数学物理方法 (复变函数 + 数学物理方程)

404-NOT-FOUND

April 1, 2025

1 解析函数的性质

1.1 极限，连续，可导与可微

极限：若函数 $f(z)$ 在 z_0 的空心邻域有定义，若存在复数 $A, \forall\varepsilon > 0, \exists\delta(\varepsilon) > 0$, 使得 $0 < |z - z_0| < \delta$ 恒有 $|f(z) - A| < \varepsilon$, 则称

$$\lim_{z \longrightarrow z_0} f(z) = A \tag{1-1}$$

连续：若函数 $f(z)$ 在 z_0 的邻域有定义，且 $\lim_{z\longrightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$，称作 $f(z)$ 在 z_0 连续。

复变函数类似于二元函数，因此邻域的概念是二维的。而正因如此，在有界闭区域内连续的函数 $f(z)$ 有两条重要的性质：

性质 1：有界，且上下界在区域内可达；

性质 2：在区域内一致连续。

可导：若 $w = f(z)$ 是区域内的单值函数，如果区域内有某点 z, 且：

$$\lim_{\Delta z\longrightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z\longrightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \tag{1-2}$$

存在，我们称 $f(z)$ 在 z 点可导，记作 $f'(z)$。**在实数域的求导公式仍然适用**。

复变函数类似于二元函数，因此邻域的概念是二维的，因此 Δz 的趋近方向也是任意的。我们考虑 $\Delta x = 0, \Delta y \to 0$ 与 $\Delta y = 0, \Delta x \to 0$ 两种方向：

$$f'(z) = \lim_{\Delta x\longrightarrow 0} \frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$$
$$f'(z) = \lim_{\Delta y\longrightarrow 0} \frac{\Delta u + i\Delta v}{i\Delta y} = \frac{\partial u}{\partial y} - i\frac{\partial v}{\partial y}$$

两式必须相等，因此得到了**可导的必要条件**：Cauchy-Riemann 条件：

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \tag{1-3}$$

可导的**充分条件还要要求四个偏导数存在且连续!**

1.2 解析函数

函数在区域内**处处可导**就说函数在**区域内解析**。由 Cauchy-Riemann 条件可以知道，$u(x, y), v(x, y)$ 不是独立的，我们知道其中一个就可以求出另一个。一种求法是直接求偏导，然后利用 Cauchy-

Riemann 条件得到另一函数的偏导，再积分回去；另一种是利用线积分：

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}v =& \frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}y = -\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x + \frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y \\
v(x,y) =& \int^{(x,y)} \frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x + \frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y \qquad (1\text{-}4)
\end{aligned}
$$

而根据 Cauchy—Riemann 条件，又可以证明：

$$
\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 u}{\partial^2 y} = 0 \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 v}{\partial^2 y} = 0 \qquad (1\text{-}5)
$$

因此 $u(x,y), v(x,y)$ 满足 Laplace 方程，它们是调和函数。

函数在 z_0 解析：函数在**包含 z_0 的实心邻域处处可导**。$z=\infty$ 要做变换 $z=1/t$ 来判断 $t=0$ 是否解析。

1.3 习题补充

例 1：判断下面两个函数哪里可导，哪里解析。

$$
(1) f(z) = \sin x \cosh y + i \cosh x \sin y
$$

$$
(2) f(z) = \frac{1}{z^2+1}
$$

解（1）：

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= \cos x \cosh y \qquad & \frac{\partial v}{\partial y} &= \cosh x \cosh y \\
\frac{\partial u}{\partial y} &= \sin x \sinh y \qquad & \frac{\partial v}{\partial x} &= -\sinh x \sin y
\end{aligned}
$$

全平面可导，全平面满足 Cuachy-Riemann 条件，因此全平面解析。

（2）奇点显然是 $\pm$i, 但是用 Cauchy—Riemann 证明太麻烦。我们直接用可导的定义：

$$
\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{-2z - \Delta z}{\left[(z+\Delta z)^2 + 1\right](z^2+1)} = \frac{-2z}{(z^2+1)}
$$

当 $z \neq \pm$i，极限存在。

例 2：我们做如下代换：

$$
\begin{aligned}
u(x,y) + iv(x,y) &= u(\frac{z+z^*}{2}, \frac{z-z^*}{2i}) + iv(\frac{z+z^*}{2}, \frac{z-z^*}{2i}) = f(z,z^*) \\
\text{证明:} \frac{\partial f(z,z^*)}{z^*} &= 0
\end{aligned}
$$

***proof*:** 本题考查的是复合函数的求偏导法则。

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f(z,z^*)}{z^*} &= \frac{\partial(u+iv)}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial(u+iv)}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z} \\
&= \frac{1}{2}(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}) - \frac{1}{2i}(\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}) \\
&= \frac{1}{2}\left[(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}) + i(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x})\right] \\
&= 0
\end{aligned}
$$

例 3: 已知 $f(z)$ 是解析函数，根据以下条件求 $f(z)$:

$$(1)v(x,y)=e^{-x}(x\sin y-y\cos y)\qquad(2)u+v=x^2-y^2-2xy$$

解：（1）利用线积分法，注意最后一步怎么整理成关于 z 的方程即可。

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial x}&=-e^{-x}(x\sin y-y\cos y)+e^{-x}(\sin y)=e^{-x}((1-x)\sin y+y\cos y)\\ \frac{\partial v}{\partial y}&=e^{-x}(-\cos y+y\sin y+x\cos y)=e^{-x}((x-1)\cos y+y\sin y)\\ u(x,y)&=\int^{(x,y)}\frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}x-\frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}y\\ &=-e^{-x}(x\cos y+y\sin y)+C\\ f(z)&=u+iv|_{x=z,y=0}=-ze^{-z}+C\end{aligned}$$

（2）直接对式子求偏导，利用 Cauchy-Riemann 条件列方程即可：

2　复变函数的积分

2.1　复变函数积分的引入

从不定积分的角度理解，复变函数积分同样是分割取极限：

$$\sum_{k=1}^{n}f(\alpha_k)(z_k-z_{k-1})=\sum_{k=1}^{n}f(\alpha_k)\Delta_{z_k}\tag{2-1}$$

也就相当于：

$$\int_c f(z)\mathrm{d}z=\lim_{max|\Delta z_k|\hookrightarrow 0}\sum_{k=1}^{n}f(\alpha_k)\Delta z_k\tag{2-2}$$

同时由于 $z=x+iy$，我们可以把积分式拆解为二元积分：

$$\begin{aligned}\int_c f(z)\mathrm{d}z&=\int_c(u+iv)(\mathrm{d}x+i\mathrm{d}y)\\ &=\int_c(u\mathrm{d}x-v\mathrm{d}y)+i\int_c(u\mathrm{d}x+v\mathrm{d}y)\end{aligned}\tag{2-3}$$

与实函数的积分一样，复变函数的不定积分也有以下几条性质：

$$\int_c(f_1+f_2+...+f_n)\mathrm{d}z=\int_c f_1\mathrm{d}z+\int_c f_2\mathrm{d}z+...+\int_c f_n\mathrm{d}z\tag{2-4}$$

$$\int_{c_1}f\mathrm{d}z+\int_{c_2}f\mathrm{d}z+...+\int_{c_n}f\mathrm{d}z=\int_{(c_1+...+c_n)}\mathrm{d}z\tag{2-5}$$

$$\int_{C^-}f(z)\mathrm{d}z=-\int_c f(z)\mathrm{d}z\qquad\text{其中 } c^- \text{ 是 } c \text{ 的反方向}\tag{2-6}$$

$$|\int_c f(z)\mathrm{d}z\le\int_c|f||\mathrm{d}z|\tag{2-7}$$

$$|\int_c f(z)\mathrm{d}z|\le ML\qquad\text{M 为积分值的模的最大值，L 是积分路径长度}\tag{2-8}$$

这里从 2-7 推理到 2-8 并不难，而 2-7 则是类似于实函数中不定积分的相似法则，这里我们来讨论一下 $|\mathrm{d}z|$ 到底意味着什么。显然这是模长的含义，所以我们习惯于做 $z=re^{i\theta}$ 的代换, 这样我们可以发现，$|\mathrm{d}z|=|ire^{i\theta}\mathrm{d}\theta|=r\mathrm{d}\theta$, 这样的代换是非常重要的，我们之后的的一道例题可以感受一下这样代换。

2.2 Cauchy 引理

我们先看一下引理内容：**若 $f(z)$ 在单连通区域 $\hat{G}$ 中解析，则沿该区域任意一个分段光滑围道 C 有：**

$$\oint_c f(z)\mathrm{d}z=0 \tag{2-9}$$

当这个区域内有奇点的时候，我们需要在奇点周围挖洞，构造反向围道，这和我们在 Green 公式中学到的方法一致。原式可以写成 $\sum_{i=1}^{n}\oint_{c_i}f(z)\mathrm{d}z$, 且所有的积分围道走向都相同。因此我们也可得到推论：单连通区域内解析的函数，积分值与积分路径无关。我们定义复变函数不定积分的原函数：**若 $f(z)$ 在单连通区域内解析，则 $F(z)=\int_{z_0}^{z}f(z)\mathrm{d}z$ 也解析，且 $F^{'}(z)=f(z)$**, 现在我们来证明原函数的解析性：

proof：由于 $F(z)=\int_{z_0}^{z}f(\varepsilon)d\varepsilon$, 我们计算：

$$\frac{\Delta F}{\Delta z}=\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}=\frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z}f(\varepsilon)d\varepsilon$$

因此我们进一步得到

$$\begin{aligned}|\frac{\Delta F}{\Delta z}-f(z)|&=|\frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z}f(\varepsilon)d\varepsilon-f(z)|\\&=|\frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z}|[f(\varepsilon)-f(z)]d\varepsilon|\\&\le\frac{1}{|\Delta z|}|f(\varepsilon)-f(z)||d\varepsilon|\qquad\text{（这一步用到了结论 2-7）}\end{aligned}$$

由于 $f(z)$ 连续，因此对 $\forall x>0$，$\exists\delta>0$, 使得 $|\varepsilon-z|<\varepsilon$ 时，$|f(\varepsilon)-f(z)|<\beta$（连续性的定义），因此有：

$$\text{原式}\le\frac{\beta|\Delta z|}{|\Delta z|}=\beta$$

证毕。

2.3 两个引理与 Cauchy 积分

小圆弧定理：**若函数 $f(z)$ 在 $z=a$ 的邻域内连续，且当 $\theta_1\le arg(z-a)\le\theta_2,|z-a|\to 0$ 时，$(z-a)f(z)\xrightarrow{\text{一致趋近}}k$, 则有：**

$$\lim_{\delta\to 0}\int_c f(z)\mathrm{d}z=ik(\theta_2-\theta_1) \tag{2-10}$$

大圆弧定理：**若函数 $f(z)$ 在 $z=\infty$ 的邻域内连续，且当 $\theta_1\le arg(z-a)\le\theta_2,z\to\infty$ 时，$zf(z)\xrightarrow{\text{一致趋近}}K$, 则有：**

$$\lim_{\delta\to 0}\int_c f(z)\mathrm{d}z=iK(\theta_2-\theta_1) \tag{2-11}$$

这里我们不做证明。具体可参考课本，不作为证明重点。

Cauchy 积分：

版本 1 **(有界版本)**：设 $f(z)$ 是 $\hat{G}$ 内的单值解析函数，$\hat{G}$ 的边界 C 分段光滑,a 为区域内一点，则：

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\oint_c \frac{f(z)}{z-a}\mathrm{d}z \tag{2-12}$$

我们来对这个定理进行证明：

proof: 在区域 G 内作围道圆 $|z-a|<r$，则

$$\begin{aligned}
\oint_{|z-a|<r} \frac{f(z)\mathrm{d}z}{z-a} &= \lim_{r\longrightarrow 0}\oint_{|z-a|=r} \frac{f(z)\mathrm{d}z}{|z-a|} \\
\because \lim_{z\longrightarrow a}\frac{f(z)}{z-a}\times(z-a) &= f(a) \\
\therefore \lim_{r\longrightarrow 0}\oint_{|z-a|\longrightarrow r} \frac{f(z)\mathrm{d}z}{z-a} &= if(a)(2\pi-0)
\end{aligned}$$

证毕。这里第二步到第三步使用了小圆弧定理。而 Cauchy 有界区域我们选择圆形区域 $|z-a| = Re^{i\theta}$,2-12 进一步化简成：

$$\begin{aligned}
f(a) &= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{f(a+Re^{i\theta})}{Re^{i\theta}}iRe^{i\theta}\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a+Re^{i\theta})\mathrm{d}\theta
\end{aligned} \tag{2-13}$$

2-13 表明，这一点的值就是绕其一周的圆上值的平均。

版本 2 **(无界版本)**：**若函数 $f(z)$ 在 C 上/外解析，$z\to\infty, f(z)\xrightarrow{\text{一致趋近}} 0$，则 2-12 成立**。**这里证明省略**。

2.4 高阶导数

定理：**若 $f(z)$ 在 $\hat{G}$ 解析，则 G 内 $f(z)$ 的任意阶导数 $f^n(z)$ 存在，且**

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_c \frac{f(\varepsilon)}{(\varepsilon-z)^{n+1}}d\varepsilon \tag{2-14}$$

证明过程如下：

$$\begin{aligned}
f^{'}(z) &= \lim_{h\longrightarrow 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h} \\
&= \lim_{h\longrightarrow 0}\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{h}\oint_c\left[\frac{f(\varepsilon}{\varepsilon-z-h}-\frac{f(\varepsilon)}{\varepsilon-z}\right]\mathrm{d}z \qquad \text{有界 Cauchy 定理} \\
&= \lim_{h\longrightarrow 0}\frac{1}{2\pi i}\oint_c\frac{f(\varepsilon)}{(\varepsilon-z-h)(\varepsilon-z)}\mathrm{d}z \\
&= \frac{1}{2\pi i}\oint_c\frac{f(\varepsilon)}{(\varepsilon-z)(\varepsilon-z)}\mathrm{d}z \qquad ?????
\end{aligned}$$

最后一步我们把积分和取极限互换了位置，这需要我们证明其合理性。

$$\begin{aligned}
&|\lim_{h\to 0}\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{h}\oint_c[\frac{f(\varepsilon}{\varepsilon-z-h}-\frac{1}{2\pi i}\oint_c\frac{f(\varepsilon)}{(\varepsilon-z)(\varepsilon-z)}\mathrm{d}z| \\
=&\frac{|h|}{2\pi}|\oint_c\frac{f(\varepsilon\ d\varepsilon}{(\varepsilon-z-h)(\varepsilon-z)^2}| \\
\leq&\frac{|h|}{2\pi}\frac{ML}{(\delta-h)\delta^2}
\end{aligned}$$

而当 $|h|\to 0,\frac{ML}{(\delta-h)\delta^2}$ 有界，故右边整体趋近于 0，证毕。最后一步使用了 2-8.

我们发现，复变函数中只要解析，所有阶数的导数均存在，这与实函数中不同。这是因为，复变函数“类似”与二重积分，处处解析类似于“可微”而不是“可偏导”，复变函数解析的效果更强。复变函数的导数在解决一些积分问题也有奇效（因为 Cauchy 积分要求分母是一次项，高阶导数可以解决 n 次项的问题）

由 Cauchy 积分和高阶导数，我们可以得到以下推论：

Cauchy 不等式：

$$|f^{(n)}(z)|\leq\frac{n!}{2\pi}\frac{ML}{d^(n+1)}\qquad \text{l 为边界周长，d 是 z 到边界最短距离} \tag{2-15}$$

当轨迹是一个以 z 点为中心的圆时，Cauchy 不等式可以写成；

$$|f^{(n)}(z)|\leq\frac{n!M}{R^n} \tag{2-16}$$

Liouville 定理：$f(z)$ 在全平面解析，且 $z\to\infty$ 时，$|f(z)|$ 有界，则 $f(z)$ 是一常数。

2.5 习题补充

例 1：计算积分 $\oint_C\frac{\cos z}{(z-a)^2}|\mathrm{d}z|\qquad C\ |z|=b\neq a$，逆时针方向。

解： 先处理 $|dz|$

$$|\mathrm{d}z|=|\mathrm{d}(be^{i\theta})|=|bie^{i\theta}\mathrm{d}\theta|=bz\mathrm{d}\theta=-ib\frac{\mathrm{d}z}{z} \tag{2-17}$$

这个式子非常重要！ 因此我们在求 $-ib\oint_C\frac{\cos z}{z(z-a)^2}\mathrm{d}z$, 这个函数的奇点是 $z=0$ 与 $z=a$。当 $b<|a|$ 与 $b>|a|$ 的时候，积分围道内的奇点分别是一个和两个。

第一种情况，0 为奇点，由于 Cauchy 积分可得：

$$\frac{\cos 0}{(0-a)^2}=\frac{1}{2\pi i}\oint_c\frac{\frac{\cos z}{(z-a)^2}}{z-0}\mathrm{d}z$$

$$-ib\oint_{C_0}\frac{\cos z}{z(z-a)^2}\mathrm{d}z=-ib\cdot 2\pi i\frac{\cos 0}{(0-a)^2}=\frac{2\pi b}{a^2}$$

第二种情况：0 是一个奇点，周围的围道积分算出来了。我们需要再加上 a 附近的围道积分，根据高阶导数我们知道：

$$(\frac{\cos a}{a})'=\frac{1}{2\pi i}\oint_c\frac{\frac{\cos z}{z}}{(z-a)^2}$$

$$-ib\oint_{C_a}\frac{\cos z}{z(z-a)^2}\mathrm{d}z=-ib\cdot 2\pi i\cdot(\frac{\cos z}{z})'\Big|_{z=a}=-\frac{2\pi b}{a}(\cos a+a\sin a)$$

$$\text{原式}=-\frac{2\pi b}{a}(\cos a+a\sin a)+\frac{2\pi b}{a^2}$$

这里我们注意：第一点是分类讨论**奇点在围道内还是围道外**；第二点是要注意，**高阶导数公式的使用**。观察式子 2-13，分母是多次项系数而非 Cauchy 公式的一次项。这样也是求奇点附近围道积分的方法。

例 2： 计算积分 $\oint_{|z|=R} \frac{z}{e^{2\pi i z^2}-1}\mathrm{d}z \qquad n < R^2 < n+1 \quad n \in \mathcal{N}^+$

解： 先计算奇点，有 $(4n+1)$ 个，分别是

$$z=0 \qquad z=\sqrt{m}e^{ik\pi/2}(m=1,2...n \quad k=0,1,2,3)$$

然后我们利用留数定理求解, 这里不再赘述 (因为分母的形式不好处理) 主要是求根的方法!!! $z^2=m, z=\pm\sqrt{m}, m=-R---R$ 对于正整数 n，**我们称满足 $z^n=1$ 的所有复数为 n 阶单位根，记为 ω_n，并且这些单位根可以表示为：**

$$\omega_n^k = e^{\frac{2\pi i k}{n}}, \quad k=0,1,2,\ldots,n-1.$$

这里的 $\omega_n = e^{\frac{2\pi i}{n}}$

例 3：计算积分 $\oint_{|z|=2} \frac{\mathrm{d}z}{z^3(z^{10}-2)}$

解：方法 1：原式可以写成：

$$\oint_{z=2} \frac{\mathrm{d}z}{z^3\Pi_{k=0}^{9}(z-z_k)}$$

在 0 处用高阶导数公式，在其他根用 Cauchy 定理，这样显然比较麻烦。

方法 2：找一个更大的围道 $\oint_{|z|=R} \frac{\mathrm{d}z}{z^3(z^{10}-2)}$，则在 $|z|=R$ 与 $|z|=2$ 之间没有奇点，所以就有：

$$\oint_{|z|=2} \frac{\mathrm{d}z}{z^3(z^{10}-2)} = -\oint_{|z|=R} \frac{\mathrm{d}z}{z^3(z^{10}-2)}$$

取 $R\to\infty$，根据大圆弧定理由于 $\lim_{z\to\infty} z\cdot\frac{z}{z^3(z^{10}-2)}=0$，所以原答案为 0

方法 3： 做代换 $z=1/t$，则原式变为：

$$\oint_{|z|=2} \frac{\mathrm{d}z}{z^3(z^{10}-2)} = -\oint_{|t|=1/2} \frac{t^{11}\mathrm{d}t}{2t^{10}-1}$$

而在这个范围内是没有奇点的, 因此答案为 0.

例 4：证明：

$$\frac{\mathrm{d}^n f(\xi)}{\mathrm{d}\xi^n} = (-1)^n \rho^{n+1} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\rho^n}\left[\rho^{n-1} f(\frac{1}{\rho})\right] \qquad \rho=\xi^{-1}$$

proof:

$$\begin{aligned}
f^{(n)}(\xi) &= \frac{n!}{2\pi i}\oint_{|z|=R} \frac{f(z)}{(z-\xi)^{n+1}}\mathrm{d}z \\
f^{(n)}(\xi) &= \frac{n!}{2\pi i}\oint_{|\xi|=1/R} \frac{f(1/\xi)}{(\xi^{-1}-\rho^{-1})^{n+1}}\left(-\frac{\mathrm{d}\xi}{\xi^2}\right) \qquad \xi=z^{-1} \\
&= (-1)^n\rho^{n+1}\frac{n!}{2\pi i}\oint_{|\xi|=1/R} \frac{f(1/\xi)}{(\xi-\rho)^{n+1}}\xi^{n-1}\mathrm{d}\xi \\
\text{而} f^{(n)}(z) &= \frac{n!}{2\pi i}\oint_c \frac{f(\xi)}{(\xi-z)^{n+1}}\mathrm{d}\xi \\
(\rho^{n-1}f(1/\rho))^{(n)} &= \frac{n!}{2\pi i}\oint_c \frac{\xi^{n-1}f(1/\xi)}{(\xi-\rho)^{n+1}}\mathrm{d}\xi
\end{aligned}$$

证毕。

3 无穷级数

由于 $u_n = \alpha_n + i\beta_n$, 则 $S_n = \sum_{k=0}^{n} \alpha_i + \sum_{k=0}^{n} \beta_j$, 一个复数级数收敛相当于两个实数级数收敛。高数中学习的收敛判断条件同样适用于复数级数。复数级数绝对收敛相当于模长级数收敛，且它是一个正项级数。

3.1 绝对收敛与二重级数

绝对收敛判断是正项级数判断，因此:

比较判别法: $|u_n| < |v_n|$, **且** $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ **收敛，则** $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ **绝对收敛。**

比值判别法：存在与 n **无关的** ρ**，使得** $|\frac{u_{n+1}}{u_n}| < \rho < 1$**，则** $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ **绝对收敛。**

达朗贝尔判别法：若 $\overline{\lim}_{n\to\infty} |\frac{u_{n+1}}{u_n}| = l < 1$**，则** $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ **绝对收敛。**

Cauchy 判别法：若 $\overline{\lim}_{n\to\infty} |u_n|^{\frac{1}{n}} < 1$**，则** $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ **绝对收敛。**

绝对收敛可以改换次序，且绝对收敛的子序列同样绝对收敛。并且绝对收敛的级数之积也同样收敛，即:

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k \times \sum_{l=0}^{\infty} v_l = \sum_{k=0,l=0}^{\infty} u_k v_l \tag{3-1}$$

3-1 实际上是一个二重级数，他等同于 $u_0v_0 + u_0v_1 + u_0v_2 + ... + u_1v_0 + u_1v_1 + ...$。因此我们修改求和方式，把下标和相同的项在一起求和，也就相当于:

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k \times \sum_{l=0}^{\infty} v_l = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} \tag{3-2}$$

上面的式子非常重要，在后续的学习中还会用到。

3.2 函数级数的敛散性

首先我们需要明白一致收敛的含义: **对于** $\forall\varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon$ **与 z 无关，当** $n > N_\varepsilon$ **时，** $|S(z) - \sum_{k=1}^{n} u_k(z)| < \varepsilon$。但显然用定义判断一致收敛并不好用。这里我们介绍:

Weistrass 判别法：若在区域 G **内有** $|u_k(z)| < a_k$**，且** a_k **与** z **无关，则绝对一致收敛成立。**

一致收敛保连续，保积分，保求导。

含参积分也有一致收敛性。我们介绍定理：若

$$1.f(t,z)\text{为 t，z 的连续函数}, t > a, z \in G$$
$$2.\forall t >\geq a, f(t,z)\text{在区域内是单值解析函数}$$
$$3.\int_a^{\infty} f(t,z)\text{在区域上一致收敛}$$

则 $F(z) = \int_0^{\infty} f(t,z)\mathrm{d}t$ **在区域内解析，且** $F^{'}(z) = \int_0^{\infty} \frac{\partial f(t,z)}{\partial z}\mathrm{d}t$

***proof*:** 任取一个无界序列 $\{a_n\}, a_0 < a_1 < a_2 < ..., \lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, 令 $u_n = \int_{a_n}^{a_{n+1}} f(t,z)\mathrm{d}t$ 显然 $|u_n(z)|$ 单值解析，而 $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(z)$ 一致收敛，利用 Weierstrass 定理得证。

因此我们可以利用强函数积分收敛证明原函数积分收敛。下面是一道例题:

example: 计算 $F(z) = \int_0^{\infty} e^{-t^2} cos2zt\mathrm{d}t$, 其中 $\mathrm{Im}(z) < y_0$

$$|cos2zt| = \sqrt{cosh^2 2yt - sinh^2 2xt} \le |cosh2yt| \le e^{|2yt|}$$
$$Im(z) < y_0 \qquad |e^{-t^2} cos2zt\mathrm{d}t| \le e^{|-t^2+2y_0t|}$$
$$\int_0^\infty e^{|-t^2+2y_0t|}\text{一致收敛, 所以原函数一致收敛}$$
$$F^{'}(z) = -\int_0^\infty e^{-t^2} 2tsin2zt\mathrm{d}t = -2zF(z) \qquad \text{分部积分法}$$
$$F^{'}(z) + 2zF(z) = 0 \qquad F(z) = Ce^{-z^2}$$
$$\text{其中}C = F(0) = \int_0^\infty e^{-t^2}\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$
$$F(z) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-z^2}$$

3.3 幂级数

通项为幂函数的函数项级数。即：$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + ...$

Abel 第一定理：若级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ 在 z_0 收敛，则在以 a 为圆心，$|z_0 - a|$ 为半径的圆内绝对收敛，而且在圆内一致收敛。

因此幂函数存在一个收敛圆，圆心就是 $z = a$ 点，收敛半径记作 R, 求收敛半径有以下两种方法：

Cauchy 判别法：$\overline{\lim}_{n\to\infty} |c_n(z-a)^n|^{\frac{1}{n}} < 1$, 即就是 $|z-a| < \frac{1}{\overline{\lim} |c_n|^{\frac{1}{n}}} = R$, 绝对收敛，且求出了半径.

d'Alembert 判别法：若 $\lim_{n\to\infty} |\frac{c_{n+1}(z-a)^{n+1}}{c_n(z-a)^n}| = \lim_{n\to\infty} |z-a||\frac{c_{n+1}}{c_n}|$ 存在，则极限小于 1 的时候绝对收敛。$R = lim_{n\to\infty}|\frac{c_n}{c_n+1}|$

3.4 习题补充

我们再次强调收敛半径的求法 $\underline{\lim}_{n\to\infty} |1/c_n|^{1/n}$ 或 $\lim_{n\to\infty} |c_n/c_{n+1}|$

例 1：（复数级数）判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n^\alpha}(\alpha > 0)$ 的收敛性和绝对收敛性

解：判断条件收敛：拆成两个级数，实数项系数和虚数项系数，利用莱布尼茨判别法可轻松证明。判断绝对收敛：p 级数，$\alpha > 1$ 收敛，反之发散。

例 2：确定下列级数的收敛半径：

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{n^n} z^n \qquad\qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{2^{2n}}$$

解：我们记住两个求收敛半径的方法：

$$\lim_{n\to\infty} |\frac{(n!)^2/n^n}{(n+1!)^2/(n+1)^{n+1}}| = \lim_{n\to\infty} |\frac{(1+\frac{1}{n})^n(n+1)}{(n+1)^2}|$$
$$= e\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 = R$$
$$\underline{\lim}_{n\to\infty} |\frac{1}{2^{2n}}|^{1/n} = 2$$

在这里我们需要注意，第二项幂函数的系数为 $1/2^n$ 或者 0，这个题也可以直接求和。

4 解析函数的局域展开

4.1 Taylor 展开

设 $f(z)$ 在以 a 为圆心的圆 C 和 C 上解析，对圆内任意点 z,$f(z)$ 可用幂级数展开，即：

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-a)^n$$
$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_c\frac{f(\varepsilon)}{(\varepsilon-a)^{n+1}}d(\varepsilon)=\frac{f(a)^{(n)}}{n!} \tag{4-1}$$

proof:

由 Cauchy 积分可知，$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_c\frac{f(\varepsilon)}{\varepsilon-z}d(\varepsilon)$

$\therefore\frac{1}{\varepsilon-z}=\frac{1}{(\varepsilon-a)-(z-a)}=\frac{1}{\varepsilon-a}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{z-a}{\varepsilon-a})^n$

(这一步实际上是等比数列求和）

这个幂级数的收敛半径是$\varepsilon-a$　逐项积分：

$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_c[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-a)^nf(\varepsilon)}{(\varepsilon-a)^{n+1}}d\varepsilon]=\sum_{n=0}^{\infty}[\frac{1}{2\pi i}\oint_c\frac{f(\varepsilon)}{(\varepsilon-a)^{n+1}}d\varepsilon](z-a)^n$

根据高阶导数，化简得：$f(z)=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n$

Taylor 展开要注意，函数只需要在圆内解析。由于复变函数和实数域不同，幂级数的收敛范围是圆，因此 Taylor 展开只需要在圆内解析。因此，复变函数的奇点完全决定了收敛半径。收敛半径就是距离展开点最近的奇点到展开点的距离。

同实数域的 Taylor 展开一样，复变函数的 Taylor 展开也具有唯一性，这里提供常见的 Taylor 展开公式（本质上与实数域中的 Taylor 展开形式一致）：

$$e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\qquad |z|<\infty \tag{4-2}$$
$$\frac{1}{1+z^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nz^{2n}\qquad |z|<1 \tag{4-3}$$
$$sinz=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n+1}\qquad |z|<\infty \tag{4-4}$$
$$cosz=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}z^{2n}\qquad |z|<\infty \tag{4-5}$$
$$\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty}z^n\qquad |z|<1 \tag{4-6}$$

example: 求出 $\frac{1}{(1-z)(1-2z)}$ 与 $tanz$ 的泰勒展开。

这种问题需要用到泰勒展开的唯一性。

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1-z)(1-2z)} &= \sum_{k=0}^{\infty} z^k \times \sum_{l=0}^{\infty} 2^l z^l = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} z^{k+l}2^l \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(\sum_{l=0}^{\infty} 2^l) z^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(2^{n+1}-1)z^n\end{aligned}$$

$tanz = -tan(-z)$只有奇次幂，令$tanz = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2k+1}z^{2k+1} = \frac{sinz}{cosz}$

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{(2n+1)} &= \sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^l}{(2l+1)!}z^{2l}\sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1}z^{2k+1} \\ &= \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1}\frac{(-1)^l}{(2l+1)!}z^{2(l+k)+1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(\sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1}\frac{(-1)^{n-k}}{(2n-2k)!})z^{2k+1}\end{aligned}$$

然后我们逐项比较系数即可。第一问我们没有用拆分式的做法，因为这会产生负幂项，不符合 Taylor 展开的准则。第一问在 $|z| < \frac{1}{2}$ 收敛，因为这是最近的奇点。第二问 $|z| < \frac{\pi}{2}$.

4.2 无穷远处的 Taylor 展开，零点孤立性

无穷远处的 Taylor 展开：在无穷远处 $z = \infty$ 解析，我们需要做代换 $z = \frac{1}{t}$, 这样只需讨论在 $t = 0$ 点是否解析。

解析函数的零点：若 $f(z)$ 在 $z = a$ 处为 0, 在 a 邻域解析，称 a 为零点。当 $|z-a| < R$ 时，$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$,$z = a$ 为零点，则有 $a_0 = a_1 = ... = a_{m-1} = 0$, 即就是 $f^k(a) = 0$ 当且仅当 $k < m$，此时称 $z = a$ 为 **m 阶零点**。

零点孤立性定理：若 $f(z)$ 不恒等于 0，且在包含 $z = a$ 的区域内解析，则必可以找到区域 $|z-a| = \rho > 0$, 使得圆内只有这一个零点。

4.3 Laurent 展开

Taylor 展开要求展开点附近的区域解析，但是有的时候附近区域有奇点，例如 $\frac{1}{1-z}$ 怎么在 $|z| > 1$ 处在 $z = 0$ 展开? 因此我们介绍:

Laurent 展开：设 $f(z)$ 在 b 为中心的环区 $R_1 \leq |z-a| \leq R_2$ 单值解析，对环域任一点，都有:

$$\begin{aligned}f(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-b)^n \\ a_n &= \frac{1}{2\pi i}\oint_c \frac{f(\varepsilon)}{(\varepsilon-b)^{n+1}}d\varepsilon \qquad (4\text{-}7)\end{aligned}$$

proof: 我们在 z 靠近 R_1 的位置构造逆时针围道 C_1, 在无穷远处构造逆时针围道 C_2，利用有界 Cauchy 定理（这两个围道合起来是一个 Jordan 曲线，类似 Green 公式的理解），则有：

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{c_2}\frac{f(\varepsilon)d\varepsilon}{\varepsilon-z}-\frac{1}{2\pi i}\oint_{c_1}\frac{f(\varepsilon)d\varepsilon}{\varepsilon-z}$$

$$one\,side,-\frac{1}{2\pi i}\oint_{c_1}\frac{f(\varepsilon)d\varepsilon}{\varepsilon-z}=\frac{1}{2\pi i}\oint_{c_1}\frac{f(\varepsilon)d\varepsilon}{(z-b)-(\varepsilon-b)}=\frac{1}{2\pi i}\oint_{c_1}\frac{f(\varepsilon)d\varepsilon}{z-b}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{\varepsilon-b}{z-b})^k d\varepsilon$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}[\frac{1}{2\pi i}\oint_{c_1}f(\varepsilon)(\varepsilon-b)^k d\varepsilon](z-b)^{-k-1}$$

$$=\sum_{n=-1}^{-\infty}[\frac{1}{2\pi i}\oint_{c_1}f(\varepsilon)(\varepsilon-b)^{-n-1}d\varepsilon](z-b)^n \tag{a}$$

$$another\,side,\quad \frac{1}{2\pi i}\oint_{c_2}\frac{f(\varepsilon)d\varepsilon}{\varepsilon-z}=\sum_{n=0}^{\infty}[\frac{1}{2\pi i}\oint_{c_2}f(\varepsilon)(\varepsilon-b)^{-n-1}d\varepsilon](z-b)^n \tag{b}$$

$(a)+(b)$, 证毕。

Laurent 展开也有很多性质，例如环域边界不一定需要单值解析。且 b 有可能是奇点，也有可能解析。**这就导致 $a_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(b)$ 不一定成立**。若 b 为唯一的奇点，那么可以令 $R_1\to 0$，就得到了孤立奇点的 Laurent 展开。

Laurent 展开和 Taylor 展开的关系：Laurent 展开是带有负幂项的，Taylor 展开则没有。负幂项来源于非可去奇点（之后会介绍），即这一点无定义/值并非从周围邻域趋近而来的极限。若其不是奇点，我们得到的 Laurent 展开和 Taylor 展开是一个形式的。我们因此可以在这里使用 Taylor 展开的求法求 Laurent 展开，Laurent 展开式也是唯一的。

example: 求 $\frac{1}{z(z-1)}$ 的 Laurent 展开。

solution: 原函数有两个奇点 $z=0,1$，因此在 $0<|z|<1$ 与 $1<|z|<\infty$ 是不一样的**（不同区域有不同的 Laurent 展开）**

$$\text{原式}=-\frac{1}{z}\frac{1}{1-z}=-\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}z^n=\sum_{n=-1}^{\infty}z^n \qquad 0<|z|<1$$

$$\text{原式}=-\frac{1}{z^2}\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=-\frac{1}{z^2}\sum_{n=0}^{\infty}z^{-n}=\sum_{n=-2}^{-\infty}z^n \qquad 1<|z|<\infty$$

第二个式子拆出 $-\dfrac{1}{z^2}$ 是为了让后面的部分可以 Taylor 展开

4.4 奇点的种类

奇点首先分为孤立奇点和非孤立奇点。例如函数 $f(z)=\frac{1}{sin(\frac{1}{z})}$, 显然 $x=(n\pi)^{-1}$ 都是孤立奇点。但是 $x=0$ 附近有无数多个零点，因此 0 是非孤立奇点。

孤立奇点又分为**可去奇点，极点，本性奇点**。它们的分类取决于 Laurent 展开中负幂项的数量，**分别是 0 项，有限项，无穷多项**。

可去奇点：例如 $\frac{sinz}{z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n+1)!}$ 中，0 就是可去奇点。右边去 $z=0$ 的时候值为 1，正好是原函数在 0 点的极限。因此可去奇点的特征是：

在这一点无定义，但周围的值都趋向于同一值，即 $\lim_{z\to z_0}f(z)$ 存在。

极点：极点满足：

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \sum_{n=-m}^{\infty} a_n (z-b)^n \\
&= (z-b)^{-m}[a_{-m} + a_{-m+1}(z-b) + ...] = (z-b)^{-m} g(z) \qquad (4\text{-}8)
\end{aligned}
$$

因此 $z \to b$ 时，$f(x) \to \infty$，且 $z = b$ **为** $\frac{1}{f(z)}$ **的 m 阶零点**。

同理，$z = \infty$ 作代换 $z = \frac{1}{t}$ 来研究。

4.5 解析延拓

若 $f_1(z)$ 在 G_1 解析，$f_2(z)$ 在 G_2 解析, 在 $G_1 \cap G_2$ 处有 $f_1(z) = f_2(z)$, 则称 $f_2(z)$ 是 $f_1(z)$ 在 G_2 的解析延拓，反之亦然。

4.6 习题补充

例 1（直接展开）：（1）求函数 $f(z) = \frac{z-3}{(z-1)(z-2)}$ 在 $z = 0$ 的所有展开；（2）求函数 $f(z) = \frac{1}{z^2 - 2\cos tz + 1}$ 在 $z = 0$ $t \in \mathbb{R}$ 的幂级数展开。

解：（1）我们先判断奇点：1,2,∞，因此我们要分成 $|z| < 1$ 的 Taylor 展开，$1 < |z| < 2$ 的 Laurent 展开，$|z| > 2$ 的 Laurent 展开。

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \frac{-2}{1-z} + \frac{1}{2(1-z/2)} \\
&= -2\sum_{n=0}^{\infty} z^n + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1-2^{n+2}}{2^{n+1}} z^n (|z| < 1) \\
f(z) &= \frac{2}{z}\frac{1}{1-1/z} + \frac{1}{2}\frac{1}{1-z/2} \\
&= 2\sum_{n=-\infty}^{-1} z^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} z^n (1 < |z| < 2) \\
f(z) &= \frac{2}{z}\frac{1}{1-1/z} - \frac{1}{z}\frac{1}{1-2/z} = \sum_{n=1}^{\infty} (2 - 2^{n-1}) z^{-n}
\end{aligned}
$$

我们需要注意，Laurent 展开的求法也是类似泰勒展开，只是我们要注意泰勒级数收敛的范围，因此产生了不同的式子。

(2) 第二个式子我们需要把三角函数拆开成为指数函数。由于 0 不是奇点，我们可以做 Taylor 展开：

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{z^2 - (e^{it} + e^{-it})z + 1} = (\frac{1}{z - e^{it}} - \frac{1}{z - e^{-it}})\frac{-1}{e^{it} - e^{-it}} \\
&= \frac{-1}{e^{it} - e^{-it}} \left[-e^{-it} \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{z}{e^{it}})^n - e^{it} \sum_{n=0}^{\infty} (ze^{it})^n \right] \\
&= \frac{1}{-2i\sin t} \left[\sum_{n=0}^{\infty} z^n e^{-i(n+1)t} - \sum_{n=0}^{\infty} z^n e^{i(n+1)t} \right] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(n+1)t}{\sin t} z^n (|z| > |e^{\pm it}|)
\end{aligned}
$$

例 2：待定系数法：求 $\frac{z}{\sin z}$ 与 $(1+z)^{\alpha}(\alpha<0,\alpha\in\mathbb{Z})$ 在 $z=0$ 的展开。

解：由于我们不能直接展开分母，因此我们不能直接展开。我们先确定 0 的奇点的性质。很显然这是一个可去奇点。$\lim_{z\to 0}\frac{z}{\sin z}=1$，因此我们假设：$\frac{z}{\sin z}=\sum_{n=0}^{\infty}c_n z^n$，因此我们得到：

$$\begin{aligned} z &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}z^{2k+1}\sum_{l=0}^{\infty}c_l z^l \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}c_m z^{n+(n-m)+1}\frac{(-1)^{n-m}}{(2n-2m+1)!} \end{aligned}$$

由于只有一次项的系数为 1，剩下的都为 0。关注一次项的系数，则 $2n-m+1=1$，再加上 $n<m$ 的限制，因此 $c_0=1$，然后我们再递推即可。答案应该为：

$$\frac{z}{\sin z}=1+\frac{1}{6}z^2+\frac{1}{360}z^4+...$$

第二个题由于 $\alpha<0$，我们应该做 Taylor 展开。分母不好直接展开，因此我们做类似代换：

$$\begin{aligned} 1 &= (1+z)^{-\alpha}\sum_{k=0}^{\infty}c_k z^k \\ &= \sum_{l=0}^{\infty}C_{-\alpha}^{l}z^l\sum_{k=0}^{\infty}c_k z^k \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}C_{-\alpha}^{m}c_{n-m}z^n \end{aligned}$$

比较系数即可。在这里我们需要确定是 Taylor 展开还是 Laurent 展开，都是因为我们需要确定假设的新级数最低次项是多少。

例 3：找出下列函数的奇点。并且判断其类型。

$$\frac{1}{1-\cos z}-\frac{2}{z^2} \qquad\qquad z^9\cos\frac{1}{z}$$

解：奇点的类型判断：**先判断非独立奇点和独立奇点。再判断奇点种类。常用方法是：求极限；求 Laurent 展开。极点阶数可判断倒数的零点阶数。**

第一题：$z=2k\pi$ $z=\infty$ 为奇点。$k\neq 0$ 的时候，极限 ∞。极点。此时我们看 $\frac{z^2+2\cos z-2}{z^2(1-\cos z)}$。对于上面来说，$z=2k\pi$ 是常点，对下面是 2 阶零点，因此 $\frac{z^2+2\cos z-2}{z^2(1-\cos z)}=\frac{1}{z^2}\phi(z)$，是二阶极点。当 z=0 时，求该点的极限：

$$\begin{aligned} &\lim_{z\to 0}\frac{z^2+2\cos z-2}{z^2(1-\cos z)}=\lim_{z\to 0}\frac{2z-2\sin z}{2z(1-\cos z)+z^2\sin z} \\ &=\lim_{z\to 0}\frac{2-2\cos z}{2(1-\cos z)+4z\sin z+z^2\cos z}=\lim_{z=0}\frac{2\sin z}{6\sin z+6z\cos z-z^2\sin z} \\ &=1/6 \end{aligned}$$

0 是可去奇点。

∞ 做代换，$\cos\frac{1}{t}$ 在 $t=0$ 附近有无穷多个奇点，因此是非独立奇点。

第二题的奇点显然是 $z=0\quad\infty$,0 附近我们做 Laurent 展开：

$$z^9\cos\frac{1}{z}=z^9\sum_{n=0}^{-\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}z^{2n}$$

最低次项是 $-\infty$，因此 0 是本性奇点。然后我们做 $z=1/t$ 判断无穷远点的性质，所以我们继续做 Laurent 展开：

$$t^{-9}\cos t = t^{-9}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}t^{2n}$$

因此 ∞ 是 9 阶极点。

5 Γ 函数，B 函数，δ 函数

5.1 Γ 函数

Γ 函数的常见定义式是：

$$\Gamma(z)=\int_0^{\infty}e^{-t}t^{z-1}\mathrm{d}t \qquad \mathrm{Re}z>0 \qquad \mathrm{arg}t=0 \tag{5-1}$$

证明：Γ 函数在右半平面解析。由于这是一个反常积分（t=0 瑕积分 + 无穷积分），我们拆成：

$$\int_0^{\infty}e^{-t}t^{z-1}\mathrm{d}t=\int_0^{1}e^{-t}t^{z-1}\mathrm{d}t+\int_1^{\infty}e^{-t}t^{z-1}\mathrm{d}t \tag{5-2}$$

要证明含参积分的解析性,我们要证明积分的一致收敛。我们先看第二项积分。因 $e^t=\sum_{t=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}$ 在 $|t|<\infty$ 恒成立，因此 $t>0\ \exists N\in N^+$, 使得 $e^t>\frac{t^N}{N!}$, 即就是 $e^{-t}<\frac{N!}{t^N}$。

我们选取复平面上的任何一个**有界闭区域**，**在不含边界上的所有点，z 的实部都会在一个范围之间**，即就是 $\delta<\mathrm{Re}z<x_0$。因此我们有：

$$|e^{-t}t^{z-1}|<N!\times t^{x_0-N-1}$$

而且当 $t>1$ 的时候，我们令 $N>x_0-1$, 则 $\int_1^{\infty}t^{x_0-N-1}$ 收敛，则第二项积分在全平面内解析。

我们解释：拆成两项是因为我们要说明 $\int_1^{\infty}t^{x_0-N-1}$ 收敛，这个必须要求 t>1。而我们选取的是复平面上的**任何一个有界闭区域**，因此它是全平面内解析的。

我们现在来证明第一个积分解析，我们选取复平面上的**右半平面**任意一个**有界闭区域**，**在不含边界上的所有点，z 的实部都会在一个范围之间**，即就是 $\delta<\mathrm{Re}z<x_0$。因此我们令 $x=\mathrm{Re}z$, 则

$$|e^{-t}t^{z-1}|=e^{-t}t^{x-1}\le t^{\delta-1}$$

而 $\int_0^1 t^{\delta-1}$ 收敛，所以第一项积分在右半平面解析，所以原函数在右半平面解析。

我们发现，5-1 式要求了 $\mathrm{Re}z>0$。那么我们怎么才能把它延拓到整个平面呢？由于 5-2 中第二项积分全平面解析，那么我们只需要对第一项积分延拓到全平面即可。我们将第一项积分进行 Taylor 展开如下：

$$\begin{aligned}\int_0^1 e^{-t}t^{z-1}\mathrm{d}t&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\int_0^1 t^{n+z-1}\mathrm{d}t\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}(n+z)\end{aligned} \tag{5-3}$$

Taylor 展开要求 Rez>0, 但是右侧的无穷级数全平面解析，因此这一项代替第一项就是原函数的解析延拓式。Γ 函数有非常多的基本性质。

性质 1：$\Gamma(1) = 1$，直接带入可证。

性质 2：$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$，利用分部积分。

由性质 1,2 可以得出：n 为正整数的时候：$\Gamma(n) = (n-1)!$

性质 3：$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}$

由性质 3 可以得出，$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

性质 4：Stirling 公式渐进推导。

$$lnn! \approx nlnn - n \tag{5-4}$$

5.2 B 函数

B 函数的定义如下：

$$\begin{aligned} B(p,q) &= \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\mathrm{d}t \qquad \mathrm{Re}p > 0 \qquad \mathrm{Re}q > 0 & \text{(5-5)} \\ &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p-1}\theta\cos^{2q-1}\theta\mathrm{d}\theta & \text{(5-6)} \end{aligned}$$

5-5 到 5-6 利用了代换 $t = \sin^2\theta$。不难得出

$$\mathrm{B}(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \tag{5-7}$$

现在给出证明：

$$\begin{aligned} \because \Gamma(p) &= \int_0^\infty e^{-t}t^{p-1}\mathrm{d}t & t = x^2 \\ &= 2\int_0^\infty e^{-x^2}x^{2p-1}\mathrm{d}x \\ \therefore \Gamma(p)\Gamma(q) &= 4\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}x^{2p-1}y^{2q-1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \qquad x = r\sin\theta \qquad & y = r\cos\theta \\ &= 4\int_0^\infty e^{-r^2}r^{2(p+q)-1}\mathrm{d}r\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2p-1}\theta\cos^{2q-1}\theta\mathrm{d}\theta \\ &= \Gamma(p+q)\mathrm{B}(p,q) \end{aligned}$$

利用 5-7 式可以去证明性质 3。

5.3 δ 函数

我们考虑这样一个分段函数

$$\delta_l(x) = \begin{cases} 0 & x \le -\frac{l}{2} \\ \frac{1}{l} & -\frac{l}{2} < x < \frac{l}{2} \\ 0 & x \ge \frac{l}{2} \end{cases}$$

不难得到，$\int_{-\infty}^{\infty}\delta_l(x)\mathrm{d}x=1$, 对任意连续函数 $f(x)$，我们利用中值定理，可以得到：

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta_l(x)\mathrm{d}x = f(\theta l) \qquad -1/2\le\theta\le 1/2$$

$$\delta(x)=\lim_{l\to 0}\delta_l(x)=\begin{cases}0 & x\neq 0\\ \infty & x=0\end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)\mathrm{d}x = f(0) \tag{5-8}$$

并且积分值也同样为 1。5-8 本质上才是 δ 函数的真正定义。在计算中，我们把它当做任意阶可微的函数（但本质上没有意义）。利用 δ 函数的定义，我们可以发现如下的计算公式：

$$x\delta(x)=0 \tag{5-9}$$

$$\delta(x-t)f(x)=f(t) \tag{5-10}$$

$$\delta(ax)=\frac{1}{|a|}\delta(x) \tag{5-11}$$

$$\delta(x)=\frac{\mathrm{d}\eta(x)}{\mathrm{d}x} \tag{5-12}$$

$$\text{Fourier 变换}\delta(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{ikx}dk \tag{5-13}$$

$$\text{Laplace 变换}\delta(t-t_0)=\int_0^{\infty}\delta(t-t_0)e^{-pt}\mathrm{d}t=e^{-pt_0},t_0>0 \tag{5-14}$$

其中 5-12 中，$\eta(x)$ 的值在小于 0 的时候是 0，大于等于 0 的时候是 1. 我们来看一道例题：证明：

$$\nabla^2\frac{1}{r}=-4\pi\delta(\mathbf{r})$$

$$\text{其中}\nabla^2\equiv(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z})^2\equiv\frac{\partial^2}{\partial x}+\frac{\partial^2}{\partial y}+\frac{\partial^2}{\partial z}$$

$$r\equiv|\mathbf{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2} \qquad \delta(\mathbf{r})=\delta(x)\delta(y)\delta(z)$$

***proof*:** 面对 δ 函数的问题，我们去考虑其积分定义：

$$\iiint\nabla^2\frac{1}{r}\mathrm{d}\mathbf{r}=\begin{cases}0 & r=0\\ -4\pi & r\neq 0\end{cases}$$

当 $r\neq 0$ 时, 可得：

$$\frac{\partial}{\partial x}^2(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}})=\frac{3x^2-(x^2+y^2+z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}$$

$$\nabla^2\frac{1}{r}=0$$

当 $r=0$ 的时候，我们利用球坐标换元可得，

$$\begin{aligned}\iiint \nabla^2\frac{1}{r}\mathrm{d}\mathbf{r} &= \lim_{a\longrightarrow 0}\iiint \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2+a^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\ &= -\lim_{a\longrightarrow 0}\iiint \frac{3a^2r^2}{(r^2+a^2)^{\frac{5}{2}}}\sin\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi \\ &= -12\pi\lim_{a\longrightarrow 0}\int_{a=0}^{\infty}\frac{a^2r^2}{(r^2+a^2)^{\frac{5}{2}}}\mathrm{d}r \\ &= -4\pi\end{aligned}$$

5.4 常微分方程初值问题的 Green 函数

我们关注这样的一个方程：

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}^2g(t;\tau)}{\mathrm{d}^2t}+k^2g(t;\tau)=\delta(t-\tau)\quad t>0,\tau>0 \\ &g(0;\tau)>0\qquad g'(0;\tau)=0\end{aligned}\tag{5-15}$$

我们可以先写出它的一个通解：

$$g(t;\tau)=\begin{cases}A(\tau)\sin kt+B(\tau)\cos kt & t<\tau\\ C(\tau)\sin kt+D(\tau)\cos kt & t>\tau\end{cases}$$

根据初值问题我们可以得到 $A(\tau)=B(\tau)=0$ 而且在 $t=\tau$ 的时候，函数应该是连续的，而且利用两边的积分性，在 $t=\tau$ 的时候，$k^2g(t;\tau)$ 是基本不变的，$\delta(t-\tau)$ 的值变化为 1，所以 $\int_{t=\tau^-}^{t=\tau^+}\frac{\mathrm{d}^2g(t;\tau)}{\mathrm{d}^2t}=\frac{\mathrm{d}g(t;\tau)}{\mathrm{d}t}$ 的变化为 1，于是就有：

$$\begin{aligned}C(\tau)\sin k\tau+D(\tau)\cos k\tau&=0\\ C(\tau)\cos k\tau-D(\tau)\sin k\tau&=\frac{1}{k}\end{aligned}$$

解出 $C(\tau)=\frac{\cos k\tau}{k}, D(\tau)=\frac{-\sin k\tau}{k}$

5.5 习题补充

牢记 Γ 函数的定义是有用的。$\int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}\mathrm{d}t$ 这个函数主要可以化简连乘表达式。我们还要注意：$\Gamma(-n)=\frac{(-1)^n}{n!}(n=0,1,2...)$。

例 1： 化简表达式 $f(k)=(a+b)(a+2b)...(a+kb)$

解：根据 Γ 函数的阶乘性质，可以得到：

$$f(k)=b^{k+1}(a/b+1)(a/b+2)...(a/b+k)=b^{k+1}\frac{\Gamma(a/b+1)}{\Gamma(a/b+k+1)}$$

例 2：（1）证明：$\delta(x^2-a^2)=\frac{1}{2a}[\delta(x-a)+\delta(x+a)]$

（2）把 $\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)$ 理解为在 (x_0,y_0) 处有一单位点电荷，求 $\delta(x^2-1)\delta(y^2-4)$ 的物理含义。

6 留数定理

6.1 留数定理的引入

留数定理：设有界区域 G 的边界 C 为分段光滑简单闭合曲线，若除去有限个奇点 $b_k(k = 1, 2, 3...)$ 外，函数 $f(z)$ 在区域内单值解析，在 $\hat{G}$ 连续，则沿区域边界正向的积分：

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{res} f(b_k) \tag{6-1}$$

$\mathrm{res} f(b_k)$ 是称函数在奇点处的**留数**。她等于在奇点 Laurent 展开的负一次项的系数。

留数定理本质上就是有界 Cauchy 公式和 Laurent 展开的综合运用。如果 b_k 是极点，那么我们该怎么快速计算出留数吗？设 $z = b$ 是 $f(z)$ 的 m 阶极点，则：

$$\begin{aligned}
f(z) &= a_{-m}(z-b)^{-m} + a_{-m+1}(z-b)^{-m+1} + ... + a_{-1}(z-b)^{-1} + a_0 + ... \\
(z-b)^m f(z) &= a_{-m}(z-b) + a_{-m+1}(z-b)... + a_{-1}(z-b)^{-1+m} + a_0(z-b)^m + ... \\
a_{-1} &= \frac{1}{(m-1)!}\frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}^{m-1}z}(z-b)^m f(z) \quad (z = b) \qquad (6\text{-}2)
\end{aligned}$$

特殊的，当 b_k 是一阶极点的时候:

$$a_{-1} = \lim_{z \longrightarrow b}(z-b)f(z) \tag{6-3}$$

这个极限可以用洛必达法则进一步化简。

example：(1) 求出 $\frac{e^{iaz}-e^{ibz}}{z^2}$，$\frac{1}{(z^2+1)^3}$ 所有独立奇点，并说明它们是几阶极点。

(2) 求孤立奇点的留数。

解：(1)$\frac{e^{iaz}-e^{ibz}}{z^2}$ 的奇点为 0，判断 $\frac{z^2}{e^{iaz}-e^{ibz}}$ 中 0 是几阶零点，判断其一阶导数不为 0，因此是 0 为原函数一阶极点。**(或者判断分子是二阶零点，分母是二阶零点，因此是一阶零点)** $\frac{1}{(z^2+1)^3}$ 的奇点是 i 与-i，是三阶极点。

(2) 对于第一个式子：

$$\mathrm{res} f(0) = \lim_{z \longrightarrow 0} z \cdot \frac{e^{iaz}-e^{ibz}}{z^2} = \mathrm{i}(a-b)$$

对于第二个式子：

$$\mathrm{res} f(\pm\mathrm{i}) = \frac{1}{2!}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}^2 z}[(z \pm (-\mathrm{i})^3 \cdot \frac{1}{(z^2+1)^3}] = \pm\frac{-3}{16}\mathrm{i}$$

无穷远点的留数该怎么确认呢？令 $z = \frac{1}{t}$, 则：

$$\begin{aligned}
\mathrm{res} f(\infty) &= \frac{-1}{2\pi i}\oint_c \frac{f(\frac{1}{t})}{t^2}\mathrm{d}t \\
&= \frac{f(\frac{1}{t})}{t^2}\text{在}t = 0\text{展开中负一次项系数} \\
&= -f(\frac{1}{t})\text{在}t = 0\text{展开时 1 次项系数} \\
&= -f(z)\text{在}z = \infty\text{展开的负一次项系数}
\end{aligned}$$

因此只是需要我们加上一个负号即可。

6.2 有理三角积分与无穷积分

对于以下的有理三角积分：

$$I=\int_0^{2\pi}R(\sin\theta,\cos\theta)\mathrm{d}\theta$$

我们做换元：$sin\theta=\frac{z^2-1}{2iz},cos\theta=\frac{z^2+1}{2z}$，上述的式子可以化简成：

$$I=\oint_{|z|=1}R(\frac{z^2-1}{2iz},\frac{z^2+1}{2z})\frac{\mathrm{d}z}{iz} \tag{6-4}$$

example：计算积分 $I=\int_0^{\pi}\frac{1}{1+\varepsilon\cos\theta}\mathrm{d}\theta,|\varepsilon|<1$

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi}\frac{1}{1+\varepsilon\cos\theta}\mathrm{d}\theta&=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{1+\varepsilon\cos\theta}\mathrm{d}\theta\\&=\frac{1}{2}\oint_{|z|=1}\frac{1}{1+\varepsilon\frac{z^2+1}{2z}}\frac{\mathrm{d}z}{iz}\\&=\frac{1}{2}\oint_{|z|=1}\frac{2}{\varepsilon z^2+2z+\varepsilon}\frac{\mathrm{d}z}{iz}\\&=\pi\sum_{|z|<1}\mathrm{res}\frac{2}{\varepsilon z^2+2z+\varepsilon}\\&=\left.\frac{2\pi}{\varepsilon z^2+2z+\varepsilon}\right|_{z=(-1+\sqrt{1-\varepsilon^2}/\varepsilon}\\&=\frac{\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\end{aligned}$$

重要的是我们在找模长小于 1 的奇点，因此我们没有求另一个奇点的留数。并且我们倒数第二步直接使用了洛必达法则，即分母求导数了，因此我们可以快速得到结果。

无穷积分：无穷积分在复平面路径上来看，积分路径是一条实轴，并不是一个积分围道。因此我们的办法是：(1) 将实函数 $f(x)$ 定义域延拓到整个复平面为复函数 $f(z)$. (2) 补充适当的积分路径形成闭合围道，**在上半平面**补上以 O 为圆心，R 为半径的半圆弧 C_R（**围道的选取方式不只有这一种**）.(3) 如果闭合围道上没有奇点并且范围内有只有有限个奇点，应用留数定理计算围道积分。并且令 $R\to\infty$。

example：计算积分 $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^3}$

解：考虑复平面上的积分，考虑 (2) 的类似围道。根据留数定理：

$$\oint_C\frac{\mathrm{d}z}{(1+z^2)^3}=\int_{-R}^{R}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^3}+\int_{c_R}\frac{\mathrm{d}z}{(1+z^2)^3}=2\pi i\mathrm{res}\left.\frac{1}{(1+z^2)^3}\right|_{z=i}=\frac{3}{8}\pi$$

根据大圆弧引理，当 $R\to\infty$ 时，$z\cdot\frac{1}{(1+x^2)^3}=0$，原第二项积分的值为 $i\cdot0\cdot[\pi-(-\pi)]=0$ 因此原式值为 $\frac{3\pi}{8}$。当然第二项也可以换元 $z=Re^{i\theta}$ 积分，但是不一定能积出来。

example: 计算定积分 $\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^4}$

解：我们考虑一个 $\frac{1}{4}$ 圆的围道：$0\to R\to iR$，因此在这个围道里只有一个奇点 $e^{\frac{i\pi}{4}}$，根据留

数定理我们有：

$$\begin{aligned}\oint_c \frac{\mathrm{d}z}{1+z^4} &= \int_0^R \frac{\mathrm{d}x}{1+x^4} + \oint_{C_R} \frac{\mathrm{d}z}{1+z^4} + \int_0^R \frac{i\mathrm{d}y}{1+(iy)^4} \\ &= (1-i)\int_0^R \frac{\mathrm{d}x}{1+x^4} + \oint_{C_R} \frac{\mathrm{d}z}{1+z^4} \\ &= 2\pi i \mathrm{res} \frac{1}{1+z^4}\bigg|_{z=e^{i\pi/4}} \\ &= \frac{\pi(1-i)}{2\sqrt{2}}\end{aligned}$$

而且第二项同样用大圆弧定理解出为 0，因此原式答案为 $\frac{\sqrt{2}\pi}{4}$

含三角函数的无穷积分：我们考虑如下的两个积分：

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(z) cospx \mathrm{d}x \qquad I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) sinpx \mathrm{d}x$$

这里我们仍然选择半圆的积分围道。但是被积函数我们不选择上述函数，因为没有了 $zf(z)$ 的一致收敛性，大圆弧定理不适用，直接积分也不一定有效。因此我们考虑 $f(z)e^{ipz}$，则有：

$$\begin{aligned}\oint_c f(z)e^{ipz}\mathrm{d}z &= \int_{-R}^{R} f(x)e^{ipx}dx + \int_{C_R} f(z)e^{ipz}dz \\ &= \int_{-R}^{R} (\cos px + i\sin px)\mathrm{d}x + \int_{C_R} f(z)e^{ipz}dz \end{aligned} \tag{6-5}$$

那么第二项积分我们怎么算呢？我们介绍一个引理：

Jordan 引理：设 $0 \le \arg z \le \pi$ 的范围内，当 $|z| \to \infty$ 时 $Q(z)$ 一致趋近于 0，则：

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} Q(z)e^{ipz}\mathrm{d}z = 0 \tag{6-6}$$

证明：本质上是对一致收敛的理解：$|Q(z)| < \varepsilon$ 并且与辐角无关。我们来说明：

$$\begin{aligned}|\int_{C_R} Q(z)e^{ipz}\mathrm{d}z| &= |\int_0^\pi Q(Re^{i\theta})e^{ipR(\cos\theta + i\sin\theta)}Re^{i\theta}i\mathrm{d}\theta| \\ &\le |Q(Re^{i\theta})|e^{-pR\sin\theta}R\mathrm{d}\theta \\ &< \varepsilon R\int_0^\pi e^{-pR\sin\theta}\mathrm{d}\theta \\ &= 2\varepsilon R\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-pR\sin\theta}\mathrm{d}\theta \\ &< 2\varepsilon R\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-pR2\theta/\pi}\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{\varepsilon\pi}{p}(1-e^{-pR}) \to 0\end{aligned}$$

example: 计算积分 $\int_0^\infty \frac{x\sin x}{x^2+a^2}\mathrm{d}x \qquad a>0$

解：我们采用半圆形的围道，利用留数定理可得：

$$\begin{aligned}\oint_c \frac{ze^{iz}}{z^2+a^2}\mathrm{d}z &= \int_{-R}^{R} \frac{xe^{ix}}{x^2+a^2}\mathrm{d}x + \int_{C_R} \frac{ze^{iz}}{z^2+a^2}\mathrm{d}z \\ &= 2\pi i \mathrm{res}\ \frac{ze^{iz}}{z^2+a^2}\bigg|_{z=ai} \\ &= \pi i e^{-a}\end{aligned}$$

而且 $\lim_{z\to\infty}\frac{z}{z^2+a^2}=0$，由 Jordan 引理可知原式为 πie^{-a}, 那么则就有:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin x}{x^2+a^2}\mathrm{d}x=\mathrm{Im}[\pi ie^{-a}]$$
$$\int_{0}^{\infty}\frac{x\sin x}{x^2+a^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}e^{-a}$$

6.3 积分路径上有奇点的情形

example: 计算主值积分 v.p.$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(1+x+x^2)}$

解：由于 0 是原函数的瑕点，因此在延拓到复平面的时候，我们需要考虑挖去原点，因此在半圆的路径上在原点为圆心挖去一个半径为 δ 的小半圆，即就是:

$$\begin{aligned}\oint_c\frac{\mathrm{d}z}{z(1+z+z^2)}&=\int_{-R}^{-\delta}\frac{\mathrm{d}x}{x(1+x+x^2)}+\int_{C_\delta}\frac{\mathrm{d}x}{x(1+x+x^2)}+\int_{R}^{\delta}\frac{\mathrm{d}x}{x(1+x+x^2)}+\int_{C_R}\frac{\mathrm{d}x}{x(1+x+x^2)}\\&=2\pi i\mathrm{res}\left.\frac{1}{z(1+z+z^2)}\right|_{z=e^{2\pi/3}}\\&=-\frac{\pi}{\sqrt{3}}-i\pi\end{aligned}$$

第二项积分由小圆弧定理：$\lim_{z\to 0}z\cdot\frac{1}{z(1+z+z^2)}=1$ 可知，积分值为 $i\cdot 1\cdot(0-\pi)=-\pi i$

第四项积分由大圆弧定理：$\lim_{z\to\infty}z\cdot\frac{1}{z(1+z+z^2)}=0$ 可知，积分值为 0

因此原式为 $-\frac{\pi}{\sqrt{3}}$

在这里我们要注意一个问题，比如 $\frac{\sin x}{x}$ 延拓到复平面为 $\frac{e^{iz}}{z}$，而 0 不是前者的瑕点，但确是后者的奇点，那么**我们的积分围道仍然需要绕开 0.**

6.4 习题补充

我们先重申一遍：**只有极点才能用微分法求留数，其他的奇点都必须用 Laurent 展开去找，且极点的阶数确认是很重要的。**

例 1： $f(z)=\frac{p(z)q(z)}{m(z)}$ 其中 $z=z_0$ 是 $p(z)$ 的二阶极点、$q(z)$ 的一阶零点、$m(z)$ 的二阶零点，求问 $z=z_0$ 是 $f(z)$ 的几阶零点/极点。

解：例 1 在后续的例题中有广泛的运用，因此需要熟练。$p(z)=\frac{P(z)}{(z-z_0)^2}\quad q(z)=(z-z_0)Q(z)\quad m(z)=(z-z_0)M(z)$，因此 $f(z)=\frac{1}{(z-z_0)^2}\frac{P(z)Q(z)}{M(z)}$，所以是二阶极点。

例 2：（求留数） 求下列函数在孤立奇点的留数:

$$z^m\sin\frac{1}{z}(m=2,3,4...)\qquad\qquad \frac{1}{z}e^{1/1-z}$$

解：对于第一个函数，非独立奇点为 0，∞。并且 0 是本性奇点，∞ 是 m 阶极点。我们进行 Laurent 展开求解，可得到:

$$\mathrm{res}f(0)=\begin{cases}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!} & m=2k\\ 0 & m=2k+1\end{cases}$$

由于 Cauchy 积分在围道的积分值等于奇点邻域的积分值，因此做一个包括所有奇点的奇点，所有奇点邻域的积分值和为 0。因此**留数和也为 0，所以有:**

$$\mathrm{res}f(\infty)=-\mathrm{res}f(0)$$

第二个方程：$z=0$ 是一阶极点，$z=1$ **是本性奇点**（发现无法模仿例 1 的哪种方式，极限也不是常数的时候就要考虑本性奇点了），$z=\infty$ 是**可去奇点**。在 $z=1$ 做 Laurent 展开一定要注意换元 $z-1=t$ 来变成在原点展开。

$$\mathrm{res}f(0)=\left.e^{1/1-z}\right|_{z=0}=e$$

$$\frac{1}{1-(-t)}e^{1/-t}=\sum_{k=0}^{\infty}(-t)^k\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-t)^{-l}}{l!}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\frac{(-t)^{n-2m}}{m!}$$

我们关注负 1 次项，因此 $n-2m=-1$,$m=1,2,3...$，因此有：

$$\mathrm{res}f(1)=-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{k!}=1-\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{k!}=1-e$$

因此我们就能得到：

$$\mathrm{res}f(\infty)=-f(0)-f(1)=-1$$

例 3：计算下列积分

$$\oint_{|z|=R}\frac{z\mathrm{d}z}{e^{i2\pi z^2}-1}(n^2<R^2<n^2+1,n\in\mathcal{N}^+)\qquad\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{1+\cos^2\theta}\qquad\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)\cosh\pi x/2}$$

第一个式子我们在第二章处理过，奇点为 $z=\pm\sqrt{k}$。当 z 不为 0 的时候，显然是一个 1 阶极点，此时：

$$\mathrm{res}f(\sqrt{k})=\left.\frac{z}{4\pi ize^{i2\pi z^2}}\right|_{z=\sqrt{k}}=\frac{1}{4\pi i}$$

当 z 为 0 的时候，是分母的二阶极点，分子的一阶极点，因此也是整体的一阶极点。因此

$$\mathrm{res}f(0)=\left.\frac{z}{4\pi ize^{i2\pi z^2}}\right|_{z=0}=\frac{1}{4\pi i}$$

因此原式

$$=2\pi i(4n+1)/4\pi i=(4n+1)/2$$

第二题我们可以直接换三角函数，但是稍微麻烦一丢丢，我们用倍角公式简化一下：

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{1+\cos^2\theta}&=\int_0^{\pi}\frac{2\mathrm{d}\theta}{3+2\cos2\theta}=\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\phi}{3+\cos\phi}\\&=\oint_{|z|=1}\frac{2z}{6z+(z^2+1)}\frac{\mathrm{d}z}{iz}\\&=2\pi\left.\frac{2}{2z+6}\right|_{z=2\sqrt{2}-3}=\frac{\pi}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

第三题我们要想起来：$\cosh t=(e^{it}+e^{-it})/2$。延拓到复数域积分为 $f(z)=\frac{\mathrm{d}z}{(1+z^2)\cosh\pi z/2}$ 由于：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{z}{(1+z^2)\cosh\pi z/2}<\lim_{n\to\infty}\frac{z}{(1+z^2)}=0$$

大圆弧定理仍旧适用，为 0。因此原式就是上半平面的留数和。上半平面所有的奇点为 $z=(2k+1)i$，下边过程不再叙述。

例 3：计算下列积分：

$$\int_0^\infty \frac{x-\sin\pi x}{x(x^2-1)}\mathrm{d}x \qquad\qquad \int_0^\infty \sin(x^2)\mathrm{d}x$$

解：构造函数 $f(z)=\frac{z+ie^{i\pi z}}{z(z^2-1)}$，这样使得原函数是它的实部。因此我们有：

$$\begin{aligned}&\oint_c \frac{z+ie^{i\pi z}}{z(z^2-1)}\mathrm{d}z=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x+ie^{i\pi x}}{x(x^2-1)}\mathrm{d}x+\int_{c_\infty}\frac{z+ie^{i\pi z}}{z(z^2-1)}\mathrm{d}z\\&+\int_{c_1}\frac{z+ie^{i\pi z}}{z(z^2-1)}\mathrm{d}z\int_{c_0}\frac{z+ie^{i\pi z}}{z(z^2-1)}\mathrm{d}z+\int_{c_{-1}}\frac{z+ie^{i\pi z}}{z(z^2-1)}\mathrm{d}z\end{aligned}$$

这是因为 0,-1,1 是奇点。由于 Jordan 定理，C_∞ 第二项积分是 0。然后判断奇点小圆弧定理的性质，求 $zf(z)$ 的极限：

$$\begin{aligned}&\lim_{z\to0} z\cdot\frac{z+ie^{i\pi z}}{z(z^2-1)}\mathrm{d}z=-i\\&\lim_{z\to1}(z-1)\cdot\frac{z+ie^{i\pi z}}{z(z^2-1)}\mathrm{d}z=\frac{1-i}{2}\\&\lim_{z\to-1}(z+1)\cdot\frac{z+ie^{i\pi z}}{z(z^2-1)}\mathrm{d}z=-\frac{1+i}{2}\\&\therefore\int_{c_1}\frac{z+ie^{i\pi z}}{z(z^2-1)}\mathrm{d}z+\int_{c_0}\frac{z+ie^{i\pi z}}{z(z^2-1)}\mathrm{d}z+\int_{c_{-1}}\frac{z+ie^{i\pi z}}{z(z^2-1)}\mathrm{d}z\\&=-i\pi(-i+\frac{1-i}{2}-\frac{1+i}{2})=-2i\pi\end{aligned}$$

而等式左边使用留数定理。上半平面没有奇点，等式左边为 0，因此原式答案为 $\mathrm{Re}(2i\pi)\cdot1/2=\pi$

第二题我们想到变换 e^{iz^2}。如果我们取半圆则我们要说明 $\int_c e^{iz^2}\mathrm{d}z$ 的敛散性。这不能用 Jordan 引理。

实际上，这也不能用 $\frac{1}{4}$ 圆，我们实际用得是 $\frac{\pi}{2n}(n=2)$ 的扇形。下略。

7 Laplace 变换

7.1 Laplace 变换的定义与性质

拉氏变换是一种积分变换，它把定义在正实轴上的函数 $f(t)$ 变换为复平面上的函数 $F(p)$

$$F(p)=\int_0^\infty e^{-pt}f(t)\mathrm{d}t \tag{7-1}$$

这里的 t 是非负实数，p 是复数，$F(p)$ 是 $f(t)$ 的 **Laplace 换式**，e^{-pt} 是 **Laplace 变换的核**，我们写作 $F(p)=\mathcal{L}\{f(t)\}$ **或** $f(t)=\mathcal{L}^{-1}\{F(p)\}$。我们也称为**原函数和像函数**，求像函数的运算称作求原函数的 Laplace 变换，求原函数的运算称作**反演**。

在本章我们约定 $t<0$ 时，$f(t)=0$，即就是 $f(t)\eta(t)$，后者称作**单位阶跃函数**。

例如 $f(t)=e^{\alpha t}$ 做 Laplace 变换：

$$e^{\alpha t}=\int_0^\infty e^{-pt}\cdot e^{-\alpha t}\mathrm{d}t=-\frac{e^{-pt+\alpha t}}{t}\bigg|_0^\infty=\frac{1}{p-\alpha}\qquad \mathrm{Re}p>\mathrm{Re}\alpha \tag{7-2}$$

显然可知，Laplace 变换存在的条件就是积分收敛的条件。我们来介绍 Laplace 变换存在的充分条件：

(1)$f(t)$ 在区间 $0 \leq t < \infty$ 上除了第一类间断点外都是连续的，且导数连续，且在任意区间内间断点有限：

(2)$\exists M > 0, t_0 > 0, s' \geq 0. \forall t > t_0, |f(t)| < Me^{s't}$

这里不加证明。Laplace 变换还具有许多性质：

性质 1：Laplace 变换是一个线性变换。若 $F_1(p) = \mathcal{L}\{f_1(t)\}$ 且 $F_2(p) = \mathcal{L}\{f_2(t)\}$, 则有：

$$\mathcal{L}\{f_1(t) + f_2(t)\} = F_1(p) + F_2(p) \tag{7-3}$$

因此我们可以得到：

$$\sin\omega t = \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i} = \frac{1}{2i}(\frac{1}{p - i\omega} - \frac{1}{p + i\omega}) = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} \tag{7-4}$$

$$\cos\omega t = \frac{p}{p^2 + \omega^2} \tag{7-5}$$

性质 2：Laplace 变换具有解析性。

性质 3：若 $f(t)$ 满足 Laplace 变换的充分条件，则当 $\mathrm{Re}p = s \to \infty$ 时，$F(p) \to 0$

性质 4：**原函数导数**的 Laplace 变换。设 $f(t), f^{'}(t)$ 的 Laplace 变换都存在，则由于：

$$\int_0^\infty f'(t)e^{-pt}\mathrm{d}t = f(t)e^{-pt}\big|_0^\infty + p\int_0^\infty f(t)e^{-pt}\mathrm{d}t$$

因此则有：

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = pF(p) - f(0) \tag{7-6}$$

$$\mathcal{L}\left\{f^{(n)}(t)\right\} = p^n f(t) - p^{n-1}f(0) - p^{n-2}f'(0) - ... - pf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0) \tag{7-7}$$

性质 5：**原函数积分**的 Laplace 变换。若原函数 $f(t)$ 满足 Lapla 变换的充分条件。则：

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)\mathrm{d}\tau\right\} = \frac{F(p)}{p} \tag{7-8}$$

性质 4,5 可以解微分方程。我们在介绍完反演之后来做两道例题感受一下，

7.2 Laplace 变换的反演

原函数如果是连续函数，那么 Laplace 变换的反演具有唯一性。我们介绍两个性质：

性质 1：**像函数导数**的反演。设 $f(t)$ 满足 Laplace 变换存在的充分条件，则 $F(p)$ 在 $\mathrm{Re}p \geq s_1 > s_0$ 的半平面上解析。因而可以在积分号下求导：

$$F^{(n)}(p) = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}p^n}\int_0^\infty f(t)e^{-pt}\mathrm{d}t = \int_0^\infty (-t)^n f(t)e^{-pt}\mathrm{d}t$$

因此我们就有：

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{F^{(n)}(p)\right\} = (-t)^n f(t) \tag{7-9}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p^2}\right\} = t \tag{7-10}$$

7-10 是利用 1 的 Laplace 变换是 $\frac{1}{p}$。因此对 7-10 两侧反复求导就可以得到 p 的任意负幂次方的反演，因此我们可以求有理函数的反演公式。(记住公式 7-2 是有用的)

性质 2：**像函数积分**的反演。如果 $G(p)=\int_p^\infty F(q)\mathrm{d}q$ 存在，当 $t\to 0$ 时 $|f(t)/t|$ 有界，则：

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\int_p^\infty F(q)\mathrm{d}q\right\}=\frac{f(t)}{t} \tag{7-11}$$

基于此我们可以求出更多的 Laplace 变换，例如：

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\sin\omega t}{t}\right\}=\int_p^\infty \frac{\omega}{q^2+\omega^2}\mathrm{d}q=\frac{\pi}{2}-\arctan\frac{p}{\omega} \tag{7-12}$$

当然，由 7-11 我们可以得出，$\int_p^\infty F(q)\mathrm{d}q=\int_0^\infty \frac{f(t)}{t}e^{-pt}\mathrm{d}t$, 如果 p 趋近于 0 的时候两边积分仍然存在，我们就可以得到公式：

$$\int_0^\infty F(p)\mathrm{d}p=\int_0^\infty \frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t \tag{7-13}$$

利用 7-11 我们可以计算 $\int_0^\infty \frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t$, 例如：

$$\int_0^\infty \frac{\cos at-\cos bt}{t}\mathrm{d}t=\int_0^\infty (\frac{p}{p^2+a^2}+\frac{p}{p^2+b^2})\mathrm{d}p=\ln b-\ln a \tag{7-14}$$

下边我们来做两道例题：

example:(1)LR 串联电路，开关关上前没有电流，求关掉开关的电流。(2)LC 串联电路电流。

解：(1) 根据基尔霍夫定律我们列出方程：

$$L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+Ri=E \qquad i(0)=0$$

做 Laplace 变换到 $I(p)$，则根据 7-6 有：

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}\{i'(t)\}=pI(p)-i(0)=pI(p)\\
&LpI(p)+RI(p)=\frac{E}{p} \qquad \textbf{左右两边都要变换!!!}\\
&I(p)=\frac{E}{p}(\frac{1}{p}-\frac{L}{Lp+R})\\
&i(t)=\frac{E}{R}[1-e^{-(R/L)t}]
\end{aligned}$$

解：(2) 利用基尔霍夫定律可得：

$$\begin{aligned}
\frac{q(t)}{C}&=L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\\
q(t)&=-\int_0^t i(\tau)\mathrm{d}\tau+q_0\\
\Longrightarrow L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)\mathrm{d}\tau&=\frac{q_0}{C}
\end{aligned}$$

做 Laplace 变换到 $I(p)$，则根据 7-8 有:

$$\begin{aligned}
LpI(p)+\frac{1}{C}\frac{I(p)}{p}&=\frac{q_0}{Cp}\\
I(p)&=\frac{q_0}{LCp^2+1}\\
i(t)&=\frac{q_0}{\sqrt{LC}}\sin\frac{t}{\sqrt{LC}}
\end{aligned}$$

如果 $F(p)=F_1(p)\cdot F_2(p)$，我们介绍**卷积定理**（在书 P126 -P127 有证明，这里不再介绍证明）:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{F_1(p)F_2(p)\right\}=\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau \tag{7-15}$$

卷积定理可以避免我们求像函数的具体表达式。例如在上面的例题的第一问中设输入电压为 $\mathcal{E}(t)$，我们可以得到:

$$\begin{aligned}&LpI(p)+RI(p)=E(p)\\&I(p)=\frac{1}{Lp+R}E(p)\\&i(t)=\int_0^t\mathcal{E}(\tau)\frac{1}{L}e^{-R(t-\tau)/L}\mathrm{d}\tau\end{aligned}$$

7.3 普遍反演公式

我们不加证明的介绍: 若函数 $F(p)=F(s+i\sigma)$ 在区域 $\mathrm{Re}p>s_0$ 满足: (1)$F(p)$ 解析, (2)$|p|\to\infty, F(p)\to 0$(3) 对于所有的 $\mathrm{Re}p=s>s_0$, 沿着直线 L: $\mathrm{Re}p=s$ 的无穷积分 $\int_{s-i\infty}^{s+i\infty}|F(p)|\mathrm{d}\sigma$ 收敛，则 $F(p)$ 的原函数为:

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{s-i\infty}^{s+i\infty}F(p)e^{pt}\mathrm{d}p \tag{7-16}$$

example: 计算 $F(p)=1/(p^2+\omega^2)^2$ 的原函数。解：利用普遍反演公式，原函数为:

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{s-i\infty}^{s+i\infty}\frac{1}{(p^2+\omega^2)^2}e^{pt}\mathrm{d}p$$

孤立奇点是 $\pm i\omega$ 且是二阶极点, 所以取 $s>0$ 即可。然后构造一个围道: $s-i\omega\longrightarrow s+i\omega\longrightarrow$ 右半平面的半圆。由**推广的 Jordan** 引理（这里我们不在说明）$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}\frac{1}{(p^2+\omega^2)^2}e^{pt}\mathrm{d}p=0$, 根据**留数定理**可得:

$$\begin{aligned}f(t)&=\sum_{p=\pm\omega}\mathrm{res}\frac{1}{(p^2+\omega^2)^2}e^{pt}\\&=[\frac{t}{(p+i\omega)^2}-\frac{2}{(p+i\omega)^3}]e^{pt}\bigg|_{p=i\omega}+[\frac{t}{(p-i\omega)^2}-\frac{2}{(p-i\omega)^3}]e^{pt}\bigg|_{p=-i\omega}\\&=\frac{1}{2\omega^3}(\sin\omega t-\omega t\cos\omega t)\end{aligned}$$

7.4 习题补充

首先我们再次介绍我们的工具:

延迟定理 $\mathcal{L}\left\{f(t-\tau)\right\}=e^{-p\tau}F(p)$	平移定理 $F(p-p_0)=\mathcal{L}\left\{f(t)e^{p_0t}\right\}$
导数变换 $\mathcal{L}\left\{f'(t)\right\}=pF(p)-f(0)$	含参变换 $\mathcal{L}\left\{\int_0^\infty f(t;\tau)\mathrm{d}\tau\right\}=\int_0^\infty F(p;\tau)\mathrm{d}\tau$
积分变换 $\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(t)\mathrm{d}t\right\}=\frac{F(p)}{p}$	导数反演 $\mathcal{L}^-\left\{F^{(n)}(p)\right\}=(-t)^nf(t)$
积分反演 $\mathcal{L}^-\left\{\int_p^\infty F(p)\mathrm{d}p\right\}=\frac{f(t)}{t}$	一个推论 $\int_0^\infty F(p)\mathrm{d}p=\int_0^\infty\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t$

例 1:（求像函数），若以下函数都可以做 Laplace 变换，求解之。

$$e^{-\lambda t}\sin^2(t/2) \qquad \frac{1-e^{-wt}}{t} \qquad \int_0^\infty \frac{\sin tx}{x}\mathrm{d}x$$

解：这 3 个函数代表 3 类。第一个：利用了平移定理。第二个：利用积分反演。第三个：利用积分反演。

$$\begin{aligned}
&(1)\sin^2(t/2)=\frac{1-\cos t}{2}=\frac{1}{2}(\frac{1}{p}-\frac{p}{(1+p^2)})=\frac{1}{2}\frac{1}{2p(1+p^2)}\\
&e^{-\lambda t}\sin^2(t/2)=\frac{1}{2}\frac{1}{2(p+\lambda)(1+(p+\lambda)^2)}\\
&(2)1-e^{-wt}=\frac{1}{p}-\frac{1}{p+w}\\
&\frac{1-e^{-wt}}{t}=\int_p^\infty\frac{1}{p}-\frac{1}{p+w}=\ln(1+w/p)\\
&(3)\int_0^\infty\frac{\sin tx}{x}\mathrm{d}x=\int_0^\infty\frac{1}{(x^2+p^2)}\mathrm{d}x=\pi/2p
\end{aligned}$$

例 2:（求原函数）写出下列函数反演的结果。

$$\frac{1}{(p-1)p(p+1)} \qquad \frac{p^2}{(p^2+a^2)(p^2+b^2)} \qquad \frac{e^{-p\tau}}{(p+a)^3}$$

解：这三个函数代表三类，第一类是有理分式，第二类是留数定理，第三类是平移定理和导数反演的复合。

$$\begin{aligned}
&(1)\frac{1}{(p-1)p(p+1)}=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{p-1}-\frac{4}{p}+\frac{3}{p+1}+\frac{2}{(p+1)^2}\right]\\
&=\frac{1}{4}\left[e^t-4+3e^{-t}+2te^{-t}\right]\\
&(2)\frac{p^2}{(p^2+a^2)(p^2+b^2)}=\int_0^t\cos a\tau\cos b(t-\tau)d\tau\\
&=\frac{1}{2}\int_0^t\cos(a\tau+bt-b\tau)+cos(a\tau-bt+b\tau)d\tau=\frac{a\sin at-b\sin bt}{a^2-b^2}\\
&(3)\frac{1}{(p+a)^3}=\frac{1}{2}t^2e^{-at}\\
&\frac{e^{-p\tau}}{(p+a)^3}=\frac{1}{2}t^2e^{-(a-\tau)t}
\end{aligned}$$

例 3:（计算积分）利用 Laplace 变换计算积分：

$$\int_0^\infty\frac{\sin xt}{t}\mathrm{d}t \qquad \int_0^\infty\frac{\sin xt}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=\pi/\sqrt{2p}=\sqrt{\pi/2t}$$

解：注意这两个积分的区别，第一个是对 t 积分的，因此我们需要利用积分反演的推论；第二个积分是对 x 积分的因此我们利用含参积分的变换。第二个注意是变换相等的关系而不是数值相等的关系，所以变换之后还要反演。

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty\frac{\sin xt}{t}\mathrm{d}t=\int_0^\infty\frac{x}{x^2+p^2}\mathrm{d}p=\frac{\pi}{2}sgn(x)\text{瑕积分}\\
&\int_0^\infty\frac{\sin xt}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=\int_0^\infty 2\sin x^2t\mathrm{d}x=2\int_0^\infty\frac{x^2}{p^2+x^4}\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

例 4:(解微分方程) 求解以下的微分方程:

$$\begin{cases} f(t) = g(t) + \int_0^t f(t-\tau)e^{-\tau}\mathrm{d}\tau \\ f'(t) + g'(t) = 2 \\ f(0) = g(0) = 1 \end{cases}$$

解:我们对原微分方程进行变换和反演,来**消除积分和求导的影响**,因此将前两个等式进行反演可以得到:

$$F(p) = G(p) + F(p)\frac{1}{p+\tau}$$
$$pF(p) - 1 + pG(p) - 1 = 2$$

然后再反演即可。这里我们不再写。

例 5: 我们定义函数 $J_0(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(t\cos\theta)\mathrm{d}\theta$

(1)求像函数;(2)利用卷积定理证明:$\int_0^t J_0(\tau)J_0(t-\tau) = \sin t$

解(1)根据像函数的定义我们知道:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}J_0(t) &= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\pi e^{-pt}\cos(t\cos\theta)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^\infty e^{it\cos\theta - pt}\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{p - i\cos\theta}\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{\pi}\oint_{|z|=1}\frac{\mathrm{d}z}{z^2+2ipz+1} \\ &= 2i\cdot\mathrm{res}\,\frac{1}{z^2+2ipz+1}\bigg|_{z=-ip+i\sqrt{p^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{p^2+1}}\end{aligned}$$

这里留数定理作为非常普遍的工具。第二问的像函数是 $\frac{1}{p^2+1}$,得证。

8 二阶线性常微分方程的幂级数解法

8.1 二阶线性常微分方程的常点和奇点

在数学物理方程中,经常出现一些**二阶线性齐次常微分方程**,它们的标准形式是:

$$\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}z^2} + p(z)\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} + q(z)w = 0 \tag{8-1}$$

$p(z)$ 与 $q(z)$ 称作**方程的系数**。如果方程的系数都在 z_0 解析,则 z_0 称作方程的常点;若至少有一个不解析,则 z_0 称作方程的奇点。

如何判断无穷远点是奇点呢?我们做变换 $z = 1/t$,则 9-1 变为:

$$\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}t^2} + [\frac{2}{t} - \frac{1}{t^2}p(\frac{1}{t})]\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{t^4}q(\frac{1}{t}) = 0 \tag{8-2}$$

8.2 方程常点邻域内的解

我们不加证明的介绍如下定理：若 $p(z), q(z)$ 在圆 $|z-z_0|<R$ 内单值解析，则在圆内二阶线性齐次常微分方程的初值问题

$$\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}z^2}+p(z)\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}+q(z)w=0$$
$$w(z_0)=c_0 \qquad w'(z_0)=c_1$$

有唯一的解并且在圆内单值解析。这就意味着我们可以把解展开成 Taylor 级数，也就是解的形式为：

$$w(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k(z-z_0)^k$$

example：Legendre 方程的形式为：

$$(1-z^2)\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}z^2}-2z\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}+l(l-1)w=0 \tag{8-3}$$

求解：(1)$z=\infty$ 是否为 8-3 的奇点。(2)8-3 在 $z=0$ 邻域内的解。

解：(1) 做代换 $z=1/t$, 易证其为奇点。

(2) 利用 Taylor 展开和系数递推关系

$$\begin{aligned}
&w=\sum_{k=0}^{\infty}c_kz^k, \qquad |z|<1\\
&\sum_{k=0}^{\infty}\left\{(k+2)(k+1)c_{k+2}-\left[k(k+1)-l(l+1)\right]c_k\right\}z^k=0\\
&\left\{(k+2)(k+1)c_{k+2}-\left[k(k+1)-l(l+1)\right]c_k\right\}z^k=0\\
&c_{k+2}=\frac{k(k+1)-l(l+1)}{(k+2)(k+1)}c_k=\frac{(k-l)(k+l+1)}{(k+2)(k+1)}c_k
\end{aligned}$$

因此通过递推可以得到：

$$\begin{aligned}
c_{2n}=&\frac{c_0}{(2n)!}(2n-l-2)(2n-l-4)...(-l)(2n+l+1)(2n+l+3)...(l+1)\\
=&\frac{2^{2n}c_0}{(2n)!}(n-\frac{1}{2}l-1)(n-\frac{1}{2}l-2)...(-\frac{l}{2})(n+\frac{1}{2}l-\frac{1}{2})(n+\frac{1}{2}l-\frac{3}{2})...(\frac{l}{2}+\frac{1}{2})\\
=&\frac{2^{2n}}{(2n)!}\frac{\Gamma(n-\frac{l}{2})}{\Gamma(\frac{-l}{2})}\frac{\Gamma(\frac{l+1}{2}+n)}{\Gamma(\frac{l+1}{2})}c_0\\
c_{2n+1}=&\frac{c_1}{(2n+1)!}(2n-l-1)(2n-l-3)...(-l+1)(2n+l)(2n+l-2)...(l+2)\\
=&\frac{2^{2n}}{(2n+1)!}\frac{\Gamma(n-\frac{l-1}{2})}{\Gamma(\frac{-l}{2})}\frac{\Gamma(\frac{l}{2}+1+n)}{\Gamma(\frac{l+1}{2})}c_1
\end{aligned}$$

这里我们利用了 Γ 函数来化简阶乘的表达。因此 Legendre 方程在 $|z|<1$ 的解为：

$$\begin{aligned}
&w(z)=c_0w_1(z)+c_1w_2(z)\\
&w_1(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{2n}}{(2n)!}\frac{\Gamma(n-\frac{l}{2})}{\Gamma(\frac{-l}{2})}\frac{\Gamma(\frac{l+1}{2}+n)}{\Gamma(\frac{l+1}{2})}z^{2n}\\
&w_2(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{2n}}{(2n+1)!}\frac{\Gamma(n-\frac{l-1}{2})}{\Gamma(\frac{-l}{2})}\frac{\Gamma(\frac{l}{2}+1+n)}{\Gamma(\frac{l+1}{2})}z^{2n+1}
\end{aligned} \tag{8-4}$$

这里当给定初值 c_0, c_1 时，我们就能得出 $w(z)$。对 $w_1(z)$ 而言，所有偶数次项的系数都由 c_0 控制；对 $w_2(z)$ 而言，所有偶数次项的系数都由 c_1 控制. 且这两个解是线性无关的。因此解常点邻域的幂级数解的过程就是：**Taylor 展开——代入——系数为 0——递推关系寻找——线性无关解的得出**。。8-4 的结论是非常重要的。

而且根据常微分方程的理论，如果我们知道 $w_1(z)$ 是 8-1 的一个解，那么 $w_2(z)$（不一定线性无关）也是 8-1 的一个解，且满足：

$$w_2(z) = Aw_1(z)\int^z \frac{1}{w_1^2(z)}\exp\left[-\int^z p(\varepsilon)\mathrm{d}\varepsilon\right]\mathrm{d}z \tag{8-5}$$

proof：由于 $w_1(z)$ 与 $w_2(z)$ 都是 8-1 的解，则有：

$$\frac{\mathrm{d}^2 w_1}{\mathrm{d}z^2} + p(z)\frac{\mathrm{d}w_1}{\mathrm{d}z} + q(z)w_1 = 0 \tag{A}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 w_2}{\mathrm{d}z^2} + p(z)\frac{\mathrm{d}w_2}{\mathrm{d}z} + q(z)w_2 = 0 \tag{B}$$

$A \times w_2 - B \times w_1$, 得到：

$$\begin{aligned}
w_1\frac{\mathrm{d}^2 w_2}{\mathrm{d}z^2} - w_2\frac{\mathrm{d}^2 w_1}{\mathrm{d}z^2} + p(z)\left(w_1\frac{\mathrm{d}w_2}{\mathrm{d}z} - w_2\frac{\mathrm{d}w_1}{\mathrm{d}z}\right) &= 0\\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(w_1\frac{\mathrm{d}w_2}{\mathrm{d}z} - w_2\frac{\mathrm{d}w_1}{\mathrm{d}z}\right) + p(z)\left(w_1\frac{\mathrm{d}w_2}{\mathrm{d}z} - w_2\frac{\mathrm{d}w_1}{\mathrm{d}z}\right) &= 0\\
w_1\frac{\mathrm{d}w_2}{\mathrm{d}z} - w_2\frac{\mathrm{d}w_1}{\mathrm{d}z} &= A\exp\left[-\int^z p(\varepsilon)\mathrm{d}\varepsilon\right]\\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{w_2}{w_1}\right) &= \frac{A}{w_1^2}\exp\left[-\int^z p(\varepsilon)\mathrm{d}\varepsilon\right]
\end{aligned}$$

两边再积分一次即可。

8.3 方程正则奇点邻域内的解

如果我们讨论方程的奇点是极点型（**Laurent 展开的负幂次方有限**），我们不加证明介绍如下的定理：

如果 z_0 是 8-1 的奇点，但在方程的系数 $p(z)$ 与 $q(z)$ 在环形区域内 $0 < |z - z_0| < R$ 解析，那么在这个范围的两个线性无关解为：

$$w_1(z) = (z - z_0)^{\rho_1}\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z - z_0)^k$$

$$w_2(z) = g w_1(z)\ln(z - z_0) + (z - z_0)^{\rho_2}\sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k (z - z_0)^k$$

但是我们发现，无论带入哪个解，幂级数解有无限多个正幂项和负幂项，递推将无穷无尽。但如果只有有限个负幂项，我们可以调整 ρ 的值，使得级数中没有负幂项：此时解的形式为：

$$w_1(z) = (z - z_0)^{\rho_1}\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k \tag{8-6}$$

$$w_2(z) = g w_1(z)\ln(z - z_0) + (z - z_0)^{\rho_2}\sum_{k=0}^{\infty} d_k (z - z_0)^k \tag{8-7}$$

这种形式的解称作正则解，我们不加说明的介绍**正则解存在的充要条件**：$(z-z_0)p(z)$ 与 $(z-z_0)^2q(z)$ 在 z_0 解析。这样的奇点称作**正则奇点**。ρ_1,ρ_2 称作方程**在正则奇点处的指标**。显然，$z=\pm 1$ 是 Legendre 方程的正则奇点。

下面我们来分析求解过程。**为了书写方便，假设正则奇点为 0**. 根据正则奇点的性质，我们令：

$$p(z)=\sum_{l=0}^{\infty}a_l z^{l-1} \qquad q(z)=\sum_{l=0}^{\infty}b_l z^{l-2}$$
$$w(z)=z^{\rho}\sum_{k=0}^{\infty}c_k z^k$$

代入方程则有：

$$\sum_{k=0}^{\infty}c_k(k+\rho)(k+\rho-1)z^{k+\rho-2}+\sum_{l=0}^{\infty}a_l z^{l-1}\sum_{k=0}^{\infty}c_k(k+\rho)z^{k+\rho-1}+\sum_{l=0}^{\infty}b_l z^{l-2}\sum_{k=0}^{\infty}c_k z^{k+\rho}=0$$

经过化简（一点都不简单）得到：

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left\{(k+\rho)(k+\rho-1)c_k+\sum_{l=0}^{k}\left[a_{k-l}(l+\rho)+b_{k-l}\right]c_l\right\}z^k=0 \tag{8-8}$$

我们比较 0 次幂的系数，可以得到：

$$c_0[\rho(\rho-1)+a_0\rho+b_0]=0$$

两边同时除以 c_0 就得到了**指标方程**，解出来两个解 ρ_1,ρ_2，规定 $\mathrm{Re}\rho_1\geq\mathrm{Re}\rho_2$。
由 8-8 的关系可得，系数递推关系为：

$$(n+\rho)(n+\rho-1)c_n+\sum_{l=0}^{n}\left[a_{n-l}(l+\rho)+b_{n-l}\right]c_l=0 \tag{8-9}$$

代入不同的 ρ 值，得出 c_k,d_k, 那我们相当于得到了两个解，它们的形式为：

$$w_1(z)=(z-z_0)^{\rho_1}\sum_{k=0}^{\infty}c_k(z-z_0)^k$$
$$w_2(z)=(z-z_0)^{\rho_2}\sum_{k=0}^{\infty}d_k(z-z_0)^k$$

这两个解是否是线性无关的呢？**如果说 $\rho_1=\rho_2$，那么 $w_1(z)=w_2(z)$，这两个方程一定是线性相关的，第二解有对数项；如果 $\rho_1-\rho_2$ 不为整数，二者一定线性无关，我们就不用求第二解了。若上述两种情况都不是，我们无法确定是否线性无关**。如果两个解线性无关，我们只保留 $w_1(z)$，$w_2(z)$ 可由 8-5 推导出来。

8.4 Bessel 方程的解

我们先介绍 Bessel 方程的形式；

$$\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}z^2}+\frac{1}{z}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}+(1-\frac{\nu^2}{z^2})w=0 \tag{8-10}$$

其中 ν 是常数，Re$\nu \geq 0$,$z=0$ 是方程的正则奇点，$z=\infty$ 是非正则奇点。我们来研究 $|z|>0$ 空心邻域的解。设：

$$w(z)=z^{\rho}\sum_{k=0}^{\infty}c_k z^k$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}c_k(k+\rho)(k+\rho+1)z^{k+\rho-2}+\sum_{k=0}^{\infty}c_k(k+\rho)z^{k+\rho-2}+\sum_{k=0}^{\infty}c_k z^{k+\rho}-\nu^2\sum_{k=0}^{\infty}c_k z^{k+\rho-2}=0$$

约去 $z^{\rho-2}$ 可以得到：

$$\sum_{k=0}^{\infty}c_k\left[(k+\rho)^2-\nu^2\right]z^k+\sum_{k=0}^{\infty}c_k z^{k+2}=0$$

取 0 次幂得到指标方程，解出 $\rho_1=\nu,\rho_2=-\nu$。下来我们取 1 次幂的系数：

$$c_1\left[(\rho+1)^2-\nu^2\right]=0$$

$$c_1=\begin{cases}0 & \rho\neq\frac{1}{2}\\ \text{任意值} & \rho=-\frac{1}{2}\end{cases}$$

下来我们来求系数的递推关系，比较 n 次方的系数：

$$c_n[(\rho+1)^2-\nu^2]+c_{n-2}=0$$

$$c_n=-\frac{1}{n(n+2\rho)}c_{n+2}$$

因此利用递推关系：

$$c_{2n}=\frac{(-1)^n}{n!}\frac{\Gamma(\rho+1)}{\Gamma(\rho+1+n)}\frac{1}{2^{2n}}c_0$$

$$c_{2n+1}=0(because\quad c_1=0)$$

这里我们发现，我们没有分类讨论，因为当 $\rho=\frac{1}{2}$ 的时候 $c_1=0$ 也可以取到，证明过程在 P147。我们代入 $\rho_1=\nu,c_0=1/2^{\nu}\Gamma(\nu+1)$ 与 $\rho_2=-\nu,c_0=1/2^{\nu}\Gamma(-\nu+1)$ 可以得到两个解：(后者只是为了让答案更美观):

$$J_{\nu}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+\nu+1)}(\frac{z}{2})^{2k+\nu}$$

$$J_{-\nu}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k-\nu+1)}(\frac{z}{2})^{2k-\nu}$$

当 $\nu=0$ 时，$\rho_1-\rho_2=0$ 时，这两个解一定线性相关！

当 ν 为正整数时，这两个解也是线性相关的。(**注意：第二解在 $k<\nu$ 且 ν 为负整数时，$\Gamma(k+\nu+1)=\infty$，因此求和可以从 $k=\nu$ 开始求，然后发现它们每一项都成倍数！**)

其余情况下两个解线性无关，直接就得出来了。那么如果两个解线性相关的话，则 $w_2(z)$ 的形式为：

$$w_2(z)=gJ_n(z)\ln z+\sum k=0^{\infty}d_k z^{k-n}$$

，然后经过复杂的化简整理即可。

9 数学物理方程与定解条件

9.1 物理中的数学物理方程

我们会面对很多形式的数学物理方程。首先我们来介绍**弦振动方程**：有一个完全柔软的均匀弦沿水平方向绷紧，然后使得弦沿同一平面做一小振动，求弦振动方程。

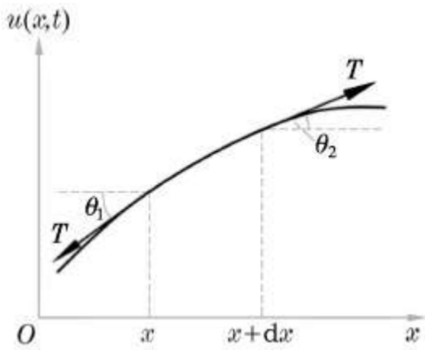

图 1: 弦振动方程图解

取弦的平衡位置为 x 轴，弦两端的位置为 $x=0$ 与 $x=l,u(x;t)$ 表示离原点距离 x 的弦元在时间 t 的位移。弦是完全柔软的，因此只受切向拉力的作用，法向不受力。略去重力的作用，我们可以列出方程：

$$(T\sin\theta)_{x+\Delta x}-(T\sin\theta)_{x+\Delta x}=\mathrm{d}m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$
$$(T\cos\theta)_{x+\Delta x}-(T\cos\theta)_{x+\Delta x}=0 \tag{9-1}$$

我们再做一个小振动近似：由于我们假设振动幅度小，因此 $u(x+\Delta x;t)-u(x;t)$ 的幅度应该远小于 Δx，即就是：

$$|\frac{\partial u}{\partial x}|<<1 \tag{9-2}$$

根据 9-2 的小振动假设，则 θ 是一个很小的值，则 $\sin\theta\approx\tan\theta\approx\frac{\partial u}{\partial x}$, 并且 $\cos\theta\approx 1$，因此根据方程 9-1 第二式得到**拉力大小处处相等**。设绳子的线密度是 ρ 则原方程可化简为：

$$\rho\mathrm{d}x\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=T\left[(\frac{\partial u}{\partial x})_{x+\Delta x}-(\frac{\partial u}{\partial x})_x\right]=T\mathrm{d}x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0(a=\sqrt{\frac{T}{\rho}}) \tag{9-3}$$

我们进一步讨论有外力的情形；如果弦在沿 u 的正向上受到一个外力的作用，单位长度受力大小为 f，则把 9-3 改写为：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{f}{\rho} \tag{9-4}$$

我们同理看**杆的振动方程**；均匀细杆沿杆长方向做小振动，各质点振动位移完全相同。取杆长方向为 x 轴方向，垂直于杆长做截面，$u(x;t)$ 表示杆在 x 长度的截面在时间 t 的位移。隔离一

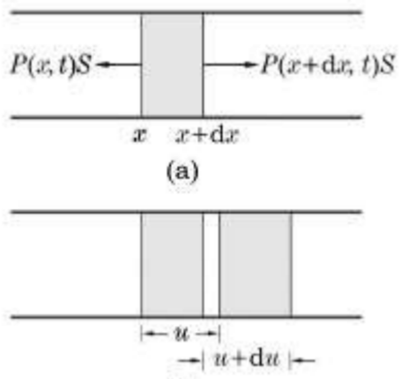

图 2: 杆振动方程图解

段杆微元，分析其受力如图 2, 受到两侧弹性力的作用。弹性力是应力，根据牛顿第二定律分析得到：

$$\mathrm{d}m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = [P(x+\Delta x;t) - P(x;t)]\,S \tag{9-5}$$

令杆的线密度为 ρS，忽略垂直杆长的形变，根据 Hooke 定律 (E 代表杨氏模量，和材料性质有关）

$$P = E\frac{\partial u}{\partial x} \tag{9-6}$$

我们可以得到类似 9-3 的振动方程：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0(a = \sqrt{\frac{E}{\rho}}) \tag{9-7}$$

9-3 和 9-7 的形式完全一样，我们称这一类方程为**波动方程**。在三维空间中，波动方程的形式也是类似的。令 $u(x;y;z;t)$ 表示三维状态，则波动方程可写为：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\nabla^2 u = 0 \tag{9-8}$$

其中 ∇ 算符的意义我们在 δ 函数一部分讲过，这里不再赘述。

接下来我们来介绍热传导方程。我们需要了解能量守恒定律与**热传导的 Fourier 定律**：后者是指一块均匀的介质，取一定的坐标系，用 $u(x;y;z;t)$ 表示某一点的温度。若沿着某一坐标系 x 方向有温度差，则也有热量的传递。**单位时间沿着垂直 x 的单位面积的热量 q 与温度变化率成正比**。即就是：

$$q = -k\frac{\partial u}{\partial x} \tag{9-9}$$

q 称为热流密度，k 成为导热率。在温度变化不大的时候，k 近似不变。负号表示热量从温度高的一侧传递到温度低的一侧。因此把 9-9 写作三维矢量形式为：

$$\mathbf{q} = -k\nabla u \tag{9-10}$$

我们现在看一个均匀介质的热传导现象，分析这个平行六面体在 Δt 的时候流入的热量：

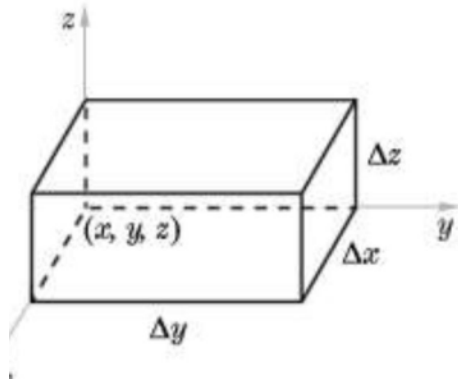

图 3: 热传导方程图解

$$
\begin{aligned}
\left[(q_x)_x-(q_x)_{x+\Delta x}\right]\Delta y\Delta z\Delta t &= k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Delta x\Delta y\Delta z\Delta t\\
\left[(q_y)_y-(q_y)_{y+\Delta y}\right]\Delta x\Delta z\Delta t &= k\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\Delta x\Delta y\Delta z\Delta t\\
\left[(q_z)_z-(q_z)_{z+\Delta z}\right]\Delta x\Delta y\Delta t &= k\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\Delta x\Delta y\Delta z\Delta t\\
Q_{in} &= k\nabla^2 u\Delta x\Delta y\Delta z\Delta t
\end{aligned}
\tag{9-11}
$$

Q_{in} 代表这一段时间获得的能量总和。而根据能量守恒定律，净流入能量等于温度升高需要的能量 Q_{up}, 因此：

$$
\begin{aligned}
Q_{up} &= \rho\Delta x\Delta y\Delta z\cdot c\cdot\Delta u\\
&= k\nabla^2 u\Delta x\Delta y\Delta z\Delta t\\
\frac{\partial u}{\partial t}-\kappa\nabla^2 u &= 0(\kappa=\frac{k}{\rho c})
\end{aligned}
\tag{9-12}
$$

其中 κ 称作扩散率。如果介质中有热量产生，单位时间单位体积产生的热量记作 $F(x;y;z;t)$，则 9-12 改写为：

$$
\frac{\partial u}{\partial t}-\kappa\nabla^2 u=\frac{1}{\rho c}F(x;y;z;t)=f(x;y;z;t) \tag{9-13}
$$

我们也会关注一些稳定问题。如果在 9-13 中，物体温度达到稳定，则有 $-\kappa\nabla^2 u=f(x;y;z;t)$，这个方程我们称作 **Poisson 方程**。若没有外部热源，则 $\nabla^2 u=0$，称作 **Laplace 方程**。

这两个方程有很广泛的应用。在静电场中，Gauss 定理有：$\nabla\cdot\mathbf{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}$，电场强度和电势的关系满足 $\mathbf{E}=-\nabla u$，因此静电势满足 poisson 方程 $\nabla^2 u=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}$。

单色波的波动方程满足 Helmholtz 方程：$\nabla^2 v(x;y;z;t)+k^2 v(x;y;z;t)=0$。解决上述方程将是我们未来讨论的话题。

9.2 定解条件

为了描述一个物理现象是有唯一一个解的，除了微分方程外，我们在数学上还需要**初始条件和边界条件**。初始条件应该满足能提供初始时刻介质内任意一点和边界的情况。对于波动方程来说，就是给出初始时刻的位移和速度；对于热传导来说，需要给出初始时刻的温度。

边界条件给出的形式就比较多样化，但总体来说需要能说明边界上的点在任意一刻的情况。若在弦振动时两端固定，则边界条件就是任意时刻两段位移为 0；若杆初始一端固定，则边界条件就是初始点位移为 0。那如果杆的末端 $x=l$ 处受到沿杆方向向着杆内的外力 $F(t)\cdot S$ 呢？这个边界条件是什么呢？我们仍然取一小段杆元分析，令 $\varepsilon\to 0$, 结合 Hooke 定律得到：

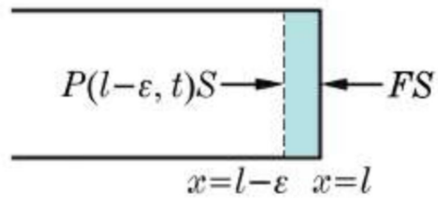

图 4: 杆末端受力边界条件

$$\rho\varepsilon S\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\bigg|_{x=l-\alpha\varepsilon}=P(l-\varepsilon;t)S-F(t)S$$
$$\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=l}=\frac{1}{E}F(t) \tag{9-14}$$

假设外力是有一个弹簧提供受力，也就是 $F(t)=-k[u(l;t)-u_0]$，9-14 可以化简：

$$\left[\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{k}{E}u\right]\bigg|_{x=l}=\frac{k}{E}u_0 \tag{9-15}$$

热传导的边界条件有三类。我们接下来专门分类介绍：

第一类边界条件：边界的温度已知。即就是：

$$u|_\Sigma=\phi(\Sigma;t) \tag{9-16}$$

第二类：若单位时间单位面积流入内部的热量已知；我们取表面的一小层薄层，由介质表面流入的热量，应当全部通过薄层底面流入内部，所以边界条件为：

$$\frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_\Sigma=\frac{1}{k}\psi(\Sigma;t) \tag{9-17}$$

其中我们应用了“方向导数”的概念，即就是对任意一个向量 $\mathbf{t}$，函数沿着这个方向的全微分满足：$\mathrm{d}u=\nabla u\cdot\mathbf{t}$，在高数上册有所说明，这里不再赘述。如果**边界绝热**，则 $\psi\equiv 0$

第三类：介质通过边界按照牛顿冷却定律散热；单位时间通过单位面积与外界交换的热量与介质表面温度 $u|_\Sigma$ 和外界温度差 u_0 成正比，比例系数为 H，则：

$$-k\frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_\Sigma=H(u|_\Sigma-u_0)\qquad [\frac{\partial u}{\partial n}+hu]_\Sigma=hu_0 \tag{9-18}$$

对于无界空间的边界问题，边界条件应该给出趋近于无穷时的极限条件。在有界空间在一些坐标系中，可能偏导在某些点没有意义，因此我们也要补上有界条件。

定解问题要满足有偏微分方程和定解条件。如果定解条件过多且互相矛盾，那么定解问题可能无解。因此我们希望定解问题的解存在、唯一、稳定 (条件改变微小的时候解的改变也很微小)，因此我们做的近似要合理，合适。

10 线性偏微分方程的通解

10.1 解的基本性质

我们先复习上一章学到的三个方程：

$$\text{波动方程}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\nabla^2 u = f$$
$$\text{热传导方程}\frac{\partial u}{\partial t} - \kappa\nabla^2 u = f$$
$$\text{poisson 方程}\nabla^2 u = f$$

这三个方程左侧都可以理解为是函数 u 受到了一个**线性**算子的计算。例如在波动方程中，线性算子 $L \equiv \frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2\nabla^2$。而线性算子则就满足：

$$L[\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2] = \alpha_1 L(u_1) + \alpha_2 L(u_2) \tag{10-1}$$

因此我们可以把偏微分方程写作 $L[u] = f$ 的形式，若 $f \equiv 0$，我们就称方程是**齐次的**。

解具有叠加性。若 u_1 与 u_2 都是齐次方程 $L[u] = 0$ 的解，那么 $c_1u_1 + c_2u_2$ 也是齐次方程的解。

若 u_1 与 u_2 都是非齐次方程 $L[u] = f$ 的解，那么 $u_1 - u_2$ 就是齐次方程 $L[u] = 0$ 的解。**因此非齐次方程的通解 = 齐次方程的通解 + 一个非齐次方程的特解**。以此推广，若 $L[u_1] = f_1$ 且 $L[u_2] = f_2$, 则 $L[c_1u_1 + c_2u_2] = c_1f_1 + c_2f_2$。

在二阶常微分方程中，通解包含了两个任意常数；以此类推在二阶偏微分方程中，通解包含了两个任意函数，如 10-2 所示：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0 \qquad u = f(x) + g(y) \tag{10-2}$$

10.2 无界弦上波的传播

我们来考虑一个一维齐次波动方程的解：$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$。我们考虑做变换：$\xi = x + at \quad \eta = x - at$, 这个波动方程则有：

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$$
$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial u}{\partial \xi} - a\frac{\partial u}{\partial \eta} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2a^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + a^2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$$

因此原方程变为：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$$
$$u(x;t) = f(\xi) + g(\eta) = f(x - at) + g(x + at) \tag{10-3}$$

这个解表明波动方程的解由两个独立的波组成，它们相互不干扰。这也就证明了解的线性性。

而对于无界定解问题我们加上初始条件 $u(x;t)|_{t=0}=\phi(x) \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0}=\psi(x)$，我们将通解带入可得：

$$
\begin{aligned}
&f(x)+g(x)=\phi(x) \qquad a[f'(x)-g'(x)]=-\psi(x)\\
&f(x)-g(x)=\frac{-1}{a}\int_0^x\psi(\xi)\mathrm{d}\xi+C\\
&f(x)=\frac{1}{2}\phi(x)-\frac{1}{2a}\int_0^x\psi(\xi)\mathrm{d}\xi+\frac{C}{2}\\
&g(x)=\frac{1}{2}\phi(x)+\frac{1}{2a}\int_0^x\psi(\xi)\mathrm{d}\xi-\frac{C}{2}\\
&u(x;t)=f(x+at)+g(x-at)=\frac{1}{2}\left[\phi(x+at)+\phi(x-at)\right]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi) \qquad (10\text{-}4)
\end{aligned}
$$

11 分离变量法

11.1 两端固定弦的自由振动

以两端固定的自由振动为例，我们研究方程：

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0 && 0<x<l \quad t>0 &&\\
&u(x=0)=0 && u(x=l)=0 && t\geq 0\\
&u|_{t=0}=\phi(x) && \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{t=0}=\psi(x) && 0\leq x\leq l \qquad (11\text{-}1)
\end{aligned}
$$

考虑 11-1 的定解条件，我们希望解的变量是分离的，即就是：

$$u(x;t)=X(x)T(t) \tag{11-2}$$

我们把 11-2 带入 11-1，可以得到的条件为

$$
\begin{aligned}
&X''(x)+\lambda X(x)=0\\
&T''(x)+\lambda a^2T(x)=0\\
&X(0)=X(l)=0 \qquad (11\text{-}3)
\end{aligned}
$$

其中第三行的条件无法分离变量。我们发现这要求边界条件和偏微分方程都是齐次的。λ 是一个待定常数，也不是所有的 λ 都符合条件。我们把符合条件的 λ 称作**本征值**，相应的非零解称作本征值问题。

我们看 11-3 的第一个式子是一个齐次常微分方程。它的解的形式取决于 Δ 的正负。有两种情况。1：$\lambda=0$，此时解的形式为 $X(x)=A_0x+B_0$。再结合第三行边界条件得到 $A_0=B_0=0$，因此这只有零解，舍去。2.$\lambda\neq 0$，通解为 $x(x)=A\sin\sqrt{\lambda}x+b\cos\sqrt{\lambda}x$。由边界条件得到 $B=0 \quad A\sin\sqrt{\lambda}l=0$。因此我们根据方程能得到满足条件的本征值和相应的函数为：

$$
\begin{aligned}
&\lambda_n=(\frac{n\pi}{l})^2 \quad n\in\mathbb{N}^+\\
&X_n(x)=\sin\frac{n\pi}{l}x \qquad (11\text{-}4)
\end{aligned}
$$

而对于每一个本征值 λ_n 都有 $T_n(t)=C_n\sin\frac{n\pi}{l}at+D_n\cos\frac{n\pi}{l}at$。因此我们研究的特解为：

$$u(x;t)=(C_n\sin\frac{n\pi}{l}at+D_n\cos\frac{n\pi}{l}at)\sin\frac{n\pi}{l}x \tag{11-5}$$

一般来说，**单独的一个特解也无法满足**定解条件。因此我们选择把这些特解叠加起来：11-5 改写为：

$$u(x;t)=\sum_{n=1}^{\infty}(C_n\sin\frac{n\pi}{l}at+D_n\cos\frac{n\pi}{l}at)\sin\frac{n\pi}{l}x \tag{11-6}$$

这种解称为一般解。**一般解不只满足偏微分方程，还满足边界条件**。那么是否满足初始条件呢？我们把 11-6 的带入 11-1 第三行，得到：

$$\sum_{n=1}^{\infty}D_n\sin\frac{n\pi}{l}x=\phi(x) \tag{11-7-1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}C_n\frac{n\pi a}{l}\sin\frac{n\pi}{l}x=\psi(x) \tag{11-7-2}$$

而且我们又发现，**本征函数有正交性**，即就是 $\int_0^l X_n(x)X_m(x)=0(n\neq m)$。因此我们对 11-7-1 变形得到：

$$\begin{aligned}\int_0^l\phi(x)\sin\frac{m\pi}{l}x\mathrm{d}x&=\sum_{n=1}^{\infty}D_n\int_0^l\sin\frac{m\pi}{l}x\sin\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x\\&=\frac{l}{2}D_m\\D_n&=\frac{2}{l}\int_0^l\phi(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\\\text{同理}C_n&=\frac{2}{n\pi a}\int_0^l\psi(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\end{aligned} \tag{11-8}$$

那么解的形式为：

$$u(x;t)=\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{2}{n\pi a}\int_0^l\psi(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\sin\frac{n\pi}{l}at+\frac{2}{l}\int_0^l\phi(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\cos\frac{n\pi}{l}at)\sin\frac{n\pi}{l}x$$

因此求解此类偏微分方程的一般过程为：1. 分离变量（因为边界条件和偏微分方程都是齐次的）2. 求解本征值问题 3. 求特解并叠加出一般解 4. 利用本征函数的叠加性来求系数

11.2 关于两端固定弦自由振动的评述

第一个我们来讨论本征函数的正交性。我们把 11-3 做变形可以得到：

$$\begin{aligned}&X_m(x)[X_n^{''}(x)+\lambda_nX_n(x)]-X_n(x)[X_m^{''}(x)+\lambda_mX_m(x)]=0\\&[X_m(x)X_n^{''}(x)-X_n(x)X_m^{''}(x)]+(\lambda_n-\lambda_m)X_n(x)X_m(x)=0\\&(\lambda_n-\lambda_m)\int_0^lX_n(x)X_m(x)\mathrm{d}x=[X_n(x)X_m^{'}(x)-X_m(x)X_n^{'}(x)]\Big|_0^l\\&\int_0^lX_n(x)X_m(x)\mathrm{d}x=0\end{aligned}$$

而在第一，二，三类边界条件中，**本征函数都具有正交性**（证明见书）。因此**这些本征函数是相应线性空间的一组基**。为证明这是一个欧几里得空间，我们还需证明每个元素具有**正定性**。于是我们**求模方**：

$$||X_n(x)||=\int_0^lX_n^2(x)\mathrm{d}x=\frac{l}{2}$$

这个结果只在**第一类边界条件**成立。我们把正定性和正交性合称为**本征函数的正交归一性**。

我们继续计算弦的总能量，弦的能量分作动能和势能，因此：

$$
\begin{aligned}
E &= \frac{1}{2}\int_0^l \rho(\frac{\partial u}{\partial t})^2 \mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_0^l T(\frac{\partial u}{\partial x})^2 \mathrm{d}x \\
&= \frac{m\pi a^2}{4l^2}\sum_{n=1}^{\infty} n^2[(C_n)^2 + (D_n)^2]
\end{aligned}
$$

我们通过分离变量求出的解是**唯一的**。利用反证法可轻易证明（假设 u_1 与 u_2 是解，证明 $u_1 - u_2 = 0$）

小补充：什么是齐次边界条件和非齐次边界条件。**齐次边界条件是指在边界上的解值为零或其导数为零**。（要把边界条件和初始条件区分开）

11.3 矩形区域内的稳定问题

我们看热传导方程的一个稳定问题：

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad 0 < x < a \quad 0 < y < b \\
&u|_{x=0} = 0 \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=a} = 0 \quad 0 \le y \le b \\
&u|_{y=0} = f(x) \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=b} = 0 \quad 0 \le x \le a
\end{aligned} \tag{11-9}
$$

我们继续利用分离变量法。$u(x;y) = X(x)Y(y)$, 继续分离变量法得到本征方程.

$$
\begin{aligned}
&X(x)'' + \lambda X(x) = 0 \qquad Y(y)'' - \lambda Y(y) = 0 \\
&X(0) = 0 \qquad X'(a) = 0 \\
&\lambda_n = (\frac{2n+1}{2a}\pi)^2 \\
&X_n = \sin\frac{2n+1}{2a}\pi x
\end{aligned} \tag{11-10}
$$

我们再观察 $Y_n^{''}(y) - \lambda_n Y^{''}(y) = 0$ 并将 λ 带入得到：

$$
\begin{aligned}
u_n(x;y) &= (C_n \sinh\frac{2n+1}{2a}\pi y + D_n \cosh\frac{2n+1}{2n}\pi y) \times \sin\frac{2n+1}{2a}\pi x \\
u(x;y) &= \sum_{n=0}^{\infty}(C_n \sinh\frac{2n+1}{2a}\pi y + D_n \cosh\frac{2n+1}{2n}\pi y) \times \sin\frac{2n+1}{2a}\pi x
\end{aligned} \tag{11-11}
$$

然后根据本征函数的正交归一性计算系数：

$$
D_n = \frac{2}{a}\int_0^a f(x)\sinh\frac{2n+1}{2a}\pi x \mathrm{d}x \qquad C_n = -D_n \tanh\frac{2n+1}{2a}\pi b \tag{11-12}
$$

此问题与时间无关，因此没有初始条件。

11.4 两端固定弦的受迫振动

方程和边界条件都是齐次的才能直接运用分离变量法。因此我们先来看一个方程不齐次的条件：

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x;t) && 0 < x < l \quad t > 0 & \\
&u(x=0) = 0 && u(x=l) = 0 && t \geq 0 \\
&u\big|_{t=0} = 0 && \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0 && 0 \leq x \leq l
\end{aligned} \tag{11-13}
$$

因此我们可以做变化 $u(x;t) = v(x;t) + w(x;t)$，因此原条件变成：

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = f(x;t) && \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \\
&v(x=0) = w(x=0) = 0 && v(x=l) = w(x=l) = 0 \\
&v\big|_{t=0} + w\big|_{t=0} = 0 && \left.\frac{\partial v}{\partial t}\right|_{t=0} + \left.\frac{\partial v}{\partial t}\right|_{t=0} = 0
\end{aligned} \tag{11-14}
$$

对于相应的齐次解我们不再赘述它的做法。我们主要来看非齐次部分怎么解。非齐次部分则是它的特解。

示例 1：$f(x;t) = f(x)$, 与时间无关。则特解 $v(t)$ 也与时间无关。则关于时间的偏导数都是 0，直接带入即可。

示例 2：$f(x;t) = A_0 \sin wt$。**这里我们不能把 $v(x;t)$ 设成只和时间有关的函数**。因此我们令 $v(x;t) = f(x)\sin wt$, 代入 11-13：

$$
\begin{aligned}
&- w^2 f(x) - a^2 f''(x) = A_0 \\
&f(0) = f(l) = 0
\end{aligned}
$$

这是一个非齐次常微分方程，利用相关知识解得：

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{-A_0}{w^2} + \frac{A_0}{w^2}\tan\frac{wl}{2a}\sin\frac{w}{a}x + \frac{A_0}{w^2}\cos\frac{w}{a}x \\
&= -\frac{A_0}{w^2}\left[1 - \frac{\cos\frac{w(x-l/2)}{a}}{\cos\frac{wl}{2a}}\right]
\end{aligned}
$$

因此我们求出了 $v(x;t)$。在计算 $w(x;t)$ 时最后一步的参数需要用到 $v(x;t)$ 的表达式，代入即可，具体数值不再赘述。$u(x;t)$ 的结果为：

$$
-\frac{A_0}{w^2}\left[1 - \frac{\cos\frac{w(x-l/2)}{a}}{\cos\frac{wl}{2a}}\right]\sin wt - \frac{4A_0 wl^3}{\pi^2 a}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{(2n+1)^2}\frac{1}{[(2n+1)\pi a]^2 - (wl)^2}\sin\frac{2n+1}{l}\pi x \sin\frac{2n+1}{l}\pi at\right]
$$

特解一般要靠猜.... 如果 $f(x;t)$ 的形式比较复杂，特解猜不出来怎么办？我们介绍一种解法：**按相应齐次问题的本征函数展开法**。对于一组本征函数，我们可以发现 11-11 的通解形式 $u(x;t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)X_n(x)$, 同理我们也把 $f(x;t)$ 分解成 $f(x;t) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(t)X_n(x)$, 代入 11-14 的偏微分方程就会变成：

$$
\sum_{n=1}^{\infty} T_n^{''}(t)X_n(x) - a^2\sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)X_n^{''}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(t)X_n(x) \tag{11-15}
$$

再套入**初始条件**，$T_n(0)=0 \quad T_n^{'}(0)=0$。我们比较本征方程的参数，可以发现这是一个常微分方程：

$$
\begin{aligned}
&T_n^{''}(t)+\lambda_n a^2 T_n(t)=g_n(t)\\
&T_n(t)=\frac{l}{n\pi a}\int_0^t g_n(\tau)\sin\frac{n\pi}{l}a(t-\tau)\mathrm{d}\tau
\end{aligned}
\tag{11-16}
$$

因此对于示例 2 的 $A_0\sin wt$ 而言，我们根据本征函数 $\sin\frac{n\pi}{l}x$ 展开，**两边对本征函数积分就可以分界处参数函数**，其答案为：$A_0\sin wt=\frac{2A_0}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n}\sin\frac{n\pi}{l}x\sin wt$

11.5 本征函数解非齐次偏微分方程的进一步讨论

我们回头看 11-9 的问题，如果我们令偏微分方右边是不齐次的，由于这里我们可以以本征函数组 $X_n(x)$ 展开，也可以用本征函数组 $Y_n(y)$ 展开，理论上都没问题。但是我们也可以按照二重级数展开，即就是：

$$
\begin{aligned}
&u(x;y)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}c_{nm}\sin\frac{n\pi}{a}x\sin\frac{m\pi}{b}y\\
&f(x;y)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}d_{nm}\sin\frac{n\pi}{a}x\sin\frac{m\pi}{b}y
\end{aligned}
\tag{11-17}
$$

代入方程得到：

$$
\begin{aligned}
&-\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}c_{nm}\left[(\frac{n\pi}{a})^2+(\frac{m\pi}{b})^2\right]\sin\frac{n\pi}{a}x\sin\frac{m\pi}{b}y=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}d_{nm}\sin\frac{n\pi}{a}x\sin\frac{m\pi}{b}y\\
&c_{nm}=\frac{-d_{nm}}{(\frac{n\pi}{a})^2+(\frac{m\pi}{b})^2}
\end{aligned}
\tag{11-18}
$$

好消息是我们不需要求其次常微分方程了，坏消息就是，我们还要求和。且 d_{nm} 不是那么好算。

11.6 非齐次边界的齐次化

我们讨论这样的定解问题, 它由 11-1 而来：

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0 && 0<x<l \quad t>0 &&\\
&u(x=0)=\mu(t) && u(x=l)=v(t) && t\geq 0\\
&u|_{t=0}=0 && \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{t=0}=0 && 0\leq x\leq l
\end{aligned}
\tag{11-18}
$$

因此我们可以做变化 $u(x;t)=v(x;t)+w(x;t)$, 其中 $w(x;t)$ 是齐次边界方程的解, 形式如同 11-14（**因为我们没有要求 v 满足齐次方程的解，因此可能代换后 w 的方程不齐次**）。$v(x;t)$ 满足并且只需要满足非齐次边界条件。且这个函数的选择有很大的空间。我们这么想：把 $v(x;t)$ 看做一个 x 的函数，它过 $(0,\mu(t))(l,v(t))$，因此构造的函数要过这两点。手段多样，可以直线拟合，也可以抛物线拟合等等。选择不同的 v, 导出的 w 也不同。我们想让 w 尽可能简单。最理想的结果就是不管 u 的方程是否齐次，**我们想让 w 的方程齐次，则 v 也要满足 11-18 原方程的解（注意：**

原方程不一定齐次，我们只是希望 w 齐次)。这叫做“方程和边界条件同时齐次化”。我们看一个具体例子：

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0 && 0<x<l \quad t>0 & \\
&u(x=0)=0 && \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l}=A\sin wt && t\ge 0\\
&u|_{t=0}=0 && \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=0 && 0\le x\le l
\end{aligned}$$

我们取 $v(x;t)=f(x)\sin wt$，则：

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0 && 0<x<l \quad t>0 & \\
&v(x=0)=0 && \left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{x=l}=A\sin wt && t\ge 0
\end{aligned}$$

代入可求：

$$\begin{aligned}
f(x)&=\frac{Aa}{w}\frac{1}{\cos wl/a}\sin\frac{w}{a}x\\
v(x;t)&=\frac{Aa}{w}\frac{1}{\cos wl/a}\sin\frac{w}{a}x\sin wt
\end{aligned}\tag{11-19}$$

则此时 $w(x\ t)$ 满足：

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0 && 0<x<l \quad t>0 & \\
&w(x=0)=0 && \left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{x=l}=0 && t\ge 0\\
&w|_{t=0}=0 && \left.\frac{\partial w}{\partial t}\right|_{t=0}=-\frac{Aa}{\cos wl/a}\sin\frac{w}{a}x && 0\le x\le l
\end{aligned}$$

因此解得：

$$\begin{aligned}
&w(x;t)=\sum_{n=1}^{\infty}(C_n\sin\frac{(2n+1)\pi}{2l}at+D_n\cos\frac{(2n+1)\pi}{2l}at)\sin\frac{(2n+1)\pi}{2l}x\\
&D_n=0\\
&C_n=(-1)^n\frac{4Awa}{(2n+1)\pi a}\frac{1}{w^2-[(2n+1)\pi a/(2l)]^2}
\end{aligned}\tag{11-20}$$

因此原方程的解 $u(x;t)$ 为：

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{4Awa}{(2n+1)\pi a}\frac{1}{w^2-[(2n+1)\pi a/(2l)]^2}\sin\frac{(2n+1)\pi}{2l}at\sin\frac{(2n+1)\pi}{2l}x+\frac{Aa}{w}\frac{1}{\cos wl/a}\sin\frac{w}{a}x\sin wt\tag{11-21}$$

11.7 正交曲面下的 Laplace 算符

我们知道在平面直角坐标系下的 Laplace 算子，不难推导在极坐标系下，Laplace 算子可以写作:

$$\begin{aligned}\nabla^2 &\equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\\ &\equiv \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial}{\partial r})+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\end{aligned} \tag{11-22}$$

在三维柱坐标系下，只需要加上一项即可，即就是:

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{11-22}$$

而在球坐标下略显复杂。

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\frac{\cos\theta}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} \tag{11-23}$$

11.8 圆域内 Laplace 方程的第一类边值问题

我们考虑下面的一个定解问题:

$$\begin{aligned}&\nabla^2 u=0\quad x^2+y^2<a^2\\ &u|_{x^2+y^2=a^2}=f\end{aligned} \tag{11-24}$$

这个边界是圆形的，因此我们不能在平面直角坐标系下进行边界条件分解。因此我们换成极坐标系。令 $u=u(r,\phi)$ 则有:

$$\begin{aligned}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial u}{\partial r})+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\phi^2}&=0\\ u|_{r=a}&=f(\phi)\end{aligned} \tag{11-25}$$

我们再分离变量 $u(r,\phi)=R(r)\Phi(\phi)$，上式变为:

$$\begin{aligned}r\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(r\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r})-\lambda R&=0\\ \frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\phi^2}+\lambda\Phi&=0\\ R(a)\Phi(\phi)&=f(\phi)\end{aligned} \tag{11-26}$$

但是我们发现，11-25 极坐标换元后与原方程 11-24 并不等价。还原到极坐标后在角度为 0 与 2π 的时候不成立。因为 u 在这两个地方没有偏导数，我们最多也只能定义在这两个端点的单侧偏导数。而这两个端点只是极坐标参数的取值范围，并不是真正意义上的边界条件。由于 $(r,0)(r,2\pi)$ 是同一点，因此在 11-24 后还要补上周期条件:

$$\begin{aligned}u(r,0)=&u(r,2\pi)\\ \left.\frac{\partial u}{\partial\phi}\right|_{\phi=0}=&\left.\frac{\partial u}{\partial\phi}\right|_{\phi=2\pi}\end{aligned} \tag{11-27}$$

我们还发现，在平面极坐标系中，函数在原点没有偏导数。因此我们要补充：**函数在区域上有界**。 补充之后，我们发现:

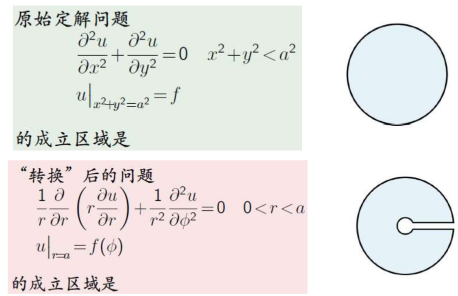

图 5: 圆域内第一类边值问题的正确换元条件

$$\begin{aligned}
&\Phi''+\lambda\Phi=0\\
&\Phi(0)=\Phi(2\pi) \quad \Phi'(0)=\Phi'(2\pi)
\end{aligned}$$

如果 $\lambda=0$，则 $\Phi(\phi)=A_0\phi+B_0$，代入初始条件得到 $A_0=0 \quad B_0$ 任意。**因此 0 是本征值，本征函数是** $\Phi=1$。

如果 $\lambda\neq 0$，则 $\Phi = A\sin\sqrt{\lambda}\phi+B\cos\sqrt{\lambda}\phi$, 代入初始条件并要求其有非零解，则得到 $\lambda_m=m^2$，A 与 B 任意。**因此本征函数为** $\Phi_{m1}=\sin m\phi \quad \Phi_{m2}=\cos m\phi$。我们发现 0 也可以合并进去。

接下来我们研究 11-26 第一个方程怎么解。我们令 $t=\ln r$,，则有 $R''-\lambda R=0$, 因此：

$$R(r)=\begin{cases}C_0+D_0\ln r & \lambda=0\\ C_m r^m+D_m r^{-m} & \lambda=m^2\end{cases}$$

因此我们得到了所有特解，叠加得到一般解：

$$u(r;\phi)=(C_0+D_0)\ln r+\sum_{m=1}^{\infty}(C_{m1}r^m+D_{m1}r^{-m})\sin m\phi+\sum_{m=1}^{\infty}(C_{m2}r^m+D_{m2}r^{-m})\sin m\phi \tag{11-28}$$

根据有界条件，则 $D_0=D_{m1}=D_{m2}=0$。根据周期条件得到：

$$C_0+\sum_{r=1}^{\infty}r^m(C_{m1}\sin m\phi+C_{m2}\cos m\phi)=\sum_{r=0}^{\infty}r^m(C_{m1}\sin m\phi+C_{m2}\cos m\phi)$$

根据边界条件得到：

$$C_0+\sum_{r=1}^{\infty}a^m(C_{m1}\sin m\phi+C_{m2}\cos m\phi)=f(\phi)$$

可解得：

$$\begin{aligned}
C_0&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\phi)\mathrm{d}\phi\\
C_{m1}&=\frac{1}{a^m\pi}\int_0^{2\pi}f(\phi)\sin m\phi\mathrm{d}\phi\\
C_{m2}&=\frac{1}{a^m\pi}\int_0^{2\pi}f(\phi)\cos m\phi\mathrm{d}\phi
\end{aligned} \tag{11-29}$$

在这个例子中，我们发现一个本征值有两个线性无关的本征函数。我们把这种现象叫做兼并。只有边界条件是周期的时候，才会出现兼并的可能。二姐偏微分方程简并度最大为 2。**对应不同本征值的本征函数一定正交，对应同一本征值的本征函数不一定正交，但可以找到一组基使得所有本征函数都可由这组基线性叠加**。

因此原函数经历复杂的化简（见 PPT 或课本）可以得到 $u(r;\phi)$:

$$u(r;\phi) = \frac{a^2 - r^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(\alpha)\mathrm{d}\alpha}{r^2 + a^2 - 2ar\cos(\phi - \alpha)} \tag{11-30}$$

称作 poisson 积分公式。

11.9 正交曲面坐标系下 Helmholtz 方程的分离变量法

对于 Helmholtz 方程：$\nabla^2 u + k^2 u = 0$。我们可以在柱坐标和球坐标去看。在柱坐标时 $u = u(r;\theta;z)$。我们习惯于现将其分离为 $v(r;\theta)Z(z)$，再把 v 分离成 $R(r)\Theta(\theta)$, 计算过程略。我们可以得到结论：

$$\begin{aligned} \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(r\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}) + (k^2 - \lambda - \frac{\mu}{r^2})R = 0 \\ \frac{\mathrm{d}^2\Theta}{\mathrm{d}\theta^2} + \mu\Theta = 0 \\ \frac{\mathrm{d}^2 Z}{\mathrm{d}z^2} + \lambda Z = 0 \end{aligned} \tag{11-31}$$

在求坐标时 $u = u(r;\theta;\phi)$。我们习惯于现将其分离为 $S(\theta\ \phi)R(r)$，再把 S 分离成 $\Theta(\theta)\Phi(\phi)$, 计算过程略。我们可以得到结论：

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}) + (k^2 - \frac{\lambda}{r^2})R = 0 \\ \frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}) + (\lambda - \frac{\mu}{\sin^2\theta})\Theta = 0 \\ \frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\phi^2} + \mu\Phi = 0 \end{aligned} \tag{11-32}$$

12 球函数

12.1 Legendre 多项式的引入

由 11-32 式可得，将 Helmholtz 在球坐标下分离变量，得到的连带 Legendre 多项式为 11-32 第二行。令 $x = \cos\theta \quad y(x) = \Theta(\theta)$, 则：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1 - x^2)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right] + \left[\lambda - \frac{\mu}{1 - x^2}\right]y = 0$$

当 $\mu = 0$ 时，得到两个方程：

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}) + \lambda\Theta = 0 \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1 - x^2)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right] + \lambda y = 0 \end{aligned}$$

由此引出我们今天介绍的主角——**Legendre 方程**

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[(1-z^2)\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\right]+\lambda z=0 \quad \lambda=\nu(\nu+1) \tag{12-1}$$

这个方程有三个正则奇点：$\pm 1, \infty$，除此之外解在全平面解析。并且 0 是方程的常点，因此方程在圆 $|z|<1$ 解析，可以展开成 Taylor 级数。根据第 8 章的知识，得到 Legendre 方程的两个解为：

$$\begin{aligned} w_1(z) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{2n}}{(2n)!}\frac{\Gamma(n-l)\Gamma(n+\frac{l+1}{2})}{\Gamma(-\frac{l}{2})\Gamma(\frac{l+1}{2})}z^{2n} \\ w_2(z) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{2n}}{(2n+1)!}\frac{\Gamma(n-\frac{l-1}{2})\Gamma(n+1+\frac{l}{2})}{\Gamma(-\frac{l-1}{2})\Gamma(1+\frac{l}{2})}z^{2n+1} \end{aligned} \tag{12-2}$$

根据 strling 公式，对于 $w_1(z)$ 当 $z=\pm 1$ 的时候，$c_{2n}\approx\frac{k}{n}(k=Const)$, 因此在这两点对数发散，这两点是枝点，第一解延拓到全平面上是多值函数。第二解同理。

而在 $|z-1|<2$ 的范围，利用 Laurent 展开得到两个解为：

$$\begin{aligned} P_v(z) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n!)^2}\frac{\Gamma(v+n+1)}{\Gamma(v-n+1)}(\frac{z-1}{2})^n \\ Q_v(z) &= \frac{1}{2}P_v(z)\left[\ln\frac{z+1}{z-1}-2\gamma-2\psi(v+1)\right]+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n!)^2}\frac{\Gamma(v+n+1)}{\Gamma(v-n+1)}(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n})(\frac{z-1}{2})^n \end{aligned} \tag{12-3}$$

对于球内的 Laplace 方程轴对称边值问题，这指的是**边界条件具有绕着过球心某一个对称轴旋转不变的对称性**，那我们把这个轴作为极轴，因此就**只剩下了两个变量**。。但是我们要注意：在 $\theta=0,\pi$ 不成立，这里充其量只存在单侧导数。在坐标原点 $r=0$ 也不成立。因此我们需要补充**有界条件**。化简分离变量，换元后便能得到 Legendre 方程。即就是类似 12-1 的形式，加上 $y(\pm 1)$ 有界的条件。而为了使这个方程有非零解，那就要**要求 12-2,12-3 要有解在 $y=1$ 有界**。显然我们介绍了 12-2 的解不满足条件。而 12-3 的 $Q_v(x)$ 有对数项，也不可以。因此我们只能寄希望于 $P_v(x)$。当 $n\to\infty$ 时，则 $P_v(x)$ 利用 strling 公式约有对数项。**因此必 $P_v(x)$ 必须是截断多项式**。我们现在介绍 Legendre 多项式：

$$P_l(x)=\sum_{n=0}^{l}\frac{1}{(n!)^2}\frac{(l+n)!}{(l-n)!}(\frac{x-1}{2})^n \tag{12-4}$$

12.2 Legendre 多项式的性质

Legendre 多项式的微分表示为：

$$P_l(x)=\frac{1}{2^l l!}\frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}x^l}(x^2-1)^l \tag{12-5}$$

证明不再赘述。我们容易发现，l 为偶数时，多项式函数是偶函数；l 为奇数时，多项式函数为奇函数。即就是：

$$P_l(-x)=(-1)^l P_l(x)$$

我们同时发现，如果将 12-5 继续展开，则：

$$
\begin{aligned}
(x^2-1)^l &= \sum_{r=0}^{l}(-1)^r\frac{l!}{r!(l-r)!}x^{2l-2r} \\
\frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}x^l}(x^2-1)^l &= \sum_{r=0}^{[l/2]}(-1)^r\frac{l!}{l!(l-r)!}\frac{(2l-2r)!}{(l-2r)!}x^{l-2r} \\
P_l(x) &= \sum_{r=0}^{[l/2]}(-1)^r\frac{1}{2^l l!(l-r)!}\frac{(2l-2r)!}{(l-2r)!}x^{l-2r} \qquad (12\text{-}6)
\end{aligned}
$$

因此在 $x=0$ 的时候，则有：

$$
\begin{aligned}
P_{2l+1}(0) &= 0 \\
P_{2l}(0) &= (-1)^l\frac{(2l)!}{2^{2l}l!l!}
\end{aligned}
$$

而本质上 Legendre 多项式是 12-1 的本征值问题的解，因此它应该具备着正交性。即就是**不同次数的 Legendre 多项式在 [-1,1] 上正交**。。要证明这个问题就需要证明 $\int_{-1}^{1}P_k(x)P_l(x)=0(k\neq l)$，因此不妨证明 $\int_{-1}^{1}x^kP_l(x)=0(k<l)$。当 $(k\pm l)\%2=1$ 时，则有：

$$
x^kP_l(x)=(-1)^{k+l}(-x)^kP_l(-x)=-(-x)^kP_l(-x)
$$

函数是奇函数, 因此积分为 0。当 $l\pm k\%2=0$ 时，利用微分形式：

$$
\begin{aligned}
\int_{-1}^{1}x^kP_l(x) &= \frac{1}{2^l l!}\int_{-1}^{1}x^k\frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}x^l}(x^2-1)^l\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2^l l!}\left[x^k\frac{\mathrm{d}^{l-1}}{\mathrm{d}x^{l-1}}(x^2-1)^l\Big|_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}x^l}(x^2-1)^l\mathrm{d}x\right] \\
&= -\frac{1}{2^l l!}\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}x^l}(x^2-1)^l\mathrm{d}x \\
&= \frac{(-1)^l}{2^l l!}\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}^l x^k}{\mathrm{d}x^l}(x^2-1)^l\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

显然 k<l 的时候积分为 0。那么当 k>l 的时候，是否积分值还为 0？实际上是不是的。不妨令 k=l+2n，则有：

$$
\begin{aligned}
\frac{(-1)^l}{2^l l!}\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}^l x^k}{\mathrm{d}x^l}(x^2-1)^l\mathrm{d}x &= \frac{(-1)^l}{2^l l!}\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}^l x^{l+2n}}{\mathrm{d}x^l}(x^2-1)^l\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2^l l!}\frac{(l+2n)!}{(2n)!}\int_{-1}^{1}x^{2n}(1-x^2)^l\mathrm{d}x \quad (t=x^2) \\
&= \frac{1}{2^l l!}\frac{(l+2n)!}{(2n)!}\int_{0}^{1}t^{n-\frac{1}{2}}(1-t)^l\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2^l l!}\frac{(l+2n)!}{(2n)!}B(n+\frac{1}{2},l+1) \\
&= \frac{1}{2^l l!}\frac{(l+2n)!}{(2n)!}\frac{\Gamma(n+\frac{1}{2})\Gamma(l+1)}{\Gamma(n+l+\frac{3}{2})} \\
&= 2^{l+1}\frac{(l+2n)!(l+n)!}{n!(2l+2n+1)!} \qquad (12\text{-}7)
\end{aligned}
$$

因此我们可以推算模方。其中 c_l 可由 12-6 得出，积分值可由 12-7 得出。

$$\int_{-1}^{1} P_l(x)P_l(x)\mathrm{d}x = c_l\int_{-1}^{1} x^l P_l(x)\mathrm{d}x = \frac{2}{2l+1} \tag{12-8}$$

并且我们换元 $x=\cos\theta$，就是：

$$\int_0^{\pi} P_k(\cos\theta)P_l(\cos\theta)\sin\theta\mathrm{d}\theta = 01$$

我们称：$P_k(\cos\theta)$ 和 $P_l(\cos\theta)$ 在区间 $[0,\pi]$ 以权函数 $\sin\theta$ 正交。

因此我们称 Legendre 多项式有正交归一性。我们现在可以对任意在区间 [-1,1] 分段连续的函数进行展开；

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{l=0}^{\infty} c_l P_l(x) \\ c_l &= \frac{2l+1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)P_l(x)\mathrm{d}x \\ &= \frac{2l+1}{2} f(\theta)P_l(\cos\theta)\sin\theta\mathrm{d}\theta \end{aligned} \tag{12-9}$$

第二个等式相当于采用了 θ 作为自变量。当 $f(x)=x^n$，我们同时也可以使用待定系数法，因为 $n+l$ 为奇数的项与 $l>n$ 的项系数一定为 0。

Legendre 多项式还具有生成函数，生成函数的物理意义看书。这里我们只说明其数学意义。生成函数就是下列方程：

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(x)t^l \quad |t| < |x \pm \sqrt{x^2-1}| \tag{12-10}$$

在证明这个结论之前，我们先说明 Talyor 展开的一个式子：

$$\frac{1}{(1-x)^s} = \sum_{k=0}^{\infty} C_{s+k-1}^{k} x^k$$

因此我们可以做如下推导：

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} &= \frac{1}{\sqrt{t^2-2t+1-2t(x-1)}} = \frac{1}{1-t}\left[1-\frac{2(x-1)t}{(1-t)^2}\right]^{-1/2} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2k-1)!!}{k!}(x-1)^k t^k (1-t)^{-(2k+1)} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2k-1)!!}{k!}(x-1)^k t^k \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2k+n)!}{(2k)!n!}t^n \\ &= \sum_{l=0}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{l}\frac{(l+k)!}{(l-k)!k!k!}(\frac{x-1}{2})^k\right]t^l \end{aligned}$$

利用生成函数，我们也可以反推之前我们证明的性质。我们也可以因此证明 Legendre 多项

式的递推性质。我们把 12-10 左右对 t 微商，则得到：

$$-\frac{1}{2}\frac{-2x+2t}{(1-2xt+t^2)^{\frac{3}{2}}}=\sum_{l=0}^{\infty}lP_l(x)t^{l-1}$$
$$\frac{x-t}{(1-2xt+t^2)^{\frac{1}{2}}}=(1-2xt+t^2)\sum_{l=0}^{\infty}lP_l(x)t^{l-1}$$
$$(x-t)\sum_{l=0}^{\infty}P_l(x)t^l=(1-2xt+t^2)\sum_{l=0}^{\infty}lP_l(x)t^{l-1}$$
$$(2l+1)xP_l(x)=(l+1)P_{l+1}(x)+lP_{l-1}(x) \tag{12-11}$$

如果我们把 12-10 两边对 x 微商，可以得到第二个递推关系：

$$P_l(x)=P'_{l+1}(x)-2xP'_l(x)+P'_{l-1}(x) \tag{12-12}$$

12.3 Legendre 多项式的应用

这里我们讨论两个较为复杂的物理问题。

示例 1：设在电场强度为 E_0 的均匀电场放一个半径为 a 的均匀导体球，求球外任一一点的电势。

由于静电感应，球表面会产生感生电荷使得整个球是等势体。球外任意一点就是均匀电场电势和感生电势的叠加。球体接地的含义就是球体的电势为 0，而球外没有电荷，则满足 Laplace 方程。采用球坐标系，原点是球心，极轴方向是电场方向。由于球上的电荷与电场都是绕着极轴旋转对称的，因此总电势是绕着极轴旋转对称的，因此可以说明电势与 ψ 无关。令电场电势为 $u_1(r,\theta)$，感生电势为 $u_2(r,\theta)$。则总电势为二者的叠加。电场电势的表达式为：

$$u_1(r,\theta)=-E_0z+u_0=-E_0r\cos\theta+u_0$$

其中 u_0 是原点电势。对于感生电势，感生电荷只在球面上，球面外没有感生电势。而在第 10 章我们提过一句。电势满足 Laplace 方程。因此我们得到以下的定解问题：

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial u_2}{\partial r})+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial u_2}{\partial\theta})=0$$
$$u_2|_{\theta=0}\text{有界}\qquad u_2|_{\theta=\pi}\text{有界}$$
$$u_2|_{r=a}=E_0a\cos\theta-u_0\qquad u_2|_{r\to\infty}=0$$

然后我们分离变量，令 $u_2(r,\theta)=R(r)\Theta(\theta)$，则有：

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta})+\lambda\Theta=0$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[\frac{\mathrm{d}R(r)}{\mathrm{d}r}r^2\right]-\lambda R(r)=0$$

回想我们本章开始的引入，我们可以知道 $\lambda_l=l(l+1)$,$y_l(x)=P_l(x)$(其中 $x=\cos\theta$,$y(x)=\Theta(\theta)$)。将本征值带入第二个方程，并做换元 $t=\ln r$ 则有：

$$\frac{\mathrm{d}^2R_l}{\mathrm{d}t^2}+\frac{\mathrm{d}R_l}{\mathrm{d}t}-l(l+1)R_l=0$$
$$R_l=A_le^{lt}+B_le^{-(l+1)t}=A_lr^l+B_lr^{-l-1}$$
$$u_2(r,\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}(A_lr^l+B_lr^{-l-1})P_l(\cos\theta)$$

这是满足 Laplace 方程的一般解！ 代入定解条件，便可以得到：

$$u_2(r,\theta) = -u_0\frac{a}{r} + \frac{E_0a^3}{r^2}\cos\theta$$
$$u(r,\theta) = u_0(1-\frac{a}{r}) - E_0(1-\frac{a^3}{r^2})\cos\theta$$

示例 2：有一半径为 a，带电量为 Q 的细圆环。求空间里的电势。电势满足泊松方程。我们继续取环心为原点，环为赤道面做球坐标系。同样电势 u 与 ψ 无关。因此我们得到：

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial u}{\partial r}) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$
$$u|_{\theta=0}\text{有界} \qquad u|_{\theta=\pi}\text{有界}$$
$$u|_{r=a}\text{有界} \qquad u|_{r\to\infty} = 0$$

其中，电荷密度为 $C\delta(a)\delta(\theta-\frac{\pi}{2})$, 并且满足：

$$\iiint C\delta(a)\delta(\theta-\frac{\pi}{2})\sin^2\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi = Q$$

解出 $C=\frac{Q}{2\pi a}$。同时我们要知道在球面 $r=a$ 上静电势连续，即就是 $u|_{r=a-0}^{r=a+0}=0$。一般解可以叠加出有：

$$u(r,\theta) = \begin{cases}\sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos\theta) & r<a \\ \sum_{l=0}^{\infty} B_l r^{-l-1} P_l(\cos\theta) & r>a\end{cases}$$

根据连续性条件，$A_la^l = B_la^{-l-1}$。而径向导数不连续则有：

$$r^2\frac{\partial u}{\partial r}|_{a-0}^{a+0} = -\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0}\delta(\theta-\frac{\pi}{2})$$

对 δ 函数进行 Legendre 展开，并且在左边代入一般解，可以得到：

$$\sum_{l=0}^{\infty}(A_lla^{l-1} + B_la^{-l}(l+1))P_l(\cos\theta) = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2l+1}{2}P_l(0)P_l(\cos\theta)$$

联立导数条件和连续条件，则有：

$$A_l = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}a^{-l-1}P_l(0) \qquad B_l = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}a^lP_l(0)$$

代入回一般解即可。

13 柱函数

13.1 Bessel 函数与 Neumann 函数

对于 11-31 中，我们令 $x=\sqrt{k^2-\lambda}r\neq 0$,$y(x)=R(r)$,$\mu=v^2$，则方程变为：

$$\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right] + (1-\frac{v^2}{x^2})y = 0 \tag{13-1}$$

我们称这个方程为 v 阶 Bessel 方程。我们在之前得到了 Bessel 方程的两个解 $J_v(z), J_{-v}(z)$。当 v 是整数的时候，这两个解线性相关。我们现在利用 Wronski 行列式求第二解。在课本 148-149 页有详细地阐述。第二解的形式为：

$$N_v(z)=\frac{\cos\pi v J_v(z)-J_{-v}(z)}{\sin\pi v} \tag{13-2}$$

其中，

$$J_\nu(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+\nu+1)}(\frac{z}{2})^{2k+\nu} \tag{13-3}$$

下面介绍求贝塞耳方程第二解的另一种方法．为此，先计算 $\mathrm{J}_\nu(z)$ 和 $\mathrm{J}_{-\nu}(z)$ 的朗斯基行列式以分析它们的线性相关性．考虑到贝塞耳方程的系数 $p(z)=1/z$，从 (6.31) 式就可得到

$$W[\mathrm{J}_\nu(z),\,\mathrm{J}_{-\nu}(z)]\equiv\begin{vmatrix}\mathrm{J}_\nu(z) & \mathrm{J}_{-\nu}(z)\\ \mathrm{J}'_\nu(z) & \mathrm{J}'_{-\nu}(z)\end{vmatrix}=A\exp\left[-\int^z\frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta}\right]=\frac{A}{z}.$$

为了定出积分常数 A，只需将 $\mathrm{J}_\nu(z)$ 和 $\mathrm{J}_{-\nu}(z)$ 的级数解 (6.41) 和 (6.43) 代入，找出

$$W[\mathrm{J}_\nu(z),\,\mathrm{J}_{-\nu}(z)]\equiv\mathrm{J}_\nu(z)\mathrm{J}'_{-\nu}(z)-\mathrm{J}_{-\nu}(z)\mathrm{J}'_\nu(z)$$

中 z^{-1} 项的系数即可．这只来自各级数中的第一项．因此，

$$\begin{aligned}A&=\frac{1}{\Gamma(1+\nu)}\frac{1}{2^\nu}\frac{1}{\Gamma(1-\nu)}\frac{-\nu}{2^{-\nu}}-\frac{1}{\Gamma(1-\nu)}\frac{1}{2^\nu}\frac{1}{\Gamma(1+\nu)}\frac{\nu}{2^\nu}\\&=-\frac{2\nu}{\Gamma(1+\nu)\Gamma(1-\nu)}=-\frac{2}{\Gamma(\nu)\Gamma(1-\nu)}=-\frac{2}{\pi}\sin\pi\nu.\end{aligned}$$

这样就得到

$$W[\mathrm{J}_\nu(z),\,\mathrm{J}_{-\nu}(z)]=-\frac{2}{\pi z}\sin\pi\nu. \tag{6.47}$$

上面的计算中用到了 Γ 函数的性质 (见 (8.11) 式)

$$\Gamma(\nu)\Gamma(1-\nu)=\frac{\pi}{\sin\pi\nu}.$$

(6.47) 式再次表明，当 $\nu=n,\ n=0,1,2,\cdots$ 时 $\mathrm{J}_\nu(z)$ 和 $\mathrm{J}_{-\nu}(z)$ 线性相关．但是如果将贝塞耳方程的第二解取为 $\mathrm{J}_\nu(z)$ 和 $\mathrm{J}_{-\nu}(z)$ 的线性组合，

$$w_2(z)=c_1\mathrm{J}_\nu(z)+c_2\mathrm{J}_{-\nu}(z),$$

只要选择适当的组合系数，使得 $W[\mathrm{J}_\nu(z),\,w_2(z)]$ 对任何 ν 均不为 0，这样的 $w_2(z)$ 就一定 (对任何 ν 均) 与 $\mathrm{J}_\nu(z)$ 线性无关．为此，我们就取第二解为

$$w_2(z)=\frac{c\mathrm{J}_\nu(z)-\mathrm{J}_{-\nu}(z)}{\sin\pi\nu},$$

这样便有

$$W[\mathrm{J}_\nu(z),\,w_2(z)]=\frac{2}{\pi z}. \tag{6.48}$$

[redacted]

80 *6.5 方程非正则奇点附近的解

为了保证这样定义的 $w_2(z)$ 有意义 ($\sin n\pi=0$，分母为 0)，并注意到 $\mathrm{J}_{-n}(z)=(-)^n\mathrm{J}_n(z)$，我们便应当进一步选取系数 c，使得 $w_2(z)$ 中的分子在 $\nu=n$ 时也为 0，例如取 $c=\cos\pi\nu$ 即可．这样得到贝塞耳方程的第二解便是

$$\mathrm{N}_\nu(z)=\frac{\cos\pi\nu\mathrm{J}_\nu(z)-\mathrm{J}_{-\nu}(z)}{\sin\pi\nu}, \tag{6.49}$$

图 6: Bessel 方程第二解

例：计算 $\int_0^\infty e^{-ax}J_0(bx)\mathrm{d}x \quad Rea>0$

代入 Bessel 函数的级数形式并且逐项积分。这类问题最难的是级数求和部分。

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-ax}J_0(bx)\mathrm{d}x &= \int_0^\infty e^{-ax}\sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{k!k!}\left(\frac{bx}{2}\right)^{2k}\mathrm{d}x \\ &= \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{k!k!}\left(\frac{b}{2}\right)^{2k}\int_0^\infty e^{-ax}x^{2k}\mathrm{d}x \\ &= \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{k!k!}\left(\frac{b}{2}\right)^{2k}\frac{(2k)!}{a^{2k+1}} \\ &= \frac{1}{a}\sum_{k=0}^\infty \frac{1}{k!}\frac{-1}{2}\frac{-3}{2}\cdots\frac{-(2k-1)}{2}(\frac{b}{a})^{2k} \\ &= \frac{1}{a}[1+(\frac{b}{a})^2]^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\end{aligned}$$

这里最后一步按道理我们需要要求 $|b/a|<1$。但实际上，这个函数在全平面解析延拓，因此我们可以扩展到全平面上。

Bessel 函数也有一些递推性质。例如：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}[z^vJ_v(z)] = z^vJ_{v-1}(z) \tag{13-4}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}[z^{-v}J_v(z)] = -z^{-v}J_{v+1}(z) \tag{13-5}$$

把这两个式子直接展开消元可以得到新的递推式：

$$J_{v-1}(z) - J_{v+1}(z) = J_v'(z) \tag{13-6}$$

$$J_{v-1}(z) + J_{v+1}(z) = \frac{2v}{z}J_v(z) \tag{13-7}$$

13-6 和 13-7 的意义在于**对于任意整数阶的 Bessel 函数，都可以用 0 阶和 1 阶的 Bessel 函数表示**。

Neuman 函数的递推关系完全和 13-4,13-5 形式一致。

例：计算 $\int_0^1(1-x^2)J_0(\mu x)x\mathrm{d}x$，其中 $J_0(\mu)=0$

$$\begin{aligned}\int_0^1(1-x^2)J_0(\mu x)x\mathrm{d}x &= \frac{1}{\mu}\int_0^1(1-x^2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[xJ_1(\mu)x]\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\mu}(1-x^2)xJ_1(\mu x)\mid_0^1 + \frac{2}{\mu}\int_0^1 x^2J_1(\mu x)\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{\mu^2}x^2J_2(\mu x)\mid_0^1 = \frac{2}{\mu^2}J_2(\mu) = \frac{4}{\mu^3}J_1(\mu)\end{aligned}$$

13.2 整数阶 Bessel 函数的性质

我们来看 Bessel 函数的生成方程：

$$\exp\left[\frac{z}{2}(t-\frac{1}{t})\right] = \sum_{-\infty}^\infty J_n(z)t^n \qquad 0<|t|<\infty \tag{13-8}$$

如果令 $t=ie^{i\theta}$，就可继续推导出：

$$e^{iz\cos\theta} = J_0(z) + 2\sum_{n=1}^\infty i^nJ_n(z)\cos n\theta \tag{13-9}$$

如果令 $t=e^{i\theta}$，就可继续推导出：

$$e^{iz\sin\theta}=\sum_{-\infty}^{\infty}J_n(z)e^{in\theta} \tag{13-10}$$

这便是 $e^{iz\sin\theta}$ 的 Fourier 展开。根据系数计算公式可得到：

$$\begin{aligned}J_n(z)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{iz\sin\theta}\overline{e^{in\theta}}\mathrm{d}\theta\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{iz\sin\theta}[\cos(z\sin\theta-n\theta)+i\sin(z\theta-n\theta)]\mathrm{d}\theta\end{aligned}$$

而在有段被积函数中虚部是奇函数，积分为 0, 实部是偶函数。因此我们得到 Bessel 函数的积分形式。

$$J_v(z)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}e^{iz\sin\theta}\cos(z\sin\theta-n\theta)\mathrm{d}\theta \tag{13-11}$$

这个办法使我们摆脱了先前计算积分的时候代入 Bessel 函数级数形式最后求和的精巧性。我们只需要代入积分形式，使用留数定理即可。我们重新计算第一个例题的积分。

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty}e^{-ax}J_0(bx)\mathrm{d}x&=\int_0^{\infty}e^{-ax}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{ibx\sin\theta}\mathrm{d}\theta\right]\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\infty}e^{-(a-ib\sin\theta)x}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{a-ib\sin\theta}\\&=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=1}\frac{2\mathrm{d}z}{-bz^2+2az+b}\end{aligned}$$

13.3 柱函数，Hankel 函数

我们之前说，Bessel 函数和 Neuman 函数都满足 13-4,13-5 的递推性质。那么我们现在定义：满足 13-4,13-5 的函数就叫做**柱函数**。Bessel 函数和 Neuman 函数称作**第一类柱函数和第二类柱函数**。而**柱函数一定是 Bessel 方程的解**。那么它们的线性组合 Hankel 函数是否是柱函数?

在介绍 Hankel 函数前，我们先引入一些物理背景。由于 Bessel 函数和 Neuman 函数的渐进展开有：

$$\begin{aligned}J_v(z)&\sim\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos(z-\frac{v\pi}{2}-\frac{\pi}{4})\\N_v(z)&\sim\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sin(z-\frac{v\pi}{2}-\frac{\pi}{4})\end{aligned}$$

它们描述的柱面波既有发散波也有汇聚波。因此我们做线性组合，定义：

$$\begin{aligned}H_v^{(1)}(z)\equiv J_v(z)+iN_v(z)&\sim\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\exp\left[i(z-\frac{v\pi}{2}-\frac{\pi}{4})\right]\\H_v^{(2)}(z)\equiv J_v(z)-iN_v(z)&\sim\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\exp\left[-i(z-\frac{v\pi}{2}-\frac{\pi}{4})\right]\end{aligned}$$

被称为 Hankel 函数。Hankel 函数是第三类柱函数。如果配上相应的时间因子 e^{-iwt}。那么第一种 Hankel 函数代表的是发散波，第二种 Hankel 函数代表的是会聚波。

13.4 Bessel 函数的应用

例：求四周固定圆形薄膜的固有频率。

注意这个题没有给出初始条件，因此不能得到与角度无关的结论。去平面极坐标系，薄膜中心就是极点，可以得到偏微分方程和边界条件：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2}\right] = 0$$

$$u\Big|_{r=0}\text{有界} \qquad u\Big|_{r=a} = 0$$

$$u\Big|_{\phi=0} = u\Big|_{\phi=2\pi} \qquad \frac{\partial u}{\partial \phi}\Big|_{\phi=0} = \frac{\partial u}{\partial \phi}\Big|_{\phi=2\pi}$$

图 7: 四周固定圆形薄膜

现在的要求就是，寻找合适的 w，使得 $u(r,\phi,t) = v(r,\phi)e^{iwt}$ 满足上述的偏微分方程和边界条件。代入后，后两行格式不变，第一行的偏微分方程变为：

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial v}{\partial r}) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \phi^2} + k^2 v = 0 \qquad (k = w/c)$$

然后分离变量可以得到：

$$\begin{aligned}&\Phi'' + \mu\Phi = 0\\&\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}[r\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}] + (k^2 - \frac{\mu}{r^2})R = 0\end{aligned}$$

再根据 $\Phi(0) = \Phi(2\pi)$,$\Phi'(0) = \Phi'(2\pi)$ 可得：$\mu_m = m^2$。对第二个方程，通解为：

$$R_r = CJ_m(kr) + DN_m(kr)$$

根据 $R(0)$ 有界，D=0。$R(a) = 0$，则有 $J_m(ka) = 0$。因此本征值 $k_{mi}^2 = (\mu_i^{(m)}/a)^2$, 本征函数 $R_{mi}(r) = J_m(k_{mi}r)$

因此圆环的频率为：

$$w = \frac{\mu_i^{(m)}}{a}c$$

$\mu_i^{(m)}$ 是 m 阶 Bessel 函数的第 i 个正零点。当 $v > -1, v \in \mathbb{Z}$ 时，Bessel 函数的零点无穷多且都是实数，对称的分布在实轴上。

我们接下来说 Bessel 方程具有正交归一性和完备性。证明的过程可以参考书本。我们这里直接给出结论：

$$\begin{aligned}&\int_0^a J_m(k_{mi}r)J_m(k_{mj}r)r\mathrm{d}r = 0\\&\int_0^a J_m(k_{mi}r)J_m(k_{mj}r)r\mathrm{d}r = \frac{a^2}{2}[J_m'(k_{mi}a)]^2 \qquad \text{(13-12)}\end{aligned}$$

例：圆柱体冷却问题。有一个无限长的圆柱体，半径为 a，选择柱坐标系。柱体表面温度维持为 0，初温为 $u_0 f(r)$，求温度分布。

温度与 ϕ, z 无关。因此令 $u(r,t)$ 由条件可知，u 在 r 为 0 有界，在 a 温度为 0，并且初温已知。偏微分方程为：

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\kappa}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial u}{\partial r}) = 0$$

叠加出的一般解为：

$$u(r;t) = \sum_{0}^{\infty} c_i J_0(\mu_i \frac{r}{a}) \exp\left[-\kappa(\frac{\mu_i}{a})^2 t\right]$$

$$c_i = \frac{2u_0}{a^2 J_1^2(\mu_i)} \int_0^a f(r) J_0(\mu_i \frac{r}{a}) r \mathrm{d}r \tag{13-13}$$

13.5 虚宗量 Bessel 方程与半奇数阶 Bessel 方程

对于一个圆柱体内柱坐标的 Laplace 边值问题，分离变量会得到：

$$\Phi''(\phi) + \mu\Phi(\phi) = 0$$

$$\Phi(0) = \Phi(2\pi) \qquad \Phi'(0) = \Phi'(2\pi)$$

$$Z''(z) + \lambda Z(z) = 0$$

$$Z(0) = 0 \qquad Z(h) = 0$$

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right) + \left(\boxed{-\lambda} - \frac{\mu}{r^2}\right) R = 0$$

图 8: 圆柱 Laplace 边值问题

我们可以得到 $\mu_m = m^2$,$\lambda_n = (\frac{n\pi}{h})^2$，$Z_n = \sin\frac{n\pi}{h}z$，因此第三个方程变为：

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(r\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}) + (-\frac{n\pi}{h}^2 - \frac{m^2}{r^2})R = 0$$

我们做变换 $x = (n\pi/h)r$,$y(x) = R(r)$, 再做变换 $z = ix$,$w(z) = y(x)$，这个方程写为：

$$\frac{1}{z}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(z\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}) + (1 - \frac{m^2}{z^2})w = 0$$

这个 Bessel 方程的解为：$w(z) = CJ_m(z) + DN_m(z)$, 还原回原方程就是：

$$R(r) = CJ_m(\frac{in\pi}{h}r) + DN_m(\frac{in\pi}{h}r)$$

我们得到了以纯虚数为宗量的柱函数。我们定义：

$$I_v(z) = e^{-i\pi v/2} J_v(xe^{i\pi/2}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!\Gamma(k+v+1)}(\frac{x}{2})^{2k+v} \tag{13-14}$$

称为第一虚宗量 Bessel 函数。方程：

$$\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})+(-1-\frac{v^2}{x^2})y=0 \tag{13-15}$$

称作虚宗量 Bessel 方程。它的解就是虚宗量 Bessel 函数。当 $v\in\mathbb{Z}$ 时，$I_\pm v(z)$ 是线性相关的。否则线性无关。它的第二解形式如下：

$$K_v(x)=\frac{\pi}{2\sin v\pi}[I_{-v}(x)-I_v(x)] \tag{13-16}$$

当 $x\to 0$ 时，$I_v(x)$ 有界 $K_v(x)$ 无界。当 $x\to\infty$ 时，$I_v(x)\sim\sqrt{\frac{1}{2\pi x}}e^x$ 而 $K_v(x)\sim\sqrt{\frac{\pi}{2x}}e^{-x}$，实际问题可根据这些挑选需要的解。

对于半奇数阶的 Bessel 方程，根据递推关系我们可以得到：

$$\begin{aligned} J_{1/2}(z)&=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sin z\\ J_{-1/2}(z)&=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\cos z}{z} \end{aligned} \tag{13-17}$$

它们都是初等函数。继续利用递推关系求更高阶的 Bessel 方程:

$$\begin{aligned} z^{-n+\frac{1}{2}}J_{-n+\frac{1}{2}}(z)&=(\frac{1}{z}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z})^n\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin z\\ z^{-n-\frac{1}{2}}J_{n+\frac{1}{2}}(z)&=(-\frac{1}{z}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z})^n\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin z \end{aligned} \tag{13-18}$$

半奇数阶 Neuman 函数定义为：

$$\begin{aligned} N_{n+\frac{1}{2}}(x)&=\frac{\cos(n+1/2)\pi\cdot J_{n+1/2}(x)-J_{-n-1/2}(x)}{\sin(n+1/2)\pi}\\ &=(-1)^{n+1}J_{-(n+1/2)}(x) \end{aligned} \tag{13-19}$$

13.6 球 Bessel 函数

我们在球坐标的 Helmoltz 方程分离变量可以得到：

$$\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}[r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}]+(k^2-\frac{\lambda}{r^2})R=0$$

其中，$\lambda_l=l(l+1)$，当 k=0 的时候，我们讨论过两个解为 r^l 与 r^{-l-1}。当 k 不为 0 呢？做 $x=kr$ 与 $y(x)=R(r)$ 变换得到球 Bessel 方程：

$$\frac{1}{x^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[x^2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}]+(1-\frac{l(l+1)}{x^2})y=0 \tag{13-20}$$

做变换 $w(z)=v(z)/\sqrt{z}$，13-20 化成 Bessel 方程：

$$\frac{1}{z}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}[z\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z}]+(1-\frac{(l+1/2)^2}{z^2})v=0$$

这是 $(l+1/2)$ 的 Bessel 方程。线性无关解为 $J_{l+1/2}(z)$ 与 $N_{l+1/2}(z)$。我们定义 $j_l(z)=\sqrt{\frac{\pi}{2z}}J_{l+1/2}(z)$，$n_l(z)=\sqrt{\frac{\pi}{2z}}N_{l+1/2}(z)$

14 分离变量法总结

14.1 内积空间与函数空间

我们在线性代数中，学习过内积空间的定义。对于实 n 维空间矢量的内积，我们定义：在选定一组基 $\{\mathbf{e}_i, i=1,2...n\}$, 空间任意一个矢量 $\mathbf{x}$ 都可以用这一组基表示：

$$x=\sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{e}_i$$

对于两个矢量 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ 定义内积：

$$(x,y)=\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

内积的结果是一个实数。当两向量相同时，内积不小于 0. 且当它们均为零向量时内积为 0。因此我们定义矢量长度 $||\boldsymbol{x}||=(x,x)^{1/2}$

当我们讨论的空间变成复空间时，为了使得矢量长度仍然是一个实数，我们修改内积的定义：

$$(x,y)=\sum_{i=1}^{n} x_i^* y_i$$

其中 x_i^* 是 x_i 的复共轭。然而这样矢量的内积仍然取决于基的选取和空间的性质。因此我们需要概括出抽象化的**内积公理**：（定义在实数域或复数域 K 上的）矢量空间中矢量 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ 的内积是它们的**标量值函数**，满足：$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})^*$,$(\alpha\boldsymbol{x}+\beta\ \boldsymbol{y},\ \boldsymbol{z})=\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})+\beta(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})$。自身与自身内积不小于 0，且只有零向量内积为 0。此时我们把矢量长度叫做矢量的**模**。定义了内积的矢量空间叫做内积空间。内积空间中实空间为欧几里得空间，复空间称作酉空间。

正交的含义是：两矢量内积为 0。若对任意的 i,j，都有：

$$(x_i,x_j)=\delta_{ij}$$

称矢量组$x_1,x_2...$ 正交归一。n 维空间任意 n 个正交归一的矢量都可以做这个空间的基，称作正交归一基。而一组正交归一的矢量（正交归一矢量集）不被包含在一个更大的正交归一矢量集中，称这个正交归一矢量集是完备的。

函数空间是一种特殊的矢量空间，元素是**复值平方可积函数**（$\int_a^b |f(x)|^2 \mathrm{d}x$ 存在），则我们可以定义加法, 数乘, 内积：

$$(f_1+f_2)(x)=f_1(x)+f_2(x)$$
$$(\alpha f)(x)=\alpha f(x)$$
$$(f_1,f_2)=\int_a^b f_1^* f_2 \mathrm{d}x$$

我们可以证明平方可积函数空间是封闭的。这也是上式成立的基本前提。同时根据内积我们可定义函数的长度。同理，我们可定义函数的正交归一性和完备性。因此我们在一个空间中可以把函数用一个正交归一集表示 (这里面的函数可以有限，也可以无限)：

$$f(x)=\sum_{i=1} c_i f_i(x)$$
$$c_i=\int_a^b f(x) f_i^*(x)=(f_i,f) \tag{14-1}$$

我们继续定义：设 $\boldsymbol{L}$, $\boldsymbol{M}$ 是定义在一定函数空间内的（微分）算符，对任意空间内的两个函数 u，v 都有：

$$(v, \mathbf{L}u) = (\mathbf{M}v, u)$$

称 $\boldsymbol{M}$ 是 $\boldsymbol{L}$ 的**伴算符**。容易证明：这种伴算符作用是相互的。我们举例：对于算符 $\boldsymbol{L}$ 一阶微分，因为：

$$\int_a^b v^* u' \mathrm{d}x = v^* u|_a^b + \int_b^a (-v^*)' u \mathrm{d}x$$

因此当两个函数都满足**边界条件** $y(a) = y(b)$ 时，伴算符是负一阶导数。我们可以发现：这种伴算符前提是建立在一定的条件上的。而二阶微分的伴算符是它本身，称作**自伴算符**。而这要满足什么条件呢？

$$\begin{aligned}
&\int_a^b u^* v'' \mathrm{d}x = u^* v' - u^{*'} v\Big|_a^b + \int_a^b u^{*''} v \mathrm{d}x \\
&u^* v' - u^{*'} v|_a^b = 0 \\
&y(a) = y(b) \qquad y(a)' = y(b)'
\end{aligned} \tag{14-2}$$

对于**自伴算符** $\boldsymbol{L}$，自伴算符的本征值问题是指：方程

$$L\mathbf{y}(x) = \lambda y(x)$$

自伴算符本征值一定存在。且容易证明本征值一定是实数。本征函数一定具有正交性。下面证明：

$$\begin{aligned}
&L y_i = \lambda_i y_i \qquad L y_j = \lambda_j y_j \\
&\int_a^b [y_i^* L y_j - (L y_i)^* y_j] \mathrm{d}x = (\lambda_i - \lambda_j) \int_a^b y_i^* y_j \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

本征函数是齐次微分方程在齐次边界条件下的解，本征函数乘一个非 0 因子仍然是本征函数。我们可以调节本征函数使其正交归一。即就是：

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{i=1} c_i y_i(x) \\
c_i &= \frac{\int_a^b f(x) y_n(x)^* \mathrm{d}x}{\int_a^b y_n(x) y_n(x)^* \mathrm{d}x}
\end{aligned} \tag{14-3}$$

14.2 Sturm-Liouville 型方程的本征值问题

会议之前我们谈论几个方程的本征值问题：

$$X'' + \lambda X = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1-x^2)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right] + \left[\lambda - \frac{m^2}{1-x^2}\right] y = 0$$

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[r\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right] + (\lambda - \frac{m^2}{r^2})R = 0$$

它们的一般形式可以写作:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]+\left[\lambda\rho(x)-q(x)\right]y=0 \tag{14-4}$$

称作 **Sturm-Liouville 型方程**。其中它们都是实函数。$\rho(x)$ 为权重函数。当权重函数不是常数时，若我们定义微分算符 $\mathbf{L}\equiv-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[p(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}]+q(x)$，则 14-4 可以写作:

$$\mathbf{L}y(x)=\lambda\rho(x)y(x)$$

因此我们令 $\mathbf{L}'\equiv\frac{\mathbf{L}}{\rho(x)}$, 则方程形式为:

$$\mathbf{L'}y(x)=\lambda y(x) \tag{14-5}$$

我们采用新的内积定义:

$$(y_1,y_2)_\rho=\int_a^b y_1(x)^*y_2(x)\rho(x)\mathrm{d}x$$

则可以说明，$(y_1,L'y_2)_\rho=(y_1,Ly_2)$,$(L'y_1,y_2)_\rho=(Ly_1,y_2)$, 附加的边界条件为:

$$p(x)(y_1^*y_2^{\prime-y_2y_1^{\prime *})|_a^b=0} \tag{14-6}$$

得到:$(y_1,Ly_2)=(Ly_1,y_2)$，进一步 $(y_1,L'y_2)=(L'y_1,y_2)$，因此算符 **L'** 是自伴算符。

我们介绍定理: 若 S—L 方程的本征值问题的本征函数是复的, 且其实部和虚部线性无关, 则本征值问题二重简并。

我们介绍定理：若 y_1,y_2 是 S——L 本征值问题两个实的线性无关的本征函数，并且边界条件 14-6 在端点值为 0，则它们不可能对应同一个本征值。