№2 Для доказательства равномощности нужно построить биекцию для $P_1(A)$, где элементы P_1 имеют вид $\{x\}$, и A.

Биекция строится так, мы каждому x из A сопоставляем $\{x\}$

Тогда это отображение явл. инъективным т.к если $x_1 \neq x_2$, то $\{x_1\} \neq \{x_2\}$
если $x_1 = x_2$, то $\{x_1\} = \{x_2\}$

И сюръективным, т.к для каждого элемента из $P_1(A)$ $\{x\}$ можно однозначно сопоставить x => Есть биекция => $P_1(A) \sim A$ ч.т.д.

Док-во

(⇐)

$B \subseteq A \Rightarrow A \cup B = A \Rightarrow 1_A + 1_B - 1_{A \cap B} = 1_A \quad (*)$

$(A \setminus B) \cup B = (A \cap \bar{B}) \cup B = (A \cup B) \cap (B \cup \bar{B}) = A \cup B \Rightarrow$

⇒ Характеристическая ф-ция для $(A \setminus B) \cup B$:

: $1_A + 1_B - 1_{A \cap B}$ (= 1_A по выражению *) ⇒

⇒ $(A \setminus B) \cup B = A$

ч.т.д.

№4. а) $N^{N \times Q} \times N \overset{?}{\sim} R^Q$

$$\left.\begin{array}{l} N^{N \times Q} \times N \sim N^{N \times N} \times N \sim N^N \times N \sim R \times N \sim R \\ R^Q \sim R^N \sim R \end{array}\right\} \Rightarrow$$

⇒ $N^{N \times Q} \times N \sim R^Q$ - верно.

б) $\underline{5}^N \sim \underline{3}^N$ это равносильно $\underline{3}^N \sim \underline{5}^N$

На лекциях/семинарах было доказано.

$$\left.\begin{array}{l} R \sim \underline{2}^N \lesssim \underline{3}^N \lesssim \underline{5}^N \lesssim N^N \sim R \end{array}\right\} \Rightarrow$$

на лекции; очевидно, т.к $\underline{3} \subseteq \underline{5}$; очевидно, т.к $\underline{5} \subseteq N$; доказано на лекции

$\underline{3}^N$ и $\underline{5}^N$ зажато слева R и справа R ⇒

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \underline{3}^N \sim R \\ \underline{5}^N \sim R \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{3}^N \sim \underline{5}^N$$

ч.т.д.

d) Дан треугольник с вершинами $A; B; C$.
Всегда можно выбрать такую систему координат, что т. A совпадет с началом координат; т. B будет лежать на оси OX и будет $\exists$ т. C.
Тогда т. $A(0;0)$; т. $B(a;0)$, где a - длина отрезка AB; т. $C(x;y)$

Значит треугольник задается тройкой чисел $(a;x;y)$, задающие нужные значения.

$f(a;x;y) = ix + jy + a = z$

Тогда зная 3 числа можно построить треугольник.
И зная треугольник можно получить тройку чисел $(a;x;y) \Rightarrow \underbrace{R \times R \times R \sim R}_{\text{из лекции}} \Big\} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Множество Треугольников $\sim R$.

ч.т.д.

№3 а) Доказать $(A\cup B)\setminus C = A\setminus C)\cup(B\setminus C)$

Напишем характеристическую ф-цию для левой части: $1_{A\cup B} = 1_A + 1_B - 1_{A\cap B}$ $\Big\}\Rightarrow$

$1_{X\setminus C} = 1_X(1-1_C)$

$\Rightarrow$ для $(A\cup B)\setminus C$: $1_{A\cup B}\cdot(1-1_C) =$

$= 1_A\cdot(1-1_C) + 1_B(1-1_C) - 1_{A\cap B}(1-1_C)$

Напишем характеристическую ф-цию для правой части

$(A\setminus C)\cup(B\setminus C)$: $1_A(1-1_C) + 1_B(1-1_C) - 1_{(A\setminus C)\cap(B\setminus C)} =$

$= 1_A(1-1_C) + 1_B(1-1_C) - 1_{(A\cap B)\setminus C}$

Характеристические ф-ции совпадают $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ равенство выполняется.

б) Доказать $(A\setminus B)\cup B = A \Leftrightarrow B\subseteq A$

Док-во: $A\setminus B = A\cap\overline{B}$: $1_{A\setminus B} = 1_A(1-1_B) \Rightarrow$

$(\Rightarrow)$

$\Rightarrow$ для: $((A\setminus B)\cup B)$: $1_{A\setminus B} + 1_B - 1_{(A\setminus B)\cap B} = 1_A \Rightarrow$

$\Rightarrow 1_A - 1_B + 1_B - 1_{A\setminus B}\cdot 1_B = A \Rightarrow 1_A - (1_A - 1_B)\cdot 1_B = 1_A \Rightarrow$

$\Rightarrow 1_A - 1_A\cdot 1_B + 1_B = 1_A \Rightarrow 1_B - 1_A\cdot 1_B = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Если $B\subseteq A$, то $1_A = 1$ и $1_B = 1$ и равенство выполняется

Если $B\nsubseteq A$, то равенство не выполняется

Значит $B\subseteq A$

№5

$P(R) \sim 2^R < R^R$, при этом $R^R < P(R)^R \sim (2^R)^R \sim 2^{R \times R} \sim 2^R \sim P(R)$. Тогда по теореме Кантора-Бернштейна $P(R) \sim R^R$

№7

Построим $S' \subseteq P(R^2)$, S' - мн-во всех горизонтальных прямых. Значит $S' \sim R^2$, пересечение - пустое мн-во, т.к. прямые не пересекаются, $s \in S' \sim R \sim R^2$ $(\forall s \in S')$. Между R^2 и R есть биекция, т.к. $R^2 \sim R$, тогда мн-ву S' с помощью этой биекции сопоставим мн-во S, всё будет выполняться

№1. Рассмотрим отображение $f: C^{(A \cup B)} \to C^A \times C^B$

Для каждой функции $g \in C^{A \cup B}$ определим

$f(g) = (h_A; h_B)$, где $h_A = g(x)$, для $x \in A$

$h_B = g(x)$, для $x \in B$

Для равномощности нужно показать биекцию, а для этого доказать инъекцию и сюръекцию.

• Инъективность:

Пусть $f(g_1) = f(g_2)$, где g_1 и $g_2 \in C^{A \cup B}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow (h_{A_1}; h_{B_1}) = (h_{A_2}; h_{B_2}) \Rightarrow \left.\begin{cases} h_{A_1} = h_{A_2} \\ h_{B_1} = h_{B_2} \end{cases}\right\} \Rightarrow g_1 = g_2 \Rightarrow$

есть инъективность.

• Сюръективность:

Пусть $(h_A; h_B) \in C^A \times C^B$, тогда $\exists t: t = h_A \cup h_B \Rightarrow$

$\Rightarrow f(t) = (h_A; h_B) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ есть сюръекция.

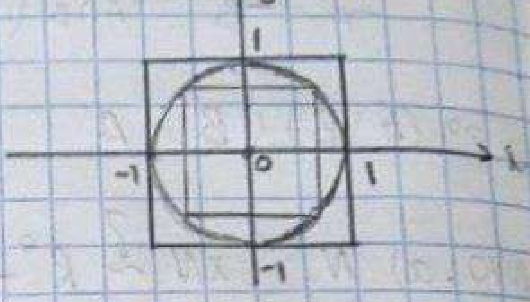
Значит есть биекция $\Rightarrow C^{A \times B} \sim C^A \times C^B$

№ 6

Рассмотрим $\forall$ точку внутри одной окружности данной восьмёрки и $\forall$ точку внутри другой окружности, у первой координаты (q_1, q_2), у второй (q_3, q_4), тогда ~~(q_1, q_2, q_3, q_4)~~ из мн-ва X (из условия) существует инъективное отображение в мн-во, содержащее все четверки рациональных чисел, ~~в~~ которые образуются ~~...~~ из координат (q_1, q_2, q_3, q_4), отображение инъективно, т.к. восьмёрки не пересекаются по условию $\Rightarrow$ ~~вся точка~~ ~~в~~ первая точка и вторая точка вместе точно не лежат больше ни в какой восьмёрке.

Тогда $X \lesssim \mathbb{Q}^4 \sim \mathbb{N}$ ($\mathbb{Q}^4 \sim \mathbb{N}$ по доказанному когда-то), т.е. ~~...~~ $X \lesssim \mathbb{N}$.

b) Каждый квадрат и каждый круг мы можем "нормировать", т.е. сделать так, чтобы центры совпадали с началом координат, а радиус круга был 1 (каждую координату каждой точки поделить на изначальный R) и сторона квадрата была 2 (аналогично координаты поделить на a)



Теперь предоставим 2 инъекции.

• Сожмем квадрат в $\sqrt{2}$ раз ⇒

⇒ Получим меньший квадрат, который отображает все точки изначального квадрата в круг.

• Заметим, что "нормированный" круг отображается в "нормированный" квадрат тождественным отображением.

Тогда у нас есть 2 инъекции, а по теореме КБШ можно утверждать, что эти множества равномощны.

Ч.т.д.

№8. Опр. непрерывности: $C = \{f \in R^R \mid f\text{-непрерыв}\}$

$f(x)$ непрерывна в $x_0 \in R \Leftrightarrow$ если $\forall$ послед. $\{x_n\} \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0$
$f(x_n) \to f(x)$

Для ~~изм~~ равномощности $C \sim R$ нужно составить вз. однозначное отображ.

Мн-во раz чисел на отрезке R счетно $\Rightarrow$ пронумеруем их $\{q_1; q_2; q_3; \ldots\}$
Тогда $\forall f \in C$ построим послед. её знач. в рац. т
$\{f(q_1); f(q_2); \ldots\}$; обратно для любой последовательности $\{y_1; y_2; \ldots;\}$ можно сопоставить
$f(q_n) = y_n$ для всех n
Таким образом получаем вз. однозначное соответствие между мн. C и $R \Rightarrow$
$\Rightarrow C \sim R$.

ч.т.д.