Интегрируя, находим, (замечая, что ρ отрицательно):

$$\frac{d\rho}{\rho\sqrt{1+\rho^2}} = -\frac{\frac{d\rho}{\rho^3}}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{\rho}\right)^2}},$$

$$\ln\left(\frac{1}{\rho}+\sqrt{\left(\frac{1}{p}\right)^2+1}\right) = \frac{a}{v}\left(\ln y+\ln C\right),$$

откуда

$$\frac{1}{\rho}+\sqrt{\left(\frac{1}{\rho}\right)^2+1} = (Cy)^{\frac{a}{v}}$$

Чтобы ввести произвольные постоянные наиболее простым образом, предположим, что в момент, когда точки P и M находились на одной параллели к оси y, ордината точки M равнялась y_0 (т. е. что погоня начинается с положения M_0P_0):

в этот момент, очевидно, $\frac{1}{\rho}=0$, и мы находим: $C=\frac{1}{y_0}$; промежуточный интеграл пишется так:

$$\frac{1}{\rho}+\sqrt{\left(\frac{1}{\rho}\right)^2+1} = \left(\frac{y}{y_0}\right)^{\frac{a}{v}}.$$

Освобождаясь от радикала, как в примере 5 находим:

$$-\frac{1}{\rho}+\sqrt{\left(\frac{1}{\rho}\right)^2+1} = \left(\frac{y}{y_0}\right)^{-\frac{a}{v}}$$

откуда

$$\frac{2}{\rho} = \left(\frac{y}{y_0}\right)^{\frac{a}{v}} - \left(\frac{y}{y_0}\right)^{-\frac{a}{v}},$$

или

$$dx = \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{y}{y_0}\right)^{\frac{a}{v}} - \left(\frac{y}{y_0}\right)^{-\frac{a}{v}}\right\}dy.$$

Предполагая $a\neq v$ (мы будем считать $a<v$, т.е. что M может догнать точку P), получаем искомое уравнение линии погони при помощи второй квадратуры:

$$x = \frac{y_0}{2\left(1+\frac{a}{v}\right)}\left(\frac{y}{y_0}\right)^{1+\frac{a}{v}} - \frac{y_0}{2\left(1-\frac{a}{v}\right)}\left(\frac{y}{y_0}\right)^{1-\frac{a}{v}} + C_1,$$

где постоянное C_1 легко определится через начальную абсциссу x_0 при $y=y_0$.
Окончательно имеем:

$$x = \frac{y_0}{2\left(1+\frac{a}{v}\right)}\left[\left(\frac{y}{y_0}\right)^{1+\frac{a}{v}}-1\right] - \frac{y_0}{2\left(1-\frac{a}{v}\right)}\left[\left(\frac{y}{y_0}\right)^{1-\frac{a}{v}}-1\right] + x_0.$$

Абсциссу точки встречи получаем, полагая $y = 0$; ее значение

$$x_1 = x_0 + \frac{ay_0}{\upsilon\left(1 - \frac{a^2}{\upsilon^2}\right)} = x_0 + y_0\frac{a\upsilon}{\upsilon^2 - a^2}.$$

Наконец, продолжительность погони

$$T = \frac{x_1 - x_0}{a} = \frac{y_0\upsilon}{\upsilon^2 - a^2}.$$

Задачи.
5. Проинтегрировать до конца уравнение линии погони в случае $\upsilon = a$.
Проинтегрировать уравнения :
6. $2\,(2a - y)\,y'' = 1 + y'^2$.
7. $y' - xy''' + y'''^3 = 0$.
8. $yy'' - y'^2 = y^2 \ln y$.

3. Понижение порядка в однородных уравнениях различного типа.
A) Пусть левая часть уравнения (1) есть однородная однородная функция аргументов $y, y', y'', ..., y^{(n)}$, т. е. пусть выполняется тождественно

$$F\left(x, ky, ky', ..., ky^{(n)}\right) = k^m F\left(x, y, y', ..., y^{(n)}\right) \tag{27}$$

для любого $k; m$ есть показатель однородности.

Заметим, что если $y_1(x)$ есть решение такого уравнения, то $Cy_1(x)$ есть также решение (C— произвольное постоянное). В самом деле, результат подстановки в левую часть уравнения (1) на место y выражения $Cy_1(x)$ дает произведение из C^m на результат подстановки в то же уравнение функции $y_1(x)$, что по условию тождественно равно нулю.
Если мы введем новую искомую функцию

$$u = \ln y,$$

то, по предыдущему, если $u_1(x)$ будет решением преобразованного уравнения, то $u_1 + \ln C = u_1(x) + C_1$ будет также его решением. Иначе говоря, уравнение допускает группу преобразований $x_1 = x, u_1 = u + C$. Рассуждения аналогичные главе I(§3, 3), показывают, что в таком случае искомая функция u не входит в преобразованное уравнение. А тогда, как мы знаем, замена зависимого переменного

$$u' = z$$

приводит к уравнению порядка $n - 1$. Исключая промежуточное переменное u, получаем такую зависимость между u и z:

$$y = e^{\int z dx} \tag{28}$$

Итак, *порядок рассматриваемого уравнения может быть понижен на единицу введением нвой неизвестной функции z, связанной с y соотношением* (28).