1) a) $(1-1)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k$ по биному Ньютона $\Rightarrow$

$C_n^0 - C_n^1 + \ldots + (-1)^n C_n^n = 0$ для $n = 0$!.

$C_0^0 = 1$

b) $(1-1)^n = C_n^0 - C_n^1 + \ldots + (-1)^n C_n^n \Rightarrow$

$(1+1)^n = C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n$

$\frac{(1-1)^n + (1+1)^n}{2} = 2^{n-1} = \sum_{2|k} C_n^k$ для $n > 1$

для $n = 0$ и $n = 1 \Rightarrow C_n^0 = 1$

c) $\frac{C_{n+1}^i}{n+1} = \frac{(n+1)!}{i!\,(n-i+1)!\cdot(n+1)} = \frac{n!}{i!\,(n-i+1)!} =$

$= \frac{n!}{(i-1)!\,(n-i+1)!\cdot i} = \frac{C_n^{i-1}}{i}$ для $i \in \underline{n+1}$

$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n} \frac{C_n^k}{k+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{C_{n+1}^{k+1}}{n+1} = \frac{1}{n+1} \cdot \left((1+1)^{n+1} - C_{n+1}^0 \right)$

$= \frac{2^{n+1} - 1}{n+1}$

2) • Если цифра $\equiv_2 0$ то для нее 4 варианта еще C_5^2 где стоят остальные 2 четные цифры и для каждой цифры 5 вар. значений либо $\{0,2,4,6,8\}$ либо $\{1,3,5,7,9\}$ т.е. их
$4 \cdot C_5^2 \cdot 5^5$

• Если цифра $\equiv_2 1$ то для нее 5 вариантов $\Rightarrow$ C_5^2 для 2х позиций где будут стоять еще 2 нечет. цифры и для каждой цифры 5 вар. значений $\Rightarrow 5 \cdot C_5^2 \cdot 5^5$

$\Sigma = 5^5 \cdot \left(4 \cdot \frac{5\cdot 4}{2} + \frac{5\cdot 5\cdot 4}{2}\right) = 5^5 \cdot 90 = 281250$

3) Если отдельного фрукта x штук то поделить его на t людей: пусть есть $t+x-1$ ~~шаров~~ фруктов тогда из них надо выбрать $t-1$ позицию ~~шаров~~ фруктов ~~каждая~~ пусть эти $t-1$ ~~шар~~ фрукт станут перегородками тогда между i и $i+1$ перегородкой фрукты достанутся $i+1$ человеку

1 | 2 | 3
○○○ | ○○○ | ○

тогда C_{t+x-1}^{t-1} - кол-во способов раздать x фруктов на t людей тогда для наших фруктов: $C_9^3 \cdot C_6^3 \cdot C_5^3$

4) $(x^2+x^7+x^9)^{20} = x^{40}(1+x^5+x^7)^{20}$ коэф при x^{57} $\Leftrightarrow$ коэф при x^{17} у $(1+x^5+x^7)^{20}$ но $17 = 5a+7b$ только как $5\cdot 2 + 7\cdot 1$ ведь если $b=0$ то $17 \not\vdots\, 5$ если $b \geq 2 \Rightarrow 17-7b \leq 3$ и $17-7b \,\vdots\, 5$ против. т.е. $b=1$ тогда коэф при $x^5 \cdot (x^7)^2$ это кол-во способов выбрать из 20 скобок x^5 и из 19 оставш. 2 раза по x^7 т.е

$$C_{20}^1 \cdot C_{19}^2 = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{2} = 3420$$

5 просто разложить монеты 3^7 способов, осталось вычесть способы где 1, 2, 3 карманы пусты, прибавить где (1,2), (2,3), (1,3) пусты мы их вычли по 2 раза, вычесть где все пусты мы их посчитали $-3+3=0$ раз. По формуле включения исключения кол-во способов:

$$\underbrace{3^7} - \underbrace{3\cdot 2^7}_{\text{1 пуст}} + \underbrace{3}_{\text{2 пуста}} - \underbrace{0}_{\text{все пусты}} = 1806$$

6) C_{10}^4 – выбрать 4 книги стоящие на месте, 6! расставить остальные т.е. $C_{10}^4 \cdot 6!$

7) Взаимнопростых $\varphi(2020)$ значит не взаимнопростых: $2020 - \varphi(2020) =$

$$2020 - 2020\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\left(1-\frac{1}{101}\right) = 2020 - 2\cdot(1\cdot 4\cdot 100)$$

$= 1220$

8) Т.к цифры не возрастают то по набору цифр задаётся каждое число, тогда надо поделить 7 ~~цифр~~ цифр между 10 значениями от 0 до 9 по аналогии с 11 задачей поделить 7 объектов на 10ых это $C_{16}^9 - \underset{\text{вариант где все 0}}{1} = 11439$