17 - Linear Programming

线性规划

- 公司生产两个产品，X 和 Y，使用两台机器，A 和 B
  - 每单位产品 X 需要在机器 A 上加工 50 分钟，在机器 B 上加工 30 分钟
  - 每单位产品 Y 需要在机器 A 上加工 24 分钟，在机器 B 上加工 33 分钟
- 在一周开始时，库存中有 30 单位的 X 和 90 单位的 Y
- 机器 A 的可用加工时间为 40 小时，机器 B 的可用加工时间为 35 小时
- 本周对产品 X 的需求为 75 单位，对产品 Y 的需求为 95 单位
- 目标：最大化一周结束时库存中 X 和 Y 的单位总和

目标约束：

$$\text{Maximise } (x + 30 - 75) + (y + 90 - 95)$$

其中：

- x 是本周生产的X的单位数量
- y 是本周生产的Y的单位数量
- 初始库存：X 有 30 单位，Y 有 90 单位
- 需求量：X 是 75 单位，Y 是 95 单位

时间约束：

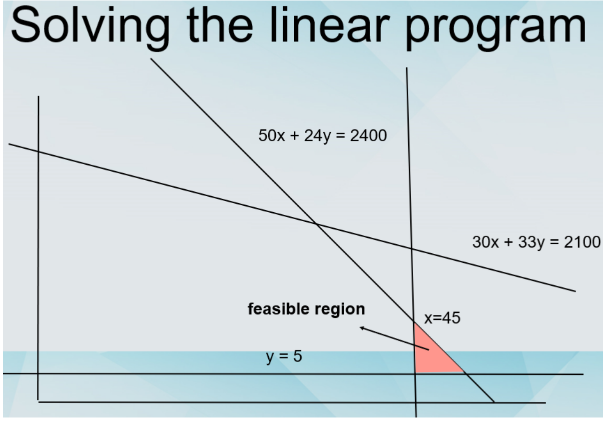
$$\begin{aligned} 50x + 24y &\leq 2400 \\ 30x + 33y &\leq 2100 \end{aligned}$$

需求约束：

$$\begin{aligned} x &\geq 75 - 30 \\ y &\geq 95 - 90 \end{aligned}$$

因此我们便得到了一个正规的线性规划：

$$\begin{aligned} \text{Maximise} \quad & x + y - 50 \\ \\ \text{subject to} \quad & 50x + 24y \leq 2400 \\ & 30x + 33y \leq 2100 \\ & x \geq 45 \\ & y \geq 5 \end{aligned}$$



（什么小学题）

解决线性规划问题

- 要找到最优解，只需检查可行区域的顶点
  - 这些顶点是由约束条件定义的线的交点
- 这些是约束条件定义的线的交点

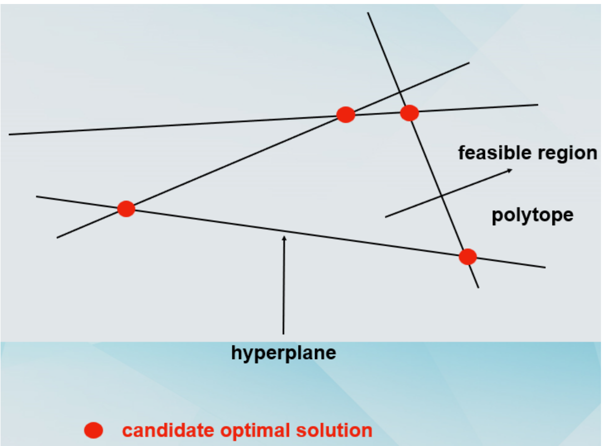
线性规划的数学表达

$$\begin{aligned} &\text{maximise} && \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ &\text{subject to} && \sum_{j=1\in}^{n} \alpha_{ij} x_j \leq b_i,\ i = 1, \ldots, m \\ & && x_j \geq 0,\ j = 1, \ldots, n \end{aligned}$$

矩阵形式：

$$\begin{aligned} &\text{maximise} && c^T x \\ &\text{subject to} && Ax \leq b \\ & && x \geq 0 \end{aligned}$$

可行域



求解线性规划

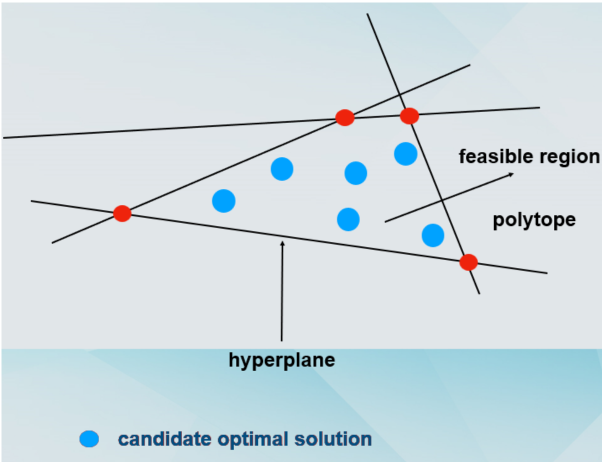
- 为了找到最优解，只需检查可行区域（feasible region）的顶点
  - 这些顶点是由约束条件定义的直线的交点

- 单纯形法（Simplex method）通过枢轴运算（pivoting）来实现这一点，即在可行区域的顶点之间移动以寻找最优解

如果我们能够将问题表述为线性规划，那么我们就可以在多项式时间内解决它

整数线性规划（Integer Linear programming, ILP）

$$\begin{aligned}
\text{maximise} \quad & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\
\text{subject to} \quad & \sum_{j=1\in}^{n} \alpha_{ij} x_j \le b_i,\ i = 1, \ldots, m \\
& x_j \ge 0,\ j = 1, \ldots, n \\
& x_j \text{ is integer}
\end{aligned}$$



求解 ILP

- 角点不一定是整数解
  - 仅仅查看角点是不够的
- 我们可以穷举所有可能的整数解
- 我们能做得更聪明吗?
  - 可以，但在最坏情况下，许多整数线性规划问题仍然需要指数时间
- 一般来说，求解整数线性规划是NPhard的

对偶性（Duality）

- 假设我们有一个线性规划，我们称之为原问题（the primal）
- 我们将构造另一个线性规划，称之为对偶问题（the dual）
- 原问题的变量变成对偶问题的约束，反之亦然
- 最大化变成最小化
- 这两个线性规划将具有非常重要的联系

The Primal

$$\begin{aligned} \text{maximise} \quad & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \text{subject to} \quad & \sum_{j=1\in}^{n} \alpha_{ij} x_j \leq b_i, \; i = 1, \ldots, m \\ & x_j \geq 0, \; j = 1, \ldots, n \end{aligned}$$

The Dual

$$\begin{aligned} \text{minimise} \quad & \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \\ \text{subject to} \quad & \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} y_i \geq c_j, \; i = 1, \ldots, n \\ & y_j \geq 0, \; j = 1, \ldots, m \end{aligned}$$

弱对偶性（Weak Duality）

设 x 是原问题（the Primal）的任意可行解，设 y 是对偶问题（the Dual）的任意可行解。那么我们有

$$\text{value}(x) \leq \text{value}(y)$$

在最大流最小割定理中，最大流的值等于最小割的值，弱对偶性告诉我们：
设 f 是任意的 s 到 t 的流，设 (S, T) 是任意的 s 到 t 的割。则我们有 $v(f) \leq c(S, T)$

强对偶性（Strong Duality）

设 x 是原问题（the Primal）的任意可行解，设 y 是对偶问题（the Dual）的任意可行解。那么我们有

$$\text{value}(x) = \text{value}(y)$$

那么 x 和 y 都是最优解

我们如何证明原始问题的解是最大值?
找到对偶问题的解，如果它等于原问题的解，那么就是最大值
最大流最小割问题就是一个典型例子

单纯形法（Simplex method）

- 单纯形法从某个可行解开始，可能是点 $(0, \ldots, 0)$
- 通过每一步的“pivoting”（枢轴操作）改进解，直到无法进一步改进
- 为了证明解是最优的，我们使用对偶性理论（duality）

最大流问题的线性规划

构建线性规划（最大流）

$$\begin{aligned} \text{maximise} \quad & \sum_{v \in V} f_{sv} - \sum_{v \in V} f_{vs} \\ \text{subject to} \quad & f_{uv} \leq c_{uv}, \; \forall u, v \in V \\ & \sum_{v \in V} f_{vu} - \sum_{v \in V} f_{uv}, \; \forall u \in V - \{s, t\} \\ & f_{uv} \geq 0, \; \forall u, v \in V \end{aligned}$$

其中：

- 第一行是流出 s 的流减去汇入 s 的流
- 第二行是边的流量小于等于对应的容量
- 第三行是流量守恒约束
- 第四行是非负约束

构建对偶（最小割）

$$
\begin{aligned}
\text{minimise} \quad & \sum_{u,v \in E} c_{uv} d_{uv} \\
\text{subject to} \quad & d_{uv} - z_u + z_v \geq 0, \ \forall (u,v) \in E, u \neq s, v \neq t \\
& d_{su} + z_v \geq 1, \ \forall (s,u) \in E \\
& d_{ut} - z_u \geq 0, \ \forall (u,t) \in E \\
& d_{uv} \geq 0, \ \forall (u,v) \in E \\
& z_u \geq 0, \ \forall u \in V - \{t,s\} \\
& d_{uv} \in \{0,1\}, \ \forall (u,v) \in E \\
& z_u \in \{0,1\}, \ \forall u \in V - \{s,t\}
\end{aligned}
$$

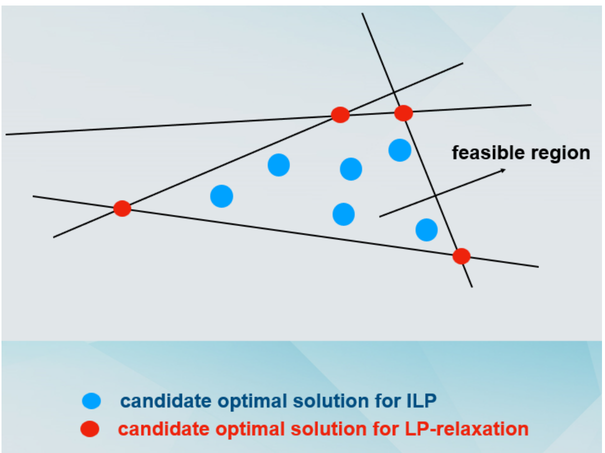
其中：

- 第一行的 d 是
    - 如果 $u \in S, v \in T$，等于 1
    - 其他，等于 0
- 第二行的 z 是
    - 如果 $u \in S$，等于 1
    - 其他，等于 0
- 第二行的 d 与第一行的 d 定义相同
- 第三行 d 是，如果 $v \in T$，那么 d 必须为 1
- 第四行 d 是，如果 $u \in S$，那么 d 必须为 1

LP 松弛（LP-relaxation）

一个整数线性规划（ILP）的 LP 松弛是一个线性规划，除了所有的整数约束已经被移除（"松弛"），或者被非整数约束替代外，它与整数线性规划完全相同

对于上面最小割的整数线性规划，其 LP 松弛就是把最下面的整数约束松弛成实数或者其他的非整数约束



LP 松弛与 ILP

对于一个最大化问题：

- ILP 的最优值不大于 LP 松弛的最优值
- 比率

$$\frac{\text{max\_value(LP-relaxation)}}{\text{max\_value(ILP)}}$$

  被称为 LP 公式的整数差距（integrality gap）

最大流最小割的线性规划总结

- 最大流线性规划（Max-Flow LP）和最小割线性规划松弛（Min-Cut LP-relaxation）是互为对偶的
- 通过**强对偶性**，Max-Flow LP的最优值等于Min-Cut LP-relaxation的最优值
- 根据**最大流-最小割定理**，最大流的值等于最小割的容量
- 这只能意味着一件事：
  - Min-Cut LP-relaxation的值等于Min-Cut LP的值
  - 换句话说，Min-Cut LP公式的整数差距为1
  - 换句话说，Min-Cut LP有一个整数最优解
- 如果我们求解这些线性规划松弛（LP-relaxations），我们将得到整数解（integer solutions）

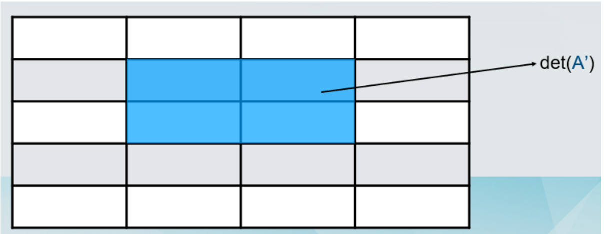
让我们回到最大流问题

$$\begin{aligned}
\text{maximise} \quad & \sum_{v\in V} f_{sv} - \sum_{v\in V} f_{vs} \\
\text{subject to} \quad & f_{uv} \le c_{uv},\ \forall u,v \in V \\
& \sum_{v\in V} f_{vu} - \sum_{v\in V} f_{uv},\ \forall u \in V - \{s,t\} \\
& f_{uv} \ge 0,\ \forall u,v \in V \\
& f_{uv} \in \mathbb{R},\ \forall u,v \in V
\end{aligned}$$

如果我们希望流量是整数而不是任意流量，该怎么办？
这个整数线性规划（ILP）的线性规划松弛（LP-relaxation）总是有整数解吗？

完全酉模矩阵（totally unimodular）

设 A 为一个 $m \times n$ 的实矩阵
假设 A 的每个方子矩阵（即从 A 中任取若干行列构成的子矩阵）的行列式（determinant）均属于集合 $\{0,+1,-1\}$
那么矩阵 A 称为完全酉模矩阵（totally unimodular）



这之后的页面被划掉了，应该是不考，不写了就