# 02.3 - Running Time of Divide & Conquer

## Master Theorem

假设 $T(n) \leq \alpha T\left(\lceil\frac{n}{b}\rceil\right)+O\left(n^d\right)$，对于某些常数 $\alpha>0, b>1, d \geq 0$，那么：

$$T(n)= \begin{cases}O\left(n^d\right), & \text { if } d>\log _b \alpha \\ O\left(n^d \log _b n\right), & \text { if } d=\log _b \alpha \\ O\left(n^{\log _b \alpha}\right), & \text { if } d<\log _b \alpha\end{cases}$$

其中，$\log _b \alpha=\frac{\ln \alpha}{\ln b}$

## Mergesort

```
Merge(A, B)
init array C of size n+m //|A| = n, |B| = m
i = 1, j = 1
for k = 1, ..., m+n-1
        if A[i] <= B[j]
                C[k] = A[i]
                i = i+1
        else
                C[k] = B[j]
                j = j+1

Mergesort(A[i, ..., j])
if i = j, return i
q = (i+j)/2
A_left = Mergesort(A[i, ..., q])
A_right = Mergesort(A[q+1, ..., n])
return Merge(A_left, A_right)
```

## Mergesort 时间复杂度

易得，Merge 部分时间复杂度：$O(n+m)$
对 Mergesort 部分应用 Master Theorem：

$$\begin{gathered} T(n) \leq 2 T\left(\frac{n}{2}\right)+c n \\ \Downarrow \\ \alpha=2, b=2, \log _b \alpha=1, d=1 \\ \Downarrow \\ O(n \log n) \end{gathered}$$

## Master Therom 的问题

对于 $T(n) \leq 3 T\left(\frac{n}{2}\right)+n^{\log _2 3}\left(\log _2 n\right)^k$，我们得到 $T(n)=O\left(n^{\log _2 3+\epsilon}\right)$
对于 $\forall \epsilon>0$，这个复杂度并不紧（$n^2$ 与 $n^3$ 的区别非常大）
因此我们不能直接套公式

*归纳法：*
我们希望解决：

$$T(n) \le 3T(\frac{n}{2}) + n^{\log_2 3}(\log_2 n)^k$$

我们需要证明：

$$T(n) \le Cn^{\log_2 3}(\log_2 n)^{k+1}$$

对于某些 $c \ge 1$

**Base case：**

$n = 2$

$$T(2) = C \le C \times 2^{\log_2 3}(\log_2 2)^{k+1} = 3C$$

**Inductive step：**

假设（归纳假设）

$$T(\frac{n}{2}) \le C\left(\frac{n}{2}\right)^{\log_2 3}\left(\log_2\left(\frac{n}{2}\right)\right)^{k+1}$$

对于 $T(n)$，有

$$\begin{aligned}
T(n) &\le 3T\left(\frac{n}{2}\right) + n^{\log_2 3}(\log_2 n)^k \\
&\le 3C\left(\frac{n}{2}\right)^{\log_2 3}\left(\log_2\left(\frac{n}{2}\right)\right)^{k+1} + n^{\log_2 3}(\log_2 n)^k \\
&= Cn^{\log_2 3}(\log_2 n - 1)^{k+1} + n^{\log_2 3}(\log_2 n)^k \\
&\le Cn^{\log_2 3}(\log_2 n - 1) \times (\log_2 n)^k + n^{\log_2 3}(\log_2 n)^k \\
&= Cn^{\log_2 3}(\log_2 n)^{k+1}
\end{aligned}$$