 0 \end{array} \right.$$

