MỤC LỤC

GIẢI TÍCH I

Sách dùng cho sinh viên trường Đại học xây dựng
và sinh viên các trường Đại học, Cao đẳng kĩ thuật

Chương 1

Số thực và dãy số thực

1.1 Lân cận, tập đóng, tập mở và tập bị chặn

Giáo trình này trình bày các nội dung cơ bản, các kết quả cơ bản của giải tích toán học nhằm cung cấp các kiến thức cần thiết cho học sinh sinh viên các ngành kĩ thuật học tiếp các môn khác. Do vậy nó không đi sâu vào nghiên cứu các khái niệm gốc ban đầu của giải tích như bản chất số thực, hệ tiên đề cũng như cách xây dựng số thực.

Trước hết chúng ta nhắc lại các tính chất quan trọng nhất của tập các số thực đã được biết đến trong chương trình toán ở phổ thông, đồng thời bổ sung thêm các khái niệm sâu hơn làm cơ sở cho việc trình bày các vấn đề cơ bản của giải tích.

Kí hiệu $\mathbb{N}$ là tập các số tự nhiên $\{0, 1, 2, 3, ...\}$

$\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\} = \{1, 2, 3, ...\}$ là tập các số tự nhiên dương

$\mathbb{Z} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$ là tập các số nguyên

$\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}^*\}$ là tập các số hữu tỉ, $\mathbb{R}$ là tập các số thực.

Các tập hợp $\mathbb{N}^* \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ là các tập số gồm vô hạn phần tử. Chúng có cùng lực lượng đếm được. Tập các số thực $\mathbb{R}$ không đếm được, ta gọi lực lượng của $\mathbb{R}$ là continuum. Người ta đồng nhất tập các số thực $\mathbb{R}$ với các điểm trên trục số và nói tập các số thực lấp đầy trục số.

Như đã nói ở trên, trong giáo trình này chúng ta không tìm cách xây dựng tập số thực. Các phương pháp xây dựng tập số thực có giá trị lớn về mặt lôgic cũng như về mặt lịch sử, nhưng không có mối liên hệ trực tiếp với giải tích. Tuy nhiên một trong số các tiên đề về số thực được giới thiệu trong giáo trình này là *tiên đề về cận trên đúng của tập bị chặn trên.* Chỉ thông qua hệ các các tiên đề về số thực chúng ta mới có khái niệm đầy đủ về các số *vô tỉ*, chúng là các số thực không thuộc tập các số hữu tỉ.

Trị tuyệt đối và các tính chất của trị tuyệt đối.

Trị tuyệt đối của một số thực a được kí hiệu là $|a|$ và được định nghĩa như sau:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{nếu } a \geq 0 \\ -a & \text{nếu } a < 0 \end{cases}$$

Nhận xét rằng $|a| \geq 0$ với mọi số thực a. Các tính chất sau đây là hiển nhiên:
- $-|a| \leq a \leq |a|$ với mọi $a \in \mathbb{R}$.
- Nếu c là số thực thoả mãn điều kiện $-|a| \leq c \leq |a|$, khi đó $|c| \leq |a|$.
- Với a, b là hai số thực tuỳ ý:

$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b| \quad \text{và} \quad \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|},\ (b \neq 0)$$

$$|a + b| \leq |a| + |b| \quad \text{và} \quad |a - b| \geq \Big||a| - |b|\Big|.$$

Cho 2 số thực $a < b$, người ta gọi khoảng (a, b) là tập các số thực lớn hơn a và nhỏ thua b:

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}.$$

Ta gọi khoảng đóng hoặc đoạn thẳng $[a, b]$ là tập các số thực:

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}.$$

Về ý nghĩa hình học, $|a-b|$ là độ dài đoạn thẳng $[a, b]$ (hoặc nói là độ dài khoảng (a, b). Nó chính là khoảng cách giữa 2 điểm a, b trên trục số. Người ta còn kí hiệu

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}, \quad [a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$$

Với hai số thực bất kì $\alpha < \beta$ luôn tồn tại vô số số hữu tỉ $x \in \mathbb{Q}$ sao cho $\alpha < x < \beta$.

Về mặt hình học tính chất trên khẳng định xen giữa hai số thực bất kì tồn tại vô số số hữu tỉ. Ta nói *tập các số hữu tỉ $\mathbb{Q}$ trù mật trong $\mathbb{R}$.*

Ta đưa vào khái niệm *lân cận* của một điểm thuộc tập các số thực $\mathbb{R}$. Lân cận là khái niệm cơ bản để xây dựng nên các khái niệm quan trọng khác như giới hạn, liên tục, đạo hàm... của giải tích.

Định nghĩa 1.1.1 *Giả sử x_0 là điểm thuộc $\mathbb{R}$, $\delta > 0$ là số thực dương tuỳ ý. Người ta gọi khoảng $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, kí hiệu:*

$$U_\delta(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - x_0| < \delta\}$$

là lân cận (hoặc lân cận mở) bán kính δ của điểm (hoặc số thực) $x_0 \in \mathbb{R}$.

Nếu $V \subset \mathbb{R}$ và V chứa một lân cận bán kính $\delta > 0$ nào đó thì V được gọi là lân cận của x_0.

Từ định nghĩa lân cận của một điểm ta có các nhận xét
- Nếu V là lân cận của x_0 thì $x_0 \in V$.
- Nếu V là lân cận của x_0 và $V \subset U$ thì U cũng là lân cận của x_0.
- Nếu V_1, V_2 là hai lân cận của x_0 thì $V_1 \cap V_2$ cũng là lân cận của x_0.

Ta bổ sung thêm vào $\mathbb{R}$ hai phần tử đặc biệt $-\infty$ và $+\infty$ và kí hiệu

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}.$$

Tập hợp $\overline{\mathbb{R}}$ được gọi là *tập các số thực mở rộng*, chúng được sắp thứ tự như đã biết trong $\mathbb{R}$, ngoài ra với các phần tử mới được bổ sung, ta có:
- $-\infty < a$ với mọi số thực $a \in \mathbb{R}$
- $a < +\infty$ với mọi số thực $a \in \mathbb{R}$
- $-\infty < +\infty$.

Bây giờ chúng ta có thể mở rộng khái niệm lân cận của $+\infty, -\infty$
- Lân cận của $-\infty$ là tập hợp:

$$U_K(-\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < K\}, \quad \text{trong đó} \quad K \in \mathbb{R} \quad \text{là số thực tuỳ ý.}$$

- Lân cận của $+\infty$ là tập hợp:

$$U_K(+\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > K\}, \quad \text{trong đó} \quad K \in \mathbb{R} \quad \text{là số thực tuỳ ý.}$$

Định nghĩa 1.1.2 *Điểm $a \in \overline{\mathbb{R}}$ được gọi là điểm tụ của tập $H \subset \mathbb{R}$ nếu mọi lân cận của a chứa vô hạn các phần tử của H.*

Cần lưu ý với a là điểm tụ của tập H, a không nhất thiết phải thuộc H. Tuy nhiên, điểm tụ của một tập hợp có thể là $+\infty$ hoặc $-\infty$.

Định lí 1.1.1 *$a \in \overline{\mathbb{R}}$ là điểm tụ của tập $H \subset \mathbb{R}$ khi và chỉ khi mọi lân cận của a chứa ít nhất một phần tử khác a thuộc H.*

Chứng minh Ta chỉ cần chứng minh điều kiện đủ. Xét một lân cận bất kì $U_\delta(a)$ của a ($\delta > 0$), ta phải chứng minh $U_\delta(a)$ chứa vô hạn các phần tử của H.

Theo giả thiết của điều kiện đủ, lân cận bán kính δ của a, $U_\delta(a)$ chứa ít nhất một phần tử a_1 khác a thuộc H, gọi δ_1 là khoảng cách từ a_1 tới a: $\delta_1 = |a_1 - a| > 0$. Lân cận bán kính δ_1 của a, $U_{\delta_1}(a)$ chứa ít nhất một phần tử a_2 khác a thuộc H, gọi δ_2 là khoảng cách từ a_2 tới a: $\delta_2 = |a_2 - a| > 0$.

Lân cận bán kính δ_2 của a, $U_{\delta_2}(a)$ chứa ít nhất một phần tử a_3 khác a thuộc H, gọi δ_3 là khoảng cách từ a_3 tới a: $\delta_3 = |a_3 - a| > 0$...

Cứ lập luận tiếp như vậy, các phần tử $a_1, a_2, a_3, ... \in H$ đôi một khác nhau và đều thuộc lân cận $U_\delta(a)$ đã xét ban đầu của a. Ta đã chứng minh $U_\delta(a)$ chứa vô hạn phần tử thuộc H. ■

Ví dụ 1.1.1

1. Mọi điểm thuộc đoạn $[a, b]$ là điểm tụ của khoảng (a, b). Như vậy điểm tụ của tập H có thể thuộc H, cũng có thể không thuộc H.

2. Với tập $H = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ...\}$, $a = 0$ là điểm tụ của H. Tuy nhiên các phần tử $\frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$ không là điểm tụ của H.

3. Tập các số tự nhiên $0, 1, 2, 3, ..., n, ...$ không có điểm tụ trong $\mathbb{R}$. Tuy nhiên phù hợp với định nghĩa về lân cận của $-\infty$ và $+\infty$, ta có thể thấy $+\infty \in \overline{\mathbb{R}}$ là điểm tụ của tập các số tự nhiên.

4. H là tập các số hữu tỉ trong khoảng $(0, 1)$. Khi đó mọi số thực thuộc đoạn $[0, 1]$ là điểm tụ của tập H.

Định nghĩa 1.1.3 *$H \subset \mathbb{R}$ được gọi là tập đóng nếu nó chứa mọi điểm tụ (nếu có) của H.*

Người ta quy ước tập $\emptyset$ là tập đóng. Nhận xét sau là hiển nhiên

1. Mọi tập hữu hạn đều là tập đóng.
2. Tập các số thực $\mathbb{R}$ là tập đóng.
3. Đoạn thẳng $[a, b] \subset \mathbb{R}$ là tập đóng.

Từ định nghĩa về tập đóng, dễ dàng chứng minh khẳng định sau

Định lí 1.1.2
• *Hợp của hữu hạn các tập đóng cũng là tập đóng:*
Giả sử $H_1, H_2, ..., H_n$ *là các tập đóng, khi đó* $\bigcup\limits_{i=1}^{n} H_i$ *cũng là tập đóng.*
• *Giao của hữu hạn hoặc vô hạn các tập đóng luôn luôn là tập đóng:*
Giả sử $H_i, i \in I$ *là các tập đóng (*I *là tập các chỉ số có thể hữu hạn hoặc vô hạn), khi đó* $\bigcap\limits_{i\in I} H_i$ *cũng là tập đóng.*

Bài tập *Hãy cho một ví dụ trên* $\mathbb{R}$ *về vô hạn các tập đóng mà hợp của chúng không phải là tập đóng.*
(Trong chương này, ngay sau một vài khái niệm cơ bản chúng tôi đưa ra một số bài tập để độc giả tự giải nhằm củng cố kĩ thêm các khái niệm đó và giúp độc giả nắm bắt nhanh các phần lí thuyết tiếp theo.)

Ngược lại với khái niệm điểm tụ, chúng ta có định nghĩa sau đây về điểm cô lập:

Định nghĩa 1.1.4 *Điểm* $x_0 \in H$ *được gọi là điểm cô lập của tập* $H \subset \mathbb{R}$ *nếu tồn tại một lân cận* $U_\delta(x_0)$ *của* x_0 *sao cho trừ* x_0*, lân cận* $U_\delta(x_0)$ *không chứa một điểm nào khác của* H *(nói cách khác* $U_\delta(x_0) \cap H = \{x_0\}$*).*

Ví dụ mọi số nguyên đều là điểm cô lập của tập các số nguyên

$$\mathbb{Z} = \{..., -2, 1, 0, 1, 2, ...\}$$

Nhận xét rằng nếu $H \subset \mathbb{R}$ là tập đóng, khi đó do H chứa mọi điểm tụ của nó nên *mọi phần tử của* H *hoặc là điểm tụ hoặc là điểm cô lập.*

Định nghĩa 1.1.5 *Điểm* $x_0 \in A$ *được gọi là điểm trong của tập* A *nếu tồn tại một lân cận* $U_\delta(x_0)$ *của* x_0 *sao cho lân cận* $U_\delta(x_0)$ *được chứa trong tập* A *(*$U_\delta(x_0) \subset A$*).*

Ví dụ 1.1.2

1. Kí hiệu A là tập các số thực trong khoảng $(0,1)$, khi đó mọi điểm thuộc A đều là điểm trong của A.

2. Kí hiệu B là tập các số hữu tỉ trong khoảng $(0,1)$

$$B = \{x \mid 0 < x < 1,\ x \text{ là số hữu tỉ } \}$$

   B không có điểm trong.

Định nghĩa 1.1.6 *$A \subset \mathbb{R}$ được gọi là tập mở nếu mọi phần tử của A đều là điểm trong của A. Nói cách khác với mỗi $x_0 \in A$ tồn tại một lân cận $U_\delta(x_0)$ sao cho $U_\delta(x_0) \subset A$.*

Người ta quy ước tập $\emptyset$ là tập mở. Nhận xét sau là hiển nhiên

1. Tập các số thực $\mathbb{R}$ là tập mở.
2. Mọi khoảng $(a,b) \subset \mathbb{R}$ đều là tập mở.

Từ định nghĩa về tập mở, dễ dàng chứng minh khẳng định sau

Định lí 1.1.3
• *Giao của hữu hạn các tập mở cũng là tập mở:*
Giả sử $A_1, A_2, ..., A_n$ là các tập mở, khi đó $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$ cũng là tập mở.
• *Hợp của hữu hạn hoặc vô hạn các tập mở luôn luôn là tập mở:*
Giả sử $A_i, i \in I$ là các tập mở (I là tập các chỉ số có thể hữu hạn hoặc vô hạn), khi đó $\bigcup\limits_{i \in I} H_i$ cũng là tập mở.

Bài tập *Hãy cho một ví dụ trên $\mathbb{R}$ về vô hạn các tập mở mà giao của chúng không phải là tập mở.*

Nhận xét rằng tập các số hữu tỉ trong khoảng $(0,1)$ trong ví dụ trước không là tập đóng cũng chẳng là tập mở. Ta có định lí sau

Định lí 1.1.4 *Phần bù (trong $\mathbb{R}$) của tập mở là tập đóng và phần bù của tập đóng là tập mở.*

Chứng minh
Giả sử $A \subset \mathbb{R}$ là tập mở. Kí hiệu $\overline{A} = \mathbb{R} \setminus A$ là phần bù (trong $\mathbb{R}$) của A. Ta sẽ chứng minh $\overline{A}$ là tập đóng hay mọi điểm tụ x_0 của $\overline{A}$ đều thuộc nó

$$x_0 \in \overline{A} \;\Leftrightarrow\; x_0 \notin A.$$

Thật vậy, nếu x_0 là điểm tụ của $\overline{A}$, suy ra mọi lân cận V của x_0 đều chứa ít nhất một phần tử thuộc $\overline{A}$ tức là V chứa ít nhất một phần tử không thuộc A. Do A tập mở nên $x_0 \notin A$.

Ngược lại giả sử $B \subset \mathbb{R}$ là tập đóng. Ta phải chứng minh $\overline{B}$ là tập mở. Chọn $x_0 \in \overline{B}$ tùy ý, suy ra $x_0 \notin B$. Do B đóng nên x_0 không là điểm tụ của B. Vì vậy tồn tại một lân cận V của x_0 mà V không chứa một phần tử nào của B. Nói cách khác V được chứa trong $\overline{B}$, suy ra $\overline{B}$ là tập mở (đ.p.c.m.) ■

1.2 Tập bị chặn, tiên đề về cận trên đúng của tập bị chặn trên

Định nghĩa 1.2.1
• *Tập $A \subset \mathbb{R}$ được gọi là tập bị chặn trên nếu tồn tại $K \in \mathbb{R}$ sao cho $x \leq K$ với mọi $x \in A$. Số K như vậy được gọi là số chặn trên của tập A và hiển nhiên khi đó mọi số thực lớn hơn K cũng là các số chặn trên của tập A.*
• *Tập $B \subset \mathbb{R}$ được gọi là tập bị chặn dưới nếu tồn tại $K' \in \mathbb{R}$ sao cho $x \geq K'$ với mọi $x \in A$. Số K' được gọi là số chặn dưới của tập B.*
• *Tập $C \subset \mathbb{R}$ được gọi là tập bị chặn (hay còn gọi là tập giới nội) nếu C là tập bị chặn trên, đồng thời cũng là tập bị chặn dưới. Như vậy tập $C \subset \mathbb{R}$ là tập bị chặn khi và chỉ khi tồn tại $K \in \mathbb{R}$ sao cho $|x| \leq K$ với mọi $x \in C$.*

Chú ý rằng một tập bị chặn trên có thể không có số lớn nhất, cũng như một tập bị chặn dưới có thể không có số nhỏ nhất.

Bây giờ ta đưa vào một tính chất đặc biệt quan trọng của tập các số thực, nó là cơ sở cần thiết cho việc chứng minh nhiều kết quả quan trọng trong giải tích sau này.

Tiên đề về cận trên đúng của tập bị chặn trên:
Tập hợp tất cả các số chặn trên của một tập bị chặn trên luôn luôn có phần tử nhỏ nhất.

Giả sử A là tập bị chặn trên và kí hiệu M là tập hợp tất cả các số chặn trên của A.

$$M = \{K \mid K \in \mathbb{R}, K \geq x \text{ với mọi } x \in A\}.$$

Khi đó $M \neq \emptyset$ và theo tiên đề trên tập M có phần tử nhỏ nhất. Phần tử nhỏ nhất đó được gọi là *cận trên đúng* (hay *supremum*) của tập A, kí hiệu $\sup A$. Vậy một tập A bị chặn trên luôn luôn có một cận trên nhỏ nhất (cận trên đúng) và

$$\sup A = \min\{K \mid K \in M\}.$$

Định lí sau là hiển nhiên

Định lí 1.2.1 *Cho A là tập bị chặn trên. Số thực $\alpha = \sup A$ là cận trên đúng của A khi và chỉ khi*

- *Với mọi $x \in A$, $\quad x \leq \alpha$.*
- *Với $\epsilon > 0$ tuỳ ý, tồn tại ít nhất một phần tử $y \in A$ sao cho $y > \alpha - \epsilon$.*

Ví dụ 1.2.1

Cho $A = \{\frac{n}{n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$. Tập A không có phần tử lớn nhất, tuy nhiên A có cận trên đúng và dễ dàng nhận thấy cận trên đúng của A: $\sup A = 1$.

Ta có các nhận xét sau

- Nếu một tập hợp A có phần tử lớn nhất khi đó cận trên đúng của nó cũng chính là phần tử lớn nhất của tập đó:

$$\max A = \sup A.$$

- Cận trên đúng $\sup A$ của tập A nói chung không thuộc tập hợp A và

$$\sup A \in A \quad \Leftrightarrow \quad A \text{ có phần tử lớn nhất } \max A.$$

Cho $B \subset \mathbb{R}$ là tập bị chặn dưới và xét tập hợp gồm các phần tử đối của các phần tử thuộc B:

$$B^* = \{-b \mid b \in B\}.$$

Khi đó B^* là tập bị chặn trên và do vậy tồn tại cận trên đúng của B^*

$$\alpha = \sup B^*$$

Bằng cách xét tập B^* dễ dàng nhận thấy tập hợp tất cả các số chặn dưới của tập hợp B có phần tử lớn nhất. Phần tử đó dược gọi là *cận dưới đúng* (hay còn gọi *infimum*) của B, kí hiệu $\inf B$ và

$$\inf B = -\sup B^* = -\alpha.$$

Vậy mọi tập bị chặn dưới đều có cận dưới đúng. Nó được suy ra từ tiên đề về cận trên đúng của tập bị chặn trên.

Tương tự như định lí 1.2.1 ta có

Định lí 1.2.2 *Cho B là tập bị chặn dưới. Số thực $\beta = \inf B$ là cận dưới đúng của B khi và chỉ khi*

- *Với mọi $x \in B, \quad x \geq \beta$.*
- *Với $\epsilon > 0$ tuỳ ý, tồn tại ít nhất một phần tử $y \in B$ sao cho $y < \beta + \epsilon$.*

Ví dụ 1.2.2

1. Gọi A là tập các số vô tỉ trên đoạn $[0, 1]$. Hiển nhiên A không có phần tử lớn nhất và nhỏ nhất. Mặt khác dễ dàng suy ra từ định nghĩa cận trên đúng, cận dưới đúng
$$\sup A = 1, \ \inf A = 0.$$

2. Cho
$$B = \{\frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, ..., \frac{n+1}{n}, ...\}$$
$\max B = 2$ và do đó cận trên đúng của B, $\ \sup B = \max B = 2$.
Dễ dàng nhận thấy B không có phần tử nhỏ nhất, tuy nhiên cận dưới đúng của B, $\inf B = 1$.

Phần đọc thêm *Tương đương với tiên đề về cận trên đúng của tập bị chặn trên là nguyên lí dãy các đoạn thẳng lồng nhau.*

Định nghĩa 1.2.2 *Dãy các đoạn thẳng* $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \cdots \supset [a_n, b_n] \supset \cdots$ *được gọi là dãy các đoạn thẳng lồng nhau. Hiển nhiên với dãy nêu trên*

$$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \cdots \leq \cdots \leq b_n \leq b_{n-1} \leq b_2 \leq b_1.$$

Nguyên lí dãy các đoạn thẳng lồng nhau:
Mọi dãy các đoạn thẳng lồng nhau luôn có ít nhất một điểm chung.

Ta trình bày vắn tắt sự tương đương giữa tiên đề về cận trên đúng của tập bị chặn trên và nguyên lí dãy các đoạn thẳng lồng nhau.
• *Giả sử* $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \cdots \supset [a_n, b_n] \supset \cdots$, *từ tiên đề về cận trên đúng ta suy ra ngay* $\alpha = \sup\{a_1, a_2, ..., a_n, ...\} \in [a_n, b_n] \ \ \forall n$.
• *Ngược lại sử dụng nguyên lí dãy các đoạn thẳng lồng nhau ta phải chứng minh tập* $H \subset \mathbb{R}$ *bị chặn trên luôn có* $\sup H$.
Giả sử $a_1 \in H$ *và* b_1 *là một số chặn trên của* H. *Chia đoạn* $[a_1, b_1]$ *thành 2 đoạn bằng nhau và chọn* $[a_2, b_2]$ *là một trong 2 nửa đó thỏa mãn tính chất: trong* $[a_2, b_2]$ *vừa có điểm thuộc* H *vừa có một số chặn trên của* H *(luôn luôn tồn tại đoạn như vậy!). Chia tiếp* $[a_2, b_2]$ *thành 2 đoạn bằng nhau và chọn một trong 2 đoạn đó, kí hiệu* $[a_3, b_3]$ *sao cho trong đó vừa có điểm thuộc* H *vừa có một số chặn trên của* H*...*
Cứ tiếp tục, ta được dãy các đoạn thẳng lồng nhau và phần tử chung của dãy đó chính là $\sup H$.

Định lí 1.2.3 *Gọi* $H \subset \mathbb{R}$ *là tập đóng, bị chặn và* $H \neq \emptyset$. *Khi đó* H *có phần tử lớn nhất, nhỏ nhất, đồng thời*

$$\sup H = \max H, \quad \inf H = \min H.$$

Chứng minh. Giả sử $\alpha = \sup H$ là cận trên đúng của H.
• Nếu α là điểm cô lập của H, khi đó hiển nhiên α cũng là phần tử lớn nhất của H.
• Trường hợp α không là điểm cô lập của H, khi đó α là điểm tụ của H. Theo giả thiết H là tập đóng, H chứa mọi điểm tụ của nó, vậy $\alpha = \sup H \in H$ suy ra

$$\sup H = \max H.$$

Phần thứ hai của định lí được chứng minh tương tự. ■

Một tập vừa bị chặn vừa là tập đóng được gọi là *tập compắc*. Theo định lí trên tập compắc luôn luôn có phần tử lớn nhất và nhỏ nhất.

Định lí sau nêu lên tính chất cơ bản của tập bị chặn.

Định lí 1.2.4 (Bolzano) *Mọi tập bị chặn và chứa vô hạn phần tử đều có ít nhất một điểm tụ.*

Chứng minh. Gọi H là tập bị chặn và chứa vô hạn phần tử. Kí hiệu B là tập các số thực mà chỉ hữu hạn các phần tử thuộc H lớn hơn số thực đó. Nói cách khác

$$x \in B \quad \text{khi và chỉ khi tập } \{y \in H \mid y > x\} \text{ là tập hữu hạn.}$$

Do $B \neq \emptyset$ (mọi số chặn trên tập H đều thuộc B) và B là tập bị chặn dưới (H chứa vô hạn phần tử) nên tồn tại cận dưới đúng $\alpha = \inf B$ của tập B.

Ta sẽ chứng minh α là điểm tụ của H. Thật vậy xét một lân cận $U_\delta(\alpha)$ bán kính $\delta > 0$ tuỳ ý của α:

$$U_\delta(\alpha) = (\alpha - \delta, \alpha + \delta).$$

Từ định nghĩa của B suy ra $\alpha - \delta \notin B$ và $\alpha + \delta \in B$. Như vậy trong lân cận $U_\delta(\alpha) = (\alpha - \delta, \alpha + \delta)$ có vô hạn các phần tử thuộc H. Do $\delta > 0$ tuỳ ý suy ra α là điểm tụ của H (đ.p.c.m.) ■

Bài tập

1. *Tìm tất cả các điểm tụ và điểm cô lập của tập*

$$H = \{m + \frac{1}{n} \mid m, n \in \mathbb{N}^*\}$$

2. *Tìm tất cả các điểm tụ của tập*

$$H_1 = \{\frac{m}{2^n} \mid n \in \mathbb{N}; m = 1, 2, ..., 2^n\}, \quad H_2 = \{\frac{n}{1 + mn} \mid m, n \in \mathbb{N}\}.$$

3. *Chứng minh rằng với một tập $H \subset \mathbb{R}$ bất kì, tập tất cả các điểm cô lập của H là tập hữu hạn hoặc vô hạn đếm được.*

4. *Cho $f, g : H \to \mathbb{R}$ là các hàm bị chặn trên tập $H \subset \mathbb{R}$. Chứng minh rằng*

$$\sup_{x \in H}(f(x) + g(x)) \leq \sup_{x \in H} f(x) + \sup_{x \in H} g(x)$$
$$\inf_{x \in H}(f(x) + g(x)) \geq \inf_{x \in H} f(x) + \inf_{x \in H} g(x).$$

1.3 Dãy số thực và giới hạn dãy số thực

1.3.1 Khái niệm về dãy số và giới hạn của dãy

Định nghĩa 1.3.1 *Một ánh xạ từ tập các số tự nhiên* $\mathbb{N}^* = \{1, 2, ..., n, ...\}$ *vào* $\mathbb{R}$*:*

$$u : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$$

được gọi là dãy số thực vô hạn. Kí hiệu $u_n = u(n)$ *với mọi* $n \in \mathbb{N}^*$*,* u_n *được gọi là số hạng thứ* n *của dãy số. Dãy số* u *thường được kí hiệu dưới một trong các dạng sau:*

$$u_n,\ n = 1, 2, 3, ... \quad \textit{hoặc} \quad u_1, u_2, u_3, ..., u_n, ...$$

$$\{u_n\}_{n=1,2,...} \quad \textit{hoặc} \quad \{u_n\}_1^\infty \quad \textit{hoặc} \quad \{u_n\}$$

• Một dãy số được gọi là *dãy dừng* nếu tồn tại một số tự nhiên n_0 sao cho từ số hạng đó trở đi mọi phần tử của dãy đều bằng nhau.
• Dãy số $\{u_n\}_1^\infty$ được gọi là *dãy đơn điệu tăng* (*tăng thực sự*) nếu

$$u_n \le u_{n+1}\ \forall n \in \mathbb{N}^* \quad (u_n < u_{n+1}\ \forall n \in \mathbb{N}^*).$$

• Dãy số $\{u_n\}_1^\infty$ được gọi là *dãy đơn điệu giảm* (*giảm thực sự*) nếu

$$u_n \ge u_{n+1}\ \forall n \in \mathbb{N}^* \quad (u_n > u_{n+1}\ \forall n \in \mathbb{N}^*).$$

Định nghĩa 1.3.2 *Dãy số* $\{u_n\}_1^\infty$ *(hay ánh xạ* $u : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$*) được gọi là bị chặn trên nếu*

$$\exists M \in \mathbb{R} : \quad u_n \le M\ \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Dãy số $\{u_n\}_1^\infty$*được gọi là bị chặn dưới nếu*

$$\exists M' \in \mathbb{R} : \quad u_n \ge M'\ \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Dãy số vừa bị chặn trên vừa bị chặn dưới được gọi là bị chặn, nói cách khác dãy $\{u_n\}_1^\infty$ *bị chặn nếu tồn tại số* K *sao cho*

$$|u_n| = |u(n)| \le K \quad \textit{với mọi} \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Ví dụ 1.3.1

1. Dãy $u_n = \frac{2n+1}{n+1} = 2 - \frac{1}{n+1} \quad n \in \mathbb{N}^*$ là dãy tăng thực sự.
   Ngoài ra $\frac{3}{2} \le u_n < 2 \quad$ với mọi $\quad n \in \mathbb{N}^*$ nên $\{u_n\}_1^\infty$ là dãy bị chặn.

2. Cho số thực $a > 0$ và $a \neq 1$. Dãy $\{u_n\}_1^\infty$ được xác định như sau
$$u_1 = \frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right),\ u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{1}{u_n}\right) \text{ với mọi } \quad n \in \mathbb{N}^*.$$
   Bằng quy nạp ta có thể chứng minh $u_n > 1$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, dãy $\{u_n\}_1^\infty$ bị chặn dưới.
   Mặt khác do $u_n > 1$ suy ra $\frac{1}{u_n} < u_n$, do đó
$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{1}{u_n}\right) < \frac{1}{2}(u_n + u_n) = u_n \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,$$
   dãy $\{u_n\}_1^\infty$ là dãy đơn điệu giảm thực sự.

Định nghĩa 1.3.3 *Cho dãy số $\{u_n\}_1^\infty$, ta nói dãy hội tụ và có giới hạn bằng $L \in \mathbb{R}$, kí hiệu:*
$$\lim_{n\to\infty} u_n = L \quad \textit{hoặc} \quad u_n \to L,$$
nếu cho trước $\epsilon > 0$ tuỳ ý, tồn tại một số tự nhiên $n_0 = n_0(\epsilon)$ (n_0 phụ thuộc vào ϵ) sao cho với mọi $n \ge n_0$ ta có:
$$|u_n - L| < \epsilon.$$
Dãy số $\{u_n\}_1^\infty$ không hội tụ được gọi là dãy phân kì.

Ví dụ 1.3.2

1. Cho dãy dừng $\{u_n\}_1^\infty$ (các số hạng của dãy từ số hạng thứ n_0 nào đó trở đi đều bằng nhau và bằng a). Khi đó dãy $\{u_n\}_1^\infty$ hội tụ đến a.

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.
   Thật vậy với $\epsilon > 0$ tuỳ ý, ta chọn số tự nhiên $n_0(\epsilon) > \frac{1}{\epsilon}$ (có vô số số tự nhiên như vậy). Khi đó $\frac{1}{n_0(\epsilon)} < \epsilon$ và với mỗi $n > n_0(\epsilon)$
$$|\frac{1}{n} - 0| < \frac{1}{n_0(\epsilon)} < \epsilon.$$

3. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1.$

   Tương tự như ví dụ trước với $\epsilon > 0$ tuỳ ý, ta chọn số tự nhiên $n_0(\epsilon) > \frac{1}{\epsilon}$. Khi đó với mỗi $n > n_0(\epsilon)$

$$|\frac{n}{n+1} - 1| = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n_0(\epsilon)} < \epsilon.$$

Nhận xét rằng trong định nghĩa trên bất đẳng thức $|u_n - L| < \epsilon$ cũng có nghĩa là $u_n \in U_\epsilon(L)$ (thuộc lận cận bán kính ϵ của L). Do vậy ta có thể phát biểu định nghĩa trên dưới dạng tương đương như sau

Định nghĩa 1.3.4 *Cho dãy số $\{u_n\}_1^\infty$, ta nói dãy hội tụ và có giới hạn bằng $L \in \mathbb{R}$, nếu cho trước một lận cận $U_\epsilon(L)$ tuỳ ý của L, tồn tại một số tự nhiên N sao cho với mỗi $n \geq N$ ta có $u_n \in U_\epsilon(L)$.*

Như vậy nếu dãy $\{u_n\}_1^\infty$ hội tụ và có giới hạn bằng L, khi đó mọi khoảng $(L-\epsilon, L+\epsilon)$ đều chứa tất cả các số hạng của dãy, có thể trừ ra một số hữu hạn các số hạng. Định lí sau là hệ quả của nhận xét này.

Định lí 1.3.1 *Mọi dãy hội tụ đều bị chặn.*

Định lí 1.3.2 *Nếu dãy số $\{a_n\}_1^\infty$ hội tụ, khi đó giới hạn của dãy là duy nhất.*

Chứng minh Giả sử $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ và $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = b$, trong đó $a \neq b$. Chọn $\epsilon = \frac{|a-b|}{2}$.
Do $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ nên tồn tại số tự nhiên N_1 để với mọi $n > N_1 :\ |a_n - a| < \epsilon$.
Do $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = b$, tồn tại số tự nhiên N_2 để với mỗi $n > N_2 :\ |a_n - b| < \epsilon$.
Chọn $n_0 = \max(N_1, N_2)$, khi đó với $n > n_0$:

$$|a-b| \leq |a-a_n| + |a_n - b| < \epsilon + \epsilon < 2\epsilon = |a-b|.$$

Điều đó vô lí. Vậy $a = b$. ■

Định nghĩa 1.3.5 *Ta nói dãy $\{u_n\}_1^\infty$ có giới hạn bằng $+\infty$ và kí hiệu:*

$$\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty,$$

nếu cho trước một số thực $K > 0$ tuỳ ý, tồn tại một số tự nhiên $n_0 = n_0(K)$ (n_0 phụ thuộc vào K) sao cho với mọi $n \geq n_0$ ta có:

$$u_n > K.$$

Tương tự dãy $\{u_n\}_1^\infty$ *có giới hạn bằng* $-\infty$ *và kí hiệu:*

$$\lim_{n\to\infty} u_n = -\infty,$$

nếu cho trước một số thực $K > 0$ *tuỳ ý, tồn tại một số tự nhiên* $n_0 = n_0(K)$ *(*n_0 *phụ thuộc vào* K*) sao cho với mọi* $n \geq n_0$ *ta có:*

$$u_n < -K.$$

Chú ý rằng khi giới hạn của dãy bằng $+\infty$ hoặc $-\infty$ cũng như khi dãy không có giới hạn, ta nói dãy đó phân kì.

Ví dụ 1.3.3

Các giới hạn sau được trực tiếp suy ra từ định nghĩa

1. $\lim\limits_{n\to\infty}(2n-1) = +\infty.$
2. $\lim\limits_{n\to\infty}(1-n) = -\infty.$

Nhận xét rằng với các khái niệm mở rộng về lân cận của $+\infty$ cũng như $-\infty$, tương tự như định nghĩa 1.3.4, định nghĩa trên có thể phát biểu như sau

Định nghĩa 1.3.6 *Ta nói dãy* $\{u_n\}_1^\infty$ *có giới hạn bằng* $+\infty$ *và kí hiệu:*

$$\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty,$$

nếu cho trước một lận cận $U(+\infty)$ *tuỳ ý của* $+\infty$*, tồn tại một số tự nhiên* n_0 *sao cho với mọi* $n \geq n_0$ *ta có* $u_n \in U(+\infty)$*.*

Tương tự $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = -\infty$ *nếu cho trước một lận cận* $U(-\infty)$ *tuỳ ý của* $-\infty$*, tồn tại một số tự nhiên* n_0 *sao cho với mọi* $n \geq n_0$ *ta có* $u_n \in U(-\infty)$*.*

Định lí sau là hiển nhiên

Định lí 1.3.3 *Nếu dãy* $\{a_n\}_1^\infty$ *hội tụ, các số hạng của dãy là các số dương* $a_n > 0$ *với mọi* $n = 1, 2, \ldots$ *và*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0,$$

khi đó

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = +\infty.$$

Tương tự nếu các số hạng của dãy $\{a_n\}_1^\infty$ *là các số âm và* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, *khi đó*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = -\infty.$$

Đảo lại nếu $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \pm\infty$, *khi đó*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = 0.$$

1.3.2 Dãy con và lim sup, lim inf của dãy số

Định nghĩa 1.3.7 *Cho dãy* $u_1, u_2, u_3, ..., u_n, ...$ *Giả sử*

$$n_1 < n_2 < ... < n_k < ...$$

là một dãy tăng thực sự các số tự nhiên nào đó, khi đó dãy số

$$u_{n_1}, u_{n_2}, u_{n_3}, ..., u_{n_k}, ...$$

được gọi là dãy con của dãy đã cho và kí hiệu là $\{u_{n_k}\}$ *hoặc* $\{u_{n_k}\}_{k=1}^\infty$.

Từ định nghĩa trên về dãy con dễ dàng chứng minh được

Định lí 1.3.4 *Nếu dãy* $\{a_n\}_1^\infty$ *hội tụ và* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, *khi đó mọi dãy con* $\{a_{n_k}\}$ *cũng hội và có chung giới hạn*

$$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a.$$

Người ta thường sử dụng định lí này để chứng minh một dãy số phân kì: nếu dãy $\{a_n\}_1^\infty$ tồn tại hai dãy con hội tụ tới hai giới hạn khác nhau khi đó dãy $\{a_n\}_1^\infty$ phân kì.

Ví dụ 1.3.4

Cho dãy $a_n = (-1)^n \frac{n^2}{2n^2+n+1}, n = 1, 2, ...$
Dãy con $u_n = a_{2n} = \dfrac{4n^2}{8n^2+2n+1}, n = 1, 2, ...$ hội tụ tới $\frac{1}{2}$.
Dãy con $v_n = a_{2n-1} = -\dfrac{4n^2-4n+1}{8n^2-6n+2}, n = 1, 2, ...$ hội tụ tới $-\frac{1}{2}$.
Vậy dãy đã cho phân kì.

Định nghĩa 1.3.8 *Cho dãy số $\{u_n\}_1^\infty$. Ta nói $a \in \overline{\mathbb{R}}$ là giới hạn riêng của dãy $\{u_n\}_1^\infty$, nếu tồn tại một dãy con $\{u_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ sao cho $\lim\limits_{k\to\infty} u_{n_k} = a$.*
Giới hạn riêng lớn nhất của dãy $\{u_n\}_1^\infty$ được kí hiệu là $\limsup\limits_{n\to\infty} u_n$ hoặc $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} u_n$.
Giới hạn riêng nhỏ nhất của dãy $\{u_n\}_1^\infty$ được kí hiệu là $\liminf\limits_{n\to\infty} u_n$ hoặc $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} u_n$.

Tương tự như khái niệm điểm tụ, ta có thể chứng minh tập các giới hạn riêng của dãy là một tập đóng và do vậy nếu $\{u_n\}_1^\infty$ là dãy bị chặn, khi đó nó có giới hạn riêng lớn nhất, giới hạn riêng nhỏ nhất. Đối với dãy không bị chặn trên (chặn dưới), ta quy nước $+\infty(-\infty)$ là giới hạn riêng lớn nhất (nhỏ nhất) của dãy. Hiển nhiên điều kiện cần và đủ để dãy có giới hạn là giới hạn riêng lớn nhất bằng giới hạn riêng nhỏ nhất

$$\lim_{n\to\infty} u_n = a \quad \Leftrightarrow \quad \limsup_{n\to\infty} u_n = \liminf_{n\to\infty} u_n = a.$$

Tương tự như cận trên đúng, cận dưới đúng, ta dễ dàng chứng minh được kết quả sau

Định lí 1.3.5 *Cho $\{u_n\}_1^\infty$ là dãy bị chặn, $\limsup\limits_{n\to\infty} u_n = a$ khi và chỉ khi*
• *Tồn tại tồn tại một dãy con $\{u_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ sao cho $\lim\limits_{k\to\infty} u_{n_k} = a$.*
• *Với bất kì $\varepsilon > 0$, chỉ tồn tại hữu hạn (hoặc không tồn tại) các số hạng của dãy lớn hơn $a + \varepsilon$.*
Tương tự, $\liminf\limits_{n\to\infty} u_n = b$ khi và chỉ khi
• *Tồn tại tồn tại một dãy con $\{u_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ sao cho $\lim\limits_{k\to\infty} u_{n_k} = a$.*
• *Với bất kì $\varepsilon > 0$, chỉ tồn tại hữu hạn (hoặc không tồn tại) các số hạng của dãy bé hơn $a - \varepsilon$.*

Ví dụ 1.3.5

1. Cho dãy số $a_n = (-1)^n \frac{n}{2n+1}$, khi đó $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n = \frac{1}{2}$ và $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n = -\frac{1}{2}$.

   Thật vậy dãy con $a_{2n} = \frac{2n}{4n+1}$ có giới hạn $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n} = \frac{1}{2}$. Mặt khác $\left|a_n\right| = \left|\frac{n}{2n+1}\right| < \frac{1}{2}$, theo định lí vừa phát biểu trên đây suy ra $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n = \frac{1}{2}$. Tương tự, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n = -\frac{1}{2}$.

2. Đối với dãy số $a_n = \sin n\frac{\pi}{2}$, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sin n\frac{\pi}{2} = 1$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sin n\frac{\pi}{2} = -1$.

   Thật vậy dãy con a_{4n+1} có giới hạn bằng 1, dãy con a_{4n-1} có giới hạn bằng -1 và $|a_n| \le 1$. Suy ra 1 là giới hạn riêng lớn nhất, -1 là giới hạn riêng nhỏ nhất của dãy đã cho.

1.3.3 Tính chất và các phép toán về giới hạn dãy số

Cho dãy $\{a_n\}_1^\infty$ hội tụ và $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Từ định nghĩa dãy hội tụ ta suy ra các tính chất sau

- $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - a) = 0$.
- Nếu $a_n > 0$ với mọi $n > n_0$ nào đó, khi đó giới hạn $a \ge 0$.
- Nếu $a > 0$, khi đó tồn tại số tự nhiên n_0, sao cho với mọi $n > n_0$, $\quad a_n > 0$.

Ta có định lí sau về các phép toán giữa các dãy hội tụ

Định lí 1.3.6 *Giả sử dãy $\{a_n\}_1^\infty$ và dãy $\{b_n\}_1^\infty$ hội tụ*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a, \quad \lim_{n\to\infty} b_n = b.$$

Khi đó các dãy $\{a_n + b_n\}, \{a_n - b_n\}, \{a_n \cdot b_n\}$ cũng hội và

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b, \quad \lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = a - b, \quad \lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b.$$

Hơn nữa nếu $b \neq 0$ khi đó dãy $\frac{a_n}{b_n}$ cũng hội tụ và

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}.$$

Chú ý rằng định lí vẫn đúng (bạn đọc tự chứng minh) nếu ta quy ước như sau:

$$(+\infty) + (+\infty) = +\infty; (-\infty) + (-\infty) = -\infty; (+\infty) - (-\infty) = +\infty$$

$$(+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty; (+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty; (-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty$$

Các dạng còn lại

$$(+\infty) - (+\infty); \quad \frac{+\infty}{+\infty}; \quad \frac{-\infty}{+\infty}; \quad 0 \cdot (+\infty); \quad \frac{0}{0}$$

thường được gọi là các dạng vô định.
Chứng minh Ta sẽ chứng minh nếu

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a, \quad \lim_{n\to\infty} b_n = b.$$

Khi đó $\{a_n \cdot b_n\}$ cũng hội và $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b$. Các khẳng định khác được chứng minh tương tự.
Thật vậy cho $\varepsilon > 0$ tùy ý. Theo giả thiết dãy $\{b_n\}$ hội tụ nên nó bị chặn, suy ra tồn tại số M sao cho $|a| \le M$ và $|b_n| \le M$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

$$|a_n \cdot b_n - a \cdot b| = |a_n \cdot b_n - a \cdot b_n + a \cdot b_n - a \cdot b| = |(a_n - a)b_n + a(b_n - b)| \le$$

$$\le |a_n - a| \cdot |b_n| + |a| \cdot |b_n - b| \le M \cdot |a_n - a| + M \cdot |b_n - b|.$$

Mặt khác $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ suy ra tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}^*$ sao cho với mọi $n > n_0$

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2M}, \quad |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2M}.$$

Do đó

$$|a_n \cdot b_n - a \cdot b| \le M \cdot |a_n - a| + M \cdot |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \forall n > n_0. \blacksquare$$

Định lí 1.3.7 *Giả thiết rằng dãy $\{a_n\}_1^\infty$ có giới hạn: $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Khi đó dãy $\{|a_n|\}_1^\infty$ cũng có giới hạn và*

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = |a|.$$

Chứng minh

Ta hạn chế chỉ chứng minh định lí trong trường hợp a hữu hạn. (Trường hợp $a = \pm\infty$ bạn đọc tự chứng minh). Khi đó định lí được suy ra từ bất đẳng thức

$$\big||a_n| - |a|\big| \le |a_n - a|. \quad \blacksquare$$

Định lí sau là hiển nhiên (bạn đọc tự chứng minh) và nó được sử dụng không ít lần trong suốt giáo trình này

Định lí 1.3.8 *Cho hai dãy số* $\{a_n\}_1^\infty$ *và* $\{b_n\}_1^\infty$*. Giả sử dãy* $\{a_n\}_1^\infty$ *bị chặn và*

$$\lim_{n\to\infty} b_n = 0.$$

Khi đó dãy $\{a_n \cdot b_n\}_1^\infty$ *cũng hội và*

$$\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = 0.$$

<u>Bài tập</u>

1. Hãy cho một ví dụ về dãy $\{a_n\}_1^\infty$ *sao cho dãy trị tuyệt đối* $\{|a_n|\}_1^\infty$ *có giới hạn, song dãy* $\{a_n\}_1^\infty$ *không có giới hạn.*

2. Chứng minh rằng hoán vị các số hạng của một dãy hội tụ ta thu được một dãy cũng hội tụ và có cùng giới hạn.

Định lí 1.3.9 (Nguyên lí kẹp) *Cho 3 dãy số* $\{a_n\}, \{b_n\}$ *và* $\{c_n\}$ *thoả mãn các điều kiện*

$$a_n \le c_n \le b_n \quad \text{với mọi} \quad n \ge n_0,$$

n_0 *là một số tự nhiên nào đó. Giả thiết tiếp rằng*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = a.$$

Khi đó dãy $\{c_n\}_1^\infty$ *cũng tồn tại giới hạn và*

$$\lim_{n\to\infty} c_n = a.$$

Chứng minh

Cho $\epsilon > 0$ tuỳ ý. Từ nhận xét sau định nghĩa 1.3.4, tồn tại N_1 và N_2 sao cho với mọi $n > \max(N_1, N_2)$, các số hạng a_n và b_n của 2 dãy $\{a_n\}, \{b_n\}$ đều thuộc lân cận $U_\epsilon(a)$ của a. Mặt khác theo giả thiết $a_n \le c_n \le b_n$ với mọi $n \ge n_0$, suy ra nếu chọn $N_\epsilon = \max(n_0, N_1, N_2)$ và khi $n > N_\epsilon$ các số hạng c_n của dãy $\{c_n\}$ cũng thuộc lân cận $U_\epsilon(a)$. Nói cách khác với $n > N_\epsilon$:

$$|c_n - a| < \epsilon.$$

Suy ra điều phải chứng minh: $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = a.$ ■

Nhận xét rằng định lí 1.3.8 được suy ra từ nguyên lí kẹp nói trên. Dãy $\{a_n\}_1^\infty$ bị chặn, suy ra

$$|a_n \cdot b_n| \le M|b_n| \quad \text{hay} \quad -M|b_n| \le a_n \cdot b_n \le M|b_n|,$$

trong đó $|a_n| \le M \ \forall n$ và theo định lí 1.3.7, $\lim\limits_{n\to\infty} M|b_n| = 0$. Áp dụng nguyên lí kẹp, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = 0$.

Ví dụ 1.3.6

1. Với $a > 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$. Thật vậy, xét trường hợp $a > 1$

$$a = (1 + \sqrt[n]{a} - 1)^n \geq 1 + n(\sqrt[n]{a} - 1) \Rightarrow 0 < \sqrt[n]{a} - 1 \leq \frac{a-1}{n} \to 0.$$

   Áp dụng nguyên lí kẹp, suy ra $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.
   Trường hợp $0 < a < 1$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{a}} = 1 \text{ hay } \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{a}} = 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1.$$

2. Tương tự như ví dụ trước, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ được suy ra từ nguyên lí kẹp và các bất đẳng thức

$$n = (1 + \sqrt[n]{n} - 1)^n > \frac{n(n-1)}{2}(\sqrt[n]{n} - 1)^2 \text{ hay } 0 < (\sqrt[n]{n} - 1)^2 < \frac{2}{n}.$$

3. Tìm giới hạn $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$, với

$$u_n = \frac{n^2+1}{n^3+n+1} + \frac{n^2+2}{n^3+n+2} + \cdots + \frac{n^2+n}{n^3+n+n}.$$

   Dễ dàng chứng minh các bất đẳng thức sau

$$\frac{n(n^2+1)}{n^3+n+n} < u_n < \frac{n(n^2+n)}{n^3+n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

   Áp dụng nguyên lí kẹp, suy ra $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 1$.

Định lí 1.3.10 (Dãy đơn điệu)

1. *Nếu dãy $\{u_n\}_1^\infty$ đơn điệu tăng và bị chặn trên, khi đó dãy hội tụ và*

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \sup_n u_n.$$

2. *Nếu dãy $\{u_n\}_1^\infty$ đơn điệu giảm và bị chặn dưới, khi đó dãy hội tụ và*

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \inf_n u_n.$$

Chú ý $\sup\limits_{n} u_n$ được hiểu là cận trên đúng, $\inf\limits_{n} u_n$ được hiểu là cận dưới đúng của tập hợp gồm các phần tử $\{u_n, \quad n \in \mathbb{N}^*\}$.

Chứng minh

Từ định nghĩa về cận trên đúng (supremum), bất kì một lân cận nào của $L = \sup\limits_{n} u_n$ cũng chứa một phần tử u_{n_0} nào đó. Theo giả thiết dãy $\{u_n\}_1^\infty$ đơn điệu tăng

$$u_{n_0} \leq u_{n_0+1} \leq u_{n_0+2} \leq ...$$

nên với mọi $n > n_0$, các số hạng u_n cũng thuộc lân cận nói trên. Vậy dãy $\{u_n\}_1^\infty$ hội tụ và $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = L = \sup\limits_{n} u_n$. Trường hợp dãy đơn điệu giảm được chứng minh tương tự. ■

Ví dụ 1.3.7

1. Dãy số $\{u_n\}$ được xác định như sau

   $$a > 0, u_1 = \sqrt{a}, u_n = \sqrt{a + u_{n-1}} \quad \forall n > 1.$$

   Bằng quy nạp ta dễ dàng chứng minh $u_{n+1} > u_n$ $\forall n > 1$, nói cách khác dãy $\{u_n\}$ đơn điệu tăng. Mặt khác

   $$u_n = \sqrt{a + u_{n-1}} < \sqrt{a + u_n} \;\Rightarrow u_n^2 < a + u_n \quad \text{hay} \quad u_n < \frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2},$$

   dãy số $\{u_n\}$ bị chặn trên. Áp dụng định lí vừa chứng minh, suy ra tồn tại giới hạn $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = x$. Từ đẳng thức $u_n = \sqrt{a + u_{n-1}}$ cho $n \to \infty$ ta được

   $$x = \sqrt{a + x} \quad \text{suy ra dãy có giới hạn} \quad x = \frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}.$$

2. Ta sẽ chứng minh dãy

   $$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad n = 1, 2, 3, ...$$

   đơn điệu tăng và bị chặn. Khi đó dãy $\{a_n\}_1^\infty$ hội tụ và ta kí hiệu giới hạn của dãy là số e:

   $$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy với tích của $n+1$ số dương, ta thấy dãy a_n đơn điệu tăng:

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot 1 <$$

$$< \left(\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)+\left(1+\frac{1}{n}\right)+\cdots+\left(1+\frac{1}{n}\right)+1}{n+1}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1},$$

hay $a_n < a_{n+1}, \ \forall n > 1$. Để chứng minh dãy a_n bị chặn, xét

$$\frac{1}{4}a_n = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n}\right) <$$

$$< \left(\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\left(1+\frac{1}{n}\right)+\cdots+\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n+2}\right)^{n+2} = \left(\frac{n+2}{n+2}\right)^{n+2} = 1.$$

Suy ra $a_n < 4$ với mọi n. Vậy dãy a_n bị chặn kéo theo dãy đó hội tụ tới số e. Người ta chứng minh được rằng e là số vô tỉ (thậm chí là số siêu việt) và

$$e \approx 2,71828182845...$$

Định lí 1.3.11 (Bolzano) *Một dãy số bất kì đều chứa một dãy con mà dãy con đó có giới hạn (giới hạn đó có thể bằng $+\infty$ hoặc $+\infty$).*

Mọi dãy số bị chặn đều chứa một dãy con hội tụ.

Chứng minh

I. Xét trường hợp dãy $\{a_n\}_1^\infty$ không bị chặn trên. Khi đó dễ dàng chọn ra được một dãy con $\{a_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ sao cho

$$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = +\infty.$$

Hoàn toàn tương tự đối với dãy không bị chặn dưới.

II. Bây giờ ta giả thiết dãy $\{a_n\}_1^\infty$ bị chặn. Nếu dãy đó chứa một dãy con dừng (một dãy con mà mọi phần tử của dãy đều bằng nhau), trong trường hợp đó dãy con dừng chính là dãy con hội tụ. Do vậy ta sẽ hạn chế việc chứng minh định lí trong trường hợp dãy đã cho không chứa một dãy con dừng nào cả. Điều đó cũng có nghĩa là dãy $\{a_n\}_1^\infty$ xét về mặt tập hợp là tập vô hạn. Khi đó theo định lí 1.2.4 (cũng mang tên Bolzano), tập $\{a_n\}_1^\infty$ có điểm tụ α nào đó. Hiển nhiên α là số hữu hạn do dãy $\{a_n\}_1^\infty$ bị chặn. Bây giờ ta sẽ xây dựng cách chọn ra một dãy con hội tụ tới α.

Xét một lân cận bán kính bằng 1 của α: $U_1(\alpha) = (\alpha - 1, \alpha + 1)$, do α là điểm tụ nên tồn tại ít nhất một phần tử a_{n_1} nào đó của dãy $\{a_n\}_1^\infty$ sao cho $a_{n_1} \in (\alpha - 1, \alpha + 1)$.

Xét tiếp một lân cận bán kính bằng $\frac{1}{2}$ của α: $U_{\frac{1}{2}}(\alpha) = (\alpha - \frac{1}{2}, \alpha + \frac{1}{2})$, do α là điểm tụ nên tồn tại ít nhất một phần tử a_{n_2} nào đó của dãy $\{a_n\}_1^\infty$ sao cho $a_{n_2} \in (\alpha - \frac{1}{2}, \alpha + \frac{1}{2})$ và $n_1 < n_2$.

Bằng quy nạp giả sử $a_{n_1}, a_{n_2}, ..., a_{n_{k-1}}$ đã được chọn từ dãy $\{a_n\}_1^\infty$ và $n_1 < n_2 < ... < n_{k-1}$. Xét lân cận bán kính bằng $\frac{1}{k}$ của α: $U_{\frac{1}{k}}(\alpha) = (\alpha - \frac{1}{k}, \alpha + \frac{1}{k})$, do α là điểm tụ nên tồn tại ít nhất một phần tử a_{n_k} nào đó của dãy $\{a_n\}_1^\infty$ sao cho $a_{n_k} \in (\alpha - \frac{1}{k}, \alpha + \frac{1}{k})$ và $n_{k-1} < n_k$.

....

Cứ tiếp tục mãi nư vậy, ta thu được một dãy con $\{a_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ có tính chất

$$a_{n_k} \in (\alpha - \frac{1}{k}, \alpha + \frac{1}{k}) \quad \text{hay} \quad |a_{n_k} - \alpha| < \frac{1}{k} \quad k = 1, 2, ...$$

Suy ra dãy con $\{a_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ hội tụ và $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = \alpha$. ■

Định nghĩa 1.3.9 *Dãy số $\{u_n\}_1^\infty$ được gọi là dãy Cauchy nếu với mỗi $\epsilon > 0$ tuỳ ý, tồn tại một số tự nhiên $n_0 = n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}^*$ (n_0 phụ thuộc vào ϵ) sao cho*

$$|u_n - u_m| < \epsilon \quad \textit{với tất cả} \quad m, n > n_0.$$

Ý nghĩa hình học của dãy Cauchy là khoảng cách giữa hai số hạng u_n và u_m của dãy Cauchy nhỏ tùy ý khi m, n đủ lớn.

Định lí 1.3.12 (Cauchy) *Dãy số $\{a_n\}_1^\infty$ hội tụ khi và chỉ khi nó là dãy Cauchy.*

Chứng minh Điều kiện cần. Giả thiết rằng dãy $\{a_n\}_1^\infty$ hội tụ và $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$. Cho $\epsilon > 0$ tuỳ ý, khi đó tồn tại một số tự nhiên n_0 sao cho với mọi $k > n_0$ ta luôn có

$$|a_k - \alpha| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Như vậy với mọi $m, n > n_0$

$$|a_n - a_m| = |(a_n - \alpha) + (\alpha - a_m)| \leq |a_n - \alpha| + |\alpha - a_m)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Điều đó chứng minh dãy $\{a_n\}_1^\infty$ là dãy Cauchy.
Điều kiện đủ. Giả thiết dãy $\{a_n\}_1^\infty$ là dãy Cauchy. Trước hết ta chứng minh dãy đó bị chặn. Sử dụng định nghĩa dãy Cauchy với $\epsilon = 1$, tồn tại số tự nhiên N_1 để với mọi $n > N_1$

$$|a_n - a_{N_1}| < 1 \quad \text{hay} \quad a_{N_1} - 1 < a_n < a_{N_1} + 1.$$

Điều đó có nghĩa là dãy $a_{N_1+1}, a_{N_1+2}, a_{N_1+3}, ...$ bị chặn. Do vậy cùng với hữu hạn số hạng

$$a_1, a_2, ..., a_{N_1}$$

dãy đã cho $\{a_n\}_1^\infty$ bị chặn.

Theo định lí Bolzano nói trên, dãy bị chặn $\{a_n\}_1^\infty$ chứa một dãy con $\{a_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ hội tụ

$$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = \alpha.$$

Ta sẽ chỉ ra dãy ban đầu $\{a_n\}_1^\infty$ cũng hội tụ và có giới hạn đúng bằng α (giới hạn của dãy con).

Thật vậy cho $\epsilon > 0$ tuỳ ý, khi đó tồn tại một số tự nhiên n_0 sao cho với mọi $m, n > n_0$ ta luôn có

$$|a_m - a_n| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Mặt khác do dãy con $\{a_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ hội tụ nên tồn tại số tự nhiên n_{k_0} nào đó sao cho $n_{k_0} > n_0$ và

$$|a_{n_{k_0}} - \alpha| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Khi đó với mọi $n > n_0$

$$|a_n - \alpha| \leq |a_n - a_{n_{k_0}}| + |a_{n_{k_0}} - \alpha| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Vậy dãy $\{a_n\}_1^\infty$ hội tụ và $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$. ■

Từ định lí Cauchy ta có nhận xét, để khẳng định một dãy số hội tụ, người ta không nhất thiết phải biết giới hạn của dãy mà chỉ cần biết mối quan hệ giữa các số hạng của dãy với nhau.

Ví dụ 1.3.8

Xét dãy

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \quad n = 1, 2, ...$$

Trước hết ta chứng minh dãy $\{a_n\}_1^\infty$ không hội tụ. Để chứng minh điều đó ta khẳng định rằng dãy $\{a_n\}_1^\infty$ không là dãy Cauchy. Thật vậy xét

$$|a_{2n} - a_n| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \geq n\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Điều đó đúng với mọi số tự nhiên n, suy ra dãy $\{a_n\}_1^\infty$ không là dãy Cauchy. Theo định lí trên dãy không hội tụ.

Tuy nhiên do dãy $\{a_n\}_1^\infty$ đơn điệu tăng, vậy

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) = +\infty.$$