# Содержание

# Предметный указатель

# 1 Вычисление меры множества.

При вычислении меры мн-ва $A$ пользуемся неравенством:

$$0 \leqslant \mu(A) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} A_n$$

где $A_n$ - элемент покрытия множества. Таким образом, чтобы решить задачу, мы придумываем покрытие нашего множества, которое должно либо сходится к числу (как например мера прямоугольнка в плоскости - его площадь), либо сходится к нулю, как мера прямой в плоскости, либо сходится к бесконечности (в задачах обычно означает что неправильно построил покрытие)

*Пример.* Рассмотрим меру бесконечной биссектрисы на плоскости. Введем следующее покрытие: до единицы покрываем биссектрису квадратами со стороной $\frac{1}{n}$, до двойки покрываем биссектрису квадратами $\frac{1}{n^2}$. Таким образом, мера биссектрисы будет ограниченна

$$0 \leqslant \mu(A) \leqslant \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n^i}$$

(в пределе мы уменьшаем размер квадратов) выражение под пределом представляет собой бесконечно убывающую геометрическую прогрессию

$$0 \leqslant \mu(A) \leqslant \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n-1}$$

отсюда следует что

$$\mu(A) = 0$$

# 2 Вычисление интеграла.

## 2.1 Интеграл Лебега

Если функция $f$ простая - разбиваем пространство на подпространства, где подынтегральная функция принимает фиксированное значение.

*Формальное определение*

$$\int_A f(x) d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} y_i \mu(A_i)$$

где $y_i$ - значение функции на выбранном интервале, $\mu(A_i)$ - мера выбранного интервала.

**Пример. 1**

$$\int_{[-2;+\infty)} 2^{-[x]} dx = \mu[-2;-1) \cdot 2^2 + \mu[-1;0) \cdot 2^1 + \sum_{n=0}^{\infty} \mu[n;n+1) \cdot 2^{-n} = 4 + 2 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 7 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

Вычисляем сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии

$$\int_{[-2;+\infty)} 2^{-[x]} dx = 7 + \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 8$$

**Советы.** При решении задач с *Канторовой лестницей* полезно знать, что:

- ◁ $A_{nk} = \left(\frac{3^k-2}{3^n}; \frac{3^k-1}{3^n}\right)$
- ◁ $x_0 \in A_{nk} \Rightarrow C(x_0) = \frac{2k-1}{2^n}$
- ◁ $\mu(A_{nk}) = \frac{1}{3^n}$
- ◁ $n = 1..\infty,\ k = 1..2^{n-1}$

## 2.2 Интеграл Лебега-Стилтьеса

Мера вычисляется по следующим правилам:

- ◁ Для отрезка: $\mu_F[a,b) = F(b) - F(a)$
- ◁ Для точки: $\mu(\{c\}) = F(c+0) - F(c)$
  Если в т. $c$ нет разрыва, то $\mu(\{c\}) = 0$

Интеграл формально

$$\int\limits_A x(t) d\mu_F = \int\limits_A x(t) dF(t)$$

*Функция Хевисайда* $\chi(t)$

$$\chi(t) = \begin{cases} 0, & t \leqslant 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$$

**Пример. 1** Вычислить $\int\limits_R x(t) d_{\chi(t-a)} = \int\limits_R x(t) d\chi(t-a)$

Решение:

$$\int\limits_R x(t) d\chi(t-a) \overset{\text{разбиваем в точке разрыва на области}}{=}$$

$$= \int\limits_{(-\infty;a)} x(t) d\chi(t-a) + \int\limits_{\{a\}} x(t) d\chi(t-a) + \int\limits_{(a;+\infty)} x(t) d\chi(t-a)$$

Первое слагаемое:

$$\mu_\chi(-\infty, a) = \chi(a-a) - \chi(-\infty) = \chi(0) - \chi(-\infty) = 0$$

Третье слагаемое:

$$\mu_\chi(a, +\infty) = \chi(\infty) - \chi(a - a + 0) = \chi(\infty) - \chi(0+0) = 1 - 1 = 0$$

Остается:

$$\int\limits_R x(t) d_{\chi(t-a)} = \int\limits_{\{a\}} x(t) d\chi(t-a) = x(a)\mu_\chi(\{a\}) =$$

$$= x(a)\left(\chi(a-a+0) - \chi(a-a)\right) = x(a)(1-0) = x(a)$$

## 2.3 Перестановка предела и интеграла

Пользуешься теоремой Лебега:

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_C f\,\mathrm{d}g = \left| \begin{array}{l} 1)\ |f| \leqslant 1 \text{ на } [0,1] \\ 2)\ \int\limits_C \mathrm{d}g < \infty \end{array} \quad \Rightarrow \text{ т. Лебега} \right| = \int\limits_C \lim_{n\to\infty} f\,\mathrm{d}g$$

С непрерывной функцией тоже можно осуществить предельный переход:

$$\lim_{n\to\infty} C(t^n) = C(\lim_{n\to\infty} t^n), \quad t \in [0,1]$$

**Общие советы**

1. Разбей на области, с границами в точках разрыва дифференциала
2. Ищи области в которых выражение под дифференциалом не изменяется - эти области можно приравнять нулю

**Пример 1. Кусочная функция**

$$\int\limits_{[0,10]} t^2\,\mathrm{d}g(t), \quad g(t) = \begin{cases} t, & 0 \leqslant t \leqslant 1 \\ t+3, & 1 < t \leqslant 4 \\ 7, & 4 < t \leqslant 6 \\ t^2, & t > 6 \end{cases}$$

$$\int\limits_{[0,10]} t^2\,\mathrm{d}g(t) = \int\limits_{[0,1)} t^2\,\mathrm{d}t + \int\limits_{(1,4]} t^2\,\mathrm{d}(t+3) + \int\limits_{(4,6)} t^2\,\mathrm{d}7 + \int\limits_{(6,10)} t^2\,\mathrm{d}t^2 + \int\limits_{\{1\}} t^2\,\mathrm{d}g + \int\limits_{\{6\}} t^2\,\mathrm{d}g =$$
$$= \int\limits_0^1 t^2\,\mathrm{d}t + \int\limits_1^4 t^2\,\mathrm{d}t + \int\limits_6^{10} 2t^3\,\mathrm{d}t + 1^2\mu_g\{1\} + 6^2\mu_g\{6\} =$$
$$= \left.\frac{t^3}{3}\right|_0^4 + \left.\frac{t^4}{2}\right|_6^{10} + 1(g(1+0) - g(1)) + 36(g(6+0) - g(6)) =$$
$$= \frac{64}{3} + \frac{10^4 - 6^4}{2} + 1(4-1) + 36(36-7)$$

*точки разрыва под дифференциалом прорабатываем отдельно как интеграл Лебега-Стилтьеса*

# 3 Сжимающие отображения. Доказательство существования неподвижной точки.

**Пример 1.** Алгоритм кратко:

1. Определили рекурентную формулу для последовательности
2. Определили в каких границах лежит $x_n$
3. Определили в каких границах лежит отображение (рекурентное соотношение) $f(x) = 2 + \dfrac{1}{x_n}$
4. Т.к. отображение лежит внутри исходного отрезка, это отображение сжимающее
5. Выбираем метрику, считаем $\rho(f(x), f(y))$ (просто подставляем значения и пытаемся вывести оттуда ту же метрику, только относительно исходного отрезка)
6. Подсчитали неподвижную точку предельным переходом $x^* = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ (подставили в рекурентное соотношение и нашли значение)

Есть числовая последовательность 2; $2+\dfrac{1}{2}$; $2+\dfrac{1}{2+\frac{1}{2}}$; …. Надо определить является ли последовательность сходящейся. Если является - найти её предел.

*Решение:*

$$x_{n+1} = 2 + \frac{1}{x_n}, \quad x_1 = 2, \quad n = 1, 2, \ldots$$
$$x_n \geqslant 2 \Rightarrow \frac{1}{x_n} \leqslant \frac{1}{2}$$
$$2 \leqslant x_{n+1} \leqslant 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2} \Rightarrow x_n \in \left[2; \frac{5}{2}\right]$$

Рассммотрим отображение $f(x) = 2 + \dfrac{1}{x}$ на отрезке $x \in [2; \dfrac{5}{2}] \Rightarrow$

$$\frac{2}{5} \leqslant \frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{2} \Rightarrow 2 + \frac{2}{5} \leqslant 2 + \frac{1}{x} \leqslant 2 + \frac{1}{2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{12}{5} \leqslant f(x) \leqslant \frac{5}{2}$$

Полученный отрезок находится внутри исходного отрезка:

$$\left[\frac{12}{5}, \frac{5}{2}\right] \subset \left[2; \frac{5}{2}\right] \Rightarrow f(x) \text{ отображает } \left[2; \frac{5}{2}\right] \text{ в себя.}$$

Можно проверить является ли отображение сжимающим:

$$\rho(f(x), f(y)) \leqslant \alpha \cdot \rho(x, y),\ (\alpha\alpha < 1)$$

Нужно определить метрику: $\mathbb{R}$, $\rho(a, b) = |a - b|$. Таким образом

$$\begin{aligned}\rho(f(x), f(y)) &= \big|f(x) - f(y)\big| = \left|2 + \frac{1}{x} - \Big(2 + \frac{1}{y}\Big)\right| = \\ &= \Big|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\Big| = \Big|\frac{y - x}{xy}\Big| = \frac{|x - y|}{|x| \cdot |y|} = \\ &= \frac{1}{|x| \cdot |y|} \cdot \rho(x, y) \leqslant\end{aligned}$$

Вспоминаем в каких пределах у нас $\frac{1}{x}\Big(\frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{2}\Big)$

$$\leqslant \frac{1}{4} \cdot \rho(x, y)$$

$\Rightarrow$ отображение сжимающее (пр-во полное) $\Rightarrow$ отображение имеет единственную неподвижную точку:

$$x^* = \lim_{n \to \infty} x_n,\ \text{где } x_n = f(x_{n-1})$$

вспоминаем что

$$x_{n+1} = 2 + \frac{1}{x_n}$$

Переходим к пределу

$$\begin{aligned}&x^* = 2 + \frac{1}{x^*}\\ &x^* = 1 \pm \sqrt{2}\\ &2 \leqslant 1 + \sqrt{2} \leqslant \frac{5}{2}\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ посл-ть сходится к точке $x^* = 1 + \sqrt{2}$

**Пример 2.** Отображение задано следующим образом:

$$f:\ C[0,1]\ \to\ C[0,1]$$
$$f(x) = \frac{5}{6}t + \frac{1}{2}\int_0^1 t\tau x(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

Определяем метрику: пространство $C[0,1]$, метрика $\rho(x, y) = \max\limits_{0 \leqslant t \leqslant 1} |x(t) - y(t)|$

Подставляем:

$$\rho(f(x), f(y)) = \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} |f(x) - f(y)| = \frac{1}{2} \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} \Big| \int_0^1 t\tau(x(\tau) - y(\tau))\,\mathrm{d}\tau \Big| \leqslant$$

Оценим модуль

$$\leqslant \frac{1}{2} \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} \int_0^1 |t| \cdot |\tau| \cdot |x(\tau) - y(\tau)|\,\mathrm{d}\tau$$

- $\triangleleft$ $|t|$ не зависит от подинтегрального выражение $\Rightarrow$ можем вынести
- $\triangleleft$ $|x(\tau) - y(\tau)| \leqslant \max\limits_{0 \leqslant \tau \leqslant 1} |x(\tau) - y(\tau)| = \rho(x, y)$ ограничено

Продолжаем интеграл

$$\leqslant \frac{1}{2}\rho(x,y)\cdot \max_{0\leqslant t\leqslant 1}|t|\cdot \int\limits_0^1 |\tau|\,\mathrm{d}\tau \leqslant \frac{1}{4}\rho(x,y)$$

$\Rightarrow$ отображение явл. сжимающим $\Rightarrow$ существует неподвижная точка $x^* = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Надо для начала построить последовательность. Возьмем в качестве начального элемента - ноль:

$$\begin{aligned}
&x_0(t) = 0\\
&x_1 = f(x_0) = \frac{5}{6}t + \frac{1}{2}\int\limits_0^1 t\tau\cdot x_0(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \frac{5}{6}t\\
&x_2(t) = f(x_1) = \frac{5}{6}t + \frac{1}{2}\int\limits_0^1 t\tau x_1(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \frac{5}{6}t + \frac{1}{2}\int\limits_0^1 t\tau\frac{5}{6}\tau\,\mathrm{d}\tau = \frac{5}{6}t + \frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}t = \Big(\frac{5}{6}+\frac{5}{6^2}\Big)t\\
&x_3(t) = \Big(\frac{5}{6}+\frac{5}{6^2}+\frac{5}{6^3}\Big)t\\
&x_n(t) = \Big(\frac{5}{6}+\ldots+\frac{5}{6^n}\Big)t
\end{aligned}$$

*формально мы сделали так:* $x_0(t) = 0,\ x_1(t) = Ax_0,\ x_2 = Ax_1, \ldots$ Получаем следующее:

$$\begin{aligned}
&x^*(t) = \lim_{n\to\infty} x_n(t) = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{5}{6^n}\cdot t\right) = t\cdot 5\frac{\frac{1}{6}}{1-\frac{1}{6}} = t\\
&x^*(t) = t
\end{aligned}$$

**Пример 3. ДЗ** Является ли отображение $f(x) = x^2$ сжимающим на

1. на $\left[0, \frac{1}{4}\right]$
2. на $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right]$

Если является, найти неподвижную точку

**Пример 4. ДЗ** Есть оператор $Ax = 1 + \frac{1}{2}\int\limits_0^1 ts^2x(s)\,\mathrm{d}s,\ A: C[0,1] \to C[0,1]$. Является ли отображение сжимающим, если является, найти неподвижную точку

**Замечания**

1. Если $f(x)$ - отображение сжимающее, то $x^*$ ищется из уравнения
$$f(x*) = cx^*,\quad (c = 1)$$
2. $f(x)$ используется для функционалов
$$f:\ M\ \to\ \mathbb{R}$$
*отображение метрического пространства на числовую прямую*
3. Отображение $A:\ M_1\ \to\ M_2$, $A$ - оператор (*отображение из одного метрического пространства, в другое*)

# 4 Вычисление нормы линейного ограниченного функционала.

## 4.1 Теория

**Функционал** - отображение метрического пространства на числовую ось ($f: M\to\mathbb{R}$, $f$ - функционал).

**Линейность функционала.** $f$ - ***линеен***, если

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$$

**Ограниченность функционала.**

**Норма функционала.**

$$\|f\| = \sup_{x:\|x\|\leqslant 1} |f(x)| = \sup_{x\neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|}$$

**Норма оператора.**

$$\|A\| = \sup_{x:\|x\|\leqslant 1} \|Ax\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

## 4.2 Примеры

**Пример 1.**

$$f : l_3 \to \mathbb{R}, \quad x \in l_3 \Rightarrow \ x = (x_1, x_2, \ldots)$$
$$f(x) = x_1$$

Выпишем норму икса (в пространстве $l_3$):

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^3\right)^{\frac{1}{3}}$$

Выпишем норму функционала:

$$|f(x)| = |x_1| = \left(|x_1|^3\right)^{\frac{1}{3}} \leqslant \left(|x_1|^3 + |x_2|^3\right)^{\frac{1}{3}} \leqslant \|x\|$$

Воспользуемся вторым видом определения нормы:

$$\|f\| = \sup_{x\neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|} \leqslant \sup_{x\neq 0} \frac{\|x\|}{\|x\|} = 1$$

*оценили норму сверху единицей*

Оценим норму $\|f\|$ снизу. Для этого выберем какой-то элемент принадлежащий $l_3$: $x_0 \in l_3$, пусть $x_0 = (1, 0, \ldots)$. Тогда норма этого элемента $\|x_0\| = 1$. Находим значение модуля функционала: $|f(x_0)| = 1$

$$\forall x \neq 0 \Rightarrow \sup_{x\neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|} \geqslant \frac{|f(x_0)|}{\|x_0\|} = 1$$

Сравнимаем оценки сверху и снизу:

$$1 \leqslant \|f\| \leqslant 1 \Rightarrow \ \|f\| = 1$$

**Пример 2.**

$$f : C[0,1] \to \mathbb{R}$$
$$f(x) = \int_0^1 x(t)\,\mathrm{d}t, \quad \|f\| - ?$$

Общий алгоритм:

1. Находим норму метрического пространства

2. Находим модуль функционала

Пытаемся затем оценить его (различные сомножители можно оценить числом, либо выделить где-нибудь норму по иксу)

Ограничивая сверху, пытаемся привести к норме метрического пространства (скорее всего надо будет добавить члены от которых выражение точно меньше не станет)

Ограничивая снизу подбираем такой элемент, чтобы оценка получилась точной

В случае пространства $l_n$ можно использовать равенство и неравенство Гёльдера (см пример 8)

Норма по непрерывным функциям:

$$\|x\| = \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} |x(t)|$$

Модуль функционала:

$$|f(x)| = \left| \int_0^1 x(t)\,\mathrm{d}t \right| \leqslant \int_0^1 |x(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} |x(t)|\,\mathrm{d}t =$$

Т.к. $\max\limits_{0 \leqslant t \leqslant 1} |x(t)|$ это число - его можно вынести

$$= \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} |x(t)| \cdot \int_0^1 dt = \|x\| \Rightarrow \|f\| \leqslant 1$$

*ограничили сверху*

Ограничим снизу. Возьмем элемент:

$$x_0(t) \in C[0,1], \quad x_0(t) = 1$$
$$\|x_0\| = 1$$
$$|f(x_0)| = \left| \int_0^1 x_0\,\mathrm{d}t \right| = 1 \Rightarrow \ \|f\| \geqslant 1$$

Сравнивая оценки снизу и сверху:

$$1 \leqslant \|f\| \leqslant 1 \Rightarrow \quad \|f\| = 1$$

**Пример 3.**

$$f : L_2[0,1] \to \mathbb{R}$$
$$f(x) = \int_0^1 x(t^2)\,\mathrm{d}t, \quad \|f\| - ?$$

**Решение.** Для начала преобразуем интеграл (сделаем замену переменных)

$$\int_0^1 x(t^2)\,\mathrm{d}t = \left| \begin{array}{ll} t^2 = \tau & t = \sqrt{\tau} \\ 0 \leqslant \tau \leqslant 1 & \mathrm{d}t = \dfrac{1}{2\sqrt{\tau}\,\mathrm{d}\tau} \end{array} \right| = \int_0^1 x(\tau) \frac{1}{2\sqrt{\tau}}\,\mathrm{d}\tau$$

Считаем модуль функционала

$$|f(x)| = \left| \int_0^1 x(\tau) \frac{1}{2\sqrt{\tau}}\,\mathrm{d}\tau \right| \leqslant \text{нер-во Минковского} \leqslant \left( \int_0^1 |x(\tau)|^2\,\mathrm{d}\tau \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left( \int_0^1 \left| \frac{1}{2\sqrt{\tau}} \right|^2 \mathrm{d}\tau \right)^{\frac{1}{2}} =$$
$$= \|x\| \cdot \left( \int_0^1 \frac{1}{4\tau}\,\mathrm{d}\tau \right)^{\frac{1}{2}} = \|x\| \cdot \left( \frac{1}{4} \ln \tau \Big|_0^1 \right)^{\frac{1}{2}} = \infty$$

$\Rightarrow$ функционал является неограниченным

**Пример 4. дз**

$$f : l_3 \to \mathbb{R} \quad f(x) = x_{2020} - x_{2021}$$

**Пример 5. дз**

$$f : L_2[0,1] \to \mathbb{R} \quad f(x) = \int\limits_0^1 tx(t)\,\mathrm{d}t$$

**Пример 6. дз**

$$f : C[0,1] \to \mathbb{R} \quad f(x) = x\left(\frac{1}{2}\right) + \int\limits_0^1 x(t)\,\mathrm{d}t$$

**Пример 7.** ($l_1$)

$$\begin{aligned} &f(x) : l_1 \to \mathbb{R} \\ &f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1-(-1)^k)(k-1)}{k} x_k, \quad \|f\| - ? \end{aligned}$$

Записываем модуль функционала

$$|f(x)| = \left|\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1-(-1)^k)(k-1)}{k} x_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \left|(1-(-1)^k)\right| \cdot \left|\frac{k-1}{k}\right| \cdot |x_k| \leqslant$$

первый сомножитель оцениваем сверху двойкой, второй - единицей

$$\leqslant 2\sum_{k=1}^{\infty} |x_k| = 2\|x\|$$

$\Rightarrow\ \|f\| \leqslant 2\ (\|x\| \leqslant 1)$

Оценим норму снизу

$$\begin{aligned} &x_0 \in l_1, \quad \sup_{\|x\| \leqslant 1} |f(x_0)| \geqslant |f(x_0)| \\ &x_0 = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots) \ \ \text{(сначала } 2n \text{ нулей)} \\ &\|x_0\| = 1 \end{aligned}$$

Найдем значение функционала в этой точке:

$$|f(x_0)| = |1-(-1)^{2n+1}| \cdot \left|\frac{2n+1-1}{2n+1}\right| \cdot 1 = 2 \cdot \left|1 - \frac{1}{2n+1}\right| \overset{n\to\infty}{\to} 2$$

$\Rightarrow \|f\| \geqslant 2$

Сравнивая оценки сверху и снизу

$$2 \leqslant \|f\| \leqslant 2 \Rightarrow \quad \|f\| = 2$$

**Пример 8.**

$$f : M \to \mathbb{R}; \quad f(x) = 3x_1 - 4x_2$$

1. $M = l_1$

   Оцениваем норму сверху

$$\begin{aligned} &|f(x)| = |3x_1 - 4x_2| \leqslant 3|x_1| + 4|x_2| \leqslant 4|x_1 + 4|x_2| = \\ &= 4(|x_1| + 4|x_2|) \leqslant 4(|x_1| + |x_2| + |x_3| + \dots) = 4\|x\| \Rightarrow \\ &\Rightarrow \|f\| \leqslant 4 \end{aligned}$$

   Ограничиваем снизу:

$$\begin{aligned} &x_0 = (0, -1, 0, \dots) \\ &|f(x_0)| = 4 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \|f\| \geqslant 4 \Rightarrow \|f\| = 4 \end{aligned}$$

2. $M = l_2$

Оцениваем сверху

$$\begin{aligned}
&|f(x)| = |3x_1 - 4x_2| \leqslant \\
&\leqslant 3|x_1| + 4|x_2| \leqslant [\text{Коши-Буняковского}] \leqslant (3^2+4^2)^{\frac{1}{2}}(|x_1|^2+|x_2|^2)^{\frac{1}{2}} = \\
&= 5\left(|x_1|^2+|x_2|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant 5\|x\| \Rightarrow \\
&\Rightarrow \|f\| \leqslant 5
\end{aligned}$$

Оцениваем снизу

$$\begin{aligned}
&x_0 = \left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}, 0, \dots\right) \\
&\|x_0\| = \left(\frac{9}{25}+\frac{16}{25}\right)^{\frac{1}{2}} = 1 \leqslant 1 \\
&|f(x_0)| = \left|3\frac{3}{5}+4\frac{4}{5}\right| = 5 \Rightarrow \\
&\Rightarrow \|f\| \geqslant 5 \Rightarrow \|f\| = 5
\end{aligned}$$

3. $M = l_\infty$

Норма метрики: $\|x\| = \sup\limits_{k\in\mathbb{N}} |x_k|$

Оцениваем сверху:

$$\begin{aligned}
&|f(x)| = |3x_1 - 4x_2| \leqslant 3|x_1| + 4|x_2| \leqslant \\
&\leqslant \left[\begin{array}{c} \|x\| \leqslant 1 \Rightarrow \sup\limits_k |x_k| \leqslant 1 \Rightarrow \\ \Rightarrow \forall k \ |x_k| \leqslant 1 \end{array}\right] \leqslant 7\|x\| \Rightarrow \\
&\|f\| \leqslant 7
\end{aligned}$$

Оценим норму снизу

$$\begin{aligned}
&x_0 = (1, -1, 0, \dots) \\
&\|x_0\| = 1 \\
&|f(x_0)| = 7 \Rightarrow \quad \|f\| \geqslant 7 \Rightarrow \quad \|f\| = 7
\end{aligned}$$

4. $M = l_4$

Оценим сверху:

$$\begin{aligned}
&|f(x)| = |3x_1 - 4x_2| \leqslant 3|x_1| + 4|x_2| \leqslant \\
&\leqslant \left[\text{неравенство Гёльдера} \quad \begin{array}{c} q = 4 \Rightarrow \dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{4} \Rightarrow \\ \Rightarrow \dfrac{1}{p} = \dfrac{3}{4} \Rightarrow p = \dfrac{4}{3} \end{array}\right] \leqslant \left(3^{\frac{4}{3}} + 4^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{3}{4}} \left(|x_1|^4+|x_2|^4\right)^{\frac{1}{4}} \leqslant \\
&\leqslant \left(3\sqrt[3]{3}+4\sqrt[3]{4}\right)^{\frac{3}{4}} \|x\| \Rightarrow \\
&\Rightarrow \|f\| \leqslant \left(3\sqrt[3]{3}+4\sqrt[3]{4}\right)^{\frac{3}{4}}
\end{aligned}$$

Оценим снизу: По обращаем неравенство Гёльдера в равенство

$$\begin{aligned}
&b_i = \operatorname{sign} a_i \cdot |a_i|^{p-1} \\
&a_1 = 3 \quad a_2 = -4 \quad p = \frac{4}{3} \Rightarrow \\
&b_1 = 3^{\frac{1}{3}} \quad b_2 = -4^{\frac{1}{3}} \\
&x_0 = \left(\sqrt[3]{3}, -\sqrt[3]{4}, 0, \dots\right) \\
&\|f\| = \sup_{x\neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|} \geqslant \frac{|f(x_0)|}{\|x_0\|} \Rightarrow \|f\| = \left(3\sqrt[3]{3}+4\sqrt[3]{4}\right)^{\frac{3}{4}}
\end{aligned}$$

**Пример 9. дз**

$$f : M \to \mathbb{R} \quad f(x) = \int\limits_{-1}^{1} tx(t)\,\mathrm{d}t$$

1. $M = L_3[-1,1]$
2. $M = C[-1,1]$

**Пример 9.1**

$$f : C[-1,1] \to \mathbb{R}$$
$$f(x) = \int\limits_{-1}^{1} x(t)\,\mathrm{d}t - x(0)$$

Ограничиваем сверху

$$|f(x)| = \left|\int\limits_{-1}^{1} x(t)\,\mathrm{d}t - x(0)\right| \leqslant \left|\int\limits_{-1}^{1} x(t)\,\mathrm{d}t\right| + |x(0)| \leqslant \int\limits_{-1}^{1} |x(t)|\,\mathrm{d}t + |x(0)| \leqslant \|x\| \left(\int\limits_{-1}^{1} +1\right) = 3\|x\| \Rightarrow \|f\| \leqslant 3 \quad (x : \|x\| \leqslant 1)$$

Ограничиваем снизу

$$x_0 \in C[-1,1] \Rightarrow \|f\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} |f(x)| \geqslant |f(x_0)|$$

Возьмем последовательность функций

$$x_{0n}(t) = \begin{cases} 1, & t \in \left[-1; -\dfrac{1}{n}\right) \cup \left(\dfrac{1}{n}, 1\right] \\ -2nt - 1, & t \in \left[-\dfrac{1}{n}, 0\right) \\ 2nt - 1, & t \in \left[0, \dfrac{1}{n}\right) \end{cases}$$

$$\forall n\ \|x_{0n}\| = 1 \Rightarrow x_{0n} \in x : \|x\| \leqslant 1$$

$$|f(x_{0n}) = \left|\int\limits_{-1}^{1} x_{0n}(t)\,\mathrm{d}t - x_{0n}(0)\right| = \left|\int\limits_{-1}^{-\frac{1}{n}} \mathrm{d}t + \int\limits_{\frac{1}{n}}^{1} \mathrm{d}t + \int\limits_{-\frac{1}{n}}^{0} (-2nt-1)\,\mathrm{d}t + \frac{0}{\frac{1}{n}}(2nt-1)\,\mathrm{d}t + 1\right| =$$

$$= \left|-\frac{1}{n} + 1 + 1 - \frac{1}{n} + (-nt^2 - t)\Big|_{-\frac{1}{n}}^{0} + (nt^2 - t)\Big|_{0}^{\frac{1}{n}} + 1\right| =$$

$$= 3 - \frac{2}{n} \Rightarrow \|f\| \geqslant 3 - \frac{2}{n} \overset{n\to\infty}{\to} 3$$

Сравнивая оценки сверху и снизу получим: $\|f\| = 3$

**Пример 10.**

$$f : C[-1,1] \to \mathbb{R}$$
$$f(x) = \int\limits_{-1}^{0} x(-t)\,\mathrm{d}t - \int\limits_{0}^{1} x(t^2)\,\mathrm{d}t$$

Построим оценку сверху

$$|f(x)| = \left|\int\limits_{-1}^{0} x(-t)\,\mathrm{d}t - \int\limits_{0}^{1} x(t^2)\,\mathrm{d}t\right| = \left[\begin{array}{ccc} s = -t & t = \sqrt{\tau} & \mathrm{d}t = \dfrac{1}{2\sqrt{\tau}}\,\mathrm{d}\tau \\ t = -s & \mathrm{d}t = -\,\mathrm{d}s & \\ t^2 = \tau & & \end{array}\right] = \left|-\int\limits_{0}^{1} x(s)\,\mathrm{d}s - \int\limits_{0}^{1} x(\tau)\frac{1}{2\sqrt{\tau}}\,\mathrm{d}\tau\right|$$

$$= \left|\int\limits_{0}^{1} \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{\tau}}\right) x(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right| \leqslant \int\limits_{0}^{1} \left|1 + \frac{1}{2\sqrt{\tau}}\right| \cdot |x(\tau)|\,\mathrm{d}\tau \leqslant \|x\| \int\limits_{0}^{1} \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{\tau}}\right)\,\mathrm{d}\tau = 2\|x\| \Rightarrow \|f\| \leqslant 2$$

Построим оценку снизу

$$x_0 \in C[-1,1] : \|f\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} |f(x)| \geqslant |f(x_0)|$$

Рассмотрим ряд функций

$$x_{0n}(t) = \begin{cases} 1, & t \in \Big[-1, -\dfrac{1}{n}\Big) \\ -nt, & t \in \Big[-\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n}\Big] \\ -1, & t \in \Big(\dfrac{1}{n}, 1\Big] \end{cases}$$

$$\forall n \ \|x_{0n}\| = 1 \quad x_{0n} \in \{x : \|x\| \leqslant 1\}$$

$$|f(x_{0n})| = \left| \int\limits_{-1}^{-\frac{1}{n}} \mathrm{d}t + \int\limits_{-\frac{1}{n}}^{0} nt \,\mathrm{d}t + \int\limits_{0}^{\frac{1}{n}} nt^2 \,\mathrm{d}t + \int\limits_{\frac{1}{n}}^{1} \mathrm{d}t \right| =$$

$$= \left| -\frac{1}{n} + 1 + \frac{nt^2}{2}\Big|_{-\frac{1}{n}}^{0} + \frac{nt^3}{3}\Big|_{0}^{\frac{1}{n}} + 1 - \frac{1}{n} \right| = \left| 2 - \frac{2}{n} + 0 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n^2} - 0 \right| =$$

$$= 2 - \frac{5}{2n} + \frac{1}{3n^2} \quad (n \geqslant 2) \overset{n \to \infty}{\to} 2 \Rightarrow \|f\| \geqslant 2$$

Сравнивая полученные оценки: $\|f\| = 2$

**Пример 11. дз**

$$f : L_1[0, 1] \quad f(x) = \int\limits_0^1 x(\sqrt{t}) \,\mathrm{d}t$$

**Пример 12. дз**

$$f : L_2[-1, 1] \quad f(x) = \int\limits_{-1}^1 tx(t) \,\mathrm{d}t$$

**Пример 13. ($\mathbb{R}^n \to l_2$)**

$$A : \mathbb{R}^n \to l_2$$

$$A(x_1, \dots, x_n) = \left( \frac{x_1}{\sqrt{1!}}, \dots, \frac{x_n}{\sqrt{1!}}, \frac{x_1}{\sqrt{2!}}, \dots, \frac{x_n}{\sqrt{2!}}, \frac{x_1}{\sqrt{3!}}, \dots, \frac{x_n}{\sqrt{3!}}, \dots \right)$$

Оценим норму сверху

$$x \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \|x\| = |x| = (x_1^2 + \ldots + x_n^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$Ax = y \in l_2 \Rightarrow \|y\| = \|Ax\| = \left( \sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\|Ax\| = \left( \frac{x_1^2}{1!} + \ldots + \frac{x_n^2}{1!} + \frac{x_2^2}{2!} + \ldots + \frac{x_n^2}{2!} + \ldots \right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left( \frac{1}{1!}(x_1^2 + \ldots + x_n^2) + \frac{1}{2!}(x_1^2 + \ldots + x_n^2) + \ldots \right)^{\frac{1}{2}} = \left( (x_1^2 + \ldots + x_n^2) \left( \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots \right) \right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \|x\| \left( \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \right)^{\frac{1}{2}} = (\text{прибавили, вычли единицу}) = \sqrt{e-1} \cdot \|x\| \Rightarrow \|A\| \leqslant \sqrt{e-1}$$

Оценим норму снизу:

$$x_0 : \|x_0\| \leqslant 1 \Rightarrow \|A\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|Ax\| \geqslant \|Ax_0\|$$

Пусть:

$$x_0 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \quad (n-2 \text{ ноликов следуют за единицей})$$

$$Ax_0 \left( 0, \frac{1}{\sqrt{1!}}, 0, \ldots, 0, 0, \frac{1}{\sqrt{2!}}, 0, \ldots, 0, \ldots \right)$$

$$\|Ax_0\| = \left( 0^2 + \frac{1}{1!} + 0^2 + \ldots + 0^2 + 0^2 + \frac{1}{2!} + 0^2 + \ldots + 0^2 + \ldots \right)^{\frac{1}{2}} = \left( \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e-1} \Rightarrow \|A\| \geqslant \sqrt{e-1}$$

Сравнивая полученные оценки: $\|A\| = \sqrt{e-1}$

**Пример 14.** **(**$C[0,1] \to C[0,1]$**)**

$$A : C[0,1] \to C[0,1] \quad Ax = \int\limits_0^1 e^{3t-2\tau} x(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

Видим что

$$x \in C[0,1] \Rightarrow \|x\| = \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} |x(t)|$$

Оценим сверху:

$$\|Ax\| = \max_{0\leqslant t\leqslant 1} \left| \int\limits_0^1 e^{3t-2\tau} x(\tau)\,\mathrm{d}\tau \right| \leqslant \max_{0\leqslant t\leqslant 1} e^{3t} \cdot \int\limits_0^1 e^{-2\tau} |x(\tau)|\,\mathrm{d}\tau \leqslant \|x\| \cdot \max_{0\leqslant t\leqslant 1} e^{3t} \cdot \left( -\frac{1}{2} e^{-2\tau} \Big|_0^1 \right) =$$
$$= \|x\| \cdot \frac{1}{2}(e^3 - e) \Rightarrow \|A\| \leqslant \frac{1}{2}(e^3 - e)$$

Оценим норму снизу

$$x_0 \in C[0,1] : \|x_0\| \leqslant 1 \Rightarrow \|A\| = \sup_{\|x\|\leqslant 1} \|Ax\| \geqslant \|Ax_0\|$$
$$x_0(t) = 1$$
$$\|Ax_0\| = \max_{0\leqslant t\leqslant 1} \left| \int\limits_0^1 e^{3t-2\tau} \cdot 1 \cdot \,\mathrm{d}\tau \right| = \max_{0\leqslant t\leqslant 1} e^{3t} \cdot \left| \int\limits_0^1 e^{-2\tau}\,\mathrm{d}\tau \right| = \max_{0\leqslant t\leqslant 1} e^{3t} \cdot \left| -\frac{1}{2} e^{-2\tau} \Big|_0^1 \right| = \frac{1}{2}(e^3 - e) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \|A\| \geqslant \frac{1}{2}(e^3 - e)$$

Сравнивая полученные оценки: $\|A\| = \dfrac{1}{2}(e^3 - e)$

**Пример 15.** **(**$L_2[0,1] \to L_2[0,1]$**)**

$$A : L_2[0,1] \to L_2[0,1], \quad Ax = \int\limits_0^1 t x(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

Норма икса:

$$x \in L_2[0,1] \Rightarrow \|x\| = \left( \int\limits_0^1 |x(t)|^2\,\mathrm{d}t \right) \frac{1}{2}$$

Ограничим сверху

$$\|Ax\| = \left( \int\limits_0^1 \left| \int\limits_0^1 t x(\tau)\,\mathrm{d}\tau \right|^2 \mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{2}} = \left( \int\limits_0^1 t^2 \left( \int\limits_0^1 |x(\tau)|\,\mathrm{d}\tau \right)^2 \mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{2}} = \left( \int\limits_0^1 t^2 \|x\|^2 \left( \int\limits_0^1 \mathrm{d}\tau \right)^2 \mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{2}} =$$
$$= \|x\| \cdot \left( \int\limits_0^1 t^2\,\mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{2}} = \|x\| \cdot \left( \frac{1}{3} t^3 \Big|_0^1 \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}\|x\| \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \|A\| \leqslant \frac{1}{3}$$

Оценим норму снизу

$$x_0 \in L_2[0,1] : \|x_0\| \leqslant 1 \Rightarrow \|A\| = \sup_{\|x\|\leqslant 1} \|Ax\| \geqslant \|Ax_0\|$$
$$x_0(t) = \frac{2}{3}, \quad \|x_0\| \leqslant 1$$
$$\|Ax_0\| = \left( \left| \int\limits_0^1 t \frac{\sqrt{2}}{3}\,\mathrm{d}t \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left( \frac{4}{9} \left( \frac{t^2}{2} \Big|_0^1 \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3} \Rightarrow \|A\| \geqslant \frac{1}{3}$$

Сравнивая оценки: $\|A\| = \dfrac{1}{3}$

# 5 Ортогонализация Грама-Шмидта и разложение элементов евлидова пространства в ряд Фурье.

## 5.1 Теория

$$\Delta = y - \alpha x_1 - \beta x_2$$
$$\begin{cases} \Delta \perp x_1 \Leftrightarrow (\Delta, x_1) = 0 \\ \Delta \perp x_2 \Leftrightarrow (\Delta, x_2) = 0 \end{cases} \text{ такая система позволит найти } \alpha \text{ и } \beta$$
$$\begin{cases} (\Delta, x_1) = (y, x_1) - \alpha(x_1 x_1) - \beta(x_2 x_1) = 0 \\ (\Delta, x_2) = (y, x_2) - \alpha(x_1 x_2) - \beta(x_2 x_2) = 0 \end{cases}$$

## 5.2 Общий ход решения

1. Выписать скалярное произведение
   Затем подсчитать необходимые скалярные произведения которые входят в систему выше
2. Подставить подсчитанные значения в систему, решить ее

## 5.3 Примеры

**Пример 1.** ($L_2[0,1]$)

$$L_2[0,1]$$
$$x_1(t) = 1, \quad x_2(t) = t$$
$$y(t) = t^2$$

Проекция $y$ на множество, заданное функциями $x_1$ и $x_2$. В пространстве $L_2[0,1]$ определено скалярное произведение

$$(a, b) = \int\limits_0^1 a(t) b(t) \, \mathrm{d}t$$

Теперь можно найти те элементы, которые нас интересуют:

$$(x_1 x_1) = \int\limits_0^1 1 \cdot 1 \, \mathrm{d}t = 1$$
$$(x_1 x_2) = \int\limits_0^1 1 \cdot t \, \mathrm{d}t = \left.\frac{t^2}{2}\right|_0^1 = \frac{1}{2}$$
$$(x_2 x_2) = \int\limits_0^1 t \cdot t \, \mathrm{d}t = \left.\frac{t^3}{3}\right|_0^1 = \frac{1}{3}$$
$$(y x_1) = \int\limits_0^1 t^2 \cdot 1 \, \mathrm{d}t = \left.\frac{t^3}{3}\right|_0^1 = \frac{1}{3}$$
$$(y x_2) = \int\limits_0^1 t^2 \cdot t \, \mathrm{d}t = \left.\frac{t^4}{4}\right|_0^1 = \frac{1}{4}$$

Теперь можно составить систему

$$\begin{cases} \dfrac{1}{3} - \alpha \cdot 1 - \beta \cdot \dfrac{1}{2} = 0 \\ \dfrac{1}{4} - \alpha \cdot \dfrac{1}{2} - \beta \cdot \dfrac{1}{3} = 0 \end{cases}$$

$$\beta = 1, \quad \alpha = \frac{1}{6}$$

$$\hat{y}(t) = \alpha x_1(t) + \beta x_2(t) = \frac{1}{6} + t$$

$$\Delta = y - \hat{y} = t^2 - t - \frac{1}{6}$$

$$|\Delta| = ((\Delta \Delta))^{\frac{1}{2}}$$

$$|\Delta|^2 = \Delta^2 = \int\limits_0^1 (t^2 - t - \frac{1}{6})^2 \, \mathrm{d}t = \frac{7}{60} \Rightarrow |\Delta| = \sqrt{\frac{7}{60}}$$

Расстояние от эл $y(t) = t^2$ до мн-ва, заданного ф-циями $x_1$ и $x_2(t)$: $\sqrt{\dfrac{7}{60}}$

**Пример 2.** ($L_2[-1, 1]$)

$$y(t) = t, \quad x_1(t) = 1, \quad x_2(t) = t^2$$
$$\hat{y} - ?, \quad |\Delta| - ?$$

Составляем систему уравнения для нашего случая:

$$\Delta = y - \alpha \cdot 1 - \beta t^2$$
$$\begin{cases} (\Delta, 1) = (y, 1) - \alpha(1, 1) - \beta(t^2, 1) = 0 \\ (\Delta, t^2) = (y, t^2) - \alpha(1, t^2) - \beta(t^2, t^2) = 0 \end{cases}$$

Находим элементы, которые входят в эту систему:

$$y = t$$

$$(y, 1) = \int\limits_{-1}^{1} t \cdot 1 \, \mathrm{d}t = 0$$

$$(y, t^2) = \int\limits_{-1}^{1} t \cdot t^2 \, \mathrm{d}t = 0$$

$$(1, 1) = \int\limits_{-1}^{1} 1 \cdot 1 \, \mathrm{d}t = 2$$

$$(t^2, 1) = \int\limits_{-1}^{1} t^2 \cdot 1 \, \mathrm{d}t = \frac{2}{3}$$

$$(t^2, t^2) = \int\limits_{-1}^{1} t^2 t^2 \, \mathrm{d}t = \frac{2}{5}$$

Получается система:

$$\begin{cases} 2\alpha + \dfrac{2}{3}\beta = 0 \\ \dfrac{2}{3}\alpha + \dfrac{2}{5}\beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3\alpha + \beta = 0 \\ 5\alpha + 3\beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$$

$\Rightarrow$ решение единственное: $\alpha = \beta = 0 \Rightarrow \hat{y} = 0$

**Пример 3. Найти расстояние до мн-ва** ($L_2[0, 1]$) В пр-ве $L_2[0, 1]$ найти расстояние от $y(t) = t^2$ до мн-ва:

$$M = \left\{ x : \int\limits_0^1 x(t) \, \mathrm{d}t = 0 \right\} \Rightarrow (x, 1) = 0$$

Нарисовав рисунок, увидим что единица и $x$ образуют прямоугольник, диагональю которого будет являтся $y(t) = t^2$, отсюда:

$$\alpha \cdot 1 = \Delta$$
$$\begin{cases} a = t^2 - \alpha \cdot 1 \\ a \perp 1 \end{cases}$$
$$(a, 1) = 0 = \int\limits_0^1 (t^2 - \alpha) 1 \, \mathrm{d}t = 0$$
$$\int\limits_0^1 t^2 \, \mathrm{d}t - \alpha \int\limits_0^1 1 \, \mathrm{d}t = 0$$
$$\frac{1}{3} - \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{3}$$

Теперь:

$$\Delta = \frac{1}{3} \cdot 1$$
$$\Delta^2 = \int\limits_0^1 \left(\frac{1}{3} \cdot 1\right)^2 \mathrm{d}t = \frac{1}{9}$$
$$|\Delta| = \frac{1}{3}$$

**Пример 4. дз**

$$L_2[0, \frac{\pi}{2}]$$

1. Рассмотреть расстояние от $y(t) = \sin t$ до мн-ва, зад. ф-циями $x_1(t) = 1$ и $x_2(t) = t$
2. от $y(t) = \cos t$ до $x_1(t) = 1$ и $x_2(t) = t^2$
3. $L_2[0, 1]$ в пр-ве есть система функций: $x_1(t) = 1$, $x_2(t) = t$, $x(t) = t^2$ построить ортонормированную систему

# 6 Вычисление сильных и слабых пределов в нормированных пространствах.

# 7 Вычисление равномерного, сильного и слабого предела последовательностей операторов.

# 8 Построение сопряженного оператора.

# 9 Вычисление нормы и спектра линейного оператора.

# 10 Теория

**Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии**

**Сжимающее отображение** Если отображение является сжимающим, то пределом последовательности служит неподвижная точка и она не зависит от выбора начального приближения

**Фундаментальная последовательность.** $\{x_n\}$ является фундаментальной последовательностью, если

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists N = N(\varepsilon) : \forall n, m \geqslant N \ \ |x_n - x_m| < \varepsilon$$

**Полное метрическое пространство.** Каждая фундаментальная последовательность сходится к элементу этого же пространства.

**Неравенство Коши-Буняковского.**

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i b_i| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

**Неравенство Гёльдера.**

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i b_i| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

**Равенство Гёльдера.** Обращается в равенство при $b_i = \operatorname{sign} a_i \cdot |a_i|^{p-1}$

**Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии.**

$$S = \frac{a_0}{1-q}$$

## 10.1 Свойства модулей

- $\triangleleft$ $|a+b| \leqslant |a| + |b|$
- $\triangleleft$ $|a-b| \leqslant |a| + |b|$
- $\triangleleft$ $\left|\int f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int |f(x)|\,\mathrm{d}x$

## 10.2 Метрические пространства

| Метрическое пр-во | Норма $\|x\|$ | $(a \cdot b)$ |
|---|---|---|
| $l_\infty$ | $\sup\limits_{k\in\mathbb{N}} |x_k|$ | |
| $l_n$ | $\left(\sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i^n\right)^{\frac{1}{n}}$ | |
| $L_n[a,b]$ | $\left(\int\limits_a^b |f(x)|^p\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}$ | $\int\limits_a^b a(t)b(t)\,\mathrm{d}t$ |
| $C[0,1]$ | $\max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1} |x(t)|$ | |
| $\mathbb{R}^n$ | $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$ | |

## 10.3 Формула Рисса

### 10.3.1 $l_p$

Теорема

$$\begin{aligned}
&\forall f \in l_p^*,\ p \in (1,\infty) \\
&\exists \widetilde{f} \in l_q \ \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right) \\
&f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \widetilde{f}_k x_k \\
&\|f\| = \|\widetilde{f}\|
\end{aligned}$$

Пример

$$
\begin{aligned}
&f: l_3 \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x_1 + x_2 \\
&\widetilde{f} = (1, 1, 0, 0, \ldots) \\
&p = 3, \quad \frac{1}{q} + \frac{1}{3} = 1 \Rightarrow q = \frac{3}{2} \\
&\|f\| = \left(1^{\frac{3}{2}} + 1^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{4}
\end{aligned}
$$

Другой пример

$$
\begin{aligned}
&f: l_1 \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2-k}{3+k} x_k \\
&\widetilde{f} = \left(\frac{2-1}{3+1}, \frac{2-2}{3+2}, \ldots\right) \\
&\|f\| = \sup_k \left|\frac{2-k}{3+k}\right| = \sup_k \left|\frac{5-(3+k)}{3+k}\right| = \sup_k \left|\frac{5}{3+k} - 1\right| = 1
\end{aligned}
$$

### 10.3.2 $L_p$

Теорема

$$
\begin{aligned}
&\forall f \in L_p^*([a,b]), \quad p \in (1, \infty) \\
&\exists \widetilde{f} \in L_q([a,b]), \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \\
&f(x) = \int\limits_{[a,b]} \widetilde{f} x \, \mathrm{d}\mu \quad \|f\| = \|\widetilde{f}\|
\end{aligned}
$$

Пример

$$
\begin{aligned}
&f(x) = \int\limits_{[0,1]} x(\sqrt{t}) \, \mathrm{d}t, \quad x \in L_2[0,1] \\
&\sqrt{t} = u, \ t = u^2, \ \mathrm{d}t = 2u \, \mathrm{d}u \\
&f(x) = \int\limits_{[0,1]} 2u x(u) \, \mathrm{d}u, \quad \widetilde{f}(u) = 2u \\
&p = 2 \Rightarrow q = 2 \\
&\|f\| = \|\widetilde{f}\| = \sqrt{\int\limits_{[0,1]} (2u)^2 \, \mathrm{d}u} = \frac{2}{3}
\end{aligned}
$$

Теорема для $L_1$ Пример

$$
\begin{aligned}
&f(x) = \int\limits_{[0,1]} x(\sqrt{t}) \, \mathrm{d}t - \int\limits_{[0,1]} x(\sqrt[3]{t}) \, \mathrm{d}t, \quad x \in L_1([0,1]) \\
&\sqrt{t} = u \quad t = u^2 \quad \mathrm{d}t = 2u \, \mathrm{d}u \\
&\sqrt[3]{t} = s \quad t = s^3 \quad \mathrm{d}t = 3s^2 \, \mathrm{d}s \\
&f(x) = \int\limits_{[0,1]} (2u - 3u^2) x(u) \, \mathrm{d}u
\end{aligned}
$$

$\|f\| =$ ф-ция непрерывна, поэтому существенный супремум совпадает с обычным $\operatorname{ess}\sup\limits_{u \in [0,1]} |2u - 3u^2| =$

$$
= \sup_{u \in [0,1]} \left|2u - 3u^2\right| = 1
$$

Другой пример

$$f(x) = \int\limits_{[-1,0]} x(t)\,\mathrm{d}t - \int\limits_{[0,1]} x(t)\,\mathrm{d}t, \quad x \in L_4[-1,1],\ \|f\| - ?$$

$$f(x) = \int\limits_{[-1,1]} -\mathrm{sign}\,(t) x(t)\,\mathrm{d}t, \quad \mathrm{sign}\,(t) = \begin{cases} -1, t < 0 \\ \ \ 1, t > 0 \end{cases}$$

$$\|f\| = \left( \int\limits_{[-1,1]} |-\mathrm{sign}\,(t)|^q\,\mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{q}} = 2^{\frac{1}{q}} = 2^{1-\frac{1}{p}} = 2^{\frac{3}{4}}$$

# 11 Разное

**1.** Является ли полным метрическим пространством пара:

$$\left( \mathbb{R},\ \rho(x,y) = |x-y| \right)?$$

Доказываем что МП является полным. Каждому элементу из $\mathbb{R}$ ставим в соответствие последовательность $x + \dfrac{1}{n} = x_n \to x$ (всегда сходится к элементу метрического пространства)

Можно ли указать мн-во $X$ такое, что МП $(X, \rho(x,y) = |x-y|)$ не является полным. Возьмем подмножество действительных чисел $X = (0; +\infty)$, тогда фундаментальная последовательность $x_n = \dfrac{1}{n} \to 0 \notin X$

Можно ли указать метрику $\rho(x,y)$ такую, что МП $(\mathbb{R}, \rho)$ не является полным.

$$\rho(x,y) = |e^{-x} - e^{-y}|$$

Доказываем что фундаментальная последовательность есть:

$$\rho(n,m) = |e^{-n} - e^{-m}| \leqslant \frac{2}{e^k} < \varepsilon,\ (k = \min(n,m))$$
$$k \geqslant \ln\frac{2}{\varepsilon} = N(\varepsilon)$$
$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$$

$\Rightarrow$ МП: $(\mathbb{R}, \rho)$ не полное

**2. Проверка линейности функционала (непрерывные функции)**

$$f : C[0,1] \to \mathbb{R}$$
$$f(x) = \int\limits_0^1 x^2(t)\,\mathrm{d}t$$

Не линеен, т.к. после подстановки получаем:

$$\int\limits_0^1 (\alpha^2 x^2(t) + \beta^2 y^2(t) + 2\alpha\beta x(t) y(t))\,\mathrm{d}t \neq \alpha f(x) + \beta f(y) = \alpha \int\limits_0^1 x^2(t)\,\mathrm{d}t + \alpha \int\limits_0^1 y^2(t)\,\mathrm{d}t$$

**3. Проверка линейности функционала (интегрируемые функции)**

$$f : L_2[0,1] \to \mathbb{R}$$
$$f(x) = \int\limits_0^1 x(t) \sin^2 t\,\mathrm{d}t$$

Является линейным (после раскрытия скобок обе части равны)

**4. Проверка линейности функционала (последовательности)**

$$f : l_2[0, 1] \to \mathbb{R}$$
$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \sin k$$

Является линейным (после раскрытия скобок обе части равны)