木による数学基礎

新木参加木*

はじめに

この pdf の目的は, まったり数学部屋のメンバーの内, まだ数学に余り明るくない人たちが, 数学の基礎的な概念に触れる際にその道標(みちしるべ)となることである. ゆえに, すでに知っている内容がある読者も存在すると思う. その時は気兼(きが)ねなくその部分を読み飛ばして欲しい.

また, 形式(けいしき)的には序盤に素朴(そぼく)集合論, および数の素朴集合論に基づく構成を解説[1]しているが, たいていの読者には難解(なんかい)なものとなるとも思うため, 自信がなければ先に自分の目的とする項目を読んでほしいと思う.

*睡魔氏, 那国霧と同一人物

[1]この項は本来的に不完全である. というのも数学的な概念であり, かつまだ定義していない概念を説明に用いているからである. この点に於いて, Bourbaki の仕事は実に偉大なものであったと再確認したのは編集中の感想である.

Contents

Part I
数学に触れる上の前提

この章では, 数学を触れるうえでの前提となるような概念全般に触れていく. 本来, 未定義な数学的概念は数学の定義に用いるべきではないが, この章ではたいていの読者が直感的に知っており, かつその理解で差し支えがないであろうと思われる場合には, この pdf で未定義である数学的概念[2]を利用して説明することもあることをあらかじめ断っておく.

1　命題論理

1.1　公理, 推論, 証明

数学とは, ほとんどの場合ある公理(こうり)と呼ばれるものと推論(すいろん)と呼ばれる手続きを定め, それらに従って物事を考えることである.[3]

ここで, 公理や推論される対象にはある書き方の決まりがあり, それに従って書かれたものを命題(めいだい)という.

また, 公理の集まり (と, 利用する推論の集まり) を公理系(こうりけい)といい, ある公理系を定めたとき, その公理系から推論される命題をその公理系上の定理(ていり)といい, その推論を, その定理の証明(しょうめい)という.

公理系を定めたとき, 公理系に含まれるすべての公理とそこから推論されるすべての定理を真な命題(しんなめいだい)と呼び, その命題の否定命題(ひていめいだい)が定理であるような命題を偽な命題(ぎなめいだい)という.[4]

---

[2]主に指して自然数

[3]以下, この節に於いては便宜上排中律と呼ばれるものを暗黙に仮定している.

[4]実は, ある公理系を定めたとき, ある命題が真であることと証明を持つことが同値であることは明らかではない. しかし,Gödel の完全性定理と呼ばれるものと健全性定理と呼ばれるものの存在から少なくとも直感的である範疇(はんちゅう) (要するに, 一階述語の範囲) ならこの二つは同値であることは現代では知られており, すくなくともこの節ではこれは自明なこととして扱う.

1.2 命題論理の書き方

命題論理と呼ばれるものは,

2 素朴集合論

2.1 集合に関する素朴な定義

数学的対象の集まりを集合(しゅうごう)[5]といい, 集合に含まれる数学的対象をその集合の元(げん)という.

x が集合 X の元であるとき, 記号 $\in$ を用いて次のように表す.

$$x \in X \tag{1}$$

あるいは, 集合 X が x を元にもつとき, 記号 $\ni$ を用いて次のように表すこともある.

$$X \ni x \tag{2}$$

集合を表すためには二つの書き方がある. 一つは中身を全て表す方法であり, もう片方は「その元が満たす性質を書く」という方法である. 具体的にやっていこう

集合の書き方 (中身をすべて表す方法)

1. x を元に持つ集合

$$\{x\} \tag{3}$$

これは, 次のように表しても同じことである

$$\{x, x\} \tag{4}$$

2. x, y を元に持つ集合

$$\{x,\ y\} \tag{5}$$

これは, 次のように表しても同じことである

$$\{y,\ x\} \tag{6}$$

[5] ここで抽象(ちゅうしょう)的な説明にとどめているのは, 数学的に「厳密な」定義は些(いささ)か難しすぎるからである. このpdfでは, 後々より正確な定義に触れる

上記の例からもわかるように, 集合の元は互いに区別ができない場合, その元はただ一つ含まれていると考え, 複数の元を持つ集合は, その元に順序(じゅんじょ)[6] の区別を持たない.

集合の書き方 (中身が満たす性質を表す方法)

P は x を代入したときのみに真となり,Q は x, y を代入したときにのみ真となる式とする.
1.x を元に持つ集合

$$\{a|P(a)\} \tag{7}$$

2.x, y を元に持つ集合

$$\{a|Q(a)\} \tag{8}$$

集合 Y に含まれる元が全て集合 X に含まれている場合, 集合 Y は集合 X の部分集合(ぶぶんしゅうごう)であるという.

Y が X 部分集合であるとき, 記号 $\subset$ を用いて次のように表す.

$$Y \subset X \tag{9}$$

また, このとき X は Y の上位集合(じょういしゅうごう) であるといい, 記号 $\supset$ を用いて

$$X \supset Y \tag{10}$$

と表す.

[6] この順序という概念自体も後々定められることであるが, 直感的には読者諸氏(しょし)は把握していると思われるので, 便宜(べんぎ)上ここでこの語彙(ごい)を用いさせてもらう.

2.2 集合に対する演算

集合同士には演算と呼ばれる操作をいくつか考えることができる.

2.2.1 非交和

互いにどの元も共有していないような集合 X, Y について, それぞれに含まれる元を全て含むような集合 Z を与えることを X, Y の非交和 [7] をとる, といい, 記号 $\sqcup$ を用いて次のように表す.

$$X \sqcup Y = Z \tag{11}$$

2.2.2 和

集合 X, Y について, それぞれに含まれる元をすべて含むような集合 Z を与えることを X, Y の和をとる, またはそのような Z を X, Y の和集合 [8] である, といい, 記号 $\cup$ を用いて次のように表す. [9]

$$X \cup Y = Z \tag{12}$$

2.2.3 積

集合 X, Y について, 両方ともに含まれる元をすべて含む集合 Z を与えることを X, Y の積をとる[10], またはそのような Z を X, Y の交叉 [11] である, といい, 記号 $\cap$ を用いて次のように表す

$$X \cap Y = Z \tag{13}$$

[7]非交和を直和という操作の意味で用いる場合もあるが, 今回はその意味では用いない.

[8]合併 とも

[9]このことから明らかなように, 非交和が定義されている集合の組 X, Y について, それらの和はそれらの非交和に一致する.

[10]交叉をとる とも

[11]共通部分 とも

計算練習 A

　さて，この項目ではここまでに教えた集合の性質と演算を踏まえて，実際にいくつかの集合について計算してみよう

$\boxed{\text{A}}$ 次の集合同士が等しいかどうか答えよ

(a):

$$\{A\} \text{と} \{A, A\}$$

(b):

$$\{\{\}\} \text{と} \{\}$$

(c):

$$\{A, B, C\} \text{と} \{B, A, C\}$$

(d):

$$\{A, B, B, C\} \text{と} \{C, C, A, B\}$$

2.2.4 差

2.2.5 冪

3　多項式

4　写像

4.1　順序対

ここでは, 集合の亜種である順序対(じゅんじょつい)を紹介していく.[12]

数学的対象 a, b に対して, 次のような集合を順序対という.

$$a, a, b \tag{14}$$

また, a, b の順序対は単に (a, b) と表す.

上記の定義からも示唆されることだが, 順序対自体も数学的対象であるから, 順序対の定義は次のように拡張できる.

$$(a, (b, c)) = (a, b, c) \tag{15}$$

つまり, 順序対の入れ子として解釈することでより多くの「中身」を持つ順序対を作ることができる.

4.1.1　直積

[12] ここで提示するのは定義の一つである. 順序対の定義には複数の派閥があるが, 何(いず)れも「順序」の別があるという点では同一である.

Part II
数学基礎論

5　述語論理

5.1 一階述語論理

5.2 高階述語論理

6　公理的集合論

6.1 Zermelo-Fraenkel 集合論

6.2 選択公理

6.3　ZFC 以外の公理的集合論

7 自然数

7.1 自然数集合

次のように定められる集合 $\mathbb{N}$ を自然数集合（しぜんすうしゅうごう）という.

自然数集合の定義

$$\{\} \in \mathbb{N} \tag{16}$$

$$x \in \mathbb{N} \Rightarrow x \cup \{x\} \in \mathbb{N} \tag{17}$$

ここで, $\mathbb{N}$ の各元を自然数（しぜんすう）と呼ぶ.

7.2 自然数の大小関係

自然数について大小関係を次のように定める.

$$x \in y \Rightarrow x < y \tag{18}$$

7.3 数学的帰納法の原理

自然数について, 次の原理を認めることとする

$$(P(\{\}) \land P(x) \Rightarrow P(x \cup \{x\})) \Rightarrow \forall y[y \in \mathbb{N} \Rightarrow P(y)] \tag{19}$$

7.4 有限集合

ここで, この自然数を用いて

7.5 自然数の演算

7.5.1 後者関数

自然数について、後者関数 suc を次のように定める。

$$suc(n) = n \cup \{n\} \tag{20}$$

7.5.2 自然数の和

自然数について, 和は次のように定められる

$$x + 0 = x \tag{21}$$

$$x + suc(y) = suc(x) + y \tag{22}$$

また, 自然数について積は次のように定められる

$$x \times y = \sum_{z \in y} x \tag{23}$$

ここで，記号 $\sum$ は次のように定められているものとする[13]

$$\sum_{i \in \{\}} f(i) = \{\} \tag{24}$$

$$\sum_{i \in X \cup \{x\}} f(i) = \left(\sum_{i \in X} f(i) \right) + f(x) \tag{25}$$

7.6 自然数の表現

7.6.1 二進法

自然数の表現の一つ[14]を記号 $0, 1$ を用いて次のように再帰的に定義する．

$$\{\} = 0 \tag{26}$$

$$|\mathfrak{P}(n)| = 1\underbrace{0...0}_{n} \tag{27}$$

$$k = |\mathfrak{P}(n)| + |\mathfrak{P}(m)| + l(n > m, |\mathfrak{m}| > l) \Rightarrow k = 1\ \underbrace{0...0}_{n-m-1}\ 1\ \underbrace{0...0}_{n-m-1} \tag{28}$$

[13]少し踏み入った話をすると，ここでの定義は有限集合の場合である．無限集合の場合や，ほかの表示方法もあるが，それらはここでは説明しない．
[14]一般には 2 進法と呼ばれるもの

8　順序数

Part III
数体系

9 有理数

10　代数的数

11　実数

12　多元数

12.1　複素数

12.2 分解型複素数

12.3 二重数

12.4　その他の二元数

12.5 四元数

13　テンソル

13.1　ベクトル

13.2　行列

14　P 進数

Part IV
代数学

15　群論

Part V
解析学

16　極限

17　微分積分

Part VI
幾何学

18　Euclid 幾何学

Part VII
巻末付録

19　数学用語と英語名

公理:axiom
推論:inference
命題:proposition
定理:theorem
証明:proof
集合:set
元:element[15]
部分集合:subset
上位集合:superset
非交和:disjoint union
和集合:union
交叉:intersection[16]
順序対:ordered pair
自然数:natural number

[15] member とも
[16] meet とも

20　数学記号の LaTeX 上のコマンド

索引