木による数学基礎

新木参加木*

はじめに

この pdf の目的は，まったり数学部屋のメンバーの内，まだ数学に余り明るくない人たちが，数学の基礎的な概念に触れる際にその道標(みちしるべ)となることである．ゆえに，すでに知っている内容がある読者も存在すると思う．その時は気兼(きが)ねなくその部分を読み飛ばして欲しい．

また，形式(けいしき)的には最初に素朴(そぼく)集合論，および数の素朴集合論に基づく構成を解説[1]しているが，たいていの読者には難解(なんかい)なものとなるとも思うため，自信がなければ先に自分の目的とする項目を読んでほしいと思う．

*睡魔氏, 那国霧と同一人物

[1]この項は本来的に不完全である．というのも数学的な概念であり，かつまだ定義していない概念を説明に用いているからである．この点に於いて，Bourbaki の仕事は実に偉大なものであったと再確認したのは編集中の感想である．

Contents

Part I
数学に触れる上の前提

1　命題論理

1.1　公理, 推論, 証明

数学とは, ほとんどの場合ある公理と呼ばれるものと推論と呼ばれる手続きを定め, それらに従って物事を考えることである.

ここで

2　素朴集合論

2.1　集合に関する素朴な定義

数学的対象の集まりを集合(しゅうごう)[2]といい，集合に含まれる数学的対象をその集合の元(げん)という．

x が集合 X の元であるとき，記号 $\in$ を用いて次のように表す．

$$x \in X \tag{1}$$

あるいは，集合 X が x を元にもつとき，記号 $\ni$ を用いて次のように表すこともある．

$$X \ni x \tag{2}$$

集合を表すためには二つの書き方がある．一つは中身を全て表す方法であり，もう片方は「その元が満たす性質を書く」という方法である. 具体的にやっていこう

集合の書き方 (中身をすべて表す方法)

1.x を元に持つ集合

$$\{x\} \tag{3}$$

2. x, y を元に持つ集合

$$\{x,\, y\} \tag{4}$$

これは, 次のように表しても同じことである

$$\{y,\, x\} \tag{5}$$

上記の例からもわかるように，複数の元を持つ集合は，その元に順序(じゅんじょ)[3]の区別を持たない．

[2]ここで抽象(ちゅうしょう)的な説明にとどめているのは，数学的に「厳密な」定義は些(いささ)か難しすぎるからである．このpdf では，後々より正確な定義に触れる

[3]この順序という概念自体も後々定められることであるが，直感的には読者諸氏(しょし)は把握していると思われるので，便宜(べんぎ)上ここでこの語彙(ごい)を用いさせてもらう．

集合の書き方 (中身が満たす性質を表す方法)

P は x を代入したときのみに真となり,Q は x, y を代入したときにのみ真となる式とする.
1.x を元に持つ集合

$$\{a|P(a)\} \tag{6}$$

2.x, y を元に持つ集合

$$\{a|Q(a)\} \tag{7}$$

集合の元は互いに区別ができない場合, その元はただ一つ含まれていると考える[4].

$$X = \{x, x\} \Rightarrow X = \{x\} \tag{8}$$

集合 Y に含まれる元が全て集合 X に含まれている場合, 集合 Y は集合 X の 部分集合(ぶぶんしゅうごう) であるといい, 記号 $\subset$ を用いて次のように表す.

$$Y \subset X \tag{9}$$

また, これは X は Y の 上位集合(じょういしゅうごう) であるといい, 記号 $\supset$ を用いて

$$X \supset Y \tag{10}$$

と表す.

[4]そもそも, この一つという概念自体, 次の自然数の項で定義されることであるが, さすがに直感的には読者諸氏も知っていることであろうと思われるので, 便宜上こう説明する.

2.2 集合に対する演算

集合同士には演算（えんざん）と呼ばれる操作をいくつか考えることができる.

2.2.1 非交和

互いにどの元も共有していないような集合 X, Y について, それぞれに含まれる元を全て含むような集合 Z を与えることを X, Y の非交和（ひこうわ）[5] をとる, といい, 記号 $\sqcup$ を用いて次のように表す.

$$X \sqcup Y = Z \tag{11}$$

2.2.2 和

集合 X, Y について, それぞれに含まれる元をすべて含むような集合 Z を与えることを X, Y の和をとる, またはそのような Z を X, Y の和集合（わしゅうごう）[6] である, といい, 記号 $\cup$ を用いて次のように表す. [7]

$$X \cup Y = Z \tag{12}$$

2.2.3 積

集合 X, Y について, 両方ともに含まれる元をすべて含む集合 Z を与えることを X, Y の積をとる[8], またはそのような Z を X, Y の交叉（こうさ）[9] である, といい, 記号 $\cap$ を用いて次のように表す

$$X \cap Y = Z \tag{13}$$

[5]非交和を直和（ちょくわ）という操作の意味で用いる場合もあるが, 今回はその意味では用いない.

[6]合併（がっぺい） とも

[7]このことから明らかなように, 非交和が定義されている集合の組 X, Y について, それらの和はそれらの非交和に一致する.

[8]交叉をとる とも

[9]共通部分 とも

計算練習 A

さて, この項目ではここまでに教えた集合の性質と演算を踏まえて, 実際にいくつかの集合について計算してみよう

$\boxed{\text{A}}$ 次の集合同士が等しいかどうか答えよ

(a):

$$\{A\} と \{A, A\}$$

(b):

$$\{\{\}\} と \{\}$$

(c):

$$\{A, B, C\} と \{B, A, C\}$$

(d):

$$\{A, B, B, C\} と \{C, C, A, B\}$$

2.2.4 差

2.2.5 冪

3　多項式

Part II
数学基礎論

4　述語論理

4.1 一階述語論理

4.2 高階述語論理

5　公理的集合論

5.1 Zermelo-Fraenkel 集合論

5.2 選択公理

5.3 ZFC 以外の公理的集合論

6　自然数

6.1　自然数集合

次のように定められる集合 $\mathbb{N}$ を自然数集合（しぜんすうしゅうごう）という.

自然数集合の定義

$$\{\} \in \mathbb{N} \tag{14}$$

$$x \in \mathbb{N} \Rightarrow x \cup \{x\} \in \mathbb{N} \tag{15}$$

ここで, $\mathbb{N}$ の各元を自然数（しぜんすう）と呼ぶ.

6.2　自然数の大小関係

自然数について大小関係を次のように定める.

$$x \in y \Rightarrow x < y \tag{16}$$

6.3　数学的帰納法の原理

自然数について, 次の原理を認めることとする

$$(P(\{\}) \wedge P(x) \Rightarrow P(x \cup \{x\})) \Rightarrow \forall y[y \in \mathbb{N} \Rightarrow P(y)] \tag{17}$$

6.4　有限集合

ここで, この自然数を用いて

6.5　自然数の演算

6.5.1　後者関数

自然数について、後者関数 suc を次のように定める。

$$suc(n) = n \cup \{n\} \tag{18}$$

6.5.2　自然数の和

自然数について, 和は次のように定められる

$$x + 0 = x \tag{19}$$

$$x + suc(y) = suc(x) + y \tag{20}$$

また, 自然数について積は次のように定められる

$$x \times y = \sum_{z \in y} x \tag{21}$$

ここで, 記号 $\sum$ は次のように定められているものとする[10]

$$\sum_{i \in \{\}} f(i) = \{\} \tag{22}$$

$$\sum_{i \in X \cup \{x\}} f(i) = \left(\sum_{i \in X} f(i) \right) + f(x) \tag{23}$$

6.6 自然数の表現

6.6.1 二進法

自然数の表現の一つ[11]を記号 $0, 1$ を用いて次のように再帰的(さいきてき)に定義する.

$$\{\} = 0 \tag{24}$$

$$|\mathfrak{P}(n)| = 1\underbrace{0...0}_{n} \tag{25}$$

$$k = |\mathfrak{P}(n)| + |\mathfrak{P}(m)| + l(n > m, |\mathfrak{m}| > l) \Rightarrow k = 1\ \underbrace{0...0}_{n-m-1}\ 1\ \underbrace{0...0}_{n-m-1} \tag{26}$$

[10]少し踏み入った話をすると, ここでの定義は有限集合の場合である. 無限集合の場合や, ほかの表示方法もあるが, それらはここでは説明しない.

[11]一般には 2 進法と呼ばれるもの

7　順序数

Part III
数体系

8　有理数

9　代数的数

10　実数

11　多元数

11.1　複素数

12 テンソル

13　P 進数

Part IV
解析学

14　極限

以前のセクションにおいて書かれているかもしれないが，ここでは (実)数列の定義から始める．

14.1　数列

素朴には (実) 数列とは，以下のように実数を一列に並べたものであろう．

$$a_0, a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots \tag{27}$$

これは $\mathbb{R}$ の可算無限個の直積 $\prod_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{R}$ の元を一つ指定しているに他ならない．したがって，(実) 数列を以下のように定義する．

自然数集合 $\mathbb{N}$ から実数集合 $\mathbb{R}$ への写像 $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ を(実) 数列 と呼ぶ．
この写像の $n \in \mathbb{N}$ の像 $a(n)$ をこの数列の第 n 項と呼び，a_n とかく．
数列を $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ あるいは単に (a_n) とかく．

数列の例

1. $a_n = n$
2. $b_n = \frac{1}{n}$
3. $c_n = (-1)^n$
4. $d_n =$ 円周率 π の少数第 n 桁目．つまり $d_0 = 3, d_1 = 1, d_2 = 4, \cdots$

続いて，絶対値の定義を復習する．

実数 x に対して，その絶対値 $|x|$ を次のように定義する．

$$|x| = \max\{x, -x\} \tag{28}$$

実数列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が実数 a に 収束(しゅうそく) するとは，任意の正数(せいすう) $\varepsilon > 0$ に対して，ある自然数 n_0 が存在して，$n \geq n_0$ なる任意の自然数 n に対して，$|a_n - a| < \varepsilon$ が成り立つときをいう．
このとき，実数 a を数列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ の 極限(きょくげん) といい，

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \tag{29}$$

あるいは，

$$a_n \to a \ (n \to \infty) \tag{30}$$

とかく．数列が収束しない場合，発散(はっさん) するという．

実数列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が実数 a に収束するというのは形式化すれば

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \in \mathbb{N} \ (n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon) \tag{31}$$

となる．

数列の極限は十分大きい n によるので，有限個の項が異なることは極限に影響を与えないだろう．実際にこれが成り立つことを示そう．

実数列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ をとる．数列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ と有限個の項が異なる実数列 $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ をとる．このとき

$$a_n \to a \ (n \to \infty) \text{ ならば } b_n \to a \ (n \to \infty)$$

が成り立つ．

項が異なるのは有限個であるから，ある自然数 n_1 があって，任意の自然数 $n \geq n_1$ に対して

$$a_n = b_n$$

である．また，$a_n \to a \ (n \to \infty)$ より，任意の正数 $\varepsilon > 0$ に対して，ある自然数 n_2 があって，任意の自然数 $n \geq n_2$ に対して $|a_n - a| < \varepsilon$ が成り立つ．
$n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ とおくと，任意の自然数 $n \geq n_0$ に対して

$$|b_n - a| = |a_n - a| < \varepsilon$$

が成り立つので，$b_n \to a \ (n \to \infty)$ である．

極限の例

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \tag{32}$$

つまり，

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \in \mathbb{N} \ \left(n \geq n_0 \Rightarrow \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon\right)$$

を示せば良い. 正数 $\varepsilon > 0$ に対して自然数 n_0 を

$$n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$$

となるようにとる (アルキメデスの原理によってこのような n_0 は存在する) すると, 任意の自然数 $n \geq n_0$ に対して

$$\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon$$

が成り立つので, $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ である.

　数列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ の極限は存在すれば一意である.
いま, $a_n \to a\ (n \to \infty)$ かつ $a_n \to b\ (n \to \infty)$ とする. このとき, 任意の正数 $\varepsilon > 0$ に対して, ある自然数 n_1, n_2 があって, 任意の自然数 $n \geq n_1, n_2$ に対して

$$|a_n - a| < \varepsilon$$
$$|a_n - b| < \varepsilon$$

が成り立つ. このとき, 任意の自然数 $n \geq \max\{n_1, n_2\}$ に対して

$$|a - b| = |(a - a_n) + (a_n - b)| \leq |a - a_n| + |a_n - b| < 2\varepsilon$$

が成り立つので, $|a - b| = 0$ である. したがって, $a = b$ である.

数列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が上に有界であるとは, ある実数 M があって, 任意の自然数 n に対して

$$a_n \leq M \tag{33}$$

が成り立つことである.
数列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が下に有界であるとは, ある実数 m があって, 任意の自然数 n に対して

$$m \leq a_n \tag{34}$$

が成り立つことである.
数列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が有界であるとは, 上に有界かつ下に有界であることである.

数列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が上 (下) に有界あるいは有界とは, 言い換えれば集合

$$\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

が上 (下) に有界あるいは有界であることである.

　収束する数列は有界である.
数列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が収束するとする. その極限を a とすれば, ある自然数 n_0 があって, 任意の自然数 $n \geq n_0$ に対して

$$|a_n - a| < 1$$

が成り立つようできる. このとき, 任意の自然数 $n \geq n_0$ に対して

$$|a_n| = |a_n - a + a| \leq |a_n - a| + |a| < 1 + |a|$$

が成り立つので, $M = \mathrm{max}\{|a_0|, |a_1|, \cdots, |a_{n_0}|, 1 + |a|\}$ とおくと, 任意の自然数 n に対して

$$|a_n| \leq M$$

が成り立つので, 数列 $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ は有界である.

15　微分積分

Part V
幾何学

16 Euclid 幾何学

Part VI
巻末付録

17 数学用語と英語名

公理:axiom
推論:inference
集合:set
元:element[12]
部分集合:subset
上位集合:superset
非交和:disjoint union
和集合:union
交叉:intersection[13]
自然数:natural number
(実) 数列:real sequence

[12]member とも
[13]meet とも

18　数学記号の LaTeX 上のコマンド