# 12.1 - The Max Flow - Min Cut Theorem

# 最大流最小割问题

**在一个流网络中，从源点到汇点的最大流量等于从源点到汇点的最小割容量**。这意味着：

- 计算出源点到汇点的最大流量的方法可以用来找到一个最小割
- 计算出最小割的方法也可以帮助我们找到最大流量

这个问题的证明思路来源于 Ford-Fulkerson 算法的最优性证明，当 Ford-Fulkerson 算法在残差网络中找不到增广路径时，它找到了一个最大流

## 割（Cut）

- 割集：$C$，将图 $G$ 的节点分为两个集合 $S$ 和 $T$，其中 $s$ 在 $S$ 中，$t$ 在 $T$ 中
- 割集的容量：$c(S,T)$，是从集合 $S$ 出发的所有边的容量之和
  - 这些边的形式为 $(u,v)$，其中 $u$ 在 $S$ 中，$v$ 在 $T$ 中

### Fact 1

设 $f$ 表示从任意的源点 $s$ 到汇点 $t$ 的流；$(S,T)$ 表示任意的从 $s$ 到 $t$ 的割集
于是，$v(f)=f^{\text{out}}(S)-f^{\text{in}}(S)$

- 根据定义，$v(f)=f^{\text{out}}(s)$
- 根据定义，$f^{\text{in}}(s)=0$
- 因此，$v(f)=f^{\text{out}}(s)-f^{\text{in}}(s)$
- 对于除了 $s$ 和 $t$ 之外的每个节点 $v$，我们有 $f^{\text{out}}(v)-f^{\text{in}}(v)=0$
- 所以我们有

$$v(f)=\sum_{v\in S}\left(f^{\text{out}}(v)-f^{\text{in}}(v)\right)$$

因此我们可以知道

- 如果一条边的两个端点都在 $S$ 中，那么这条边对总流量的贡献为0，因为它的流出和流入会相互抵消
- 如果一条边的起点在 $S$ 中，那么它只计入流出，贡献值为1
- 如果一条边的终点在 $S$ 中，那么它只计入流入，贡献值为-1
- 否则，这条边不在计算范围内

故而

$$v(f)=\sum_{e\text{ out of }S}f(e)-\sum_{e\text{ into }S}f(e)$$

这意味着 $v(f)$ 可以表示为流出 $S$ 的所有边的流量之和减去流入 $S$ 的所有边的流量之和

### Fact 2

设 $f$ 是从 $s$ 到 $t$ 的任意流量；$(S,T)$ 是从 $s$ 到 $t$ 的任意割集

根据 fact 1，可以推导出 $v(f) = f^{\text{in}}(T) - f^{\text{out}}(T)$

## Fact 3

使用和 fact 2 同样的假设

对于任何从 $s$ 到 $t$ 的割集 $(S, T)$，流量的总值 $v(j)$ 小于等于割集 $(S, T)$ 的容量 $c(S, T)$

*推导*
根据 fact， $v(f) \leq f^{\text{out}}(S)$
根据定义 $f^{\text{out}}(S) = \sum_{e \text{ out of } S} f(e)$
根据容量约束，每条边上的流量不能超过该边的容量 $\sum_{e \text{ out of } S} f(e) \leq \sum_{e \text{ out of } S} c_e = c(S, T)$
于是我们证明了 fact 3

## Fact 4

设 $f$ 是 $G$ 中从 $s$ 到 $t$ 的任意流量；设残差图 $G_f$ 中没有增广路径

在这种情况下，存在一个 $(s, t)$ 割 $C(S^*, T^*)$，使得 $c(S^*, T^*) = v(f)$

*证明：*

## 构建割集

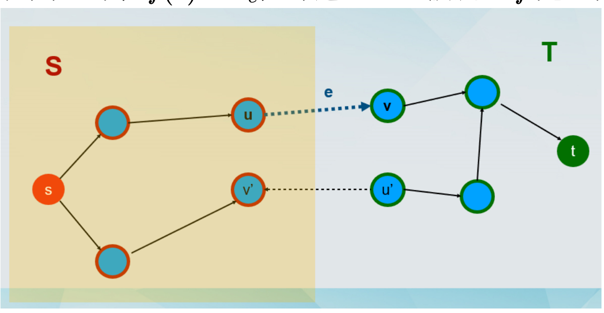
在 $G_f$ 中识别从 $s$ 可以到达的所有节点

- 将从 $s$ 可以到达的节点放入 $S^*$，间接到达的也可以
- 将剩余节点放入 $T^*$

验证构造的 $(S^*, T^*)$ 是否为一个有效的割

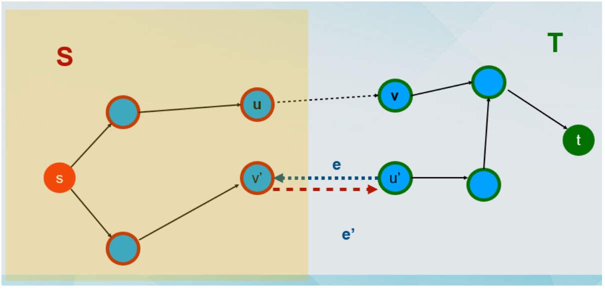
- $s$ 应该在 $S^*$ 中
- $t$ 应该在 $T^*$ 中（下面证明）

在图 $G$ 中，$f(e) = c_e$，即边 $e$ 已经被流量 $f$ 完全占满（saturated）




- 如果没被完全占满，那么在 $G_f$ 中，边 $e$ 将是一个前向边，这会导致存在从 $s$ 到 $v$ 的增广路径，但这与 $G_f$ 中没有增广路径矛盾。这意味着所有边都是被完全占满的

在图 $G$ 中，$f(e) = 0$




- 如果 $f(e) \neq 0$，那么在 $G_f$ 中，会生成一个从 $u'$ 到 $v'$ 的反向边 $e'$，这将意味着存在一条从 $s$ 到 $u'$ 的路径，这与假设中 $G_f$ 没有增广路径矛盾

因此 $t$ 应该在 $T^*$ 中

## 证明与推导

- 所有从 $S^*$ 流出的边都被 $f$ 完全占满
- 所有汇入 $S^*$ 的边在流量 $f$ 中为 0

$$\begin{aligned} v(f) &= f^{\text{out}}(S^*) - f^{\text{in}}(S^*) \\ &= \sum_{e \text{ out of } S^*} f(e) - \sum_{e \text{ into } S^*} f(e) \\ &= \sum_{e \text{ out of } S} c_e - 0 \\ &= c(S^*, T^*) \end{aligned}$$

根据 fact 4，$v(f) = c(S^*, T^*)$
Ford-Fulkerson 算法在残差网络中没有增广路径时停止
这时的流量值等于某个割的容量
因此这个流量值是最大流量

## 其他相关问题

- 如何找到流网络中的最小割的值?
    - 运行 F-F 算法，输出计算出的流量值
- 在流网络中找到一个最小值?
    - 运行 Ford-Fulkerson 算法，并查看最终的残差图
    - 将从源点 $s$ 可以到达的所有节点放入 $S$，剩余的节点放入 $T$