Московский авиационный институт
(Национальный исследовательский университет)

Институт: «Информационные технологии и прикладная математика»
Кафедра: 804 «Теория вероятностей и компьютерное моделирование»
Дисциплина: «Математическое моделирование»

Лабораторная работа № 1

Тема: “Фазовый портрет”

Студент: Сыроежкин Кирилл

Группа: 80-404Б-18

Преподаватель: Красильников П.С

Дата:

Оценка:

Москва 2021

Задание: Постройте фазовый портрет уравнения движений проводника с током

$$\ddot{x}-\frac{x^2-bx+\lambda}{b-x}=0$$

где b,λ - параметры, при этом $\lambda<0.$ Для этого: получите потенциальную энергию $\Pi(x)$, запишите интеграл энергии, постройте график потенциальной энергии при $\lambda=-1, b=1,$ с помощью этого графика постройте фазовый портрет колебаний. Укажите характерные элементы фазового портрета: положение равновесия $x=x_*$ типичные траектории, сепаратрису. Для случая $\lambda=-1, b=1,$ получите зависимость $T(a)$ периода колебаний от начальной амплитуды в виде квадратуры, постройте график этой зависимости с помощью MAPLE, объясните поведение графика функции $T(a)$.

Движение проводника с током описываются уравнением:

$$\ddot{x}-\frac{x^2-bx+\lambda}{b-x}=0 \qquad (1)$$

1) Определим потенциальную энергию $\Pi(x)$. Для этого необходимо вычислить интеграл вида:

$$\Pi(x)=\int_0^x f(x)dx \qquad (2)$$

где функция f(x) получается из уравнения

$$\ddot{x}+f(x)=0 \qquad (3)$$

В нашем случае функция в интеграле (2) будет иметь вид:

$$f(x)=-\frac{x^2-bx+\lambda}{b-x} \qquad (4)$$

Возьмем интеграл (2) , подставив в него функцию (4):

$$\Pi(x)=\int_0^x -\frac{x^2-bx+\lambda}{b-x}dx = -\int_0^x \frac{x(x-b)}{b-x}dx-\int_0^x \frac{\lambda}{b-x}dx=\int_0^x \frac{x(b-x)}{b-x}dx+\int_0^x \frac{\lambda}{x-b}d(x-b) =$$

$$= \frac{x^2}{2}+\lambda \ln|x-b|\Big|_0^x = \frac{x^2}{2}+\lambda \ln|x-b|-\lambda \ln|b| \qquad (5)$$

2) Подставим $\lambda=-1, b=1,$ в (5) и исследуем полученную функцию.

$$\Pi(x)= \frac{x^2}{2}-\ln|x-1| \qquad (6)$$

Исследуем на экстремумы и промежутки монотонности:

$$\Pi'(x)=x-\frac{1}{x-1}$$

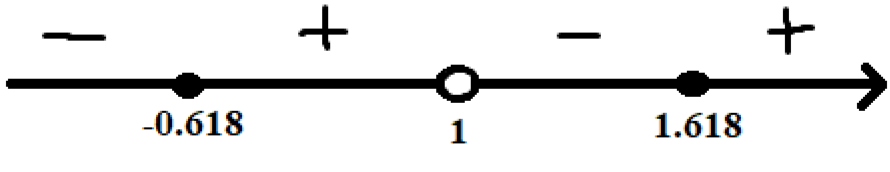
$$x-\frac{1}{x-1}=0$$

Очевидно, что $x\neq 1$, где $x=1$ - разрыв второго рода

$x^2-x-1=0$

$x_1=\frac{1-\sqrt{5}}{2}=-0.618$; $x_2=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=1.618$ - точки экстремума

Тогда, промежутки убывания и возрастания функции:



Исследуем функцию на перегибы:

$$\Pi''(x)=1-\frac{1}{(x-1)^2} \qquad (7)$$

$1+\frac{1}{(x-1)^2}>0 \Rightarrow$ точек перегиба нет. График функции выпуклый вниз.

Исследуем функцию на асимптоты:

$\lim_{x \to 1} \frac{x^2}{2} - \ln|x-1| = \infty \Rightarrow$ есть вертикальная асимптота в точке $x=1$

Горизонтальных и наклонных асимптот нет.

Найдем точки соприкосновения с осями:

OX: $\frac{x^2}{2} - \ln|x-1| = 0 \Rightarrow x_1 = -1.286, x_2 = 0$

OY: $\frac{0^2}{2} - \ln|0-1| = 0 \Rightarrow y = 0$

Исследование закончено

3) Построим график функции (6):

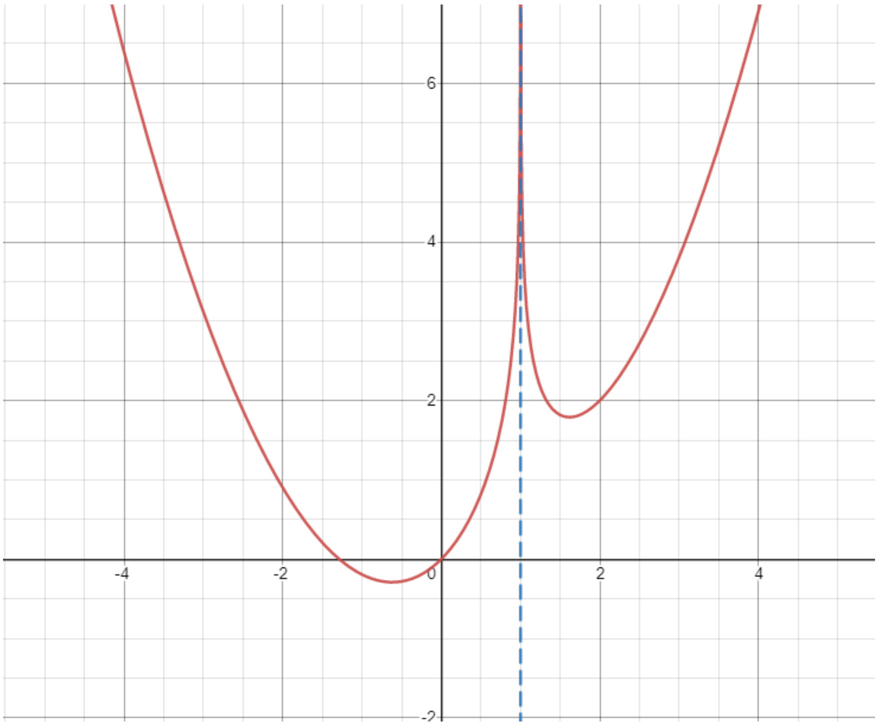


Рис 1. График функции (6)

4) Построим фазовый портрет.

Понизим порядок уравнения и получим

$$\frac{\dot{x}^2}{2} + \Pi(x) = C \tag{8}$$

Подставим (6) в (8) и разрешим полученное уравнение относительно $\dot{x}$:

$$\dot{x}=\pm\sqrt{2C-x^2+2\ln|x-1|} \tag{9}$$

Построим график (9) при различных С:

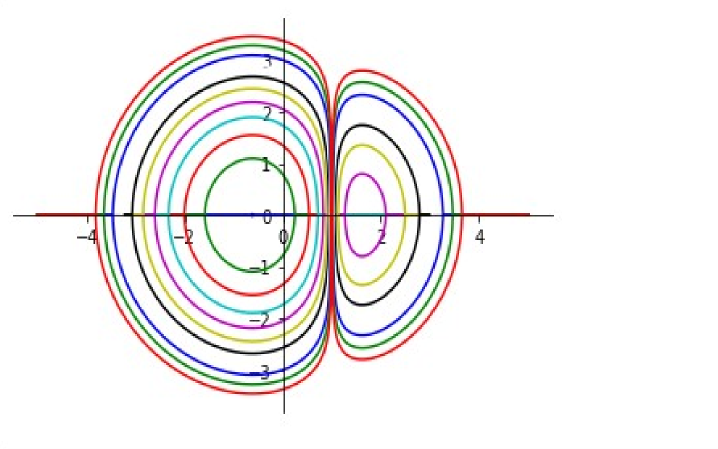


Рис 2. Фазовый портрет

Уравнение (9) имеет два устойчивых положения равновесия: $x=-0.618$ $x=1.618$

Найдем зависимость периода колебаний T от начальной амплитуды

$$T=\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{2C-x^2+2\ln|x-1|}} \tag{10}$$

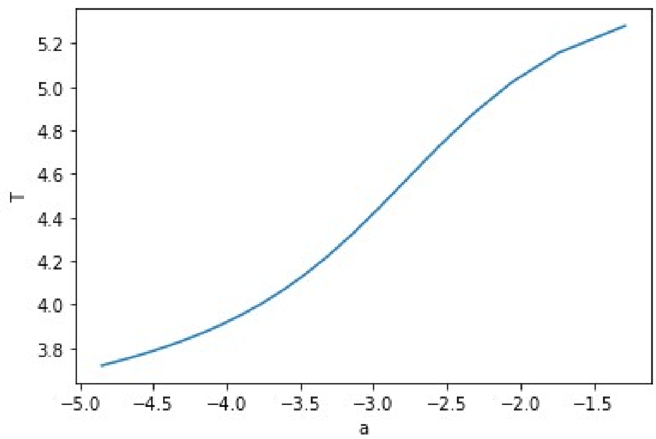


Рис 3. Период колебаний T(a) (10)

Код программы для рисования графиков на языке Python 3:

```
import matplotlib.pyplot as plt
import scipy.integrate
import numpy as np
import math
import scipy.optimize as opt


class color:

    def __init__(self):
        self.colors = [
            'b',
            'g',
            'r',
            'c',
            'm',
            'y',
            'k',
            'w',
            ]
        self.i = 0

    def next(self):
        if self.i < len(self.colors) - 1:
            self.i += 1
            return self.colors[self.i - 1]
        else:
            self.i = 0
            return self.colors[len(self.colors) - 1]


def func(args):
    try:
        return math.sqrt(2 * args[0] - args[1] ** 2 + 2
                         * np.log(np.abs(args[1] - 1)))
    except:
        return 0


def main():
    cl = color()
    C = -0.29
    c = []
    while C < 6:
        x = np.arange(-5, 5.01, 0.01)
        y1 = [float(func([C, x[i]])) for i in range(len(x))]
        y2 = [float(-func([C, x[i]])) for i in range(len(x))]
        lc = cl.next()
        plt.plot(x, y1, color=lc)
        plt.plot(x, y2, color=lc)
        C += 0.5
        c.append(C)
    ax = plt.gca()
    ax.spines['left'].set_position('center')
    ax.spines['bottom'].set_position('center')
    ax.spines['top'].set_visible(False)
    ax.spines['right'].set_visible(False)
    plt.show()
```

```
    def sol(C, a, b):
        f = lambda x: x ** 2 / 2 - math.log(math.fabs(x - 1)) - C
        return opt.ridder(f, a, b)

    def func_int(x):
        return 2 / np.sqrt(2 * C - x ** 2 + 2 * np.log(np.abs(x - 1)))

    y = []
    x = []
    for C in c:
        a = sol(C, -2 - C, -1e-15)
        b = sol(C, 0, 1 - 1e-15)
        x.append(a)
        y.append(scipy.integrate.quad(func_int, a, b)[0])
    (fig, ax) = plt.subplots()
    ax.plot(x, y)


if __name__ == '__main__':
    main()
```