Modelación Física Matemática

Ejercicio 2:

a) Encuentra la matriz A en la transformación lineal $y = Ax$, donde x son las coordenadas cartesianas. Encuentra los eigenvalores y eigenvectores y explica su significado geométrico.

(a) Reflexión alrededor del eje X_1 en R^2

(b) Proyección ortogonal de R^3 en el plano $X_2 = X_1$

$T(\vec{x}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ Matriz Identidad I multiplicada por λ $\lambda I = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$

Eigen valores (det $\lambda I - A$

$$\begin{bmatrix} \lambda - 1 & 0 \\ 0 & \lambda + 1 \end{bmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda + 1) + 0 = \lambda^2 - 1$$

$\therefore$

· Valores propios: $\underline{\lambda_1 = 1}$ y $\underline{\lambda_2 = -1}$

· Vectores propios: (Para $\lambda = 1$)

Resolviendo $(A - \lambda I)$:

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - (1)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Reduciendo la matriz a su forma escalonada $R_2 \leftarrow -\frac{1}{2}R_2$

$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ → Intercambiando filas $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

El sistema asociado con el valor propio $\lambda = 1$

$$(A - 1\lambda)\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\therefore X_2 = 0$ Entonces $\vec{V}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

X_1 = Tomando valor de "1"

Para $\lambda = -1$

$$(A - \lambda I) : \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - (-1)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Reduciendo la matriz $R_1 \leftarrow \frac{1}{2}R_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El sistema asociado para $\lambda = -1$

$$(A + 1I)\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Entonces:

$X_1 = 0$, $\vec{V}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Si $X_2 = 1$,

Proyección ortogonal de R^3 en el plano $X_2 = X_1$

- Expresado como matriz, se tiene una proyección con la siguiente forma matricial:

$(1,0,0)$ en $(1/2, 1/2, 0)$

$(0,1,0)$ en $(1/2, 1/2, 0)$

$(0,0,1)$ en $(0,0,1)$ $\therefore$

Matriz: $\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Obteniendo eigen valores y eigenvectores

$$\det \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \therefore \lambda(-\lambda^2 + 2\lambda - 1)$$

Resolviendo

$$\lambda(-\lambda^2 + 2\lambda - 1) = 0 \quad \therefore \quad \lambda = 0, \ \lambda = 1$$

$\therefore$ Valores propios son $= 0, 1$

Vectores propios para $\lambda = 0$

$$(A - \lambda I): \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - 0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Reduciendo la matriz a forma escalonada tenemos

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \therefore (A - 0I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x + y = 0 \qquad z = 0$$
$$z = 0 \qquad \therefore x = -y$$

Sustituyendo

$$V = \begin{pmatrix} -y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \quad y \neq 0 \quad \text{Sea } y = 1 \therefore$$

$$\vec{V} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Para $\lambda = 1$

$$(A - \lambda I): \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Reduciendo a su forma escalonada, tenemos:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \therefore (A - 1I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$x - y = 0$, y z puede tomar cualquier valor

$$\therefore \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Despejando...

$x = y$

Sustituyendo en $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$V = \begin{pmatrix} y \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$ sea $y = 1$ $\therefore \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Entonces los vectores propios para $\lambda = 1$ son

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Para el eigenvalor 1 corresponden los vectores

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

lo cual indica que cada punto del plano $x_2 = x_1$ o $(y = x)$ es proyectado en sí mismo o se asigna así mismo. Para el eigenvalor 0 un eigen vector es $(-1, 1, 0)$ y transpuesto es $(1, -1, 0)^T$. Esto muestra que cualquier punto en la linea $x_2 = -x_1, z = 0$ lo cual indica que es perpendicular al plano $x_2 = x_1$.