

11.1 - Network Flow Definitions

流网络 (Flow Networks)

流网络是一个带有方向的图 $G = (V, E)$ ，它具有：

- 每条边 e 在边集 E 中具有一个非负的容量 c_e
 - 所有的容量都是整数
- 在节点集 V 中有一个单一的源节点 s
 - 源节点没有任何入边
- 在节点集 V 中有一个单一的汇节点 t
 - 汇节点没有任何出边
- 集合 V 中除了源节点 s 和汇节点 t 之外的所有其他节点称为内部节点
 - 每个节点至少有一条关联的边

流 (Flow)

- 一个 $(s-t)$ 流是一个函数 $f: E \rightarrow \mathbb{R}^+$ ，将每条边 e 映射到一个非负实数 $f(e)$
 - 为流网络中的每一条边 e 分配一个非负的流量值 $f(e)$ ，这个值表示通过这条边的流量大小
- 一个可行的流必须满足：
 - 容量约束 (Capacity Constraint)：对于每条边 $e \in E$ ，有 $0 \leq f(e) \leq c_e$
 - 这意味着流量不能超过边的容量
 - 流量守恒 (Flow Conservation)：对于每个在 $V - \{s, t\}$ 中的节点 v ，有

$$\sum_{e \text{ into } v} f(e) = \sum_{e \text{ out of } v} f(e)$$

- 这意味着对于每个节点，进入该节点的总流量等于离开该节点的总流量，确保流量在节点处的守恒
- 源节点 s 产生流
- 汇节点 t 吸收流
- 流量 f 的值记为 $\text{val}(f)$ ，这是从 s 节点流出的总流量，公式为：

$$\text{val}(f) = \sum_{e \text{ out of } s} f(e)$$

- 一般地，定义 $f^{\text{out}}(v)$ 和 $f^{\text{in}}(v)$ 分别表示流出和汇入节点 v 的流量
- 类似地，定义 $f^{\text{out}}(S)$ 和 $f^{\text{in}}(S)$ 分别表示流出和汇入节点集 S 的流量

最大流问题 (The Maximum Flow Problem)

最大流问题的定义是：给定一个流网络 G ，找到一个流，使其流量值达到最大