15 - Vertex Cover is NP-Complete

对于一个 NP-C 问题，它需要：

1. 该问题必须在 NP 中，也就是说，它有一个多项式时间可验证的解决方案
2. 该问题必须是 NP-hard 的，也就是说，NP 中的每个问题都可以有效地归约到它

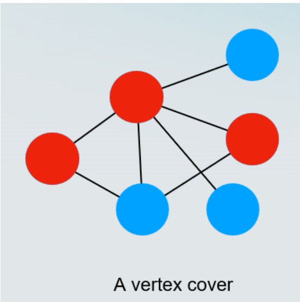
顶点覆盖（Vertex Cover）

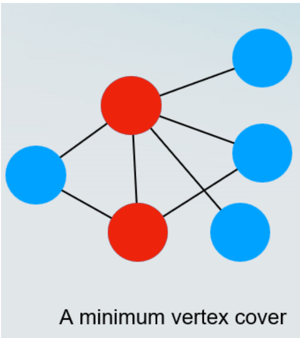
图 $G=(V,E)$ 的顶点覆盖 C 是顶点的一个子集，使得图中的每条边 e 至少有一个端点在 C 中

最小顶点覆盖是顶点覆盖中顶点数最少的一个

顶点覆盖问题：

- 输入：一个图
- 输出：一个最小的顶点覆盖





定点覆盖问题等价的判定形式（decision version）：

- 输入：一个图 G 与一个数字 k
- 输出：是否存在一个小于 k 的顶点覆盖？

P/NP

- 顶点覆盖问题在 NP 中
  - 假设我们有一个顶点覆盖
    - 我们可以在多项式时间内检查其大小为 k，并验证它确实是一个顶点覆盖
- 顶点问题是 NP-Hard 的
  - 我们将从 3-SAT 构造一个多项式时间的归约
    - 即，我们将证明 3-SAT 可以多项式归约到顶点覆盖

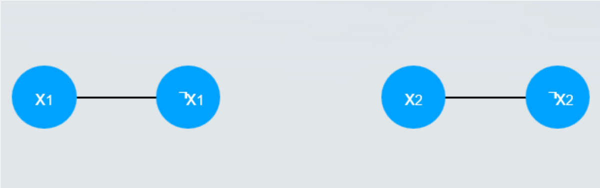
归约

设 φ 是一个具有 m 个子句和 d 个变量的 3-CNF 公式
我们在多项式时间内构造一个顶点覆盖问题的实例 $\langle G,k\rangle$，使得

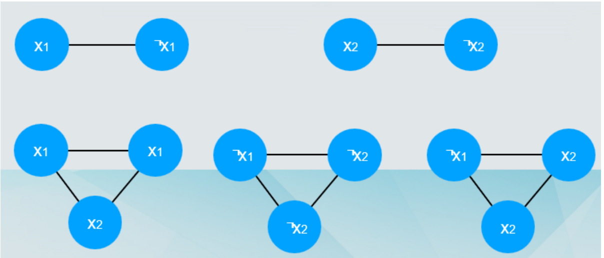
- 如果 φ 是可满足的 $\Rightarrow G$ 具有大小至多为 k 的顶点覆盖
- 如果 φ 是不可满足的 $\Rightarrow G$ 不具有大小至多为 k 的顶点覆盖

令 $\varphi = (x_1 \vee x_1 \vee x_2) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_2) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee x_2)$

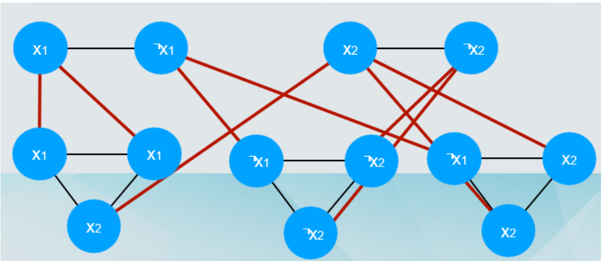
对于每个在 φ 中的变量 x，我们可以在图 G 中创建两个节点 x 和 $\neg x$，并用一条边 $e = (x, \neg x)$ 将他们连接起来



对于在 φ 中的每个 clause $l = (l_1, l_2, l_3)$，我们可以在 G 中创建三个节点 l_1, l_2, l_3，并将它们两两相连



我们在顶部和底部的所有具有相同标签的节点之间添加一条边

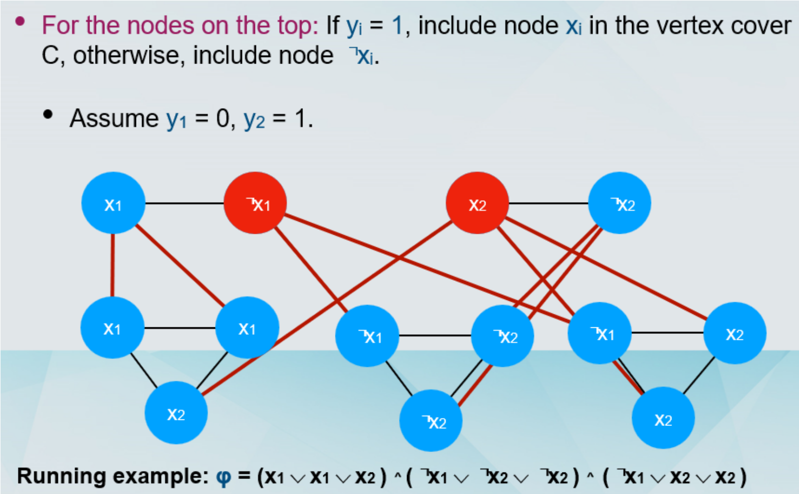


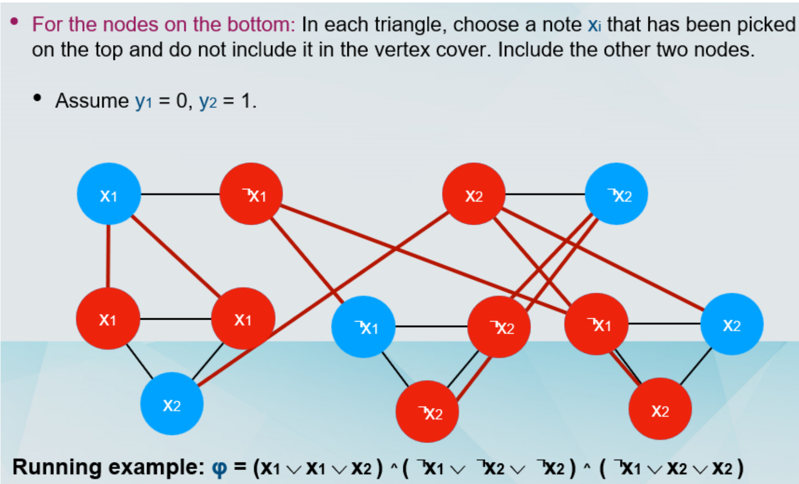
其中一个方向

如果 φ 是可满足的 $\Rightarrow$ G 具有大小至多为 k 的顶点覆盖

设 $(y_1, \ldots, y_d) \in \{0,1\}^d$ 为满足公式 φ 的一个赋值

- y_i 代表了 φ 的第 i 个变量的真值赋值
- 对于顶部的节点：如果 $y_i = 1$，将节点x_i 包含在顶点覆盖 C 中；否则包含节点 $\neg x_i$
- 对于底部的节点：在每个三角形中，选择在顶部已经选中的节点 x_i 并且不将其包含在顶点覆盖中。将另外两个节点包含在顶点覆盖中
- 顶部和底部之间的每条边：都与 C 中的某个节点相连；如果它在底部没有与任何节点相连，那是因为他在顶部被选择时跳过了





顶点覆盖的大小为 $k=d+2m$，d 为变量数量，m 为 clause 数量

- 每个变量在顶部被选择
- 对于每个 clause，我们在底部选择两个节点

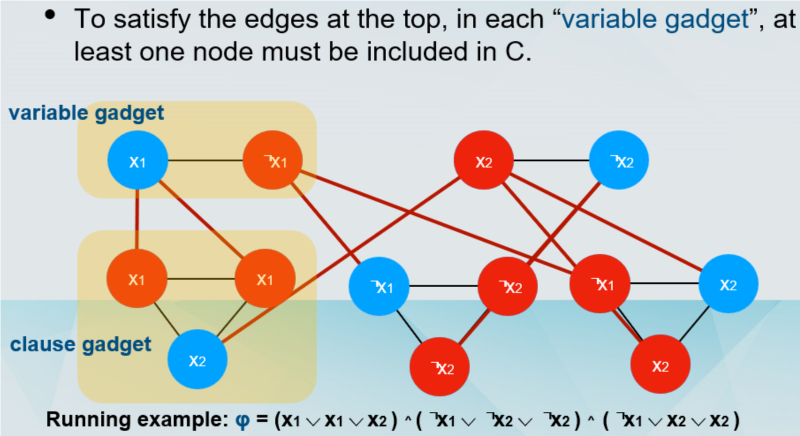
其他方向

- 如果 φ 是不可满足的 $\Rightarrow G$ 不存在大小至多为 k 的顶点覆盖
- 如果 G 存在大小至多为 k 的顶点覆盖 $\Rightarrow \varphi$ 是可满足的

如果 G 存在大小至多为 k 的顶点覆盖 $\Rightarrow \varphi$ 是可满足的

设 C 为图 G 中大小为 $k=d+2m$ 的顶点覆盖

- 因为他是一个顶点覆盖，所以在每个 clause gadget（小三角形——中，必须选择三个节点中的至少两个节点
  - 这意味着 C 中至少有 $2m$ 个节点在底部
  - 这进一步意味着 C 中最多有 d 个节点在顶部
- 为了满足顶部的边，在每个 variable gadget 中，至少有一个节点必须包含在顶点覆盖 C 中
  - 为了满足顶部和底部的边，在每个 variable gadget 中，至少有一个节点必须包含在 C 中
  - 因此，在每个 variable gadget 中，必须恰好包含一个节点在 C 中



- 考虑与顶点覆盖 C 顶部节点对应的真值赋值
  - 要么 x_1 为 1；要么 $\neg x_i$ 为 1
  - 这是因为在每个 variable gadget 中，必须只包含一个在 C 中的节点
- 由于所有的交叉边都被覆盖，C 中必须有一个在顶部的端点
  - 这意味着 clause 的 一个变量被设置为 1
  - 因此这个 clause 是满足的