1) a) $(1-1)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k$ по биному Ньютона $\Rightarrow$

$C_n^0 - C_n^1 + \ldots + (-1)^n C_n^n = 0$ для $n = 0$:

$C_0^0 = 1$

b) $(1-1)^n = C_n^0 - C_n^1 + \ldots + (-1)^n C_n^n \Rightarrow$

$(1+1)^n = C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n$

$\dfrac{(1-1)^n + (1+1)^n}{2} = 2^{n-1} = \sum 2k \, C_n^k$ для $n > 1$

для $n = 0$ и $n = 1 \Rightarrow C_n^0 = 1$

c) $\dfrac{C_{n+1}^i}{n+1} = \dfrac{(n+1)!}{i!(n-i+1)! \cdot (n+1)} = \dfrac{n!}{i!(n-i+1)!} =$

$\dfrac{n!}{(i-1)!(n-i+1)! \cdot i} = \dfrac{C_n^{i-1}}{i}$ где $i \in \overline{n+1}$

$\Rightarrow \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{C_n^k}{k+1} = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{C_{n+1}^{k+1}}{n+1} = \dfrac{1}{n+1} \cdot \left((1+1)^{n+1} - C_{n+1}^0\right)$

$= \dfrac{2^{n+1} - 1}{n+1}$

2) · Если цифра $\overset{?}{=} 0$ то для нее 4 варианта еще C_5^2 где стоят остальные 2 четные цифры и для каждой цифры 5 вар. значений либо $\{0,2,4,6,8\}$ либо $\{1,3,5,7,9\}$ т.е их

$$4 \cdot C_5^2 \cdot 5^5$$

· Если цифра $\overset{?}{=} 1$ то для нее 5 вариантов $\Rightarrow$ C_5^2 для 2ух позиций где будут стоять еще 2 неч. цифры и для каждой цифры 5 вар. значений $\Rightarrow 5 \cdot C_5^2 \cdot 5^5$

$$\sum = 5^5 \cdot \left(4 \cdot \frac{5 \cdot 4}{2} + \frac{5 \cdot 5 \cdot 4}{2}\right) = 5^5 \cdot 80 = 281250$$

3) Если отдельного фрукта x штук то поделить его на t людей : пусть есть $t + x - 1$ фруктов тогда из них надо выбрать $t-1$ позицию которая пусть эти $t-1$ фрукт стоку т перегородками тогда между i и $i+1$ перегородкой фрукты достанутся $i+1$ человеку

тогда C_{t+x-1}^{t-1} кол-во способов

1 2 3
$\circ\circ\!\!\!\!\!\otimes\!\circ\,\circ\;\otimes\!\circ$

разделить x фруктов на t людей тогда для наших фруктов: $C_9^3 \cdot C_6^3 \cdot C_5^3$

4) $(x^2 + x^7 + x^9)^{20} = x^6 (1 + x^5 + x^7)^{20}$ коэф при x^{57}

$\Leftrightarrow$ коэф при x^{17} у $(1+x^5+x^7)^{20}$ но $17 = 5a + 7b$

только как $5 \cdot 2 + 7 \cdot 1$ ведь если $b=0$ то $17 \not\vdots 5$

если $b \geq 2 \Rightarrow 17 - 7b \leq 3$ и $17 - 7b \not\vdots 5$ против

т.е $b = 1$ тогда коэф при $x^5 \cdot (x^7)^2$ это

кол-во способов выбрать из 20 скобок x^5 и

просто разложить пакеты 3^7 способов, осталось вычесть способы где 1, 2, 3 карманы пустой, прибавить где $(1,2)$, $(2,3)$, $(1,3)$ пусты мы их вычли по **2** раза, вычесть где все пусты мы ее посчитали $-3+3=0$ раз. По формуле включения исключения кол-во способов:

$$\underbrace{3^7}_{} - \underbrace{3\cdot 2^7}_{1\;\text{пуст}} + \underbrace{3}_{2\;\text{пуста}} - \underbrace{0}_{\substack{\text{все}\\\text{пусты}}} = 1806$$

6) C_{10}^4 – выбрать 4 книга стоящие на месте $6!$ расставить остальные т.е $C_{10}^4 \cdot 6!$

7) Взаимно простых $\varphi(2020)$ значит не взаимно простых: $2020 - \varphi(2020) =$
$2020 - 2020\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\left(1-\frac{1}{101}\right) = 2020 - 2\cdot(1\cdot4\cdot100)$
$=1220$

8) Т.к цифры не возрастают то по набору цифр задаётся каждое число, тогда надо поделить 7 цифр между 10 значениями от 0 до 9 по аналогии с 11 задачей поделить 7 объектов по 10ым это $C_{16}^9 - 1 = 11439$
↑
вариант где все 0